



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL

AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA TEORÍA DE AUTOMATAS CELULARES
Y SUS APLICACIONES EN BIOFÍSICA

TESIS
QUE PARA OBTENER
EL TÍTULO DE
FÍSICO
PRESENTA

OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL

México, D.F. 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

Capítulo 1	pag
Introducción	1
Capítulo 2	
Aspectos básicos de los autómatas celulares elementales..	4
Capítulo 3	
Clasificación de autómatas celulares	9
3.1 La clasificación dinámica de Wolfram	9
3.2 La clasificación de patrones	11
3.2a Las condiciones iniciales	11
3.2b El número de sitios iniciales	13
3.2c La distribución inicial de estados	16
3.2d Estabilidad y perturbaciones	19
3.2e Un método de clasificación jerárquica	21
Capítulo 4	
Los autómatas celulares como modelo en morfogénesis	30
4.1 Información posicional y crecimiento clonal	30
4.2 Los AC como modelo en la formación de patrones biológicos	31
Capítulo 5	
Conclusiones	39
Bibliografía	40
Apéndice A	41
Apéndice B	48

INTRODUCCION

Si bien se ha utilizado (abusivamente) la frase *teoría de autómatas celulares* en el título de este trabajo, el lector no deberá confundir la idea contenida en ella como sinónimo de un cuerpo teórico bien fundado (con todo y rigor lógico-formal) a la manera de como, por ejemplo, la Teoría de Sistemas Dinámicos Continuos se ha desarrollado hasta nuestros días. Los autómatas celulares se han estudiado solo recientemente y su estudio ha partido más bien, de una base "experimental" desde la que es posible el estudio del comportamiento y de la fenomenología asociada. Debido a ello, es posible hablar, hoy, de algunas de las propiedades cualitativas y cuantitativas; pero no de grandes generalizaciones y mucho menos de los grandes teoremas propios de una teoría matemática madura. El trabajo que aquí se presenta no es ninguna excepción (ni se lo propone), su enfoque encuentra su base en la "experimentación", en el estudio fenomenológico y por ello es necesario advertir que las pocas conclusiones con afán "generalizador" sólo encuentran su argumentación en múltiples ejemplos (la razón de la casi interminable sucesión de figuras), en este sentido, más que demostraciones, deberían ser consideradas como meras *mostraciones*.

En el primer capítulo de este trabajo, se hará una revisión introductoria a los autómatas celulares y en particular, a un tipo conocido como autómatas celulares elementales; que corresponden a aquellos en una dimensión, formados por dos elementos distintos y con interacciones locales con sus vecinos más inmediatos. En este capítulo se explicará además la noción de patrón para los autómatas celulares.

En el capítulo 2 se hablará de dos posibles clasificaciones para los autómatas celulares elementales. La primera de ellas, introducida por S. Wolfram (1984a), se basa en el análisis de los

atractores que aparecen en el espacio de configuración y que pueden ser considerados como análogos a los que aparecen en el caso de los sistemas dinámicos continuos. La segunda es una propuesta de clasificación de patrones en base a un método de la estadística multivariada conocido como análisis de cúmulos. Debido a que el patrón que genera un autómata celular depende de sus condiciones iniciales, se hará una breve discusión sobre tal dependencia, antes de abordar el problema de la clasificación de patrones. Se hablará pues, de algunas de las propiedades de los autómatas celulares que son invariantes frente a cambios en las condiciones iniciales, así como del tipo de comportamientos que pueden surgir cuando los autómatas se encuentran en condiciones de perturbación. Una vez hecho este análisis se procederá a elegir una única condición inicial para generar los patrones que se van a clasificar. Como resultado tendremos a los patrones agrupados en familias de acuerdo al grado de semejanza que exista entre ellos y que se caracterizara por medio de un índice relativo cuantitativo. Podría agregarse que hasta donde nos es posible saber, este intento de clasificación no se ha hecho previamente.

