25

2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

JOURDAIN Y EL PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

María Estela Navarro Robles

INDICE

INTRODUCCION

El propósito de esta tesis es realizar un análisis histórico de algunos de los trabajos que llevó a cabo Philip Jourdain (1879-1919), en torno al Principio del Buen Orden y el Axioma de Elección.

Escribir una tesis en el área de Historia de las Matemáticas, no es una práctica común en nuestro medio. Sin embargo, el conocer los escritos originales -así como las circunstancias en que surgieron-, ayudan a entender el desarrollo y evolución de la lógica matemática y por lo tanto de las matemáticas mismas.

Es un hecho que la historia tiene una gran labor en la teoría del conocimiento de la humanidad, en partícular en el conocimiento de las matemáticas, detrás de cada definición ó de cada teorema existen muchas ideas precedentes que le dan sentido.

A finales del siglo pasado, algunos matemáticos como Cantor, Dedekind, Zermelo, entre otros, trabajaban en una teoría que actualmente se conoce como la teoría de los conjuntos, cuyo fundador fué Cantor. Dicha teoría nació básicamente como un intento por desarrollar una sistematización de los números, que pretendía simplificar algunos conceptos de la teoría de funciones en partícular.

En esta época, las matemáticas sufrieron cambios en su concepción, uno de los cuales consistió en la introducción del infinito actual como un objeto matemático real; ya que en las matemáticas anteriores a la teoría de conjuntos, se le consideraba al infinito, prácticamente, como un ente filosófico.

En este marco, se presenta un problema crucial dentro de la teoría de conjuntos:

¿Todo conjunto se puede bien ordenar? Este enunciado, aparentemente inofensivo, creó una gran polémica en las matemáticas de principios de este siglo. Cantor en un principio lo considera como una "ley del pensamiento" válida. El verdadero problema lo presentaban los números con un número infinito de elementos. Zermelo soluciona afirmativamente este problema convirtiéndolo en el Teorema del Buen Orden, utilizando un principio conocido como el Axioma de Elección. Es a raíz de la demostración de Zermelo que surge una gran polémica en matemáticas.

Es notable el hecho de que a finales del siglo pasado, diversos matemáticos no sólo trabajaban en lo que hoy conocemos por matemáticas, también se interesaban en problemas de fundamentación, hacían filosofía; un ejemplo concreto es Cantor, quien al definir número cardinal utiliza frases tales como "proceso de abstracción de nuestro pensamiento", lo cual resulta ambiguo en el terreno matemático, ¿cómo podemos garantizar que esta definición se ajusta de igual modo a todos los matemáticos?

Jourdain, perteneciendo a esta época, se ajusta al tipo de matemático de fines del siglo pasado, un ejemplo de esto lo muestra en una disgreción que realizó acerca de lo que significa una demostración.

Jourdain aparece en el medio matemático, cuando esta abierto el Problema del Buen Orden, el cual llama su atención muy partícularmente; aquí se analizarán algunos de sus intentos por demostrar el Teorema del Buen Orden, que pretenden ser independientes del Axioma de Elección.

El estudio histórico del Teorema del Buen Orden es un ejemplo muy concreto de como el desarrollo de un hecho determina la dirección a seguir en las matemáticas, pues, muestra la bifurcación de una teoría, que genera nuevos caminos, como son las distintas axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, que a su vez son base para las distintas ramas de las matemáticas.

En cuanto a la estructura de la tesis, está dividida en dos capítulos: en el primero se desarrollan los fundamentos de la teoría de conjuntos, desde sus antecedentes, hasta los resultados más importantes, concernientes al Teorema del Buen Orden, obtenidos hasta fines del siglo pasado. Este capítulo se divide en cinco secciones, las cuatro primeras expresan históricamente, el desarrollo de la Teoría de Conjuntos, la quinta analiza la historia general del Teorema del Buen Orden.

El segundo capítulo, analiza la relación de Jourdain, personaje central de esta tesis, con el Teorema del Buen Orden a través de cuatro secciones, en la primera aparece una breve biografía de Jourdain, en la segunda se analizan cuatro intentos por demostrar el Teorema del Buen Orden, señalando sus errores, en la tercera se comparan las demostraciones al Teorema del Buen Orden, presentadas por Jourdain y Zermelo, y, finalmente, en la cuarta, se presenta una visión general de como concebía las matemáticas Jourdain.

Es así como se presenta esta tesis, con la intención de recordar que quien hace la ciencia es el ser humano y que no es fortuito haber llegado justamente al actual conocimiento de las matemáticas que poseemos.

"La esencia de las matemáticas

está precisamente en su libertad"

-Cantor-

CAPITULO 1

HISTORIA
DE LA
TEORIA DE CONJUNTOS
Y
EL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

1.1 ANTECEDENTES DE LA TEORIA DE CONJUNTOS

La Teoría de los Conjuntos tiene su origen en los trabajos de la Teoría de las Funciones (Análisis Matemático), a la cual numerosos matemáticos dedicaron sus esfuerzos.

Fourier trabajó en la continuidad de la convergencia de series infinitas. En 1822, presentó un trabajo en el que mostró que toda curva con un número finito de discontinuidades tiene una expresión como suma de una serie trigonométrica infinita en todo un intervalo; lo cual quiere decir que la función se puede aproximar tanto como se desee por sumas de senos y cosenos salvo en los puntos de discontinuidad; lo que se expresa en lenguaje matemático, como que la serie converge a la función casi en todos los puntos.

Para ejemplificar la idea de una función que puede aproximarse tanto como se desee por series trigonométricas infinitas, se da a continuación, una función desarrollada en sus primeros términos de la serie trigonométrica, y la representación geométrica de distintas aproximaciones, variando el número de sumandos dados de la serie.

$$\phi(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ -\pi - x & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

El desarrollo de $\phi(x)$ en series trigonométricas es:

El trabajo de Fourier sobre series trigonométricas es de gran importancia para las matemáticas, ya que sugiere que ciertas funciones con expresiones complicadas pueden reducirse a funciones más manipulables matemáticamente, representadas por series de senos y cosenos. Así, Fourier contribuyó al desarrollo de la teoría de las funciones, de la que cronológicamente es su primer gran representante.

Las investigaciones de Fourier tienen gran influencia en el desarrollo posterior de la teoría de las funciones, de la cual se distinguen dos ramas en su evolución; por un lado, Dirichlet da una fundamentación rigurosa de los resultados de Fourier en series trigonométricas, lo cual conduce a las investigaciones de la concepción general de función univaluada de variable real y al desarrollo de funciones, en partícular trigonométricas. El otro de los campos de investigación en teoría de las funciones, fue impulsado por Cauchy, quien desarrolló la concepción de una función de variable compleja.

Riemann continuó ambas líneas de investigación, en donde hizo grandes contribuciones; trabajó en la generalización a la solución parcial de Dirichlet al problema del desarrollo de una función de variable real en series trigonométricas, cuyos resultados los publicó en *Habilitationsschrift* en 1854.

La influencia de este escrito de Riemann fue decisiva en las investigaciones posteriores. Por ejemplo, Hankel en 1870 escribió un artículo sobre la teoría de las funciones de variable real en su relación con la teoría de Riemann de las funciones de variable compleja, lo que lo condujo a fundar la teoría independiente de funciones de variable real.

Paralelamente, Heine, influenciado por el *Habilitationsschrift*, inició nuevas investigaciones sobre series trigonométricas mientras trabajaba en la Universidad de

Halle. Uno de sus principales resultados es que toda función puede ser representada por una serie trigonométrica única si la función es continua casi en todos los puntos y la serie trigonométrica es uniformemente convergente casi en todos los puntos.

Weierstrass, contemporáneo de Riemann, trabajó en la Universidad de Berlín, en la teoría de las funciones de variable compleja. Motivado por el deseo de crear una sólida fundamentación de esta teoría, poniendo atención a su tratamiento sistemático, realizó un profundo análisis de los fundamentos de la aritmética, el gran resultado de sus investigaciones fue su teoría de números irracionales, de gran trascendencia para la formación de lo que sería la teoría de conjuntos cantoriana. Los siguientes resultados son expuestos por Jourdain, en su introducción a las memorias de Cantor de 1895 y 1897. (Jourdain,1915,10-23)

En la aritmética preweistrassiana se considera a los números irracionales como límites de sumas infinitas de números racionales. Weierstrass advierte que antes de él, la idea de número irracional tiene asociada, implícita ó explícitamente, una base geométrica; lo que hace que para algunos matemáticos la existencia de los irracionales en la recta sea geométricamente intuitiva.

Weierstrass, no convencido de esta concepción de los números irracionales, demuestra que es innecesario definir los reales por medio de un proceso de ir al límite, (los racionales se pueden considerar como límites de sumas infinitas de los racionales derivados de la descomposición en expansión decimal de los racionales mismos); ya que esta definición de límites de sumas infinitas presupone que el límite existe, y para esto se requiere que esté definido el sistema de números reales, lo que guía a un círculo vicioso. Esto constituye el error lógico de la aritmética preweierstrassiana.

Para evitar el error mencionado, Weierstrass define todo un sistema de los números reales, definiendo lo que él llama cantidades numéricas, por medio de agregados ó conjuntos, estableciendo las operaciones de suma y producto para los mismos, este sistema es el precursor al sistema de números transfinitos, empleado por Cantor.

1.2 CANTOR Y SU TEORIA DE NUMEROS TRANSFINITOS

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), fué un matemático, fundador de la Teoría de Conjuntos, que nació en Leningrado, y se trasladó a Alemania en 1856, Cantor es conocido en el medio científico como un mítico personaje. La leyenda cuenta que fue víctima de su propia Teoría, y murió en un manicomio.

Es cierto que toda su vida padeció ciertos colapsos nerviosos, cada vez más frecuentes, y que pronto se manifestaron como psicosis maniáco-depresiva, enfermedad que lo recluyó en la Halle Nervenklinik, por largos años. Pero, contrariamente a la suposición tradicional algunos historiadores consideran que su enfermedad fué independiente de su Teoría.

Cantor estudió en la Universidad de Berlín, en la cual se doctoró en 1868. Las enseñanzas de su profesor Weierstrass influyeron en Cantor, de tal modo que uno de sus primeros escritos se desarrolla dentro de la teoría de los números irracionales; la cual utilizó en sus investigaciones posteriores sobre series trigonométricas. Otro escrito que influyó en las investigaciones de Cantor sobre series trigonométricas, fué la memoria de Hankel de 1870.

Justo en ese año, la Universidad de Halle le ofreció a Cantor el puesto de *Privatdozent*, en donde Heine lo animó a trabajar en el problema de unicidad de series trigonométricas.

