UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

F A C U L T A D D E C I E N C I A S

PRODUCCION DE MERCANCIAS POR MEDIO DE MERCANCIAS, DE PIERO SRAFFA. UN ANALISIS CRITICO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

PRESENTA

JUAN DE DIOS ENRIQUE ROSELLON DIAZ

I N D I C E

INTRODUCCION

I

No obstante que el uso de las matemáticas en la teoría económica ha ido creciendo cada día mas, creemos que en muchos casos su utilización ha distado de ser una real ayuda para el desarrollo de los modelos económicos.

Esto no es culpa de la ciencia matemática en si misma, sino que mas bien el error ha consistido en dar preminencia al modelo matemático sobre el modelo económico. Al analizarse un proceso económico se hace abstracción de los elementos esenciales de tal proceso, así como de las relaciones constantes que se producen entre ellos. La abstracción conduce a establecer cuales son, en condiciones dadas, los elementos mas generales del proceso económico, asi como las leyes económicas mas generales, lo cual constituye un modelo económico. Las matemáticas deben de servir, entonces, al modelo económico, respetando las abstracciones hechas en el y no "adaptarlo"(cambiarlo) para poder ser aplicadas.

Creemos que Sraffa en su libro "Producción de Mercancías por medio de Mercancías, comete el error de plantear situaciones(modelos) económicas dadas y después formular un modelo matemático que entra en franca contradicción con tales situaciones. El objetivo de este trabajo consiste, sobre todo, en mostrar como es que Sraffa incurre en tal error.

I I

Sin embargo, la cosa no para aquí. Sraffa, desde nuestro punto de vista, también incurre en errores de indefinición de las unidades de las variables que maneja. Como veremos en el transcurso del presente trabajo, tales errores, que de entrada parecen no muy importantes, pueden conducir a conclusiones equivocadas en el modelo.

Las definiciones claras y no ambiguas de las correctas unidades o dimensiones sirven para tres propósitos. Primero, sin establecer las dimensiones básicas de medida es imposible cuantificar las categorías científicas. Solo si se establece, por ejemplo, que la dimensión de un recipiente cúbico es (L^3), donde L es usada para la longitud, podremos empezar a medir y calcular el volumen de tal recipiente. Las dimensiones dan una correcta idea de que hacer cuando cambiamos las unidades de medida. Por ejemplo, el contenido cúbico en pies (1/3 de yarda) debe ser $3^3=27$ veces el contenido cúbico medido en yardas. Sólo el análisis dimensional puede establecer los multiplicadores para la transición de un sistema de unidades a otro.

Segundo, el análisis dimensional provee una revisión en la lógica de las ecuaciones. Aún los modelos económicos prominentes no poseen una consistencia en sus dimensiones. Algunas veces la situación puede ser remediada insertando las constantes necesarias de dimensionalidad. Consideremos la función Cobb-Douglas: $P=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$ donde P es la producción (medida en unidades monetarias por año), K es el capital (medido en unidades monetarias pero sin dimensión, esto es, no por año para un momento dado), y L es el trabajo (medido en hombres-año). Sin las constantes apropiadas de conversión, el análisis dimensional da lugar a serios problemas:

$$\left(\frac{\text{Dinero}}{\text{Tiempo}} \right) = (\text{Dinero})^{\alpha} (\text{Hombre} \cdot \text{Tiempo})^{1-\alpha}$$

Si α es 1, esto significa que ($\frac{\text{Dinero}}{\text{Tiempo}}$) = Dinero, si $\alpha = 0$, significa que Dinero = Hombre - Tiempo y si $0 < \alpha < 1$, no significa nada. Uno puede derivar otras varias tonterías interesantes cambiando las unidades de medida, por ejemplo midiendo la producción por números índice.

Tercero, el resultado mas importante del análisis dimensional sería ayudarnos a expresar las leyes económicas de una manera que no fuera afectada por el cambio de unidades de medida. Asi, los valores propios de la matriz A tienen la misma mag-

Esta tesis está dividida en tres grandes partes. La primera parte abarca los capítulos I y II. En el capítulo 1 se expone el modelo original de Sraffa para una economía de subsistencia, es decir, para una economía que no genera un excedente económico. En el capítulo II se aborda el análisis crítico del capítulo I. Tal análisis se lleva a cabo en tres apartados. En el primer apartado (2.1), veremos como Sraffa maneja ambiguamente conceptos económicos tales como precio, valor de cambio, valor, valor relativo, etc. También se definirán de una manera mas formal, conceptos tales como valor de cambio, valor de cambio "neutro" y precio relativo. En el segundo apartado (2.2) veremos como Sraffa usa un modelo matemático que es contradictorio con los supuestos económicos que implicitamente subyacen a la situación de trueque planteada por Sraffa en el primer capítulo. Por último, en el tercer apartado (2.3), propondremos un modelo matemático mas depurado que el de Sraffa para una economía de subsistencia.

La segunda parte de la tesis comprende los capítulos III y IV. En el capítulo III de Sraffa se efectúa el estudio del modelo original de Sraffa cuando estamos ante una economía que genera un excedente. En el capítulo IV se analiza desde una postura crítica el capitulo III. El capítulo IV también se subdivide en tres apartados. El primero (4.1), planteará un modelo matemático mas cuidadoso (sobre todo en lo referido al problema de las dimensiones) para el caso de la producción con excedente. El segundo (4.2), expondrá una característica matemática que surge de la distinción entre mercancías básicas y no básicas. El tercer apartado (4.3), se dedicará a replantear el modelo de Sraffa en el caso en el que el salario se supone variable. Como se verá un descuido en el uso de las unidades por Sraffa, le lleva a cometer a este un error de gran importancia.

La tercera parte de la tesis consta de los capítulos V y VI. En el capítulo V se verá la exposición original que hace Sraffa de la mercancía patrón. En el capítulo VI se verá , finalmente, una exposición mas sencilla que la propuesta por

Sraffa, para la construcción de la mercancía patrón

C A P I T U L O I

PRODUCCION PARA LA SUBSISTENCIA: EL MODELO ORIGINAL.

Sraffa considera en el primer capítulo de su obra, una economía de subsistencia, en la que "las mercancías son producidas por industrias diversas y son intercambiadas una por otra en un mercado que se celebra después de la cosecha".[1]

Si se supone en un primer acercamiento que sólo son producidas dos mercancías, trigo y hierro, ambas son usadas, en parte, como sustento de los trabajadores y lo que resta como medios de producción. Como ejemplo, supongamos que 280 arrobas de trigo y 12 toneladas de hierro son necesarias para producir 400 arrobas de trigo; y que 120 arrobas de trigo y 8 toneladas de hierro son necesarias para producir 20 toneladas de hierro. La actividad de un año puede expresarse entonces de la siguiente manera:

$$280 \text{ arr. trigo} + 12 \text{ t. hierro} \longrightarrow 400 \text{ arr. trigo}$$
$$120 \text{ arr. trigo} + 8 \text{ t. hierro} \longrightarrow 20 \text{ t. hierro}$$

En la sociedad, por tanto, no se ha añadido nada,a través de la producción, al acervo inicial: 400 arrobas de trigo y 20 toneladas de hierro fueron usadas para la producción y las mismas cantidades son producidas, pero al final del período, cada mercancía estará concentrada en las manos de su productor.

Al final del año, los productores intercambian entre si sus mercancías y "hay un único conjunto de valores de cambio que, si

1/ Sraffa, P. "Production of Commodities by Means of Commodities", Cambridge University Press, Great Britain, 1977, p.3

es adoptado por el mercado, restablece la distribución original de los productos y hace posible que el proceso se repita; tales valores surgen directamente de los métodos de producción. En el ejemplo particular que hemos tomado, el valor de cambio requerido es 10 arrobas de trigo por 1 tonelada de hierro".[2 y 3]

Sraffa ilustra este modelo económico con otro ejemplo de tres mercancías:

240 arr. trigo + 12 t. hierro + 18 cerdos ⟶ 450 arr. trigo
90 arr. trigo + 6 t. hierro + 12 cerdos ⟶ 21 t. de hierro
120 arr. trigo + 3 t. hierro + 30 cerdos ⟶ 60 cerdos

Los valores de cambio, en este caso, que restablecen la distribución original son:

10 arr. de trigo = 1 t. de hierro = 2 cerdos

Sraffa hace notar que, mientras en el ejemplo de dos mercancías la cantidad de hierro usada para producir trigo era equivalente en "valor"[4] a la cantidad de trigo usada en la producción de hierro; en el caso de tres mercancias, en cambio, esto ya no es necesariamente cierto para cualquier pareja de mercancías. Según Sraffa en el ejemplo de tres mercancías, el reemplazo solamente puede ser efectuado a través de un intercambio triangular.[5]

2/ Op.Cit., p.3

3/ La lógica seguida aquí por, digamos, el productor de hierro para un siguiente período sería: de las 20 T. de hierro, se necesitan 8 T. de hierro para el siguiente período y las restantes 12 T. se intercambiarán por trigo, que dado el valor de cambio de 10 arr. trigo por 1 T. de hierro, serán "equivalentes" a 12 x 10= 120 arr. de trigo. Formalmente, veremos en el capítulo II que éste manejo es inadecuado, ya que Sraffa opera (suma y multiplica) unidades heterogéneas (arrobas y toneladas).

4/ Como se verá en el Cap. II, existen problemas en el tratamiento

Finalmente, Sraffa aborda el caso general. Si en esta situación tenemos n mercancías, cada una de las cuales es producida por una industria diferente,[6] denotemos por Xi la cantidad de la mercancía i producida anualmente, por Xij la cantidad de la mercancía i empleada anualmente por la industria que produce j. El autor escribe: " Estas son cantidades conocidas (i.e. Xi, Xij). Las incógnitas por determinar son P_1, $P_2, \ldots, P_n$ que indican respectivamente los valores unitarios de las mercancías 1, 2,...,n que, en caso de ser adoptadas, restablecerían la posición inicial. Las condiciones de producción son ahora las siguientes:

$$
\begin{array}{ccccccc}
X_{11}P_1 & + & X_{21}P_2 & + \cdots + & X_{n1}P_n & = & X_1P_1 \\
X_{12}P_1 & + & X_{22}P_2 & + \cdots + & X_{n2}P_n & = & X_2P_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
X_{1n}P_1 & + & X_{2n}P_2 & + \cdots + & X_{nn}P_n & = & X_nP_n
\end{array} \qquad \ldots. (1)
$$

donde, puesto que se supone que el sistema está en un estado de reemplazamiento, $X_{11}+X_{12}+\cdots+X_{1n}=X_1$; $X_{21}+X_{22}+\cdots+X_{2n}=X_2$;...; y, $X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nn}=X_n$"[7,8].

Sraffa concluye el capítulo haciendo notar que no es necesario suponer que cada mercancía entra directamente en la producción de cada una de las otras. Si, por otro lado, el precio de una de las mercancías se hace igual a la unidad, tendremos n-1 incógnitas. Dado que en el agregado de las ecuaciones las mismas cantida-

5/ Como veremos en el Capítulo II (secciones 2.1 y 2.2) lo que Sraffa esta presuponiendo es que los intercambios que se dan en forma directa entre las industrias, son equivalentes en términos de valor a los intercambios triangulares.

6/ En toda la primera parte del libro, Sraffa supone que cada industria produce una sola mercancía y que los medios de producción, entre los cuales se encuentran, los medios de vida de los productores, se consumen íntegramente al final del período considerado. También supone que existe una sola tecnica de producción.

7/ Sraffa, P. "Production of Commodities...", p.4

8/ La notación difiere de la de Sraffa, quien emplea letras.

des ocurren en ambos lados, cualquiera de las ecuaciones puede - ser inferida de la suma de las otras. Esto deja n-1 ecuaciones - linealmente independientes que determinan únicamente n-1 precios.

C A P I T U L O II

PRODUCCION PARA LA SUBSISTENCIA: ANALISIS CRITICO

A pesar de su brevedad, el primer capítulo de la obra de Sraffa, contiene errores que se repetirán a lo largo del texto. El análisis de éste capítulo será abordado en tres apartados sucesivos. En el primer apartado se analizará la ambigüedad que prevalece en algunos conceptos económicos estudiados por Sraffa, tales como el valor de cambio y el precio. En el segundo apartado, discutiremos que las conclusiones del primer capítulo sólo son irrefutables cuando se acepta que las matemáticas resuelven problemas económicos indefinidos. En el último apartado propondremos un modelo matemático, más depurado que el que ofrece Sraffa.

2.1. VALOR DE CAMBIO Y PRECIO

A pesar de que el trabajo de Sraffa constituye una contribución a la teoría de los precios, existe una confusión de términos relacionados precisamente con el precio: el "precio", el "valor de cambio", el "valor", el "valor relativo" y el "precio relativo" son usados a lo largo del texto junto con otras acepciones de ellos ("precio necesario", "precio natural" y "precio de producción"). Se trata de cinco términos usados por Sraffa que han sido utilizados por diversas escuelas económicas con diferencias de contenido y que, debieran de motivar a algún tipo de sistematización a los estudiosos de la teoría de los precios. Sin embargo, es probable que, después de tal sistematización, pudieramos llegar a un resultado no muy agradable: si se plantea, como en el primer capítulo del libro de Sraffa, una situación económica de trueque (en donde todas las mercancías pueden cambiarse directamente) y a las proporciones en que se cambian las mercancías se les llama valores de cambio, estaría claro que el conjunto de valores de cambio puede ser representado por una matríz. Si con esta definición formulamos, tal como lo hace Sraffa, un modelo matemático donde a partir de las condiciones de producción encontramos los valores de cambio, el uso de las matemáticas estaría siendo usado con corrección. Pero, si tal como lo hace Sraffa, insinuamos una situación de trueque y formulamos un modelo matemático donde se supone que las mercancías sólo se cambian por dinero, estamos cometiendo un error de mayúsculas proporciones. Veremos que:

a) Si existen diferencias entre valor de cambio y precio, la conclusión de Sraffa no se sostiene;

b) Si ambos conceptos son idénticos, la conclusión de Sraffa no puede apoyarse sólo en un modelo matemático.

¿Qué es lo que sucede con los términos valor, valor relativo y precio relativo?. En Sraffa, valor debe equivaler a valor de cambio, así como a valor relativo. Usaremos en este trabajo el término de valor de cambio, preferentemente. Entre valores de cambio y precios relativos, ó no existe ninguna diferencia, ó bien se trataría de conceptos incomparables: valores de cambio son las proporciones en que se cambian las mercancías en una economía de trueque; precios relativos son catidades que se obtienen al dividir precios unitarios y que se usarían para efectuar cambios directos entre productos en una economía que opera con dinero.

Usaremos en la siguiente argumentaciónsólo tres términos de los que emplea Sraffa: valor de cambio, precio y precio relativo.

Supongamos n mercancías. El valor de cambio C_{ij} de una mercancía i lo definiremos como la cantidad de otra mercancía j que se obtiene[9] por una unidad de la mercancía i. Las unidades de un valor de cambio específico C_{ij} son:

Unidades de la mercancía j / Unidades de la mercancía i

Es útil observar que:

$$C_{ii} = 1 \; , \forall i = 1, \ldots . n$$

y que:

$$C_{ij} = \frac{1}{C_{ij}} \qquad i, j = 1, \ldots . n \qquad \ldots (2)$$

Llamemos C a la matriz $C = (C_{ij})$ de valores de cambio. Esta matriz puede escribirse como:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} \cdots\cdots & C_{1n} \\ \frac{1}{C_{12}} & 1 & C_{23} \cdots\cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{C_{1n}} & \frac{1}{C_{2n}} & \frac{1}{C_{3n}} \cdots\cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La anterior definición del valor de cambio no aborda el problema de los intercambios intermedios que se pudieran realizar entre el cambio de una mercancía por otra. Denotemos por C^{*}_{ij} a los-

9/ En una situación de trueque.

valores de cambio "neutros", que son valores de cambio independientes de los cambios intermedios.

Estos elementos conforman una matriz C^* de valores de cambio que satisfacen:

$$C^*_{ij} = C^*_{ir} \times C^*_{rj} \; ; \quad \forall\, r=1,\ldots,n \qquad \ldots.(3)$$

Si denotamos por C^*_j a la columna j de la matriz C^*, tendremos (utilizando (2) y (3)):

$$C^*_j = \frac{1}{C^*_{jr}} \; C^*_r \; ; \qquad \forall\, j=1,\ldots,n$$

por lo tanto, el rango de la matriz C^* es 1.[10]

Ambas matrices C y C^* sólo tienen sentido en el caso de que dos mercancías puedan intercambiarse, esto es, en una situación de trueque.