En el último capítulo se propondrá un modelo para la formación de patrones biológicos, en base a los autómatas celulares elementales. El modelo hará uso de las hipótesis del modelo de información posicional de L. Wolpert (1968, 1978) y las del modelo propuesto por Coche et. al. (1986b). Supone pues, que la información de como interactuar la obtienen, los autómatas celulares (que simulan a las células de un tejido biológico en crecimiento), de acuerdo a un mecanismo de umbral probabilístico que depende de la concentración de sustancias con acción morfógena la cual, a su vez, depende de la posición relativa en el espacio en que ocurre la reproducción celular. Los autómatas celulares que se utilizarán en el modelo estarán caracterizados por su semejanza asignada según lo vimos en el capítulo 2. Se estudiará también, la "conducta de interacción" entre diversos tipos de autómatas con distintos índices de semejanza. Se dará respuesta a la pregunta de

¿que sucede cuando interaccionan autómatas celulares con patrones parecidos o distintos entre sí?. Este modelo de interacción nos permitirá distinguir la existencia de comportamientos en los patrones que no es posible observar en los autómatas celulares por separado.

ASPECTOS BASICOS DE LOS AUTOMATAS CELULARES

Los Automatas celulares (AC) son sistemas dinámicos discretos en el espacio y en el tiempo que poseen construcciones simples y son capaces de mostrar comportamientos de gran complejidad¹. Por ello, los AC pueden utilizarse como modelos para simular el comportamiento de diversos sistemas complejos que aparecen en la naturaleza y que se caracterizan por poseer un número grande de componentes iguales con interacciones locales entre ellos. Ejemplos típicos son los sistemas biológicos formados por células que interactúan entre sí mediante diversos procesos bioquímicos y eléctricos (en particular el problema de la formación de patrones); los sistemas físicos no lineales como es el caso de los fluidos turbulentos en hidrodinámica, el crecimiento de cristales en estado sólido y el modelo de Ising en mecánica estadística (Wolfram 1984b).

Los autómatas celulares están formados por un conjunto de sitios acomodados en el espacio mediante mallas regulares; los sitios pueden tomar un único estado de entre un conjunto de estados posibles. Si los AC son binarios, sus sitios pueden tomar un valor de entre dos posibles, si son terciarios el conjunto de estados posibles tendrá tres valores y así sucesivamente. El estado (o valor) que cada sitio puede tomar está determinado por una regla de propagación y por los estados previos de los sitios vecinos. Si la evolución del autómata celular se realiza de tal modo que el estado de un sitio se asigna sólo si los valores de todos los sitios de la generación anterior se han asignado ya,

¹ Por ejemplo, son capaces de exhibir una gran diversidad de comportamientos dinámicos: homogéneos, periódicos, caóticos, autoorganizados, autosimilares, autoestructurados, etc..

entonces se dice que la propagación, o bien, el autómata celular es sincrónico, de otra manera el autómata celular es asincrónico. Si el conjunto de sitios que forman al autómata celular en una generación, se acomodan en un arreglo lineal, diremos que el autómata celular es unidimensional.

Podemos formalizar lo anterior mediante la siguiente expresión:

$$a_j^t = F \left[a_{j-r}^{t-1}, a_{j-r+1}^{t-1}, a_j^{t-1}, \dots, a_{j+r}^{t-1} \right] \quad (i)$$

donde a_j^t representa el j -ésimo sitio al tiempo t (a la generación t). Cada sitio puede tomar un valor en el rango $[0..k-1]$ donde k es el número total de posibles estados (si el autómata es binario $k=2$) y F es una función que determina la regla de propagación. El parámetro r determina el rango de la interacción: si $r=1$ la interacción se realiza "a primeros vecinos", es decir, sólo los sitios más inmediatamente próximos al sitio en cuestión participan en la definición de su valor. si $r=2$ la interacción es "a segundos vecinos" y así sucesivamente. El número de sitios que participan en la definición del estado de un sitio en la siguiente generación está dado por $n=2r+1$. En lo sucesivo consideraremos únicamente un tipo particular de autómata celular que es el más simple: aquel con $k=2$, $r=1$, $n=3$ y con propagación sincrónica en una dimensión. Este autómata celular es pues, un autómata celular binario con interacción a primeros vecinos, que también se conoce como autómata celular elemental.

