

rej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA  
COMPUTADORA PERSONAL ENFOCADO  
AL ANALISIS ESTRUCTURAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**

**I N G E N I E R O C I V I L**

**P R E S E N T A :**

**ALEJANDRO ALVAREZ ENRIQUEZ**



**México, D. F.**

**1988**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

- 1 .- INTRODUCCION
- 2 .- EL METODO DEL ELEMENTO FINITO
  - 2.1 .- Tipos de formulación de un problema de ingeniería.
    - 2.1.1. - Formulación de los Residuos Pesados.
      - Método de Galerkin.
      - Método de Colocación.
      - Método de Subdominios.
      - Método de Mínimos Cuadrados.
    - 2.1.2. - Formulación Variacional.
      - Método de Rayleigh-Ritz.
      - Energía Potencial.
- 3 .- FUNCIONES DE INTERPOLACION
  - 3.1. - Requisitos de Convergencia.
    - Continuidad y Completez.
    - Isoparametría.
  - 3.2. - Elemento Finito tipo BARRA (lineal).
  - 3.3. - Elemento Finito Tipo VIGA. (lineal).
  - 3.4. - Elemento Finito Triangular Plano (lineal).
  - 3.5. - Elemento Finito Cuadrilátero Plano (isoparamétrico).
  - 3.6. - Elemento Finito Tipo PLACA.
- 4 .- MATRICES ELEMENTALES
  - 4.1. - Elemento Finito Tipo BARRA.
    - 4.1.1. - Método de Galerkin para BARRAS.
    - 4.1.2. - Método de Rayleigh-Ritz para BARRAS.
    - 4.1.3. - Formulación directa.
  - 4.2. - Elemento Finito Tipo VIGA.
    - 4.2.1. - Método de Galerkin para VIGAS.
    - 4.2.2. - Formulación directa.

4.3. - Elementos Bidimensionales.

4.3.1. - Estado Plano de Esfuerzos.

4.3.2. - Estado Plano de Deformaciones.

4.4. - Elemento Finito Triangular Plano.

4.4.1. - Formulación mediante Residuos Pesados.

4.4.2. - Formulación directa.

4.5. - Elemento Finito Cuadrilátero Plano.

4.6. - Elemento Finito Cuadrilátero Isoparamétrico.

4.7. - Elemento Finito Tipo PLACA.

5. - PRESENTACION DEL PROGRAMA "PANES"

Problema 1. - Armadura en el Plano.

Problema 2. - Armadura Tridimensional.

Problema 3. - Marco Plano.

Problema 4. - Marco Tridimensional.

Problema 5. - Reticula Plana.

Problema 6. - Elemento Triangular Plano.

Problema 7. - Elemento Cuadrilátero Plano.

Problema 8. - Elemento Placa.

6. - CONCLUSIONES

7. - REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

8. - APENDICES

Apéndice 1. - Ecuaciones de Equilibrio de la Teoría de la Elasticidad Lineal.

Apéndice 2. - Formulación Variacional con base en la Energía Potencial Mínima.

Apéndice 3. - Transformación de Coordenadas.

Apéndice 4. - Integración Numérica.

Apéndice 5. - Coordenadas Naturales.

## 1.- INTRODUCCION

Tras una etapa en la que el mercado de las computadoras se orientaba hacia la producción de grandes máquinas con memorias centrales de gran capacidad y un complejo sistema de periféricos, razones tecnológicas y económicas han desarrollado el mercado de las mini y micro computadoras, las que por su precio y versatilidad resultan atractivas y asequibles a pequeños despachos de cálculo e incluso a particulares.

La tendencia que en la actualidad se manifiesta es hacia el uso cada vez más generalizado de las llamadas computadoras personales (P.C.), con las cuales se puede evitar la dependencia respecto a centros de cómputo donde se ofrecen los servicios de las grandes computadoras.

El análisis de estructuras empleando el método de los elementos finitos, no resulta viable si no se cuenta con la posibilidad de acceso a computadoras de capacidad razonable y a programas que realicen este tipo de análisis, los cuales, generalmente, requieren de ser conocidos ampliamente para su correcta aplicación. Algunas personas con poca experiencia en el uso del método de los elementos finitos, utilizan como "cajas negras" los programas preparados por otros autores, situación que resulta a todas luces peligrosa al faltar la experiencia y bases teóricas en las etapas de modelación estructural e interpretación de resultados. Emplear de esta manera los programas de elementos finitos no es aconsejable en ningún caso; siendo preferible que el ingeniero posea un conocimiento exacto de lo que hace el programa y

de los algoritmos que emplea, así como una experiencia que le permita detectar errores de bulto, de los que pueden no estar exentos ni aun los programas de mayor difusión y uso.

La situación descrita se puede mejorar mediante la implementación de programas (software) de alcance modesto, y mediante la difusión -que ya se está dando- del uso del método de los elementos finitos en las facultades y escuelas superiores de ingeniería.

Entre los objetivos fundamentales que se pretenden alcanzar con este trabajo, está el de demostrar el alcance que pueden tener en la actualidad las computadoras personales para resolver problemas de ingeniería estructural, mediante el uso del método de los elementos finitos, y su difusión como herramienta de apoyo en la enseñanza del análisis estructural.

Así pues, en el capítulo 2 se presenta la fundamentación teórica del método de los elementos finitos y se indican los pasos a seguir en la aplicación de dicho método a la solución de problemas de equilibrio estático, cuyas ecuaciones están planteadas en el apéndice 1.

Las funciones de interpolación se discuten en el capítulo 3; algunos conceptos de transformación de coordenadas, integración numérica y coordenadas naturales necesarios para la derivación de las matrices de rigideces, se tratan en los apéndices 3, 4 y 5 respectivamente.

Con base en alguna de las formulaciones presentadas en el capítulo 2, en el capítulo 4 se derivan las matrices de rigideces de algunos elementos finitos de utilidad en el análisis estructural: barra, viga, elemento plano y elemento placa.

La descripción del programa de cómputo "PANES", (software desarrollado en este trabajo), se hace en el capítulo 5. Se incluyen algunos ejemplos de aplicación resueltos con el uso de este programa. Los resultados obtenidos se pueden comparar con los de la referencia citada en cada caso.

Finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones.

## 2.- EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

Desde un punto de vista matemático, el concepto fundamental del Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) consiste en que cualquier función continua, definida en un dominio específico, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones definidas en una serie de subdominios, en los cuales estas funciones son continuas y se interconectan entre sí para aproximar la función dada (fig 2.1.).

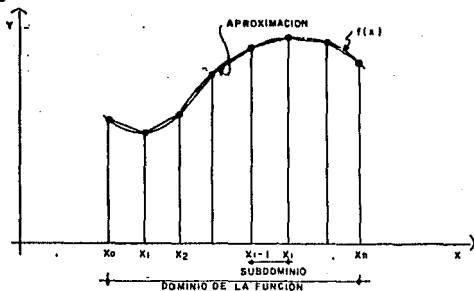


fig. (2.1.). - Aproximación de una función continua a través de una serie de funciones lineales conectadas

Desde un punto de vista ingenieril, la esencia del M.E.F. radica en que para resolver un sistema que representa una estructura real sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de subdivisiones llamadas "elementos", interconectadas en puntos conocidos con el nombre de "nodos" (fig 2.2.). La solución del problema se aproxima en cada elemento con base en relaciones prestablecidas que son función del tipo de elemento usado y del número de nodos en cada uno de ellos. Relaciones de este tipo, unidas a principios básicos que fundamentalmente expresan el equilibrio de una forma integral, nos permiten definir el comportamiento de un elemento de la misma manera que se caracteriza el comportamiento de un elemento de una malla en sistemas discretos convencionales (estructuras de barras, redes de tuberías, circuitos eléctricos, etc.). Una vez definido el comportamiento de un elemento, el establecimiento de relaciones de tipo matricial, válidas para un conjunto de elementos interconectados, se lleva a cabo mediante una operación de suma ordenada o "ensamble" de las contribuciones de cada elemento, en la cual no se diferencia el M.E.F. de otros procedimientos de análisis matricial de sistemas discretos. Así, conocidas la geometría, las propiedades elásticas de los elementos y el sistema de cargas, podemos posteriormente conocer los esfuerzos y deformaciones de la estructura en su conjunto.

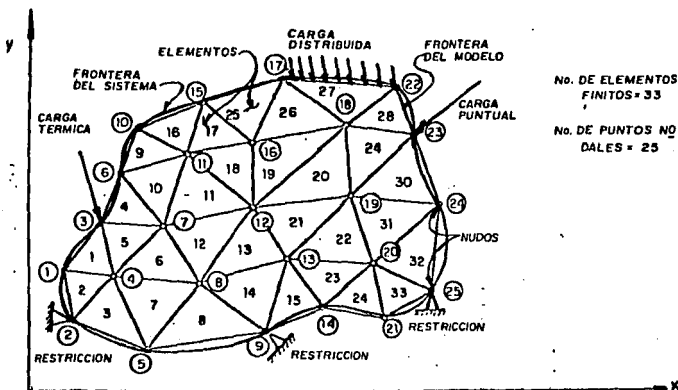


Fig. 2.2.- Sistema de cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones, discretizado con elementos finitos.

En otras palabras, se puede decir que el M.E.F. es una técnica numérica para obtener una aproximación a la solución de un problema que requiere de la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones de frontera y/o iniciales, que definen completamente el problema y de ahí su solución. En el más sencillo de los casos, la ecuación diferencial es ordinaria y lineal, pero puede contener derivadas de orden arbitrario y condiciones de frontera que involucren combinaciones arbitrarias de la función buscada y sus derivadas.



Es importante recordar que la solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en sí es una aproximación discreta del sistema físico, y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real.

La solución del problema se obtiene en los puntos nodales, lo que no impide que ésta se pueda encontrar en cualquier otro punto; basta con relacionar el comportamiento en el interior de cada elemento con el comportamiento de los nodos que integran el elemento, en realidad esta operación es previa a la formulación y básica para el desarrollo del método.

A continuación se describen de manera general los pasos a seguir en la aplicación del M.E.F.:

1).-Discretización del medio continuo.

El dominio de las variables de las ecuaciones diferenciales se subdivide en un número finito de elementos. Esta subdivisión se lleva a cabo mediante el uso de formas convenientes (líneas, triángulos, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, etc.) y con un cierto juicio ingenieril que depende de la solución que se espere obtener y del tipo de elemento disponible; así por ejemplo, en regiones donde la variación de esfuerzos o deformaciones sea mayor, será preciso disponer de un número de elementos suficientemente elevado, o bien, de elementos de orden superior que permitan la caracterización correcta de esta variación (fig.3.1.).

2).-Elección o derivación de las funciones de aproximación.

Mediante la combinación lineal de funciones de aproximación (conocidas) (cap. 3), seleccionadas adecuadamente, y de los valores de las variables (desconocidos), y en algunos casos de sus derivadas, especificados en los puntos nodales seleccionados, se define una aproximación para el comportamiento de la variable en estudio.

3).-Cálculo de las matrices características de cada elemento.

En el análisis estructural, con ayuda de las relaciones esfuerzo-deformación y desplazamiento-deformación en cada elemento (cap.1.), se define la matriz de rigideces del elemento. La obtención de estas matrices elementales suele hacerse mediante el uso de los métodos variacionales o de los residuos pesados (cap. 4), con los que las ecuaciones diferenciales que definen el problema, se transforman en ecuaciones del elemento, que gobiernan en forma aislada a todos los elementos finitos.

4).-Suma ordenada o "ensamble".

Este proceso nos proporciona la "Matriz de Rigideces Global", con la cual se conforma un sistema global de ecuaciones algebraicas (en un problema de valores iniciales), o de ecuaciones diferenciales (en un problema de valores en la frontera e iniciales), con sus propias condiciones de frontera o condiciones iniciales.

5).-Solución del sistema de ecuaciones.

Mediante la solución del sistema de ecuaciones simultáneas considerando las correspondientes condiciones de frontera,

se obtienen los valores de la variable en estudio; desplazamiento, temperatura, presión, etc. En general, los sistemas que se obtienen constan de un número elevado de ecuaciones, sin embargo, suelen ser simétricos y en banda, lo que permite una reducción del almacenamiento necesario y la adopción de métodos eficaces de solución.

6). - Cálculo de las variables asociadas a la solución.

Las funciones de aproximación desarrolladas para cada elemento permiten extender la solución a cualquier punto de su interior. Por otra parte, en ocasiones son necesarias ciertas magnitudes derivadas de la solución fundamental. Así por ejemplo, en la mecánica de sólidos suele ser común utilizar los desplazamientos como incógnitas primarias, para a partir de ellos derivar deformaciones y eventualmente esfuerzos, a partir de las relaciones que ofrece la cinemática de la deformación y las ecuaciones constitutivas del medio (Ap.1.3).

2.1. - Tipos de formulación en un problema de ingeniería

La formulación matemática de problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes; la primera considera el comportamiento de un área o volumen infinitesimal del sistema, y las ecuaciones correspondientes se formulan en forma diferencial, y como el área o volumen considerado es representativo de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de esa región. Un ejemplo de este tipo de formulación es la denominada de "Residuos Pesados".

En la segunda alternativa se postula un principio que englobe la región entera o dominio dado, y consecuentemente, es una formulación en forma integral y la solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Esta formulación es conocida como "Formulación Variacional".

Estas formulaciones han dado origen a la creación de ciertos métodos aproximados para la solución de las ecuaciones de equilibrio (Ap.1. ), las cuales se pueden escribir en forma matricial, como se indica a continuación

$$[L] \{ \phi \} = \{ f \} \quad \text{en } \Omega \quad (2.1.)$$

donde [L] es la matriz de operadores diferenciales.

{  $\phi$  } es el vector cuyas componentes  $\phi_i$  son las funciones incógnitas del problema.

{ f } es el vector de funciones conocidas.

$\Omega$  es el dominio de la variable.

Se puede llegar a la solución buscada  $\hat{\phi}$ , aproximándola mediante la aplicación de funciones de prueba  $\hat{\phi}_i$ , como sigue

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i \quad (2.2.)$$

donde  $N_i$  son las  $m$  funciones de aproximación, conocidas también como funciones de interpolación (cap. 3), linealmente independientes, seleccionadas para satisfacer las condiciones de frontera del elemento.

$\phi_i$  son los valores nodales desconocidos de la variable de campo o sus derivadas.

Los valores nodales desconocidos  $\phi_i$  se pueden determinar ya sea con alguno de los métodos de los residuos pesados, conocidos también como "métodos del error", dentro de los cuales se encuentran el de Galerkin, el de Mínimos Cuadrados y el de Subdominios entre otros, o bien con alguno de los métodos variacionales, como pueden ser el de Rayleigh Ritz, el de Diferencias Finitas, el de Kantorovich o el de Trefftz.

### 2.1.1. - FORMULACION DE LOS RESIDUOS PESADOS

Esta formulación parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del sistema de interés (ec. 2.1.), la cual se puede escribir escalarmente por facilidad y para fines de ilustración como sigue

$$\mathcal{L} - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.3.)$$

Si sustituimos el valor aproximado de  $\hat{u}(\hat{x})$  (ec. 2.2.), en la ec. 2.3., tendremos un error o residuo "e", dado por

$$e = \mathcal{L} \hat{u} - f \quad (2.4.)$$

Los coeficientes  $\phi_i$  de la solución aproximada (ec. 2.2.), se calculan de tal manera que, el error dado por la ec. 2.4. sea mínimo o pequeño en algún contexto.

El error se puede evaluar en puntos discretos (nodos), e igualar la solución a cero para minimizar el error, esto es

$$\int_{\Omega} e \, d\Omega = 0 \quad (2.5.)$$

Una mejor solución sería la de distribuir  $e$  sobre una región de acuerdo a alguna función de peso  $W$  de las coordenadas nodales antes de la integración, es decir, la función de los residuos  $e$  es pesada con la función de peso  $W$  al hacer  $\langle W, e \rangle$ . Este producto escalar de funciones representa la proyección del error sobre la función de peso, proyección que debe cumplir con

$$\langle W, e \rangle = \int_{\Omega} W \cdot e \, d\Omega = W (\mathcal{L} \hat{u} - f) = 0 \quad (2.6.)$$

Integral que representa un promedio pesado del error repartido en el intervalo considerado.