En el caso de una economía capitalista, las mercancías no se cambian directamente entre sí, los cambios se hacen mediante el dinero. Si representamos a la mercancía dinero por d, el precio P_{id} de una mercancía i lo definiremos como la cantidad de la mercancía d que se obtiene a cambio de una unidad de la mercancía i.

10/ Observemos que los valores de cambio neutros quedan unívocamente determinados una vez fijados todos los posibles valores de cambio referidos a una sola mercancía.

Definamos, entonces:

$$P_{ij}^{d} = P_{id} / P_{jd} \quad ; \qquad i,j = 1,\ldots,n$$

donde, a P_{ij}^{d} lo llamaremos el precio relativo de la mercancía i con respecto a la mercancía j , con respecto a d.

Observemos que:

$$P_{ij}^{d} = \frac{1}{P_{ji}^{d}}$$

y que,

$$P_{ij}^{d} = P_{ik}^{d} \times P_{kj}^{d} \quad ; \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n$$

lo cual nos muestra una similitud formal entre precios relativos y valores de cambio neutros. Sin embargo, existe una diferencia semántica entre ambos conceptos: una teoría que abordara el problema de porqué y cómo se alcanzan valores de cambio neutros en una sociedad con economía de trueque, tendría que tratar sobre las formas en que el intercambio se realiza. Por otro lado, una teoría de los precios no tiene como un problema el analizar las formas en que se realizan los cambios, ya que intercambios intermedios no conducirán a diferentes resultados, siempre y cuando, no haya variaciones en el tiempo de un mismo precio.

Veamos como es que Sraffa describe una situación de trueque y mod la matemáticamente una economía dineraria.

2.2. SRAFFA Y EL TRUEQUE.

En el primer capítulo de su libro, Sraffa establece las bases de lo que será su manera de argumentar los conceptos e ideas básicas de toda su obra.

Como ya hemos visto en la sección 1.1, Sraffa analiza en este primer capítulo, una sociedad que produce lo justo para mantenerse, en donde cada industria produce una sola mercancía y en donde existe una sola técnica de producción.

Analizando el ejemplo de las tres mercancías, es notable en la formulación y solución del mismo, la libertad con que Sraffa suma cantidades heterogéneas (como por ejemplo, arrobas de trigo y cerdos) ó iguala, por ejemplo, arrobas de trigo con toneladas de hierro. Estos errores pueden corregirse, si un supuesto que está ausente en el texto, es añadido.

Si partimos del valor de cambio, definido como lo hicimos en el apartado 2.1., Sraffa expresa lo que en nuestra notación sería (denotando con los subíndices 1, 2 y 3; el trigo, el hierro y los cerdos, respectivamente):

$$C^*_{21} = 10 \text{ arrobas de trigo/ 1 tonelada de hierro}$$

$$C^*_{23} = 2 \text{ cerdos/ 1 tonelada de hierro}$$

Por otro lado, suponiendo sólo valores de cambio neutros, podemos encontrar :

$$C^*_{13} = C^*_{12}\, C^*_{23} = \frac{C^*_{23}}{C^*_{21}} = \frac{\text{2 cerdos/ 1 tonelada de hierro}}{\text{20 arrobas de trigo/ 1 Ton. de hierro}}$$

$$= \frac{\text{2 cerdos}}{\text{10 arrobas de trigo}}$$

lo que implica que,

C^{*}_{13}= 1/5 cerdos / 1 arroba de trigo

Pero, ¿ cuál es la razón para que Sraffa deba escoger valores de cambio neutros ?. Para analizar esto, veamos el ejemplo y propongamos los siguientes valores de cambio del primer tipo (matriz C):

C_{21}= 15 arrobas de trigo / 2 toneladas de hierro
= 7 1/2 arrobas de trigo / 1 tonelada de hierro

C_{31}= 20 arrobas de trigo / 3 cerdos
= 6 2/3 arrobas de trigo / 1 cerdo

C_{32}= 1 tonelada de hierro / 4 cerdos
= 1/4 tonelada de hierro / 1 cerdo

Con estos valores de cambio, y si cada industria realiza sus intercambios de forma directa con los respectivos productores, sería posible la reproducción de la hipotética sociedad planteada por Sraffa en el ejemplo de las tres mercancías.

Así, la conclusión de Sraffa, pudo haber sido expresada de la siguiente manera : " hay un único conjunto de valores de cambio neutros que restablecen la distribución original del producto". ¿ Qué significa, en términos económicos, partir de tales-valores ?. Es posible afirmar que, digamos, un productor de hierro no aceptaría los valores de cambio C_{21}, C_{31} y C_{32} que hemos propuesto, porque si cambia 1 tonelada de hierro por 7 1/2 arrobas de trigo, obtiene menos que si cambia por cerdos y éstos por trigo, en cuyo caso obtendría 26 2/3 de arrobas de trigo por 1 tonelada de hierro[11]. Perp esta racionalidad de productores privados que intercambian con el fin de maximizar el resultado del cambio, es por completo incompatible con la condición de subsistencia de la sociedad de trueque.

Este comportamiento implicaría, algo así como que, los productores produjeran para cambiar y no que cambiaran para producir.

Por lo tanto, solamente el conjunto de valores de cambio neutros, posibilitan que la economía de trueque se reproduzca sin crecer económicamente.

Pero, desde nuestro punto de vista, Sraffa comete un error al introducir el dinero en una sociedad como la que plantea en el primer capítulo de su obra. En el planteamiento original de Sraffa parece que la unicidad de los valores de cambio derivados de las condiciones técnicas, no se sustenta a partir de argumentos económicos, sino que parece desprenderse de un modelo matemático que no especifica claramente sus supuestos y donde la equivalencia en el cambio introduce abruptamente el dinero.

A nuestro parecer, estas dificultades serían salvadas si los valores de cambio fueran tratados como en el apartado 2.1 de éste trabajo. Nos parece claro que no hay necesidad de hacer referencia

11/ $C_{21} = 7\frac{1}{2}$ arrobas de trigo / 1 tonelada de hierro

$$C_{23} \cdot C_{31} = \frac{C_{31}}{C_{32}} = \frac{\text{20 arrobas de trigo / 3 cerdos}}{\text{1 tonelada de hierro / 4 cerdos}}$$

$$= 26\ \tfrac{2}{3} \text{ arrobas de trigo / 1 ton. de hierro}$$

a dinero en una economia de trueque que, a partir de ciertas condiciones técnicas, posibilita por sí sola la existencia de una solución única de valores de cambio (neutros) que garantice la distribución original de los productos y que permita que el proceso productivo se repita[12].

2.3. EL MODELO QUE PROPONEMOS.

Pasemos ahora al caso general. Como ya hemos visto, Sraffa establece en su ejemplo de n mercancías que las X_i y X_{ij} son catidades conocidas y que las incógnitas por determinar en el modelo son $P_1, P_2, \ldots, P_n$ que, según Sraffa, "indican respectivamente los valores unitarios de las mercancias 1, 2,..., n que, en caso de ser adoptados, restablecerian la posición inicial..."[13].

Observemos que, en ningun momento, se aclara respecto a qué mercancía están referidos los "valores unitarios". Si no es elegida una mercancia específica, es imposible hablar de valor de cambio y de precio.

Podría argumentarse que Sraffa pensaba en valores unitarios como cantidades "puras", desprovistas de unidades, pero entonces como los coeficientes X_{ij} si tienen unidades, a saber, u_i ; examinando, por ejemplo, la primera ecuación de (1), obtendríamos:

12/ En lo anteriormente dicho se entiende al dinero como un numerario. De hacer explícito que Sraffa supone dinero y no un simple numerario, Sraffa ya no podría sostener que todas las mercancías se emplean como insumos o para la subsistencia de los productores, excepto si se postula al cambio como la única forma de reproducción del sistema económico y por tanto, la mercancía dineraria sería un "insumo" para el cambio.

13/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 4

$$X_{11}P_1u_1 + X_{21}P_2u_2 + \ldots + X_{n1}P_nu_n = X_1P_1u_1$$

esto es, estaríamos sumando cantidades heterogéneas.

Por lo tanto, los P_i deben ser dimensionales, esto es, deben estar referidos a una mercancía elegida de antemano. Si elegimos, por ejemplo, la mercancía K, estos precios serían:

$$P_1^{(K)}, \ldots, P_n^{(K)}$$

donde la unidad de $P_i^{(K)}$ es u_K/u_i

Tenemos, entonces, n sistemas de n ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccc} X_{11}P_1^{(i)} + \ldots + X_{n1}P_n^{(i)} & = & X_1P_1^{(i)} & & \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots & & \text{donde, } i=1,2,\ldots,n \\ X_{1n}P_1^{(i)} + \ldots + X_{nn}P_n^{(i)} & = & X_nP_n^{(i)} & & \ldots (4) \end{array}$$

observando que $P_i^{(i)} = 1$, para cualquier i, al buscar los precios, por ejemplo, con respecto a la mercancía 1, el sistema (4) para - $i=1$, quedaría:

$$\begin{array}{l} X_{11} + X_{21}P_2^{(1)} + \ldots + X_{n1}P_n^{(1)} = X_1 \\ X12 + X_{22}P_2^{(1)} + \ldots + X_{n2}P_n^{(1)} = X_2P_2^{(1)} \qquad \ldots (5) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ X_{1n} + X_{2n}P_2^{(1)} + \ldots + X_{nn}P_n^{(1)} = X_nP_n^{(1)} \end{array}$$

el cual es claramente no homogéneo. Veamos que este sistema tiene solución única positiva.

Denotemos a P_i^1 como P_i, el sistema (5) se puede escribir entonces como:

$$
\begin{aligned}
X_{21}P_2 + \ldots + X_{n1}P_n &= X_1 - X_{11} \\
(X_{22} - X_2)P_2 + \ldots + X_{n2}P_n &= -X_{12} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\quad\ \vdots \\
X_{2n}P_2 + \ldots + (X_{nn} - X_n)P_n &= -X_{1n}
\end{aligned}
\qquad \ldots(6)
$$

pero, la primera ecuación es redundante ya que:

$$X_{j1} = X_j - (X_{j2} + \ldots + X_{jn}), \text{ para cualquier } j \qquad \ldots(7)$$

Así, el sistema es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
(X_2 - X_{22})P_2 - \ldots\ldots - X_{n2}P_n &= X_{12} \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
-X_{2n}P_2 - \ldots\ldots + (X_n - X_{nn})P_n &= X_{1n}
\end{aligned}
\qquad \ldots(8)
$$
[14]

14/ Utilizando (7) es fácil ver que la primera ecuación de (6) es igual al negativo de la suma de las demás ecuaciones.

La Matriz de Coeficientes:

$$X = \begin{bmatrix} X_2 - X_{22} & -X_{32} & -X_{42} \cdots\cdots & -X_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -X_{2n} & -X_{3n} & -X_{4n} \cdots\cdots & X_n - X_{nn} \end{bmatrix}$$

tiene diagonal dominante, ya que:

$$X_i - X_{ii} = X_{i1} + \sum_{j \neq i} X_{ij} \qquad (j = 2,3,\ldots n)$$

para cualquier i= 2,3,...,n. Además, ya que todos los coeficientes fuera de la diagonal son negativos, se pueden aplicar los teoremas 403 y 404 en Takayama[15], para concluir que X^{-1} existe y es no negativa.

Entonces, si escribimos el sistema (8) en forma matricial tendremos:

$$XP = Z$$

donde, $P^t = (P_2, P_3, \ldots, P_n)$ y $Z^t = (X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{1n})$

y, por lo tanto,

$$P = X^{-1}Z$$

además, ya que $Z > 0$, entonces $P > 0$.

15/ Takayama, A. "Mathematical Economics", The Dryden Press, Hinsdale, 1974. En el apéndice matemático del presente trabajo enunciamos y demostramos dichos teoremas. (Ver la sección E del Apendice)

De manera similar se demuestra el resultado para cualquier otra mercancía elegida como equivalente general.

El modelo presentado, reúne las propiedades deseadas; el vector de precios es único y positivo. El modelo no contiene indefiniciones ni en las variables económicas, ni en sus unidades.

C A P I T U L O III

PRODUCCION CON EXCEDENTE: EL MODELO ORIGINAL

En este capítulo, Sraffa considera una economía que produce más del mínimo necesario para reproducirse y existe un excedente para ser distribuido. En esta situación, según Sraffa, el sistema se vuelve contradictorio en si mismo.

Si se suman todas las ecuaciones consideradas en el caso general del capítulo I, el lado derecho del resultado de las sumas de las ecuaciones (i.e. el producto nacional bruto) contendrá, aparte de la cantidad resultante de la suma de las ecuaciones del lado izquierdo (i.e. los medios de producción y subsistencia), otras cantidades. Sraffa hace cuentas como en el capítulo I[16] y encuentra que ahora hay n ecuaciones independientes con sólo n-1 incógnitas.

Esta dificultad no puede ser superada distribuyendo el excedente antes de que los precios sean determinados, como se hace con el reemplazo de materias primas, subsistencia, etc. Esto es debido a que el excedente debe ser distribuido en proporción a los medios de producción adelantados en cada industria; y tal proporción entre dos agregados de bienes heterogéneos (tasa de ganancia) no puede ser determinada antes de que conozcamos los precios de los bienes. Por otro lado, no podemos diferir la dis -

16/ Lo que implica que hace el precio de una mercancía igual a la unidad, ya que la toma como patrón de valor.

tribución del excedente hasta después de que los precios sean conocidos, pues como se verá, los precios no pueden ser determinados antes de conocer la tasa de beneficios. El resultado es que la distribución del beneficio debe ser determinado a través del mismo mecanismo y al mismo tiempo que los precios de los bienes.

De esta manera, añadimos a la tasa de beneficios (uniforme en todas las industrias) como una incógnita a la que llamaremos r y el sistema se transforma en:

$$\begin{array}{l} (X_{11}P_1 + X_{21}P_2 + \dots\dots + X_{n1}P_n)\ (1 + r) = X_1P_1 \\ (X_{12}P_1 + X_{22}P_2 + \dots\dots + X_{n2}P_n)\ (1 + r) = X_2P_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ (X_{1n}P_1 + X_{2n}P_2 + \dots\dots + X_{nn}P_n)\ (1 + r) = X_nP_n \end{array} \qquad \dots.(9)$$

donde dado que el sistema se asume que esta en estado de auto-reemplazo, se tiene que:

$$X_{11}+X_{12}+\dots+X_{1n} \leq X_1;\ X_{21}+X_{22}+\dots+X_{2n} \leq X_2\ ;\dots\dots$$

$\dots.X_{n1}+X_{n2}+\dots+X_{nn} \leq X_n$; esto es, la cantidad producida de cada bien es al menos igual a la cantidad de ella que es usada en todas las ramas de la producción.

Este sistema contiene un número n de ecuaciones independientes que determinan los n-1 precios[17] y la tasa de beneficios.

17/ Otra vez suponiendo que el precio de una de las mercancías se hace igual a la unidad.

Como un ejemplo, podemos en el caso de dos bienes del capí - tulo I, incrementar la producción de trigo de 400 arrobas a 575 - arrobas, dejando todas las otras cantidades iguales. Esto dá un - excedente social de 175 arrobas de trigo y tendremos como resul - tado lo siguiente:

280 arrobas de trigo + 12 ton. de hierro ⟶ 575 arr. trigo

120 arrobas de trigo + 8 ton. de hierro ⟶ 20 ton. hierro

La tasa de intercambio que permite los adelantos a ser reemplazados y los beneficios a ser distribuídos en ambas industrias- en proporción a sus adelantos es 15 arrobas de trigo por 1 tonelada de hierro; y la tasa correspondiente de ganancias en cada in - dustria es 25%.

Hay un efecto de la existencia de un excedente que debe ser - anotado. Anteriormente todos los bienes eran encontrados tanto entre los productos finales, como entre los medios de producción; - como resultado, cada uno entraba (directa o indirectamente) en la- producción de todos los demás, y cada uno tenía un peso en la de - terminación de los precios. Pero ahora, existen una nueva clase de " productos de lujo " que no son usados (ni como instrumentos de - producción, ni como artículos de subsistencia) en la producción -- de otros artículos.