El número total de autómatas celulares distintos o bien, el número total de posibles reglas de propagación está dado por:

$$\tau = k^{(2r+1)}$$

para nuestro caso $\tau=256$. Si los sitios que interactúan son tres y sus posibles valores son sólo "0" y "1", tenemos entonces ocho posibles combinaciones binarias como podemos observar en la siguiente tabla:

a_{i-1}^t	a_i^t	a_{i+1}^t
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	0	1
1	1	1

La función F será en el caso de los AC elementales, una función que aplicada a tres valores binarios nos proporcionara un número binario, es decir se trata de un mapeo de $\{0,1\}^3$ a $\{0,1\}$ donde F , según lo expresado en (i) tendrá la forma:

$$a_i^{t+1} = F \left[a_{i-1}^t, a_i^t, a_{i+1}^t \right]$$

Podemos entonces, a la manera en como se realiza en álgebra booleana, definir una tabla de verdad para cada una de las 256 reglas de propagación. Como ejemplo, podemos observar la salida para la regla $F=a+b+c$ (donde $a=a_{i-1}, b=a_i, c=a_{i+1}$) y la salida para $F=a+(b \cdot c)$ ²:

<u>a</u>	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>a+b+c</u>	<u>a+(b·c)</u>
0	0	0	0	0 (bit menos significativo)
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

² Las operaciones $+$ y \cdot , son las operaciones lógicas OR y AND.

1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	0 (bit más significativo).

Puesto que la salida de la función $F=a+b+c$ es única, podemos referirnos a ella mediante su "codigo binario" o sea 10010110 (el bit menos significativo se acomoda en el extremo derecho) o bien, mediante su "codigo decimal", que no es otra cosa que la representación decimal del número binario correspondiente, es decir 150. Por su parte la función $F=a+(b \cdot c)$ tiene como código binario 01111000 y como "codigo decimal" 120³. Nos referiremos de aquí en adelante al autómata celular mediante su código binario o decimal indistintamente. Cada regla de propagación produce un tipo distinto de patrón que definiremos de la siguiente manera:

Def1. El patrón $P_{R_1}(t)$ de un autómata celular con regla R_1 , es la gráfica con respecto al tiempo del conjunto de todos los sitios a_j^t que forman dicho autómata celular.

En la figura 1 se muestra el patrón para los autómatas con regla 150(a) y 120(b); el estado "1" está representado por el color negro y el estado "0" por el color blanco.

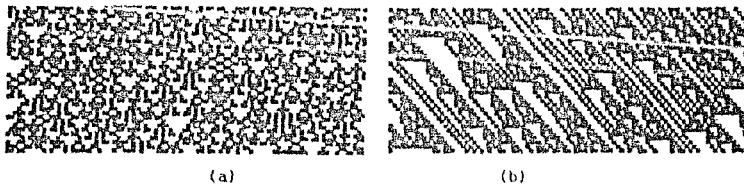


Figura 1.

El comportamiento de los autómatas celulares y sus respectivos patrones permiten agruparlos en "clases". Los

3 Notemos que la interacción de los estados 000 define al bit menos significativo de la regla y determina si la regla es un número par o impar. Por otra parte, el segmento 111 define al bit más significativo y determina si la regla es un número mayor, igual o menor a 128.

autómatas celulares que pertenecen a una misma clase exhiben comportamientos cualitativos similares entre sí, lo anterior, hace posible abordar el problema de la clasificación que discutiremos a continuación.

CLASIFICACION DE AUTOMATAS CELULARES

3.1) LA CLASIFICACION DINAMICA DE WOLFRAM.

Uno de los primeros intentos de clasificación para los autómatas celulares se debe a Stephen Wolfram (1984a), quien basado en el análisis de un gran número de tipos de autómatas celulares, ha sugerido que posiblemente todos los AC pueden ser agrupados en cuatro clases generales, según el tipo de comportamiento cualitativo que exhiben. En casi todos los casos, la evolución de los AC es irreversible. Después de cierto tiempo, las trayectorias en el espacio de configuración, que comienzan casi de cualquier estado inicial, se concentran en atractores (recordemos que los AC son sistemas dinámicos), lo anterior permite la aparición de comportamientos de "autoorganización" en algunos tipos de AC (es decir, la aparición de estados "estructurados" partiendo de estados iniciales sin ninguna estructura). La naturaleza de los atractores determina la forma y la extensión de tales estructuras y da pauta además, a una posible clasificación dinámica de autómatas celulares. Wolfram propone la existencia de cuatro clases cuyos atractores respectivos, en tres de los casos, serían análogos a los atractores que aparecen en los sistemas dinámicos continuos. Así, los atractores de la clase 1 serían similares a los puntos límite, los de clase 2 a los ciclos límite, los de clase 3 a los "atractores extraños"; mientras que los de clase 4 exhibirían un comportamiento mucho más complejo capaz de implementar, en su evolución, cualquier algoritmo finito, es decir serían capaces de exhibir un comportamiento, que Wolfram denomina, de "computación universal". En apariencia, la clasificación en cuatro clases es válida para cualquier tipo de autómatas celulares en una dimensión, sin embargo la abundancia relativa de los miembros de una clase depende tanto del parámetro k , es decir, del número de estados posibles; así como del