La evaluación de esta integral de residuos pesados, para operadores lineales (que es el caso de la teoría de elasticidad lineal), conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, cuya solución proporciona los valores nodales desconocidos.

### Método de GALERKIN

El método de Galerkin consiste en hacer el error  $e$ , ortogonal a las funciones de aproximación en el dominio de la estructura, es decir  $W_i=N_i$ ; las funciones de peso serán las funciones de aproximación, como se indica a continuación

$$\int_{\Omega} N_i \cdot e \, d\Omega = 0 \quad (2.7.)$$

Este es el método que generalmente da la mejor aproximación y el que recibe mayor uso.

### Método de Colocación

La función de impulso  $\delta(X-X_i)$  es la seleccionada como función de peso. Esta selección equivale a hacer que el residuo sea nulo en algunos puntos específicos  $X_i$ , tantos como coeficientes indeterminados haya en la solución aproximada.

$$\int_{\Omega} \delta(X-X_i) \cdot e \, d\Omega = 0 \quad (2.8.)$$

### Método de Subdominios

Se selecciona una función de peso unitaria  $W = 1$  sobre una región específica. Esto equivale a que la integral del residuo sea nula sobre el intervalo de la región. El número de intervalos de integración es igual al número de coeficientes indeterminados en la solución aproximada.

$$\int_{\Omega} W \cdot e \, d\Omega = 0 \quad (2.9.)$$

### Método de Mínimos Cuadrados

Este método utiliza el residuo como función de peso obteniéndose un nuevo error como

$$E_r = \int_{\Omega} e \cdot e \, d\Omega = 0 \quad (2.10.)$$

Este error se minimiza con respecto a los coeficientes desconocidos en la solución aproximada.

Como se observa, todos estos métodos involucran una integral de residuos pesados, cuya evaluación da origen a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los valores de la variable de campo en los puntos nodales.

2.1.2.- FORMULACION VARIACIONAL .

El problema clásico del cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un "funcional", el cual es una función de funciones, y se representa como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada. Para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente conduzca a un valor extremo, es decir, a un mínimo o un máximo.

A continuación se presentan algunos conceptos relacionados con el cálculo de variaciones que servirán para describir la formulación variacional del M.E.F.

Sea  $\Pi$  el funcional definido por

$$\Pi = \int_{\Omega} F(x, y, y') dx \quad (2.11.)$$

donde  $y = Y(x)$  ;  $y' = \frac{d Y(x)}{dx}$  (2.12.)

Cada función  $F(x, y, y')$  que sea sustituida en esta ecuación conduce a un valor numérico diferente de  $\Pi$  ; aquella función  $F(x, y, y')$  que resulte en un valor mínimo o máximo, hace que el funcional  $\Pi$  tenga un valor estacionario. Cabe aquí pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebraica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como  $Y = f(x)$ , ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea derivable dos veces en dicho rango y que además, la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero, esto es

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2.13.)$$

De esta manera se obtiene un valor de la variable independiente para el cual la función  $f(x)$  es estacionaria. Así, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independiente, más cuando se extremiza un funcional se encuentra una función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero, es decir

$$\delta \Pi = \delta \int_{\Omega} F(x, y, y') dx = 0 \quad (2.14.)$$

donde  $\delta$  es el operador variacional. Esta condición es análoga a la condición de la ec. 2.13. y equivalente a cumplir con la condición de estacionaridad de una integral mediante

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.15.)$$

Cabe recordar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores máximos o mínimos de una función en el cálculo diferencial, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{\omega_0} F(x, y, y') dx = \int_{\omega_1} F(x, y, y') dx + \int_{\omega_2} F(x, y, y') dx + \dots + \int_{\omega_n} F(x, y, y') dx \quad (2.16.)$$

o bien

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \dots + \Pi_n \quad (2.17.)$$

El concepto de discretizar la integral de la ec. 2.11. puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de subdominios (elementos), a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica, etc.) para la función  $Y(x)$  en cada integral, es decir, en cada elemento. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Así, la integral total  $\Pi$  es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ec. 2.14. se satisface de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} = 0 \quad (2.18.)$$

donde las  $\phi_i$ 's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al sustituir la función  $y(x)$  por una aproximación polinomial  $Y(x) \cong \phi_1 x + \phi_2 x^2 + \dots$  el problema se reduce a encontrar los coeficientes de los polinomios usados en la aproximación. La solución directa de la ec. 2.11. sujeta a las condiciones de la ec. 2.12. puede ser bastante complicada, sin embargo, el problema se puede formular mediante la ec. 2.18., en donde al sustituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebraicamente.

#### Método de RAYLEIGH-RITZ.

De todos los métodos variacionales (diferencias finitas, Kantorovich, Trefftz, etc.) el que actualmente tiene mayor aplicación en la solución de problemas ingenieriles, es el método de Rayleigh-Ritz. Este método consiste en asumir la forma de la solución desconocida en términos de funciones conocidas llamadas "funciones de prueba" (ec. 2.2.), el procedimiento es sustituir directamente estas funciones de prueba en el funcional y diferenciarlo con respecto a cada uno de los parámetros que intervienen ( $\phi_i$ ) y se aplica la condición de extremo igualando la ecuación a cero como se indica a continuación.

$$\frac{\partial \Pi(\phi_i)}{\partial \phi_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.19.)$$

Si hay  $n$  parámetros desconocidos, habrá  $n$  ecuaciones simultáneas por resolver. Esto significa que la solución aproximada es extraída de la familia de funciones de prueba asumidas. El

procedimiento no hace mas que darnos la mejor solución de la familia de soluciones asumidas, por lo que claramente se vé que la precisión de la aproximación dependerá de la elección de dichas funciones.

En resumen, el procedimiento para encontrar las matrices de rigideces por medio del método variacional, consiste en establecer un funcional y encontrar sus valores extremos.

En la mecánica estructural, el ejemplo clásico de un funcional es el de la Energía Potencial de cuerpos elásticos, la que se define como la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo deformado, menos el trabajo realizado por las cargas que actúan en él a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicación de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$\Pi = U - \Psi \quad (2.20.)$$

en donde  $\Pi$  = Energía potencial  
 $U$  = Energía de deformación interna  
 $\Psi$  = Trabajo de las cargas aplicadas

Dentro del contexto del cálculo de variaciones, a esta ecuación es a la que se tendría que encontrar su valor extremo, sin embargo, también se le puede encontrar un sentido físico si se recuerda el principio de la Energía Potencial Mínima: "De todas las posibles configuraciones que la estructura pueda adoptar, aquella que conduzca a un valor mínimo a la energía potencial nos da la configuración de equilibrio".

En el apéndice 2 se presenta una formulación variacional con base en la Energía Potencial Mínima.

### 3.- FUNCIONES DE INTERPOLACION

En la literatura de elementos finitos, las funciones usadas para representar el comportamiento de una variable de campo dentro de un elemento son llamadas funciones de interpolación, funciones de forma, o funciones de aproximación. Aun cuando muchos tipos de funciones pueden servir como funciones de interpolación, solo las polinómicas han recibido un uso generalizado, y la razón es que estas funciones pueden ser integradas o diferenciadas sin mucho problema.

La selección de las funciones de interpolación juega un papel muy importante para la correcta aplicación del M.E.F. ya que estas deben cumplir con ciertos requisitos para que se logre la convergencia de la solución aproximada a la solución exacta de la ecuación diferencial en cuestión.

#### 3.1.- Requisitos de convergencia

i) *Continuidad* .- Es necesario escoger funciones continuas como modelos de interpolación (continuidad dentro del elemento). Además, la variable de campo y sus derivadas parciales hasta de un orden mejor que la derivada de mayor orden que aparezca en el funcional deben ser continuas en las fronteras o interfaces de los elementos (continuidad entre elementos).

ii) *Completez* .- Todos los estados uniformes de la variable de campo y sus derivadas parciales hasta la de mayor orden que aparezca en el funcional, deben tener representación en la interpolación polinomial cuando, en el límite, el tamaño del



elemento se reduce a corp. En el caso de mecánica estructural esto se refiere a que el modelo de desplazamientos asumido debe permitir un campo de desplazamientos constante (cuerpo rígido) y un estado de deformación constante. Un polinomio es completo hasta el grado  $n$  cuando contiene a todos los términos que representan a los polinomios de grados menores incluyendo el de grado  $n$

La interpolación en elementos finitos se caracteriza por la forma del elemento y por el orden de aproximación. En general, la selección de un elemento finito depende de:

- a) la geometría del dominio global
- b) el grado de aproximación deseado
- c) la facilidad de integración sobre el dominio del elemento.

En lo referente al inciso a), podemos decir que el dominio global donde se desea resolver el problema puede ser unidimensional, bidimensional o tridimensional (fig.3.1.), aunque en el presente trabajo sólo trataremos con los dos primeros.

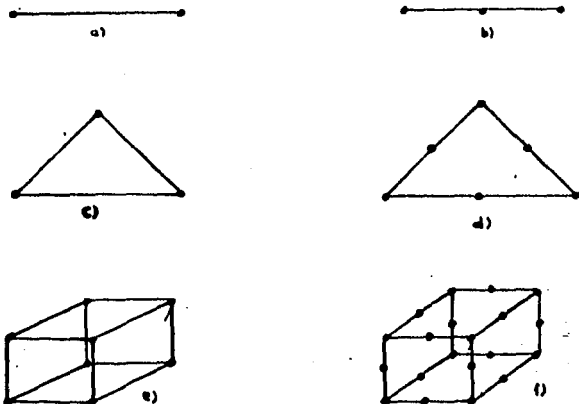


Fig. 3.1. Ejemplos de Elementos Finitos. a) Unidimensional lineal, b) Unidimensional cuadrático, c) Bidimensionales lineales, d) Bidimensionales cuadráticos, e) Tridimensional lineal, f) Tridimensional cuadrático.

Como ejemplos típicos de elementos unidimensionales en el análisis estructural se tienen el elemento barra y el elemento viga, los cuales constituyen a las armaduras y a los marcos respectivamente, estructuras que a su vez pueden ser planas o espaciales. Como ejemplos de elementos bidimensionales podemos mencionar a los llamados elementos planos (triangulares o cuadriláteros) que tienen una aplicación en la representación de los estados planos de esfuerzos y/o deformaciones (cap 4.3); otro ejemplo de elemento bidimensional es el elemento placa.

En una dimensión, un polinomio general completo se puede escribir como:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (3.1.1.)$$

donde los  $a_i$  son los coeficientes indeterminados y el número de términos en el polinomio se calcula con  $T_n=n+1$ . Se observa que para  $n=1$  tendremos variación lineal, para  $n=2$  una variación cuadrática y así sucesivamente.

En dos dimensiones, un polinomio completo de  $n$ ésimo orden se puede escribir como:

$$P_n(x,y) = \sum_{k=1}^n a_k x^i y^j \quad i+j \leq n \quad (3.1.2.)$$

donde el número de términos en el polinomio es :  $T_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Una forma conveniente para ilustrar los términos de un polinomio bidimensional es con el triángulo de Pascal (fig.3.1.), donde se puede apreciar que la suma de los exponentes de cada término en este arreglo triangular, es el correspondiente número en el bien conocido triángulo de Pascal de coeficientes binomiales.

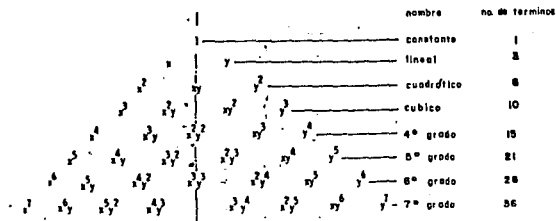


fig. 3.2. Arreglo de términos de un polinomio completo en dos dimensiones

Por lo que respecta al inciso b) podemos decir que las funciones de interpolación son polinomios de varios grados (aunque también se pueden utilizar productos de polinomios con funciones exponenciales o trigonométricas). Si se utilizan polinomios lineales, únicamente se requieren los puntos nodales de las esquinas de los elementos finitos (fig.3.1.a,c,e.); mientras que si se desean polinomios cuadráticos, se deben adicionar puntos nodales en las fronteras de los elementos (fig.3.1.b,d,f.). Desde luego que se pueden utilizar aproximaciones con polinomios de orden superior, pero se requiere adicionar puntos nodales. Además, a menudo se pueden emplear suficientes elementos de bajo orden para lograr el mismo grado de precisión en los resultados

finales. Los elementos de alto orden son especialmente usados en aquellos casos en donde se espera que la variable de campo cambie rápidamente, o bien, en problemas que involucran fronteras curvas los cuales no se pueden resolver satisfactoriamente con el uso de elementos con lados rectos. Para esto último se ha desarrollado la llamada familia de elementos "isoparamétricos", cuyo principio básico es usar la misma función de interpolación para definir la geometría del elemento que para la variable de campo dentro del elemento. Para derivar las ecuaciones de elementos isoparamétricos es necesario primero introducir un sistema de coordenadas naturales y representar la geometría en términos de funciones de forma no lineales (cap. 4. ), artificio que puede ser considerado como un procedimiento de mapeo mediante el cual se transforma una forma regular como puede ser un triángulo o rectángulo de lados rectos en un sistema coordenado local  $(\xi, \eta)$  a una forma distorsionada en un sistema de coordenadas cartesianas global  $(x, y)$ , (fig. 3.3.), (cap. 3.).

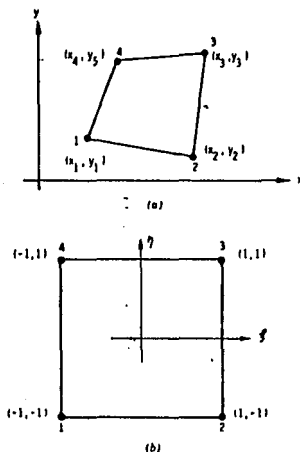


Fig. 3.3. a) Coordenadas globales. b) Coordenadas locales.

A continuación se derivan las funciones de interpolación de los diferentes elementos finitos que se presentarán en el siguiente capítulo.

3.2.- Elemento Finito Tipo BARRA de dos nodos (lineal)

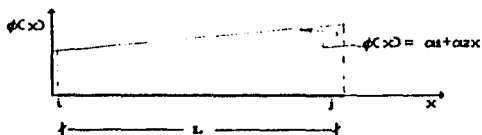


fig. 3.2.1. Elemento tipo barra con aproximación mediante un polinomio lineal

Con la función  $\phi(x) = a_1 + a_2x$  expresada en función de los valores de la variable de campo  $a$  en los puntos nodales  $i$  y  $j$ , podemos plantear un sistema de dos ecs. con dos incógnitas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi(x=x_i) &= \phi_i = a_1 + a_2x_i \\ \phi(x=x_j) &= \phi_j = a_1 + a_2x_j \end{aligned} \quad (3.2.1.)$$

acomodando matricialmente

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (3.2.2.)$$

resolviendo el sistema se llega a

$$a_1 = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L} \quad (3.2.3.)$$

$$a_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{L}$$

sustituyendo  $a_1$  y  $a_2$  en la ec. 3.2.1. se obtiene

$$\phi(x) = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L} + \frac{\phi_j - \phi_i}{L} x \quad (3.2.4.)$$

Factorizando a  $\phi_i$  y  $\phi_j$

$$\phi(x) = \phi_i \left[ \frac{x_j}{L} - \frac{x}{L} \right] + \phi_j \left[ \frac{x}{L} - \frac{x_i}{L} \right] \quad (3.2.5.)$$

agrupando términos

$$\phi(x) = \left[ \frac{x_j - x}{L} \right] \phi_i + \left[ \frac{x - x_i}{L} \right] \phi_j \quad (3.2.6.)$$

o bien

$$\phi(x) = [N_i(x)] \phi_i + [N_j(x)] \phi_j \quad (3.2.7.)$$

donde

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{L} \quad ; \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{L} \quad (3.2.8.)$$

son las funciones de interpolación del elemento barra, para las cuales se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} N_i(x=x_i) &= 1 & ; & & N_i(x=x_j) &= 0 \\ N_j(x=x_i) &= 0 & ; & & N_j(x=x_j) &= 1 \end{aligned} \quad (3.2.9.)$$

graficamente se tiene

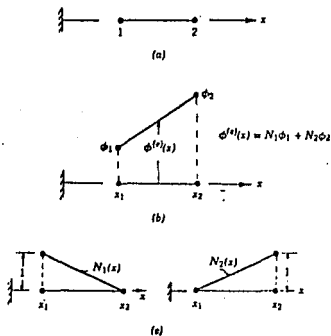


fig. 3.2.2. Representación de la variable de campo sobre un elemento unidimensional. a) Elemento unidimensional lineal. b) Variación de  $\phi(x)$  sobre el elemento. c) Funciones de interpolación lineal para  $\phi(x)$ .

