2 - 38

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMACION LINEAL. ESTRUCTURA DE TRANSPORTE ASOCIADA A REDES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

P R E S E N T A :

CARLOS ALEJANDRO NOYOLA PINEDA

MEXICO, D. F. 1988

I N D I C E

CAPITULO III

"EL METODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES"

CAPITULO IV

"EL METODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES CON VARIABLES ACOTADAS."

CAPITULO V

"COMPARACIONES COMPUTACIONALES DE METODOS DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA MAS GENERAL, EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO CON VARIABLES ACOTADAS."

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objeto analizar las propiedades de los modelos lineales de : Transporte, Asignación, Flujo Máximo y Flujo a Costo Mínimo en sus formulaciones matemáticas, de tal manera que puedan generalizarse todos ellos, bajo un mismo modelo; dicha generalización corresponde al problema de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas.

Una vez establecida dicha generalización se analiza alguno de los métodos de solución para este último modelo que engloba a los anteriores.

Todos estos modelos son problemas de programación lineal, la cual estudia la forma de minimizar o maximizar una función lineal donde las variables deben satisfacer un conjunto de desigualdades y/o ecuaciones. La popularidad de la programación lineal se puede atribuir a muchos factores, entre los que destacan la posibilidad de modelar problemas grandes y complejos, y facilita a los usuarios el resolver problemas a gran escala en un tiempo razonable mediante el uso del método simplex y de las computadoras. Desde que George B. Dantzig desarrollo el método simplex en 1947, la programación lineal se ha utilizado extensamente en el area militar, industrial, gubernamental y de planificación urbana, entre otras.

La formulación general de un problema de programación lineal es:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + Cn\, Xn \\
\text{sujeto a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_{1n} \geq b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_{2n} \geq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_{mn} \geq bm \\
 & x_1 , x_2 , \dots , x_n \geq 0
\end{array}$$

Donde $C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$ es la función objetivo que debe minimizarse y se denota por Z.

Los coeficientes C_1 , C_2 , ... , C_n son los coeficientes de costo y X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n son las variable de decisión cuyo valor debe determinarse.

A la desigualdad $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \quad b_j$, se le denomina la ---- i-ésima restricción.

Los coeficientes A_{ij} para i=1,2,....m , j=1,....,n se - llaman los coeficientes tecnológicos. Estos forman la matriz - de restricciones A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A el vector columna, cuya i-ésima componente es b_i se - le llama vector de requerimentos, representa los requerimentos mínimos que deben satisfacerse. Las restricciones X_1, X_2, ...,X_n 0 son las restricciones de no negatividad.

A su vez, se analiza también el método simplex especializado en redes para el Problema de Transporte y se realiza un

Programa en Lenguaje Pascal para resolver este problema.

Además se mencionan métodos de solucion para el problema de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas, que es el problema que engloba a los ya mencionados, dichos métodos analizan el tiempo de solución en base al número de arcos, pivoteos, nodos, etc, de tal forma que se presentan los más eficientes.

C A P I T U L O I

" ESTRUCTURA Y PROPIEDADES DE LOS MODELOS LINEALES DE TRANSPORTE, ASIGNACION, FLUJO MAXIMO, FLUJO A COSTO MINIMO Y FLUJO A COSTO MINIMO CON VARIABLES ACOTADAS."

1.- EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Este problema supone que m orígenes tienen que surtir a n centros de consumo con cierto producto. La oferta del origen i es a_i (i = 1, ... , m) y la demanda en el centro de consumo j es b_j (j = 1, ... , n), por lo que tenemos $a_i > 0$ y $b_j > 0$ Se supone que C_{ij} es el costo de enviar una unidad del producto de origen i al centro de consumo j (i = 1, ... , m , j = 1, ... n), por lo que tomamos $C_{ij} \geq 0$. El problema se reduce a determinar cuantas unidades del producto deben enviarse del -- origen i al centro de consumo j, tal que:

Se minimicen los costos totales de distribución y se satisfaga la demanda del centro de consumo j, sin exceder a la -

capacidad de oferta de origen i.

Sean X_{ij} las variables de decisión. Entonces la formulación matemática del problema es:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad i=1,\ldots,m \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad j=1,\ldots,n \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Esta última formulación se denomina una estructura de -- transporte. La restricción (1) indica que todo envio del pro--- ducto que emana del origen i y que se envia a todos los posi--- bles n destinos, debe ser igual a la oferta del origen i que -- es a_i; existe una restricción de este tipo para cada origen. -- La restricción (2) indica que todo el producto que llega al --- centro de consumo j de todos los posibles m orígenes debe ser - igual a la demanda del centro de consumo b_j. Existe una restricción de este tipo para cada centro de demanda.

Una condición necesaria y suficiente para que el Problema de Transporte (PT) tenga solución es que este balanceado, - es decir que la oferta total sea igual a la demanda total por lo que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \text{ donde suponemos } a_i > 0,\ b_j > 0$$

Si sucede que $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ entonces si ocurre que:

a)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Por lo que todo flujo que emana de los m orígenes y que se envia a los posibles n destinos excede a la demanda total - es decir que existe un excedente de flujo que no tiene un destino que lo capte.

b)

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Entonces existe una falta de flujo que no alcanza a cubrir la demanda requerida y por lo cual se necesita un centro de oferta que envie el flujo requerido para completar el flujo faltante por lo que resulta necesario que existan centros de - oferta suficientes para cubrir la demanda.

Por lo tanto una condición necesaria y suficiente para que el Problema de Transporte tenga solución es que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Podemos establecer dos matrices, una de costos y otra - de flujos tal como se muestra a continuación.

		DESTINOS			
		1	2............	n	OFERTA
	1	C_{11}	C_{12}..........	C_{1n}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}..........	C_{2n}	a_2
	.	.	.	.	.
ORIGENES	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	m	C_{m1}	C_{m2}..........	C_{mn}	a_m
DEMANDA		b_1	b_2............	b_n	

		DESTINOS			
		1	2............	n	OFERTA
	1	X_{11}	X_{12}..........	X_{1n}	a_1
	2	X_{21}	X_{22}..........	X_{2n}	a_2
	.	.	.	.	.
ORIGENES	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.
	m	X_{m1}	X_{m2}..........	X_{mn}	a_m
DEMANDA		b_1	b_2	b_n	

En el caso de que la oferta total sea mayor que la demanda total es decir $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, entonces se añade un centro de consumo artificial, (n+1), cuya demanda b_{n+1} es $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ y cuyos costos unitarios $C_{k,n+1}, k=1,\ldots,m$ son todos ceros.

En forma tabular se tiene

DESTINOS

		1	2..........n	n+1	OFERTA
	1	C_{11}	$C_{12}\ldots\ldots C_{1n}$	0	a_1
ORIGENES	2	C_{21}	$C_{22}\ldots\ldots C_{2n}$	0	a_2
	.	.	. .	.	.
	.	.	. .	.	.
	.	.	. .	.	.
	m	C_{m1}	$C_{m2}\ldots\ldots C_{mn}$	0	a_m
DEMANDA		b_1	$b_2\ldots\ldots b_n$	$\sum_{i=j}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$	

Por otro lado, si la demanda total excede a la oferta total es decir $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, entonces se añade un centro de oferta artificial m+1 cuya capacidad de oferta a_{m+1} es: $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ y cuyos costos unitarios $C_{m+1,k}, k=1,\ldots,n$ son "muy grandes" los cuales los denotamos por M

Tabularmente tenemos

		DESTINOS				
		1	2	3.....	n	OFERTA
ORIGENES	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}....	C_{1n}	a_1
	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}....	C_{2n}	a_2
	.	.	.	.....	.	.
	.	.	.	.....	.	.
	.	.	.	.....	.	.
	m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}....	C_{mn}	a_m
	m+1	M	M	M	M	$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$
DEMANDA		b_1	b_2	b_3....	b_n	

Cuando un problema real esta desbalanceado, es decir --- $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ añadiendo ya sea origenes o destinos artificiales, se le balancea y asī se satisface la condición necesaria y su-- ficiente para que el problema tenga solución.

El Problema de Transporte puede escribirse en forma con- densada como:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= CX \\ AX &= b \quad \text{(PT)} \\ X &\geqslant 0 \end{aligned}$$

donde la estructura de los componentes de (PT) es la siguiente:

$x^t = (x_{11},x_{12},\ldots,x_{1n},x_{21},x_{22},\ldots,x_{2n},\ldots,x_{m1},x_{m2},\ldots,x_{mn})$

$C = (c_{11},c_{12},\ldots,c_{1n},c_{21},c_{22},\ldots,c_{2n},\ldots,c_{m1},c_{m2},\ldots,c_{mn})$

$b^t = (a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n)$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \mathbb{1} \\ I_n & I_n & I_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & I_n & I_n \end{pmatrix}}_{\text{mxn columnas}} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{m renglones} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} \text{n renglones} \end{array} \quad \text{m+n renglones}$$

El vector $\mathbb{1}$ y el vector 0 son vectores fila conteniendo n unos y n ceros, respectivamente:

$$\mathbb{1} = \overbrace{(\ 1,1,1,\ldots\ldots,1\ )}^{\text{n componentes}}$$

$$0 = \underbrace{(\ 0,0,0,\ldots\ldots,0\ )}_{\text{n componentes}}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad \text{n componentes}$$

La matriz A es la que da al Problema de Transporte su - estructura especial. Sus propiedades permiten una aplicación - simple y eficiente del método simplex para problemas de transporte (método simplex especializado en redes).

La propiedad más importante que tiene la matriz de ---- transporte es la propiedad de unimodularidad total es decir -- que el determinante de cualquier submatriz cuadrada tiene va-- lor 0, 1 ó -1. Se demostrará esta propiedad y mediante la misma se verá que esto conlleva a tener soluciones enteras para - este problema.

DEMOSTRACION.

Se probará primero que el rango $(A)=m+n-1$

Suponiendo m y $n \geqslant 2$ se tiene que $m+n \leqslant mn$ de manera que rango $(A) \neq m+n$ pues la suma de los primeros m renglones es ---- igual a la suma de los últimos n renglones y en consecuencia, los $m+n$ renglones de A son linealmente dependientes así que -- rango $(A) \leqslant m+n-1$; para demostrar que rango (A) es igual a $m+n-1$ es necesario encontrar una submatriz de $(m+n-1)$ de A que sea - no singular.

Primeramente consideramos la matriz A omitiendo el último renglón de ésta y consideramos la submatriz A' dada de la - siguiente manera

$$A' = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots\ldots, a_{mn}, a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1,n-1})$$

la cual es una matriz triangular superior de la forma

$$A' = \begin{bmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde:

I_m es una matriz identidad de mxn

I_{n-1} es una matriz identidad de n-1xn-1

0 es la matriz "cero" de n-1xm y

Q es la matriz de mxn-1 con 1's en su primer renglón y ceros en los siguientes.

de tal forma que A' tiene 1's en la diagonal por lo que ------ det $A'=1\neq 0$ lo que implica que A' tiene inversa, por lo cual A tiene rango $=m+n-1$.

En el caso de la matriz de transporte, puesto que todos los elementos son Ø ó 1, cada submatriz 1x1 tiene el valor --- Ø ó 1, además cualquier submatriz $(m+n)x(m+n)$ tiene determinante de valor Ø pues el rango $(A)=m+n-1$. Sólo falta demostrar -- que cualquier submatriz kxk con $1<k<m+n$ tiene la misma propiedad.

Sea A_k cualquier submatriz kxk de A. Debe probarse que det $A_k = \pm 1$ ó Ø. por inducción sobre k, supongamos que la propiedad es cierta para A_{k-1} (se sabe que es cierto para A_1). Recordemos que cada columna de A_k tiene, ya sea ningún 1, solo -

un 1, ó dos 1s. Si ninguna columna de A_k tiene 1's entonces el det $A_k=0$, si por otra parte, cada columna de A_k tiene dos 1's - entonces uno de los 1's ocurre en el renglón de origen y otro 1 ocurre en el renglón de destino. En este caso, la suma de los renglones origen A_k es igual a la suma de los renglones destino de A_k. Por lo tanto los renglones de A_k son linealmente dependientes y det $A_k=0$. Finalmente si alguna columna de A_k contiene un solo 1, entonces expandiendo det A_k en los menores de esa - columna se obtiene

$$\det A_k = \pm \det A_{k-1}$$

en donde A_{k-1} es una submatriz $(k-1)x(k-1)$, pero por la hipótesis de inducción det $A_{k-1}= \pm 1$ ó Ø. Por lo tanto la propiedad se cumple para A_k, por lo tanto cualquier submatriz A_k de kxk de A tiene det= $\pm$ 1 ó Ø. Por lo tanto A es totalmente unimodular.

Ahora demostraremos que las soluciones para esta estructura de transporte son enteras.

Si B es una matriz básica de A, entonces det $B \neq 0$, esto implica que si tenemos el sistema $BX=b$ la solución única al -- sistema es

$$X_{ij} = \frac{\det B_j}{\det B}$$

donde como det $B \neq 0$ y A es totalmente unimodular el det $B= \pm 1$, además como B_j es la matriz que se obtiene de reemplazar la -- j-ésima columna de B por b y este es un vector de enteros (si la oferta y la demanda son enteros) entonces las soluciones a este sistema resultan ser enteras.

2.- EL PROBLEMA DE ASIGNACION.

Se puede pensar intuitivamente que en un Problema de -- Asignación los orígenes son personas buscando trabajo y los destinos son trabajos disponibles. Existe un costo C_{ij} por asignar a la persona i a un trabajo j. La restricción que existe en este tipo de problemas es que a cada persona, se le asignará un solo trabajo y a cada trabajo se le asignará una sola persona de tal forma que si X_{ij} son las variables de decisión estas solo pueden tomar el valor de cero ó uno, cero en el caso en que a la persona i no se le asigna un trabajo j y uno en caso contrario, donde a la persona i se le asigna el trabajo j.

La formulación de un Problema de Asignación es la siguiente:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad i=1,\ldots\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1, \quad j=1,\ldots\ldots,n$$

$$X_{ij} \in \{0,1\} \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots\ldots,m \\ j=1,\ldots\ldots,n \end{array}$$

Este tipo de problemas son lineales, con una estructura de transporte, solo que la oferta en cada origen es de valor - uno y la demanda en cada destino es tambien de valor uno.

Una condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga una solución, es que este balanceado, es decir que la oferta total sea igual a la demanda total. Por lo - que si hay m orígenes y n destinos se requiere que m y n sean iguales. A un Problema de Asignación desbalanceado se le balancea del mismo modo que a un Problema de Transporte.

El Problema de Asignación, puede escribirse en forma -- condensada como:

$$\text{Min } Z = CX$$

s.a.

$$AX = \mathbb{1}^t$$

$$X_{ij} = \emptyset \text{ ó } 1 \qquad i,j=1,\ldots,m$$

en donde A, X y C estan definidos como en el Problema de Transporte en donde m=n, entonces $X=(X_{11},X_{12},\ldots,X_{1m},\ldots,X_{m1},\ldots,$ - $X_{mn})^t$ y A es una matriz $2m\text{x}m^2$ cuya columna (i,j) es $a_{ij}=e_i+e_{m+j}$

para $i=1,...m$ y $j=1,2,...,m$, y donde e_i y e_{m+j} son vectores - en E^{m+j} de tal forma que e_i y e_{m+j} tienen unos en la i-ésima y en la m+j-ésima posiciones. El vector $C=(C_{11},C_{12},..C_{im},C_{21},...,C_{2m},...,C_{m1},...,C_{mn})$ y A tiene la misma propiedad de unimodularidad total.

Como un resultado de las restricciones $AX = \mathbb{1}^t$ ningún X_{ij} puede ser mayor que 1, además por consideraciones anteriores las soluciones del sistema $AX=b$ son enteras por lo que todos los X_{ij} seran $\emptyset$ ó 1 en una solución óptima.

Esto permite reemplazar la restricción $X_{ij}=0$ ó 1 por la restricción $X_{ij} \geqslant 0$.

Asi se obtiene:

$$\text{Min } Z = CX$$

s.a

$$AX = \mathbb{1}^t$$

$$X \geqslant 0$$

3.- EL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.

Consideremos una red con m nodos y n arcos a través de la cual fluye un solo tipo de bien o unidad. A cada arco (i,j) se asocia sobre el flujo una cota inferior $l_{ij}= 0$ y una cota superior U_{ij}. En el problema de flujo máximo no intervienen -- costos. En la red se desea encontrar la cantidad máxima de flujo de un nodo fuente s a un nodo destino t. Si representamos - por v la cantidad de flujo en la red del nodo s al nodo t, entonces el problema de flujo máximo se puede enunciar como si-- gue:

$$\text{Max } v = \sum_{i} X_{it} - \sum_{k} X_{tk} = \sum_{k} X_{sk} - \sum_{i} X_{is}$$

s.a.

$$\sum_{i} X_{ij} - \sum_{k} X_{jk} = \begin{cases} -v & \text{si } j = s \\ 0 & \text{si } j \neq t,s \\ v & \text{si } j = t \end{cases}$$

$$0 \leqslant X_{ij} \leqslant U_{ij}$$

donde

X_{ij} es el flujo del nodo i al nodo j

U_{ij} es la cota superior sobre el flujo del nodo i al - nodo j

v es el valor del flujo a maximizar

Este problema tiene métodos propios de solución que resultan más eficientes que el método simplex.

Un algoritmo que resuelve este problema es el algoritmo de Ford y Fulkerson y lleva el nombre de algoritmo de etiquetas (The Labeling algorithm).

El problema de flujo máximo puede plantearse en forma - matricial como:

$$\begin{aligned} &\text{Max } v \\ &\text{s.a} \\ &\qquad AX = b \\ &\qquad 0 \leqslant X \leqslant U \end{aligned}$$

donde

V es el valor del flujo a maximizar

$X^t = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn})$

$$b_j = \begin{cases} -v \text{ si } j = s \\ o \text{ si } j \neq s,t \\ v \text{ si } j = t \end{cases}$$

$U = (U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n}, \ldots, U_{m1}, \ldots, U_{mn})$

A es la matriz de incidencia* donde ésta tiene un renglón para cada nodo de la red y una columna para cada arco.

*Ver apéndice.

4.- EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO.

Consideremos una red dirigida G, que consiste de un conjunto finito de nodos (puntos) $M = \{1,2,\ldots\ldots,m\}$ y un conjunto de arcos dirigidos (lineas) $S = \{(i,j),(k,l),\ldots,(s,t)\}$ que -- unen parejas de nodos en M.

Con cada nodo i en G se asocia un número b_i que representa los recursos disponibles de un artículo (si $b_i > 0$) o la - demanda requerida del artículo (si $b_i < 0$). algunas veces, los - nodos con $b_i > 0$ se llaman orígenes y los nodos con $b_i < 0$ se llaman destinos. Asociado con cada arco (i,j) se tiene el número X_{ij}, que representa la cantidad de flujo sobre el arco (se supone que $0 \leq X_{ij}$), y el número C_{ij}, que es el costo unitario de transporte a lo largo del arco.