Cantor demostró en 1870, que si una función es continua, su representación trigonométrica es única; y en 1872, demostró que si una función tiene tantos puntos excepcionales (puntos de discontinuidad) de tal forma que se encuentren distribuidos en el eje X de una forma específica (puede haber incluso un número infinito de ellos), entonces la función tiene representación trigonométrica única.

Es en la solución a este problema, donde comienza a vislumbrarse la Teoría de Números Transfinitos. Cantor tenía que encontrar una distribución específica del conjunto de puntos en el eje X; es ahí cuando Cantor comienza a trabajar en el continuo de la recta de números reales; tema en el que también trabajaba Dedekind, quien había llegado a resultados importantes, como el de que hay menos números racionales que reales, aunque desconocía la diferencia de los tamaños.

Fundamentalmente, el trabajo de Cantor que enmarca su Teoría de Conjuntos, se desarrolla en dos direcciones íntimamente ligadas, que categorizan lo que sería la Teoría de Conjuntos Infinitos y la Teoría de Números Transfinitos. La primera da los elementos de la Teoría, que son los conjuntos, los cuales define y, algo muy importante, los provee de operatividad, lo cual es una innovación; la segunda dirección está determinada por "el proceso de abstracción", como Cantor define a la asociación de los conjuntos con imágenes de nuestra mente, que desemboca en los conceptos aritméticos originados por los conjuntos y sus propiedades, tales como número cardinal, tipo ordinal, número ordinal y sus operaciones respectivas.

Una gran aportación de la Teoría de Conjuntos a las Matemáticas, fué la introducción del infinito actual * en esta ciencia; aunque justamente coincide con el mayor obstáculo con el que se enfrentó esta Teoría para lograr ser aceptada.

El tema del infinito, en aquella época, estaba cargado de toda una tradición filosófica, teológica y científica, y se consideraba que dentro de las Matemáticas el infinito sólo podía concebirse como algo inalcanzable, que se salía del contexto de las entidades matemáticas, lo que filosóficamente es conocido como el infinito potencial ó, como Cantor lo llama, infinito impropio.

Cantor al comenzar a utilizar sus números transfinitos, rompe con las tradiciones y prejuicios que rodeaban al infinito, pues le da en Matemáticas una nueva categoría, se le comienza a considerar como una entidad matemática dotada de operatividad.

Al mismo Cantor le costó trabajo dejar atrás los prejuicios que tenía sobre el infinito; pero llegó a sus números transfinitos en una forma tan natural, que los admitió como consistentes, y los prejuicios que llegó a tener en cierto momento, sirvieron para que comprendiendo mejor su teoría, tuviera argumentos para presentarla de una manera sólida y estuviera preparado para las posibles objeciones de sus contemporáneos.

Como se describe anteriormente, Cantor comienza a trabajar en la teoría de las funciones, con un problema de unicidad, que desemboca en su teoría. El problema concreto que le hizo tener que "contar" conjuntos infinitos fue el de tratar de encontrar una distribución partícular para un cierto conjunto infinito en el continuo de la recta de números reales; para lo cual tuvo que entrar de lleno en el sistema de números reales.

---

* El cual Cantor ejemplifica diciendo: "En la investigación de las funciones analíticas de variable compleja, ha llegado a ser una práctica necesaria y común, imaginar en el plano que representa la variable compleja, un punto singular, infinitamente distante, pero determinado, y se investiga el comportamiento en una vecindad de este punto, como en la vecindad de cualquier otro punto" (Cantor,1883,70).

Desarrolló una sistematización, en la que, en cierta medida, retomó algunos elementos de la teoría de números irracionales desarrollada por su profesor Weierstrass, con el que coincide en varios puntos. Cantor no estaba de acuerdo en presuponer la existencia de los irracionales como límites de sucesiones infinitas de racionales, considera axiomático que a cada punto del continuo de una recta le corresponde un número real, y viceversa, y a partir de este axioma, construye una definición de los números reales por medio de sucesiones fundamentales, de la siguiente manera, como lo describe Jourdain en [Jourdain 1915,26-29]

1.21 Definición

Sea A el conjunto de los números racionales $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$. Si para toda n suficientemente grande, y para toda m se tiene que el valor absoluto de $a_{n+m} - a_n$ es menor que ϵ para toda ϵ que pertenezca a A y $\epsilon > 0$ entonces $\{a_n\}$ es una <u>sucesión fundamental</u>.

Ahora,si a la sucesión fundamental $\{a_n\}$ se le asocia un número b y a la sucesión fundamental $\{a'_n\}$ se le asocia un número b', se considera que $b = b'$ si $a_n - a'_n$ es muy pequeño al aumentar n.

Sea B igual al conjunto de elementos asociados a las sucesiones fundamentales. Si se toman sucesiones fundamentales $\{b_n\}$ de elementos b_n de B, se asocia a cada sucesión fundamental $\{b_n\}$ de B un elemento c de un nuevo dominio C, y así se construyen dominios de orden superior.

Los números reales son obtenidos por Cantor, como λ-construcciones de estos dominios, que claramente contienen a los números racionales. Es importante aclarar que "las sucesiones fundamentales no tienden a un número sino que se identifican con él" [Waldegg 1987,182]. Esto hace la diferencia con los sistemas preweierstrassianos y será una caracterización del sistema de los números transfinitos, que de alguna forma surge como una extensión de los números reales.

En 1872, Cantor define por primera vez, una operación realizada sobre conjuntos, la derivación de un conjunto, la cual utiliza para describir los conjuntos de puntos que necesitaba para su solución al problema de unicidad, y establece las siguientes definiciones:

1.22 Definición

Sea P un conjunto de puntos, un <u>punto</u> p es <u>de acumulación</u>, si un número infinito de puntos de P cae dentro de cualquier entorno, por pequeño que sea, (puede suceder que p no pertenezca al conjunto P).

1.23 Definición

Dado un conjunto P, su <u>primer conjunto derivado</u> P', es el conjunto de todos los puntos de acumulación de P.

1.24 Definición

Dado un conjunto P, su <u>n-ésimo conjunto derivado</u> $P^{(n)}$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $P^{(n-1)}$.

Cantor en su demostración del teorema de unicidad, describe los conjuntos infinitos, en donde la función puede ser discontinua, como los conjuntos P, de puntos de la recta, tales que para alguna n, $P^{(n)}$ consiste en un número finito de puntos.

Gran parte de los resultados importantes de la Teoría de Conjuntos tienen que ver con la comparación de conjuntos por su tamaño, uno de estos resultados, que Cantor demostró es que los conjuntos infinitos tienen la propiedad de poderse poner en correspondencia biunívoca con algún subconjunto propio de ellos.

Así se obtienen las propiedades básicas del continuo de la recta de números reales, tales como que:" El conjunto de los números reales no puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales"; lo cual Cantor demostró en 1873, y fué publicado en el *Journal de Crelle* en 1874, usando por primera vez los conceptos de numerabilidad y potencia,* los cuales son la base para la clasificación de conjuntos en su Teoría; aunque el concepto de potencia no tiene aún la fuerza que adquirirá más tarde, pues Cantor no había considerado la posibilidad de que este concepto fuera tratado como número.

Siguiendo sobre la misma línea, Cantor en 1877, hizo otra importante aportación, demostró que: "Pueden ponerse en correspondencia uno a uno los puntos de una recta y los puntos de un plano", este descubrimiento no fué fácilmente aceptado por la comunidad matemática de aquella época, como consecuencia de que intuitivamente parecía que no era posible, el mismo Cantor quedó muy sorprendido de su resultado [Cantor 1878]

En 1880, Cantor comienza a usar como símbolo transfinito "∞" en la derivación de conjuntos, expresando el conjunto de puntos que se encuentra en todos

* El concepto de potencia en el sentido cantoriano, no coincide con el concepto de potencia que actualmente se emplea en Teoría de Conjuntos.

los conjuntos derivados $P^{(\nu)}$, donde ν es cualquier número natural, como $P^{(\infty)}$, y define también $P^{(\infty+1)}$ como $P^{(\infty)'}$ y así sucesivamente define los otros derivados $\infty+1, \infty+2, \ldots \infty+\nu, \ldots$. Es notable el hecho de que Cantor de distintos infinitos para conjuntos derivados. En un principio, Cantor utiliza los números transfinitos sólo como símbolos.

Cantor escribió una serie de artículos titulados: *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* (Sobre Conjuntos de Puntos Infinitos Lineales); de los cuales el quinto, escrito en 1882, al siguiente año se le agregó un prefacio y se reimprimió bajo el título: *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfalttigkeitslehere* (Fundamentos de una Teoría General de Conjuntos).

En los *Grundlagen*, Cantor defiende sus nuevas ideas en términos matemáticos, filosóficos y teológicos, y sus números transfinitos comienzan a tomar vida propia, los presenta como una extensión autónoma y sistemática de los números naturales. Es en este momento que la Teoría de Conjuntos se independizó de la teoría de las funciones.

De los conceptos que aparecen en los *Grundlagen*, algunos se utilizaron intactos en la Teoría de Conjuntos posterior, otros son el germen de las definiciones que algunos años después se perfeccionaron. Es por esto, que dedicaré una sección a discutir con detalle las definiciones que aparecen en los *Grundlagen* que, posteriormente, utilizarán Jourdain y Zermelo en sus demostraciones. A lo cual regresaremos más adelante.

La labor creativa de Cantor no cesó. Escribió otros artículos, de los cuales, hay uno escrito en 1885, que no fué publicado sino hasta 1970, titulado: Principios de una Teoría de los Tipos de Orden, en donde reconocía que la Teoría de Conjuntos podía ser la base mediante la cual las matemáticas podían ser entendidas.

Cantor, en algún momento, comenzó investigaciones en las áreas de Filosofía y Teología. Existen dos motivos poderosos para que lo haya hecho, uno de ellos es que su enfermedad en las etapas depresivas lo llevaba a sentirse impotente frente a los problemas y los opositores que presentaba su Teoría, la otra es que su Teoría también necesitaba de un respaldo filosófico y teológico para lograr su aceptación.

Y así, en 1887 y 1888 Cantor publicó sus artículos, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische kritik* que en 1890 son publicados bajo el título: *Zur Lehere vom Transfiniten*, en donde expone algunos puntos de vista filosóficos y teológicos sobre sus números transfinitos y en el cual juzga erradas todas las demostraciones de la imposibilidad de la existencia de los números transfinitos, pues usan siempre el hecho de que los números transfinitos tienen las mismas propiedades que los números finitos.