Estos productos no juegan ningún rol en la determinación del- sistema, son puramente pasivos. Si una innovación redujera a la -- mitad la cantidad de cada uno de los medios de producción que sonrequeridos para producir una unidad de un "bien de lujo" de este tipo, el bien vería disminuído en la mitad su precio, pero no habría más consecuencias; las relaciones de precios de otros productos y la tasa de beneficios se mantendrían sin variación. Pero, si tal cambio ocurriera en la producción de una mercancía que sí entra como medio de producción, todos los precios se afectarían y la tasa de beneficios cambiaría. Todo esto puede ser visto si eliminamos del sistema a la ecuación que representa la producción de un bien de lujo. Dado que, simultáneamente, eliminamos una incógnita (el precio de tal bien) que sólo aparece en tal ecuación, las ecuaciones restantes seguirán formando un sistema determinado que será satisfecho por las soluciones del sistema grande. Por otro lado, si suprimimos una de las otras ecuaciones que no representa la producción de un bien de lujo, el número de incógnitas no disminuiría ya que el bien en cuestión aparece entre los medios de producción en las otras ecuaciones y el sistema se haría indeterminado.

Lo que ha sido dicho del rol pasivo de los bienes de lujo, puede ser extensido a los bienes de lujo que son usados en su propia reproducción, ya sea directa ó indirectamente, o sólo para la producción de otros bienes de lujo.

El criterio es si el bien entra (no importa si directa ó indirectamente) en la producción de todos los bienes. Aquéllos que lo hacen son llamados básicos, aquéllos que no, no básicos.

Se asumía que cualquier sistema contenía, al menos, un producto básico.

A continuación, Sraffa explica porque las razones que satisfacen las condiciones de producción han sido llamadas "valores" o "precios" en lugar de "costos de producción".

Esta última descripción sería adecuada, siempre y cuando se tratara de productos no básicos, ya que, como se deduce de lo que ha sido dicho, su razón de intercambio es solamente un reflejo de lo que debe ser pagado en medios de producción, trabajo y beneficios para producirlos; no hay una dependencia mutua.

Pero, para productos básicos se debe considerar otro aspecto. Su tasa de intercambio depende tanto del uso que de él se hace en la producción de otros bienes básicos, como de qué tanto esos bienes entran en su propia producción.

En otras palabras, el precio de un producto no-básico depende de los precios de sus medios de producción, pero éstos no dependen de aquél. Mientras que en el caso del producto básico, los precios de sus medios de producción dependen de su propio precio (del producto básico) pero también el precio del producto básico depende del precio de sus medios de producción.

Sraffa piensa en este punto que, es necesaria otra descripción de los costos de producción. Según Sraffa, términos como "precio necesario", "precio natural" ó "precio de producción", podrían servir, pero valor y precio han sido utilizados preferentemente por él y sin"ambigüedades" (?).

Sraffa menciona que, términos como "costo de producción" y "capital", han sido evitados en su texto. Esto es porque, según --

A continuación, Sraffa explica porque las razones que satis - facen las condiciones de producción han sido llamadas "valores" o- "precios" en lugar de "costos de producción".

Esta última descripción sería adecuada, siempre y cuando se - tratara de productos no básicos, ya que, como se deduce de lo que- ha sido dicho, su razón de intercambio es solamente un reflejo de- lo que debe ser pagado en medios de producción, trabajo y benefi - cios para producirlos; no hay una dependencia mutua.

Pero, para productos básicos se debe considerar otro aspecto. Su tasa de intercambio depende tanto del uso que de él se hace en- la producción de otros bienes básicos, como de qué tanto esos -- bienes entran en su propia producción.

En otras palabras, el precio de un producto no-básico depende de los precios de sus medios de producción, pero éstos no dependen de aquél. Mientras que en el caso del producto básico, los precios de sus medios de producción dependen de su propio precio (del -- producto básico) pero también el precio del producto básico depen- de del precio de sus medios de producción.

Sraffa piensa en este punto que, es necesaria otra descrip -- ción de los costos de producción. Según Sraffa, términos como -- "precio necesario", "precio natural" ó "precio de producción", po- drían servir, pero valor y precio han sido utilizados preferente - mente por él y sin"ambigüedades" (?).

Sraffa menciona que, términos como "costo de producción" y -- "capital", han sido evitados en su texto. Esto es porque, según --

Sraffa, éstos términos han sido vinculados[18] con la suposición-de que son cantidades que pueden ser medidas independientemente, y antes, de la determinación de los precios de los productos. Dado que Sraffa busca en su libro no caer en tales presuposiciones, parece lógico que evite tales términos.

Por otro lado, hasta este punto se han tomado a los salarios como la suma necesaria para la subsistencia de los trabajadores, y por lo tanto, entran al sistema de la "misma manera que la gasolina para los motores o el alimento para el ganado."[19]

Debemos retomar ahora el otro aspecto de los salarios, dado que pueden incluir una participación en el producto excedente, - además del elemento, siempre presente, de subsistencia. En vista de éste doble carácter del salario, Sraffa piensa que es apropiado (al considerar la división del plusvalor entre capitalistas y-trabajadores) separar las dos partes componentes del salario y — tomar sólo la parte "excedente" como variable; mientras que los - bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores --- continuarían apareciendo entre los medios de producción.

Sin embargo, Sraffa decide que es mejor el ajustarse al concepto tradicional de salario, que considera al mismo como variable[20].

18/ Sobre todo por la Teoría Marginalista.

19/ Sraffa, P.,"Production of Commodities...", p. 9

20/ Sraffa da marcha atrás en considerar sólo a la "parte excedente" del salario como variable, debido a que esta concepción involucra, en su opinión, el relegar los "necesarios" del consumo al -- "limbo" de los productos no-básicos. Esto es debido a que no aparecen más entre los medios de producción en la parte izquierda de las-ecuaciones: de tal manera, que un progreso en los medios de producción de bienes necesarios para la vida no afectarán mas directamen -

Sraffa, a partir de este punto, supone que el salario es pagado "post factum" como una participación del producto anual, abandonando así la idea clásica de un salario "adelantado" del capital. No obstante, Sraffa mantiene la suposición de un ciclo anual de producción con un mercado anual.

La cantidad de trabajo empleada en cada industria debe ser ahora representada explícitamente, tomando el lugar de las cantidades correspondientes de subsistencia. Sraffa supone al trabajo como uniforme en calidad ó equivalentemente asume que cualquier diferencia en calidad fué previamente reducida a diferencias equivalentes en cantidad de tal manera que, cada unidad de trabajo recibe el mismo salario.

Sraffa llama L_1, L_2,....,L_n[21] a las cantidades anuales de trabajo empleadas, respectivamente, en producir X_1, X_2,....,X_n y las define como fracciones del trabajo anual total de la sociedad, que se toma como la unidad, de tal manera que:

$$L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_n = 1$$

Sraffa denota con w a el salario por unidad de trabajo, que, al igual que los precios, será expresado en términos del standard escogido (que será estudiado en los capítulos V y VI -

te la tasa de beneficios y los precios de otros productos. Los productos"necesarios" son, sin embargo, básicos y si no se les permite influenciar a los precios y beneficios de tal manera; entonces lo harán de alguna otra forma (Ver Sraffa, P., op.cit.,p.10).

21/ La notación difiere de la de Sraffa, quien emplea letras para los subíndices.

del presente trabajo).

Partiendo de esta base las ecuaciones toman la forma:

$$
\begin{aligned}
(X_{11}P_1 + X_{21}P_2 + \dots + X_{n1}P_n)\ (1 + r) + L_1 w &= X_1 P_1 \\
(X_{12}P_1 + X_{22}P_2 + \dots + X_{n2}P_n)\ (1 + r) + L_2 w &= X_2 P_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \\
(X_{1n}P_1 + X_{2n}P_2 + \dots + X_{nn}P_n)\ (1 + r) + L_n w &= X_n P_n
\end{aligned}
\qquad \dots \text{(10)}
$$

donde, como en los casos anteriores, se supone que el sistema esta en un estado de auto-reemplazamiento, esto es, que:

$$X_{11}+X_{12}+\dots+ X_{1n} \leq X_1 \ ; \ X_{21}+X_{22}+\dots+ X_{2n} \leq X_2 \ ;\dots; \ X_{n1}+X_{n2}+\dots+ X_{nn} \leq X_n$$

El ingreso nacional de un sistema en un estado de auto-reemplazamiento consiste en el conjunto de bienes que quedan cuando del producto nacional bruto se han removido loas artículos que reemplazan los medios de producción usados en todas las industrias.

El valor de este conjunto de bienes, o "bien compuesto" como se le podría llamar, que forma el ingreso nacional, es hecho igual a la unidad. Por tanto, se torna el standard en términos del cual el salario y los K precios son expresados (tomando el lugar del bien escogido arbitrariamente, en términos del cual, los n-1 precios, además del salario, eran expresados).

Se tiene por tanto, la ecuación adicional:

$$X_1-(X_{11}+X_{12}+\ldots+X_{1n})\ P_1+\ X_2-(X_{21}+X_{22}+\ldots+X_{2n})\ P_2+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\ X_n-(X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nn})\ P_n=1 \qquad \ldots\ (11)$$

Nótese que la cantidad agregada de cualquier bien representado en esta expresión no puede ser negativa debido a la condición de autoreemplazo:

$$X_{11}+X_{12}+\ldots+X_{1n}\leq X_1\ ;\ldots;\ X_{n1}+X_{n2}+\ldots+X_{nn}\leq X_n$$

Tenemos así n+1 ecuaciones y n+2 variables (n precios, el salario w y la tasa de beneficio r).

El resultado de haber añadido el salario como una de las variables, es que el número de éstas ahora excede el número de ecuaciones por uno y el sistema puede moverse con un grado de libertad; y, si una variable se fija, las otras se fijarían también.

C A P I T U L O IV

PRODUCCION CON EXCEDENTE: ANALISIS CRITICO

El análisis del capítulo anterior lo haremos en tres apartados.

En el primer apartado plantearemos, al igual que en el capítulo 2, un modelo matemático mas depurado pero, en este caso, para la producción con excedente.

En el segundo apartado veremos una característica matemática simple que se desprende de la distinción entre mercancías básicas y no básicas.

Finalmente, en el tercer apartado replantearemos otra vez el modelo de Sraffa pero, esta vez, en el caso en el que el salario se supone variable. En este apartado veremos como un descuido (aparentemente sin importancia) en el uso de las unidades por Sraffa, le lleva a cometer a este un error de gran importancia.

4.1. PRODUCCION CON EXCEDENTE. MODELO QUE PROPONEMOS

Sraffa establece en su ejemplo de producción con excedente con n mercancías, que las X_i y X_{ij} son cantidades conocidas y que las incógnitas por determinar (una vez que se supone que, por ejemplo, $P_1 = 1$) son P_2, P_3,...,P_n,r. Según Sraffa estos valores permitirán que los adelantos sean reemplazados y que los beneficios sean distribuidos entre las industrias en proporción de sus adelantos. De nueva cuenta, Sraffa no aclara con respecto a que mercancía están referidos esos valores.[22]

Procediendo de manera similar a como lo hicimos en la sección 2.3., tenemos ahora n sistemas con n incógnitas;

$$
\begin{aligned}
&(X_{11}P_1^{(i)} + \dots + X_{n1}P_n^{(i)})\ (1 + r) = X_1P_1^{(i)} \\
&\quad\vdots \\
&(X_{1n}P_1^{(i)} + \dots + X_{nn}P_n^{(i)})\ (1 + r) = X_1P_1^{(i)}
\end{aligned}
\qquad \dots(12)
$$

$$i=1,\dots,n$$

igualmente, observando que $P_i^{(i)} = 1$, para cualquier i, al buscar los precios con respecto a la mercancia 1, el sistema (12) para i=1 quedaría;

$$
\begin{aligned}
&(X_{11} + X_{21}P_2^{(1)} + \dots + X_{n1}P_n^{(1)})\ (1 + r) = X_1 \\
&(X_{12} + X_{22}P_2^{(1)} + \dots + X_{n2}P_n^{(1)})\ (1 + r) = X_2P_2^{(1)} \\
&\quad\vdots \\
&(X_{1n} + X_{2n}P_2^{(1)} + \dots + X_{nn}P_n^{(1)})\ (1 + r) = X_nP_n^{(1)}
\end{aligned}
\qquad \dots(13)
$$

el cual es no homogéneo. Veamos que este sistema tiene solución única positiva.

22/ Sin embargo la situación es ahora diferente. Al encontrarnos en una economía que si produce excedente, el hablar de un numerario parece mas coherente que en el caso de la economía de trueque. Esto significa que suponer la existencia de dinero en la producción con excedente no resulta tan contradictorio como en el caso de la producción para la subsistencia. Obsérvese, sin embargo, que el sistema con excedente de Sraffa se encuentra en un estado estacionario, i.e., no crece.

4.2. MERCANCIAS BASICAS Y NO-BASICAS.

Como menciona Sraffa, un efecto de la existencia de un excedente es la distinción que se da entre mercancías básicas y no básicas. Los métodos de producción de éstas últimas mercancías (las no-básicas), son tales que no tienen papel alguno en la determinación de los precios de las mercancías y tampoco en la determinación de la tasa de beneficio del sistema.

La distinción entre mercancías básicas y no-básicas depende de ciertas características de los procesos técnicos. Tal distinción tiene una carcaterística matemática simple. Si la matriz de coeficientes del sistema es irreducible[24], todas las mercancías del sistema son mercancías básicas, si se da el caso contrario, algunas mercancías son básicas y otras no-básicas.

Ilustremos esto. Supongamos una matriz A de coeficientes técnicos. Supongamos que A es reducible; mediante adecuados intercambios de filas y columnas podemos llegar a:

$$A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{matrix}$$

24/ Una matriz cuadrada A se denomina reducible, si mediante cambios de filas y columnas es posible llevarla a la forma $A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{matrix}$ donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas. Una matriz es irreducible si no es reducible. En el apéndice matemático, sección B. de este trabajo, también se analizan estas matrices.

donde A_{11} es una submatriz cuadrada irreducible de orden - k (k $n-1$) y A_{22} una submatriz cuadrada de orden $(n-1-k)$- reducible ó irreducible. Las primeras k mercancías base y - las restantes $(n-1-k)$ son no-base.

Si A_{22} es irreducible, supongamos que al menos un elemento de A_{12} es positivo estrictamente. Si A_{22} es reducible, la matriz A se puede llevar a:

$$A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{matrix}$$

donde, A_{11}, A_{22},..., A_{ss} son irreducibles. Supongamos que - A_{12},...., A_{1s} contienen un elemento positivo en sentido estricto.

La razón de este último supuesto es para trabajar con un sistema económico unitario. Si las submatrices a la derecha de A_{11} en la primera fila de A fueran nulas, entonces A representaría varios sistemas separados sin conexión.

Observando A (en cualquiera de sus dos formas) se puede captar el significado de la distinción entre mercancías básicas y no básicas. Dado que las columnas de la matriz de coeficientes técnicos representan a los procesos productivos, las mercancías básicas son mercancías necesarias, directa o indirectamente para la obtención de las demás mercancías (b'sicas y no básicas). Por el contra rio, las mercancías no básicas no son necesarias para la producción de las mercancías básicas (aunque si pueden ser necesarias para la producción de ellas mismas).

Según la definición de Sraffa en la figura (1) las mercancías 1 y 2 son básicas, mientras que en la figura (2) no lo son; en este segundo caso la mercancía 3 es la única mercancía básica; si 2 no utilizara a 3 como input, en la figura (2) entonces no existiría ninguna mercancía básica.[25]

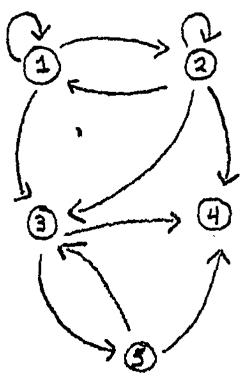

Figura (1)

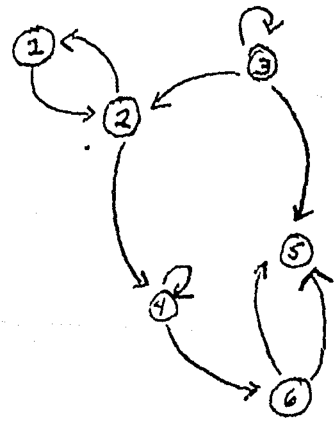

Figura (2)

25/ Por $x \longrightarrow y$, se denota que la mercancía x entra en la producción de la mercancía y.