Se supondra que la oferta total en la red es igual a la demanda total, es decir $\sum_{i=1}^{m} b_i = 0$, si este no es el caso es decir si $\sum_{i=1}^{m} b_i > 0$, entonces se añade un nodo ficticio m+1, con demanda $b_{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} b_i$ y arcos con costo cero desde cada nodo - de recursos hasta el nuevo nodo.

Las restricciones se llaman ecuaciones de conservación de flujo o ecuaciones de Kirchhoff e indican que, en la red, -

no se puede crear ni destruir flujo. En las ecuaciones de conservación $\sum_{k=1}^{m} X_{jk}$ representa el flujo total que sale del nodo j, mientras que $\sum_{k=1}^{m} X_{ki}$ es el flujo total que entra al nodo i.

El problema de flujo a costo mínimo en una red puede -- plantearse como el problema de programación lineal en donde -- X_{ij} es la cantidad de flujo a través del arco $(i,j) \in S$.

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in S} C_{ij} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{k} X_{jk} - \sum_{i} X_{ij} = b_j \qquad j \in M$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in S$$

S conjunto de n arcos (i,j) dirigidos en la red G(M,S)

M conjunto de m nodos

X_{ij} cantidad de flujo a través del arco $(i,j) \in S$

C_{ij} costo unitario de transporte del nodo i al nodo j

b_j requerimientos en el nodo j

$b_j > 0$ es referido a la oferta

$b_j < 0$ es referido a la demanda

Las resticciones del problema se derivan del hecho de - que la cantidad total de flujo que sale de un vértice i debe -

ser igual a la cantidad que llega a él, más la oferta de éste vértice.

El problema de flujo a costo mínimo puede plantearse en forma matricial como:

$$\text{Min } Z = CX$$

$$\text{s.a.}$$

$$(P) \qquad AX = b$$

$$X \geqslant 0$$

donde

$$C = (C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n}, \ldots, C_{m1}, C_{m2}, \ldots, C_{mn})$$
$$X^t = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, X_{21}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn})$$
$$b^t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

A es la matriz de incidencia, donde esta tiene un renglón para cada nodo de la red y una columna para cada arco. - Cada columna de A contiene exactamente dos coeficientes distintos de cero: un "+ 1" y un "- 1". La columna asociada con el arco (i,j) contiene un "+ 1" en el renglón i, un "- 1" en el renglón j, y todos los elementos restantes son cero. Por lo tanto las columnas de A estan dadas por

$$a_{ij} = (e_i - e_j)$$

en donde e_i y e_j son vectores unitarios en E^m, con 1's en la i-ésima y j-ésima posiciones respectivamente. La matriz A se llama matriz de incidencia.

Para resolver el problema de programación lineal asociado a la siguiente formulación.

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } Z = CX \\ & \text{s.a.} \\ (P) & AX = b \\ & X \geqslant 0 \end{array}$$

puede utilizarse el algoritmo simplex; sin embargo, gracias a la estructura de A, este algoritmo puede simplificarse en estos casos.

Esta simplificación del algoritmo simplex recibe el nombre de método simplex especializado en redes.

El primer problema que surge cuando se resuelve el problema (P) es la identificación de una base de la matriz de restricciones. Se caracterizan dichas bases como árboles expandidos con cierta característica. Más adelante veremos la aplicación de dicho método para estos problemas.

5.- EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO EN UNA RED CON CAPACIDADES EN LOS ARCOS.

El problema de flujo a costo mínimo en una red con capacidades en los arcos es el problema más general y en el que podemos englobar el problema de flujo a costo mínimo al problema de transporte, al Problema de Asignación y al Problema de Flujo Máximo.

Su formulación mátemática es la siguiente:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in S} C_{ij}X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_k X_{jk} - \sum_i X_{ij} = b_j \quad j \in M$$

$$0 \leq l_{ij} \leq X_{ij} \leq U_{ij} \qquad (i,j) \in S$$

donde

S es el conjunto de n arcos dirigidos (i,j) en la red-- G(M,S)

M es el conjunto de m nodos

X_{ij} flujo dirigido del nodo i al nodo j

C_{ij} costo unitario del flujo del arco (i,j)

l_{ij} cota inferior del flujo del arco (i,j)

U_{ij} cota superior del flujo del arco (i,j)

b_j requerimientos del flujo en el nodo j

si $b_j < 0$ es referido a la oferta

si $b_j > 0$ es referido a la demanda

EL Problema de Flujo a Costo Mínimo con Capacidades en los Arcos puede plantearse en forma matricial como:

$$\text{Min } Z = CX$$

s.a.

$$AX = b$$

$$L \leq X \leq U$$

donde

$$C = (C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1n}, \ldots, C_{m1}, \ldots, C_{mn})$$

$$X^t = (X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, X_{21}, \ldots, X_{2n}, \ldots, X_{m1}, \ldots, Xmn)$$

$$b^t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$$L = (l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n}, \ldots, l_{m1}, \ldots, l_{mn})$$

$$U = (U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1n}, \ldots, U_{m1}, \ldots, U_{mn})$$

A es la matriz de incidencia definida igual que en el - problema de flujo a costo mínimo.

C A P I T U L O II

"UNIFICACION DE LA ESTRUCTURA DE LOS MODELOS LINEALES DE TRANSPORTE, ASIGNACION, FLUJO MAXIMO Y FLUJO A COSTO MINIMO CON LA ESTRUCTURA DEL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO CON VARIABLES ACOTADAS".

Una vez analizada la estructura y propiedades de los modelos lineales se llevará a cabo la unificación de estos problemas bajo la estructura más general que es la del Problema de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas, por lo que veremos alguno de los métodos de solución para este último observando cuales de estos son los más eficientes desde el punto de vista computacional, de tal forma que aunque cada uno de los problemas que estan englobados tienen métodos de solución propios que son más eficientes, estos pueden generalizarse bajo una misma estructura con un método de solución en común.

1.- UNIFICACION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Antes de dar inicio a la unificación ya antes mencionada, introduciremos nuevos conceptos que nos ayudaran en los problemas que en adelante analizaremos:

Si G es una Gráfica Dirigida* $G=(M,S)$

Un vértice sucesor de $X_i \in M$, es todo vértice $X_j \in M$ tal que existe $(X_i,X_j) \in S$

Al conjunto de sucesores de $X_i \in M$ lo denotaremos por:

$\Gamma^{+}(X_i)=\left\{X_j \in M \mid (X_i,X_j) \in S\right\}$

Un vértice predecesor de $X_i \in M$ es todo vértice $X_j \in M$ tal que existe $(X_j,X_i) \in S$

Al conjunto de predecesores de $X_i \in M$ lo denotaremos por

$\Gamma^{-}(X_i)=\left\{X_j \in M \mid (X_j,X_i) \in S\right\}$

Una vez establecidos los conceptos anteriores procederemos a unificar la estructura de los Problemas de Transporte, Asignación, Flujo Máximo y Flujo a Costo Mínimo con la del Problema de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas.

El Problema de Transporte en su formulación matemática original es:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j \in \Gamma^{+}(i)} X_{ij} = a_i \qquad i \in M$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i \in \Gamma^{-}(j)} X_{ij} = b_j \qquad j \in N$$

*Ver apéndice.

pasa a tomar la siguiente formulación

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in\Gamma^{+}(i)} X_{ij} - \sum_{k\in\Gamma^{-}(i)} X_{ki} = a_i \quad i\in M$$

$$-\sum_{i\in\Gamma^{-}(j)} X_{ij} + \sum_{k\in\Gamma^{+}(j)} X_{jk} = -b_j \quad j\in N$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

2.- UNIFICACION DEL PROBLEMA DE ASIGNACION.

El Problema de Asignación, en su formulación matemática original:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in\ ^{+}(i)} X_{ij} = 1 \quad i\in M$$

$$\sum_{i\in\ ^{-}(j)} X_{ij} = 1 \quad j\in N$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

pasa a tomar la siguiente formulación

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j\in\Gamma^{+}(i)} X_{ij} - \sum_{k\in\Gamma^{-}(i)} X_{ki} = 1 \quad i\in M$$

$$-\sum_{i\in\Gamma^{-}(j)} X_{ij} + \sum_{k\in\Gamma^{+}(j)} X_{jk} = -1 \quad j\in N$$

$$X_{ij} \geq 0$$

3.- UNIFICACION DEL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO.

El problema de flujo a costo mínimo en su formulación - matemática original:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{i\in\Gamma^{-}(j)} X_{ij} - \sum_{k\in\Gamma^{+}(j)} X_{jk} = b_j \quad j\in M$$

$$X_{ij} \geqslant 0 \quad (i,j)\in A$$

queda en igual forma.

4.- UNIFICACION DEL PROBLEMA DE FLUJO MAXIMO.

El Problema de Flujo Máximo en una red en su formulación matemática original es:

$$\text{Minimizar } -v = \sum_{i \in \Gamma^-(s)} X_{is} - \sum_{k \in \Gamma^+(s)} X_{sk}$$

s.a.

$$\sum_{i \in \Gamma^-(j)} X_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^+(j)} X_{jk} = \begin{cases} -v & \text{si } j=s \\ 0 & \text{si } j \neq s,t \\ v & \text{si } j=t \end{cases}$$

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}$$

equivale a la siguiente formulación

$$\text{Minimizar } -v = \sum_{i \in \Gamma^-(s)} X_{is} - \sum_{k \in \Gamma^+(s)} X_{sk}$$

s.a.

$$\sum_{i \in \Gamma^-(j)} X_{ij} - \sum_{k \in \Gamma^+(j)} X_{jk} = b_j \qquad j \in M$$

$$0 \leq X_{ij} \leq U_{ij}$$

donde:

$$b_j = \begin{cases} -v & \text{si } j=s \\ 0 & \text{si } j \neq s,t \\ v & \text{si } j=t \end{cases}$$

Una vez determinada la unificación de las estructuras - de los Problemas de Transporte, Asignación, Flujo Máximo y Flu jo a Costo Mínimo, veremos alguno de los métodos de solución - para estos. Determinando primeramente el método, el algoritmo . y posteriormente veremos un ejemplo.

C A P I T U L O III

"EL METODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES".

I.- LINEAMIENTOS GENERALES DEL METODO SIMPLEX.

Los pasos generales en la aplicación del método simplex para un problema lineal son los siguientes:

1. Encontrar una solución básica factible inicial y después
2. Calcular los $Z_{ij}-C_{ij}$ para cada variable no básica X_{ij}. Si $Z_{ij}-C_{ij} \leqslant 0$ para toda variable no básica se alcanza la optimalidad y el proceso se detiene, en caso contrario se selecciona, la nueva variable para la siguiente base y la variable que sale de la base actual.
3. Se obtiene la nueva solución básica factible y repetimos el paso No. 2.

Para el análisis de estos pasos consideramos el si-- guiente problema: Minimizar CX s.a. AX= b y $X \geqslant 0$, en donde A es una matriz mxn, b es un vector mxl y c un vector (1xm).

Supondremos que el rango (A,b) = rango(A) =m. Des--- pués de un posible rearreglo de las columnas de A, - tomamos $A = [B,N]$ en donde B es la matriz invertible* mxn y N es una matriz mx(n-m).

Tomaremos $X = \begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix}$ donde $X_B = B^{-1}b$ y $X_N = 0$

A X se le llama solución básica del sistema. Si $X_B \geqslant 0$ entonces X se le llama solución básica factible.

A B se le llama matriz básica (o simplemente la base) y a N matriz no básica.

Las componentes de X_B se llaman variables básicas y las componentes de X_N se llaman variables no básicas.

Si $X_B > 0$, entonces X se llama solución básica factible no degenerada, y si al menos una componente X_B es ce- ro entonces X se llama solución factible degenerada.

Determinación de una solución básica factible inicial.

Primeramente se da una solución básica factible, aplican- do el método a un ejemplo, después de éste, mostraremos la re- gla de la esquina noroeste para encontrar una so--------------

*Ver apéndice.

lución básica factible inicial. A este procedimiento se le llama también regla de la esquina superior izquierda y lo veremos posteriormente.

Cálculo de los coeficientes de costo reducido.

Dada una solución básica factible el siguiente paso consiste en determinar si la solución es óptima ó si se selecciona una variable de entrada. Para este paso es necesario calcular las variables duales, dichas variables las tomaremos para este problema como variables auxiliares; el cálculo de éstas resulta sencillo ya que se calcula primero $W_h = 0$ para algún h que esté en la solución básica y después se calculan las siguientes variables mediante la formulación:

$$W_i = C_{ij} + W_j \text{ ó } W_j = W_i - C_{ij}$$

Una vez calculadas dichas variables duales calcularemos los coeficientes de costo reducido, los $Z_{ij}-C_{ij}$ para cada variable X_{ij} no básica, estos coeficientes de costo reducido nos dan el mejor incremento que podemos hacer en la función objetivo Z cuando son positivos. Puesto que se desea minimizar Z, es ventajoso aumentar X_{ij} siempre que $Z_{ij}-C_{ij}>0$, por ejemplo si Z_K-C_K es el máximo de los $Z_{ij}-C_{ij}$ el nuevo valor de la función objetivo Z está dado por $Z = Zo-(Z_K-C_K)X_K$ por esto conviene aumentar X_K tanto como sea posible cuando $Z_K-C_K>0$

Los coeficientes de costo reducido se calculan como

$Z_{ij}-C_{ij}=W_i-W_j-C_{ij}$ para todo X_{ij} no básica

Determinación del arco que entra a la base.

Como hicimos ver anteriormente si Z_K-C_K es el máximo de los $Z_{ij}-C_{ij}$ el nuevo valor de la función objetivo estaría dado por $Z = Z_0-(Z_K-C_K)X_K$ por lo cual el arco que entra a la base - es cualquier arco tal que $Z_{ij}-C_{ij}>0$ donde X_{ij} es no básica.

Determinación del arco que sale de la base.

Si consideramos al arco (i,j) como el arco que entra a la base entonces al entrar éste a la base se forma un ciclo - (ya que a cada base esta asociado un árbol) de esta manera --- existe una única cadena que une a i con j sea $C=\{i,a_1,i_2,a_2,\ldots .i_k,a_k,j\}$ esta cadena, si representamos la orientación de la - cadena C como un vector $O(C)\in\mathbb{R}^j$ tendremos $O_K(C)=\begin{cases} 1 \text{ si } a_K=(i_K,i_{K+1}) \\ -1 \text{ si } a_K=(i_{K+1},i_K) \end{cases}$

Entonces podremos calcular el mínimo valor para X_j tal que $O_j(C)= -1$ es decir calcularemos el mínimo valor de algún - arco que exista entre i y j tal que la orientación de este arco sea j a i.

Por lo tanto si se cumple que el valor del arco K es --

$D=\min\left\{X_j \mid O_j(C)=-1, j \in C\right\}$ y que K sea arco de la base entonces se tendrá que K es el arco que sale de la base a la variable básica asociada, y a este arco se le llama variable de bloqueo --- (pues bloquea o impide el incremento adicional de X_{ij}).

Actualización de los arcos básicos en la nueva solución

Una vez que se encuentra en la base el nuevo arco básico y que salió el arco correspondiente a la variable de bloqueo atualizaremos dicho árbol conforme a la siguiente regla ------

X_h-D para los arcos con $O_h(C)=1$ ó si $h=(i,j)$

y

X_h-D para los arcos con $O_h(C)=-1$

donde D es el valor mínimo que tenía la variable que salió.

2.- ALGORITMO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES.

Propósito: Determinar el flujo a costo mínimo en la red G(M,A).

DESCRIPCION

1. Determínese T=(M,A') un árbol expandido de G, correspondiente a la solución básica factible X del problema. Sea B la matriz triangular asociada a T obtenida de reacomodar columnas, si es necesario, y sea X_B el vector de flujos a

través de los arcos básicos. Calcúlense las componentes de X_B resolviendo el sistema $BX_B=b$ sobre la red.

2. Calcúlense las variables duales resolviendo el sistema -- $W_h=0$ y $W_i-W_j=C_{ij}$, para todo arco $(i,j)\in A'$ y p.a. $h\in M$

3. Calcúlense los coeficientes de costo reducido $\hat{C}_{ij}=W_i-W_j-C_{ij}$ para todo arco $(i,j)\in A'$

   i) Si $\hat{C}_{ij}<0$ para todo $(i,j)\in A'$, entonces la solución dada por T es óptima. Terminar.

   ii) Si $\hat{C}_{ij}>0$ para algún $(i,j)\in A'$ ir a 4.

4. Determínese el arco que entra a la base. Este es cualquier arco (r,s) tal que $Z_{rs}-C_{rs}>0$

5. Determínese el arco que sale de la base. Sea C la única - cadena que une r y s en el árbol T. Calcúlense

$$D=\min\left\{X_j \,\middle|\, O_j(C)=-1, j\in C\right\}$$

$$D=\min_{(i,j)\in\Gamma^-}\left\{X_{ij}\right\}$$

Sea $k\in A'$ tal que $O_k(O)=-1$ y $X_k=D$. Entonces k es el arco - que sale de la base.

6. Actualícese la solución. Sea $T'=\{M, (A'-\{(u,v)v(r,s)\})\}$ el nuevo árbol expandido de R.

Defínase:

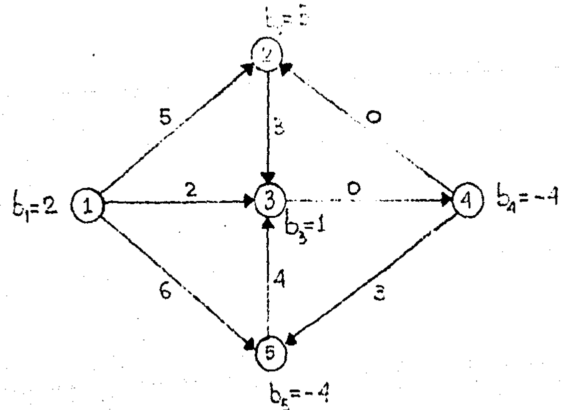
$$X_i = \begin{cases} X_i+D \text{ si } O_i(C)=1 \text{ ó } i=(r,s) \\ X_i-D \text{ si } O_i(C)=-1 \\ X_i \text{ si } i \notin C \end{cases}$$

Con este nuevo flujo regrese a 2.

3.- EL METODO SIMPLEX APLICADO A UN PROBLEMA DE FLUJO EN REDES.