3.3. - Elemento Finito Tipo VIGA de dos nodos (lineal)

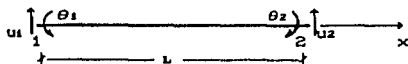


fig. 3.3.1. Elemento Finito tipo viga con aproximación lineal

Si suponemos dos grados de libertad por nodo (desplazamiento y giro), podemos escribir la función de campo como:

$$U = N_1 U_1 + N_2 \theta_1 + N_3 U_2 + N_4 \theta_2 \quad (3.3.1.)$$

donde las  $N_i$  ( $i=1,2,3,4$ ), son las funciones de interpolación requeridas para lograr la aproximación que en este caso se puede representar mediante el siguiente polinomio

$$N_i = A_1 + A_2 X + A_3 X^2 + A_4 X^3 \quad (3.3.2.)$$

Planteando la ec. anterior para  $i = 1$

$$N_1 = A_1 + A_2 X + A_3 X^2 + A_4 X^3 \quad (3.3.3.)$$

Las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 & \text{para} & X = 0 \\ N_1 &= 0 & \text{para} & X = L \\ \frac{dN}{dX} &= N_1' = 0 & \text{para} & X = 0 \\ \frac{dN}{dX} &= N_1' = 0 & \text{para} & X = L \end{aligned} \quad (3.3.4.)$$

donde se puede plantear un sistema de  $4 \times 4$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 (0) + A_3 (0)^2 + A_4 (0)^3 &= 1 \\ A_2 (0) + 2A_3 (0) + 3A_4 (0) &= 0 \\ A_1 + A_2 (L) + A_3 (L)^2 + A_4 (L)^3 &= 0 \\ A_2 (L) + 2A_3 (L) + 3A_4 (L)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.5.)$$

de la 1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup> ec. del sistema, se deducen respectivamente

$$A_1 = 1 \quad \text{y} \quad A_2 = 0 \quad (3.3.6.)$$

y al sustituir estos valores en las otras dos ecs. del sistema y haciendo las operaciones se obtienen

$$A_3 = -\frac{3}{L^2} \quad ; \quad A_4 = \frac{2}{L^3} \quad (3.3.7.)$$

ahora si sustituimos los valores de estos cuatro coeficientes en la ec. 3.3.3. nos queda

$$N_1 = 1 - \frac{3X^2}{L^2} + \frac{2X^3}{L^3} \quad (3.3.8.)$$

Realizando un procedimiento similar para  $N_2$ ,  $N_3$  y  $N_4$  se llega a:

$$N_2 = X - \frac{2X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{3X^2}{L^2} - \frac{2X^3}{L^3} \quad (3.3.9.)$$

$$N_4 = -\frac{X^2}{L} + \frac{X^3}{L^2}$$

3.4.- Elemento Finito Triangular Plano (lineal)

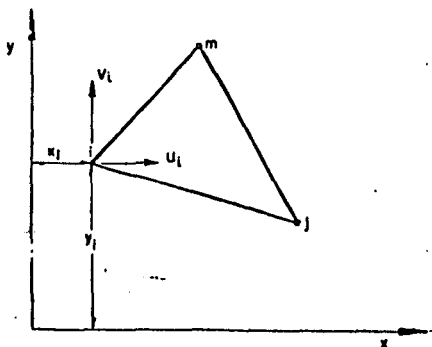


fig. 3.4.1. Elemento Finito Triangular plano lineal con dos grados de libertad por nodo

En este caso se consideran los nudos i,j,k, del triángulo con dos grados de libertad por nudo u, v, (desplazamientos en X y Y), para el cual se puede emplear la siguiente ecuación de campo.

$$U = N_i U_i + N_j U_j + N_k U_k \quad (3.4.1.)$$

La aproximación polinómica más sencilla es:

$$U = U(X,Y) = a_1 + a_2 X + a_3 Y \quad (3.4.2.)$$

que aplicada a los tres puntos nodales se escribe como

$$\begin{aligned} U(X=X_i, Y=Y_i) &= U_i = a_1 + a_2 X_i + a_3 Y_i \\ U(X=X_j, Y=Y_j) &= U_j = a_1 + a_2 X_j + a_3 Y_j \\ U(X=X_k, Y=Y_k) &= U_k = a_1 + a_2 X_k + a_3 Y_k \end{aligned} \quad (3.4.3.)$$

y que en forma matricial representa un sistema de ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4.4.)$$

sistema que al ser resuelto nos proporciona



$$a_i = \frac{1}{2A} (a_i U_i + a_j U_j + a_k U_k)$$

$$a_j = \frac{1}{2A} (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k) \quad (3.4.8.)$$

$$a_k = \frac{1}{2A} (c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k)$$

donde

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} \quad (3.4.8.)$$

es el área del triángulo  $ijk$

$$\begin{aligned} a_i &= X_j Y_k - X_k Y_j & ; & & b_i &= Y_j - Y_k & ; & & c_i &= X_k - X_j \\ a_j &= X_k Y_i - X_i Y_k & ; & & b_j &= Y_k - Y_i & ; & & c_j &= X_i - X_k \\ a_k &= X_i Y_j - X_j Y_i & ; & & b_k &= Y_i - Y_j & ; & & c_k &= X_j - X_i \end{aligned} \quad (3.4.7.)$$

si sustituimos estos valores en la ec. 3.4.2. se obtiene

$$\phi(X, Y) = \frac{1}{2A} (a_i U_i + a_j U_j + a_k U_k) + \frac{1}{2A} (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k) X + \frac{1}{2A} (c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k) Y \quad (3.4.8.)$$

acomodando términos

$$\phi(X, Y) = \frac{1}{2A} \left\{ (a_i + b_i X + c_i Y) U_i + (a_j + b_j X + c_j Y) U_j + (a_k + b_k X + c_k Y) U_k \right\} \quad (3.4.9.)$$

o bien, puesto de otra forma

$$\phi(X, Y) = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (3.4.10.)$$

Así pues las funciones de interpolación quedan definidas como

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i X + c_i Y)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j X + c_j Y) \quad (3.4.11.)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k X + c_k Y)$$

3.B. - Elemento Finito Rectangular Plano (isoparamétrico lineal)

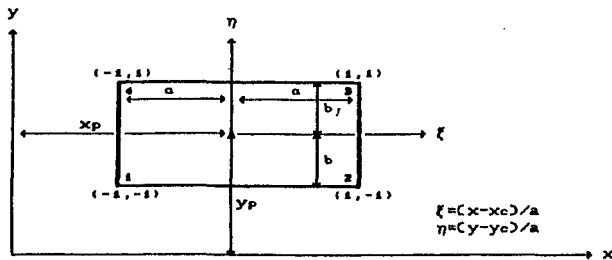


fig. 3.B.1. Elemento plano rectangular mostrando la relación entre coordenadas locales y globales

Con base en la figura anterior podemos representar las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$  como

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad , \quad \eta = \frac{y - y_c}{b} \quad (3.B.1.)$$

En este caso la función de campo será

$$U(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta \quad (3.B.2.)$$

sustituyendo para 1, 2, 3, 4

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_1 + \alpha_2(-1) + \alpha_3(1) + \alpha_4(-1)(1) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ U_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ U_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ U_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \end{aligned} \quad (3.B.3.)$$

resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} (-U_1 + U_2 + U_3 + U_4) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} (-U_1 - U_2 + U_3 + U_4) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{4} (U_1 - U_2 + U_3 - U_4) \end{aligned} \quad (3.B.4.)$$

sustituyendo estos valores en la ec. 3.5.2.

$$\begin{aligned}
 UC(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (U_1+U_2+U_3+U_4) + \frac{1}{4} (-U_1+U_2+U_3+U_4)\xi + \\
 &\quad \frac{1}{4} (-U_1-U_2+U_3+U_4)\eta + \frac{1}{4} (U_1-U_2+U_3-U_4)\xi\eta \quad (3.5.5.)
 \end{aligned}$$

agrupando términos y realizando operaciones se llega a

$$UC(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)U_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)U_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)U_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)U_4 \quad (3.5.6.)$$

O bien

$$UC(\xi, \eta) = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 + N_4 U_4 \quad (3.5.7.)$$

con lo que podemos concluir representando las funciones de forma ó de interpolación como

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) & ; & & N_3 &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta) & ; & & N_4 &= \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned} \quad (3.5.8.)$$

3.6.- Elemento Finito Tipo PLACA (rectangular lineal).

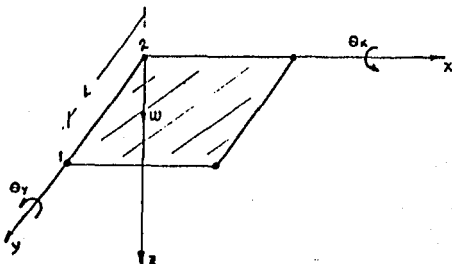


fig. 3.6.1. Elemento Finito tipo PLACA de cuatro nodos y con tres grados de libertad por nodo ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $v$ ).

A continuación se plantea un procedimiento directo basado en una expresión polinomial 3.6.1., para definir las funciones de forma de este elemento en términos de sus grados de libertad. Ciertos términos del polinomio completo de cuarto orden se han omitido en forma simétrica, así

$$U = a_1 + a_2X + a_3Y + a_4X^2 + a_5XY + a_6Y^2 + a_7X^3 + a_8X^2Y + a_9XY^2 + a_{10}Y^3 + a_{11}X^3Y + a_{12}XY^3 \quad (3.6.1.)$$

tomando un lado (1-2) del elemento rectangular y colocando el eje "y" a lo largo de ese lado (fig.3.6.1.); podemos calcular U,  $\theta_x$  y  $\theta_y$  en los nodos 1 y 2, recordando que

$$\theta_x = \frac{\partial U}{\partial X} \quad ; \quad \theta_y = - \frac{\partial U}{\partial X} \quad (3.6.2.)$$

expresamos las coordenadas nodales en el nodo i como sigue

$$\begin{pmatrix} U_i \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & X_i^2 & X_iY_i & Y_i^2 & X_i^3 & X_i^2Y_i & X_iY_i^2 & Y_i^3 & X_i^3Y_i & X_iY_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_i & 2Y_i & 0 & X_i^2 & 2X_iY_i & 3Y_i^2 & X_i^3 & 3X_iY_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2X_i & -Y_i & 0 & -3X_i^2 & -2X_iY_i & -Y_i^2 & 0 & -3X_i^2Y_i & -Y_i^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad (3.6.3.)$$

procediendo de forma similar para los nodos j, k, l, podemos llegar a la siguiente relación

$$\langle d \rangle = [ A ] \langle \alpha \rangle \quad (3.6.4.)$$

donde

$$[ A ] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & X_i^2 & X_i Y_i & Y_i^2 & X_i^3 & X_i^2 Y_i & X_i Y_i^2 & Y_i^3 & X_i^3 Y_i & X_i Y_i^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_i & 2Y_i & 0 & X_i^2 & 2X_i Y_i & 3Y_i^2 & X_i^3 & 3X_i Y_i^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2X_i & -Y_i & 0 & -3X_i^2 & -2X_i Y_i & -Y_i^2 & 0 & -3X_i^2 Y_i & -Y_i^3 \\ 1 & X_j & Y_j & X_j^2 & X_j Y_j & Y_j^2 & X_j^3 & X_j^2 Y_j & X_j Y_j^2 & Y_j^3 & X_j^3 Y_j & X_j Y_j^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_j & 2Y_j & 0 & X_j^2 & 2X_j Y_j & 3Y_j^2 & X_j^3 & 3X_j Y_j^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2X_j & -Y_j & 0 & -3X_j^2 & -2X_j Y_j & -Y_j^2 & 0 & -3X_j^2 Y_j & -Y_j^3 \\ 1 & X_k & Y_k & X_k^2 & X_k Y_k & Y_k^2 & X_k^3 & X_k^2 Y_k & X_k Y_k^2 & Y_k^3 & X_k^3 Y_k & X_k Y_k^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X_k & 2Y_k & 0 & X_k^2 & 2X_k Y_k & 3Y_k^2 & X_k^3 & 3X_k Y_k^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2X_k & -Y_k & 0 & -3X_k^2 & -2X_k Y_k & -Y_k^2 & 0 & -3X_k^2 Y_k & -Y_k^3 \end{bmatrix}$$

(3.6.5.)

resolviendo el sistema de ecuaciones para las constantes  $\alpha$  invirtiendo la matriz  $[ A ]$  mediante la siguiente expresión

$$\langle \alpha \rangle = [ A ]^{-1} \langle d \rangle \quad (3.6.6.)$$

para obtener la matriz de funciones de interpolación notamos que

$$U = [ N ] \langle d \rangle = [ N ] [ A ] \langle \alpha \rangle \quad (3.6.7.)$$

viendo la ecuación polinomial 3.6.1. también vemos que

$$U = [ 1, X, Y, X^2, XY, Y^2, X^3, (X^2 Y + X Y^2), Y^3 ] \langle \alpha \rangle \quad (3.6.8.)$$

denotando la primera matriz del lado derecho como  $[ C ]$  se tendrá de las ecuaciones anteriores que

$$[ C ] = [ N ] [ A ] \quad (3.6.9.)$$

y por lo tanto

$$[ N ] = [ C ] [ A ]^{-1} \quad (3.6.10.)$$

## 4.- MATRICES ELEMENTALES

Con el objeto de ilustrar la aplicación de las formulaciones presentadas en el capítulo 2, y empleando los conceptos de interpolación discutidos en el capítulo anterior, a continuación se derivan algunas matrices de rigideces de elementos finitos de utilidad en la solución de problemas de análisis estructural.

### 4.1.- Elemento BARRA

Se considera como elemento tipo barra o armadura aquél elemento recto que solamente admite deformaciones en el sentido de su eje longitudinal. Para este tipo de elementos, dependiendo de si se trata de una armadura plana o espacial, se tendrán dos o tres grados de libertad, por nodo.