En función de la definición de mercancía básica, si solo hay una (la i-ésima por ejemplo), ello implica que $X_{ii}/X_i > 0$ y, si hay varias (por ejemplo, k), que la matriz de coeficientes técnicos relativa al conjunto de dichas mercancías básicas es irreducible, de modo que la matriz A puede presentarse como:

$$A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{matrix}$$

en donde A_{11} es la matriz irreducible $(k \times k)$, que corresponde a las mercancías básicas; A_{12} es una matriz $(k \times (n-k))$ y A_{22} es una matriz $(n-k) \times (n-k)$; las mercancías $k + 1$, $k + 2, \ldots, n$ son las mercancías no básicas.

En estas condiciones el sistema(15) se puede descomponer en:

$$P_1^t \quad P_2^t = (1 + r) \; P_1^t \quad P_2^t \quad \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{matrix}$$

es decir:

$$P_1^t = (1 + r) \; P_1^t \, A_{11}$$

$$P_2^t = (1 + r)(P_1^t \, A_{12} + P_2^t \, A_{22})$$

de modo que si el sistema es capaz de producir un excedente de, cuando menos, una mercancía básica el valor propio máximo de A_{11} es inferior a la unidad y resulta $r > 0$ y $P_1 > 0$; los precios de las mercancías básicas contribuyen a determinar los correspondientes a las no-básicas, p_2, pero estos no influyen sobre las primeras.

4.3. MODELO QUE PROPONEMOS (CUANDO EL SALARIO SE TOMA COMO VARIABLE)

Como Sraffa destaca, hasta este punto "se han considerado a los salarios como consistentes en los bienes necesarios para la subsistencia de los trabajadores, de modo que entraban en el sistema de la misma manera que la gasolina para los motores o el alimento para el ganado"[26], pero cuando aparece un excedente los salarios "pueden incluir una participación en la producción excedente".[27] Sraffa opta por considerar todo el salario como variable, a pesar de que ello implica "relegar los bienes necesarios de consumo al limbo de los productos no básicos"[28]

Esto implicaría la necesidad de operar con la matriz de coeficientes técnicos A, así como hacer explícita la tasa de salario w, y las cantidades de trabajo empleadas en cada industria.

En este caso Sraffa propone tomar el valor del ingreso nacional (esto es, el valor del conjunto de bienes que quedan después de que del producto nacional bruto se han descontado los bienes que reemplazan a los medios de producción empleados en todas las industrias) o "bien compuesto", como igual a la uni-

26/ Sraffa, P., "Production of Commodities...," p.9
27/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p.9
28/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 10

C A P I T U L O V

LA MERCANCIA PATRON. EL MODELO ORIGINAL

En esta capítulo Sraffa considera que la necesidad de expresar el precio de una mercancía en términos de otra que se escoge arbitrariamente como standard (ó patrón), complica el estudio de los movimientos en los precios que acompañan un cambio en la distribución[31]. Según Sraffa, es imposible decir con respecto a los precios, si una fluctuación en ellos es debida a peculiaridades de la mercancía que esta siendo medida ó debido a las características de la mercancía patrón usada como medida.

Las peculiaridades relevantes -que Sraffa analiza en el capítulo III de su libro- consisten, a decir de Sraffa, en la desigualdad de proporciones del trabajo con respecto a los medios de producción en los distintos"niveles" en los cuales una mercancía y el agregado de sus bienes de producción pueden ser analizados, dado que tal desigualdad hace necesario que la mercancía cambie en valor relativamente a sus medios de producción a medida que el salario fluctúa[32].

31/ Sraffa considera en el capítulo III de su libro, "Proporciones del trabajo a los medios de producción", que el movimiento de los precios relativos debido a un cambio en el salario, yace en la desigualdad de proporciones en que el trabajo y los medios de producción son empleados en las diversas industrias. Dada la desigualdad de proporciones en las industrias, los precios en general variarán, según Sraffa, debido a un cambio en w (y r).

32/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 12-17

Por lo tanto, Sraffa considera que sería conveniente tener "alguna medida standard invariable del valor, que no estaría sujeta a ninguna de las fluctuaciones a las cuales las otras mercancías están expuestas".[33]

Supongamos que hay una industria que emplea trabajo y medios de producción en una proporción "crítica", de tal manera que, digamos con una caída de los salarios, los efectos de esa reducción del salario harán que se iguale el pago de los beneficios a la tasa general de beneficios. Entonces se dice que la proporción de trabajo con respecto a los medios de producción esta "balanceada". Supongamos también que los medios de producción (agregados) fueron producidos por trabajo y medios de producción en la proporción "crítica" y, sucesivamente, a través de todos los "niveles" de producción, relacionando a medios de producción, medios de producción para medios de producción ,etc.

En tal industria, la razón del valor del producto con respecto al valor de los medios de producción no será afectada por cambios en la distribución.

Según Ricardo, " tal mercancía es imposible de ser poseída ".[34] Sin embargo, una mezcla de mercancías, o una "mercancía compuesta" haría el mismo trabajo. Pero, como Sraffa propone una "mercancía-compuesta perfecta de este tipo, en la cual los requisitos son cumplidos al pie de la letra, consiste de los mismos bienes (combinados en las mismas proporciones) que el agregado de sus propios medios de producción; en otras palabras, tal que tanto el producto como los medios de producción son cantidades de la misma mercancía

33/ Ricardo, David.,"On the Principles of Political Economy and Taxation", Sraffa edn. Cambridge Univ.Press,1951, p.43. Esta cita es un claro ejemplo de como Sraffa retoma un problema que ya había sido planteado por la economía clásica.

compuesta".[35]

Pero la pregunta es: ¿puede ser construída una mercancía - tal?. El problema tiene que ver con industrias más que con mer - cancías. Supongamos que segregamos,del sistema económico, frac - ciones de la industrias básicas individuales, tal que juntas — forman un sistema miniatura completo, con la propiedad de que va rias mercancías son representadas entre los medios de producción agregados de éste sistema, en las mismas proporciones como lo son entre su producto.

Sraffa propone, como ejemplo, partir de un sistema que in - cluye sólo industrias básicas y que producen, respectivamente, - hierro, carbón y trigo de la siguiente manera: .

90 t.hierro+	120 t.carbón+	60 arr.trigo+	$3/16$ trabajo	$\longrightarrow$	180 t.hierro
50 t.hierro+	125 t.carbón+	150 arr.trigo+	$5/16$ trabajo	$\longrightarrow$	450 t.carbón
40 t.hierro+	40 t.carbón+	200 arr.trigo+	$8/16$ trabajo	$\longrightarrow$	480 arr.trigo
180	285	410	1		TOTALES

donde, dado que el hierro es producido en una cantidad justa - para el reemplazo (180 toneladas), el ingreso nacional incluye- sólo carbón y trigo y consiste de 165 toneladas del primero, y- de 70 arrobas del segundo.

Para obtener un sistema en las proporciones requeridas de- bemos tomar, con el total de la industria de hierro, $3/5$ de la - industria de carbón y $3/4$ de la industria de trigo. El sistema - resultante sería:

34/ Ibid.
35/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p.19

90 t.hierro+	120 t.carbón+	60 arr.trigo+	3/16 trabajo	⟶	180 t.hierro
30 t.hierro+	75 t.carbón+	90 arr.trigo+	3/16 trabajo	⟶	270 t.carbón
30 t.hierro+	30 t.carbón+	150 arr.trigo+	6/16 trabajo	⟶	360 arr.trigo
150	225	300	12/16		TOTALES

Las proporciones en las cuales las tres mercancías son producidas en el nuevo sistema (180:270:360) son iguales a aquéllas en las cuales entran en el agregado de los medios de producción, (150:225:300). La mercancía compuesta buscada, estará por tanto formada en las siguientes proporciones:

1 ton.hierro : 1½ ton.carbón : 2 arr.trigo

Así, Sraffa llama a una mercancía de éste tipo, la mercancía compuesta patrón, ó, simplemente, la mercancía patrón; y al conjunto de ecuaciones (ó de industrias), tomadas en las proporciones que producen la mercancía patrón, el sistema patrón.

Sraffa considera que en cualquier sistema económico existe, inmerso, un sistema patrón miniatura que puede ser extraído eliminando las partes no deseadas. Esto, según Sraffa, es aplicable tanto a un sistema que no está en un estado de auto-reemplazamiento, como a uno que sí lo esta.

Sraffa considera conveniente tomar como unidad de la mercancía patrón la cantidad de ella que formaría el producto neto de un sistema patrón que emplea la totalidad del trabajo anual del sistema original; (en el caso del ejemplo recién expuesto, para que tal unidad forme el producto neto, cada industria debe ser- incrementada en 1/3, el trabajo agregado empleado, por lo tanto, incrementado de 12/16 a 16/16; como resultado, la unidad consistiría de 40 t. de hierro, 60 t. de carbón y 80 arr. de trigo). Tal unidad será llamada el producto neto patrón o el ingreso nacional patrón.

Sraffa considera que el hecho de que en el sistema patrón las mercancías sean producidas en las mismas proporciones en las que entran en el agregado de los medios de producción, implica que la tasa por la cual la cantidad producida excede la cantidad usada en la producción, es la misma para cada una de ellas. En el ejemplo recién enunciado, la tasa para cada mercancía es de 20%, hecho que puede observarse si las cifras son reordenadas de tal manera que la cantidad agregada de cada mercancía que entra a los medios de producción es colocada contra la cantidad de ella que es producida:

$$(90 + 30 + 30)\ (1 + {}^{20}/_{100}) = 180 \text{ t. hierro}$$
$$(120 + 75 + 30)\ (1 + {}^{20}/_{100}) = 270 \text{ t. carbón}$$
$$(60 + 90 + 150)\ (1 + {}^{20}/_{100}) = 360 \text{ arr. trigo}$$

Sraffa continúa, observando que la tasa que se aplica a las mercancías individuales es también la tasa por la cual el producto total del sistema patrón excede al agregado de sus medios de producción, ó la razón del producto neto a los medios de producción del sistema. A esta razón se le llamará: la razón patrón.

Sraffa establece que la posibilidad de hablar de la razón - entre dos colecciones de mercancías heterogéneas sin necesidad -- de reducirlas a una medida común de precio, surge de la circunstancia de que ambas colecciones están en las mismas proporciones; - del hecho de que en realidad son cantidades del mismo bien compuesto. De este modo, el resultado no será afectado al multiplicar las mercancías individuales componentes por sus precios. La - razón de los valores de los dos agregados será siempre igual a la razón de las cantidades de sus distintos componentes. Tampoco -- (una vez que las mercancías han sido multiplicadas por sus precios) la razón será perturbada si tales precios individuales cambiaran de diversas maneras.

Por lo tanto, de acuerdo con Sraffa, en el sistema patrón -- la razón del producto neto con respecto a los medios de producción permanecerá igual, cualesquiera que fueran las variaciones - ocurridas en la división del producto neto entre salarios y beneficios y, cualesquiera que fueran los consecuentes cambios de -- precios.[36]

Sraffa considera que lo que ha dicho de la razón entre producto neto con respecto a los medios de producción en el sistema-patrón, también se aplica de igual manera si reemplazamos el producto neto por cualquier fracción de él; la razón de tal fracción con respecto a los medios de producción permanecerá invariable al haber una variación de los precios.

36/ Con estas aseveraciones es posible ver como Sraffa maneja el excedente económico como producto neto (muy al estilo de - la fisiocracia).

Sraffa ejemplifica esto. Supongamos que el producto neto patrón está dividido en salarios y beneficios, teniendo cuidado de que la participación de cada uno de ellos consista siempre (al igual que el total) de mercancías patrón: la tasa resultante de beneficios estará en la misma proporción con respecto a la razón patrón del sistema, como la participación de los beneficios lo está con respecto al total del producto neto. En el ejemplo, donde la razón patrón era 20%, si $3/4$ del ingreso nacional patrón se destinaran a salarios y $1/4$ a los beneficios, la tasa de beneficios sería 5%; si la mitad se destinara a cada uno de ellos, sería del 10%; y si la totalidad se destinara a beneficios, la tasa de beneficios alcanzaría su máximo nivel de 20% y coincidiría con la razón patrón.

La tasa de beneficios en el sistema patrón aparece, según Sraffa, como una razón entre cantidades de mercancías sin importar sus precios.

Sraffa generaliza esto diciendo que, en lo que se refiere al sistema patrón, podemos decir que, si R es la razón patrón ó la máxima tasa de beneficios y w la proporción del producto neto que se destina a los salarios, la tasa de beneficios será:

$$r = R\ (1 - w)$$

Por lo tanto, a medida que el salario se reduce gradualmente desde 1 hasta cero, la tasa de beneficios se incrementa en proporción directa a la deducción total hecha del salario. La relación puede ser representada, gráficamente, como lo hace Sraffa, por una línea recta como se muestra en la figura (3).

37/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 22

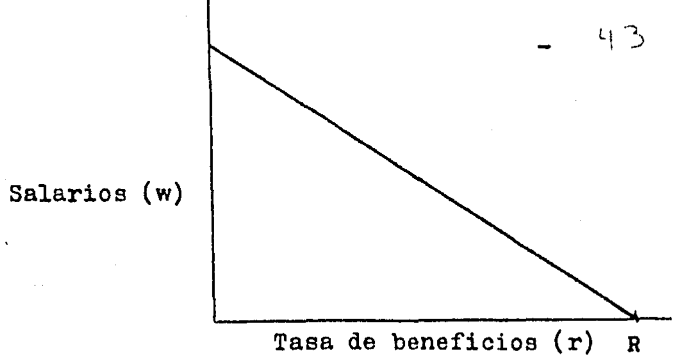

Figura (3). Relación entre salarios (como una proporción del producto neto patrón) y la tasa de beneficios.

Según Sraffa, tal relación es de interés sólo si puede ser mostrado que, su aplicación, no está limitada al sistema patrón imaginario, sino que es capaz de ser extendido al sistema real en observación. Esto, para Sraffa, se transforma en sí, el el papel decisivo que la mercancía patrón juega en esta conexión yace en que es el elemento material del ingreso nacional y de los medios de producción (que es algo peculiar al sistema patrón), o en que provee el medio por el cual los salarios son estimados.

Esto último es una función que la mercancía patrón puede llenar en cualquier caso, ya sea que el sistema esté en las proporciones patrón ó no.

Sraffa considera que las apariencias están en contra de la segunda alternativa. Para él, en el sistema patrón la circunstancia de que el salario es pagado en mercancía patrón parece enfocar su significación especial del hecho de que el residuo que resta sobre los beneficios será en si mismo una cantidad de la mercancía patrón y, por lo tanto, similar en composición a los medios de producción: el resultado es que la tasa de beneficios, que es-la razón de estas dos cantidades homogéneas, puede ser vista como en proporción directa a cualquier reducción hecha en el salario. Por lo tanto, no existiría razón para esperar que en el sistema real, cuando el equivalente de la misma cantidad de la mercancía patrón ha sido pagada por los salarios, el valor de lo que es dejado para los beneficios debiera estar en la misma razón con respecto al valor de los medios de producción como las correspondientes cantidades lo están en el sistema patrón.

Pero, según Sraffa, el sistema real consiste de las mismas ecuaciones básicas que el sistema patrón, sólo que en diferentes proporciones; de tal manera que, una vez que el salario está dado, la tasa de beneficios está determinada por ambos sistemas, sin importar las proporciones de las ecuaciones en cada uno de ellos. Sraffa considera entonces que, proporciones particulares, tal como las proporciones patrón, pueden dar transparencia a un sistema y hacer visible lo que antes parecía escondido, pero no pueden alterar sus propiedades matemáticas.

La relación lineal entre salario y la tasa de beneficios se dará, para Sraffa, en todos los casos, siempre que el salario se exprese en términos del producto patrón. La misma tasa de beneficios que en el sistema patrón es obtenida como una razón entre cantidades de mercancías, será en el sistema real una razón de valores agregados.

Retomando el ejemplo que plantea Sraffa, si en el sistema real (donde R=20%) el salario es fijado en términos del producto neto patrón, a $w = 3/4$, le corresponderá $r = 5\%$. Pero mientras que la participación de los salarios será igual en valor a $3/4$ del ingreso nacional patrón, no se sigue que la participación de los beneficios será equivalente al restante $1/4$ del ingreso patrón. La participación de losbeneficios consistirá de lo que quede del ingreso nacional real después de deducir de éste el equivalente a $3/4$ del ingreso nacional patrón por salarios; y los precios deben de ser tales, que hagan que el valor de lo que va a los beneficios sea igual al 5% del valor de los medios de producción reales de la sociedad.