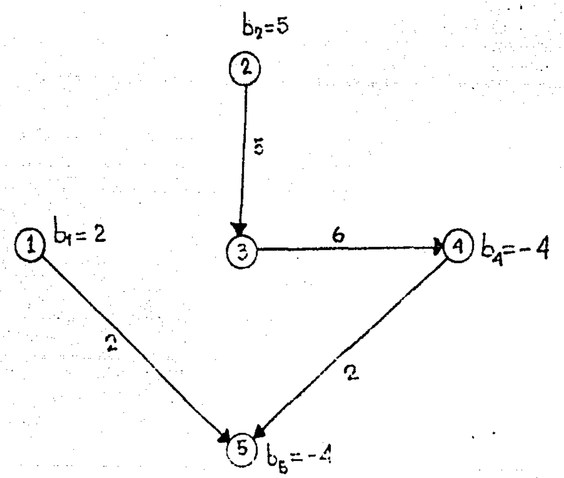
Se presentará un análisis de cada una de las operaciones aplicables a problemas de flujo en redes.

Tomaremos la figura siguiente a manera de ejemplo.



donde el número asociado a cada arco es el costo unitario del flujo a través de él. Supongamos que se selecciona la siguiente base factible dada en la siguiente gráfica por los arcos básicos.

(1,5), (2,3), (3,4), y (4,5)



donde el número asociado a cada arco es el valor del flujo a través de él.

El sistema básico de ecuaciones $BX_B = b$, asociado a la gráfica que debe resolverse es :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{15} \\ X_{23} \\ X_{34} \\ X_{45} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Analizaremos el valor del flujo de cada variable conjuntamente en la tabla y en el árbol asociado a esta. En la tabla se tiene que:

Aprovechando la estructura triangular inferior de la matriz básica se pueden encontrar los valores de las variables - básicas en forma iterativa, y las variables no básicas toman - valor cero.

De la 1ª. ecuación $X_{15}=2$. De la 2ª. $X_{23}=5$, de la 3era. ecuación $X_{34}=1+X_{23}=1+5=6$, después $X_{45}=4-X_{15}=2$ se pueden hacer sobre la gráfica como sigue:

Examinando la gráfica observamos que:

Los vértices i y 2 son pendientes por lo cual

$$X_{15}=b_1=2 \quad y \quad X_{23}=b_2=5$$

Al eliminar los vértices 1 y 2 y los arcos (1,5) y (2,3) en el árbol resultante el vértice 3 es pendiente entonces:

$$X_{34}=b_3+X_{23}=5+1=6$$

Al eliminar el vértice 3 y el arco (3,4) el vértice 4 - resulta pendiente, entonces:

$$X_{45}=b_4+X_{34}=-4+6=2$$

Los potenciales de los vértices se calcularon: en la gráfica:

$$\begin{aligned} W_5 &= 0 \\ W_4 &= W_5+C_{45}=0+3=3 \\ W_1 &= W_5+C_{15}=0+6=6 \\ W_3 &= W_4+C_{34}=3+0=3 \\ W_2 &= W_3+C_{23}=3+3=6 \end{aligned}$$

En la tabla simplex lo podemos calcular resolviendo el siguiente sistema:

$$\left(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(6,3,0,3\right)$$

Tomamos $W_5 = 0$ y sustituimos:

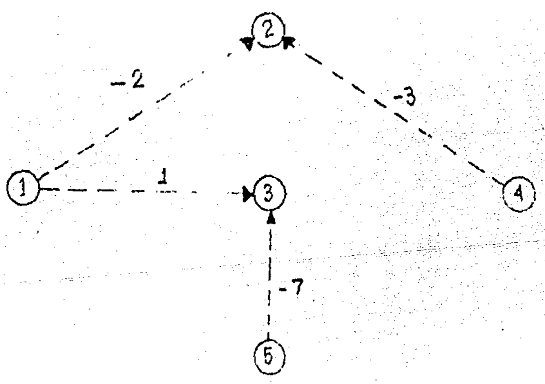
$W_4 - W_5 = C_{45}$ $\quad$ $W_4 = 3 + 0 = 3$

$W_3 - W_4 = C_{34}$ $\quad$ $W_3 = 0 + 3 = 3$

$W_2 - W_3 = C_{23}$ $\quad$ $W_2 = 3 + 3 = 6$

$W_1 - W_5 = C_{15}$ $\quad$ $W_1 = 6 + 0 = 6$

En la siguiente figura se asocia a cada arco no básico su coeficiente de costo reducido: $Z_{ij} - C_{ij}$



Para el cálculo de los $Z_{ij} - C_{ij}$ existen dos métodos: - uno usando los ciclos y otro usando el cálculo directo de las variables duales.

Utilizando el ciclo en la gráfica obtenido de añadir el arco (i,j) a la subgráfica básica, llamamos a este ciclo Γ, -- después tomando la orientación que tiene este arco, es decir - de i a j, la llamamos Γ^+, entonces la orientación contraria a este arco está dada Γ^-. Por lo tanto el $Z_{ij}-C_{ij}$ estará dado -- por:

$$Z_{ij}-C_{ij}=\left\{ \sum_{(i,j)\in\Gamma^-} C_{ij}-\sum_{(i,j)\in\Gamma^+} C_{ij} \middle| X_{ij} \text{ es básica y } (i,j)\in\Gamma \right\}$$

En la figura podemos hacer el cálculo así:

$Z_{13}-C_{13}=-C_{34}-C_{45}+C_{15}-C_{13}=0-3+6-2=1$

$Z_{12}-C_{12}=-C_{23}-C_{34}-C_{45}+C_{15}-C_{12}=-3-0-3+6-2=-2$

$Z_{53}-C_{53}=-C_{34}-C_{45}-C_{53}=-0-3-4=-7$

$Z_{42}-C_{42}=-C_{23}-C_{34}-C_{42}=-3+0-0=-3$

Para hacer el cálculo con las variables duales utilizamos la siguiente definición:

$$Z_{ij}-C_{ij}=W_i-W_j-C_{ij}$$

en donde

$$Z_{13} - C_{13} = W_1 - W_3 - C_{13} = 6-3-2 = 1$$

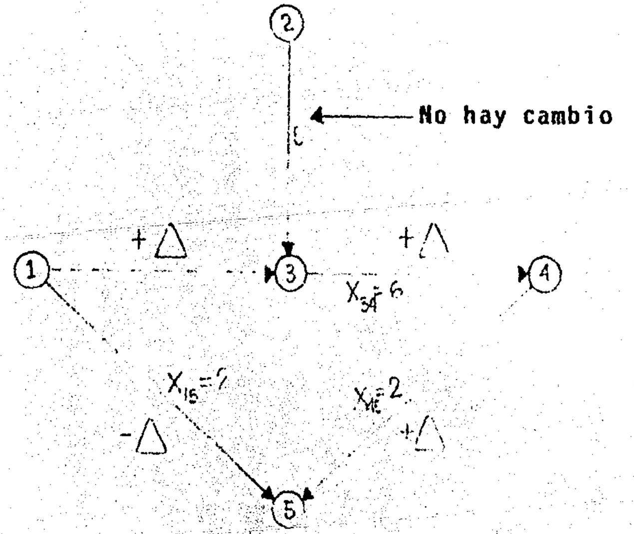
$$Z_{12} - C_{12} = W_1 - W_2 - C_{12} = 6-6-2 = -2$$

$$Z_{53} - C_{53} = W_5 - W_3 - C_{53} = 0-3-4 = -7$$

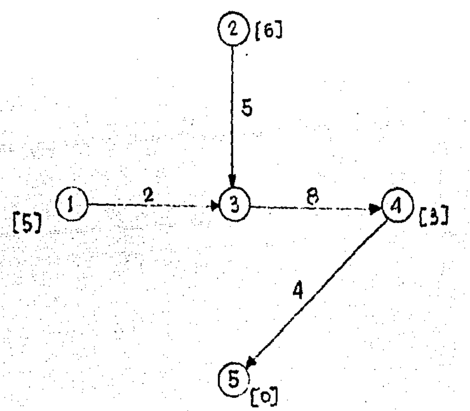
$$Z_{42} - C_{42} = W_4 - W_2 - C_{42} = 3-6-0 = -3$$

Puesto que $Z_{13}-C_{13}= 1 > 0$ entonces el arco (1,3) entra a la base. AL agregar a T este arco se forma un ciclo con la cadena 1, 5, 4, 3 que une sus extremos. En este caso $D = \{\min X_{15}\} = 2$ puesto que este es el único arco tal que $D = \min_{(i,j)\in\Gamma^-} \{X_{ij}\}$

Por tanto este arco es el que sale de la base

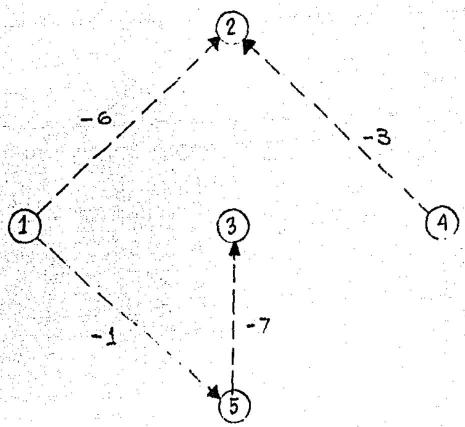


Cuando X_{13} se incrementa por $\triangle$, la única variable bási ca que disminuye es X_{15} y su nuevo valor es $X_{15} = 2 - \triangle$, así - pues, el valor crítico de $\triangle$ es 2 valor para el cual X_{15} se hace cero y sale de la base. Se ajusta adecuadamente el valor de las otras variables básicas y el nuevo árbol básica queda así:



Se le asocia a cada vértice su potencial que fue calculado igual que en la iteración anterior con el sistema $W_5 = 0$ y $C_{ij} = W_i - W_j$ para todo arco (i,j) no básico.

A continuación se asocia a cada arco su correspondiente coeficiente de costo reducido.



El cálculo de los coeficientes de costo reducido lo hacemos al igual que en la anterior interación calculándolos sobre las variables duales resolviendo el sistema $Z_{ij}-C_{ij}= W_i-W_j-C_{ij}$

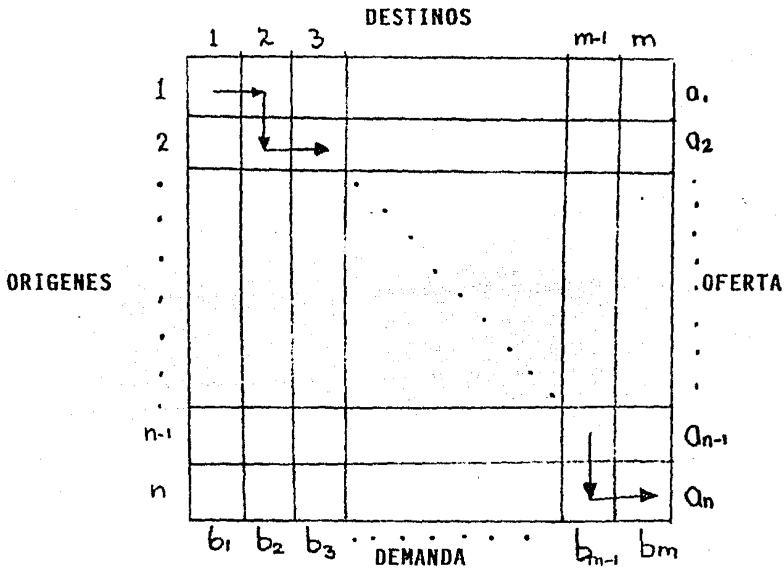
Puesto que todos los coeficientes de costo reducido son menores que 0, la solución actual es la óptima; es decir el -- flujo a costo mínimo en la red esta dado por:

$X_{12} = 0$, $X_{13} = 2$, $X_{15} = 0$, $X_{23} = 5$, $X_{34} = 8$, $X_{42} = 0$
$X_{45} = 4$ y $X_{53} = 0$

4.- DETERMINACION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Una vez analizado el problema de flujo en redes, determinaremos ahora, para el problema de transporte, una solución bá sica factible mediante un procedimiento llamado regla de la es quina noroeste ó regla de la esquina superior izquierda.

Para este procedimiento utilizaremos la siguiente tabla:



Durante este procedimiento, cuando se asigna un valor a una variable X_{ij} se reducen las correspondientes a_i y b_j por - ese mismo valor. Denotemos los valores reducidos de a_i y b_j -- por $\hat{a}_i$ y $\hat{b}_j$ respectivamente. En particular al principiar $\hat{a}_i=a_i$ y $\hat{b}_j=b_j$.

Suponiendo que la oferta total es igual a la demanda to tal, empezando en la celda (1,1) se hace

$$X_{11}=\text{Mínimo}\left\{\hat{a}_1,\hat{b}_1\right\}$$

y se reemplaza $\hat{a}_1$ por $\hat{a}_1-X_{11}$ y $\hat{b}_1$ por $\hat{b}_1-X_{11}$. Después si ----- a_1 b_1 se pasa a la celda (1,2) y se toma

$$X_{12} = \text{Mínimo} \left\{ a_1, b_2 \right\}$$

y se reemplaza a_1 por a_1-X_{12} y b_2 por b_2-X_{12}. Sin embargo si - a_1 b_1 se pasa a la celda (2,1) y se toma

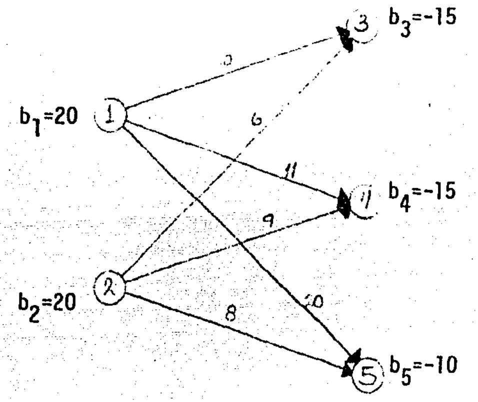
$$X_{21} = \text{Mínimo} \left\{ a_2, b_1 \right\}$$

y reemplazamos $\hat{a}_2$ por $\hat{a}_2-X_{21}$ y $\hat{b}$ por $\hat{b}_1-X_{21}$. En el caso en que $a_1 = b_1$ produce degeneración, este caso no lo trataremos y supondremos que la igualdad nunca ocurre. El proceso de asignar a una variable el mínimo de la oferta o la demanda restante, - ajustar ambos y moverse una celda hacia la derecha o hacia abajo se continua hasta que todas las ofertas y demandas estan -- asignadas.

La regla de la esquina noroeste (en la ausencia de degeneración) producira m+n-1 números X_{ij} positivos. Cada vez que se asigna un X_{ij} un valor positivo se satisface una restri---- cción de oferta o una demanda. Cuando se han asignado valores positivos a m+n-1 variables entonces se han satisfecho m+n-1 - restricciones. Observando que una de las restricciones del problema es redundante, se ve que todas las restricciones se sa-- tisfacen (demostrado anteriormente).

Una vez analizado el problema de flujo en redes, procederemos a analizar con el mismo método un problema de transporte.

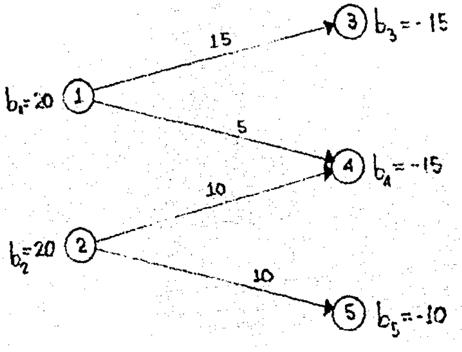
Determínese el flujo a costo mínimo en la siguiente red de transporte mediante el algoritmo simplex especializado en redes.



Obtenemos una solución básica factible por el método de la esquina noroeste.

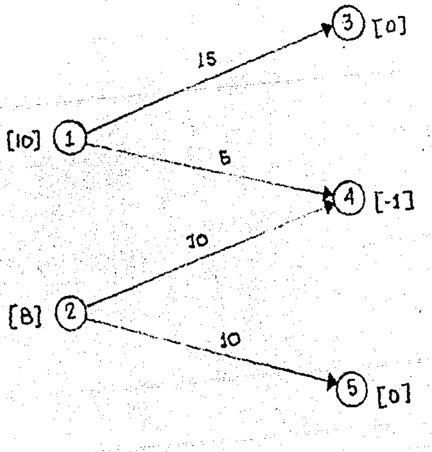
		DESTINOS			
		1	2	3	OFERTA
ORIGENES	1	10	11	20	~~20~~ ~~5~~ 0
	2	6	9	8	~~20~~ ~~10~~ 0
DEMANDA		~~15~~ 0	~~15~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	

Obtenemos el siguiente árbol asociado a la solución básica factible:



Iteración 1.

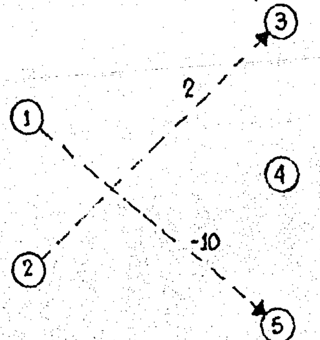
Obteniendo el siguiente árbol T = (M,S) correspondiente a la primera base.



El número asociado a cada arco es el valor del flujo a través de él y el asociado a cada vértice es su potencial. Los potenciales se calcularon

$$W_5 = 0$$
$$W_2 = C_{25} + W_5 = 8 - 0 = 8$$
$$W_4 = W_2 - C_{24} = 8 - 9 = -1$$
$$W_1 = C_{14} + W_4 = 11 - 1 = 10$$
$$W_3 = W_1 - C_{13} = 10 - 10 = 0$$

En la siguiente figura se asocia a cada arco no básico su coeficiente de costo reducido.

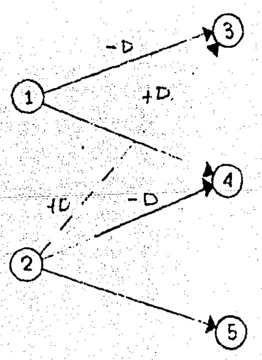


Los coeficientes de costo reducido se calcularõn:

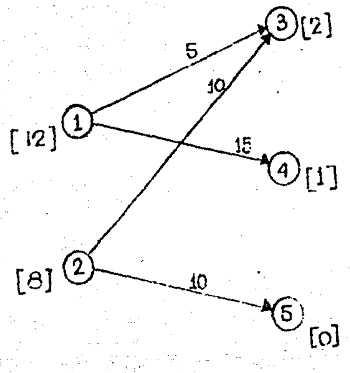
$$Z_{15}-C_{15}=W_1-W_5-C15=10-0-20=-10$$

$$Z_{23}-C_{23}=W_2-W_3-C_{23}=8-0-6=2$$

Como $Z_{23}-C_{23}=2>0$ entonces el arco (2,3) entra a la base. Al agregar a T este arco se forma ciclo con la cadena 2, 4, 1, 3 que une a sus extremos. En este caso $D=\text{Min}\left\{X_{13},X_{24}\right\}=\text{Min}\left\{15,\ 10\right\}=10$ puesto que son los arcos con orientación igual - a - 1. Por tanto el arco que sale es el arco (2,4)



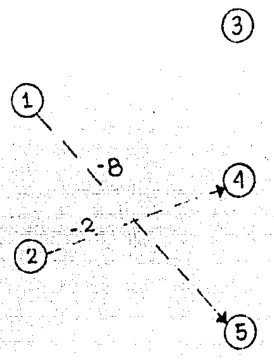
(a)



Al agregar el arco (2,3) y eliminar el arco (2,4) se obtiene el árbol de la figura anterior, se actualiza el flujo de acuerdo a la orientación de la cadena (2,4,1,3) dada en la red (a). Este flujo actualizado se asocia a cada arco del árbol -- resultante.