Cantor siempre se sintió ofendido por sus opositores, no obstante todos sus escritos filosóficos y teológicos donde creía haber justificado la existencia real de sus conjuntos infinitos. En el terreno de las matemáticas, se materializó un evento que ayudó a ganar ciertos simpatizantes para su Teoría: En 1891, se formó en Alemania una sociedad matemática: la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, en cuya formación tuvo mucho que ver Cantor. La idea que originó esta sociedad fué la de abrir nuevos foros para la exposición y discusión de nuevos conceptos en matemáticas; objetivo muy apropiado para la libre introducción de los nuevos números transfinitos cantorianos.

Entre 1890 y 1895, Cantor continua comunicando sus ideas a través de cartas a otros matemáticos, y algunos artículos. Y precisamente, en 1895, se publicó la primera de dos partes de su última publicación importante: *Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre* (Contribuciones a la Fundamentación de la Teoría de

Conjuntos Transfinita), la segunda parte de este escrito se publicó en 1897.

En los *Beiträge*, la Teoría de Conjuntos se consolida como una teoría matemática. En este escrito se perfeccionaron los conceptos surgidos en los *Grundlagen* doce años antes. Matemáticamente, este escrito formaliza muchas de las ideas dadas anteriormente, se presentan definiciones y teoremas, la mayoría de ellos demostrados.

1.3 LOS GRUNDLAGEN (LA MEMORIA DE 1883)

En esta sección, no se pretende hacer un análisis detallado de todos los conceptos y temas que aparecen en los *Grundlagen*; el objetivo es presentar históricamente, ciertos conceptos matemáticos que surgieron en ese escrito, siguiendo el desarrollo de las ideas de Cantor en ese trabajo, y presentando las definiciones textuales, que tienen relación con las demostraciones de Jourdain y Zermelo que más adelante se analizarán.

Los *Grundlagen* se caracterizan porque contienen la mayoría de las ideas de lo que sería después la Teoría de Conjuntos, como una rama de las matemáticas; en dicho trabajo de Cantor, desde una perspectiva matemática, existe una gran carencia de formalidad, y por otro lado hay una gran densidad de análisis filosóficos.

Un concepto fundamental en el desarrollo de la teoría cantoriana es el de conjunto, el cual Cantor define en los *Grundlagen* de la siguiente manera:

1.31 Definición

Se entiende por <u>conjunto</u>, toda multiplicidad que puede ser considerada como una unidad [Cantor 1883,93].

En este escrito Cantor empieza haciendo una distinción entre el infinito actual y el potencial, y explica el uso del infinito en matemáticas desde la antigüedad. Con el fín de justificar su teoría, Cantor lleva a cabo un análisis de la introducción de nuevos números en matemáticas, afirmando que su introducción queda sujeta a que dichos números estén bien definidos y, en algunas circustancias, a que establezcan una relación con los ya existentes.

Así, Cantor introduce los números transfinitos como una extensión del sistema de números naturales, creándolos a través de tres Principios de Generación, de la siguiente forma:

1.32a Principios de Generación

Primer Principio: La sucesión de números naturales positivos

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

tiene la base de su generación en la repetida adición de una unidad a un número, obteniendo así, los elementos sucesivos.

Segundo Principio: Es una regla que asocia a cada sucesión de números que no tiene un elemento mayor que todos, un límite; por un límite se entiende un número que le sigue inmediatamente en orden a una sucesión de números.

De esta forma, ya que el conjunto de todos los números naturales positivos

$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, no tiene un elemento mayor que todos, se le asocia un límite, al cual se le llama ω, que es el primer número (transfinito) que es mayor que todos los números naturales.

Así, aplicando a este número transfinito, el primer principio de generación, se obtienen nuevos números transfinitos:

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \nu, \ldots$$

Sucesión, a la cual se le puede aplicar el segundo principio de generación, llegando a un nuevo número: 2ω; y obteniendo de esta forma múltiples números transfinitos.

$$2\omega, 2\omega + 1, \ldots, 2\omega + \nu, \ldots, 3\omega, \ldots, \mu\omega, \ldots, \mu\omega + \nu \ldots$$

$$\omega^2, \ldots, \lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu, \ldots, \nu\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots$$

$$\omega^\omega, \ldots.$$

"Los dos principios de generación con los cuales, los nuevos números transfinitos son definidos, son tales que a través de su efecto unificado, toda barrera puede ser rota, con respecto a la formación del concepto para el total de los números naturales." [Cantor 1883,71]

El Tercer Principio de Generación ó Principio de Limitación (que será enunciada más adelante), es la última ley en el proceso de formación de los números transfinitos. Se obtienen así las clases de números de la siguiente forma:

1.33 Definición

De los Principios de Generación, se obtienen segmentos naturales en la sucesión absolutamente infinita del total de los números naturales, segmentos a los cuales llamó: Clases de Números. [Cantor1883,71].

1.34 Definición

La Primera Clase de Números denotada por (I), es el conjunto de la totalidad de los números finitos, $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$. [Cantor 1883,71].

1.35 Definición

La Segunda Clase de Números denotada por (II), sigue a la primera, consiste en la totalidad de ciertos números infinitos, que se siguen unos a otros en determinada sucesión. Del mismo modo, se pueden definir las otras clases de números, en orden ascendente, la Tercera (III), la Cuarta (IV), etc. [Cantor 1883,71].

Además de los conjuntos, Cantor hace uso de un concepto más específico; el de conjunto bien definido, del que no presenta una definición en los *Grundlagen*, sin embargo, Jourdain en la introducción que escribió a la traducción al inglés de los *Beiträge*, presenta la definición dada por Cantor a este concepto en 1882, como se presenta a continuación:

1.36 Definición

Un conjunto de elementos pertenecientes a una esfera del pensamiento, se dice que está bien definido cuando, en consecuencia de su definición y del principio lógico de exclusión debe ser, en primer lugar, considerado como intrínsecamente determinado si cualquier objeto perteneciente a esta esfera, pertenence al conjunto ó no, y segundo, si dos objetos pertenecientes al conjunto son iguales o no. [Jourdain 1915,46].

Cantor, en los *Grundlagen*, amplia la concepción de número, y la define con relación a los conjuntos y sus elementos; de esta manera a los conjuntos bien definidos asocia una serie de definiciones, entre las cuales están las de potencia, número de elementos (tipo de orden, posteriormente), número ordinal, etc.

Los números transfinitos, llevan directamente al desarrollo del concepto de potencia, definición que había dado en escritos anteriores; la cual no presenta explícitamente en los *Grundlagen*, pero se encuentra descrita a través de ciertas propiedades como las siguietes:

1.37 Caracterización del Concepto de Potencia

A cada conjunto bien definido corresponde una potencia determinada.

Dos conjuntos tienen la misma potencia, si se pueden relacionar de tal forma que a cada elemento de un conjunto, le corresponda un único elemento del otro conjunto y viceversa.

Los conjuntos infinitos tienen una potencia determinada, independientemente del orden en el que estén dados sus elementos. En general, la potencia de un conjunto es independiente del orden en el que están dados sus elementos.

La potencia más pequeña correspondiente a un conjunto infinito, tiene que estar adscrita a los conjuntos que pueden ponerse recíproca y unívocamente en correspondencia con (I). Del mismo modo se puede dar la definición natural de las potencias más grandes.

En el caso de conjuntos finitos, la potencia coincide con el número de elementos (tipo de orden), ya que como es bien sabido, el conjunto tiene el mismo número de elementos sin importar el orden en el que están dados.

Las clases de números, prueban ser ellas mismas, las representantes, de un modo natural y uniforme, de una sucesión de potencias ascendentes de conjuntos bien definidos.

En los *Grundlagen*, Cantor introduce un nuevo término, el de número (número ordinal, posteriormente), en relación con el número de elementos (tipo de orden del conjunto) y los conjuntos bien ordenados, definitivos en la exposición de lo que resta de esta tesis. Así pues, define los conjuntos bien ordenados como sigue:

1.38 Definición

Por un Conjunto Bien Ordenado, entendemos cualquier conjunto bien definido, los elementos del cual están relacionados por una ley pre-asignada específica de sucesión, de acuerdo a la cual existe un primer elemento del conjunto, y a todo elemento (que no sea el último), sigue otro elemento específico, y más aún, a cualquier conjunto finito ó infinito de elementos corresponde un elemento específico, el cual respecto a todos los elementos del conjunto, es el siguiente elemento de la sucesión (excepto si no sigue algún elemento que siga a todos ellos en la sucesión).

Asociado al concepto de conjunto bien ordenado, está el de número ordinal.

1.39 Definición

El número de elementos de un conjunto infinito bien ordenado (número ordinal), está expresado por un número enteramente determinado de la expansión de nuestro campo de números, suponiendo sólo que el orden de los elementos del conjunto está determinado.

Cantor, caracteriza a los números ordinales de la siguiente manera:

> Dos conjuntos se dice que tienen el mismo número (ordinal) si es posible ponerlos en correspondencia recíprocamente unívoca uno con otro, así, si E y F, son dos elementos de un conjunto, E_1 y F_1 son los elementos correspondientes del otro, la posición de E y F en la sucesión de elementos en el primer conjunto está siempre en correspondencia con la posición de E_1 y F_1 en la sucesión de elementos del segundo conjunto. Por lo tanto si E precede a F, en la sucesión de elementos del primer conjunto, entonces E_1 también precede a F_1 en la sucesión de elementos del segundo conjunto. Se ve fácilmente, que si esta correspondencia es posible, está enteramente determinada, y por lo tanto su número (ordinal) siempre se encuentra y es único para ambos conjuntos. [Cantor 1883,72].

La diferencia cantoriana de número (ordinal) no establece diferencia alguna entre conjuntos finitos e infinitos, como es claro a partir de la siguiente afirmación:

"La diferencia esencial entre conjuntos finitos e infinitos es que un conjunto finito, tiene el mismo número de elementos para cualquier orden que se le asigne; un conjunto infinito, en general, tiene diferentes números de elementos, dependiendo del orden en el que estén dados." [Cantor 1883,72].

Entonces, en base a los conceptos de potencia y número ordinal, Cantor define el Tercer Principio de Generación, que es el que relaciona los dos conceptos antes mencionados; lo enuncia así:

1.32b Tercer Principio de Generación

La potencia de (I) es mayor que cualquier elemento de esta clase. La potencia de (II) es mayor que cualquier elemento de esta clase. Análogamente para clases mayores. *

Cantor relaciona los conceptos de número ordinal y potencia de la siguiente manera:

"Todo conjunto de la potencia de (I) es contable por números de (II), y sólo por medio de tales números." [Cantor 1883,72].

De la misma forma, para clases superiores:

"Todo conjunto bien definido de la potencia de (II) es contable por números de (III), y sólo por estos." [Cantor 1883,72].