Consideremos una sección diferencial de una barra (fig.4.1.);

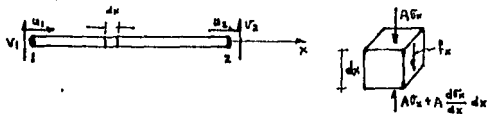


fig. 4.1.1. Sección diferencial de una barra.

planteando el equilibrio de fuerzas, se tiene que:

$$A\sigma_x - A\sigma_x + A \frac{d\sigma_x}{dx} dx = f \neq 0 \quad (4.1.1.)$$

donde  $A$  es el área de la sección  
 $\sigma_x$  es el esfuerzo en dirección  $x$   
 $f$  es la fuerza axial en el sentido longitudinal de la barra  
 $u$  es un desplazamiento en el sentido longitudinal

De la relación esfuerzo-deformación expresada como

$$\sigma = E \xi \quad (4.1.2.)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material,  
 $\xi$  es la deformación producida

y sabiendo que la deformación es la derivada del desplazamiento, podemos escribir

$$\sigma = E \frac{du}{dx} \quad (4.1.3.)$$

y su derivada como

$$\frac{d\sigma}{dx} = E \frac{d^2u}{dx^2} \quad (4.1.4.)$$

Al sustituir esta expresión en la ec. 4.1.1. para el equilibrio de fuerzas se tiene

$$E A \frac{d^2u}{dx^2} = f \quad (4.1.5.)$$

Si se supone que la fuerza actuante  $f$  es nula, obtenemos la ecuación diferencial que gobierna el problema expresada como

$$E A \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (4.1.6.)$$

#### 4.1.1.- Método de Galerkin para BARRAS

Para un estado unidimensional, en el capítulo anterior se derivó la siguiente expresión para aproximar la solución

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (4.1.7.)$$

sustituyendo esta en la ec. 4.1.6. se tiene

$$E A \frac{d^2u}{dx^2} = e \neq 0 = \text{error} \quad (4.1.8.)$$

Pesando el error

$$\int_x e \cdot W_i dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_x \left[ EA \frac{d^2}{dx^2} \right] \cdot W_i dx = 0 \quad (4.1.9.)$$

Aplicando a esta expresión el método de Galerkin (CN1=N1), se obtiene

$$\int_0^L \left[ E A \frac{d^2 u}{dx^2} \right] \cdot N_i dx = 0 \quad (4.1.10.)$$

ecuación que al integrar por partes conduce a

$$A \left[ \int \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dy} dx \right] u_1 + EA \left[ \int \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx \right] u_2 = EA \frac{dN_1}{dx} N_1 \quad (4.1.11.)$$

$$A \left[ \int \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx \right] u_1 + EA \left[ \int \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx \right] u_2 = EA \frac{dN_2}{dx} N_2$$

Del capítulo 3, sabemos que las funciones de interpolación y su correspondiente derivada se escriben como:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} & ; & \quad \frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{L} \\ N_2 &= \frac{x}{L} & ; & \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (4.12.)$$

sustituyendo estas en las ecs. 4.1.11. queda

$$EA \left[ \int_0^L \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} dx \right] u_1 + EA \left[ \int_0^L \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} dx \right] u_2 = EA \left[ \frac{dN_1}{dx} N_1 \right]_0^L \quad (4.1.13.)$$

$$EA \left[ \int_0^L \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} dx \right] u_1 + EA \left[ \int_0^L \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} dx \right] u_2 = EA \left[ \frac{dN_2}{dx} N_2 \right]_0^L$$

Expresión que de manera matricial podemos escribir como

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} N_1 \\ \frac{dN_2}{dx} N_2 \end{bmatrix} = EA \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01} \\ A_{02} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.14.)$$

o bien:

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (4.1.15.)$$

Así, la matriz de rigideces para elementos barra queda definida como

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.16.)$$



4.1.2. - Método de Rayleigh-Ritz para BARRAS.

La energía del sistema se puede expresar con

$$U = \frac{1}{2} \int_x \sigma \epsilon \, dx \quad (4.1.17.)$$

donde  $\sigma = E \epsilon \quad (4.1.18.)$

y  $\epsilon = \frac{du}{dx} \quad (4.1.19.)$

de la ec. 2.2. se sabe que las funciones de prueba son

$$\phi = \tilde{\phi}(x) = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (4.1.20.)$$

o bien

$$U = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (4.1.21.)$$

escogiendo las funciones de interpolación ya definidas como

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad ; \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (4.1.22.)$$

y sustituyéndolas en la ec. 4.1.21. obtenemos

$$U = \left( 1 - \frac{x}{L} \right) u_1 + \left( \frac{x}{L} \right) u_2 \quad (4.1.23.)$$

y a su vez esta expresión en la ec. 4.1.19.

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} = \left( -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.24.)$$

Sustituyendo la ec. 4.1.18. en la ec. 4.1.17.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon \, dv = \frac{1}{2} \int_v E \epsilon \epsilon \, da \, dx \quad (4.1.28.)$$

así que

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \epsilon \epsilon \, dx = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \left( -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} dx \quad (4.1.29.)$$

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{u_1^2}{L^2} - \frac{2u_1 u_2}{L^2} + \frac{u_2^2}{L^2} \right) dx = \frac{EA}{2} \left( \frac{u_1^2}{L^2} - \frac{2u_1 u_2}{L^2} + \frac{u_2^2}{L^2} \right) \int_0^L dx \quad (4.1.30.)$$

y finalmente obtenemos la función de aproximación escrita como

$$U = \frac{EA}{2L} \left( u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2 \right) \quad (4.1.31.)$$

Aplicando el método de Rayleigh-Ritz

$$\frac{\partial U}{\partial u_1} = \frac{2EA}{2L} u_1 - \frac{2EA}{2L} u_2 = \frac{EA}{L} (u_1 - u_2) \quad (4.1.32.)$$

$$\frac{\partial U}{\partial u_2} = -\frac{EA}{2L} (-2u_1) + \frac{2EA}{2L} (2u_2) = \frac{EA}{L} (-u_1 + u_2)$$

acomodando estas ecs. en forma matricial se llega a

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.33.)$$

o bien

$$[K] \langle u \rangle = \langle P \rangle \quad (4.1.34.)$$

#### 4.1.3. - Elemento BARRA, Formulación Directa

El campo de desplazamientos se aproxima con

$$\langle U \rangle = [ N ] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.35.)$$

o bien

$$U = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (4.1.36.)$$

por otro lado sabemos que

$$[ B ] = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4.1.37.)$$

o de otra forma

$$\frac{U}{x} = \left\{ \frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [ B ] \langle U \rangle \quad (4.1.38.)$$

Para obtener la matriz de rigideces del elemento, la matriz [ B ] se puede sustituir en la siguiente ecuación (ec. A.2.25.)

$$[ K ] = \int_0^L [ B ]^T [ D ] [ B ] A dx \quad (4.1.39.)$$

donde la matriz [ D ], para el caso que nos ocupa, es [ D ] = E (ec. 4.1.3.) y A es el área de la sección transversal. Al sustituir las ecs. 4.1.38. y 4.1.3. en la ecuación anterior se obtiene

$$[ K ] = A \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] dx \quad (4.1.40.)$$

$$[ K ] = AE \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \int_0^L dx \quad (4.1.41.)$$

$$[ K ] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.42.)$$

que es la misma matriz que se obtuvo empleando el método de Galerkin y que caracteriza a un elemento barra.

#### 4.2. - Elemento Finito Tipo VIGA

Este tipo de elemento es el que constituye a los marcos y a las retículas y puede aceptar fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos en los extremos del elemento en dos o tres direcciones dependiendo de si se trata de un análisis en el plano o en el espacio.



Fig. 4.2.1. Elemento finito tipo viga con aproximación lineal

Como se observa en la figura, ahora el campo de desplazamientos consta de cuatro grados de libertad que son  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  correspondientes a los cortantes (traslación  $u$ ) y a los momentos (rotación  $\theta$ ) en los nudos 1 y 2. Entonces la función de aproximación se puede expresar como

$$0 = N_{1u}u_1 + N_{2u}u_2 + N_{1\theta}\theta_1 + N_{2\theta}\theta_2 \quad (4.2.1.)$$

#### 4.2.1. - Método de Galerkin para VIGAS

La ecuación que gobierna el problema de flexión en vigas se escribe como

$$EI \frac{d^4 U}{dx^4} = 0 \quad (4.2.2.)$$

empleando la ec. 4.2.1 para la solución de la ec. 4.2.2. sustituyendo la función de campo  $U$  por su aproximación  $0$ , y aplicando la función de peso con  $W_i = N_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) se tiene

$$\int_0^L W_i \cdot N_i dx = \int_0^L EI \frac{d^4 0}{dx^4} \cdot N_i = 0 \quad (4.2.3.)$$

integrando dos veces por partes se llega a

$$EI \int_0^L \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx f_j = EI \frac{d^2 0}{dx^2} \frac{dN_i}{dx} - EI \frac{d^3 0}{dx} N_i \quad (4.2.4.)$$

o bien

$$EI \int_0^L [N_i] \cdot [N_j] dx f_j = EI \frac{d^2 0}{dx^2} \frac{dN_i}{dx} - EI \frac{d^3 0}{dx} N_i \quad (4.2.5.)$$

lo cual expresado matricialmente queda

$$E I \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & N_1 N_3 & N_1 N_4 \\ & N_2 N_2 & N_2 N_3 & N_2 N_4 \\ & & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ & & & N_4 N_4 \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (4.2.6.)$$

En el capítulo anterior se obtuvieron

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & ; & & N_1'' &= -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L} \\ N_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & & N_2'' &= -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ N_3 &= -\frac{3x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} & ; & & N_3'' &= \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L} \\ N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & ; & & N_4'' &= -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{aligned} \quad (4.2.7.)$$

por lo tanto al sustituir estas expresiones en la ec. 4.2.6. se obtiene para la matriz [ K ].

$$K=EI \int_0^L \begin{bmatrix} \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6x-4}{L^2}\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L}\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6x-2}{L^2}\right) \\ & \left(\frac{6x-4}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{6x-4}{L^2}\right)\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6x-4}{L^2}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \\ & & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L}\right) & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \\ & & & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)^2 \end{bmatrix}$$

(4.2.8.)

y realizando las operaciones finalmente se llega a

$$[ K ] = \frac{E I}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.9.)$$

#### 4.2.2. - Elemento VIGA mediante Formulación Directa

Empleando la misma función de aproximación escrita como

$$U = N_1 u_1 + N_2 \theta_1 + N_3 u_2 + N_4 \theta_2 \quad (4.2.10.)$$

y sustituyendo aquí las funciones de interpolación correspondientes, dadas a conocer en el capítulo 3, se tendrá

$$U = \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] u_1 + \left[ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \theta_1 + \\ + \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right] u_2 + \left[ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \theta_2 \quad (4.2.11.)$$

La curvatura se expresa como la derivada del campo de desplazamiento

$$\langle \kappa \rangle = - \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (4.2.12.)$$

Así

$$\frac{dU}{dx} = \left[ 1 - \frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \right] u_1 + \left[ 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right] \theta_1 \\ + \left[ \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \right] u_2 + \left[ -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right] \theta_2 \quad (4.2.13.)$$

y

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right] u_1 + \left[ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \theta_1 \\ + \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right] u_2 + \left[ -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \theta_2 \quad (4.2.14.)$$

Ahora sustituyendo en la ec. 4.2.12. y agrupando términos tenemos

$$\langle \kappa \rangle = \left\{ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6x}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.15.)$$

o bien

$$\langle \kappa \rangle = [ B ] \langle U \rangle \quad (4.2.16.)$$

así que

$$[ B ] = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^2} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6x}{L^2} + \frac{12x}{L^2} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{array} \right\} \quad (4.2.17.)$$

recordando la fórmula de la escuadria y la definición de momento flexionante

$$M = - E I \frac{d^2 U}{dx^2} \quad ; \quad \sigma = \frac{My}{I} \quad (4.2.18.)$$

y como  $\langle \sigma \rangle = [ D ] \langle \mathfrak{U} \rangle$  entonces  $[ D ] = E I$ .

Habiendo definido las matrices  $[ D ]$  y  $[ B ]$ , podemos sustituirlas en la expresión

$$[ K ] = \int_V [ B ]^T [ D ] [ B ] dv \quad (4.2.19.)$$

obteniéndose

$$[ K ] = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{dx^2} \\ -\frac{d^2 N_2}{dx^2} \\ -\frac{d^2 N_3}{dx^2} \\ -\frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{Bmatrix} E I \left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{d^2 N_1}{dx^2} & -\frac{d^2 N_2}{dx^2} & -\frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{array} \right\} dx \quad (4.2.20.)$$

$$[ K ] = E I \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1 d^2 N_1}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_1 d^2 N_2}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_1 d^2 N_3}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_1 d^2 N_4}{dx^2 dx^2} \\ & \frac{d^2 N_2 d^2 N_2}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_2 d^2 N_3}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_2 d^2 N_4}{dx^2 dx^2} \\ & & \frac{d^2 N_3 d^2 N_3}{dx^2 dx^2} & \frac{d^2 N_3 d^2 N_4}{dx^2 dx^2} \\ & & & \frac{d^2 N_4 d^2 N_4}{dx^2 dx^2} \end{bmatrix} dx \quad (4.2.21.)$$

lo cual, expresado de otra forma, queda

$$[K] = EI \int_0^L \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ & & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ & & & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} dx \quad (4.2.22.)$$

relación idéntica a la del inciso anterior, que al ser sustituida con las ecuaciones 4.30. e integrando se tiene finalmente

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \text{simétrica} & & 12 & -6L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.23.)$$



### 4.3.- ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

Los elementos finitos bidimensionales más usados son el triángulo, el rectángulo y el cuadrilátero general, los cuales tienen una amplia aplicación en la representación de los estados planos de esfuerzos y deformaciones.

#### 4.3.1.- Estado Plano de Esfuerzos

La suposición de esfuerzo plano es aplicable a cuerpos en los cuales la dimensión en una de las direcciones coordenadas sea muy pequeña (dir. z), como puede ser el caso de placas delgadas cargadas en su plano (x,y), para las cuales se supone:

$$\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.3.1.)$$

donde z representa la dirección perpendicular al plano de la placa como se muestra en la fig. 4.3.1. Los componentes del esfuerzo no varían a lo largo del espesor de la placa (en dirección de z). Se podría pensar que esta suposición viola algunas de las condiciones de compatibilidad, sin embargo esto es prácticamente despreciable si pensamos en que la placa es delgada. En este caso, las relaciones esfuerzo-deformación ecs. A.1.16 a la A.1.17. se reducen a:

$$\langle \epsilon \rangle = [ C ] \langle \sigma \rangle \quad (4.3.2.)$$

donde

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \quad [ C ] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

y de aquí

$$\langle \sigma \rangle = [ D ] \langle \epsilon \rangle \quad (4.3.3.)$$

siendo

$$[ D ] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.4.)$$

En el caso de esfuerzo plano, la componente de la deformación en la dirección z será diferente de cero y está dada por: (de la ec. A.1.11.)

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (4.3.5.)$$

mientras que

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.3.6.)$$

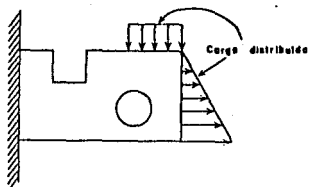


fig. 4.2.2. Ejemplo de un problema de esfuerzo plano; una placa plana delgada sujeta a cargas en su plano.