Iteración 2.

También se asocia a cada vértice del árbol anterior su potencial que fué calculado resolviendo el sistema $W_5 = 0$ y $C_{ij} = W_i - W_j$ para todo arco (i,j) básico. A continuación se asocia a cada arco su correspondiente coeficiente de costo reducido



Los coeficientes de costo reducido se calcularán de la misma forma resolviendo $Z_{ij} - C_{ij} = W_i - W_j - C_{ij}$ para todo arco (i,j) no básico.

Ya que todos los coeficientes de costo reducido son menores que cero, la solución actual es óptima, es decir el flujo a costo mínimo en la red esta dado por:

$X_{13}=5, X_{14}=15, X_{15}=0, X_{23}=10, X_{24}=0, X_{25}=10$

Una vez visto el algoritmo simplex especializado en redes, procederemos a conocer como se determina una solución factible inicial para estos problemas.

5.- DETERMINACION DE UNA SOLUCION BASICA FACTIBLE INICIAL PARA EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO.

Para determinar una solución inicial para el problema de flujo a costo mínimo en la red $G = (M,A)$ con n vértices se utilizará una especialización del método de las dos fases.

Para ello agregaremos un nuevo vértice f a la red y nuevos arcos de la forma (i,f), si $bi > 0$, y (f,i) si $bi < 0$. Consideremos la red $G' = \left[M \cup \{f\},\ A \cup A', c', b'\right]$ donde

$$A' = \{(i,f) \mid bi \geq 0\} \cup \{(f,i) / bi < 0\}$$

$$C'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j) \in A' \\ 0, & \text{si } (i,j) \in A \end{cases}$$

$$b'i = \begin{cases} bi, & \text{si } i \in M \\ o, & \text{si } i = f \end{cases}$$

Entonces la primera fase del método consiste en resolver el problema de flujo a costo mínimo en la red G'. Los valores de los flujos a través de los arcos de A' son:

$X_{if} = b_i$, para todo $i \in M$ tal que $bi \geq 0$

$X_{fi} = -b_i$, para todo $i \in M$ tal que $bi < 0$

Una vez, determinada la solución óptima para la red G' pueden presentarse dos casos:

a) Si X es una solución óptima y $X \neq 0$ el problema original no tiene solución ya que si $X \neq 0$ esto implica que existe un arco en la red auxiliar G' cuyo flujo es de valor distinto de cero por lo que no es posible obtener una base factible con -- los arcos originales del problema para iniciar esta segunda fase.

e.d.

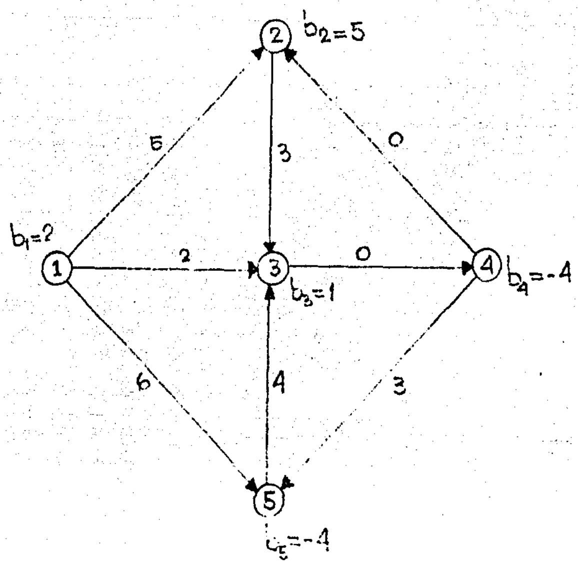
Si $\exists$ un $X_a \geqslant 0$ $\ni$ $AX_a = b = \begin{bmatrix} X_a \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución factible al problema en la fase I y por lo tanto

$0\ (X_a) + 1(0) = 0 < X$ lo cual viola la optimalidad de X.

b) Si X es una solución óptima y X=0 el problema original tiene solución ya que existe un arco en la red auxiliar G' cuyo flujo es de valor Ø y donde los arcos básicos restantes, son arcos de la red original por lo cual podemos eliminar este arco y el vértice f de tal forma que podemos iniciar la segunda fase del método con una solución basica factible y donde esta fase consiste en determinar el flujo a costo mínimo en la - red G' aplicando el método simplex para problemas de flujo en redes.

Ejemplo:

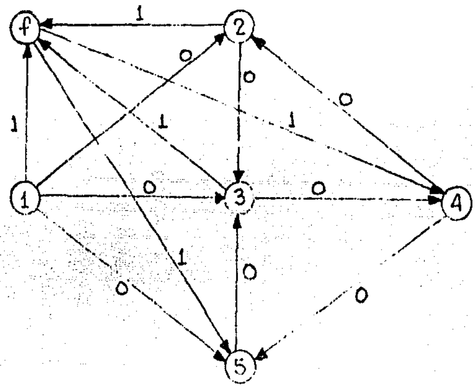
Determínese el flujo a costo mínimo en la siguiente red utilizando el método simplex de las dos fases especializado en redes.



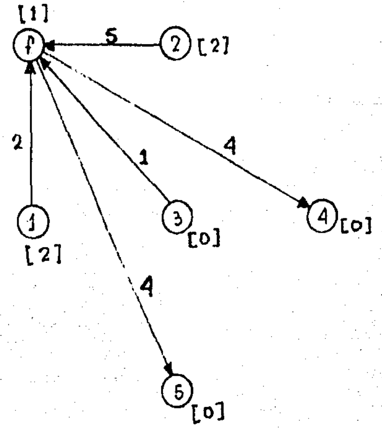
El número asociado a cada arco es el costo unitario del flujo a través de él.

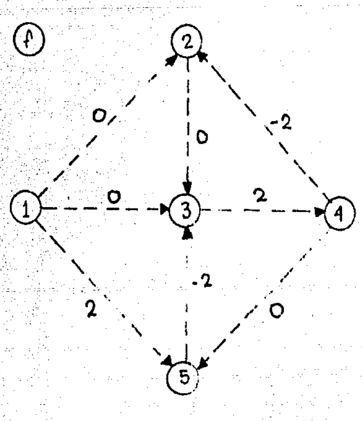
PRIMERA FASE

Ya que no contamos con una base inicial factible cons-- truiremos la red G' que a continuación se muestra con el costo unitario de flujo asociado a cada arco.



Entonces el árbol básico factible inicial en la primera fase, es la primera red de la siguiente figura. Asociando a -- ésta el flujo a través de cada arco y a cada vértice su potencial. En la red contigua esta asociado a cada arco su coeficiente de costo reducido.



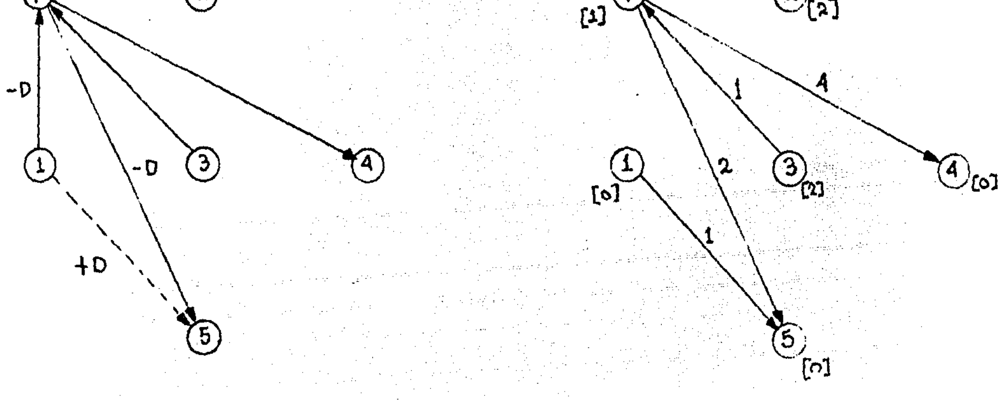


El cálculo de variables duales y coeficientes de costo reducido lo hacemos al igual que como lo veníamos haciendo.

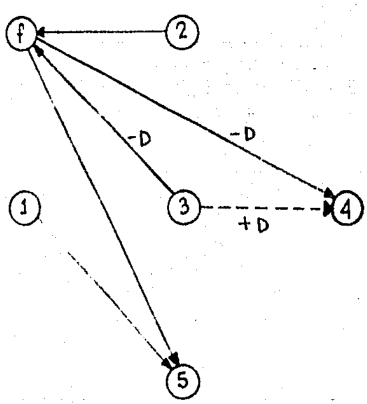
$W_i = C_{ij} + W_j$ y $Z_{ij} - C_{ij} = W_i - W_j - C_{ij}$

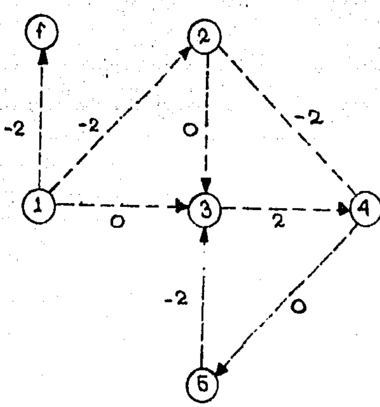
Ya que (1,5) y (3,4) tienen coeficiente de costo reducido mayor que cero, cualquiera de estos arcos puede entrar a la base.

Elegimos el arco (1,5) para entrar a la base. Entonces la cadena que forma ciclo con este arco es 1,f,5 con orientación (-1,-1) por lo que D=Min X_{if}, X_{f5} =2 por lo que el arco que sale de la base es (i,f), se actualiza la red de acuerdo a la siguiente figura obteniéndose el nuevo árbol básico.

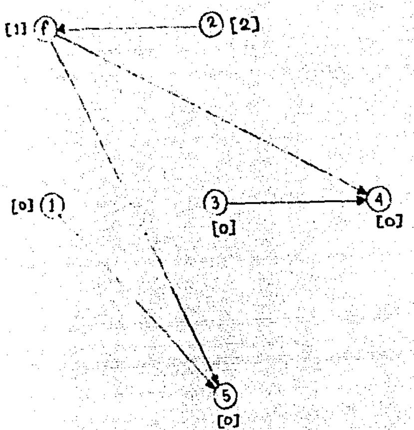


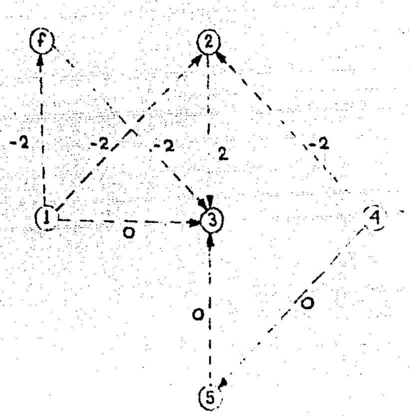
En el nuevo árbol básico se ha asociado a cada vértice la correspondiente variable dual, a continuación se calculan - los coeficientes de costo reducido para las variables no básicas.



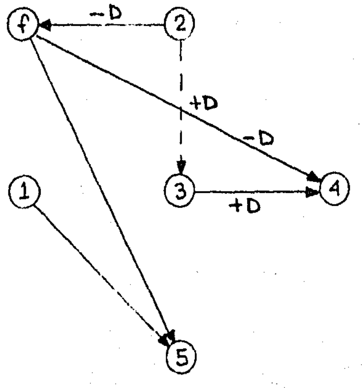


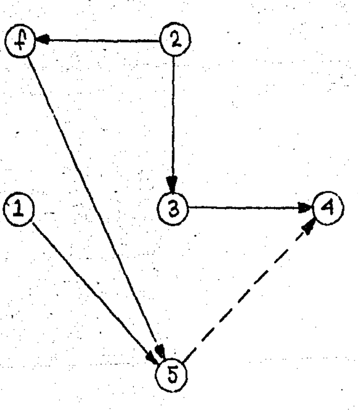
Puesto que $C_{34}-Z_{34}>0$ entonces el arco (3,4) entra a - la base la cadena que forma ciclo con este arco es 3,f,4 con - orientación (-1,-1) donde $D=\text{Min}\left\{ X_{3f}, X_{f4}\right\} = 1$ y por lo tanto el arco (3,f) sale de la base. Actualizamos el flujo de acuerdo a la orientación y obtenemos el siguiente árbol básico, asociando a cada vértice su potencial y calculando los coeficientes de costo reducido de los arcos no básicos.



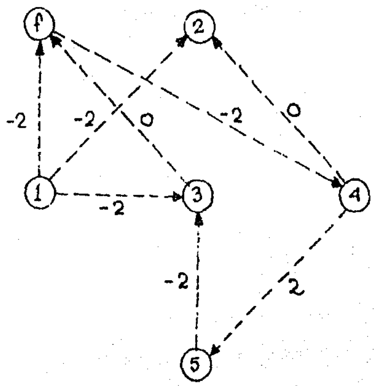


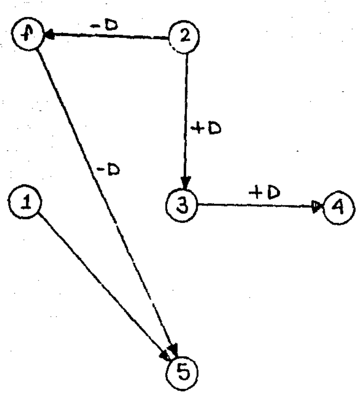
Elegimos el arco (2,3) para entrar a la base, la cadena con la que forma ciclo es 3, 4, f, 2 con orientación (1, -1, -1) entonces $D = \text{Min}\left\{ X_{f4}, X_{2f} \right\} = 3$ y por lo tanto el arco que sale de la base es (f,4). Actualizando el flujo obtenemos el - siguiente árbol básico, asociando a este los variables duales.



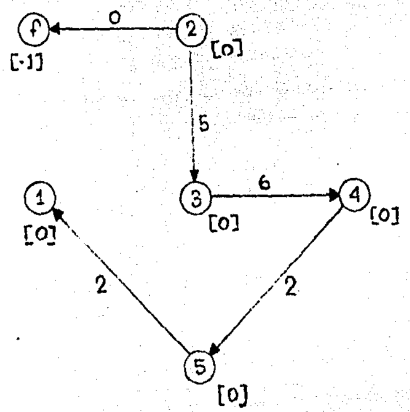


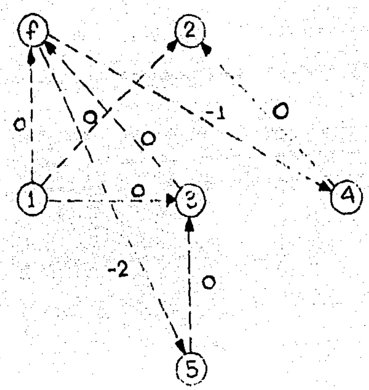
Los coeficientes de costo reducido de los arcos no bási cos calculados en base a las variables duales que muestran en el anterior árbol son:





Elegimos el arco (4,5) para entrar a la base, la cadena con la que forma ciclo es 5, f, 2, 3, 4 con orientación (-1, -1, 1, 1) donde $D = \text{Min} \; X_{f5}, X_{2f} = 2$ y por tanto (f,5) ó (2,f), sale de la base. Actualizando el flujo se obtiene el si quiente nuevo árbol básico.



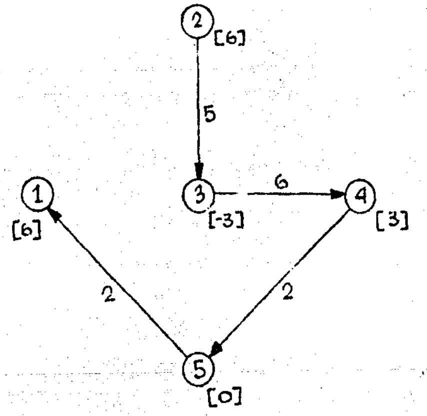


Asociamos al nuevo ârbol bâsico las variables duales y los coeficientes de costo reducido de los arcos no bâsicos calculados en base a las variables duales.

Como $Z_{ij} - C_{ij} \leqslant 0$ para todo (i,j) no bâsico, el último ârbol es óptimo. Puesto que el costo del flujo en G' es 0 entonces existe solución factible para el problema en la red original G.

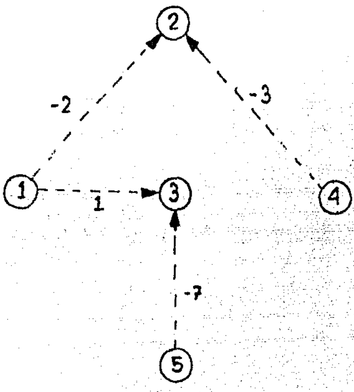
SEGUNDA FASE

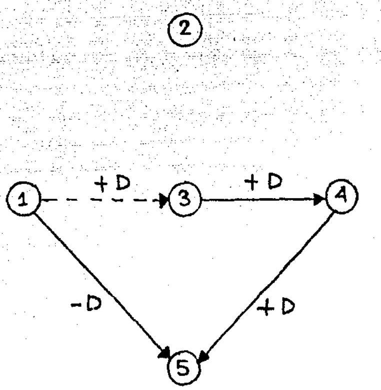
Eliminamos el vértice f y el arco (2,f) del árbol óptimo resultante en la primera fase. Entonces el árbol que se obtiene es una base factible para el problema original.



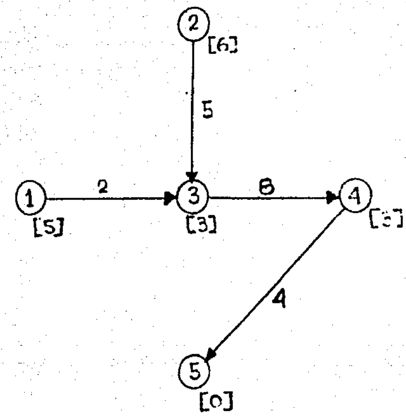
Calculamos las variables duales como lo hicimos a lo largo de la primera fase.

A continuación calculamos los coeficientes de costo reducido de los arcos no básicos.

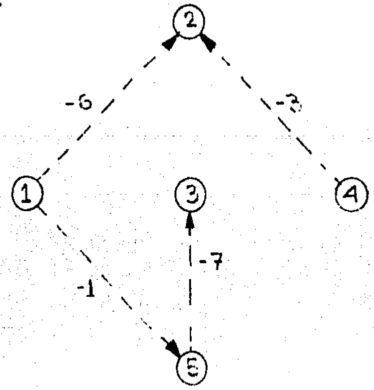




Ya que (1,3) tiene coeficiente de costo reducido mayor que cero, este entra a la base y la cadena que forma ciclo con este arco es 3, 4, 5, 1 con orientación (1, 1, -1) por lo que $D = \text{Min}\left\{X_{15}\right\} = 2$ entonces el arco que sale de la base es ---- (1,5). Actualizando el flujo se obtiene el siguiente árbol básico.