Una vez construídos los números ordinales, define una serie de operaciones entre

* Este tercer principio de generación, garantiza que existen números ordinales mayores que los números de (II), es decir, a través de este principio se generan los elementos que pertenecen a la tercera clase ó clases superiores a esta.

ellos, tales como: la suma y sus propiedades, el producto y sus propiedades, define lo que son los números ordinales primos.

Por otro lado, el continuo, tema que llevó a Cantor, al estudio de sus números transfinitos, también hace su aparición en los *Grundlagen*, ahora Cantor construye el continuo y lo define por medio de conjuntos de puntos.

La sucesión extendida de números puede, si es necesario, ser completada sin dificultad por un conjunto de números continuo adjuntando a todos los números α, todos los números reales x más grandes que 0 y menores que 1.

Para definir el continuo, Cantor afirma que no puede hacerlo por medio de los conceptos de espacio y tiempo que a su vez requieren la definición de continuidad. Entonces, establece que un conjunto es continuo si es perfecto y conexo, entendiendo por conjunto perfecto y conjunto conexo, lo siguiente:

1.310 Definición

Un conjunto S es perfecto si para toda α, elemento de (I) ó (II), se tiene que $S^{(\alpha)} = S$.

1.311 Definición

Si T es un conjunto de puntos, T es conexo si para cualesquiera puntos t y t' en T, y para toda ϵ arbitrariamente pequeña, puede encontrarse un conjunto finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en T, tales que las distancias $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_nt'$ son todas menores que ϵ.

Por último, en lo que respecta a nuestro interés, en los *Grundlagen*, Cantor realiza una demostración (que no se analizará aquí), del Teorema siguiente:

1.312 Teorema

La clase de números (II), tiene una potencia, la cual es diferente de la potencia de la clase de números (I).

De esta forma, se han presentado aquí, los resultados que son básicos para las demostraciones del Teorema del Buen Orden que se analizarán más adelante. Se ha omitido, en esta presentación de los *Grundlagen*, el enunciado del Principio del Buen Orden, que hizo Cantor. Este resultado se presentará más adelante, en la Sección de la Historia del Teorema del Buen Orden.

1.4 LOS BEITRÄGE (LAS MEMORIAS DE 1895 Y 1897).

Al igual que la sección dedicada a los *Grundlagen*, esta sección no pretende hacer un análisis exhaustivo de los *Beiträge*, sino más bien presentar el desarrollo histórico de los conceptos y las ideas que tienen relación con esta tesis.

Muchos de los conceptos presentados en los *Grundlagen*, se presentan con mayor solidez en los *Beiträge*, como se menciono anteriormente, publicados en 1895 y 1897. Como toda teoría matemática, la Teoría de los Conjuntos en sus inicios no alcanza su desarrollo total. Después de los trabajos de Cantor quedan muchos problemas abiertos. Aunque los *Beiträge*, es el trabajo de Cantor que alcanza mayor desarrollo matemático.

Es por esto que algunos de los conceptos expuestos en la sección anterior, se vuelven a definir.

El concepto de conjunto, se perfecciona con respecto a la definición dada anteriormente, en los *Beiträge* lo define de la siguiente manera:

1.41 Definición

Entendemos por conjunto cualquier colección adentro de una totalidad M, de objetos m definidos y separados por nuestra intuición ó nuestro pensamiento; a los objetos m les llamaremos elementos [Cantor 1895,85].

En la Memoria de 1883, Cantor había utilizado el concepto de potencia; pero aún no le daba la categoría de número, lo cual hace en los *Beiträge*, introduciendo como una de las primeras definiciones de su trabajo la que se da a continuación:

1.42 Definición

Llamamos potencia ó número cardinal de M al concepto general, que por medio de nuestra activa facultad de pensar, surge del conjunto M cuando hacemos abstración de la naturaleza de sus varios elementos m, y del orden en el cual están dados, que se denota:

$$\overline{\overline{M}}$$

Si abstraemos la naturaleza de cada uno de los elementos m, entonces cada uno de ellos se convierte en una unidad, de aquí que el número cardinal es un concepto definido compuesto por unidades, y este número tiene existencia en nuestra mente como una imágen intelectual ó proyección, del conjunto M dado.

Los números cardinales como resultado de un proceso de abstracción, no son únicos para cada conjunto, lo cual quiere decir, que existen varios conjuntos a los que corresponde el mismo número cardinal, los conjuntos que cumplen esta propiedad se llaman equivalentes y se definen de la siguiente manera:

1.43 Definición

Se dice que dos conjuntos M y N, son equivalentes ($M \sim N$ ó $N \sim M$), si es posible encontrar una ley que los relacione de manera tal que a cada elemento de un conjunto, le corresponda un único elemento del otro conjunto [Cantor 1895,86].

En seguida, Cantor define lo que es un conjunto parcial o parte de un conjunto, como se muestra a continuación:

1.44 Definición

La Parte ó Conjunto Parcial de un conjunto M, lo definimos como cualquier conjunto M_1 de M, cuyos elementos son también elementos de M. [Cantor 1895,86]

Cantor determina a los conjuntos finitos, en base a su cardinalidad.

1.45 Definición

Un Conjunto Finito es un conjunto con cardinalidad finita. [Cantor 1895,103].

1.46 Definición

Un Conjunto Transfinito es un conjunto que no tiene cardinalidad finita. El primer ejemplo de un conjunto transfinito, es la totalidad de los números cardinales finitos ν.

1.47 Definición

Llamamos al número cardinal del conjunto transfinito formado por la totalidad de los números cardinales finitos $\{\nu\}$, alef cero, denotado de la siguiente manera:

$$\overline{\overline{\{\nu\}}} = \aleph_0$$

Cantor, demuestra que $\aleph_0$, no es un número cardinal finito, y cumple las siguientes propiedades aritméticas

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

$\aleph_0 > \nu$ para ν cualquier número cardinal finito

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0$$

para νcardinal finito

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$2\aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0\nu = \nu\aleph_0 = \aleph_0$$

para ν cardinal finito

$$\aleph_0^{\,2} = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0^{\,\nu} = \aleph_0$$

para ν cualquier cardinal finito

Después de $\aleph_0$ se obtiene por una ley definida, la potencia de (II), que corresponde al siguiente número cardinal más grande, $\aleph_1$, y de la misma ley se obtiene el siguiente número cardinal más grande $\aleph_2$. Y así una sucesión ilimitada de números cardinales *

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\nu, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

Es importante hacer notar, que la notación de $\aleph$'s, comienza a utilizarla Cantor hasta 1893; a pesar que ya tenía con anterioridad la noción de la potencia de (I), como la mínima potencia de un conjunto infinito. Después de construir así, la teoría de los números cardinales, Cantor introduce las nociones de orden en los conjuntos, que llevaran a los conceptos de tipo de orden y número ordinal. De esta forma, introduce los siguientes conceptos:

1.48 Definición

Llamamos a un <u>conjunto simplemente ordenado</u>, si tiene reglas de orden de precedencia definidas sobre sus elementos m; lo cual quiere decir que si m_1 y m_2 son

*Estos números cardinales transfinitos obtenidos por la sucesión de $\aleph$'s, en este momento no podemos garantizar que contenga a todos los números cardinales transfinitos, si se piensa, por ejemplo en $2^{\aleph}_0$, ¿este número será igual a alguna $\aleph$?

dos elementos distintos, * uno debe ser anterior y otro posterior. Si m_1 es anterior a m_2 entonces se escribirá: $m_1 \prec m_2$ ó $m_2 \succ m_1$ y si tres elementos del conjunto cumplen que si $m_1 \prec m_2$ y $m_2 \prec m_3$ entonces $m_1 \prec m_3$.

1.49 Definición

Entendemos por el <u>tipo de orden</u> de un conjunto M, el concepto general que resulta de M, si abstraemos de la naturaleza de los elementos m, y retenemos el orden de precedencia entre ellos. El tipo de orden $\overline{M}$ es un conjunto ordenado cuyos elementos son unidades que tienen el mismo orden de precedencia que los elementos de M, del cual fueron derivados por abstracción [Cantor 1895,111].

1.410 Definición

Dos conjuntos M y N son similares si se pueden poner en una correspondencia biunívoca, de tal forma que si los elementos m_1 y m_2 de M tienen asociados los correspondientes n_1 y n_2 de N y $m_1 \prec m_2$ entonces $n_1 \prec n_2$. Si dos conjuntos son similares se denota así: $M \simeq N$ ó $N \simeq M$. [Cantor 1895,112].

Si en un conjunto M, las relaciones de precedencia de sus elementos, son invertidas, se obtiene un nuevo conjunto $*M$, que se le llama el conjunto inverso de M. Si $\overline{M} = \alpha$ es el tipo de orden de M, entonces, el tipo de orden de $\overline{*M} = *\alpha$. Puede suceder que $*\alpha = \alpha$, como por ejemplo en el caso finito.

Todos los conceptos de esta sección, antes definidos, se encuentran en la Memoria de 1895. El concepto central de esta tesis, el de Conjunto Bien Ordenado, al cual

* Se sobreentiende que el orden es irreflexivo, lo cual quiere decir, para todo elemento m, m no es predecesor de m.

está asociado al número ordinal, se define en la memoria de 1897, como se describe a continuación:

1.411 Definición

Sea F un conjunto simplemente ordenado se dice que F es <u>Bien Ordenado</u>, si cumple las siguientes condiciones:

i) Existe un elemento f_1 de F el cual es anterior a todos los elementos de F.

ii) Si F' es cualquier parte de F y si F tiene uno ó más elementos posteriores a todos los elementos de F', entonces existe un elemento f' de F tal que es inmediatamente posterior a todos los elementos de F'; lo que significa que no existen elementos de F anteriores a f' y posteriores a todos los elementos de F' * [Cantor 1897,137].

1.412 Definición

El tipo de orden de un conjunto bien ordenado F es un <u>número ordinal</u>, [Cantor 1897,152].

En esta segunda parte de los *Beiträge*, publicada en 1897, Cantor desarrolla la teoría de los conjuntos bien ordenados, con la intención de probar el Teorema del Buen Orden. Sin embargo, al carecer de una demostración de este importante teorema, Cantor publica una presentación inconclusa de la teoría que el deseaba. Pero, esta seguna parte de su artículo contiene la demostración de la ley de la tricotomía para números ordinales, de la cual se deduce la misma ley par números cardinales.

---

* Es inmediato de la definición que todo elemento con sucesor tiene sucesor inmediato.

1.5 HISTORIA DEL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

El Problema del Buen Orden acaso haya sido uno de los mayores retos entre los matemáticos a principios de siglo. Su importancia histórica podría justificarse al notar que Hilbert lo incluyó, junto con la Hipótesis del Continuo, en una lista como el primero de los veintitres problemas centrales a resolver en el presente siglo, durante el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, en Paris en 1900.