Sraffa analiza, a continuación, la situación en términos generales. Afirma que el problema de construir una mercancía patrón equivale a encontrar un conjunto de n multiplicadores, que pueden ser llamados $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que sean aplicados respectivamente a las ecuaciones de producción de las mercancías 1, 2,...,n.

Los multiplicadores deben ser tales que las cantidades resultantes de las diversas mercancías guardarán las mismas proporciones unas a las otras en los lados derechos de las ecuaciones (como productos) y en el agregado de los lados izquierdos (como medios de producción).

Esto, según Sraffa, implica que el porcentaje por el cual el producto de una mercancía excede la cantidad de ella que entra en el agregado de los medios de producción es igual para todos los bienes. Este porcentaje, como ya hemos visto, ha sido llamado por Sraffa, la razón patrón, y lo ha denotado con la letra R.

Tal condición es expresada por un sistema de ecuaciones que contiene las mismas constantes (que representan cantidades de mercancías) que las ecuaciones de producción, pero ordenadas de manera distinta (las filas de un sistema corresponden a las columnas del otro). Este sistema de ecuaciones, el cual se denomina q-sistema, es como sigue:

$$
\begin{array}{l}
(X_{11}q_1+X_{12}q_2+\ldots+X_{1n}q_n)\ (1+R) = X_1q_1 \\
(X_{21}q_1+X_{22}q_2+\ldots+X_{2n}q_n)\ (1+R) = X_2q_2 \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
(X_{n1}q_1+X_{n2}q_2+\ldots+X_{nn}q_n)\ (1+R) = X_nq_n
\end{array}
$$

Para completar el sistema, Sraffa considera que es necesario definir la unidad en la cual los multiplicadores serán expresados; y dado que se pretende que la cantidad de trabajo empleada en el sistema patrón sea la misma que en el sistema real, la unidad se definiría por una ecuación adicional que expresa tal condición:

$$L_1q_1+ L_2q_2 +\ldots\ldots+ L_nq_n = 1$$

Tenemos así, $n + 1$ ecuaciones que determinan los n multiplicadores y R.

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene un conjunto de números para los multiplicadores (denotemos a éstos números por $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$). Aplicamos éstos a las ecuaciones del sistema de producción[38] y lo transformamos en un sistema patrón de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
q'_1[(X_{11}P_1+X_{21}P_2+\ldots+X_{n1}P_n)(1+r)+L_1w] &= q'_1X_1P_1 \\
q'_2[(X_{12}P_1+X_{22}P_2+\ldots+X_{n2}P_n)(1+r)+L_2w] &= q'_2X_2P_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
q'_n[(X_{1n}P_1+X_{2n}P_2+\ldots+X_{nn}P_n)(1+r)+L_nw] &= q'_nX_nP_n.
\end{aligned}
$$

De esto se feriva el ingreso nacional patrón que se adoptará como la unidad de salarios y precios en el sistema original de producción.

La ecuación unitaria[39] es, por tanto, reemplazada por la siguiente ecuación donde las q' son conocidas, mientras que las P son variables:

$$
\begin{aligned}
&[q'_1X_1 - (q'_1X_{11} + q'_2X_{12} +\ldots+ q'_nX_{1n})]\,P_1 \\
+\;&[q'_2X_2 - (q'_1X_{21} + q'_2X_{22} +\ldots+ q'_nX_{n2})]\,P_n \\
\ldots+\;&[q'_nX_n - (q'_1X_{n1} + q'_2X_{n2} +\ldots+ q'_nX_{nn})]\,P_n = 1
\end{aligned}
$$

38/ Sistema (10), página 25 del presente trabajo.
39/ Ecuación (11), página 26 del presente trabajo.

Esta mercancía compuesta es el patrón de salarios y precios que habíamos estado buscando[40].

Según Sraffa, es evidentemente imposible que los productos no básicos que están completamente excluídos del papel de los medios de producción satisfagan estas condiciones y que encuentren un lugar en el sistema patrón. El multiplicador adecuado para sus ecuaciones sólo puede, por lo tanto, ser cero.

Lo mismo sucede con otros productos no-básicos que no entran en los medios de producción de las mercancías en general, pero que son usados en la producción de uno ó más productos no básicos, entre los cuales pueden estar ellos mismos[41]. Si una mercancía de este tipo entra sólo en la producción de un producto no-básico, se tendría, por lo tanto, que su multiplicador sería igual a cero. Pero si también entra en su propia producción, la razón de su cantidad como producto con respecto a su cantidad como medios de producción estaría exclusivamente determinada por su propia ecuación de producción y no estaría en general, relacionada con R y, consecuentemente, sería incompatible con el sistema patrón.

40/ Ver páginas - del presente trabajo.

41/ Sraffa pone como ejemplos, a ciertas materias primas utilizadas en la producción de bienes de lujo; también animales, ó plantas de lujo.

El multiplicador apropiado en este caso, sería también -- igual a cero.

Por lo tanto, la discusión puede ser simplificada, asumiendo que todas las ecuaciones no-básicas son eliminadas, de tal - manera que, sólo las industrias básicas son consideradas.

Sraffa hace notar, por último, que la ausencia de industrias no-básicas del sistema patrón no hace que éste deje de ser equivalente en sus efectos al sistema original, ya que la presencia- de éstas industrias no afecta a la determinación de precios y -- de la tasa de beneficios.

C A P I T U L O VI

LA MERCANCIA PATRON: ANALISIS CRITICO

Observemos en primera instancia que, la necesidad de una mercancía patrón surge a partir de la problemática planteada por Sraffa en el capítulo III de su libro. Sraffa establece que, al expresar el precio de una mercancía en términos de otra que es elegida arbitrariamente, el análisis de las fluctuaciones de los precios a partir de cambios en la distribución (esto es, cambios en w y cambios en r) se complica[42]. Por lo tanto, se hace necesaria la existencia de una mercancía patrón para que en el estudio de los precios se tenga una medida standard, que no estaría sujeta a ninguna de las variaciones a las cuales las otras mercancías están sujetas[43].

Dado que existe una cantidad fija de trabajo: $L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_n = 1$, una reducción en w corresponde a una caída en la tasa de salarios. Las industrias que usan una cantidad relativamente pequeña de trabajo estarán en peor situación que

42/ Ver capítulo V, pág. del presente trabajo.

43/ Como hemos visto, estas variaciones son cambios en valor de la mercancía en relación a los medios de producción utilizados para producirla, a medida que el salario fluctúa. Estos cambios en el valor de la mercancía son debidos a la desigualdad de las proporciones del trabajo con respecto a los medios de producción en los distintos " niveles " en los cuales, tal mercancía y el agregado de los bienes de producción pueden ser analizados. Ver Sraffa, P.,"Production of Commodities...", Capítulo III: "Proportions of Labour to Means of Production".

aquéllas que utilizan una gran cantidad, aunque surgen complicaciones dado que los medios de producción utilizados por una industria con una intensidad baja del uso del trabajo pueden tener en sí mismas, una alta intensidad del trabajo. En cualquier caso, los precios relativos casi seguramente tendrán que cambiar si el sistema ha de mantenerse sin perturbación, con una tasa uniforme de beneficio.

Supongamos, sin embargo, que hubiera una industria que empleara trabajo y otros medios de producción en tal proporción que con un cambio en w, el balance entre salarios y beneficios fuera manetnido en el nivel original. Esto implicaría que tal relación se mantendría para cada una de las industrias que aportan los medios de producción para la primera industria; y así sucesivamente para todo el conjunto de industrias que directa ó indirectamente aportan medios de producción a la primera industria.

Obviamente la existencia de tal industria sería muy rara de que aconteciera, pero puede ser construída como una " mercancía compuesta " de otras.

Observemos que el precio del producto de tal industria nunca subiría con cambio en w, ya que nunca habría ningún cambio en la proporción salario-beneficio (por las razones que ya se ha visto, explica Sraffa en el capítulo III de su libro). Por lo tanto, podría servir como una mercancía patrón, en términos de la cual, todos los demás precios podrían ser medidos.

Sraffa, como hemos visto, aborda el problema de si tal mercancía podría ser construída siempre. Veremos, a continuación, una ruta más sencilla que la que propone Sraffa, para la construcción de tal mercancía.

Es evidente que estamos interesados en un sistema que consista de mercancías básicas solamente. Esto implica que la matriz asociada de coeficientes técnicos es indescomponible (y no negativa). Sin pérdida de generalidad, sea A tal matriz, con ℓ el vector de coeficientes de insumo del trabajo.

Consideremos:

$$x = Ax + \ell \qquad .....(18)$$

donde; $Y = Ax$, es el vector de medios de producción y x es el vector de productos. " El hecho de que, en el sistema patrón las diversas mercancías son producidas en las mismas proporciones en las que entran en el agregado de los medios de producción implica que la tasa por la cual la cantidad producida excede la cantidad usada en la producción , es la misma para cada una de ellas"[44].

44/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 20

Por lo tanto, $\int = \alpha Y$, $\alpha > 0$, dada la relación entre la-mercancía patrón y sus medios de producción. Por lo tanto, -- la ecucaión (18) nos queda de la siguiente manera;

$$x = (1 + \alpha) Ax$$

ó

$$Ax = \frac{1}{1+\alpha} x \qquad ....(19)$$

Como A es indescomponible, existe, $\lambda^{*}(A) > 0$, $x^{*} > 0$ que satisfacen la ecuación (19), por el teorema de Perron-Frobenius ya citado en el capítulo IV de este trabajo, tenemos así:

$$\alpha = (1 - \lambda^{*}(A)) / \lambda^{*}(A) = R \ (=r \ max) \qquad ....(20)$$

El sistema patrón consiste del conjunto de ecuaciones que se refieren a todos los bienes básicos.

Las componentes del vector x^{*} indican las proporciones-de las distintas mercancías básicas en la mercancía patrón. El "tamaño" del sistema patrón es obtenido resolviendo:

$$l' x = 1 \qquad ....(21)$$

Como ilustración, resolvamos el ejemplo de Sraffa del a - partado 25, del capítulo IV de su libro.[45]

Es evidente que:

45/ Sraffa, P., "Production of Commodities...", p. 19 y 20. También ver paginas, a la del presente trabajo.

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/9 & 1/12 \\ 2/3 & 5/18 & 1/12 \\ 1/3 & 1/3 & 5/12 \end{bmatrix}$$

Las raíces de esta matriz son $1/6,\ 7/36,\ 5/6$; $\lambda^*(A) = 5/6$; por lo tanto, de la ecuación (20) tenemos: $\alpha = \frac{1}{6} / \frac{5}{6} = \frac{1}{5} = R$, que confirma el resultado de Sraffa en el aparatado 27 del capítulo IV de su texto[46].

Para encontrar las proporciones de la mercancía patrón, resolvemos la ecuación $Ax = \lambda^*(A)x$. Después de los cálculos obtenemos $x = (1, 3/2, 2)$. x^* es aquél vector x que satisface la ecuación (21).

Ahora, $\ell' = (3/16 \cdot 1/180,\ 5/16 \cdot 1/450,\ 8/16 \cdot 1/180)$

Usando $\ell' x = 1$, tendremos $\beta = 240$

Por lo tanto, $x^* = (240, 360, 480)$, como en el apartado 26 del capítulo IV[47].

R (la máxima tasa de beneficios) es la razón patrón, la proporción por la cual el producto bruto del sistema patrón excede a sus medios agregados de producción. Por lo tanto :

$$\mathcal{f} = R\,Y \qquad \ldots.(22)$$

46/ Op.cit., p. 20
47/ Op.cit., p. 20

sin importar la distribución entre salarios y beneficios.

Ahora supongamos que la fracción, w del producto neto patrón se destina a salarios ($0 < w^* < 1$); la fracción ($1-w^*$) se destina a beneficios. Entonces la tasa de beneficios, r, esta dada por:

$$r = \frac{P'(1 - w^*)RY}{P'Y} = (1 - w^*)R \cdot \frac{P'Y}{P'Y} = (1 - w^*)R$$

$$r = (1-w^*)R \qquad \ldots(23)$$

Esta relación se obtiene en el sistema patrón, asumiendo que el salario es medido en términos de la mercancía patrón. La ecuación (23) es de hecho, una relación física (esto es,- puede ser deducida sin ninguna referencia a precios).

Sea q el vector de mercancías compuesto de los beneficios. Evidentemente, $q = (1-w^*)\gamma$, donde γ es el producto - neto patrón. Usando la ecuación (22), tenemos:

$$q = (1 - w^*) RY \qquad \ldots(24)$$

Ya que q y Y son vectores positivos, tenemos :

$$r\,1 : 1 = (1-w^*)\,RY : Y$$

de donde la ecuación (23) se sigue directamente.

"La tasa de beneficios en el sistema patrón aparece portanto como una razón entre cantidades de mercancías, sin referencia a sus precios"[48].

48/ Op.cit., p. 22

" Tal relación es de interés sólo si puede ser mostrado - que su aplicación no está limitada al sistema patrón imaginario, sino que es capaz de ser extendida al sistema real en observación"[49].

Extendamos ahora (23) al sistema real, el cual es distinto del sistema patrón, bajo el supuesto de que el salario esta medido en términos de la mercancía patrón. Con el producto neto patrón como numerario, tenemos:

$$P'(\ I-A\ )\ x^{*} = 1 \qquad \ldots.(25)$$

Usando $P' = (1+r)\ P'A + w^{*}\ell'$, tenemos:

$$P' = (1+r)\ P'A + w^{*}\ell' \qquad \ldots.(26)$$

Tenemos también de las ecuaciones (19) y (20) que:

$$Ax^{*} = (1\ /\ (1+R)\ )\ x^{*} \qquad \ldots.(27)$$

$$\ell' x = \ell' x = 1 \qquad \ldots.(28)$$

Post-multiplicando la ecuación (26) por x^{*} , tenemos:

$$P'x^{*} = (1+r)\ P'Ax^{*} + w^{*}\ell' x^{*}$$

ó

$$P'Ax^{*} + 1 = P'Ax^{*} + rP'Ax^{*} + w^{*}$$

49/ Op.cit., p. 22

usando las ecuaciones (25) y (28), ó :

$$rP'Ax^{*} = 1 - w^{*} \qquad \ldots.(29)$$

Pre-multiplicando (27) por P', tenemos:

$$P'Ax^{*} = (1 / (1+R)) P'x^{*}$$

ó

$$(1 + R)P'Ax^{*} = 1 + P'Ax^{*}$$ usando la ecuación número (25), o bien:

$$1 = R P'A x^{*} \qquad \ldots.(30)$$

De las ecuaciones (29) y (30), tenemos:

$$\frac{1 - w^{*}}{r} = \frac{1}{R}$$

ó

$r = (1-w^{*}) R$, (esto es la ecuación (23)).

Finalmente. establezcamos la unicidad del sistema patrón y de la mercancía patrón.

Dada la indescomponibilidad de A, se sigue del Teorema no. 28 en Woods[50] que, x^{*} es el único vector característico semi-positivo de A . La unicidad se sigue trivialmente.

50/ Woods, J.E. "Mathematical Economics", Longman Group Limited, 1978, London. Consultar también el apéndice matemático del presente trabajo.

Por lo tanto, hemos llegado a que, dado un sistema de industrias que producen un sólo producto, podemos extraer a aquéllas industrias que producen mercancías básicas. En este sistema básico ó patrón, una mercancía patrón existe; con el producto neto patrón como numerario, existe una relación simple entre la tasa de beneficios y la tasa de salarios, que es independiente de los precios. Esta relación se da en el sistema original (del cual el sistema patrón fué construído), si el producto neto patrón se mantiene como numerario. Esto es consistente con la visión clásica de que la determinación de la distribución es lógicamente anterior e independiente de los precios.

Los resultados que se han derivado no dependen de los supuestos con respecto a los coeficientes técnicos constantes. Si éstos varían entre períodos de tiempo, debido a cambios técnicos cada vez mayores, existirá en cada período de tiempo un sistema patrón (único) y una mercancía patrón, en base a la cual podemos derivar la relación entre la tasa de salario y la tasa de beneficios.

A P E N D I C E

M A T E M A T I C O

§ A.1 Antecedentes

En este apéndice vamos a demostrar los resultados matemáticos que hemos utilizado en esta Tesis; para ello, consideramos que se tiene algún conocimiento básico de Algebra Lineal, en especial de los temas de vectores, matrices y transformaciones lineales, en caso de no ser así, es suficiente con revisar los capítulos I-II-III VII-VIII del libro "Curso de Algebra Superior" de A. G. Kurosch señalado en la bibliografía o cualquier libro de Algebra Lineal.