Calculamos los coeficientes de costo reducido de los arcos no básicos.



Como $Z_{ij} - C_{ij} \leqslant 0$ para todo (i,j) no básico, entonces la solución actual es óptima.

Una vez visto y analizado el método simplex especializado en redes veremos este mismo método aplicado a el problema de flujo a costo mínimo con variables acotadas.

C A P I T U L O IV

"EL METODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES CON VARIABLES ACOTADAS".

1.- LINEAMIENTOS GENERALES DEL METODO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES CON VARIABLES ACOTADAS.

Nuestro propósito es determinar el flujo a costo mínimo en la red G(M,S) con n vértices, l cotas inferiores y u cotas superiores.

SOLUCION INICIAL

El método simplex especializado en redes se extiende directamente al problema con variables acotadas. En este caso como todos los arcos "originales" comienzan siendo no básicos durante la fase I, se toman todas estas variables de flujo en los arcos en una u otra de sus cotas y se calcula

$$b_i' = b_i - \sum_j X_{ij} + \sum_K X_{Ki}$$

Una vez que se ha añadido el vértice auxiliar f en G se definen los arcos (i,f) con flujo b'_i si $b'_i > 0$ y los arcos -- (f,i) con flujo $-b'_i$ si $b'_i < 0$ y se definen los costos iguales a 1 para los arcos artificiales y a Ø para los arcos "origi-- nales".

CALCULO DE LOS VALORES DE LAS VARIABLES BASICAS

Ya sea en la fase I ó en la fase II después de ajustar el vector b al b' para reflejar los valores de las variables - no básicas, se procede de la misma manera que en el caso no -- acotado para calcular los valores de las variables de flujo -- básicas.

CALCULO DE LAS VARIABLES DUALES Y LOS COEFICIENTES DE COSTO REDUCIDO

Las cotas inferiores y superiores no influyen en lo ab- soluto sobre el cálculo de las variables duales ni sobre el -- cálculo de los coeficientes de costo reducido, no obstante es- to en la presencia de cotas inferiores y superiores. Los crite rios de optimalidad son:

Si $X_{ij}=U_{ij} \Rightarrow Z_{ij}-C_{ij} \geqslant 0$

$X_{ij}=l_{ij} \Rightarrow Z_{ij}-C_{ij} \leqslant 0$

Si no se alcanza la optimalidad se puede determinar rapidamente si alguna variable X_{ij} no básica debe incrementar o disminuir su valor.

DETERMINACION DEL ARCO QUE ENTRA A LA BASE

Una vez que establecimos el criterio de optimalidad podemos concluir que la variable que entra a la base es cualquier X_{ij} no bāsico tal que

$$X_{ij}=U_{ij} \text{ y } Z_{ij}-C_{ij}<0$$

ō

$$X_{ij}=L_{ij} \text{ y } Z_{ij}-C_{ij}>0$$

DETERMINACION DEL ARCO QUE SALE DE LA BASE

Una vez que determinamos el arco de entrada, independientemente de que la variable sea creciente ō decreciente se -- añade el arco no bāsico entrante al ārbol bāsico y se determina el ciclo ūnico formado. Si X_a es la variable que entra y es creciente se envia una cantidad D alrededor del ciclo en la dirección de X_a en donde $D = \min\{D_1, D_2, D_3\}$

y

$$D_1 = \mathrm{Min}\{X_i - l_i \mid i \in A,\ O_i^{*}(c) = -1\}$$

$$D_2 = \mathrm{Min}\{U_i - X_i \mid i \in A,\ O_i^{*}(c) = 1\}$$

$$D_3 = X_a - l_a$$

Entonces el arco que sale de la base es aquēl para el -

*$O_i(c)$ como lo definimos en la determinación del arco que sale en el problema no acotado.

cual el nuevo flujo es igual a su cota inferior ó a su cota superior.

Si X_a es la variable que entra y es decreciente se envia una cantidad D alrededor de ciclo único formado en contra de la dirección de X_a y en donde $D = \min \{D_1, D_2, D_3\}$

y
$$D_1 = \mathrm{Min}\{U_i - X_i \mid i \in A,\ O_i(c) = -1\}$$
$$D_2 = \mathrm{Min}\{X_i - l_i \mid i \in A,\ O_i(c) = 1\}$$
$$D_3 = U_a - X_a$$

Entonces el arco que sale de la base es aquél para el cual el nuevo flujo es igual a su cota inferior ó a su cota superior.

ACTUALIZACION DE LOS ARCOS BASICOS EN LA NUEVA SOLUCION

Para la actualización de los valores de las variables basicas se procede de la misma forma que en el caso de variables no acotadas.

2.- ALGORITMO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES CON VARIABLES ACOTADAS.

DESCRIPCION

1. Consideremos una solución básica factible y el árbol

T = (M,S') ; sea B la base triangularizable asociada a T. Calcúlense los valores de los flujos a través de los arcos de T de la siguiente manera. Si p es un vértice pendiente del árbol resultante eliminar de T los vértices correspondientes a renglones de B anteriores al de p junto con sus arcos adyacentes y w es el único arco adyacente a p:

$$X_w = b_p + \sum_{j} X_{jp} - \sum_{i \neq k} X_{pi} \quad , \text{ si } w = (p,k)$$

ó X_w igual al recíproco de esta cantidad si $w = (k,p)$

2. Calculemos los valores de las variables duales resolviendo el sistema $w_i - w_j = C_{ij}$, para todo arco $(i,j) \in A'$.

3. Calcúlemos los coeficientes de costo reducido $Z_{ij} - C_{ij} = W_i - W_j - C_{ij}$ para todo arco $(i,j) \notin A'$.

i) Si $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$, para todo $(i,j) \notin A$ tal que $X_{ij} = l_{ij}$, y $Z_{ij} - C_{ij} \quad 0$, para todo $(i,j) \notin A$ tal que $X_{ij} = U_{ij}$, entonces la solución actual es óptima.

ii) En otro caso ir a 4.

4. Sean $F_1 = \{ (i,j) \in A \mid X_{ij} = l_{ij} \text{ y } Z_{ij} - C_{ij} > 0 \}$
$F_2 = \{ (i,j) \in A \mid X_{ij} = U_{ij} \text{ y } Z_{ij} - C_{ij} < 0 \}$ y

Determínese como arco que entra a la base cualquier $(r,s) \in F_1 \cup F_2$ y asígnese:

$$d = \begin{cases} 1 & \text{si } (r,s) \in F_1 \\ -1 & \text{si } (r,s) \in F_2 \end{cases}$$

5. Calcúlense

$$D_1 = \text{Min}\left\{ X_j - l_j \mid O_j\ (c) = d \right\},\quad D_2 = \text{Min}\left\{ U_j - X_j \mid O_j\ (c) = d \right\}$$

$$D_3 = \begin{cases} U_{rs} - X_{rs}, & \text{si } d = 1 \\ X_{rs} - l_{rs}, & \text{si } d = -1 \end{cases}$$

$$y \quad D = \text{Min}\left\{ D_1, D_2, D_3 \right\}$$

El arco que sale de la base es aquel para el cual $X_u + O_u(c)$ $D \cdot d$ es igual a l_u ó a U_u. Si $X_{rs} + d \cdot D$ es igual a L_{rs} ó U_{rs} se mantiene la misma base.

6. Actualícemos los valores de las variables básicas como sigue:

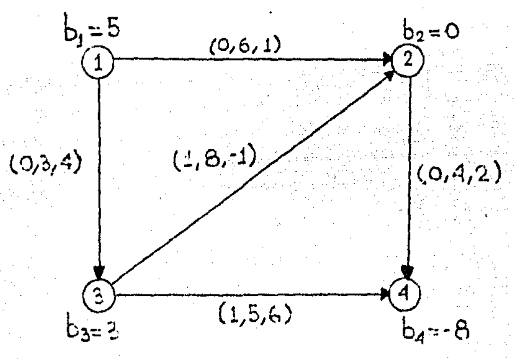
$$X_k = \begin{cases} X_k + D \cdot d, & \text{si } K = (r,s) \\ X_k + O_k(c) \cdot D \cdot d & \text{para todo } k \in C \\ X_k, & \text{si } k \in C,\ k \in (r,s) \end{cases}$$

y regrese al paso No. 2.

Una vez determinados los pasos del método simplex especializado en redes para variables acotadas, aplicaremos este método a un ejemplo.

3.- EL METODO SIMPLEX APLICADO A UN PROBLEMA DE FLUJO EN REDES CON VARIABLES ACOTADAS.

Determínese, mediante el método simplex especializado en redes, el flujo a costo mínimo en la siguiente red.

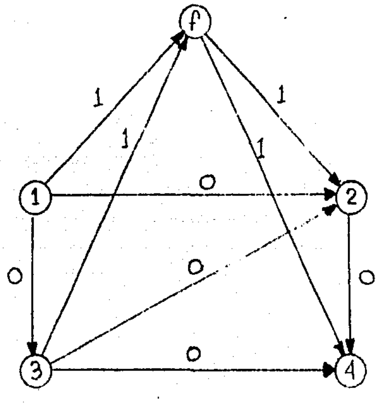


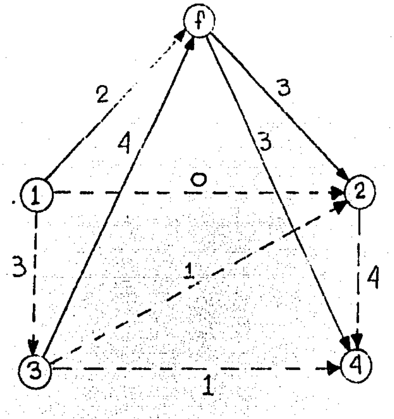
Los números asociados a cada arco son la cota inferior, la cota superior y el costo del flujo a través de él, respectivamente.

Se utilizará el método de las dos fases para encontrar una solución inicial.

PRIMERA FASE

En la siguiente red G' se muestran los costos unitarios de flujo asociados a sus arcos y el primer ärbol factible.





Para determinar el sentido de los arcos adyacentes a f se definieron los valores de los flujos a travës de los arcos originales iguales a sus cotas inferiores ô superiores; des--- pués se calculó

$$\hat{b}_1 = b_1 - \sum_j X_{1j} + \sum_k X_{k1} = 5-3 = 2$$

$$\hat{b}_2 = b_2 - \sum_j X_{2j} + \sum_k X_{k2} = 0-4+1 = -3$$

$$\hat{b}_3 = b_3 - \sum_j X_{3j} + \sum_k X_{k3} = 3-1-1+3 = 4$$

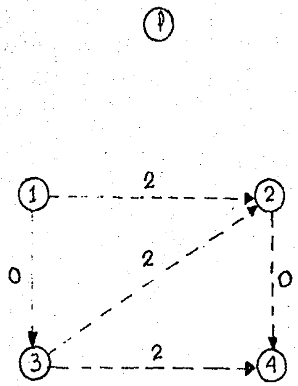
$$\hat{b}_4 = b_4 - \sum_j X_{4j} + \sum_k X_{k4} = -8+1+4 = -3$$

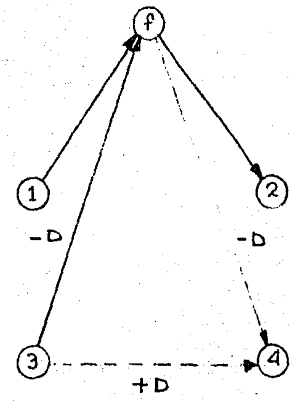
Puesto que $\hat{b}_1$ y $\hat{b}_3$ son mayores que 0, entonces se tienen los arcos (1,f) y (3,f) con flujo 2 y 4 respectivamente. Las cantidades $\hat{b}_2$ y $\hat{b}_4$ son menores que 0 por lo que se definen los arcos (f,2) y (f,4) con flujo igual 3 en ambos. La base inicial está formada entonces por estos cuatro arcos. En este primer árbol básico se ha asociado a cada vértice potencial que fué calculado resolviendo el sistema $W_4 = 0$ y $W_i - W_j = C_{ij}$ para los arcos (i,j) básicos.

En la primera red de la siguiente figura se asocia a cada arco su coeficiente de costo reducido. En este caso se tiene:

$$F_1 = \{ (1,2),\ (3,2),\ (3,4) \} ; \quad F_2 = \emptyset$$

Se elige (3,4) para meter a la base por lo que d = 1. Al agregar este arco al árbol básico se forma un ciclo con la cadena 3, f, 4.



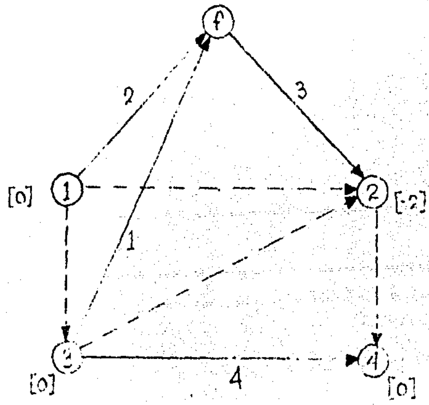


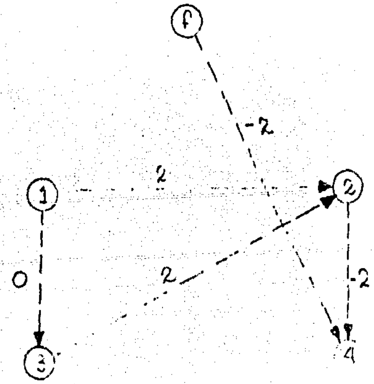
Calculamos

$D_1 = \text{Min}\left\{ X_{3f} \, , X_{f4} \right\} = 3 \quad , \quad D_2 = \infty \quad ,$

$D_3 = U_{34} - X_{34} = 5-1 \quad , \quad D = \text{Min}\left\{ 3, \infty \, , \, 4 \right\} = 3$

Entonces el arco que sale de la base es (f,4). Se actualizan los valores de los flujos a través de los arcos básicos, como se muestra en la figura anterior, obteniéndose el árbol - de la siguiente figura



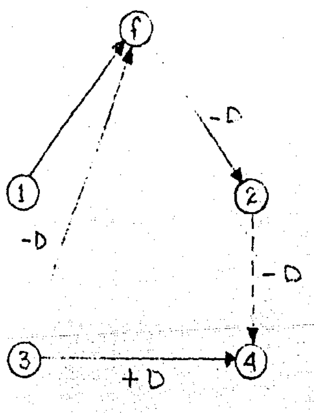


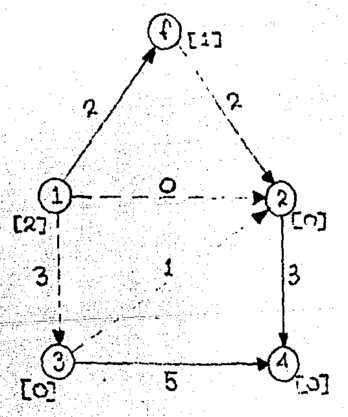
En el árbol básico de la figura anterior se ha asociado a cada vértice la correspondiente variable dual; en la segunda red de esta figura se ha asociado a cada arco su coeficiente de costo reducido.

En este caso resulta

$$F_1 = \{(1,2),\ (3,2)\} \quad ; \quad F_2 = \{(2,4)\}$$

Se elige (2,4) para meter a la base; d = -1, se forma ciclo con la cadena 2, f, 3, 4





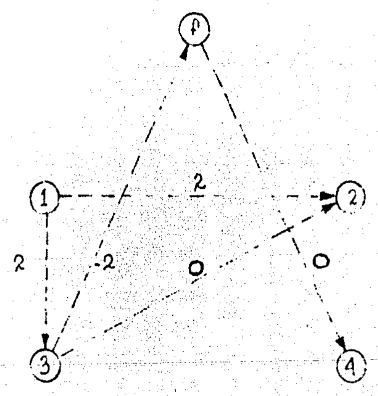
Se calcula

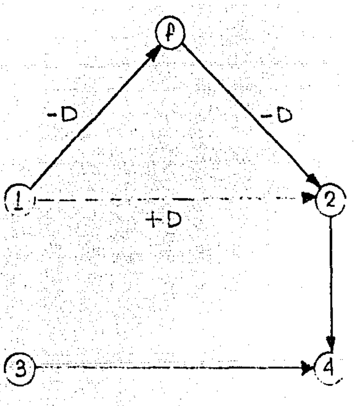
$$D_1 = \text{Min}\{X_{f2}\ X_{3f}\} = 1 \ ; \quad D_2 = \text{Min}\{5-4\} = 1$$

$$D_3 = \{4-0\} = 4 \quad ; \quad D = \text{Min}\{1,\ 1,\ 4\} = 1$$

De donde el arco que sale de la base es (3,f). Se actualiza la base como se indica en la primera red de la figura anterior, obteniéndose el segundo árbol de dicha figura.

Las variables duales se han asociado a los vértices del último árbol básico. A continuación se muestran los coeficientes de costo reducido de los arcos no básicos.





De la primera red de la figura anterior se observa que:

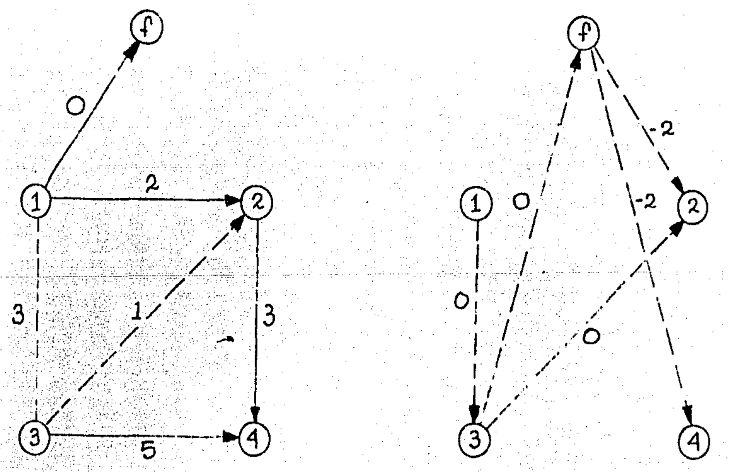
$F_1 = \{ (1,2) \}$; $F_2 = \{ \emptyset \}$

Por lo que (1,2) entra a la base formandose un ciclo -- con la cadena 1, f, 2. En este caso d = 1, entonces:

$$D_1 = \text{Min}\left\{ X_{1f}\ ,\ X_{2f} \right\} = 2\ ;\ D_2 = \infty$$

$$D_3 = 6\text{-}0 = 6\ , \quad D = \text{Min}\left\{ 2, \infty, 6 \right\} = 2$$

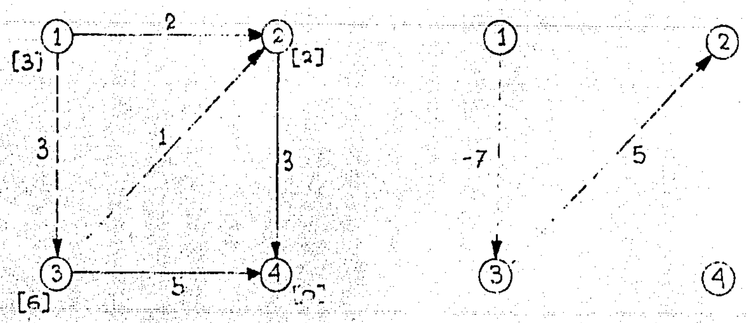
Por lo tanto pueden salir de la base (1,f) ó (f,2). Elijase (f,2). Se actualiza la base como se ilustra en la figura anterior resultando el siguiente árbol básico.