Fué en 1883, en los *Grundlagen*, cuando Cantor formuló por vez primera el Principio del Buen Orden, de la siguiente forma:

1.51 Principio del Buen Orden

"El concepto de conjunto bien ordenado, provee a la Teoría de Conjuntos de esta ley fundamental: es siempre posible poner un conjunto bien definido en la forma de un conjunto bien ordenado.-una ley del pensamiento la cual me parece básica y consecuente, y por su validez, especialmente remarcable-." (Cantor,1883,72).

Sin embargo, a pesar de la importancia y sencillez de su enunciado,esta afirmación no fue aceptada por la comunidad matemática de la época, como tal. En la siguiente década, el mismo Cantor terminó convenciéndose que era necesario encontrar una demostración para el principio del buen orden, lo cual se llegó a convertir en una obsesion.

1.52 Problema del Buen Orden

¿Todo conjunto se puede bien ordenar?

Para esclarecer, lo difícil que resulta en principio resolver este problema, se puede pensar en el siguiente ejemplo:

1.53 Ejemplo

Sea A el conjunto de los números racionales, de acuerdo a las definiciones dadas anteriormente A es un conjunto simplemente ordenado, considerando la relación $\prec$ como $<$; pero este conjunto no está bien ordenado, pues si tomo un número de A, supongamos $\frac{1}{2}$, tiene que existir su sucesor inmediato; lo cual no es posible, pues para cualquier sucesor x de $\frac{1}{2}$, se puede encontrar un sucesor de $\frac{1}{2}$ que sea anterior a x.

Este orden $(<)$, no es un buen orden para A; pero se puede encontrar un buen orden para A, de la siguiente manera; si los números racionales $\frac{a}{b}$, son pensados como parejas ordenadas (a, b), y definimos un orden $\prec_1$, como sigue:

$$(a_1, a_2) \prec_1 (b_1, b_2) \begin{cases} a_1 < b_1 \\ a_1 = b_1 \quad a_2 < b_2 \end{cases}$$

este orden dado para A, se puede comprobar de las definiciones que es un buen orden.

Paralelamente a este problema, Cantor está también preocupoado por encontrar una demostración de la tricotomía de los números cardinales; la cual había enunciado en 1885; y aparece enunciada en los *Beiträge* como un Teorema, el cual relaciona con las sucesiones ascendentes de números cardinales transfinitos; pero no aparece su demostración (la cual se sigue inmediatamente de la tricotomia de los números ordinales, si los números transfinitos son $\aleph$; pero en otro caso no es trivial), el enunciado de este Teorema es el siguiente:

1.54 Teorema

Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, son cualesquiera dos números cardinales, entonces:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ ó } \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \text{ ó } \mathfrak{a} > \mathfrak{b}$$

(Cantor,1895.90).

Este Teorema, visto como comparación de conjuntos equivalentes y conjuntos parciales, de acuerdo a la concepción cantoriana, es equivalente al Axioma de Elección; pero hasta el periodo 1908-1920 fué demostrada su equivalencia.

Varios matemáticos trataban de resolver las conjeturas que Cantor dejaba abiertas en sus escritos, en partícular la relacionada con el Teorema del Buen Orden, la Hipótesis del Continuo y la Ley de la Tricotomía para los Números Cardinales. Así fué que, durante el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Heidelberg, Kõnig "demuestra" que el problema del buen orden tiene respuesta negativa;y como consecuencia muestra que el 'continuo' no puede ser bien ordenado.

Al siguiente día de su exposición, Zermelo encuentra una falla en la demostración de Kõnig; en ella, utilizaba un teorema sobre la exponenciación de $\aleph$'s atribuido a Bernstein, el cual, al parecer, en la manera como era utilizado por Kõnig, era falso. Curiosamente, Zermelo no hace publico durante el Congreso, el error de Kõnig; un mes más tarde Zermelo envía a Hilbert (entonces editor del *Mathematische Annalen*) un artículo (Zermelo,1904), en donde demuestra que el problema del buen orden tiene respuesta positiva, con lo que se convierte en el Teorema del Buen Orden, cuyo enunciado es el siguiente:

1.55 Teorema

Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Para los matemáticos que no tenían relación estrecha con Zermelo y König les produjo una conmoción el hecho de que se tuviera al mismo tiempo la validez de un Teorema y su negación; este hecho es conocido como la Paradoja de König-Zermelo. Zermelo, en su demostración del Teorema del Buen Orden utiliza un principio básico en las matemáticas, cuyo uso se lo sugirió Erhard Schmidt; este principio es el Axioma de Elección, que dice lo siguiente:

1.56 Axioma de Elección

Dada una familia T, de conjuntos no vacíos, existe una función f, la cual asigna a cada miembro A de T un elemento $f(A)$ de A. (Zermelo,1908,274).

Peano en 1890, había enunciado una forma del Axioma de Elección, y solo algunos matemáticos italianos, entre ellos Peano y Betazzi, evitan su uso explícito; pues prácticamente todos los matemáticos de aquella época, lo utilizaban implícitamente, incluso el mismo Cantor.

Después de un siglo, el Axioma de Elección se ha reconocido indispensable para una serie de Teorías matemáticas, tiene distintas equivalencias en cada una ellas: el Teorema del Buen Orden, es un buen ejemplo de una de estas equivalencias; otra, usada a principios de siglo, el Axioma Multiplicativo; otra más, el Lema de Zorn.

El Axioma Multiplicativo, es la forma débil del Axioma de Elección que Jourdain pretendía no utilizar en sus demostraciones del Teorema del Buen Orden. Whitehead y Russell lo habían enunciado en 1902, para facilitar su investigación en la aritmética cardinal, en la cual ambos trabajaban.

Hasta 1908, los únicos enunciados, públicamente reconocidos equivalentes al Axioma de Elección, eran el Teorema del Buen Orden y el Axioma Multiplicativo, para enunciar este último, es preciso definir una clase multiplicativa, de la siguiente manera:

1.57 Definición

Para toda familia A de clases ajenas no vacías; A^x es la <u>clase multiplicativa</u> de todas las subclases M de $\cup A$ de manera tal que para toda S en A, $M \cap S$ tiene exactamente un elemento.

1.58 Axioma Multiplicativo

Para toda familia A, de clases no vacías, A^x es no vacío.

"Un nuevo tipo de proposiciones equivalentes al Axioma de Elección, pero no probada su equivalencia hasta los años 30, adquirieron significado matemático después de 1907: los principios maximales. Ellos aseguran que bajo ciertas condiciones existe un elemento máximal en un orden parcial dado, esto es, un elemento tal que ningún otro elemento sea más grande que él en el orden parcial. " (Moore,1982,167).

Una de las proposiciones de este tipo, enunciado en 1909, y hoy conocido como el Lema de Zorn, que utiliza la definición de extensión por límites, misma que se da a continuación:

1.59 Definición

Si S es una familia de conjuntos tal que para todo límite ordinal α, si $\{B_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq S$ y si $B_\gamma \subseteq B_\delta$ cuando $\gamma < \delta < \alpha$, entonces existe B_α en S con $B_\beta \subseteq B_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$ En este caso S es <u>extendible por límites</u>.

1.510 Lema de Zorn

Sea M un conjunto infinito y S una familia no vacía de subconjuntos de M. Si S es extendible por límites, entonces S contiene un conjunto que no es un subconjunto propio de cualquier miembro de S.

Una variante del Lema de Zorn, es la siguiente:

1.510a Lema de Zorn

Todo conjunto parcialmente ordenado M, tiene un subconjunto ordenado A que es maximal entre los subconjuntos ordenados de M.

Así fué como el Axioma de elección revolucionó las matemáticas, a partir de la demostración de Zermelo de 1904.

La demostración de Zermelo produjo una gran polémica en el medio matemático. Prácticamente todos los matemáticos famosos de esa época, Poincaré, Russell, Peano, Lebesgue, Hardy, Baire, Berry, Hobson, etc. comunican sus objeciones a dicha demostración.

Jourdain en 1904, publica una demostración del Teorema del Buen Orden, en donde afirma que Zermelo no había advertido los artículos que él había escrito sobre la demostración del teorema del Buen Orden. Jourdain dice además que sus resultados son más completos que los de Zermelo y en algunos aspectos sus técnicas son similares.

Jourdain nunca aceptó la necesidad de usar el Axioma de Elección para demostrar el Teorema del Buen Orden, publicó varias demostraciones de este Teorema en donde afirmaba que no usaba el Axioma de Elección; como se verá en el siguiente capítulo.

"Es una ley del pensamiento que

todo conjunto se puede bien ordenar"

-Cantor-

CAPITULO 2

JOURDAIN
Y
EL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

2.1 NOTAS BIOGRAFICAS DE PHILIP JOURDAIN (1879-1919)

Philip Edward Bertrand Jourdain nació el 16 de octubre de 1879 en Derbyshire, Inglaterra. En 1898 inició sus estudios en el Colegio Cheltenhan, que en ese tiempo estaba en Cambridge, los cuales suspendió por una parálisis progresiva e incurable. Su hermana menor Millicent, también sufrió esta enfermedad hereditaria: la Ataxia de Friedrich. Con el inicio del nuevo siglo Jourdain fué acompañado por su madre a un hospital establecido en Heidelberg (Alemania), para recuperar lo inconseguible: su salud. Este período en Alemania lo dedicó a estudiar alemán e historia de las matemáticas.

Aparentemente, sus estudios matemáticos durante su formación sólo se involucraron con la historia de las matemáticas. Recuérdese que en aquella época las matemáticas y la filosofía estaban estrechamente relacionadas. No es por eso casual que posteriormente, muchas de las publicaciones de Jourdain aparecieran en una revista dedicada a la filosofía y a la historia de las ciencias: *The Monist.*

Jourdain estuvo interesado en los siguientes aspectos de las Matemáticas:

1. Teoría de los Conjuntos y sus aplicaciones.

2. Fundamentos de la Aritmética; en partícular, la lógica matemática.

3. Mecánica Analítica.

En sus trabajos se mezcla lo científico, lo histórico y filosófico. En 1912, Jourdain fué invitado Consejo Editorial de *The Monist*, una revista, en aquella época, de mucha influencia en el medio matemático; que más tarde se subdividiría en *The Monist* e *Isis* con el propósito de que la primera fuera de carácter filosófico y la segunda histórico científico. Jourdain, por medio de su labor editorial se relacionó con varios matemáticos: Cantor, Frege, Pierce, McColl, Russell y Peano, s/'olo por mencioinar algunos nombres importantes.

Es en esta última área, la historia de las matemáticas, una de las ramas de las matemáticas, donde Jourdain hace contribuciones importantes, desde publicaciones de épocas anteriores, como un escrito que hace de Leibniz, hasta el análisis de la historia de las matemáticas contempóranea como la introducción a la traducción al inglés de los *Beiträge*.