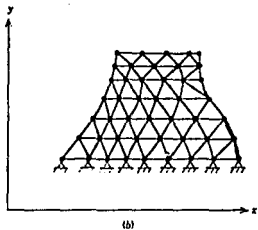
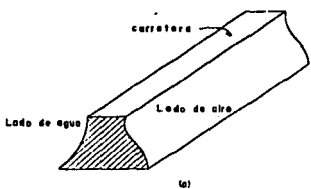


fig. 4.2.2. Ejemplo de un problema de deformación plana.  
a) Presa de tierra. b) Modelo de elementos finitos de una rebanada unitaria de la presa

#### 4.3.2. - Estado Plano de Deformaciones

La suposición de deformación plana se aplica a cuerpos cuya geometría y cargas no varían significativamente a lo largo de la dirección longitudinal, como pueden ser el análisis de túneles, cilindros y muros de retención (fig. 4.3.2.a.). De acuerdo con las características anteriores la estructura queda definida en un plano (fig. 4.3.2.b.) de espesor unitario; todas las variables que aparecen en las ecuaciones de equilibrio son independientes de la variable Z (a lo largo del eje longitudinal) y el desplazamiento W en tal dirección es nulo, es decir

$$U = U(X, Y, t) \quad , \quad V = V(X, Y, t) \quad , \quad W = 0 \quad (4.3.7.)$$

En este caso las relaciones esfuerzo-deformación generales se reducen a

$$\langle \epsilon \rangle = [ C ] \langle \sigma \rangle \quad (4.3.8.)$$

donde

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} ; \langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; [ C ] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.3.9.)$$

y de aquí

$$\langle \sigma \rangle = [ D ] \langle \epsilon \rangle \quad (4.3.10.)$$

con

$$[ D ] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.11.)$$

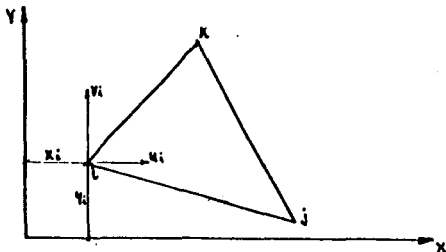
La componente del esfuerzo en dirección Z será diferente de cero y está dada por

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (4.3.12.)$$

mientras que

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (4.3.14.)$$

4.4. - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PLANO



4.4.1. - Formulación con Residuos pesados (Método de Galerkin)

Para un estado plano, las ecuaciones de equilibrio estático se escriben como (Ap. 1.)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + B_1 = 0 \quad (4.4.1.)$$

$$\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + B_2 = 0$$

y las ecuaciones de esfuerzo-deformación

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \alpha \epsilon_{11} + \beta \epsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= \beta \epsilon_{11} + \alpha \epsilon_{22} \\ \sigma_{23} &= G \gamma_{12} \end{aligned} \quad (4.4.2.)$$

Si se tiene un estado plano de esfuerzos

$$\alpha = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \beta = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (4.4.3.)$$

Si se tiene un estado plano de deformaciones

$$\alpha = \lambda + 2G \quad ; \quad \beta = \lambda \quad ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \quad (4.4.4.)$$

Para derivar la matriz de rigideces de un elemento plano triangular de tres nodos, el campo de desplazamientos se aproxima mediante la siguiente expresión

$$\begin{aligned} U \approx \hat{u} &= N_{1u} u_1 + N_{2u} u_2 + N_{3u} u_3 = N_i u_i \\ V \approx \hat{v} &= N_{1v} v_1 + N_{2v} v_2 + N_{3v} v_3 = N_i v_i \end{aligned} \quad (4.4.5.)$$

los desplazamientos en direcciones  $x$ ,  $y$  en el  $i$ 'ésimo nodo.

Las componentes del vector de deformación se calculan con las derivadas del campo de desplazamientos como sigue

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \quad ; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \quad ; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \quad (4.4.6.)$$

y el vector de esfuerzos mediante

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \alpha \epsilon_{11} + \beta \epsilon_{22} = \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \\ \sigma_{22} &= \beta \epsilon_{11} + \alpha \epsilon_{22} = \beta \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \\ \tau_{12} &= G \gamma_{12} = G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (4.4.7.)$$

Como  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  son aproximaciones al campo de desplazamientos, entonces al sustituir las expresiones anteriores en las ecs. de equilibrio estático se tendrá

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right] + B_1 = \bar{x}_1 \neq 0 \quad (4.4.8.)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \beta \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \right] + B_2 = \bar{x}_2 \neq 0$$

De acuerdo con el método de los residuos pesados

$$\int_V W \cdot e \, dv = 0 \quad (4.4.9.)$$

empleando esta expresión en las ecs. anteriores

$$\int_V W \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right] + B_1 \right] dv = 0 \quad (4.4.10.)$$

$$\int_V W \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \beta \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \right] + B_2 \right] dv = 0$$

Aplicando el teorema de Green en cada término de las ecuaciones anteriores y agrupando términos se llega para la primera ecuación a

$$\int_V \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2} G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \right] dv + \int_V \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} + \frac{\partial W}{\partial x_2} G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \right] dv - \int_V B_1 W \, dv =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\sigma} W \left[ \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \cdot n_1 + \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \cdot n_1 \right] ds + \int_{\sigma} W \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \cdot n_2 + \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \cdot n_2 \right] ds = \\
 &= \int_{\sigma} W \left( \sigma_{11} \cdot n_1 + \sigma_{12} \cdot n_2 \right) ds = \int_{\sigma} W T_1 ds \quad (4.4.11.)
 \end{aligned}$$

y para la segunda a

$$\begin{aligned}
 &\int_V \left[ \frac{\partial W}{\partial x_2} \beta \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_1} G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \right] dv + \int_V \left[ \frac{\partial W}{\partial x_1} G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} + \frac{\partial W}{\partial x_2} G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \right] dv - \int_V B_2 W dv = \\
 &= \int_{\sigma} W \left[ G \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} \cdot n_1 + G \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} \cdot n_1 \right] ds + \int_{\sigma} W \left[ \beta \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} \cdot n_2 + \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} \cdot n_2 \right] ds = \\
 &= \int_{\sigma} W \left( \tau_{12} \cdot n_1 + \sigma_{22} \cdot n_2 \right) ds = \int_{\sigma} W T_2 ds \quad (4.4.12.)
 \end{aligned}$$

como  $W = W_j = N_j$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_1} ; & \frac{\partial W}{\partial x_2} &= \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \\
 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_1} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i ; & \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_2} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i \\
 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_1} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_1} v_i ; & \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_2} &= \frac{\partial N_i}{\partial x_2} v_i
 \end{aligned} \quad (4.4.13.)$$

Con estas expresiones y suponiendo que  $T_1 = T_2 = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 &\int_V \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \alpha \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x_2} G \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i \right] dv + \int_V \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \beta \frac{\partial N_i}{\partial x_2} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial x_2} G \frac{\partial N_i}{\partial x_1} v_i \right] dv = \\
 &= \int_V B_1 N_j dv \quad (4.4.14.)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_V \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \beta \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} G \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_i \right] dv + \int_V \left[ \frac{\partial N_j}{\partial x_1} G \frac{\partial N_i}{\partial x_1} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial x_2} G \frac{\partial N_i}{\partial x_2} v_i \right] dv = \\
 &= \int_V B_2 N_j dv
 \end{aligned}$$

si hacemos para estas dos expresiones un barrido de los subíndices  $i, j$  haciendo primero  $j = 1, i = 1, 2, 3$ , después  $j = 2, i = 1, 2, 3$ , y por último  $j = 3, i = 1, 2, 3$ , se obtienen las seis expresiones que al ser ordenadas y escritas en forma matricial nos conducen a

$$\int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} dv =$$

$$= \int_V \begin{Bmatrix} B_1 N_1 \\ B_2 N_1 \\ B_1 N_2 \\ B_2 N_2 \\ B_1 N_3 \\ B_2 N_3 \end{Bmatrix} dv \quad (4.4.15.)$$

o bien

$$\int_V [B]^T [D] [B] \langle U \rangle dv = \langle P \rangle \quad (4.4.16.)$$

donde la matriz [D] puede ser alguna de las siguientes

para esfuerzo plano

$$[D] = \frac{E}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4.23.)$$

para deformación plana

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4.24.)$$

la ec. 4.4.16. también se puede expresar como

$$[K] \langle U \rangle = \langle P \rangle \quad (4.4.17.)$$

donde [K] es la matriz de rigideces del elemento  
 <U> es el vector de desplazamientos nodales  
 <P> es el vector de fuerzas

#### 4.4.2. - Formulación directa

El campo de desplazamientos se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ V &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \quad (4.4.18.)$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4.19.)$$

donde las  $N_i$  son las funciones de interpolación descritas en el capítulo 3, cuyas expresiones son

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)X + (x_3 - x_2)Y] \\ N_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)X + (x_1 - x_3)Y] \\ N_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)X + (x_2 - x_1)Y] \end{aligned} \quad (4.4.20.)$$

tomando las parciales de  $[N]$  se obtiene la matriz  $[B]$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.21.)$$

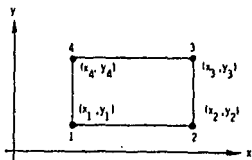
Para obtener la matriz de rigideces del elemento, solamente se sustituye la matriz  $[B]$  en la siguiente ecuación

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (4.4.22.)$$

la matriz de propiedades del material  $[D]$  dependerá del caso que se trate como se comentó en los incisos anteriores.



4.5. - ELEMENTO FINITO CUADRILATERO PLANO



$$U = \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y + \alpha_4 XY \quad (4.5.1.)$$

$$V = \alpha_5 + \alpha_6 X + \alpha_7 Y + \alpha_8 XY$$

Estas ecuaciones representan la aproximación de desplazamiento con base en un polinomio lineal. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices

$$[ N ] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.5.2.)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba} \quad ; \quad N_2 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba} \quad (4.5.3.)$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a-y)}{4ba} \quad ; \quad N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

la matriz [ B ] se obtiene mediante

$$[ B ] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.5.4.)$$

la matriz elemental de rigideces se obtiene sustituyendo la matriz [ B ] de la ec. 4.5.4. en la ec. 4.4.22., donde la matriz [ D ] tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.

4.6. - Elemento Finito CUADRILATERO ISOPARAMETRICO

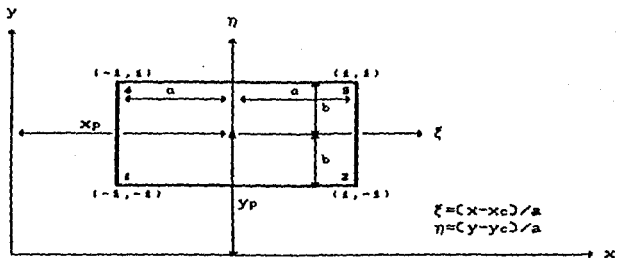


fig. 4.6.1. Elemento plano rectangular mostrando la relación entre coordenadas locales y globales

Para este caso podemos considerar la siguiente aproximación de la geometría

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad (4.6.1.)$$

en donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} & ; & & N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} & ; & & N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (4.6.2.)$$

Estas funciones relacionan un punto de coordenadas (X,Y), en el elemento irregular con un elemento de coordenadas ( $\xi, \eta$ ) del elemento regular (fig. 4.6.1.). Los polinomios correspondientes son

$$\begin{aligned} X &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ Y &= a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{aligned} \quad (4.6.3.)$$

estos polinomios son similares a los usados en las funciones de interpolación por tratarse de un elemento isoparamétrico

El campo de desplazamientos queda

$$\langle W \rangle = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [N] \langle d \rangle \quad (4.6.4.)$$

Las funciones de interpolación están dadas en coordenadas locales  $(\xi, \eta)$  así que será necesario emplear la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas (Cap. 3.), como se indica a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.6.5.)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.6.6.)$$

donde  $[J]$  es el Jacobiano que se calcula de la siguiente manera

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.6.7.)$$

siendo  $x_i, y_i$  ( $i=1,4$ ) las coordenadas nodales referidas a los ejes cartesianos  $(X, Y)$ . Por tratarse de deformaciones en el plano se tiene que

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.6.8.)$$

y sabemos que

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [N_i U_i] = \frac{N_{1x}}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_{2x}}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_{3x}}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_{4x}}{\partial x} u_4 \quad (4.6.9.)$$

Por definición de jacobiano

$$\epsilon_{xx} = [J]^{-1} \left[ \frac{N_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} u_4 \right] \quad (4.6.10.)$$

de igual forma para  $\epsilon_{yy}$  y para  $\gamma_{xy}$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = [J]^{-1} \left[ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} v_4 \right] \quad (4.6.11.)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [J]^{-1} \left[ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \xi} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} v_2 + \dots \right] \quad (4.6.12.)$$

Si despejamos los desplazamientos  $u_i, v_i$  ( $i=1,4$ ) y acomodamos matricialmente obtenemos

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.6.13.)$$

que tiene la forma  $\langle \epsilon \rangle = [B] \langle d \rangle$  (4.6.14.)

por último, para obtener la matriz de rigideces  $[K]$  se recurre a la integración numérica (cap. 4.) de la siguiente manera

$$[K] = \int_{\Delta} [B]^T [D] [B] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] d\xi d\eta = \quad (4.6.15.)$$

$$[K] = f_1 W_1 + f_2 W_2 + f_3 W_3 + \dots + f_n W_n \quad (4.6.16.)$$

#### 4.7.- Elemento Finito PLACA con 4 nodos

Se consideran solo placas delgadas con carga transversal a su plano. Se considerará que las deformaciones son pequeñas y que únicamente hay esfuerzos de flexión.

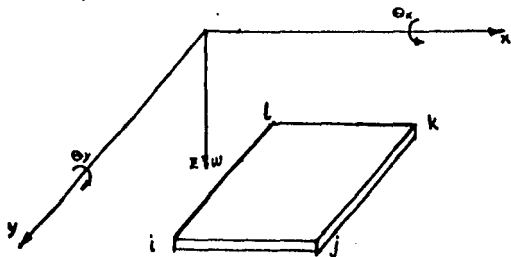


fig. 4.7.1. Elemento finito tipo PLACA

En cada nodo tendremos tres desplazamientos que son

$W$  → deflexión vertical

$\theta_x$  → giro en dirección  $y$  ;  $\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y}$

(4.7.1.)

$\theta_y$  → giro en dirección  $x$  ;  $\theta_y = - \frac{\partial W}{\partial x}$

Así, para un elemento rectangular se tendrá como vector global de desplazamientos al vector  $\langle d \rangle$  con doce grados de libertad.

$$\langle d \rangle = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \\ d_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yl} \\ W_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ W_k \\ \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \\ W_l \\ \theta_{xl} \\ \theta_{yl} \end{Bmatrix} \quad (4.7.2.)$$

Las correspondientes fuerzas nodales  $\langle q \rangle$  consisten de dos momentos y una fuerza (fig. 4.7.1.), por lo tanto se tendrá

$$\langle q \rangle = \begin{Bmatrix} (qz)_i \\ (q\theta)_{x,i} \\ (q\theta)_{y,i} \\ (qz)_j \\ (q\theta)_{x,j} \\ (q\theta)_{y,j} \\ (qz)_k \\ (q\theta)_{x,k} \\ (q\theta)_{y,k} \\ (qz)_l \\ (q\theta)_{x,l} \\ (q\theta)_{y,l} \end{Bmatrix} \quad (4.7.3.)$$

En placas la deformación se caracteriza por la curvatura en direcciones X, Y, y por la torsión. Recordando que la deformación se expresa como el negativo de la curvatura se tiene

$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.7.4.)$$

y los momentos son

$$\langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \langle \varepsilon \rangle \quad (4.7.5.)$$

ahora podemos determinar la matriz [D] para placas como sigue

$$M_x = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (4.7.6.)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left( -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)$$

como  $\langle \sigma \rangle = [D] \langle \varepsilon \rangle$  y comparando las ecs. 4.7.5. y 4.7.6. se ve que

$$[D] = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.7.7.)$$

Para llegar a la matriz [B] relacionamos el campo de deformaciones con el vector  $\langle \alpha \rangle$  mediante  $\langle \epsilon \rangle = [B] \langle \alpha \rangle$ . De las ecuaciones 4.7.4. y 3.8.1. se tiene

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2x & -6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \quad (4.7.8.)$$

ya que

$$\langle \epsilon \rangle = [H] \langle \alpha \rangle \quad (4.7.9.)$$

donde

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2x & -6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7.10.)$$

ahora reemplazando  $\langle \alpha \rangle$  en la ec. 4.7.9. y usando la ec. 3.8.6.

$$\langle \epsilon \rangle = [H] [A]^{-1} \langle d \rangle \quad (4.7.11.)$$

Entonces

$$[B] = [H] [A] \quad (4.7.12.)$$

conociendo [D] y [B] para el elemento, podemos llegar a [K] a través de

$$[K] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (4.7.13.)$$

y mediante la siguiente expresión, al vector de cargas del elemento

$$\langle q \rangle = \iint p(x,y) [N]^T dx dy \quad (4.7.14.)$$

Finalmente ensamblamos la ecuación global para elementos finitos

$$[K] \langle d \rangle = \langle q \rangle \quad (4.7.15.)$$

y resolvemos para la deflexión.