Los coeficientes de costo reducido, mostrados en la figura anterior, son menores o iguales que cero, para los arcos no básicos con flujo igual a su cota inferior, y mayores o iguales que cero, para los arcos no básicos con flujo igual a su cota superior. Entonces, la solución actual es óptima. Por otro lado, como el flujo óptimo en G' es de costo cero, existe una solución factible para el problema en la red original.

SEGUNDA FASE

Eliminando el vértice f y el arco (1,f) se obtiene el siguiente árbol básico factible:



En base a los coeficientes de costo reducido de los arcos básicos se tiene:

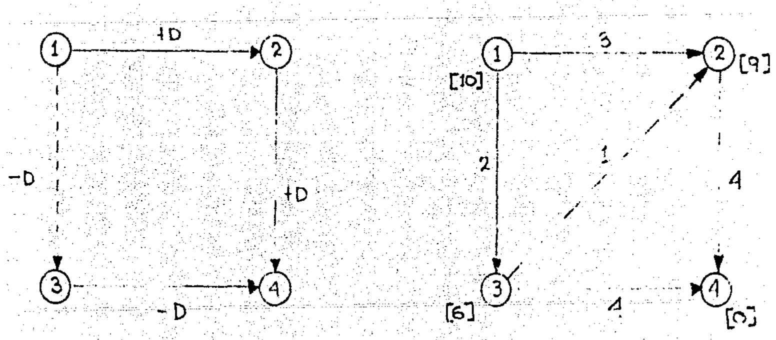
$$F_1 = \{(3,2)\} \quad , \quad F_2 = \{(1,3)\}$$

Elíjase (1,3) para meter a la base; entonces d = -1. Se forma ciclo con la cadena 1, 2, 4, 3. Por tanto:

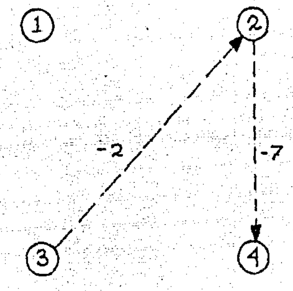
$$D_1 = \text{Min}\{X_{34} - l_{34}\} = 4 \qquad D_4 = \text{Min}\{U_{12}-X_{12}, U_{24}-X_{24}\} = 1$$

$$D_3 = \{X_{13} - l_{13}\} = 3 \qquad D = \text{Min}\{4,1,3\} = 1$$

El arco que sale de la base es entonces (2,4) ya que el flujo a través de él alcanza su cota superior. Actualizando el flujo como se ilustra en la primera red de la siguiente figura se obtiene el árbol que se muestra a continuación.



Los coeficientes de costo reducido de los arcos no bási- cos, calculados en base a los potenciales calculados en la figu ra anterior son:



Ya que los coeficientes de costo reducido son menores e iguales que cero para los arcos no básicos con flujo igual a su cota inferior y mayores o iguales que cero para los arcos no -- básicos con fllujo igual a su cota superior, concluímos que el árbol básico actual es óptimo.

PROBLEMA DE TRANSPORTE

En la tabla simplex.	En la gráfica.
Una solución básica factible.	Un árbol.
Buscar el $C_j - Z_j^j$ mínimo.	Introducir los arcos de las variables no básicas.
Entra la variable con el --- $C_j - Z_j^j$ mínimo (positivo).	Entra a la gráfica el arco con el costo reducido máximo.
Calcular el mínimo de los cocientes $\frac{y_i^j}{b^i}$ $\forall$ X_i básica.	Al entrar el arco se forma un ciclo, entonces tomar el valor mínimo del - X_{ij} el recorrido sea de - j a i e.d. en sentido contrario cuando recorremos el ciclo.
La variable que sale es la variable con el Min $\frac{y_i^j}{b^i}$.	Sale el arco con el mínimo valor X_{ij} recorrido de j a i.
Se realiza un pivoteo de manera que se hace unitaria la columna de la variable que entró.	Entra el arco con el va-- lor mínimo tomado, sumándolo a los arcos en buen sentido de i a j y restando a los de j a i.

C A P I T U L O V

"COMPARACIONES COMPUTACIONALES DE METODOS DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA MAS GENERAL, EL PROBLEMA DE FLUJO A COSTO MINIMO CON VARIABLES ACOTADAS".

Este estudio nos muestra las ventajas en tiempo y requerimientos computacionales de tres métodos de solución para el - problema de flujo a costo mínimo con variables acotadas. Dichos métodos son variables del método out-of-kilter y reciben los -- nombres de PNET, PNET-1 Y SUPERK.

El propósito de estos metodos fue crear un código que no dependiera de un tipo único de máquina.

Estos codigos consisten de un programa principal y una - serie de subrutinas (aproximadamente diez). Se registro el tiempo utilizado en cada subrutina (en milisegundos), se hizo el --

conteo de el número de pivoteos ejecutados, el tiempo total de pivoteos y el tiempo promedio de pivoteos (tiempo total de pivoteo entre el número de pivoteos).

Los siguientes pasos son basicamente los que intervienen en la eficiencia de dichos métodos.

INICIO DEL CODIGO

Existe una variedad de procedimientos de inicio; se en-- contró que un criterio para encontrar una solución básica factible inicial fue una modificación a la Regla del Mínimo Renglón, este criterio fue el mejor en cuanto a tiempo total de solución.

Un importante factor de influencia en la eficiencia computacional es el criterio de cambio de bases. Lo relevante para el criterio de cambio de base involucra el tiempo consumido en la búsqueda para que un nuevo arco entre en la base y el número de pivoteos requeridos para encontrar una solución óptima.

Tres criterios para determinar la entrada de una varia-- ble a la base fuerón evaluados:

El primer criterio fue: La regla del evaluador más negativo.

El segundo criterio fué: El primer evaluador negativo del nodo exterior.

El tercer criterio fué: El más negativo evaluador del nodo exterior.

El criterio que fue encontrado ser más eficiente en -- cuanto a tiempo total de solución, fue el Más Negativo Evaluador del nodo exterior.

En cuanto a la actualización de las bases, se tomo también, en base a la efectividad en el tiempo de solución el método llamado ATI que es una modificación del método llamado - API (incremento al índice predecesor).

En resumen los estudios revelan que los más eficientes códigos para problemas de redes de flujo a costo mínimo con - variables acotadas surgen de unir el criterio de la Regla del Mínimo Renglón con el criterio de el Más Negativo Evaluador - del nodo exterior y el método ATI.

Estos métodos son:

El método llamado SUPERK, PNET y PNET-1, los cuales necesitan alrededor de la mitad de requerimientos de memoria que los otros códigos utilizados para este tipo de problemas,algunos de los cuales son:

Boeing

General Motor

Share

DNET

Texas Water Development Board.

A continuación mostramos el tiempo de solución de 40 -- problemas que fueron corridos en un mismo tipo de máquina y -- que se aplicaron a varios de los métodos de solución ya men--- cionados. (Estos tiempos de solución los mostramos en las ta-- blas I, II y III.)

Table I

COMPUTATIONAL RESULTS ON DUAL PIVOT CRITERIA AND PNET SOLUTION TIMES

Number of Nodes	Number of Arcs	MOST NEGATIVE CRITERION Solution Time	Start Time	Pivot Time	No. of Pivots	NEWARC *	Time/ Pivot	MODIFIED FIRST NEGATIVE CRITERION Solution Time	Start Time	Pivot Time	No. of Pivots	NEWARC *	Time Pivot	FIRST NEGATIVE CRITERION Solution Time	Start Time	Pivot Time	No. of Pivots	NEWARC *	Time/ Pivot
50	75	.104	.072	.032	6	.000	.005	.110	.077	.033	7	.000	.005	.118	.072	.046	9	.008	.005
50	125	.231	.072	.154	27	.082	.006	.236	.78	.158	29	.048	.005	.219	.074	.145	31	.048	.005
50	200	.260	.089	.171	29	.074	.006	.259	.087	.172	29	.083	.006	.289	.088	.201	37	.088	.005
1000	2900	151.743	13.013	148.730	1741	70.314	.005	152.288	12.916	139.372	2126	78.500	.066	117.599	12.944	104.655	2253	73.477	.046
1000	3400	183,250	13.794	171.314	1866	86.636	.092	165.707	13.860	151.847	2147	85.058	.071	121.905	13.927	107.978	2188	77.267	.069
1500	4500	408.418	28.329	380.089	3008	186.491	.126	369.448	28.777	340.671	3603	193.655	.095	245.956	28.396	217.560	3330	167.262	.065

PNET Solution Time	Start Time	Pivot Time	No. of Pivots	Time/ Pivot
.098	.027	.076	46	002
.078	.029	.049	67	.001
.132	.040	.092	77	.001
8.961	.628	9.340	2758	.004
11.266	.672	10.594	3387	.003
21.542	.583	20.959	5061	.004

* Time to find the new arc entering the bas

Table II

PROBLEM SPECIFICATIONS

Number of Nodes	Number of Sources	Number of Sinks	Number of Arcs	Cost Range Min	Cost Range Max	Total Supply	Transhipments Sources	Transhipments Sinks	Percent of High Cost	Percent of Arcs Capacitaded	Upper Bound Range Min	Upper Bound Range Max
200	100	100	1300	1	100	100,000	0	0	0	0	0	0
200	100	100	1500	1	100	100,000	0	0	0	0	0	0
200	100	100	2000	1	100	100,000	0	0	0	0	0	0
400	4	12	2676	1	100	400,000	0	0	30.	80.	16,000	30,000
400	4	12	1382	1	100	400,000	0	0	30.	80.	20,000	120,000
400	4	12	2676	1	100	400,000	0	0	30.	80.	20,000	120,000
1000	50	50	2900	1	100	1,000,000	0	0	0	0	0	0
3000	150	890	23000	1	100	4,000,000	50	100	0	0	0	0
3000	125	500	35000	1	100	2,000,000	25	50	0	0	0	0
3000	125	700	15000	1	100	4,000,000	100	300	.1	.7	3000	3000
3000	100	800	23000	1	100	2,000,000	50	100	.1	.7	2000	4000

TABLE III

Solution Times (in seconds)

Problems	PNET	PNET-I	DNET	BENN	SUPERK	GM	SHARE	Boeing	TWB
1	1.30	1.17	12.85	20.25	5.63	46.25	17.76	30.25	21.23
2	1.49	1.35	13.56	24.36	6.47	63.30	21.34	21.59	21.39
3	1.94	1.74	21.44	34.56	6.87	105.72	26.16	31.47	28.63
4	1.64	1.47	17.96	31.45	6.57	70.74	25.13	36.47	27.60
5	1.88	1.73	23.34	52.10	6.77	90.10	30.97	47.73	NA
6	3.55	3.06	46.10	61.00	11.05	92.32	46.40	46.64	NA
7	4.06	3.57	74.88	DNR	12.86	157.31	65.92	113.12	NA
8	4.72	4.20	97.92	DNR	13.69	160.71	81.00	175.10	NA
9	4.80	4.35	101.65	DNR	13.40	158.01	81.21	186.99	NA
10	5.88	5.57	95.96	DNR	14.13	197.82	84.24	184.75	NA
11	3.52	3.12	19.87	17.44	6.44	35.67	19.93	30.39	NA
12	4.87	4.48	26.53	20.31	6.47	28.43	21.17	22.08	NA
13	5.52	4.91	27.98	24.92	7.25	31.39	25.81	20.02	NA
14	6.02	5.56	30.15	27.40	6.95	18.62	24.95	23.11	NA
15	6.50	5.91	31.57	DNR	7.56	23.48	27.05	21.08	NA
16	2.40	2.15	14.77	11.77	5.27	60.27	21.51	15.05	17.55
17	3.11	2.90	DNR	20.10	8.36	96.66	32.40	64.64	NA
18	1.92	1.70	DNR	11.31	5.13	61.54	20.06	18.31	19.15
19	2.60	2.40	DNR	20.62	8.49	DNR	31.75	61.07	NA
20	2.67	2.47	DNR	10.38	4.69	DNR	18.11	25.72	21.43
21	2.76	2.46	DNR	20.35	7.96	DNR	32.60	61.39	NA
22	2.22	2.01	DNR	9.97	4.60	DNR	17.91	24.84	NA
23	3.00	2.74	DNR	19.81	7.91	DNR	32.66	67.96	NA
24	3.12	2.91	DNR	11.71	5.59	DNR	25.27	21.57	NA
25	4.17	3.96	DNR	18.27	8.37	DNR	33.19	45.40	NA
26	4.45	4.15	DNR	11.38	5.51	DNR	25.05	19.34	NA
27	4.42	4.31	DNR	16.37	7.50	DNR	30.45	41.98	NA
28	6.35	5.67	DNR	DNR	13.91	DNR	53.87	83.98	NA
29	7.39	6.55	DNR	DNR	14.51	DNR	52.55	117.83	NA
30	9.08	8.10	DNR	DNR	16.00	DNR	61.33	152.21	NA
31	9.59	8.48	DNR	DNR	17.05	DNR	61.33	135.73	NA
32	15.70	13.59	DNR	DNR	22.88	DNR	78.63	553.93	NA
33	20.20	17.65	DNR	DNR	25.89	DNR	101.92	210.14	NA
34	17.10	14.86	DNR	DNR	25.42	DNR	92.25	248.16	NA
35	19.39	17.13	DNR	DNR	29.96	DNR	DNR	DNR	NA
36	384.08	DNR	DNR	NA	NA	NA	NA	NA	NA
37	245.40	DNR	DNR	NA	NA	NA	NA	NA	NA
38	140.98	DNR	DNR	NA	NA	NA	NA	NA	NA
39	193.42	DNR	DNR	NA	NA	NA	NA	NA	NA
40	105.09	DNR	DNR	NA	NA	NA	NA	NA	NA

NA - Code and data would not fit in 104,000 words of memory.

DNR- Did not run.

TABLE IV

CODE SPECIFICATIONS

Developer	Name	Type	Number of Arrays
1. Barr, Glover, Klingman	SUPERK	Out-of-kilter	$4N + 9A$
2. Bennington	BENN	Non-simplex	$6N + 11A$
3. Boeing	Boeing	Out-of-kilter	$6N + 8A$
4. Clasen	SHARE	Out-of-kilter	$6N + 7A$
5. Glover, Karney Klingman	PNET	Primal network	$8N + 3A$
6. Glover, Karney, Klingman	DNET	Dual network	$9N + 3A$
7. Glover, Karney, Klingman, Stutz	PNET-I	Primal network	$8N + 3A$
8. General Motors	GM	Out-of-kilter	$3N + 6A$
9. Texas Water Development Board	TWB	Out-of-kilter	$4N + N^2 + 7A$

N - Node Length

A - Arc Length

1.- PROGRAMA COMPUTACIONAL APLICADO AL METODO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES PARA PROBLEMAS DE TRANSPORTE.

INTRODUCCION AL PROGRAMA DE TRANSPORTE

El propósito del siguiente programa es establecer un có digo para problemas de transporte en Lenguaje PASCAL que aun-- que es un lenguaje poco empleado en este tipo de estructuras, hoy en día es muy accesible y compatible en la mayoría de los computadores, además este programa pretende no depender de un tipo de máquina, por lo que se realizan subrutinas que fácil-- mente puedan se modificadas para otro tipo de máquina, de tal forma que esta versión está constituída de un programa princi- pal y 6 subrutinas. El computador utilizado es BOURROGHS ----- B-7800.

A continuación analizaremos cada uno de los pasos de -- este programa.

Dicho programa se analizará subrutina por subrutina, es pecificando cada una de las variables que forman parte del ---

mismo.

INICIO DEL PROGRAMA

Primeramente se realiza la lectura de la red:

Se lee el número de orígenes y destinos y se almacenan en las variables enteras ORIGENES y DESTINOS.

Se lee el valor de los requerimentos en orígenes y destinos almacenando estos valores en los arreglos enteros REQOR y REQDES.

Se leen también los arcos que forman la red y sus respectivos costos, estos valores los almacenamos en el registro ARCO.

PROCEDIMIENTO ENCUENTRASOLBAS

Una vez leída la red nos avocamos a encontrar una solución básica factible inicial, dicha solución la encontramos mediante el método de la esquina noroeste*, en donde los arcos que forman la solución básica inicial los guardamos en el arreglo entero llamado SOLBAS y donde esta solución nos da como resultado un árbol.

*Método explicado en pág 42.

PROCEDIMIENTO VARSDUAL

Con nuestra solución inicial procedemos a encontrar los valores de las variables duales donde estos valores son almacenados en un arreglo entero llamado VARIABLEDUAL, dichos valores se calculan en la misma forma en que lo hacemos en ejercicios anteriores.

PROCEDIMIENTO VARNOBAS

Con nuestra solución básica factible inicial y las variables duales procedemos a calcular los coeficientes de costo - reducido de las variables no básicas, que en este caso estan - representadas por los arcos que no forman parte del árbol examinado, estos valores los almacenamos en el arreglo COSTNOBAS. Ya con el valor de los coeficientes de costo reducido de los - arcos no básicos obtenemos el valor mayor de dichos coeficientes almacenandolo en la variable entera MAXIMO, si MAXIMO es - mayor que cero:

guardamos los índices del arco (el cual es el arco que entra a la nueva base) que nos dio el valor de si MAXIMO en -- las variables enteras VERTICEOR y VERTICEDES, si MAXIMO es menor ó igual que cero:

entonces hemos llegado al valor óptimo y terminamos con el algoritmo dando el valor verdadero a la variable buleana -- OPTIMO.

PROCEDIMIENTO ENCUENCICLO

Una vez determinado el arco que entra a la base buscamos el ciclo que se origina a la entrada de éste y guardamos los arcos que forman el ciclo en el arreglo entero CICLO.

PROCEDIMIENTO COSTOMENOR

Con los arcos del ciclo formado por la variable que entra a la base, procedemos a examinar en que dirección se mueve el ciclo y entonces encontrar el arco básico con el menor valor es decir encontrar el arco básico que sale de la base (árbol), entonces los índices que forman este arco los guardamos en las variables enteras A y B.