Durante la Primera Guerra Mundial, Jourdain ofreció su maquinaria de trabajo para servir a su país (Jourdain1922, 130); la apoteosis del dolor humano europeo en esa época fue para él todo lo contrario: encuentra a Laura en Girton en 1914 y establece una relación que se perderá con el destino. Para él, Laura fué su apoyo incondicional, contrajeron matrimonio en 1915.

Como se verá más adelante, Jourdain tuvo algunos problemas con Russell; sin embargo, el espíritu de sus matemáticas estaba inspirado en la idea de Russell que: todas las matemáticas puras podían ser reducidas a la lógica lo cual para Jourdain era la base del conocimiento científico y filosófico.

Por otro lado, Jourdain estaba maravillado por los trabajos de Cantor. Jourdain, como algunos matemáticos de su época, conocía el Problema del Buen Orden e intentó demostrarlo. En 1903, envió a Cantor una de sus demostraciones, Cantor al recibirla, le comentó que había hecho él mismo una demostración parecida, la cual había enviado a Dedekind cuatro años antes; se trata de una carta publicada en (VanHeijenoort,1968, 113-117).

Cantor animó a Jourdain para que publicara su demostración, misma que aparece en el *Mathematische Annalen* en 1905. Durante más de doce años, Jourdain vivió obsesionado por encontrar una demostración del "Teorema del Buen Orden" independientemente del Axioma de Elección, hecho que lo acompañó hasta su lecho de muerte.

Al final sólo queda el recuerdo de su lucha por la vida y su pasión por las matemáticas, es importante hacer notar que muere con la desesperación de que ninguno de los grandes matemáticos de la época, había revisado su última demostración del Teorema del Buen Orden. La fecha de su muerte es el primero de octubre de 1919.

Entre algunas de sus contribuciones importantes tenemos las siguientes:

1. Las traducciones al inglés de los trabajos de Cantor, hecho admirable por sí mismo.

2. Participó en la polémica de la validez del Teorema del Buen Orden y su relación con el Axioma de Elección.

3. Inició una historia de las matemáticas contemporáneas; desgraciadamente, el fervor moderno lo orilló a tomar posiciones sumamente radicales, lo cual se desarrolla en las siguientes secciones.

2.2 ERRORES EN LAS DEMOSTRACIONES DE JOURDAIN DEL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

En esta sección se analizarán cuatro de las demostraciones que Jourdain publicó sobre el Teorema del Buen Orden. La primera de ellas fué publicada en el *Mathematische Annalen* en 1905, bajo el título: *"On a proof that every aggegate can be well ordered"* [Jourdain 1905a,465-471].

Este artículo está basado en resultados de otros artículos que el mismo publicó en [Jourdain 1904b,295-303], [Jourdain 1904c 61-75], (Jourdain,1905f,42-56). En [Jourdain 1904c], se dá una definición de conjunto bien ordenado que según su opinión es equivalente a la dada por Cantor [Cantor 1897], pero que en realidad para demostrar su equivalencia se usa el Axioma de Elección.

2.21 Definición (Jourdain)

Un conjunto (infinito) es bien ordenado si es simplemente ordenado y no contiene una parte de tipo $^*\omega$.

Desde luego, la definición de Cantor implica la de Jourdain. El problema es que no necesariamente un conjunto simplemente ordenado que no tiene una parte de tipo $^*\omega$ sea bien ordenado según Cantor, a menos que se use el Axioma de Elección.

La razón es sencilla: si A es un conjunto que no es bien ordenado pero es simplemente ordenado, entonces A contiene una parte que no contiene primer elemento. Sea $B = \{\ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_\gamma, \ldots\}$ dicha parte; se desea demostrar que B contiene un subconjunto de tipo $^*\omega$, para esto se tiene que elegir un elemento α_μ de B tal que $B' = \{\alpha | \alpha < \alpha_\mu\}$ y $\overline{\overline{B'}} \geq \aleph_0$. Se elige ahora α_{μ_2} en B' tal que $\{\alpha : \alpha < \alpha_{\mu_2}\} = B^{(2)}$ y $\overline{\overline{B^{(2)}}} \geq \aleph_0$. Se construye ahora $\{\alpha_{\mu_i} : i$ es un número ordinal finito $\} = C$, de la misma forma que se construyeron los conjuntos anteriores; el tipo de orden de C es $^*\omega$. No existe forma de garantizar esto último sin usar el Axioma de Elección.

En [Jourdain 1905a], Jourdain utiliza esta equivalencia para demostrar que la sucesión ascendente de todos los números ordinales:

2.22

$$1, 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \gamma, \ldots$$

y la sucesión ascendente de todos los $\aleph_{\prime}$s

2.23

$$\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\nu, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_\gamma, \ldots$$

son bien ordenadas. Desde luego **2.22** y **2.23** pueden pensarse como conjuntos similares.

Usando esto último, Jourdain prueba el siguiente resultado:

2.24

Todo número cardinal está contenido en una sucesión de $\aleph'$s ó es más grande que cualquier $\aleph$.

En la demostración de **2.24** Jourdain usa implícitamente la tricotomía de los números cardinales, ya que considera que si un número cardinal transfinito no es mayor que cualquier $\aleph$, entonces es necesariamente un $\aleph$.

Para demostrar la segunda parte de **2.24** utiliza el método de "reducción al absurdo"; tal vez esta manera de demostrar sus afirmaciones es un rasgo característico en él. En esta parte supone que existe algún número mayor que cualquier elemento de la sucesión **2.23**, como esta sucesión es similar a **2.22** usa la Paradoja de Burali-Forti para encontrar una contradicción. * Desde el punto de vista histórico esta es la primera vez que se usa significativamente dicha paradoja. Jourdain soluciona esta paradoja introduciendo los conjuntos inconsistentes.

---

* En un artículo, publicado en 1897, Burali-Forti da dos definiciones: la de clase perfectamente ordenada (la cual distingue de los conjuntos bien ordenados de Cantor) y la de la clase 'NO', conceptos que surgen de una malinterpretación de Burali-Forti a las definiciones dadas por Cantor en 1895.

Las definiciones de Burali-Forti son las siguientes:

Definición

Una clase bien ordenada A, que además cumple, que si todo elemento x de A tiene un predecesor inmediato entonces existe algún predecesor y de x tal que y no tiene predecesor inmediato; además, un número finito de elementos de A están entre y y x. A esta clase se le llamará perfectamente ordenada.

Definición

La clase 'NO', es aquella que está formada por todos los tipos de orden de las clases perfectamente ordenadas.

En este artículo, Burali-Forti muestra que si la tricotomía es válida entonces "NO" está perfectamente ordenada. Por lo tanto, el tipo de orden Ω de 'NO' es miembro de 'NO', como lo sería $\Omega + 1$; si α está en 'NO' entonces $\alpha \leq \Omega$, por consiguiente $\Omega < \Omega + 1$ y $\Omega + 1 \leq \Omega$, lo cual es una contradicción.

De acuerdo a la tradición en la historia de las matemáticas, este es el hecho que atribuye a Burali-Forti su Paradoja, la cual, se dice, produjo un sismo en la fundamentación de las matemáticas de ahí la importancia de dicha paradoja.

La Paradoja de Burali-Forti, se enuncia de la siguiente manera:

Paradoja de Burali-Forti

Considérese la sucesión de todos los números ordinales

$$\{1, 2, \ldots, \nu, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + \nu, \ldots, \nu\omega, \ldots\} = W$$

Si se supone que existe un número ordinal β del conjunto W, tal que $\beta > \gamma$, para toda γ en W. Se tiene que β, por pertenecer a W cumple que $\beta < \beta$, lo cual es un absurdo.

Recientemente, se demostró que Burali-Forti, no encontró una Paradoja en su demostración, lo que el hizo, fué encontrar una contradicción en una demostración por reducción al absurdo; en su artículo él jamás advierte haber encontrado una paradoja. Fué Russell, quien explícitamente enuncia la paradoja de Burali-Forti en sus *the Principles of Mathematics* en 1903.

De la misma manera como Burali-Forti trabajó en problemas de la Teoría de Conjuntos debida a Cantor, varios matemáticos trataban de resolver las conjeturas de Cantor. Así fué que durante el Tercer Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Heidelberg, König demuestra que el problema del buen orden es falso; además muestra que el continuo de los números reales no puede ser bien ordenado.

2.25 Definición (Jourdain)

Un conjunto A es inconsistente si existe una parte de A similar a **2.22**. Un conjunto es consistente si no es inconsistente.

Para evitar las contradicciones, a los conjuntos inconsistentes se les considera carentes de número cardinal y tipo de orden. Además, dice que este término está inspirado por Schröder. Una consecuencia inmediata de esto último es que como los únicos conjuntos que tienen número cardinal son los consistentes, al presuponer la tricotomía de los cardinales, Jourdain concluye que todo cardinal transfinito es un $\aleph$, esto garantizaría que todos los conjuntos consistentes pueden bien ordenarse. Ahora el problema lo presentan los conjuntos inconsistentes.

Para resolver esto, Jourdain define una sucesión Γ, como una extensión de W (definido en **1.54**) tal que toda sucesión bien ordenada contenida en Γ es similar a Γ o a un segmento de ella misma. Con esto se introducen los conjuntos (W, m_1) donde m_1 es el sucesor de todos los elementos de W, el cual es similar a un segmento de Γ. Por definición Γ es un conjunto inconsistente y bien ordenado.

Esto le permite demostrar el Teorema del Buen Orden, ya que cualquier conjunto M puede ordenarse en una sucesión similar a Γ, puesto que si se toman elementos de M sucesivamente, comenzando con la sucesión

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots, m_\omega, m_{\omega+1}, \ldots, m_\gamma, \ldots$$

se agotarán todos los elementos de M, cuando se haya terminado con los elementos de una sucesión similar a **2.22** y a su extensión en Γ. Aquí, al elegir los elementos de M, está usando explícitamente el Axioma de Elección.

En la última parte del artículo, Jourdain discute la hipótesis del continuo, dejándolo como un problema abierto, ya que no se podía asegurar si el continuo era un conjunto consistente o inconsistente; describe una solución alternativa a la Paradoja de Burali-Forti, que había dado Bernstein, con la que no está de acuerdo. Considera que **2.22** si tiene un tipo de orden; y si existe debe ser mayor que cualquier elemento de **2.22** y debe pertenecer a una categoría distinta a los elementos de **2.22**.