Una vez señalado lo anterior, vamos a establecer las definiciones y algunas propiedades de los vectores y los valores propios.

(A.1.D1) Los <u>vectores propios</u> de la matriz A son aquellos que al ser transformados por medio de A se conservan colineales a sí mismos, es decir,

(por la derecha) $\quad Ax = \lambda x \quad$ (A.1.1)

(por la izquierda) $\quad xA = \lambda x$

A la λ de la ecuación (A.1.1) se le llama <u>valor propio</u> de A. (A.1.D2)

Notemos que $x = \bar{0}$ es un vector propio trivial y $\lambda = 0$ <u>no</u> es un valor propio trivial.

De la ecuación (A.1.1) obtenemos

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = 0$$

para que este sistema tenga solución no trivial es necesario que su determinante sea cero.

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \text{(A.1.2)}$$

Este determinante cuyo resultado es

un polinomio es llamado el polinomio característico. Este polinomio tiene n raíces reales o complejas, distintas o múltiples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, cada uno de estos valores propios dará lugar a un vector propio asociado $x^1, x^2, \ldots, x^n$ tal que

$$A x^i = \lambda_i x^i$$

Si X es un vector propio de A, kx también lo será ya que si

$$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad k(Ax) = k\lambda x \quad \Rightarrow \quad A(kx) = \lambda(kx)$$

$\therefore$ lo que nos determinan los vectores propios son direcciones propias.

Los vectores propios de A asociados a un valor propio forman un subespacio:

— Si λ es valor propio de A, entonces λ^n es valor propio de A^n

Si $$Ax = \lambda x$$

$$AAx = A\lambda x = \lambda(Ax) = \lambda^2 x$$

$$\vdots$$

$$A^n x = \lambda^n x$$

— Si λ es valor propio de A, entonces $(1-\lambda)$ es valor propio de $(I-A)$.

Si $$Ax = \lambda x$$

$$x - Ax = x - \lambda x$$

$$(I-A)x = (1-\lambda)x$$

— Si λ es valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.

Si $Ax = \lambda x$ y existe A^{-1} entonces sabemos que $\lambda \neq 0$, de aquí,

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$$

$$x = \lambda A^{-1}x$$

$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

De los dos últimos resultados podemos concluir que si λ es valor propio de A y si existe $(I-A)^{-1}$, entonces $1-\lambda \neq 0$ y $\frac{1}{1-\lambda}$ es valor propio de $(I-A)^{-1}$!

§ A.2. Matrices conectadas y Matrices no-conectadas.

Utilizaremos la siguiente notación para vectores

$X > 0$ si $X_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$X \geqq 0$ si $X_i \geqq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$X \geq 0$ si $X_i \geqq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$
y además existe k tal que $X_k > 0$.

y para matrices

$A > 0$ si $a_{ij} > 0$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$A \geqq 0$ si $a_{ij} \geqq 0$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$A \geq 0$ si $a_{ij} \geq 0$ para $i,j = 1,2,\ldots,n$
y además existen i', j' tales que $a_{i'j'} > 0$.

Consideremos las siguientes definiciones:

(A.2.D1) Decimos que j es <u>directamente requerido</u> en la producción de i, si $a_{ij} > 0$

(A.2.D2) Decimos que j es <u>requerido</u> (en última instancia) en la producción de i, si existe una sucesión $J_0, J_1, J_2, \ldots J_\ell$ tal que $J_0 = j$, $J_\ell = i$ y cada miembro de la sucesión es directamente requerido en la producción del siguiente miembro.

(A.2.D3) Una matriz es <u>conectada</u> si describe una economía en la cual toda mercancía es requerida en la producción de todas las otras, es decir si:

i) $a_{ij} \geq 0$ para $i,j = 1,2,\ldots,n$

ii) Si para todo par de índices (i,j) existe una sucesión de índices J_0,

$J_1, J_2, \ldots J_l$ con $J_0 = j$, $J_l = i$ tal que

$$a_{J_0 J_1}\, a_{J_1 J_2} \cdots a_{J_{l-1} J_l} > 0$$

(A.2.B.4) Una <u>permutación</u> de una matriz cuadrada A es una permutación de sus renglones combinada con la misma permutación de sus columnas.

Si pensamos en la matriz A como un operador lineal en $\mathbb{R}^n$ con base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, una permutación de A es una renumeración de los vectores de la base, un cambio a una nueva base

$$e'_1 = e_{J_1} \quad e'_2 = e_{J_2} \quad \cdots \quad e'_n = e_{J_n}$$

donde $J_1, J_2, \ldots J_n$ son una permutación de los índices $1, 2, \ldots, n$.

La Matriz A entonces se transforma en una matriz

$$A_* = T^{-1} A T$$

en donde cada renglón y cada columna de la matriz de transformación contiene un solo elemento 1, y los demás elementos son ceros.

En términos económicos permutar una matriz significa reenumerar los sectores de la producción.

Ahora que hemos definido una permutación de una matriz observemos que una matriz conectada la podemos definir también como sigue:

(A.2.D3') A es una matriz <u>conectada</u> si ninguna permutación de la matriz nos permite ponerla de manera que

$$A_* = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

donde la matriz $A_{21} = \bar{0}$ y las matrices A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas.

Claramente se puede ver que (A.2.D3) y (A.2.D3') son equivalentes.

(A.2.D5) Una matriz A es llamada <u>no-conectada</u> si no es conectada. Y, por lo tanto, existe una permutación tal que la matriz resultante es de la forma

$$A_* = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad\quad}^{m} & \overbrace{\quad\quad}^{n-m} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \end{array}.$$

donde A_{21} es la matriz cero y A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas.

Esto nos indicaría que las mercancías de las $n-m$ sectores que quedan abajo no son utilizadas en la producción de las m sectores restantes.

Si además sucediera que la matriz $A_{12}=\overline{0}$ diríamos que la matriz A es totalmente desconectada y nos estaría hablando de 2 "subeconomías" independientes al interior de la economía.

* La forma triangular de una matriz no-conectada.

teorema (A.2.+1)

Si A es una matriz no-conectada es posible por medio de permutaciones escribirla de la siguiente manera.

$$A_* = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & O & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde las matrices de la diagonal A_{11}, A_{22}, ..., A_{rr} son matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden 1×1.

Demostración.

La prueba de este resultado la haremos por inducción sobre el orden de la matriz (k)

Si $k=1$, es decir si la matriz es de orden 1×1 el resultado es evidente.

Ahora supongamos que el resultado es cierto para todo valor de k tal que

$$k<n$$

y demostraremos que es válido para $k=n$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ como A es no-conectada entonces existe $A_* = T^{-1}AT$ con

$$A_* = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right)$$

con A_{11} y A_{22} matrices cuadradas, si A_{11} y A_{22} son matrices conectadas ya terminamos.

Pero si alguna de ellas no lo es, supongamos sin pérdida de generalidad que ambas A_{11} y A_{22} no lo fueron, como el orden de A_{11} y de A_{22} es menor que n, nuestro resultado es válido para ellas

$$\therefore \quad A_{11*} = \begin{pmatrix} A'_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A'_{rr} \end{pmatrix} \quad y \quad A_{22*} = \begin{pmatrix} A''_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & A''_{rr} \end{pmatrix}$$

donde en la diagonal hay matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden 1.

Debemos observar que los cambios para triangular A_{11} no afectan a A_{22}, la que se ve afectada es A_{12}; de igual manera al triangular A_{22} no afectamos a A_{11} sino tan solo a A_{12}. La nueva A_{12} la llamaremos A_{12*}.

Por lo tanto podemos permutar A y obtener $A*$

$$A_* = \begin{pmatrix} A_{11*} & A_{12*} \\ 0 & A_{22*} \end{pmatrix}$$

donde A_{11*} y A_{22*} están en su forma triangular, así, tenemos A_*^* que es la forma triangular de A y nuestro teorema queda demostrado.

<u>teorema</u> (A.2.T2)

Los valores propios de la matriz A son los mismos que los de la matriz A_*.

<u>Demostración</u>

Como la matriz A_* la obtenemos de A después de realizar algunas permutaciones sabemos que

$$A_* = T^{-1} A T$$

$$|\lambda I - T^{-1} A T| = |\lambda T^{-1} T - T^{-1} A T| =$$

$$|T^{-1}(\lambda I - A) T| = |T^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|T| = |\lambda I - A|$$

con esto lo que vemos es que los polinomios característicos de A y de A_* son los mismos, por lo tanto sus soluciones son también las mismas, con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema (A.2.T3)

Si A ha sido llevada a su forma triangular, entonces λ es valor propio de A_* si y sólo si λ es valor propio de alguna de las submatrices de la diagonal en la forma triangular.

Demostración

"$\Longrightarrow$"

$$|\lambda I - A_*| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda I - A_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \lambda I - A_{rr} \end{vmatrix}$$

donde A_{ii} son nuestras conocidas submatrices de la forma triangular.

Como $\lambda I - A_*$ es una matriz triangular, sabemos que su determinante es igual al producto de los determinantes de la diagonal, —

entonces: :

$$|\lambda I - A_*| = |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}| \cdots |\lambda I - A_{rr}|$$

De donde, si λ es valor de A_* entonces

$$|\lambda I - A_*| = 0$$

$$\therefore \quad |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}| \cdots |\lambda I - A_{rr}| = 0$$

y esto último implica que λ es valor propio de alguna de las submatrices de la diagonal ya que si no lo fuera entonces

$$|\lambda I - A_{ii}| \neq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, r$$

$$y \quad |\lambda I - A_{11}||\lambda I - A_{22}| \cdots |\lambda I - A_{rr}| \neq 0$$

"$\Leftarrow$" Si λ es valor propio de A_{ii} para alguna i, entonces

$$|\lambda I - A_{ii}| = 0$$

$\therefore |\lambda I - A_*| = 0 \quad \therefore \lambda$ es valor propio de

A_* y así queda demostrado el teorema.

§ A.3 Teorema de Perrón-Frobenius y resultados adicionales.

Matrices cuadradas no negativas y conectadas.

teorema.- (A.3.T.1) Perrón-Frobenius.

La matriz A posee un valor propio real y positivo $\hat{\lambda}$ al que se le puede asociar un vector propio positivo $\hat{X} > 0$, $\hat{X}$ es el único vector propio no negativo - (dirección propia en rigor).

Antes de demostrar este teorema vamos a demostrar algunos lemas auxiliares.

Lema (A.3.L.1)

Si $X \gneqq \bar{0}$ y $A\,X = 0$ entonces $X = \bar{0}$

Demostración.

$$\text{Si} \quad A\,X = 0$$

$$\text{entonces} \quad A^2 X = 0$$

$$A^{l_i} X = 0 \quad \text{para } l_i \geq 1$$

Si consideramos

$$\sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{\substack{j_l \\ \| \\ i}} a_{j_0 j_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{l-1} j_l} X_i = 0$$

como $X_i \geq 0$. para $i = 1, 2, \ldots n$ ya que $X \geq \bar{0}$ esto implica que cada término de esta suma es cero y

$\therefore \quad a_{j_0 j_1} \cdots a_{j_{l-1} j_l} X_i = 0$ para todos los valores de los índices $j_0, j_1, \ldots, j_l$.

Sin embargo, el que A sea conectada implica que al menos uno de esos coeficientes es positivo

$$\therefore X_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots n$$

con lo que queda demostrado nuestro lema.

<u>Lema</u> (A.3.L2)

Existe $\lambda > 0$ tal que $A x = \lambda x$ tiene una solución con $x \geq \bar{0}$.

Demostración

Tomemos un hiperplano de dimensión n-1 en un espacio n_i- dimensional que interecte a cada uno de los ejes coordenados en un valor positivo.

Sea $S = \{ X \geq 0 / \sum_{i=1}^{n} X_i \} = 1$ el hiperplano.

Cada vector en el hiperplano es transformado mediante la matriz A en un punto $X^{(1)}$ del octante semipositivo porque $A \geq \bar{0}$ y por el lema anterior $Ax \neq 0$.

Si multiplicamos $X^{(1)}$ por un escalar adecuado lo podemos mandar a $X^{(2)}$ que caiga en el hiperplano original.

Esto es, sea $\sigma = \sum_{i=1}^{n} X_i^{(1)}$ entonces

$$X_i^{(2)} = \frac{1}{\sigma} X_i^{(1)} \qquad \therefore \quad X^{(2)} = \frac{1}{\sigma} A x = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ es claramente una función continua del subconjunto cerrado, acotado y convexo $\{x \mid x \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ en sí mismo.

Utilizando el teorema de punto fijo de Brower.*

Sabemos que existe x tal que

$$x_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)}} A x \qquad \text{Si hacemos } \lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(1)}$$

entonces $Ax = \lambda x$ y $\lambda > 0$ $x \geq \bar{0}$ quedando nuestro lema probado.

---

*<u>teorema de punto fijo de Brower.</u>

Sea S un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio euclideano.

Sea φ una función arbitraria y continua de S en sí mismo.

Entonces existe al menos un punto $p \in S$ tal que $\varphi(p) = p$, esto es, existe al menos un punto $p \in S$ que se mantiene fijo bajo la función φ.

Lema (A.3. L3)

Si $\lambda > 0$, $Ax = \lambda x$, $x \geq \bar{0}$ pero es falso que $x > \bar{0}$, entonces $x = \bar{0}$.
(es decir, si x es una solución de $Ax = \lambda x$, y alguna componente de x es cero, entonces, todas lo son)

Demostración

Sea $Ax = \lambda x$ $\quad \cdots \quad$ $A^l x = \lambda^l x$ para $l \geq 1$

Supongamos que existen $x_i = 0$, $x_k > 0$.

Por ser A conectada, existe una sucesión de índices tal que

$$a_{ij_1} a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{l-1} k} > 0 \quad \text{entonces}$$

el término (i, k) de la matriz A^l es distinta de cero, y como $x_k > 0$, podemos concluir que el término i'esimo de $(A^l x)_i \neq 0$.
Por otro lado como $x_i = 0$ ~~este~~ término i'esimo $\quad (A^l x)_i = \lambda^l x_i = 0 \quad \therefore \quad x_k = 0$

Ahora vamos a demostrar el teorema.

Demostración

Por los lemas L2 y L3 queda establecida la existencia de soluciones x, λ de la ecuación

$$Ax = \lambda x \qquad \text{con } x > \bar{0},\ \lambda > 0.$$

lo que nos falta demostrar es que x y λ son únicas.

Como A es no-negativa y conectada, si hacemos

$$B = A'$$

entonces B también es nonegativa y conectada

$\therefore$ existen $y > \bar{0}$, $\mu > 0$ tales que

$$By = \mu y \quad \Longrightarrow \quad y'A = \mu y'$$

de donde $\lambda y'x = y'Ax = \mu y'x$

Como $y'x > 0$ podemos concluir que

$$\lambda = \mu$$

$\therefore$ λ es única.

Sea x cualquier vector propio de A tal que $x \geq 0$, sea λ el valor propio correspondiente.

Ahora vamos a demostrar que x es único salvo multiplicaciones por escalares.

Sea y un vector propio tal que $Ay = \lambda y$

Sea $t = \min\limits_{i} \left(\dfrac{y_i}{x_i} \right)$ y sea s el índice

para el cual se alcanza el mínimo.

$$y - tx \geqq 0 \qquad\qquad y - \frac{y_s}{x_s} \geqq 0$$

ya que $\dfrac{y_i}{x_i} \geqq \dfrac{y_s}{x_s} \Rightarrow y_i x_s \geqq x_i y_s \Rightarrow$

$$\rightarrow \quad y_i x_s - x_i y_s \geqq 0$$

$$\therefore \quad y_i - \frac{y_s}{x_s} x_i \geqq 0 \qquad \text{para } i=1,2,\dots n$$

También sabemos que $y_s - t x_s = 0$, es decir, este vector tiene una coordenada cero y como

$$A(y-tx) = \lambda(y-tx)$$

podemos concluir por el lema L3 que

$$y - tx = 0 \qquad \therefore \qquad y = tx$$

con lo que queda finalmente demostrado el teorema de Perrón-Frobenius.

<u>Corolario.</u> A y su transpuesta tienen las mismas valores propios dominantes.

Llamaremos a $\hat{\lambda}(A)$ la raíz de Frobenius de A, y a $\hat{X}$ el vector de Frobenius de A.