## 5.- PRESENTACION DEL PROGRAMA " P A N E S "

"P A N E S" es un programa (software) de análisis estático de estructuras, escrito en BASIC para utilizarse en computadora personal (P.C.). Se utilizó el Método del Elemento Finito para la solución de los diferentes tipos de estructuras que resuelve, las cuales, pueden estar compuestas por alguno de los tipos de elementos vistos en el capítulo anterior (barras, vigas, elementos planos, elemento placa). El programa es interactivo, o sea nos va preguntando todos los datos necesarios para resolver cualquiera de los casos e internamente se conecta con las diferentes subrutinas a partir del programa principal o inicial. Cuenta con generación automática de coordenadas para todos los casos y con transformación de coordenadas, también cuenta con opciones para corregir los datos recién suministrados en las subrutinas de datos, además de haber una subrutina general de corrección de datos, a la cual se puede acudir como una de las opciones que aparecen en un "menu" localizado en el programa principal, a partir del cual también es posible dirigirse directamente a la solución de alguna estructura cuyos datos se tuvieran grabados con anterioridad, o bien se puede elegir la opción de datos nuevos o listado de los mismos.



En el caso de los elementos tipo barra y tipo viga, con los cuales se pueden representar a las armaduras y a los marcos respectivamente, se puede realizar el análisis de estructuras planas o también de estructuras tridimensionales. Otro tipo de estructuras que se pueden analizar son las que se conocen como retículas planas, que están compuestas por elementos viga dispuestos en un solo plano.

En el caso de los elementos planos los cuales sólo admiten cargas en su plano y aplicadas en los puntos nodales, el programa considera tanto elementos finitos triangulares como cuadriláteros, y estos últimos pueden ser irregulares (isoparamétricos).

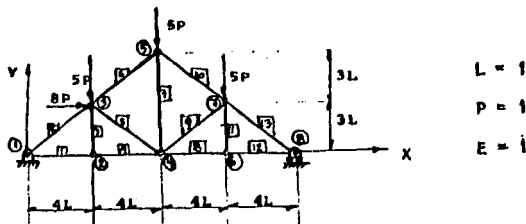
Por último, el programa abarca también a las estructuras tipo placa, en las que se pueden considerar cargas puntuales o uniformemente repartidas actuando en dirección transversal al plano de la placa.

A continuación se presentan las diferentes subrutinas con una breve descripción del propósito que cumplen.

- PANES Es el programa monitor que proporciona el menú principal
- DATOS Son las subrutinas ó subprogramas que piden los datos por pantalla y los graban en su archivo correspondiente.
- CORDAT Permite corregir los datos previamente suministrados.
- LISDAT1 Imprime un listado de datos de algún problema particular.
- ARMAPLAN Calcula la matriz de rigideces global de armaduras planas
- ARMAESPA Calcula la matriz de rigideces global de armaduras espaciales.
- MARCOPLA Calcula la matriz de rigideces global de los marcos planos
- MARCOESP Calcula la matriz de rigideces global de los marcos espaciales.
- RETICULA Calcula la matriz de rigideces global de las retículas planas.
- ELFTRIPL Calcula la matriz de rigideces global de los elementos finitos triangulares planos.
- ELFCUAPL Calcula la matriz de rigideces global de los elementos finitos cuadriláteros isoparamétricos.
- ELFPLACA Calcula la matriz de rigideces global de los elementos finitos tipo placa.
- SOLUCION Define y resuelve el sistema de ecuaciones  $[K] \{U\} = \{P\}$  proporcionándonos los desplazamientos nodales  $\{U\}$ .
- FUERZAS Realiza la multiplicación de las matrices  $[DB] \{U\} = \{F\}$  para obtener las fuerzas en los elementos  $\{F\}$ .
- REACCESO Permite regresar a corregir datos o imprimir datos.

5.1.- Problema # 1.- ARMADURA EN EL PLANO

Se analiza una armadura plana, cuya geometría y sistema de cargas se muestra en la figura.



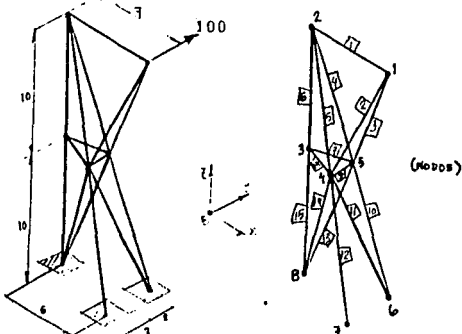
Al realizar el análisis de la estructura con el uso del programa PANES, se obtienen los desplazamientos nodales y los esfuerzos que se presentan en los elementos, como se muestra en la siguiente tabla.

DESPLAZAMIENTOS		
NUDO	DESP. X	DESP. Y
1	0.00000	-0.00000
2	63.99990	-361.08290
3	208.31220	-361.08290
4	127.99980	-391.77730
5	127.82480	-343.77730
6	175.99970	-339.74950
7	62.93738	-339.74950
8	223.99970	-0.00000

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS			
ELEMENTO	Na,Nb	FUERZA	ESFUERZO
1	1,2	16.000 (TENS.)	16.000
2	1,3	10.000 (COMP.)	10.000
3	2,3	0.000	0.000
4	2,4	16.000 (TENS.)	16.000
5	3,4	9.167 (COMP.)	9.170
6	3,5	10.833 (COMP.)	10.830
7	4,5	8.000 (TENS.)	8.000
8	4,6	12.000 (TENS.)	12.000
9	4,7	4.167 (COMP.)	4.170
10	5,7	10.833 (COMP.)	10.830
11	6,7	0.000	0.000
12	6,8	12.000 (TENS.)	12.000
13	7,8	15.000 (COMP.)	15.000

5.2. - Problema # 2. ARMADURA TRIDIMENSIONAL

Una armadura tridimensional cuyas barras tienen un módulo de elasticidad  $E = 200000000$  y una área de la sección  $A = 0.005$ , se carga con una fuerza de 100 en el nudo 1 en dirección Y, como se muestra en la figura. Se determinan los desplazamientos nodales, y los esfuerzos en los elementos.



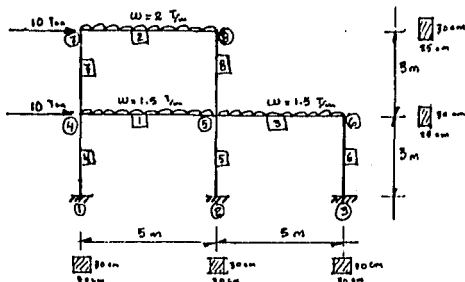
$$E = 200 \times 10^6$$

$$A = 0.005$$

NUDO	DESP. X	DESP. Y	DESP. Z
1	0.05866	0.19583	-0.03060
2	0.05726	0.02404	0.01333
3	-0.00561	-0.02163	0.00687
4	0.00984	0.02470	0.00288
5	-0.02117	0.02308	-0.00625
6	0.00000	0.00000	-0.00000
7	-0.00000	0.00000	0.00000
8	-0.00000	-0.00000	0.00000

ELEMENTO	FUERZA	ESFUERZO
1	200.000 (TENS.)	40000.10
2	270.417 (TENS.)	54083.32
3	-811.249 (COMP.)	162249.80
4	-349.001 (COMP.)	69920.23
5	-349.601 (COMP.)	69920.27
6	666.663 (TENS.)	133332.70
7	0.001 (TENS.)	0.15
8	-0.001 (COMP.)	0.15
9	174.999 (TENS.)	34999.81
10	-218.499 (COMP.)	43699.85
11	-633.661 (COMP.)	126732.10
12	218.501 (TENS.)	43700.18
13	-917.709 (COMP.)	183541.70
14	303.903 (TENS.)	61180.69
15	666.663 (TENS.)	133332.70

5.3.- Problema # 3.- Se realiza el análisis del marco plano mostrado a continuación.

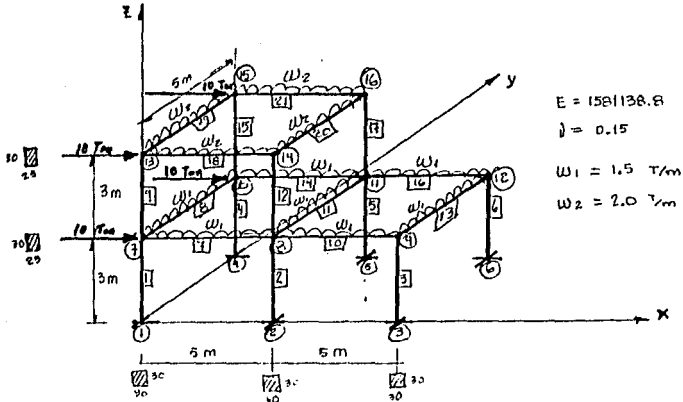


DESPLAZAMIENTOS			
NUDO	DESP. X	DESP. Y	ROT. Z
1	0.00000	0.00000	-0.00000
2	0.00000	0.00000	-0.00000
3	0.00000	0.00000	-0.00000
4	0.03080	0.00039	-0.01040
5	0.03038	0.00023	-0.00695
6	0.03012	0.00000	-0.00978
7	0.08749	0.00060	-0.00402
8	0.06732	0.00028	-0.01085

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS						
ELEM	AXIAL A	CORT. A	MOM. A	AXIAL B	CORT. B	MOM. B
1	9.945	-7.441	-12.965	-9.945	-0.059	-5.489
2	4.047	-8.147	-10.920	-4.047	-1.853	-4.916
3	6.107	-7.303	-11.504	-6.107	-0.197	-5.260
4	-15.588	6.007	12.095	15.588	6.167	5.927
5	-9.215	7.896	13.890	9.215	4.123	9.767
6	-0.197	6.107	12.060	0.197	5.800	6.260
7	-8.147	18.127	7.038	8.147	20.727	10.820
8	-1.853	16.056	7.226	1.853	22.965	4.916

5.4.- Problema # 4.- MARCO TRIDIMENSIONAL

Se realiza el análisis tridimensional de la estructura mostrada a continuación.

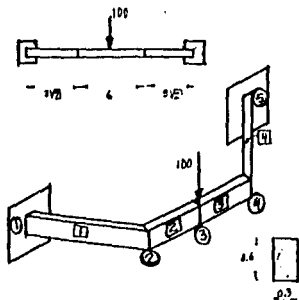


DESPLAZAMIENTOS NODALES						
NUDO	DESP. X	DESP. Y	DESP. Z	ROT. X	ROT. Y	ROT. Z
1	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
2	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
3	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
5	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.000000	-.000000	.000000	.000000	.000000
7	.027225	-.000031	-.000216	-.000524	.010895	-.000002
8	.026899	-.000031	-.000538	-.000526	.008129	.000005
9	.026553	.000026	-.000221	-.001793	.005877	.000010
10	.027226	.000031	-.000216	.000524	.010895	.000002
11	.026899	.000031	-.000538	.000526	.008130	-.000005
12	.026554	-.000026	-.000221	.001793	.005877	-.000010
13	.063974	.000040	-.000359	-.002204	.009611	-.000000
14	.063669	.000039	-.000817	-.002203	.005936	-.000000
15	.063979	-.000039	-.000359	.002204	.009611	-.000000
16	.062671	-.000040	-.000817	.002204	.005937	-.000000

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS						
ELEM	FZA. XA FZA. XB	FZA. YA FZA. YB	FZA. ZA FZA. ZB	MOM. XA MOM. XB	MOM. YA MOM. YB	MOM. ZA MOM. ZB
1	-5.02387	.377016	10.2591	-.379172	-11.4113	.000013
	5.02387	-.377016	-10.2591	-.751877	-3.65966	-.000013
2	-6.78769	.378426	25.5039	-.380618	-13.0736	-.000039
	6.78769	-.378426	-25.5039	-.754659	-7.28947	.000039
3	-8.18819	1.22923	10.4870	-1.20614	-14.3729	-.000071
	8.18819	-1.22923	-10.4870	-2.48156	-10.1917	.000071
4	-5.02366	-.377084	10.2590	.379320	-11.4114	-.000012
	5.02366	.377084	-10.2590	.751931	-3.65954	.000012
5	-6.78773	-.378388	25.5040	.380523	-13.0737	.000039
	6.78773	.378388	-25.5040	.754640	-7.28944	-.000039
6	-8.18831	-1.22920	10.4870	1.20609	-14.3731	.000072
	8.18831	1.22920	-10.4870	2.48152	-10.1918	-.000072
7	-5.15674	.243622	7.74176	-7.35094	-.000434	.000008
	5.15674	-7.74362	-7.74176	-12.6172	-.002143	-.000008
8	-.000002	-3.74997	-1.47989	2.93860	-.000409	-.000001
	.000002	-3.75003	1.47989	-2.93874	-.000419	.000001
9	-2.76538	1.85639	6.75278	-2.18573	-3.69128	-.000010
	2.73568	-1.85639	-6.75278	-3.38243	-4.60487	.000010
10	.001201	-.763043	8.18829	-4.74312	.003540	.005747
	-.001201	-6.73696	-8.18829	-10.1917	.002465	-.005747
11	-.000012	-3.75002	-1.47716	2.93392	-.001316	-.000001
	.000012	-3.74998	1.47716	-2.93790	.001255	.000001
12	-7.23397	1.85731	13.2472	-2.18910	-10.0708	.000040
	7.23397	-1.85731	-13.2472	-3.38282	-11.6311	-.000040
13	-.000014	-3.75001	1.22803	2.48730	-.002395	-.000000
	.000014	-3.74999	-1.22803	-2.48727	.002321	.000000
14	.000516	.243732	7.74202	-7.35123	.000444	-.000009
	-.000516	-7.74373	-7.74202	-12.6174	.002135	.000009
15	-2.76565	-1.85645	6.75268	2.18682	-3.69160	.000013
	2.76565	1.85645	-6.75268	3.38254	-4.60525	-.000013
16	-.001171	-.762974	8.18838	-4.74332	-.003465	-.005747
	.001171	-6.73703	-8.18838	-10.1918	-.002394	.005747
17	-7.23462	-1.85724	13.2473	2.19800	-10.0730	-.000037
	7.26432	1.85724	-13.2473	3.38272	-11.6315	.000037
18	.000029	-1.75280	7.23399	-4.60488	.000088	-.000004
	-.000029	-8.24720	-7.23399	-11.6311	.000061	.000004
19	-.000035	-4.99998	1.85642	3.38243	-.000078	-.000001
	.000035	-5.00002	-1.85642	-3.38254	-.000096	.000001
20	-.000034	-5.00002	1.85728	3.38282	-.000102	-.000001
	.000034	-4.99998	-1.85728	-3.38272	-.000068	.000001
21	.000037	-1.75266	7.23470	-4.60524	.000080	.000003
	-.000037	-8.24734	-7.23470	-11.6315	.000105	-.000003

B. B. - Problema # B. - RETICULA PLANA

Para la reticula plana mostrada en la figura, se calculan los desplazamientos nodales y los elementos necesarios de los miembros que la componen.



$$G = 9 \times 10^6$$

$$E = 20 \times 10^6$$

$$I = 1.0$$

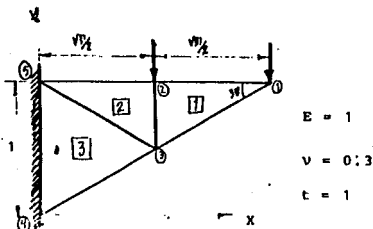
$$J = 0.0037$$

DESPLAZAMIENTOS			
NUDO	ROTA. Z	DESP. Y	ROTA. X
1	0.00000	-0.00000	-0.00000
2	0.00751	-0.03024	-0.00281
3	0.00751	-0.03550	0.00000
4	0.00751	-0.03023	0.00281
5	0.00000	-0.00000	0.00000

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS				
ELEM.	NUDO	TORSION	CORTANTE	MOMENTO
1	1	-18.609	49.996	281.391
1	2	18.614	-49.996	18.614
2	2	0.003	49.997	-26.321
2	3	-0.003	-49.997	176.310
3	3	0.003	-50.004	-176.310
3	4	-0.003	50.004	26.300
4	4	18.601	-50.003	-18.692
4	5	-18.601	50.004	-281.419

5.6. - Problema # 6. - ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PLANO

Se estudia una placa delgada empotrada en un extremo; la placa es discretizada mediante elementos finitos triangulares y cargada verticalmente en los nudos 1 y 2 como se muestra en la figura. El análisis de la estructura se llevó a cabo considerando un módulo de elasticidad unitario  $E = 1$ , un módulo de Poisson  $\nu = 0.3$ , y un espesor unitario  $t = 1$ .