Las siguientes dos "demostraciones" fueron publicadas en la revista *Mind* en 1918 y 1919, bajo el mismo título: *"A proof that every aggregate can be well ordered"*. Se analizarán a la vez los dos artículos pues en realidad contienen el mismo material, el segundo de ellos es una justificación de la validez de la demostración del Teorema del Buen Orden que aparece en (Jourdain,1918a).

Es interesante hacer notar que estos artículos fueron publicados en una revista de filosofía; de ahí el estilo un poco extraño (para un matemático); que caracterizan estos dos escritos. Hay otro hecho histórico importante que resalta en (Jourdain,1919). Aparentemente Jourdain tuvo una relación problemática con dos de los "mejores" lógicos matemáticos que llama W. y R. respectivamente.

Aparentemente, estos dos matemáticos son Whitehead y Russell, conclusión basada fundamentalmente en tres hechos históricos: el objeto principal de los artículos en cuestión es probar que no es necesario usar el Axioma Multiplicativo para demostrar que toda clase de cadenas contiene una clase de continuaciones directas (Jourdain,1918a), hecho que W. y R. prueban en 1902 en los *Principia*. Segundo, Jourdain trabajaba en Trinity College, así es que es obvio que tenía una relación familiar, al menos, con Russell. El último hecho es que Jourdain al final de su vida estuvo obsesionado porque Russell, reconociése que su última demostración del Teorema del Buen Orden (Jourdain,1921) era correcta.

La relación que tuvo con Whitehead al parecer quedó rota después de discutir la validez de la demostración que escribió Jourdain en (Jourdain,1918a); en su siguiente artículo al respecto (Jourdain,1919) afirma que W. estaba "aburrido de las sucesiones bien ordenadas" y le reclama que no entendió el método que Jourdain usaba en la demostración del Teorema del Buen Orden; Jourdain va aún más lejos: acusa a W. de evitar cualquier discusión futura bajo el pretexto de que W. tenía que desarrollar ideas matemáticas que implicarán la solución del problema fundamental que aparece en los *Principia* (Ruseell y Whitehead,1902) y que era de gran imortancia para él y otros que trabajaban en la Teoría de Conjuntos. Es evidente que Jourdain se refiere al Axioma Multiplicativo.

El método que en esos dos artículos obsesiona a Jourdain es lo que él llama: "Proceso de inducción transfinita generalizada", que actualmente es conocido como el principio de inducción transfinita; de hecho en (Jourdain,1919) lo único que realmente hace es explicar como usa su método para demostrar el Teorema del Buen Orden.

Jourdain estaba muy influenciado por una demostración que Hartog publicó en 1915 de que $\aleph_1$ es mayor que $\aleph_0$ sin usar el Axioma de Elección.

En esta demostración, Jourdain utiliza la definición de una cadena de tipo γ.

2.26 Definición

Una cadena M de tipo γ es una parte de un conjunto M la cual es bien ordenada y tiene tipo γ.

Asegura que existen tales partes y establece la siguiente proposición derivada de la definición anterior.

2.27 Proposición

Una cadena es una clase de parejas (m, a), tales que $m \epsilon M$ y a es un número ordinal; en cada cadena m y a no se repiten y si a pertenece a la cadena entonces todos los números ordinales menores que a también pertenecen a la cadena.

Para bien ordenar un conjunto utiliza el hecho de que una cadena puede ordenarse por medio de las magnitudes ascendentes de los números ordinales. Introduce después las siguientes definiciones:

2.28 Definición

Se dice que una cadena agota a M si la clase de todas las m de las parejas de la cadena consiste de todos los elementos de M.

2.29 Definición

Se dice que una cadena P es un segmento de una cadena Q si P es idéntico a la cadena cuyos términos preceden a algún término de Q; si esto pasa, se dirá que Q es una continuación de P.

Con estas definiciones justifica el siguiente lema:

2.210 Lema

Si una clase de cadenas tiene miembros de todos los tipos menores que γ no se puede concluir, en general, que tiene una cadena de tipo γ; tal es el caso si se considera $\gamma = \omega_1$, donde ω_1 es el mínimo elemento de (III).

Con esto está listo para dar la demostración del teorema crucial que le interesa.

2.211 Teorema.

Una clase de continuaciones directas determinada por γ es aquella en la cual :

i) se encuentran todas las cadenas determinadas por los tipos menores que γ, donde γ no tiene predecesor inmediato; además no se necesita dar a conocer el predecesor inmediato.

ii)- Si x, y son miembros de la clase de continuaciones directas y el tipo de x es mayor que el de y, entonces y es un segmento de x.

Usando el Axioma Multiplicativo toda clase de cadenas contiene una clase de continuaciones directas. Lo que Jourdain intenta hacer es evitar el uso del Axioma Multiplicativo en su demostración:

En efecto, el asegurar que si γ es cualquier número ordinal de una cadena de M tal que para toda δ menor que γ, δ contiene una clase de continuaciones directas, lo conduce a un absurdo, ya que no se puede garantizar – sin usar el Axioma Multiplicativo– que existe dicha clase; en especial, cuando γ no tiene un predecesor inmediato.

La última demostración de Jourdain aparece en el *Acta Mathematica* revista de la que Mittag Leffler era editor en jefe. Al ser un artículo póstumo y debido al importante papel de Jourdain dentro del medio matemático, Mittag Leffler se siente obligado a publicarlo aunque incluye una nota aclaratoria: para empezar muestra un desacuerdo "por el punto de vista que Jourdain expresa en su artículo" (Jourdain,1921), y además le advierte a la comunidad matemática que nunca más se publicarán "artículos de la misma clase". Desde luego, Mittag Leffler no es lo suficientemente explícito; es probable que de nuevo, la relación que tuvo Jourdain con Mittag Leffler haya sido difícil, hecho que puede justificarse al recordar que Cantor tuvo demasiados problemas con este último, y en cambio Jourdain siempre manifestó una gran admiración por Cantor.

Este artículo está dividido en quince secciones y es la justificación matemática detallada de las publicaciones discutidas anterioremente; de nuevo, hace énfasis en el método de su demostración: una forma del principio de inducción transfinita el cual afirma que no depende del Axioma de Elección.(Jourdain,1921,240).

Las primeras dos secciones se dedican al análisis histórico de los intentos por demostrar el Teorema del Buen Orden, así como a hacer algunas observaciones que manifiestan su desacuerdo con el Axioma de Elección y con algunos matemáticos. Es extraño que Jourdain afirme que "Cantor explícitamente usó el Axioma de Elección para demostrar el Teorema del Buen Orden"(Jourdain,1921,242), en una carta que le envió a Hilbert en 1896 y a Dedekind en 1899; de nuevo insiste en criticar a Russell por su teoría limitada y termina afirmando que Zermelo no es un lógico matemático. Hace referencia a sus propias demostraciones fallidas del Teorema del Buen Orden y las justifica al decir que como "muchos matemáticos he usado inconcientemente el Axioma de Elección" (Jourdain,1921,244). Por último, hace referencia explícita al trabajo de Hartog (Hartog,1915) cosa que en los artículos analizados anteriormente no hace, siendo que su método estaba inspirado en el trabajo de él.

La exposición de la demostración es similar a la que dió en (Jourdain,1918a), las definiciones son las mismas, salvo el caso de las continuaciones directas **2.211**, que ahora llama K-clases.

Jourdain aclara que en el caso finito de bien ordenar un conjunto no necesita el Axioma de Elección, así es que sólo resta probarlo para conjuntos infinitos.

La manera de atacar este problema es la siguiente: considera la clase que contiene a todos los posibles órdenes de las M-cadenas de tipo γ; desea demostrar que si δ es un número ordinal, y se considera que todas las M-cadenas de tipo α tal que $\alpha < \delta$ entonces se garantiza la existencia de una M-cadena de tipo δ, lo cual es una Aplicación directa del LEMA DE ZORN.

Tal vez, esto sea un aspecto histórico muy importante; de hecho, en casi todas las demostraciones que Jourdain escribió, usa de manera implícita el Lema de Zorn que en aquella época ni siquiera se había demostrado que era equivalente al Axioma de Elección. El trabajo de Jourdain en este artículo tal vez le hubiese dado la oportunidad de que la comunidad matemática reconociése un nuevo método para demostrar afirmaciones en matemáticas. Lo paradójico de este hecho es que el Lema de Zorn surgió entre los algebristas para evitar el uso del Teorema del Buen Orden. Es necesario también notar que Jourdain nunca hizo explícito el Lema de Zorn aunque hay indicios al considerar elementos máximos de ciertas M-cadenas (Jourdain,1921,251).

El resto del artículo es sólo una repetición de las ideas descritas en el análisis de la primera demostración; desde luego, al hacer publicado este artículo en una revista matemática, es mucho más explícito. Cabe mencionar que en la definición de lo que es una K-cadena **2.211**, Jourdain sólo considera el caso de ordinales α que no tienen predecesor inmediato, precisamente (Jourdain,1919) había tratado de demostrar su conjetura para ordinales sin predecesor inmediato, que es el que tiene problemas.

La última sección del artículo puede corroborar la sospecha de que Jourdain se acercó mucho a la equivalencia del Lema de Zorn y el Axioma de Elección, dice textualmente: "el método anterior es de algún modo, análogo a aquel por el cual todas las permutaciones posibles de un conjunto finito puede ser construído sistemáticamente sin tener una elección arbitraria".

2.3 COMPARACION DE LAS DEMOSTRACIONES DE ZERMELO Y JOURDAIN DEL TEOREMA DEL BUEN ORDEN

Esta sección está dedicada a comparar las demostraciones que estos dos matemáticos hicieron del Teorema del Buen Orden. La polémica se inició (como se había notado en la sección anterior) cuando Zermelo dá una demostración del teorema en 1904; de hecho, no publica una versión completa de su demostración, sino hasta 1908. Lo único que hace es comunicársela por carta a Hilbert y él a su vez publica en el *Mathematische Annalen* una parte de esa misma.

Jourdain al contrario de Zermelo, publica demostraciones del Teorema a partir de 1905. Se ha visto que el carácter de Jourdain era un poco difícil; en especial, Zermelo no es de su agrado. Desde que apareció su artículo (Jourdain,1905a), hacía referencia explícita a la rivalidad, que de aquí hasta su muerte, tendría con Zermelo.

Es un hecho notable que ambos matemáticos en sus artículos critiquen las demostraciones del otro, y que sean bastante explícitos (Jourdain,1905a), (Zermelo,1908). Desde la redacción en los artículos se nota una clara diferencia; el estilo de Jourdain se tiende más a un marco filosófico, en cambio Zermelo predice el estilo de escribir matemáticas como se hace actualmente.