Ahora vamos a establecer algunas propiedades de $\hat{\lambda}(A)$.

<u>teorema.</u> (A.3.+2)

Si para un vector cualquiera $z \geqq \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$.

i) $Az \geq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) > K$

ii) $Az \leq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) < K$

Si $z \geq \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$.

i') $Az \geqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \geq K$

ii') $Az \leqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \leq K$

<u>Demostración</u> (probaremos (i) los otros son similares).

Sea $B = A'$ sea $y > 0$ $\cdot\ni\cdot$ $By = \lambda y$

Sea $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(B) = \lambda$

Como cada componente de y es positiva, se cumple de la hipótesis de que $Az \geq Kz$

$$y' \cdot Az > K(y' \cdot z)$$

transponiendo $\quad z'By > Kz'y$

$; \; z'(\lambda y) > K(z'y)$

$\lambda(z'y) > K(z'y)$

como $z'y \neq 0 \quad \therefore \quad \lambda > K$

entonces $\quad \hat{\lambda}(A) > K$

y nuestro resultado está probado.

<u>teorema</u>.- (A.3.T3)

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A)$$

donde μ es cualquier valor propio de A.

<u>Demostración</u>

Sea μ un valor propio arbitrario (quizá un complejo) de A. Entonces existe $x \neq 0$ (quizá complejo) tal que $\quad Ax = \mu x$

entonces $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \mu x_i \quad$ para $i = 1, 2, \ldots n$

Sea $x^+ = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$, claramente $x^+ \geq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}\, x_j| \geqq |\mu\, x_i| \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, |x_j| \geqq |\mu|\, |x_i| \qquad \text{"}$$

entonces $A x^+ \geqq |\mu|\, x^+$

y por el inciso i') del teorema (A.3.+2) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) \geq \mu$$

con lo que queda demostrado nuestro teorema.

Con este teorema vemos que $\hat{\lambda}(A)$ tiene la propiedad de ser un valor propio no-negativo con valor absoluto máximo.

Esta puede tomarse como definición equivalente de $\hat{\lambda}(A)$, es algo que vale la pena resaltar, ya que será la definición utilizada para demostrar el teorema de Perrón-Frobenius para matrices no-conectadas.

<u>teorema</u> (A.3.+4).

$\hat{\lambda}(A)$ es una función estrictamente creciente, es decir si $A^* \geq A$ entonces

$$\hat{\lambda}(A^*) > \hat{\lambda}(A)$$

<u>Demostración</u>

Sea $\lambda^* = \hat{\lambda}(A^*)$ entonces existe

$$x^* > 0 \text{ tal que } A^* x^* = \lambda^* x^*$$

como $A^* \geq A$ entónces $A^* x^* \geq A x^*$

$$\therefore \quad A x^* \leq \lambda^* x^* \quad \text{y por el inciso ii)}$$

del teorema (A.3.+2) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) < \hat{\lambda}(A^*) = \lambda^*$$

quedando así demostrado nuestro teorema.

teorema (A.3.+5)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función continua.

Sea $\hat{x} > 0$ tal que ; $A\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x}$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

donde $M = \max_j \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n \hat{X}_i}{\hat{X}_j} \right\}$

Sea $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada con todas sus entradas 1, del mismo orden que A.

Sea B una matriz irreducible tal que

$$\|A - B\| < \delta \implies A - \delta J < B < A + \delta J$$

si multiplicamos por el vector $\hat{X}$ obtenemos

$$(A - \delta J)\hat{x} < B\hat{x} < (A + \delta J)\hat{x}$$

de donde

$$A\hat{x} - \delta J\hat{x} < B\hat{x} < A\hat{x} + \delta J\hat{x}$$

$$A\hat{x} - \delta J\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \end{pmatrix} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta\begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\hat{x}_1}\hat{x}_1 \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\hat{x}_n}\hat{x}_n \end{pmatrix} \geq \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \delta M\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} - \varepsilon\hat{x} = (\hat{\lambda}(A) - \varepsilon)\hat{x}$$

$$A\hat{x} + \delta J\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i \end{pmatrix} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta\begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\hat{x}_1}\hat{x}_1 \\ \vdots \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i}{\hat{x}_n}\hat{x}_n \end{pmatrix} \leq \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \delta M\hat{x} = \hat{\lambda}(A)\hat{x} + \varepsilon\hat{x} = (\hat{\lambda}(A) + \varepsilon)\hat{x}$$

Con lo que finalmente obtenemos

$$(\hat{\lambda}(A) - \varepsilon)\hat{x} \leq B\hat{x} \leq (\hat{\lambda}(A) + \varepsilon)\hat{x}$$

y por el teorema (A.3.t2) incisos (i) y (ii) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) - \varepsilon < \hat{\lambda}(B) < \hat{\lambda}(A) + \varepsilon$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Matrices cuadradas no-negativas y no-conectadas

teorema (A.3.t6) Perrón - Frobenius

La Matriz A posee un valor propio real y no negativo $\hat{\lambda}$, tal que si μ es un valor propio cualquiera de A, entonces $\hat{\lambda} \geq |\mu|$, $\hat{\lambda}$ tiene asociado un vector propio no negativo $\hat{x} \geqslant 0$.

[se toma esta otra definición ya que $x \geqslant 0$ y $\hat{\lambda}(A) \geqslant 0$ no garantizan la unicidad y sin embargo $\hat{\lambda}(A) \geqslant 0$, $\hat{\lambda}(A) \geq |\mu|$ y $x \geqslant 0$ sí la garantizan]

Demostración*

Por ser A no conectada, podemos llevarla a su forma triangular como lo demostramos en el teorema (A.2.†1), quedando A_* de la siguiente manera:

$$A_* = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_{rr} \end{pmatrix}$$

donde las matrices de la diagonal son matrices cuadradas conectadas ó la matriz cero de orden uno.

Sea A_k la submatriz de la diagonal de máximo valor propio λ_k, como sabemos de

---

* Enunciado y Demostración alternativa del teorema de Perrón-Frobenius para matrices no negativas arbitrarias.

TEOREMA:- Sea $A \geq \bar{0}$. A tiene una raíz no negativa $\hat{\lambda}(A)$ y un vector propio asociado no negativo.

Sea $S = \{ x \geq \bar{0} \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \}$

Sea $f_i(x) = \left(x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \Big/ \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$

$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$

(cont.)

(A.2.T3) λ_R es también valor propio de A.

$\therefore$ sea $\hat{\lambda}(A) = \lambda_R$

De lo anterior obtenemos $\hat{\lambda}(A) \geq 0$ y para todo valor propio μ de A $|\mu| \leq \hat{\lambda}(A)$.

Ahora vamos a ver cuál es el vector propio correspondiente.

Sea $\{A^n\}$ una sucesión de matrices positivas conectadas tal que $\{A^n\} \searrow A$

Aplicando el teorema de P-F para matrices conectadas a cada matriz de la sucesión.

Entonces

$$f: S \to S \qquad f \text{ es continua}$$

utilizando el teorema de punto fijo de Brower, sabemos que existe $x^* \in S$ tal que

$$f(x^*) = x^* = \frac{x^* + Ax^*}{1 + I' A x^*} \qquad \text{donde } I' = (1, 1, \dots 1)$$

de aquí $(1 + I'Ax^*)x^* = x^* + Ax^* \Rightarrow Ax^* = (I'Ax^*)x^*$

Sea $\hat{\lambda}(A) = I'Ax^* \geq 0$; $x^* \geq 0$ es su vector asociado.

sabemos que existen

$\hat{\lambda}(A_n) > 0 \qquad x^n > 0$ tales que $A^n x^n = \hat{\lambda}(A^n)\, x^n$

Consideremos que $x^n \in S$, en donde $S = \{x \geq 0 / \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ como S es cerrado y acotado y $\therefore$ compacto entonces $\{x^n\}$ contiene una subsucesión convergente en S. Llamemos x al vector al que converge.

$$\{x^{\varphi_k}\} \to x \geq 0 \quad \text{por estar en } S$$

como $A^{\varphi_k} x^{\varphi_k} = \hat{\lambda}(A^{\varphi_k}) x^{\varphi_k}$ entonces $\hat{\lambda}(A^{\varphi_k})$ converge. Sea $\hat{\lambda}$ el valor al que converge.

En el límite $\qquad A x = \hat{\lambda} x$

Por otro lado, como $|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(A^n)$ al tomar límite

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) = \lim_{n \to \infty} \hat{\lambda}(A_n)$$

$\therefore \ \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(A)$ y x es el valor propio asociado a la raíz de Frobenius.

Teorema (A.3.T7)

Si para un vector cualquiera $z > \bar{0}$ y $K \in \mathbb{R}$

i) $Az \geqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \geqq K$

ii) $Az \leqq Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) \leq K$

si $z \geqslant 0$ y $K \in \mathbb{R}$

i') $Az > Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) > K$

ii) $Az < Kz \Rightarrow \hat{\lambda}(A) < K$

Demostración (probaremos (i) los otros son similares)

Sea $B = A'$ sea $y \geqslant 0$ tal que $A'y = \lambda y$

Sea $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(B) = \lambda$

Como cada componente de y es no negativa, de la hipótesis de que $Az \geqq Kz$ se desprende que

$\hat{\lambda}(A)(y'z) = y'\hat{\lambda}(A)z = y'Az \geqq K(y'z)$ como $y'z \neq 0$

podemos concluir que $\hat{\lambda}(A) \geqslant K$ qed.

<u>teorema</u> (A.3.T8)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función no decreciente.

primero demostraremos un lema auxiliar.

<u>Lema</u> (A.3.L4)

Si $0 \leqq A \leqq B$ y B es una matriz conectada entonces $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

<u>Demostración</u>

Por ser B conectada sabemos que existe $y > \bar{0}$ tal que $By = \hat{\lambda}(B)y$ de aquí obtenemos

$$Ay \leqq By = \hat{\lambda}(B)y$$

Por otro lado, sabemos que existe $p \geq \bar{0}$ tal que $Ap = \hat{\lambda}(A)p$

$$\therefore \hat{\lambda}(A)py = Apy \leqq Bpy = \hat{\lambda}(B)py$$

Como $py \neq 0$ entonces $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

Con lo cual el lema está demostrado.

Ahora vamos a demostrar el teorema.

Si B es no-conectada, entonces triangulamos B transformando correspondientemente A.

Como $\bar{O} \leqq A \leqq B$ entonces $A_{ii} \leqq B_{ii}$ para toda submatriz de la diagonal.

Entonces $\hat{\lambda}(A_{ii}) \leq \hat{\lambda}(B_{ii})$ para $i=1,2 \ldots n$

Ya que B_{ii} ó es la matriz cero en cuyo caso $\hat{\lambda}(A_{ii}) = \hat{\lambda}(B_{ii}) = 0$ ó es una matriz conectada en cuyo caso aplicamos el lema (A.3.L4) que acabamos de demostrar.

observemos que si algún elemento de la matriz B es cero, el correspondiente de A también lo es. ∴ si tomamos el valor propio máximo de las submatrices B_{ii}, que sabemos es la raíz de Frobenius podemos concluir que $\hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(B)$

<u>teorema</u> (A.3.T9)

$\hat{\lambda}(A)$ es una función continua.

Una vez más primero demostraremos dos lemas auxiliares.

<u>Lema</u> (A.3.L5)

Si $A^n \Downarrow A$; $\hat{\lambda}(A_n) \downarrow \hat{\lambda}(A)$

<u>Demostración</u>

Sea $A^1 \geqq A^2 \geqq A^3 \ldots$

$$\hat{\lambda}(A^n) \geqq \hat{\lambda}(A)$$

Sea $\lambda = \lim_{n \to \infty} \hat{\lambda}(A^n)$

Sabemos que para toda A^n, existe $X^n \in S$ tal que

$$A^n . X^n = \hat{\lambda}(A^n) X^n$$

Sabemos que existe X tal que

$$X^{\varphi_k} \to X \in S$$

como $\quad A^{\varphi_K} X^{\varphi_K} = \lambda(A^{\varphi_K}) X^{\varphi_K}$

en el límite $\quad Ax = \lambda x$

$\therefore$ λ es un valor propio no negativo de A

Si μ es un valor propio de A. como

$$|\mu| \leq \hat{\lambda}(A) \leq \hat{\lambda}(A^n)$$

entonces $\quad |\mu| \leq \lambda = \lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}(A^n)$

$$\therefore \quad \lambda = \hat{\lambda}(A)$$

quedando así demostrado nuestro lema.

<u>Lema</u> (A.3.L 6)

Si $A^n \nearrow A$, $\hat{\lambda}(A^n) \nearrow \hat{\lambda}(A)$

<u>Demostración</u>

$$\hat{\lambda}(A^n) \to \lambda \leq \hat{\lambda}(A)$$

triangulamos A y operamos con A^n como con A, $\therefore A^n$ está triangulada aunque las submatrices A^n_{ii} quizá sean no-conectadas pero al acercarnos "suficientemente" a A, es decir para n suficientemente grande

$$A_{ii} \text{ conectada} \Rightarrow A^n_{ii} \text{ conectada}$$

Para $n=1,2,\dots$ sea $i(n)$ tal que

$$\hat{\lambda}\left(A^n_{i(n)i(n)}\right) = \hat{\lambda}\left(A^n\right)$$

Existe por lo menos un i_0 tal que $i_0 = i(n)$ para un conjunto infinito de índices, entonces vamos a ordenarlos.

$$\{n \mid i(n) = i_0\} = \{\varphi^1, \varphi^2 \dots\} \quad \text{con } \varphi^1 < \varphi^2 < \dots$$

Ahora consideremos la siguiente subsucesión de la sucesión original.

$$A^{\varphi k} \nearrow A \qquad \hat{\lambda}\left(A^{\varphi k}\right) \nearrow \lambda$$

$$\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0})$$

$$\lambda \leq \hat{\lambda}(A)$$

Supongamos que $\lambda < \hat{\lambda}(A)$

Sabemos que existe i tal que $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(A_{ii})$

Sabemos que $\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}) \to \lambda$

pero $A^{\varphi_K}_{i_0 i_0} \to A_{i_0 i_0}$

con $A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}$ matrices conectadas al igual que $A_{i_0 i_0}$ como ya demostramos la continuidad para las matrices conectados (teorema (A.3.75)) entonces

$$\hat{\lambda}(A^{\varphi_K}_{i_0 i_0}) \to \hat{\lambda}(A_{i_0 i_0})$$

$$\therefore \; \lambda = \hat{\lambda}(A_{i_0 i_0})$$

y como $\hat{\lambda}(A) = \hat{\lambda}(A_{ii})$ y $\lambda < \hat{\lambda}(A)$

entonces $i \neq i_0$.

Consideremos

$$A_{ii}^{\varphi_K} \to A_{ii}$$

$$\hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K}) \to \hat{\lambda}(A_{ii}) = \hat{\lambda}(A)$$

para K suficientemente grande

$$\hat{\lambda}(A_{i_0 i_0}^{\varphi_K}) < \hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K})$$

pero $\hat{\lambda}(A_{i_0 i_0}^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K})$

y $\hat{\lambda}(A_{ii}^{\varphi_K}) = \hat{\lambda}(A^{\varphi_K})$

lo cual es un absurdo $\therefore$ es incorrecto nuestro supuesto de que

$$\lambda < \hat{\lambda}(A)$$

$$\therefore \quad \lambda = \hat{\lambda}(A)$$

que es la demostración de nuestro lema.

Una vez probados estos 2 lemas vamos a probar el teorema.

Demostración.

$$\text{Si } A^n \to A$$

Sean $\overline{A^n} = A + \frac{1}{n} J$ con $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

y $\underline{A^n} = (\underline{a_{ij}^n})$ con $\underline{a_{ij}^n} = \max\left(0, a_{ij} - \frac{1}{n}\right)$

$$\overline{A^n} \downarrow A \quad \text{y} \quad \underline{A^n} \nearrow A$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe N_1 tal que si $n > N_1$

$$\left|\hat{\lambda}(\overline{A^n}) - \hat{\lambda}(A)\right| < \varepsilon$$

y existe N_2 tal que si $n > N_2$

$$\left|\hat{\lambda}(\underline{A^n}) - \hat{\lambda}(A)\right| < \varepsilon$$

Sea $\bar{N} = \max(N_1, N_2)$ entonces existe N tal que si $n > N$ entonces

$$\underline{A^{\bar{N}+1}} \leq A^n \leq \overline{A^{\bar{N}+1}}$$

de aquí podemos obtener que

$$\begin{array}{ccccc} \hat{\lambda}\left(\underline{A^{\bar{N}+1}}\right) & \leq & \hat{\lambda}(A^n) & \leq & \hat{\lambda}\left(\overline{A^{\bar{N}+1}}\right) \\ \vee & & & & \wedge \\ \hat{\lambda}(A)-\varepsilon & & & & \hat{\lambda}(A)+\varepsilon \end{array}$$

$$\therefore \quad \left| \hat{\lambda}(A) - \hat{\lambda}(A^n) \right| < \varepsilon$$

con lo cual el teorema está probado.