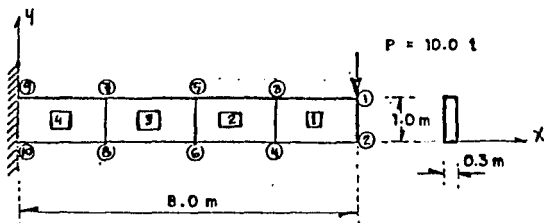
DESPLAZAMIENTOS		
NUDO	DESP. X	DESP. Y
1	7.71242	-40.82891
2	6.54185	-15.83549
3	-2.88571	-13.58292
4	-0.00000	-0.00000
5	0.00000	-0.00000

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS			
ELEMENTO	SIG. XX	SIG. YY	ESF. CORT.
1	0.0000	-4.5050	-4.0000
2	6.8160	-2.4600	0.0650
3	-3.4080	-1.0220	-6.0330



5.7. - Problema # 7. - ELEMENTO FINITO CUADRILATERO PLANO

Se obtienen los elementos mecánicos y cinemáticos de la estructura mostrada en la figura.



$$E = 2.0 \times 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$P_v = 2.4 \text{ t/m}^3$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$P = \frac{P_v V}{g} = 0.245 \text{ t}\cdot\text{S}^2/\text{m}^4$$

De acuerdo con la geometría mostrada, el modelo estructural corresponde a un estado plano de esfuerzos (cap. 4 ); los elementos finitos utilizados son de forma rectangular (cuadriláteros isoparamétricos).

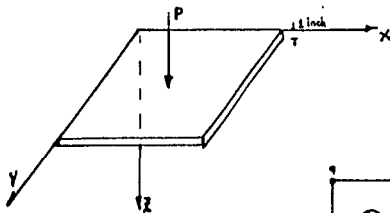
El programa "PANES" nos proporciona los siguientes resultados

DESPLAZAMIENTOS		
NUDO	DESP. X	DESP. Y
1	0.00118	-0.01273
2	-0.00118	-0.01272
3	0.00111	-0.00807
4	-0.00111	-0.00807
5	0.00089	-0.00400
6	-0.00089	-0.00400
7	0.00052	-0.00111
8	-0.00052	-0.00111
9	0.00000	-0.00000
10	-0.00000	-0.00000

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS			
ELEMENTO	SIG. XX	SIG. YY	ESF. CORT
1	0.0000	-10.2980	-33.3340
2	-0.0000	2.4340	-33.3310
3	-0.0000	-0.8810	-33.3290
4	-0.0000	0.1670	-33.3290

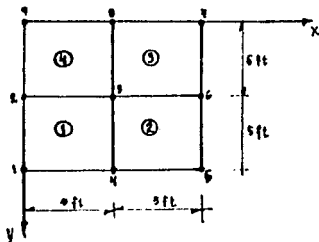
5.8. - Problema # 8. - ELEMENTO FINITO PLACA

Considerando la placa simplemente apoyada en las esquinas, cargada puntualmente en el centro con  $P = 288000$  lbs., se calcula la deflexión de los nudos y los esfuerzos producidos en los elementos.



$$E = 3 \times 10^6 \text{ Psi}$$

$$J = 0.8$$



DESPLAZAMIENTOS			
NUDO	ROT. Z	DES. Y	ROT. X
1	0.00000	0.00000	-0.01962
2	-0.78519	-0.00654	0.00000
3	0.00000	-0.02945	0.00000
4	0.00000	0.00655	0.00000
5	0.00000	.000000	0.01962
6	0.78519	-0.00654	0.00000
7	0.00000	0.00000	-0.01962
8	0.00000	0.00655	0.00000
9	0.00000	0.00000	0.01962

FUERZAS EN LOS ELEMENTOS					
ELEM.	MOM. X	MOM. Y	MOM. XY	CORT. X	CORT. Y
1	-509.507	-561.685	-498.119	-26987.53	-13499.41
2	509.507	561.685	-498.119	26987.53	-13499.44
3	509.507	561.685	498.119	-26987.54	-13499.42
4	-509.507	-561.685	498.119	26987.53	-13499.40

## 6.- CONCLUSIONES

### EL METODO

El método de los elementos finitos representa una ventaja con respecto a los tipos de análisis que se realizan convencionalmente, aunque una mejor utilidad del método se tiene sobre todo en estructuras irregulares, en muros, presas, túneles (elementos planos), en tuberías, elementos sólidos, placas, cascarones etc. en las cuales resultaba casi imposible lograr un análisis realista y resultados confiables.

También es prudente mencionar que el método de los elementos finitos, tal como se presenta en este trabajo, está ciertamente limitado al análisis estructural. Sin embargo el método posee un gran potencial de aplicación en otros campos, tales como redes de tuberías (temperaturas y presiones entre otros como grados de libertad), en ingeniería mecánica, aeronáutica y nuclear, o en problemas de hidrodinámica entre otros y sus respectivas aplicaciones a problemas de equilibrio, de valores característicos, y de propagación, además de los usos puramente matemáticos que se han dado.

Para poder comprender y aplicar el método se requieren como antecedentes teóricos el manejo del análisis matricial, algunos conceptos de Mecánica del Medio Continuo, y conocimientos sobre programación. Esto con el objeto de obtener algoritmos eficientes y apropiados así como una correcta implementación en el equipo disponible.

## EL PROGRAMA

El programa desarrollado posee sin duda algunas limitaciones en cuanto al algoritmo que se empleó, debido a la capacidad de las máquinas disponibles y a la velocidad de estas, sin embargo, resulta ser una herramienta de gran utilidad sobre todo con fines académicos, ya que se puede utilizar para ilustrar el método y poder comparar con otros tipos de análisis o bien, comparar diferentes modelaciones estructurales para la toma de decisiones, o para realizar revisiones.

La entrada de datos de manera interactiva tiene la ventaja de que el usuario sólo tiene que ir proporcionando los datos que el programa pide, pero en problemas grandes esto puede resultar ciertamente laborioso y tardado, aún cuando el algoritmo posea generación automática de coordenadas y conectividades como es el caso del programa PANES, siendo preferible usar bases de datos (archivos de entrada que se pueden editar en pantalla). Actualmente se realizan programas con ayudas gráficas bastante poderosas (generadores gráficos) los cuales generan estos archivos de entrada y que representan un ahorro en tiempo bastante considerable, tanto al momento de proporcionar los datos como para la interpretación de resultados.

Así pues, si pensamos en que los equipos de cómputo personales (P. C.) disponibles actualmente en el mercado pueden resultar atractivos en cuanto al costo y que no resulta difícil contar con una capacidad de al menos 20 Megabytes en el disco fijo, 640 Kilobytes en la memoria central (RAM), y una velocidad razonable (10 o 12 Megahertz), y si además se cuenta con un programa generador gráfico y una impresora gráfica o un graficador, con el uso de un algoritmo eficiente se puede lograr cierta competitividad con los programas que se usan en las grandes máquinas, las cuales requieren de un complicado procedimiento tanto para la correcta aplicación e interpretación del programa, como para su uso y la posibilidad de acceso a estas (tiempo de máquina y costo), cosa que no ocurre en el caso de las computadoras personales.

## LA TESIS

Se presentaron las bases teóricas fundamentales para que un estudiante de licenciatura pueda realizar un programa de elementos finitos con las características específicas que se puedan requerir, lo cual sea tal vez un primer intento en este campo, al menos al nivel de licenciatura en nuestro país, ya que en este nivel no existe una gran difusión ni bibliografía disponible. Se espera que el presente trabajo pueda ser de utilidad como documentación y apoyo para futuras generaciones.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA.

- 1.- D. K. Brown.  
An Introduction to the Finite Element Method Using BASIC Pgms  
Surrey University Press U. S. A.  
Chapman & Hall, New York
- 2.- H. B. Harrison  
"Structural Analysis and Design".  
School of Civil Engineering University of Sydney  
Australia.
- 3.- Ramón Cervantes Beltrán y Victor Porrás Silva  
"Introducción al Método del Elemento Finito"  
División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería U.N.A.M.
- 4.- Irving H. Shames & Clive L. Dym.  
"Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics"
- 5.- O. C. Zienkiewicz  
"The Finite Element Method in Engineering Science"  
Mc. Graw-Hill, 1971
- 6.- S. S. Rao  
"The Finite Element Method in Engineering"  
Profesor of Mechanical Engineering  
San Diego State University, San Diego California, U.S.A.  
and Indian Institute of Technology, Hanpur, India.
- 7.- A. J. Davies.  
"The Finite Element Method"  
A First Approach.  
Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series.
- 8.- Larry J. Segerlind  
"Applied Finite Element Analysis"  
Agricultural Engineering Department  
Michigan State University
- 9.- Kenneth H. Huebner  
"The Finite Element Method for Engineers"  
Engineering Mechanics Department  
General Motors Research Laboratories
- 10.- J. Robinson  
"Integral Theory of Finite Element Methods"  
John Wiley, 1973
- 11.- J. S. Przemieniecki  
"Theory of Matrix Structural Analysis"  
Mc. Graw-Hill, New York, 1968
- 12.- P. H. Gallagher  
"Finite Element Analysis Fundamentals"  
Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey, 1975

## APENDICE 1.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA TEORIA DE LA ELASTICIDAD LINEAL

En el presente trabajo se considerará que las estructuras que se estudian están constituidas por un material sólido, elástico, lineal e isótropo. Para poder estudiar el comportamiento de tales estructuras es necesario establecer un modelo matemático con el cual se pueda considerar

- a) la geometría de la estructura
- b) las propiedades del material
- c) el sistema de cargas actuante.

El modelo matemático o las leyes que gobiernan el comportamiento mencionado y que incluyen los conceptos anteriores, son las leyes de la Mecánica del Medio Continuo que aplicadas al tipo de estructuras considerado, forman la base de la Teoría de la Elasticidad Lineal. Las ecuaciones correspondientes a cualquier punto de la estructura, son las siguientes

### A.1.1.- Ecuaciones de movimiento de Cauchy.-

Con estas ecuaciones se establece el equilibrio dinámico de cualquier punto de la estructura y se escriben como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (A.1.1.)$$

donde los  $\sigma$ 's y los  $\tau$ 's son los componentes del tensor de esfuerzos de Cauchy, que en forma matricial se escribe

$$\sigma(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (A.1.2.)$$

los  $f$ 's son los componentes del vector de fuerzas de cuerpo por unidad de masa cuya expresión es

$$f(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \quad (A.1.3.)$$

y los  $a$ 's son los componentes del vector aceleración indicados como

$$a(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.4.})$$

El vector aceleración se puede expresar en función del vector de velocidades  $v$ , del vector de posición  $p$ , y del vector de desplazamientos  $u$ , como se indica a continuación

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (\text{A.1.5.})$$

que en forma de sus componentes resulta ser

$$a(x, y, z, t) = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\}^T \quad (\text{A.1.6.})$$

$\rho = \rho(x, y, z, t)$  es la densidad de masa por unidad de volumen.

#### A.1.2. - Ecuaciones desplazamiento-deformación

El cambio en la geometría del cuerpo se mide de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & ; & & \gamma_{zx} &= 2\epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.1.7.})$$

donde  $\epsilon$  y  $\gamma$  son los componentes del tensor de deformaciones, que en forma matricial se indica como

$$\mathbb{E}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.8.})$$

A.1.3.- Ecuaciones constitutivas (relaciones esfuerzo-deformación)

La ley de Hooke generalizada nos proporciona las ecuaciones constitutivas del material

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\epsilon_{xx} + \nu(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \right\} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.1.9.})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \lambda \left\{ (1-\nu)\epsilon_{yy} + \nu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = G \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = G \gamma_{zx} \end{aligned} \quad (\text{A.1.10.})$$

o bien

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.11.})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (\text{A.1.12.})$$

donde  $\lambda$  y  $G$  son las constantes elásticas de Lamé, las cuales se relacionan con las constantes de laboratorio denominadas módulo de Young ó de elasticidad "E" y la relación de Poisson " $\nu$ " mediante las expresiones siguientes

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.1.13.})$$

siendo  $G$  el módulo de rigidez al cortante.



Las ecuaciones A.1.10. y A.1.12. se pueden agrupar en forma matricial como se indica a continuación.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.14.})$$

lo que en forma simbólica se escribe

$$\langle \sigma \rangle = [ D ] \langle \epsilon \rangle \quad (\text{A.1.15.})$$

donde  $\langle \sigma \rangle$  y  $\langle \epsilon \rangle$  son los vectores de esfuerzos y deformaciones respectivamente

[ D ] es la matriz de coeficientes elásticos, cuyas expresiones son

$$\langle \sigma \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.16.})$$

$$\langle \epsilon \rangle = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1.17.})$$

$$[ D ] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.18.})$$

#### A.1.4. - Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo son las ecuaciones de movimiento o de equilibrio dinámico (Ecs. A.1.) expresadas en función del vector de desplazamientos. Se les conoce también como ecuaciones de Navier y se escriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 G \left[ \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 G \left[ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 G \left[ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \rho f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{A.1.19.}$$

donde  $\nabla^2$  es el operador de Laplace definido por

$$\nabla^2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.1.20.}$$

Las ecuaciones planteadas son las que nos pueden ayudar a resolver problemas de equilibrio dinámico hasta para tres dimensiones, sin embargo, los problemas tratados en el presente trabajo se limitan a los casos de equilibrio estático para una y dos dimensiones, por lo cual, como se observa en el capítulo 4 al desarrollar las matrices elementales, estas ecuaciones se verán reducidas según el caso.

## APENDICE 2 .- FORMULACIÓN VARIACIONAL CON BASE EN LA ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA

Consideremos el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y deformaciones son

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} \rangle^T \quad (\text{A.2.1.})$$

$$\langle \xi \rangle = \langle \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{xz} \rangle^T \quad (\text{A.2.2.})$$

Si se somete un incremento de deformación  $\delta \xi$  a un elemento diferencial, entonces el incremento de energía de deformación que ocurre en el elemento es

$$\delta U = \sigma \delta \xi \quad (\text{A.2.3.})$$

El trabajo total hecho en el elemento para alcanzar el estado de deformación  $\xi$  es

$$U(\xi) = \int_0^\xi \sigma \, d\xi \quad (\text{A.2.4.})$$

Para un cuerpo de volumen  $V$ , sujeto a un incremento de deformaciones  $\delta \epsilon$ , la energía de deformación interna es

$$U = \int_V \sigma \, \delta \epsilon \, dv \quad (\text{A.2.5.})$$

Esta energía interna es originada por ciertas cargas que actúan en el cuerpo las cuales desarrollan un cierto trabajo  $W$ . Estas fuerzas se pueden clasificar en fuerzas internas o de cuerpo, que en un punto cualquiera tienen la forma

$$\langle F \rangle = \langle f_x \, f_y \, f_z \rangle \quad (\text{A.2.6.})$$

y el vector de fuerzas de superficie ó cargas externas expresado por

$$\langle T \rangle = \langle t_x \, t_y \, t_z \rangle \quad (\text{A.2.7.})$$

así

$$W = \int_V f_i \, u_i \, dv + \int_0 t_i \, u_i \, ds \quad (\text{A.2.8.})$$

y

$$\delta W = \int_V f_i \, \delta u_i \, dv + \int_0 t_i \, \delta u_i \, ds \quad (\text{A.2.9.})$$

Sustituyendo las definiciones anteriores en la ec. 2.20.

$$\Pi = U - W = \int_V \sigma \, \xi \, dv - \int_V f_i \, u_i \, dv - \int_0 t_i \, u_i \, ds \quad (\text{A.2.10.})$$

en donde la primera integral representa la energía interna o de deformación, la segunda representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo sobre la estructura y la tercera representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de superficie.