"La demostración que Jourdain (Jourdain,1905a) opone a la mía como una más sencilla se puede explicar de la siguiente manera: Si M es un conjunto arbitrario, tómese un elemento cualquiera como primer elemento, luego otro y así sucesivamente; después de un número finito o infinito de elementos escogidos tómese un elemento arbitrario del resto como el próximo elemento y continuése de esta manera hasta agotar el conjunto." [Zermelo 1904,]

Más adelante, Zermelo continúa con una crítica de este método como un matemático actual lo haría: desmiente su originalidad, la compara con su propio método y termina señalando las afirmaciones sin demostración que Jourdain hace.

En cambio Jourdain se límita a señalarle que él había pensado antes en la demostración del teorema y que, de hecho, tenía resultados más completos. Con el tiempo, Jourdain "aprendió" a ser un poco más explícito, el artículo póstumo (Jourdain,1921) es un ejemplo excelente de esto último. (Veánse en especial las dos primeras secciones).

La crítica de Zermelo predice lo que a partir de 1905 Jourdain trata de hacer: fundamentar matemáticamente su idea: "proceso de inducción matemática generalizada" (Jourdain,1919). De nuevo, el problema (como se vió en la sección anterior), es que estos artículos fueron publicados en revistas de filosofía, hecho no fortuito, pues él era editor de una.

Ahora bien, Jourdain acabó siendo muy explícito en el desacuerdo que tenía con la demostración de Zermelo: el uso del Axioma de Elección. Como se hizo notar en la última parte de la sección anterior, la idea de la demostración de Jourdain èra usar algo que actualmente se llama el Lema de Zorn. Durante la serie de cuatro artículos revisados en la sección anterior , es claro que el esfuerzo de Jourdain consistió en tratar de explicar su "método" que al final llama, "una inducción que en general es transfinita" (Jourdain,1921,240).

Puede resumirse entonces cual es la diferencia primordial entre las demostraciones de estos dos matemáticos. Por un lado, una visión distinta de la lógica matemática; Por otro, el uso de dos principios equivalentes: el Lema de Zorn y el Axioma de Elección. De cierta manera, no es fácil decidir cual es la verdadera distinción entre las demostraciones de Zermelo y Jourdain; persiguieron el mismo fín: aclarar lo que un gran matemático (admirado por los dos), Cantor, había tratado de hacer.

De esta forma, Jourdain tal vez marque el final de una persona que adoraba la historia, la filosofía y las matemáticas; el concepto de ciencia para él estuvo marcado por la tradición de los científicos del siglo pasado. Zermelo, acaso sea el inicio de la forma moderna de hacer matemáticas. Si se hiciese un juicio final, Jourdain tuvo el espíritu, más cercano que Zermelo, al fundador de la Teoría de los Conjuntos: Cantor.

2.4 COMO CONCEBIA JOURDAIN LAS MATEMATICAS

Sin duda alguna, el lector habrá notado una característica primordial durante la exposición de este trabajo: las matemáticas de Jourdain no están excentas de una vinculación con la filosofía. Además, debemos de tomar en cuenta el lugar tan importante que tuvo el estudio de los fundamentos de las matemáticas a principios de siglo.

Desde luego, él perteneció a esta escuela de matemáticos interesados en aclarar –tanto matemática como filosóficamente– las raíces de las matemáticas Al mismo tiempo, tuvo la lucidez suficiente para advertir que la historia de las matemáticas era un objeto de estudio primordial.

Hay un rasgo muy interesante en la concepción de las matemáticas de Jourdain: su desconfianza por el Axioma de Elección. Algunos de sus matemáticos favoritos fueron Leibniz y Peano (Jourdain,1910,96); incluso hay comentarios evidentes de su posición frente a las matemáticas (Jourdain,1910,105), tales como:

"Las definiciones no son estrictamente hablando necesarias".

"Una definición no necesita una demostración, es simplemente el efecto de nuestra voluntad de representar un grupo de símbolos por una única expresión".

"No necesitamos demostrar, por ejemplo, la existencia de lo que definimos".

"Desde luego, es adecuado definir cosas que existen en la práctica pero también se pueden definir cosas que no existen".

Estas frases de Jourdain, expresan explícitamente lo que pensaba acerca de las 'Matemáticas'; ya que había formulado una distinción entre "Matemáticas" como el conjunto de verdades descubiertas y "matemáticas" el conjunto de métodos usados para descubrirlas.

Jourdain, como se mencionó anteriormente, mantuvo correspondencia con varios de los matemáticos importantes de su época.

De lo cual se puede concluir que: Jourdain siempre estuvo interesado por conocer y difundir los trabajos de varios matemáticos; en especial de los alemanes dedicados a la Teoría de Conjuntos. La característica primordial de la mayoría de sus artículos es el de plantear un debate frente a las ideas matemáticas de varios de sus colegas (Cantor, Leibniz, Peano, Russell, Zermelo,etc.). No sería aventurado afirmar que Jourdain creía más en la lógica de Brouwer (intuicionismo) que en el formalismo de Hilbert, debido primordialmente al Axioma de Elección.

Es importante señalar que Jourdain concebía a la lógica matemática y a la lógica como entes distintos; más aún, en su tiempo, la mayoría de los matemáticos que se dedicaban a la lógica matemática eran o bien topólogos, ó analistas. Jourdain acaso haya sido uno de los primeros matemáticos cuyo interés era la lógica matemática por sí misma. En la mayoría de los trabajos que escribió diferenció vehementemente las ideas de Cantor, en especial los números transfinitos.

Al final de su vida, Jourdain comenzó a cambiar su concepción de las matemáticas; su último artículo (Jourdain,1921) es una mezcla de un historiador de las matemáticas y un lógico matemático que se olvida de sus ideas filosóficas para concentrarse solamente en la solución de un problema matemático.

No hay mucho más que decir, es importante señalar que Jourdain pensó firmemente en una lógica matemática que fundamentáse los problemas matemáticos del siglo XIX. Para él, esta disciplina era tan genuina como hacer análisis o topología; hecho que es bastante sorprendente.

Un comentario adicional: si el lector está interesado en conocer los escritos originales de Jourdain, puede consultar la bibliografía completa publicada en (*Mathesis*,Vol I,No.2,159-171).

CONCLUSIONES

Es así como se presenta en esta tesis un trabajo poco frecuente en las matemáticas, un análisis histórico de algunas demostraciones fallidas. De esta forma, se obtiene una visión más real del trabajo de los matemáticos. Es cierto que han existido grandes personajes en las matemáticas, los cuales han obtenido muchos resultados fundamentales, pero también es cierto que en la mayoría de los casos, estos resultados ocultan detrás de sí, el trabajo de cientos de matemáticos que consumen sus vidas buscando por el lugar equivocado; dando así, a la comunidad matemática, la demostración de que ese camino no era el indicado y se pierden en la historia de las matemáticas, como en gran medida, es el caso de Jourdain.

Aún más, pensaba que la teoría de los números transfinitos era muy importante para el desarrollo de las matemáticas, lo cual fundamenta en (Jourdain,1910, 95). Dentro de la teoría de números transfinitos, el problema que consideró más importante y que después le obsesionó fué el Teorema del Buen Orden.

Jourdain no es un personaje muy conocido en el mundo matemático actualmente, pero es importante reconocerlo por su empeño y por su visión distinta de las matemáticas. Es un digno representante de aquellos matemáticos a quienes la historia no hace míticos, como sucede con la mayoría.

Los resultados obtenidos en este trabajo, presentan un panorama general de las demostraciones que Jourdain hizo acerca del Teorema del Buen Orden, y su relación con las Matemáticas. La evaluación de la influencia que tuvo en las mismas, sobrepasa los propósitos de este trabajo.

Acaso haya un indicio de tal influencia: Jourdain fué editor de varias revistas que publicaban artículos sobre los Fundamentos de las Matemáticas; así mismo, tradujo los trabajos de Cantor al inglés.

Así como la historia de Jourdain, existen un sin fín de historias por analizar en el mundo de las matemáticas en todas las épocas. Sería importante que este tipo de trabajos se realizaran con más frecuencia, pues pueden propiciar grandes contribuciones a las matemáticas modernas.

BIBLIOGRAFIA.

Burali-Forti Cesare.

1897 "Sulle classe ben ordinate", Circolo Matematico di Palermo, Rendiconti 11, p.260 ; traducido al inglés por Van Heijenoort 1967 pp. 111-112.

Cantor Georg.

1878 "Ein Beitrag zur Manningfaltigkeitslehre", Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) 84, pp.242-258.

1883 "Über unendliche lineare Punktmannichfalttigkeiten V" (Grundlagen), Mathematische Annalen 21, pp.545-591.

1895 "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I", Mathematische Annalen 46, pp.481-512; traducido al inglés por Jourdain en 1915, Open Court.

1897 "Beiträge zur Begründung der trnasfiniten Mengenlehre II", Mathematische Annalen 49, pp.207-246; traducido al inglés por Jourdain en 1915, Open Court.

Jourdain Philip E.B.

1904b "On the Transfinite Cardinal Numbers of Number-Classes in General",Philosophical Magazine 7, pp.294-303.

1904c "On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-ordered Aggregates", Philosophical Magazine 7, pp.61-75.

1905a "On a Proof that every Aggregate can be well-ordered", Mathematische Annalen 40, pp.465-470.

1905f "On Transfinite Cardinal Numbers of The Exponential Form", Philosophical Magazine 9, pp.42-56.

1910 "Transfinite Numbers and The Principles of Mathematics", The Monist 20, pp.93-118.

1915 Traducción al inglés e Introducción "Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers" (Cantor,1895), (Cantor,1897) Open Court Publishing Company.

1918a "A Proof that any aggregate can be well-ordered", Mind 27, pp.386-388.

1919 "A Proof that any aggregate can be well-ordered", Mind 28, pp.382-384.

1921 "A Proof that every aggregate can be well-ordered", Acta Mathematica 43, pp.239-261.

Moore Gregory.

1982 "Zermelo's Axiom of Choice", Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 8, Springer-Verlag.

Russell Bertrand y Whitehead Alfred North.

1910 "Principia Mathematica", Cambridge University Press, Vol.1.

Van Heijenoort Jean.

1967 "From Frege to Gödel. A Source book in Mathematical Lo gic 1879-1931",Cambridge: Harvard University Press.

Waldegg, Guillermina

1987 Tesis Doctoral, (sin publicar).

Zermelo Ernst.

1904 "Beweis , das jede Menge wohlgeordnet werden khann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)", Mathematische Annalen 59, pp.514-516; traducido al inglés por Van Heijenoort 1967, pp.139-141.

1908a " Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung", Mathematische Annalen 65, pp.107-128; traducido al inglés por Van Heijenoort 1967,pp.183-198.

1908b "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", Mathematische Annalen 65, pp.261-281; traducido al inglés por Van Heijenoort 1967, pp.199-215.