parámetro r que fija la distancia de interacción, como ejemplo podemos ver la tabla siguiente, en la que se muestra la abundancia porcentual de las clases para distintos tipos de autómatas celulares (Wolfram 1984a):

Clase	k=2		k=3	
	r=1	r=2	r=3	r=1
1	0.50	0.25	0.09	0.12
2	0.25	0.16	0.11	0.19
3	0.25	0.53	0.73	0.60
4	0.00	0.00	0.05	0.07

Como puede advertirse, entre los AC elementales no existen los de clase 4.

Los autómatas celulares de clase 1 evolucionan, después de un cierto número de generaciones y partiendo de casi cualquier estado inicial, hacia un estado homogéneo en el cual, todos los sitios tienen el mismo valor, por ello la evolución de estos autómatas celulares en el espacio fase puede considerarse como una evolución hacia un "punto límite". Tal evolución destruye completamente cualquier información contenida en la configuración inicial.

Los autómatas celulares de clase 2 generan estructuras simples que pueden ser estables o periódicas. La evolución de los autómatas celulares de clase 2 es análoga a la de algunos sistemas dinámicos continuos a ciclos límite.

Los autómatas celulares de clase 3 producen patrones caracterizados por estructuras definidas y con escalamiento múltiple¹; de acuerdo a la condiciones iniciales, estos AC pueden generar patrones periódicos con periodo variable. La evolución de

¹ La propiedad de escalamiento múltiple, que también se conoce como autosemejanza o invarianza de escala, la podemos entender intuitivamente del siguiente modo: si se toma una porción del patrón y se "amplifica" (es decir se cambia la escala) y se encuentra que tal porción amplificada es indistinguible del patrón original, entonces decimos que existe escalamiento múltiple en el patrón. Los autómatas celulares de clase 3 poseen esta propiedad y además la dimensión fractal igual a $\log_2 3 \approx 1.59$ es la más común en sus patrones (Wolfram 1984b).

esta clase de autómatas celulares es analoga a la evolución de algunos sistemas dinámicos continuos a atractores extraños.

3.2) LA CLASIFICACION DE PATRONES

Los autómatas celulares han sido utilizados para modelar diversos fenómenos de naturaleza morfogenética y en particular los patrones de coloración en la piel de algunos animales (e.g. Cocho et. al., 1986b). Se ha propuesto que, bajo ciertas condiciones, las células embrionarias portadoras de pigmentos pueden interactuar al reproducirse y generar patrones de coloración semejantes a los que podrían generar los autómatas celulares, es decir, tales patrones de coloración podrían seguir dinámicas semejantes a las que se presentan en la propagación de los AC. Si aceptamos esta idea, en principio, tendríamos que ser capaces de identificar en la naturaleza patrones semejantes a los generados por autómatas celulares; sin embargo el número de AC y de patrones puede llegar a ser muy grande. Para el caso de los AC que estamos manejando, el número llega a 256 patrones que serian estrictamente distintos entre si; pero el número de "patrones similares" es un poco menor (entendidos estos, por el momento, como aquellos que presentan estructuras semejantes). Aún así, es necesario contar con una clasificación que agrupe a aquellos patrones "semejantes" y que nos pueda indicar cuales y que tanto son "similares" entre si. Antes de pasar a revisar el problema mismo de la clasificación, convendría revisar algunos aspectos generales sobre la dependencia que existe entre las condiciones iniciales del autómata celular y los patrones que puede generar.

3.2a) Las condiciones iniciales.