Si aplicamos el principio de la energía potencial mínima haciendo  $\delta\Pi = 0$  tendremos

$$\delta\Pi = \int_V \sigma \delta\varepsilon \, dv - \int_V f_i \delta u_i \, dv - \int_S t_i \delta u_i \, ds = 0 \quad (\text{A.2.11.})$$

despejando

$$\int_V \sigma \delta\varepsilon \, dv = \int_V f_i \delta u_i \, dv + \int_S t_i \delta u_i \, ds \quad (\text{A.2.12.})$$

expresión que en notación matricial se escribe como

$$\int_V \langle \delta \mathbf{s} \rangle^T \langle \sigma \rangle \, dv = \int_V \langle \delta \mathbf{s} \rangle^T \langle \mathbf{F} \rangle \, dv + \int_S \langle \delta \mathbf{s} \rangle^T \langle \mathbf{T} \rangle \, ds \quad (\text{A.2.13.})$$

pero recordando la relación esfuerzo-deformación:  $\langle \sigma \rangle = [D] \langle \varepsilon \rangle$  (Cap. 1.3.), donde  $[D]$  es la matriz de propiedades elásticas, entonces

$$\int_V \langle \delta \mathbf{s} \rangle^T [D] \langle \mathbf{s} \rangle \, dv = \int_V \langle \delta \mathbf{U} \rangle^T \langle \mathbf{F} \rangle \, dv + \int_S \langle \delta \mathbf{U} \rangle^T \langle \mathbf{T} \rangle \, ds \quad (\text{A.2.14.})$$

si aproximamos el campo de desplazamientos con

$$\mathbf{U} = \sum N_i u_i \quad \text{o bien} \quad \langle \mathbf{U} \rangle = [N] \langle u_i \rangle \quad (\text{A.2.15.})$$

siendo  $[N]$  la matriz de funciones de aproximación y sabiendo que

$$\langle \mathbf{s} \rangle = [L] \langle \mathbf{U} \rangle = [L] [N] \langle u_i \rangle \quad (\text{A.2.16.})$$

donde a  $[L]$  se le conoce como la matriz de operadores diferenciales, entonces

$$\langle \delta \mathbf{s} \rangle = [L] \langle \delta \mathbf{U} \rangle = [L] [N] \langle \delta u_i \rangle \quad (\text{A.2.17.})$$

y por otro lado

$$\langle \sigma \rangle = [D] \langle \mathbf{s} \rangle = [D] [L] \langle \mathbf{U} \rangle = [D] [L] [N] \langle u_i \rangle \quad (\text{A.2.18.})$$

lo cual se puede escribir como

$$\langle \sigma \rangle = [D] [B] \langle u_i \rangle \quad (\text{A.2.19.})$$

donde  $[B]$  es la matriz representada como

$$[B] = [L] [N] \quad (\text{A.2.20.})$$

sustituyendo las relaciones anteriores en la ec. 2.33. se tiene

$$\int_V \{\delta u_i\}^T [N] [L] [D] [B] \{ \delta u_i \} dv = \int_V \{\delta u_i\}^T [N] \{ F \} dv + \int_S \{\delta u_i\}^T [N] \{ T \} ds \quad (A.2.21.)$$

o bien

$$\int_V \{\delta u_i\}^T [B] [D] [B] \{ \delta u_i \} dv = \int_V \{\delta u_i\}^T [N] \{ F \} dv + \int_S \{\delta u_i\}^T [N] \{ T \} ds \quad (A.2.22.)$$

simplificando

$$\int_V [B]^T [D] [B] \{ U \} dv = \int_V [N]^T \{ F \} dv + \int_S [N]^T \{ T \} ds \quad (A.2.23.)$$

$$[K] \{ U \} = \{ P \} \quad (A.2.24.)$$

de donde se desprende que la matriz de rigideces  $[K]$  esta dada por

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (A.2.25.)$$

Resolviendo al sistema representado en la ec. A.2.24. podremos conocer  $\{ U \}$  y entonces aplicar

$$\{ U \} = [N] \{ u_i \} \quad (A.2.26.)$$

$$\{ \xi \} = [L] \{ U \} \quad (A.2.27.)$$

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \xi \} = [D] [B] \{ u_i \} \quad (A.2.28.)$$

De lo anterior se deduce que tanto la matriz  $[K]$  como el vector  $\{ P \}$  dependen de la elección de  $[N]$ .

En general, como se ve en el capítulo 4, tanto la formulación de los residuos pesados como la variacional, conducen a expresiones para las matrices de rigideces del tipo de la ec. A.2.25.

### APENDICE 3.- TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

Introduciendo las funciones de forma del elemento en coordenadas locales (no deformadas) en tres dimensiones

$$N_i' = N_i'(\xi, \eta, \zeta) \quad (\text{A.3.1.})$$

podemos escribir la siguiente relación

$$\begin{aligned} X &= N_1 X + N_2 X + N_3 X + \dots + N_m X_m = N_i X_i \\ Y &= N_1 Y + N_2 Y + N_3 Y + \dots + N_m Y_m = N_i Y_i \\ Z &= N_1 Z + N_2 Z + N_3 Z + \dots + N_m Z_m = N_i Z_i \end{aligned} \quad (\text{A.3.2.})$$

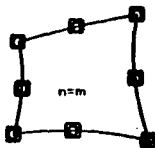
donde X, Y, Z, son las coordenadas cartesianas de cualquier punto localizado en el elemento deformado

$X_i, Y_i, Z_i$ , son las correspondientes coordenadas cartesianas de los m puntos seleccionados apropiadamente en la frontera de los elementos.

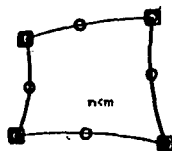
Por otro lado la representación de la variable de campo U en términos de las coordenadas curvilíneas  $(\xi, \eta, \zeta)$  y las funciones de forma resulta ser

$$U = N_i(\xi, \eta, \zeta) U_i \quad (\text{A.3.3.})$$

donde  $U_i$  ( $i=1, n$ ), son los valores de la variable U en los puntos nodales del elemento .



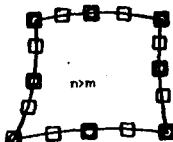
a) ISOPARAMETRICO



b) SUPERPARAMETRICO

$$x = N_i u_i \quad (i=1, m)$$

$$u = N_i u_i \quad (i=1, n)$$



c) SUBPARAMETRICO

○ Punto donde se define la coordenada (m)

□ Punto donde se define la función (n)

fig A.3.4.- Transformación de coordenadas mediante funciones de forma (ref. 10)

Los n puntos utilizados para definir la interpolación de la función U pueden o no estar relacionados con los m puntos empleados para definir la geometría del elemento. Así por ejemplo, como se muestra en la figura A.3.1. para un elemento cuadrilátero plano de lados curvos, en donde las funciones de forma son  $N_i$  ( $i=1,8$ ) para definir la geometría del elemento son cuadráticas, mientras que las funciones de forma  $N_i$  para definir la función U pueden ser lineales ( $i=1,4$ ), cuadráticas ( $i=1,8$ ) o cúbicas ( $i=1,12$ ). Así pues, se pueden distinguir tres tipos de elementos que son

- a) Isoparamétricos      cuando  $n = m$
- b) Superparamétricos    cuando  $n < m$
- c) Subparamétricos      cuando  $n > m$

Para poder realizar el mapeo de elementos finitos con formas distorsionadas en coordenadas globales (X,Y,Z), a elementos con geometría regular en coordenadas locales ( $\xi, \eta, \zeta$ ), se procede como sigue

Las derivadas parciales de las funciones de forma  $N_i$  respecto a las variables locales por la regla de la cadena se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (A.3.4.)$$

y en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

(A.3.5.)

donde [J] es la matriz Jacobiana, que se puede cuantificar explícitamente con base en las ecs. A.3.2. La expresión A.3.5. también se puede escribir como

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 3. 6.})$$

para el caso de 4 nodos y 3 dimensiones, el Jacobiano se puede obtener de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_4}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 3. 7.})$$

siendo  $X_i, Y_i, Z_i, (i=1,4)$ , las coordenadas de los puntos nodales.



APENDICE 4.- INTEGRACION NUMERICA

Quando se requiere integrar un área distorsionada (irregular), como en el caso de los elementos cuadriláteros generales (isoparamétricos), donde se tienen expresiones como la siguiente (ap. 2)

$$I = t \int_x \int_y [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta \quad (A.4.1.)$$

debido a la complejidad del integrando, se recurre a una aproximación mediante la integración numérica, proceso que se describe a continuación considerando la siguiente integral en una dirección

$$I = \int_{-1}^1 y(x) dx \quad (A.4.2.)$$

La cuadratura de Gauss resulta ser la más recomendable y la más usada. Evaluando I con una franja y a la mitad del intervalo (fig.A.4.1.) resulta  $I \approx 2y$ . Pero esto sería exacto solo si la función "y" es una línea recta (función lineal).

Si generalizamos esta relación nos da

$$I = \int_{-1}^1 y(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i y_i \quad (A.4.3.)$$

donde  $W_i$  es el llamado "peso" asociado al i'ésimo punto y n es el número de puntos.

Así pues, la integral de la ec. A.4.1. se puede aproximar mediante

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta \quad (A.4.4.)$$

y finalmente

$$I = \sum_{i=1}^n W_i \left[ \sum_j W_j f(\xi_i, \eta_j) \right] = \sum_i \sum_j W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (A.4.5.)$$

La localización de los puntos i, j de integración y sus pesos asociados dados a través de la cuadratura de Gauss se dan en la siguiente tabla para 1, 2, y 3 puntos.

# de pto.	localización	peso asociado
1	x = 0.0	2
2	x , x = 0.57735	1
3	x , x = 0.77459 x = 0.0	5/9 8/9

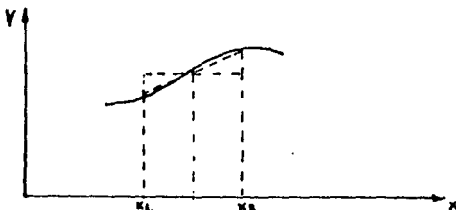


fig. A. 4. 1. Evaluación de una integral con dos puntos (cuadratura de gauss).

## APENDICE 5.- COORDENADAS NATURALES

Un sistema local de coordenadas que ayuda a la definición geométrica del elemento, y cuyo rango de coordenadas se encuentra entre cero y la unidad dentro del elemento, es conocido como un sistema de coordenadas naturales. Tal sistema tiene la propiedad de que una coordenada particular tiene valor unitario en un nodo del elemento y valor nulo en los demás nodos; la variación entre nodos es lineal. Podemos construir sistemas coordenados naturales para dos nodos (elementos rectos), tres nodos (elementos triangulares), cuatro nodos (elementos cuadriláteros), etc.

El propósito básico de un sistema de coordenadas naturales es el describir la ubicación de un punto dentro de un elemento en términos de coordenadas asociadas con los nodos del elemento.

### A.5.1.- Coordenadas Naturales en una dimensión

La fig. A.5.1. muestra un elemento lineal en el cual queremos definir un sistema de coordenadas naturales. Si denotamos a  $L_1$  y  $L_2$  como las coordenadas naturales, la localización del punto  $X_p$  se puede expresar como una combinación lineal de las coordenadas nodales  $X_1$  y  $X_2$ , esto es

$$X_p = L_1 X_1 + L_2 X_2 \quad (A.5.1.)$$

Las coordenadas  $L_1$  y  $L_2$  pueden ser interpretadas como funciones de peso relacionando las coordenadas de los nodos extremos con las coordenadas de cualquier punto interior. Es claro que las funciones de peso no son independientes, así que se debe cumplir

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (A.5.2.)$$

las ecs. A.5.1. y A.5.2. pueden ser resueltas simultáneamente para las funciones  $L_1$  y  $L_2$  con el siguiente resultado

$$L_1(x) = \frac{X_2 - X}{X_2 - X_1} \quad ; \quad L_2(x) = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \quad (A.5.3.)$$

Las funciones  $L_1$  y  $L_2$ , como se ve, son simples relaciones de longitud. La variación de  $L_1$  se muestra en la figura A.5.2.

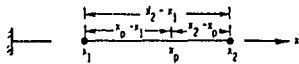


fig. A.5.1.- Elemento unidimensional de dos nodos en coordenadas globales  $x_p$  definiendo un punto dentro del elemento

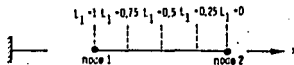


fig.- A.5.2.- Variación de la función de peso dentro del elemento

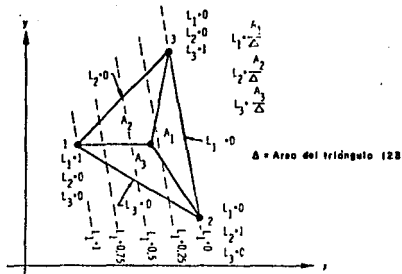


fig. A.5.3.- Coordenadas de área para un triángulo

A.5.2.- Coordenadas naturales en dos dimensiones

El desarrollo de coordenadas naturales para elementos triangulares sigue el mismo procedimiento que para el caso unidimensional. Otra vez, el caso es elegir las coordenadas  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  para describir la posición de cualquier punto  $X_p$  dentro del elemento o en su frontera. Las coordenadas cartesianas originales de un punto en el elemento se deben relacionar linealmente con las nuevas coordenadas, por medio de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} X &= L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 \\ Y &= L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3 \end{aligned} \quad (A.5.4.)$$

en adición a estas ecuaciones se requiere que la suma de las funciones de peso sea unitaria, o sea

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (A.5.5.)$$

resolviendo las ecuaciones anteriores, nos resultan las coordenadas naturales en términos de las coordenadas cartesianas, como se ve a continuación

$$\begin{aligned} L_1(X,Y) &= \frac{1}{2A} (a_1 + b_1X - c_1Y) \\ L_2(X,Y) &= \frac{1}{2A} (a_2 + b_2X + c_2Y) \\ L_3(X,Y) &= \frac{1}{2A} (a_3 + b_3X + c_3Y) \end{aligned} \quad (A.5.6.)$$

donde

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X & Y \\ 1 & X & Y \\ 1 & X & Y \end{vmatrix} = 2 \text{ (Área triang. 1-2-3)} \quad (A.5.7.)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= X_2Y_3 - X_3Y_2, & b_1 &= Y_2 - Y_3, & c_1 &= X_3 - X_2 \\ a_2 &= X_3Y_1 - X_1Y_3, & b_2 &= Y_3 - Y_1, & c_2 &= X_1 - X_3 \\ a_3 &= X_1Y_2 - X_2Y_1, & b_3 &= Y_1 - Y_2, & c_3 &= X_2 - X_1 \end{aligned} \quad (A.5.8.)$$

si pensamos en que las coordenadas naturales  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son precisamente las funciones para interpolación lineal sobre un triángulo se tiene,  $N_i = L_i$  para un triángulo lineal.

$L_i(X,Y)$  para un elemento triangular es una relación de áreas, la fig. A.5.3. muestra cómo las coordenadas naturales, también llamadas coordenadas de área, se relacionan con las áreas. Cuando el punto  $X_p$  se localiza en la frontera del elemento, uno de los segmentos de área se desvanece; de ahí que la coordenada de área a lo largo de la frontera sea cero. Por ejemplo, cuando  $(X_p, Y_p)$  está en la línea 1-3, entonces

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = 0 \quad \text{y} \quad A_2 = 0 \quad (A.5.9.)$$