PROCEDIMIENTO ACTVALARC

Este procedimiento realiza la actualización de los arcos a la entrada del nuevo arco, que toma el valor del arco que salió de la base, dicho proceso realiza con el arreglo entero CICLO y el registro ARCO.

Una vez actualizada la nueva base regresamos al procedimiento VARSDUAL para de ahí proseguir hasta llegar a que en el procedimiento VARNOBAS la variable buleana OPTIMO tome el valor de verdadero y terminar así con la solución óptima y la --

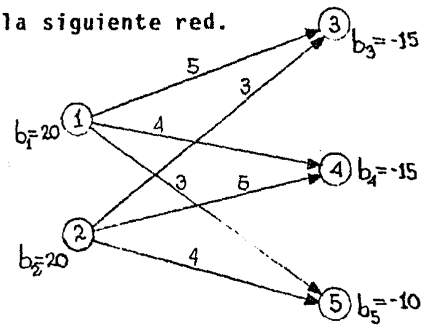
ejecución del programa.

A continuación mostramos un ejemplo del problema de transporte que fue realizado también en el programa computacional realizado en este trabajo.

Ejemplo:

El propósito es determinar una solución óptima mediante el algoritmo simplex especializado en redes.

Tomaremos la siguiente red.

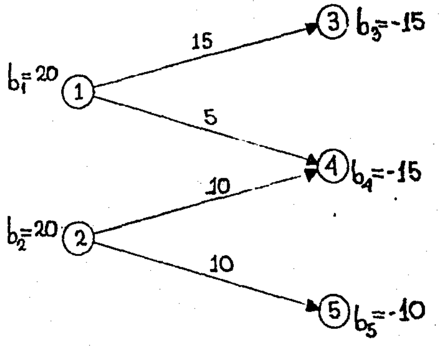


Obtenemos una solución básica factible por el método de la esquina noroeste

DESTINOS

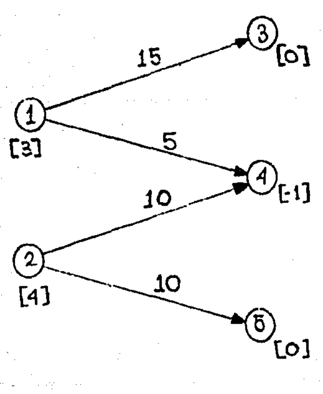
ORIGENES	3	4	5	OFERTA
1	15	5		~~20~~ ~~5~~ 0
2		10	10	~~20~~ ~~10~~ 0
DEMANDA	~~15~~ 0	~~15~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	

Obtenemos el siguiente árbol asociado a la solución básica factible:



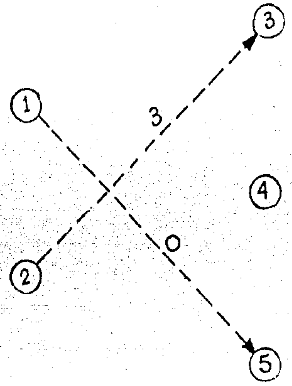
Iteración 1.

Obtenido una vez el árbol asociado a la solución inicial básica factible tenemos:



$W_5=0$
$W_2=C_{25}+W_5=4$
$W_4=W_2-C_{24}=-1$
$W_1=C_{14}+W_4=3$
$W_3=W_1-C_{13}=-2$

En la siguiente figura se asocia a cada arco no básico su coeficiente de costo reducido.



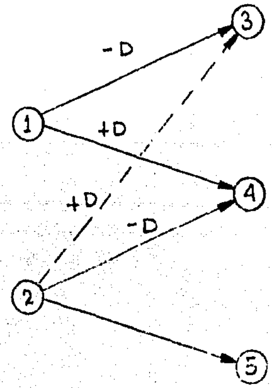
Los coeficientes de costo reducido se calcularon de la siguiente forma:

$Z_{15}-C_{15} = W_1 - W_5 - C_{15} = 3-0-3=0$

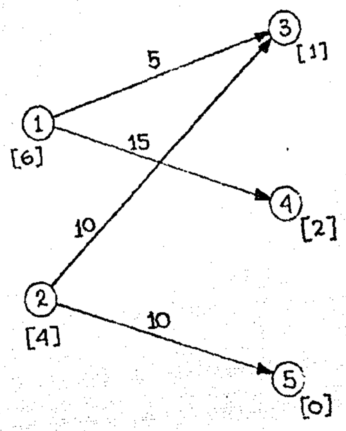
$Z_{23}-C_{23} = W_2 - W_3 - C_{23} = 4-(-2)-3=3$

Como $Z_{23}-C_{23}=3>0$ entonces el arco (2,3) entra a la base. Al agregar a el árbol básico este arco se forma un ciclo con los arcos (1,3), (1,4),(2,4). En este caso

$D = \text{Min}\left\{X_{13}, X_{24}\right\} = \text{Min}\left\{15,\ 10\right\} = 10$ puesto que son -- los arcos con orientación igual a -1, por lo tanto el arco que sale de el árbol es el arco (2,4).



(a)

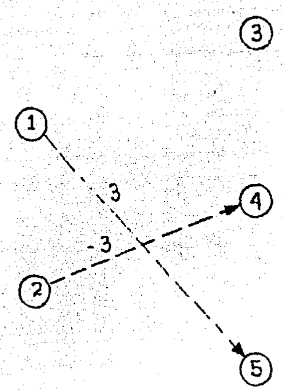


Al agregar el arco (2,3) y eliminar el arco (2,4) se obtiene el árbol de la figura anterior, se actualiza el flujo de acuerdo a la orientación de la cadena (2,4,1,3,) en la red (a).

Este flujo actualizado se asocia a cada arco del árbol - resultante.

Iteración 2.

Se asocia a cada arco del árbol anterior su vértice po-- tencial que fue calculado resolviendo el sistema $W_5=0$ y ----- $C_{ij}=W_i-W_j$ para todo arco (i,j) básico. A continuación asociamos a cada arco su correspondiente coeficiente de costo reducido.

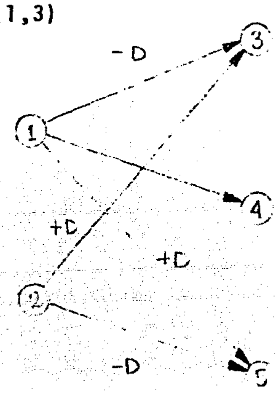


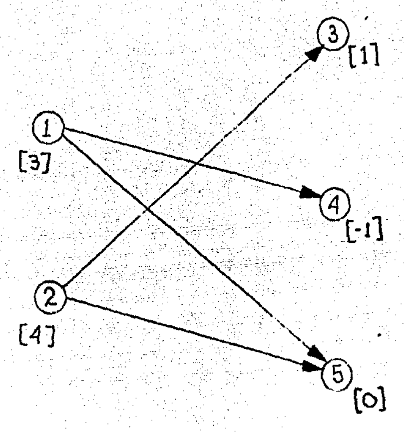
Los coeficientes de costo reducido se calcularán de la - misma forma resolviendo $Z_{ij}-C_{ij}=W_i-W_j-C_{ij}$ para todo arco (i,j) no básico

$$Z_{15}-C_{15}=W_1-W_5-C_{15}=6-0-3=3$$

$$Z_{24}-C_{24}=W_2-W_4-C_{24}=4-2-5=-3$$

Como $Z_{15}-C_{15}=3$ 0 entonces el arco (1,5) entra a la base. Al agregar a el árbol básico este arco se forma el ciclo formado por los arcos (2,5), (2,3) y (1,3). En este caso D = Min --- $\{X_{25}, X_{13}\}$ = Min $\{10, 5\}$ = 5 puesto que son los arcos con -- orientación igual a -1. Por lo tanto el arco que sale de el árbol es el arco (1,3)





Al agregar el arco (1,5) y eliminar el arco (1,3) se obtiene el árbol de la figura anterior, se actualiza el flujo de acuerdo a la orientación de la cadena (2,5,1,3,2,) en la red -- (b).

Este flujo actualizado se asocia a cada arco del árbol - resultante.

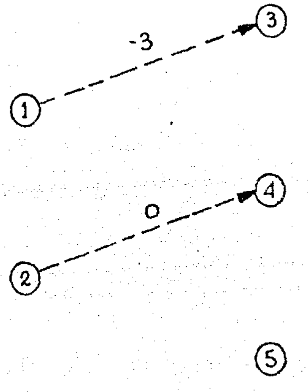
Iteración 3.

Se asocia a cada arco del árbol anterior su vértice po--

tencial que fue calculado resolviendo el sistema

$$W_5=0 \quad y \quad C_{ij} = W_i - W_j$$

para todo arco (i,j) básico. A continuación asociaremos a cada arco su correspondiente coeficiente de costo reducido



Los coeficientes de costo reducido se calcularon de la misma forma, resolviendo el sistema $Z_{ij}-C_{ij}=W_i-W_j-C_{ij}$ para todo arco (i,j) no básico.

Ya que todos los coeficientes de costo reducido son menores ó iguales que cero, la solución actual es óptima, es decir el flujo a costo mínimo en la red esta dado por:

$$X_{14}=15,\ X_{15}=5,\ X_{23}=15 \quad y \quad X_{23}=5,\ X_{13}=X_{24}=0$$

Una vez analizado un ejemplo del Método Simplex Espe--cializado en Redes, mostraremos el programa realizado en lenguaje PASCAL de este método y el mismo ejemplo aplicado a este programa.

```
(*$L+*)
                         PROGRAM TRANSPORTE(INPUT,OUTPUT);
  TYPE
       ARC=RECORD
             EXISTE:BOOLEAN;
             COSTO:INTEGER,
             VALOR:INTEGER,
           END;
       DIRECCION=(CORRECTO,CONTRARIO,NOHAY);
       SOLB=ARRAY[1..10,1..10] OF INTEGER;
       ARCO1=ARRAY[1..10,1..10] OF ARC;
       CICLOS=ARRAY[1..10,1..10] OF DIRECCION;
       M=ARRAY[1..10,1..10] OF INTEGER;
  VAR
       VARIABLEDUAL:SOLB,
       L1,L2,V,J,I,ORIGENES,DESTINOS,MINIMO:INTEGER;
       OPTIMO:BOOLEAN;
       RENOK:ARRAY[1..10] OF INTEGER;
       INDICES:ARRAY[1..10] OF INTEGER;
       ARCO:ARCO1;
       CICLO:CICLOS;
       VERTICEOR,VERTICEDES:INTEGER;
       VARDUAL:SOLB;
       OPCION:CHAR;
(*****************************************************************************)
     PROCEDURE ENCUENTRASOLBAS(VAR ARCOBAS:ARCO1);
(*****************************************************************************)
  VAR
     OFERTA,I,J:INTEGER,
     SOLBAS:ARRAY[1..10,1..10] OF INTEGER;
  BEGIN
```

```
WRITELN;WRITELN;WRITELN;WRITELN;WRITELN;WRITELN;
WRITELN(' ':34,'ENCONTRAMOS LA SIGUIENTE SOLUCION BASICA',
        ' FACTIBLE FORMADA POR LOS ARCOS : ');
WRITELN;WRITELN;
WHILE REQOR[ORIGENES]<>0 DO
BEGIN
OFERTA:=0;
FOR I:=1 TO ORIGENES DO
   FOR J:=1 TO DESTINOS DO
      BEGIN
         SOLBAS[I,J]:=0;
         ARCOBAS[I,J].EXISTE:=FALSE;
         IF REQDES[J]<>0 THEN
           IF (REQOR[I]<>0) AND (OFERTA=0) THEN
             BEGIN
                SOLBAS[I,J]:=REQDES[J];
                REQOR[I]:=REQOR[I]-REQDES[J];
                REQDES[J]:=REQDES[J]-SOLBAS[I,J];
                OFERTA:=REQOR[I];
             END
          ELSE
           IF REQOR[I]<>0 THEN
             BEGIN
                SOLBAS[I,J]:=OFERTA;
                REQDES[J]:=REQDES[J]-OFERTA;
                REQOR[I]:=REQOR[I]-OFERTA;
                OFERTA:=0;
             END;
      END;
END;
    FOR I:=1 TO ORIGENES DO
      FOR J:=1 TO DESTINOS DO
        IF SOLBAS[I,J]<>0 THEN
          BEGIN
```

```
                  ARCOBAS[I,J].EXISTE:=TRUE;
                  ARCOBAS[I,J].VALOR:=SOLBAS[I,J];
                  WRITELN(' ':34,'(',I:1,',',J:1,') CON UN VALOR DE',
                          ' ',ARCOBAS[I,J].VALOR:2);
                  WRITELN;WRITELN;WRITELN;
                 END
               ELSE
                 BEGIN
                  ARCOBAS[I,J].EXISTE:=FALSE;
                 END
  END;
(**********************************************************************)
           PROCEDURE VARSDUAL(VAR ARCOBA:ARCO1);
(**********************************************************************)
   VAR
      K,L,I,J,NODOSMARCADOS:INTEGER;
      W1:ARRAY[1..10,1..2] OF INTEGER;
      ARCOBA1:ARCO1;
      MARCADO:ARRAY[1..10,1..2] OF BOOLEAN;
  BEGIN
   IF NOT OPTIMO THEN
   BEGIN
   FOR I:=1 TO ORIGENES DO
      FOR J:=1 TO DESTINOS DO
         ARCOBA1[I,J]:=ARCOBA[I,J];
   NODOSMARCADOS:=1;
   FOR I:=1 TO ORIGENES DO
     BEGIN
      MARCADO[I,2]:=FALSE;
      W1[I,2]:=0;
     END;
   FOR J:=1 TO DESTINOS DO
     BEGIN
      W1[J,1]:=0;
```

```
              MARCADO[J,1]:=FALSE;
            END;
          W1[DESTINOS,1]:=0;
          MARCADO[DESTINOS,1]:=TRUE;
          WHILE NODOSMARCADOS <> (ORIGENES+DESTINOS) DO
          BEGIN
          FOR I:=ORIGENES DOWNTO 1 DO
             FOR J:=DESTINOS DOWNTO 1 DO
                IF (ARCOBA1[I,J].EXISTE=TRUE) AND (MARCADO[I,2]=TRUE)THEN
                    BEGIN
                         K:=1;
                         MARCADO[J,1]:=TRUE;
                         NODOSMARCADOS:=NODOSMARCADOS+1;
                         W1[J,K]:=W1[I,2]-ARCOBA1[I,J].COSTO;
                         VARIABLEDUAL[J,K]:=W1[J,K];
                         ARCOBA1[I,J].EXISTE:=FALSE;
                    END
                  ELSE
                    IF (ARCOBA1[I,J].EXISTE=TRUE) AND (MARCADO[J,1]=TRUE) THEN
                    BEGIN
                       K:=2;
                       MARCADO[I,2]:=TRUE;
                       NODOSMARCADOS:=NODOSMARCADOS+1;
                       W1[I,K]:=ARCOBA1[I,J].COSTO+W1[J,1];
                       VARIABLEDUAL[I,K]:=W1[I,K];
                       ARCOBA1[I,J].EXISTE:=FALSE;
                    END;
                END;
            END;
        END;
       (****************************************************************************)
                   PROCEDURE VARNORAS(VAR W2:SOL1;VAR ARCOS:ARCO1);
       (****************************************************************************)
          VAR
```

```
        MAXIMO,I,J:INTEGER;
        COSTNOBAS:ARRAY[1..10,1..10] OF INTEGER;
  BEGIN
   IF NOT OPTIMO THEN
    BEGIN
    FOR I:=1 TO ORIGENES DO
     FOR J:=1 TO DESTINOS DO
       COSTNOBAS[I,J]:=0;
      MAXIMO:=0;
      FOR I:=ORIGENES DOWNTO 1 DO
        FOR J:=DESTINOS DOWNTO 1 DO
           IF  ARCOS[I,J].EXISTE=FALSE THEN
             BEGIN
                COSTNOBAS[I,J]:=U2[I,2]-V2[J,1]-ARCOS[I,J].COSTO;
                WRITELN(' ':35,'EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO',
                       ' DEL ARCO (',I:2,',',J:2,') ES DE :',
                       ' ',COSTNOBAS[I,J]:3);
                WRITELN;WRITELN;WRITELN;
                IF COSTNOBAS[I,J]>MAXIMO THEN
                BEGIN
                    MAXIMO:=COSTNOBAS[I,J];
                    VERTICEOR:=I;
                    VERTICEDES:=J;
                END;
             END;
        IF MAXIMO<=0 THEN
          BEGIN
             WRITELN(' ':10,'C[I,J]<=0 PARA TODA VARIABLE NO BASICA',
                   ',ENTONCES ESTAMOS EN EL OPTIMO');
             WRITELN(' ':10,'LA SOLUCION ES:');WRITELN;WRITELN;
             FOR I:=1 TO ORIGENES DO
               FOR J:=1 TO DESTINOS DO
                 IF ARCOS[I,J].EXISTE=TRUE THEN
                    WRITELN(' ':10,'X[',I:2,',',J:2,']=',
```

```
                                 ' ',ARCOS[I,J].VALOR:3); WRITELN;
                  OPTIMO:=TRUE;
              END
            ELSE
                   WRITELN(' ':15,'EL ARCO QUE ENTRA A LA BASE ES EL',
                        ' (',VERTICEOR:3,',',VERTICEDES:3,')');
                   WRITELN;WRITELN;WRITELN;
        END;
      END;
     (****************************************************************************)
              PROCEDURE ENCUENCICLO(VAR ARBAS:ARCO1;X,Y:INTEGER);
     (****************************************************************************)
       VAR
         ARBAS1:ARCO1;
         I,J,X1,Y1,M,Z,JC:INTEGER;
         BANDERA1,BANDERA2:BOOLEAN;
         SALTE1,SALTE2:BOOLEAN;
      BEGIN
       IF NOT OPTIMO THEN
        BEGIN
        IF OPCION='S' THEN
        WRITELN(' ':49,'LOS ARCOS QUE FORMAN EL CICLO SON : ');
        WRITELN;WRITELN;
        FOR I:=1 TO ORIGENES DO
         FOR J:=1 TO DESTINOS DO
          BEGIN
           ARBAS1[I,J]:=ARBAS[I,J];
           CICLO[I,J]:=NOHAY;
          END;
          BANDERA1:=FALSE;
          BANDERA2:=FALSE;
          ARBAS1[X,Y].EXISTE:=TRUE;
          CICLO[X,Y]:=CORRECTO;
       WHILE NOT BANDERA1 DO
```

```
BEGIN
  I:=0;J:=0;
  WHILE NOT BANDERA1 DO
   BEGIN
     SALTE1:=TRUE;
     SALTE2:=TRUE;
      IF SALTE1=TRUE THEN
       I:=I+1;
        IF ARBASI[I,Y].EXISTE=TRUE THEN
          BEGIN
            CICLO[I,Y]:=CONTRARIO;
            ARBASI[I,Y].EXISTE:=FALSE;
            IF OPCION='S' THEN
            WRITELN(' ':47,'EL ARCO (',I:2,',',Y:2,')');
            WRITELN;WRITELN;
            IF I<>X THEN
              BANDERA2:=FALSE
            ELSE
              BEGIN
                BANDERA1:=TRUE;
                SALTE1:=FALSE;
                SALTE2:=FALSE;
              END;
            WHILE NOT BANDERA2 DO
             BEGIN
               IF SALTE2=TRUE THEN
                 J:=J+1;
                   IF ARBASI[I,J].EXISTE=TRUE THEN
                     BEGIN
                       CICLO[I,J]:=CORRECTO;
             IF OPCION='S' THEN
            WRITELN(' ':47,'EL ARCO (',I:2,',',J:2,')');
                       WRITELN;WRITELN;
                       ARBASI[I,J].EXISTE:=FALSE;
```

```
                          Y:=J;I:=J;J:=0;
                          SALTO1:=FALSE;
                          SALTO2:=FALSE;
                          BANDERA2:=TRUE;
                        END;
                      END;
                  END;
             END;
         END;
        END;
   END;
   (****************************************************************************)
            PROCEDURE COSTOMENOR( VAR CICLO2:CICLOS;VAR ARKO:ARCO1);
   (****************************************************************************)
     VAR
        I,J,A,B:INTEGER;
     BEGIN
       IF NOT OPTIMO THEN
        BEGIN
        MINIMO:=MAXINT;
        FOR I:=1 TO ORIGENES DO
         FOR J:=1 TO DESTINOS DO
           IF ARKO[I,J].EXISTE=TRUE THEN
            IF CICLO2[I,J]=CONTRARIO THEN
              IF ARKO[I,J].VALOR<MINIMO THEN
                BEGIN
                    MINIMO:=ARKO[I,J].VALOR;
                    A:=I;
                    B:=J;
                END;
            WRITELN(' ':51,'EL ARCO QUE SALE ES EL',
                    ' (',A:2,',',B:2,')');
            WRITELN;WRITELN;WRITELN;
            ARKO[A,B].EXISTE:=FALSE;
```

```
            ARCO[A,B].VALOR:=0;
           WRITELN(' ':51,'EL VALOR MINIMO ES ',MINIMO:2);
           WRITELN;WRITELN;WRITELN;
         END;
      END;
   (*********************************************************************)
    PROCEDURE ACTVALARC(VAR CICLO1:CICLOS;VAR ARCKO:ARCO1;MINI:INTEGER);
   (*********************************************************************)
     VAR
       I,J:INTEGER;
   BEGIN
     IF NOT OPTIMO THEN
      BEGIN
      FOR I:=1 TO ORIGENES DO
        FOR J:=1 TO DESTINOS DO
        IF ARCKO[I,J].EXISTE=TRUE THEN
        BEGIN
         IF CICLO1[I,J]=CORRECTO THEN
           ARCKO[I,J].VALOR:=ARCKO[I,J].VALOR+MINI
         ELSE
          IF ARCKO[I,J].EXISTE=TRUE THEN
           IF CICLO1[I,J]=CONTRARIO THEN
             ARCKO[I,J].VALOR:=ARCKO[I,J].VALOR-MINI;
        END
       ELSE
        IF ARCKO[I,J].EXISTE=FALSE THEN
          ARCKO[I,J].VALOR:=0;
      END;
   END;
   (*********************************************************************)
   (*********** P R O G R A M A   P R I N C I P A L *******************)
   (*********************************************************************)

  BEGIN
```

```
READLN(ORIGENES);
READLN(DESTINOS);
WRITELN(' ':56,'LA GRAFICA CONSTA DE : ');WRITELN;
WRITELN(' ':56,ORIGENES:1,' ORIGENES Y ',DESTINOS:2,
              ' DESTINOS');WRITELN;
WRITELN;WRITELN;
FOR I:=1 TO ORIGENES DO
  BEGIN
    READLN(REGORE[I]);
    WRITELN(' ':56,'LA OFERTA EN EL ORIGEN ',I:2,' ES DE ',
                 '',REGORE[I]:2);
    WRITELN;WRITELN;
  END;
FOR J:=1 TO DESTINOS DO
  BEGIN
    READLN(REGDES[J]);
    WRITELN(' ':50,'LA DEMANDA EN EL DESTINO ',J:2,' ES DE ',
                 '',REGDES[J]:2);
    WRITELN;WRITELN;
  END;
 WRITELN(' ':20,'QUIERES QUE TE DE LOS ARCOS QUE FORMAN ',
      'LOS CICLOS DE CADA UNA DE LAS ITERACIONES ?',' S/N ');
 READLN(OPCION);
WHILE NOT EOF DO
    BEGIN
       READLN(L1,L2,V);
       WRITELN(' ':34,'EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL ',
              'PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (',L1:1,',',L2:1,
              ') ES DE ',V:3);WRITELN;WRITELN;
       ARCO[L1,L2].EXISTE:=TRUE;
       ARCO[L1,L2].COSTO:=V;
    END;
RESET(INPUT);
ENCUENTRASOLBAS(ARCO);
```

```
      OPTIMO:=FALSE;
      WHILE NOT OPTIMO DO
      BEGIN
          VARDUAL(ARCO);
          VARNOBAS(VARIABLEDUAL,ARCO);
          ENCUENCICLO(ARCO,VERTICEOR,VERTICEDES);
          COSTOMENOR(CICLO,ARCO),
          ACTUALARC(CICLO,ARCO,MINIMO)
      END;
   END.
```