Por condiciones iniciales vamos a entender tanto el número N de sitios que forman al autómata celular en el tiempo inicial (también le llamaremos longitud del AC), así como la distribución (o acomodo) de todos los estados posibles en cada sitio. En cuanto a lo primero, es importante distinguir cuando la longitud es finita (un autómata celular finito) o cuando tal longitud tiende a

infinito (un AC infinito), pues para algunos autómatas celulares esta distinción determina algunas de sus propiedades. En cuanto a lo segundo, la proporción entre el número de veces que aparece un estado y el número de veces que aparecen otros, afecta el patrón del AC y no sólo la proporción, sino también la distribución (e.g. si es aleatoria, uniforme, en dominios alternados, etc..) determina el tipo de patrón que un mismo AC es capaz de generar. Antes de revisar con más detalle la dependencia patrón-condiciones iniciales, introduciremos las siguientes definiciones.

Def2. Llamaremos densidad de estado al número de veces que un mismo estado E particular aparece en una generación t dada del AC y la representaremos por $n_t(E)$. Si el autómata celular es binario, únicamente existen dos densidades de estado: $n_t(1)$ para los estados representados por "1" y $n_t(0)$ para los representados por "0". En el primer caso hablaremos directamente de densidad de unos y en el segundo de densidad de ceros².

Def3. Definiremos el comportamiento dinámico de la densidad de estado de la siguiente manera:

- i) Si $n_t(E) = c$ (c constante), diremos que el comportamiento dinámico es constante.
- ii) Si $n_t(E) = n_{t+c}(E)$ (c entero), diremos que el comportamiento dinámico es periódico, con periodo igual a c.
- iii) Si $n_t(E)$ es aperiódico, diremos que el patrón tiene comportamiento aperiódico o caótico.

Como una observación podemos decir que estos comportamientos constantes, periódicos y caóticos pueden caracterizar a la mayoría de los autómatas celulares de clase 1, 2 y 3 respectivamente, según la clasificación de Wolfram (recordemos que

² Más correctamente deberíamos llamar a esta propiedad "frecuencia de estado"; pero hemos optado por densidad para no introducir confusiones con respecto a la frecuencia de un comportamiento periódico. Por otra parte, es claro que la densidad así definida, no está normalizada.

en esta clasificación, los comportamientos dinámicos se definen en el espacio de configuración y no con la densidad de estado).

▷Df4. Diremos que dos patrones son idénticos si y sólo si son iguales punto a punto. Sean $P_{R1}(t)$ y $P_{R2}(t)$ dos patrones formados por los sitios a_i y b_j respectivamente, y que son generados por las reglas $R1$ y $R2$. Si ambos patrones son idénticos entonces:

$$P_{R1}(t) = P_{R2}(t) \iff a_i^t = b_j^t \quad \forall t, (i=j).$$

▷Df5. Diremos que existe equivalencia topológica entre dos patrones generados por el mismo autómata celular si el comportamiento dinámico de sus patrones es el mismo.

▷Df6. Diremos que un cambio en las condiciones iniciales de un AC es no-esencial si tal cambio no altera la equivalencia topológica entre los patrones antes y después del cambio. Si se cambia la equivalencia topológica, diremos que el cambio en las condiciones iniciales es esencial.

3.2b) El número de sitios iniciales.

Ejemplificaremos mediante tres autómatas celulares de distinta clase los tres tipos de comportamiento dinámico introducidos en la definición 3. En los tres casos que se muestran en la figura 2 tenemos AC generados a partir de una condición inicial aleatoria, donde la aparición de "ceros" y "unos" es equiprobable; la longitud de la condición inicial es de 80 sitios ($N=80$) y las condiciones de borde son periódicas (el AC se propaga sobre la superficie de un cilindro). En (a) se muestra un patrón generado por la regla 255; este AC genera "unos" independientemente de la condición inicial, lo anterior implica que $n_1(t)$ es igual a N , y por lo tanto su histograma es constante como puede apreciarse en (a'). El autómata celular generado por la