<u>teorema.-</u> (A.3.T10)

Sea $\lambda = \hat{\lambda}(A)$, sea. $S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

sea $\underline{S} = \min_j S_j$ y $\overline{S} = \max_j S_j$

Entonces $\underline{S} \leq \lambda \leq \overline{S}$

<u>Demostración</u>

Sea $I' = (1, 1, \cdots, 1)$

Entonces $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} \overline{S} \\ \vdots \\ \overline{S} \end{pmatrix} = \overline{S} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

es decir $A \cdot I \leqq \overline{S}\, I$ $\therefore$ por el teorema (A.3.T7) inciso (ii) podemos concluir que

$$\hat{\lambda}(A) \leq \overline{S}$$

igualmente

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix}\underline{S}\\ \vdots \\ \underline{S}\end{pmatrix} = \underline{S}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore \quad A \cdot \bar{1} \geqq \underline{S}\,\bar{1}$ y por el teorema (A.3.T7) inciso (ii) obtenemos que

$$\hat{\lambda}(A) \geq \underline{S}$$

$$\therefore \quad \underline{S} \leq \lambda \leq \overline{S}$$

con lo cual queda demostrado nuestro teorema.

§A.4 Matrices productivas.

Nuestro resultado central es (A.4.T3) pero requerimos de algunos preámbulos.

(A.4.D1) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es de <u>diagonal dominante en el sentido de Hadamard</u> si

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \qquad \text{para } j = 1, 2, \dots n$$

(A.4.D2) A es de <u>diagonal dominante</u> si existe

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{con } d_i > 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots n$$

tal que DA es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard, es decir, si existen n positivos $d_1, d_2, \dots d_n$ tales que

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} \dots d_1 a_{1n} \\ \vdots \\ d_n a_{n1} \dots d_n a_{nn} \end{pmatrix} \quad y \quad d_j |a_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |a_{ij}|$$

$$\text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

<u>teorema</u> (A.4.T1)

Si A es de diagonal dominante, entonces A es no-singular.

Demostración

Supongamos que A es singular.

Sea $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots & d_n \end{pmatrix}$ con $d_i > 0$ tal que

DA es diagonal dominante en el sentido de Hadamard, entonces como $|A| = 0$ –

$$|DA| = |D|\,|A| = 0$$

$$\therefore\ DA = E \text{ es singular}$$

$\therefore$ existe X no nulo tal que $X'E = \bar{0}'$

es decir $\sum_{k=1}^{n} x_k e_{kj} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

consideremos $|x_j|$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

Sea j_0 tal que $|x_{j_0}| = \max_j \{|x_j|\}$

$$x_{j_0} e_{j_0 j_0} + \sum_{k \neq j_0} x_k e_{kj_0} = 0$$

de aquí $x_{j_0} e_{j_0 j_0} = -\sum_{k \neq j_0} x_k e_{kj_0}$

$$|x_{j_0}||e_{j_0j_0}| = |\sum_{k\neq j_0} x_k e_{kj_0}| \leq |\sum_{k\neq j_0} |x_k||e_{kj_0}|| \leq \sum_{k\neq j_0} |x_{j_0}||e_{kj_0}|$$

$\therefore$ E no es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard y finalmente A no es de diagonal dominante, lo cual es un absurdo $\therefore$ podemos concluir que

A es no-singular

quedando demostrado el teorema.

<u>teorema</u> (A.4.T2)

Sea $B = (b_{ij})$ tal que si $i \neq j$ $b_{ij} \leq 0$ y $b_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots n$. entonces B es de diagonal dominante si y sólo si para toda $C \gtrsim \bar{0}$ existe un único $x \geq \bar{0}$ tal que $Bx = C$.

<u>Demostración.</u>

"$\Longrightarrow$" Sea D tal que DB es de diagonal dominante en el sentido de Hadamard.

Por el teorema anterior sabemos que B es una matriz no-singular. $\therefore$ existe B^{-1}

Sea $C \geq \bar{0}$ Sea $X = B^{-1}C$ vamos a probar que $X \geq \bar{0}$

Sea $J = \{ j=1,2,\ldots n \,/\, X_j < 0 \}$

Supongamos que $J \neq \phi$; si $i=1,2,\ldots n$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} X_k = C_i \qquad \sum_{k \notin J} b_{ik} X_k + \sum_{k \in J} b_{ik} X_k = C_i$$

si $i \in J$ entonces en la primera suma $b_{ik} \leq 0$ y $X_k \geq 0$, además $b_{ii} > 0$ y $X_i < 0$

entonces $\displaystyle\sum_{\substack{k \notin J \\ i = k}} b_{ik} X_k \leq 0$ y $\displaystyle\sum_{\substack{k \in J \\ k \neq i}} b_{ik} X_k \geq 0$

Si esta última sumatoria la multiplicamos por $d_i > 0$ y sumamos sobre las $i \in J$. obtenemos

$$\sum_{i \in J} \sum_{\substack{k \in J \\ k \neq i}} d_i b_{ik} X_k \geq 0 \qquad (A.4.1)$$

Ahora como B es de diagonal dominante

$$d_j |b_{jj}| > \sum_{i \neq j} d_i |b_{ij}| \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

en especial si $j \in J$.

pero $\displaystyle\sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i |b_{ij}| \leq \sum_{i \neq j} d_i |b_{ij}| < d_j |b_{jj}|$

entonces $\displaystyle 0 < \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i (-|b_{ij}|) + d_j |b_{jj}| =$

$$= \sum_{\substack{i \neq j \\ i \in J}} d_i b_{ij} + d_j b_{jj} = \sum_{i \in J} d_i b_{ij}$$

Si esta última sumatoria la multiplicamos por X_j que sabemos es negativo, entonces

$$0 > \sum_{i \in J} d_i b_{ij} X_j \qquad \text{para } j \in J$$

$$\therefore \qquad 0 > \sum_{j \in J} \sum_{i \in J} d_i b_{ij} X_j \qquad (A.4.2)$$

pero las ecuaciones (A.4.1) y (A.4.2) son incompatibles $\therefore$ es incorrecto suponer que $J \neq \phi$ y entonces podemos concluir que

$$J = \phi \qquad \therefore \quad X \geq \overline{0}$$

Ahora vamos a demostrar el resultado en la otra dirección "$\Leftarrow$".

Sea $C > \overline{0}$ y existe $X \geq \overline{0}$ tal que $BX = C$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j = C_i > 0 \qquad \text{entonces}$$

$$b_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} X_j > 0 \qquad b_{ii} X_i > \sum_{j \neq i} (-b_{ij}) X_j \geq 0$$

$b_{ii} X_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ $\qquad \therefore \quad X_i > 0$

Sea $d_i = X_i > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$d_i |b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{i \neq j} (-b_{ij}) X_j = \sum_{i \neq j} |b_{ij}| d_j$$

$\therefore$ B es de diagonal dominante

Entonces B' cumple las hipótesis de este teorema y podemos aplicarle la primera parte, es decir, para toda $C \geq \bar{0}$ existe un único $y \geq \bar{0}$ tal que $B'y = C$, haciendo lo mismo que hicimos con B obtenemos que $(B')' = B$ es de diagonal dominante.

Con esto nuestro teorema está demostrado.

Corolario.- Si B es tal que si $i \neq j$ $b_{ij} \leq 0$ y $b_{ii} > 0$ para $i = 1, 2, \ldots n$. entonces B es de diagonal dominante si y sólo si B' lo es.

Ahora vamos a demostrar el teorema central de este parágrafo.

Teorema.- (A.4.T3)

Sea A una matriz no negativa, y sea $B = (I - A)$, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

I) A es productiva, es decir, existe $X \geq 0$ tal que $X > AX$, esto es, $(I-A)X = BX > \bar{0}$

II) Más general, para toda $C \geq \bar{0}$ existe $X \geq \bar{0}$ tal que $(I-A)X = BX = C$, es decir, para toda $C \geq \bar{0}$ existe un único vector de producción que engendra una situación realizable.

III) B es no singular y $B^{-1} \geq \bar{0}$

IV) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge

V) $\hat{\lambda}(A) < 1$

Demostración

$I \Rightarrow II$

Sabemos por hipótesis que existe $X \geq \bar{0}$ tal que $BX > \bar{0}$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j > 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} b_{ij} X_j > 0 \qquad b_{ii} X_i > \sum_{j \neq i} (-b_{ij}) X_j \geq 0$$

$$\therefore b_{ii} X_i > 0 \qquad \therefore X_i > 0 \text{ y } b_{ii} > 0$$

Sea $d_i = X_i > 0$

$$d_i |b_{ii}| = X_i b_{ii} > \sum_{i \neq j} |b_{ij}| d_j$$

entonces B es de diagonal dominante. Con esto vemos que se cumplen las hipótesis del teorema (A.4.T2) por lo que podemos concluir que para toda $C \geq 0$ existe un único vector $X \geq 0$ tal que $BX = C$ que es el resultado II.

II $\Rightarrow$ III

también ya sabemos por el teorema (A.4.T1) que si B es de diagonal dominante entonces B es no-singular, es decir B^{-1} existe, falta ver que $B^{-1} \geq 0$.

Pero por hipótesis de II para toda $C \geq \bar{0}$, $B^{-1} C = X \geq \bar{0}$.

Sea $C = e_j$ $\quad B^{-1} e_j$ es la j'ésima columna de B^{-1}

$$\therefore B^{-1} \geq \bar{0}$$

III ⇒ II

Existe $B^{-1} \geq \bar{0}$ entonces si $C \geq \bar{0}$

$X = B^{-1} C \geq \bar{0}$ y $BX = C$;

II ⇒ I

Sabemos que para toda $C \geq 0$ existe $X \geq 0$ tal que $BX = C$

Sea $C > 0$ entonces $BX = C > 0$

Hasta aquí hemos probado I ⇔ II ⇔ III

Ahora demostraremos III ⇒ IV

Sea $T_m = \sum_{K=0}^{m} A^K$

Consideremos $T_m \cdot B = \sum_{K=0}^{m} A^K (I - A) =$

$$\sum_{K=0}^{m} A^K - \sum_{K=0}^{m} A^{K+1} = I - A^{m+1} \qquad (A.4.3)$$

$$\therefore T_m \cdot B \leq I$$

de III Sabemos que existe $B^{-1} \geq \bar{0}$

entonces $t_m \leqq B^{-1}$

es decir, sin importar cómo son las entradas de t_m, todas están acotadas superiormente por B^{-1}

Además $t_m \leqq t_{m+1}$ para toda m ya que t_{m+1} tiene un término más. Por esto podemos concluir que existe el

$$\lim_{m \to \infty} t_m = T$$

$\therefore$ la serie converge, de aquí que el término general converge a cero, es decir,

$$\lim_{m \to \infty} A^{m+1} = 0$$

Sabemos de (A.4.3) que

$$t_m \cdot B = I - A^{m+1}$$ de donde

$$\lim_{m \to \infty} (t_m \cdot B) = \lim_{m \to \infty} (I - A^{m+1})$$

de aquí obtenemos

$$T \cdot B = I$$

$$\therefore \quad T = B^{-1} = (I - A)^{-1}$$

es decir la serie converge y converge a $(I - A)^{-1}$

Ahora vamos a demostrar · IV ⇒ III

De nuevo consideremos (A.4.3)

es decir

$$T_m \cdot B = I - A^{m+1}$$

observemos que esta afirmación la obteníamos independientemente de que la matriz B sea o no singular.

Ahora como Tm converge sabemos que el término general converge a cero y por lo tanto

$$T \cdot B = I \qquad\qquad \therefore \; T = B^{-1}$$

pero T es el límite de una serie que término a término cada uno de sus sumandos es una entrada no negativa, entonces

$$B^{-1} \geq \overline{0}$$

Ahora hemos demostrado que

$$I \Leftrightarrow II \Leftrightarrow \overline{III} \Leftrightarrow \overline{IV}$$

solo nos falta demostrar la equivalencia con V.

$I \Rightarrow V$

Por hipótesis de I sabemos que existe $x \geqslant 0$ tal que $\quad x > Ax$, esto es,

$$1 \cdot x > Ax$$

Entonces por el teorema (A.3.T7) inciso (ii) podemos concluir que

$$;\quad \hat{\lambda}(A) < 1$$

V ⇒ I

Sea $A \geq 0$ $\qquad 1 > \hat{\lambda}(A)$

Sea $\{A^n\}$ una sucesión de matrices tal que para toda n $A^n > 0$, entonces A^n es conectada, y tal que

$A^n \Downarrow A$ ya demostramos que

$$\hat{\lambda}(A^n) \downarrow \hat{\lambda}(A)$$

Existe p_0 tal que $1 > \hat{\lambda}(A^{p_0})$

Sea $X > 0$ el vector propio de A^{p_0} asociado a $\hat{\lambda} A^{p_0}$

$$BX = (I - A)X = X - AX \geqq X - A^{p_0}X = X - \hat{\lambda}(A^{p_0})X$$

pero

$$X - \hat{\lambda}(A^{p_0})X = (1-\hat{\lambda}(A^{p_0}))X > 0$$

$$\therefore \quad BX > \bar{0}$$

y con esto queda totalmente demostrado nuestro teorema.

<u>teorema</u> (A.4. T4)

Si A es una matriz productiva y $B \geq \bar{0}$ es tal que $A \geq B$, entonces

$$(I-A)^{-1} \geqq (I-B)^{-1}$$

<u>Demostración</u>.-

Como A es productiva existe $(I-A)^{-1} \geq 0$, y por el inciso IV del teorema anterior la serie

$$\sum_{K=0}^{\infty} A^K \text{ converge a } (I-A)^{-1}$$

Es claro que también B es productiva ya que. $\quad X > AX \geq BX$

entonces también la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k \text{ converge a } (I-B)^{-1}$$

De aquí podemos concluir que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k \geqq \sum_{k=0}^{\infty} B^k$$

ya que término a término es mayor la primera que la segunda $\therefore$

$$(I-A)^{-1} \geqq (I-B)^{-1}$$

con lo que el teorema está probado.

R E F E R E N C I A S

B I B L I O G R A F I C A S.

L. V. BortKiewicz (1907) "Contribución a una rectificación teórica de Marx en el volumen III de El Capital", Cuadernos de Pasado y Presente, #49, México, 1978.

G. Debreu; I.N. Herstein (1953) "Nonnegative square matrices", Econométrica #21, octubre 1953.

G. Dostaler (1978) "Valor y Precio, historia de un debate", terra nova, México, 1980.

C.E. Ferguson; J.P. Gould (1975) "Teoria Microeconómica", Fondo de cultura económica, México, 1978.

F.R. Gantmacher (1959) "the theory of Matrices", Chelsea, EU, 1974.

A.G. Kurosch (1946) "Curso de Algebra Superior", Mir, Moscú, 1977.

C. Marx; F Engels (1934) "Correspondencia", Cartago, Buenos Aires, 1957.

C. Marx; F Engels (1967) "Obras Escogidas" 8 tomos, Ediciones Quinto Sol, México, 1970.

C. Marx (1867) "El Capital", Siglo XXI, México, 1976.

C. Napoleoni (1963) "El pensamiento económico en el siglo XX", oikos-tau, España, 1968.

J.T. Schwartz (1961) "Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics", Gordon and Breach, E.U. 1961.

P. Sraffa (1960) "Producción de mercancías por medio de mercancías", oikos-tau, España, 1960.

A. Takayama (1974) "Mathematical Economics", Dryden, E.U., 1974.

J. M. Vegara (1979) "Economía política y modelos multisectoriales", tecnos, Madrid, 1979.

L. Villegas (1981) "Una presentación matemática del modelo de Insumo - Producto de Leontief", tesis profesional, facultad de ciencias, UNAM, México, 1981.

J. E. Woods (1978) "Mathematical Economics, topics in multi-sectoral economics", Longman, London & New York, 1978.