LA GRAFICA CONSTA DE :

2 ORIGENES Y 3 DESTINOS

LA OFERTA EN EL ORIGEN 1 ES DE 20

LA OFERTA EN EL ORIGEN 2 ES DE 20

LA DEMANDA EN EL DESTINO 1 ES DE 15

LA DEMANDA EN EL DESTINO 2 ES DE 15

LA DEMANDA EN EL DESTINO 3 ES DE 10

QUIERES QUE TE DE LOS ARCOS QUE FORMAN LOS CICLOS DE CADA UNA DE LAS ITERACIONES ? S/N

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,1) ES DE 5

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,2) ES DE 4

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,3) ES DE 3

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,1) ES DE 3

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,2) ES DE 5

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,3) ES DE 4

ENCONTRAMOS LA SIGUIENTE SOLUCION BASICA FACTIBLE FORMADA POR LOS ARCOS :

(1,1) CON UN VALOR DE 15

(1,2) CON UN VALOR DE 5

(2,2) CON UN VALOR DE 10

(2,3) CON UN VALOR DE 10

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (2, 1) ES DE : 5

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 3) ES DE : 0

EL ARCO QUE ENTRA A LA BASE ES EL (2, 1)

LOS ARCOS QUE FORMAN EL CICLO SON :

EL ARCO (1, 1)

EL ARCO (1, 2)

EL ARCO (2, 2)

EL ARCO QUE SALE ES EL (2, 2)

EL VALOR MINIMO ES 10

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (2, 2) ES DE : -3

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 3) ES DE : 3

EL ARCO QUE ENTRA A LA BASE ES EL (1, 3)

LOS ARCOS QUE FORMAN EL CICLO SON :

EL ARCO (2, 3)

EL ARCO (2, 1)

EL ARCO (1, 1)

EL ARCO QUE SALE ES EL (1, 1)

EL VALOR MINIMO ES 5

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (2, 2) ES DE : 0

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 1) ES DE : -3

C(I, J)=<0 PARA TODA VARIABLE NO BASICA,ENTONCES ESTAMOS EN EL OPTIMO
LA SOLUCION ES:

X(1, 2)= 15
X(1, 3)= 5
X(2, 1)= 15
X(2, 3)= 5

LA GRAFICA CONSTA DE :
2 ORIGENES Y 3 DESTINOS

LA OFERTA EN EL ORIGEN 1 ES DE 20

LA OFERTA EN EL ORIGEN 2 ES DE 20

LA DEMANDA EN EL DESTINO 1 ES DE 15

LA DEMANDA EN EL DESTINO 2 ES DE 15

LA DEMANDA EN EL DESTINO 3 ES DE [illegible]

DESEAS QUE TE DE LOS ARCOS QUE FORMAN LOS CICLOS DE CADA UNA DE LAS ITERACIONES ? S/N

LA RESPUESTA FUE

[illegible]

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,1) ES DE 5

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,2) ES DE 4

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (1,3) ES DE 3

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,1) ES DE 3

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,2) ES DE 5

EL COSTO DE ENVIAR UNA UNIDAD DEL PRODUCTO A TRAVES DEL ARCO (2,3) ES DE 4

ENCONTRAMOS LA SIGUIENTE SOLUCION BASICA FACTIBLE FORMADA POR LOS ARCOS :

(1,1) CON UN VALOR DE 15

(1,2) CON UN VALOR DE [illegible]

(2,3) CON UN VALOR DE 11

(2,3) CON UN VALOR DE 11

EL VALOR DE Z ES : 135

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (2, 1) ES DE : 3

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 3) ES DE : [illegible]

EL ARCO QUE ENTRA A LA BASE ES EL (2, 1)

EL ARCO QUE SALE ES EL (3, 2)

EL VALOR MINIMO ES 10

EL VALOR DE Z ES : 155

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (3, 2) ES DE : -3

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 3) ES DE : 3

EL ARCO QUE ENTRA A LA BASE ES EL (1, 3)

EL ARCO QUE SALE ES EL (1, 1)

EL VALOR MINIMO ES 3

EL VALOR DE Z ES : 140

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (2, 2) ES DE : 6

EL COEFICIENTE DE COSTO REDUCIDO DEL ARCO (1, 1) ES DE : -3

[illegible] PARA TODA VARIABLE NO BASICA, ENTONCES ESTAMOS EN EL OPTIMO
LA SOLUCION ES:

[illegible]

APENDICE

Gráfica

Una gráfica es una pareja (M,S) donde:

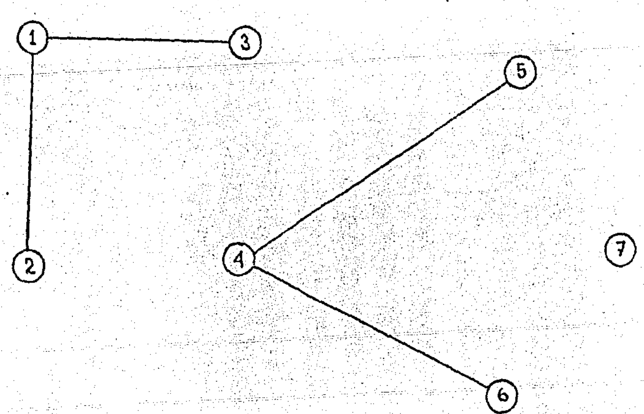
M = vértices ó nodos

S = lineas que unen todos ó algunos de los vértices

La notación es G(M,S)

- La pareja ordenada (X,Y) denota el arco cuyo vértice inicial es X y cuyo vértice final es Y, X y Y son vértices terminales del arco (X,Y).

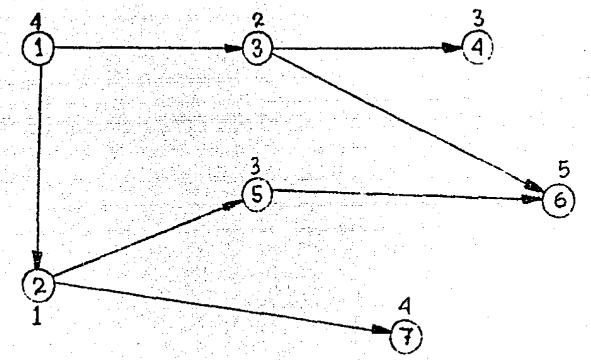
De acuerdo a la terminología de la teoría de gráficas, una gráfica consta de un conjunto de puntos llamados nodos o vértices, y de lineas llamadas arcos ó artistas que unen ciertos pares de nodos.



Gráfica Dirigida

Si los elementos de S tienen dirección se llaman arcos y se dice que G es una gráfica dirigida.

Se considera una red como una gráfica con información - de algún tipo sobre sus arcos y/o en sus vértices.



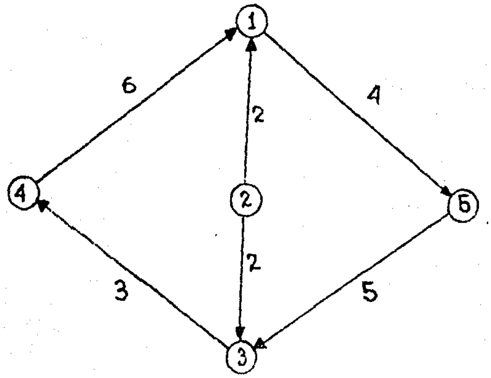
Matriz de Incidencia

Es la matriz para la cuál cada columna asociad al arco (i,j) contiene un "+1" en el renglón i, un "-1" en el renglón j y todos los elementos restantes son cero. Por lo tanto las - columnas de A estan dadas por:

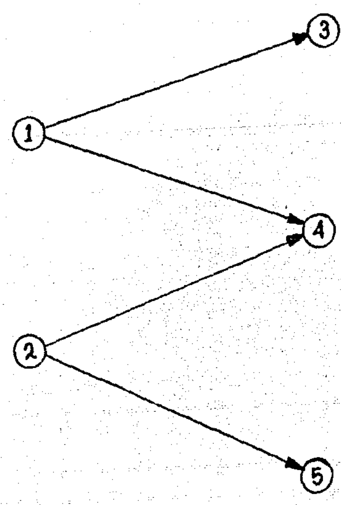
$$a_{ij}=e_i-e_j$$

en donde e_i y e_j son vectores en E^m, con 1s en la i-ésima y -- j-ésima posiciones respectivamente.

Se dice que una gráfica es una gráfica conexa si para todo par de nodos existe una cadena que los conecta.

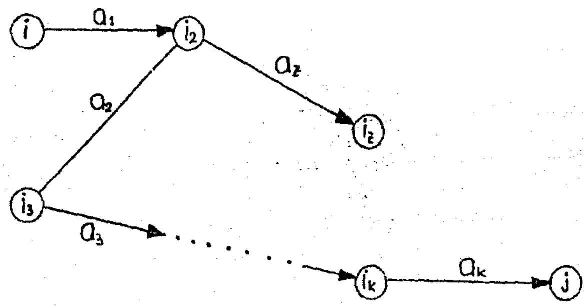


Un árbol es una gráfica conexa que no contiene ciclos.

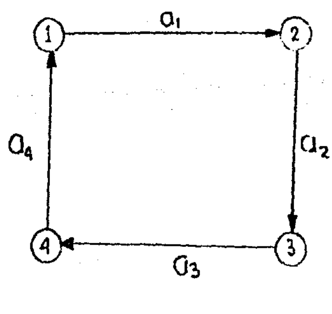


Una cadena $C = \left\{ i, a_1, i_2, a_2, \ldots, i_k, a_k, j \right\}$ entre los nodos i y j es una sucesión de arcos y nodos que conectan al nodo i con el j. Si se especifica que los arcos de la sucesión deban ser todos en la misma dirección se llama camino.

C

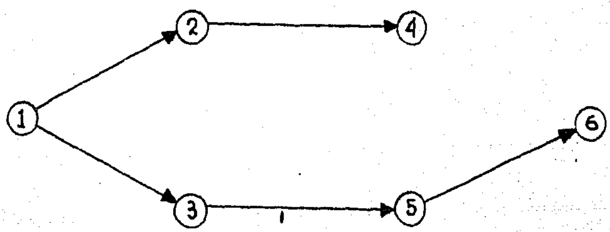


Un ciclo es una cadena que empieza y termina en el mismo nodo.

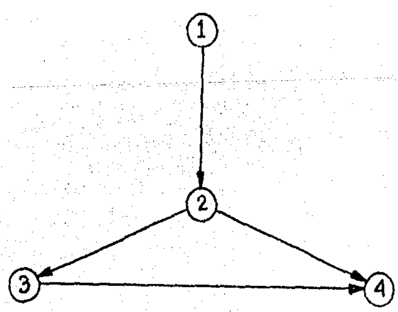


$\text{Ciclo} = \left\{ 1, a_1, 2, a_2, 3, a_3, 4, a_4, 1 \right\}$

Un árbol de expansión es un árbol que contiene a todos los vértices de la gráfica.



Un vértice pendiente es aquel que está conectado a un - solo arco de la gráfica.



Vértice pendiente = $\{1\}$

Matriz Inversa

Sea A una matriz cuadrada n X n. Si B es una matriz -- n X n tal que AB=I y BA=I, entonces B se llama la inversa de A. La matriz inversa, si existe, es única y se denota, por A^{-1}.

Sea $C = \left\{ i_1, a_1, i_2, a_2, \ldots\ldots, a_{k-1}, i_k \right\}$ una cadena de i, - a i_k representada con la secuencia de vértices y arcos que la forman. La orientación de la cadena C es un vector $O(c) \in \mathbb{R}^k$ --- donde:

$$O_j(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j = (i_j, i_{j+1}) \\ -1 & \text{si } a_j = (i_{j+1}, i_j) \end{cases}$$

C O N C L U S I O N E S

Una vez analizada la estructura y propiedades de los modelos lineales de Transporte, Asignación, Flujo Máximo, Flujo a Costo Mínimo y Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas, se observó que dichas estructuras se pueden unificar bajo una estructura común la cuál correspondió al modelo de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas.

Se mencionaron los métodos de solución que existen para el modelo más general y cuales de ellos son los más eficientes desde un punto de vista computacional.

Aunque cada uno de los modelos tienen métodos de solución propios que son más eficientes, es importante que todos ellos se puedan expresar bajo una misma estructura y con un método de solución en común.

La eficiencia de un algoritmo para redes de Flujo a Costo Mínimo con Variables Acotadas y en general para cualquier algoritmo de esta naturaleza radica en el número de pivoteos - que se realizan, y este número a su vez depende del número de arcos y nodos de la red.

BIBLIOGRAFIA

- HILLER/LIBERMAN. "Introducción a la Investigación de Operaciones". Editorial Mc Graw-Hill, 1980.
- PRAWDA WITENBER, JUAN. "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones". Editorial Limusa, 1979.
- SIMONNARD, MICHEL. "Linear Programing". Editorial Prentice-Hall Inc., 1966.
- MURTY KATA. "Linear and Combinatorial Programing." Editorial John Wiley & sons, inc, 1976.
- BAZARAA, MOKHTAR. "Programación Lineal y Flujo en Redes". Editorial Limusa, 1984.
- KENNINGTON J."Algorithms for Network Programing." Editorial J. Wiley & sons, 1980.
- CHRISTOFIDES NIKOS. "Grafh Theory an Algorithmic Approach." Editorial Ac Press, 1975.
- JENSEN D.A. AND BARNES B.W. "Network Flow Programing." Editorial John Wiley, 1980.

REPORTES DE INVESTIGACIONES

- Impementation and computacion comparation of primal, dual -- and primal dual computer cades for minimun cost network flow problems.

  F. GLOVER, D. KARNEY, D. KLINGMAN.

- New advances in the solution of large-scale network and network related problems.

  F. GLOVER, D. KLINGMAN.