regla 255 no es "legal"³ pero exhibe un comportamiento como el que caracteriza a los autómatas de clase 1. En (b) se muestra el patrón generado por el autómata celular con regla 117 y en (b') se muestra el histograma correspondiente de $n_t(1)$ como puede observarse $n_t(1) = n_{t+2}(1)$, es decir, el AC es periódico con periodo igual a 2. El AC con regla 117 no es, como en el caso anterior, un autómata celular "legal" pero exhibe un comportamiento característico de los AC de clase 2. Finalmente en (c) aparece el patrón generado por el AC con regla 18, y en (c') se muestra su histograma, el patrón exhibe un comportamiento estructurado autoorganizado, es decir, es capaz de formar estructuras (los triángulos) a partir de condiciones iniciales sin estructura, lo anterior lo sitúa como un AC de clase 3. El comportamiento de $n_t(1)$ es aperiódico en el intervalo de las primeras 150 generaciones. Veamos pues como influye en estos autómatas celulares un cambio en la longitud inicial, es decir en la magnitud de N (además de estos tres ejemplos, hemos probado todos los 256 AC elementales).

En el caso del autómata celular con regla 255, un cambio en la magnitud de N no modifica el comportamiento dinámico de $n_t(1)$, éste se mantiene constante e igual a N . En el caso del autómata con regla 117 el cambio en la magnitud de N , es capaz de modificar el valor máximo de $n_t(1)$; pero no modifica el comportamiento dinámico. Lo anterior podemos verlo en la figura 3, en (a) aparece el histograma para $N=20$ y en (b) para $N=40$, en ambos casos el periodo se conserva igual a dos. En (c) aparece el histograma de $n_t(1)$ para el autómata con regla 18 cuando $N=20$, como puede observarse el comportamiento dinámico es periódico con periodo 7 (las flechas señalan el inicio de un periodo). En (d) aparece el histograma del mismo autómata cuando $N=4$; en este caso exhibe un comportamiento periódico con periodo 67. En el caso del histograma

³ Según la definición de Wolfram, los AC son legales si sus reglas generan un cero a partir de una interacción entre ceros y si existe simetría en los casos 001 y 100, así como en 110 y 011.

de la figura 2(c') el AC exhibió un comportamiento periódico con periodo 25 después de un transiente aperiódico de 200 generaciones, cuando $N=100$ se observó una periodicidad con periodo 263 después de un transiente aperiódico de 125 generaciones. Lo anterior sugiere que cuando N crece el periodo crece de tal manera que cuando el autómata es infinito el periodo también lo es. De hecho cualquier autómata celular finito de clase 3 presenta un comportamiento periódico con periodo de a lo más 2^N generaciones (el número total de posibles configuraciones iniciales) después de un transiente aperiódico inicial, el tiempo que toma en ocurrir el primer ciclo se conoce como tiempo de recurrencia de Poincaré (Wolfram, 1983).

Veamos ahora directamente sobre los patrones, el efecto de modificar la longitud inicial del autómata celular. En la figura 4(a) tenemos los patrones generados por el autómata "legal" de clase 1 definido por la regla 76. En la parte superior aparece el patrón generado por condiciones iniciales aleatorias con $N=20$, podemos comparar este patrón con el que se obtiene cuando $N=40$, observamos que el patrón de los primeros 20 sitios, cuando $N=40$, es idéntico punto a punto al generado por el AC cuando $N=20$ (las condiciones iniciales son las mismas), podemos afirmar entonces que existe una contención propia del primer patrón en el segundo; por lo tanto la variación de N no modificó el patrón (existe identidad punto a punto). Podemos observar que lo mismo sucede cuando $N=40$ y $N=80$ y con $N=80$ y $N=100$.

En el caso de la figura 4(c), tenemos al AC "legal" con regla 178, este autómata celular es periódico de clase 2. Podemos observar que nuevamente existe contención propia de los patrones sucesivos de acuerdo al incremento de N ; debido a ello podemos afirmar que la variación de la longitud inicial no modifica el patrón (nuevamente existe identidad punto a punto).

El caso de la figura 4(b) es más interesante. Bajo la misma condición inicial, el patrón que se obtiene cuando $N=20$ es distinto al que se obtiene cuando $N=40$, que a su vez es distinto

al caso $N=80$ y lo mismo ocurre cuando $N=100$; debido a ello no existe ninguna contención entre los patrones, lo que permite afirmar que, el cambio en la magnitud de N , provoca un cambio no-esencial en ellos.

Como conclusión de la discusión anterior podemos proponer los siguientes dos enunciados que se aplican a todos los AC elementales:

-
- i) Un cambio en la magnitud de la longitud inicial preserva el comportamiento dinámico de los AC de clase 1 y 2, y preserva la identidad punto a punto de sus patrones.
 - ii) Un cambio en la magnitud de la longitud inicial provoca un cambio no-esencial en los patrones de los AC de clase 3 y causa la alteración del periodo.
-

Además de lo anterior, los patrones de los AC son sensibles a la distribución de unos y ceros en la configuración inicial, como veremos a continuación.

3.2c) La Distribución inicial de estados.

Vamos a considerar los siguientes tres tipos generales de condiciones iniciales:

- a) Condiciones iniciales aleatorias con probabilidad de estado del tipo: ...11001101000101011000110101110010... ($p_1=0.5$).
- b) Condiciones iniciales por dominios alternados del tipo: ...111111111000001111100000000000111111111111111100000...
- c) Condiciones iniciales ordenadas de "energía mínima" del tipo: ...1001001001001001001001001001001001001...

En a) la distribución de unos y ceros está dada al azar, la probabilidad de que el estado "uno" se presente es $p_1=0.5$ (es equiprobable con la del estado "cero").

En b) la distribución está organizada en dominios alternados compuestos por bloques de "unos" y "ceros", de la misma forma en que se acomodarían los espines magnéticos en los dominios

ferromagnéticos lineales.

En c) los estados se distribuyen de manera ordenada, de la misma forma en que se distribuirían, en una línea, los objetos con carga eléctrica sujetos a la influencia de un campo eléctrico externo. La distribución obtenida así, tendería a una configuración de "energía mínima" en la que los objetos idénticos se acomodarían lo más lejanamente posible unos de otros (véase Cocho et. al., 1986a). Esta distribución estaría caracterizada por el cociente p/q , donde p indica el número de estados de un mismo tipo distribuidos en q lugares. Por ejemplo las siguientes tres:

- 1)...10101010101010... $p/q=1/2$ (un uno cada dos lugares).
- 2)...10010010010010... $p/q=1/3$ (un uno cada tres lugares).
- 3)...10010100101001... $p/q=2/5$ (dos unos cada cinco lugares).

En el caso de las condiciones iniciales por dominios alternados hemos utilizado una configuración particular formado por bloques alternados de longitud decreciente del tipo:

...1111111111000000000111111100000000111110000011110000110010...

y se ha observado que este tipo de condiciones iniciales generan patrones similares a los que se producen partiendo de condiciones al azar; (véanse los ejemplos de figura 5) debido a ello, nos reduciremos sólo a considerar las condiciones iniciales del tipo a y c; es decir, los casos extremos de condiciones iniciales absolutamente ordenadas en sus estados y condiciones iniciales sin ninguna correlación en sus estados.

Revisemos primeramente el caso de las condiciones iniciales de "energía mínima". En la figura 6 tenemos el patrón que genera el AC con regla 117 ($N=30$) con una condición inicial ordenada del tipo $p/q=1/5$ a un lado del patrón tenemos el histograma correspondiente para n_1 , como se observa, el comportamiento dinámico es periódico con periodo 2. En (b) tenemos el caso en que $p/q=1/8$, como puede apreciarse, el comportamiento permanece

inalterado con esta nueva condición inicial y por ello los patrones en (a) y (b) son equivalentes topologicamente. Lo mismo podemos decir de los casos en que $p/q=1/10$ (c) y $p/q=1/40$ (d). Incluso, como observamos en (e), una condición aleatoria ($\rho_1=0.5$) origina un patrón con equivalencia topológica a los que producen las condiciones iniciales ordenadas que acabamos de revisar; por lo tanto deberíamos concluir que en este caso, un cambio en la distribución de los estados iniciales provoca un cambio no-esencial en los patrones, este resultado es válido para todos los autómatas celulares de clase 1 y 2¹.

El caso de los AC de clase 3 es más complejo: en la figura 7(a) observamos el patrón que corresponde al autómata celular con regla 18, que se propaga con una condición inicial ordenada (con $p/q=1/6$); el patrón está caracterizado por una fuerte homogeneidad que se refleja en el comportamiento constante de $n_t(1)$. En (b) tenemos que $p/q=1/8$ y el autómata celular muere después de tres generaciones. En (c) $p/q=1/5$ y el patrón nuevamente es homogéneo con $n_t(1)$ constante. En (d) y (e) el comportamiento dinámico es completamente diferente cuando $p/q=1/10$ y $p/q=1/20$ respectivamente; en el primer caso es posible distinguir un comportamiento estructurado, pero sin escalamiento múltiple, mientras que $n_t(1)$ es periódico con periodo 3; en el segundo caso el comportamiento estructurado del patrón es más notorio y comienza a dar muestras de escalamiento múltiple, sin embargo el patrón está caracterizado por una gran homogeneidad que se refleja en la periodicidad (periodo 6) de $n_t(1)$. En (f) tenemos que $p/q=1/25$ y el comportamiento estructurado y con escalamiento múltiple es aún más notorio, sin embargo sigue presentando cierta regularidad que se refleja en el comportamiento periódico de $n_t(1)$, en este caso el periodo fue igual a 60; en (g) tenemos que $p/q=1/4$

¹ En el caso de los AC de clase 2 con reglas 82, 26, 154, 166, 167, 180, 181 y 210; el cambio en la distribución de estados conserva el comportamiento periódico, pero el valor del periodo se modifica.

y el autómata celular muere en la segunda generación; por último, en (h) mostramos el patrón que se obtiene con una condición inicial aleatoria ($p_1=0.5$), como se observa, el patrón del autómata celular muestra un comportamiento caótico en las primeras 100 generaciones.

Las condiciones iniciales en el caso de los autómatas celulares de clase 3 determinan el comportamiento dinámico de sus patrones y originan la existencia de grandes cambios en la equivalencia topológica, por ello podemos concluir que los cambios en las condiciones de los estados iniciales pueden ser cambios de tipo esencial.

Una vez que hemos llegado a las conclusiones anteriores deberíamos preguntarnos por una propiedad que se encuentra ligada a los cambios en las condiciones iniciales: la estabilidad de los patrones frente a las perturbaciones.

3.2d) Estabilidad y perturbaciones

Por perturbación vamos a entender la "mutación local" que se produce cuando un sitio a_i cambia de estado después de que su estado quedó determinado por la regla de propagación. La perturbación estará caracterizada por una probabilidad de ocurrencia. Diremos que un autómata celular se encuentra "altamente perturbado" si la probabilidad de ocurrencia es del orden de 0.01 y si es del orden de 0.0001 se encontrará "poco perturbado". En la figura 8 mostramos el número de perturbaciones aleatorias que ocurrieron en la propagación del AC con regla 255; en (a) se observan dos perturbaciones en un total de 16000 sitios cuando $p=0.0001$; mientras que en (b) se observan 152 perturbaciones cuando $p=0.01$.

En la figura 9 se muestra el patrón generado por la regla 236, el autómata celular es de clase 1. Una perturbación en el patrón (un patrón poco perturbado) origina un cambio en el valor máximo de $n(1)$ cuyo valor, sin embargo, sigue constante.

En la figura 10(a) se muestra el AC generado con la regla 117

y que se propaga partiendo de una condición inicial con estados ordenados de "energía mínima" con $p/q=1/5$. Una primera perturbación se presenta al cabo de 82 generaciones (indicada en el histograma de $n_t(1)$ con una flecha) mientras que al cabo de 110 generaciones ocurre una segunda perturbación. La primera de ellas origina un cambio en el valor máximo de $n_t(1)$, pero el periodo se conserva sin cambio. La segunda perturbación modifica nuevamente el valor máximo de $n_t(1)$, pero el periodo nuevamente se mantuvo sin cambio. En (b) tenemos el mismo autómata celular con las mismas condiciones iniciales que en (a) pero esta vez se encuentra altamente perturbado. Los efectos provocados por cada perturbación individual se pueden identificar fácilmente, pues cada vez que ocurre una el valor máximo de $n_t(1)$ se modifica, lo interesante es que el comportamiento dinámico cambia en apariencia durante el tiempo en el que ocurren las perturbaciones sin embargo, se recupera la periodicidad original cuando, éstas desaparecen, de hecho el valor que se obtiene para $n_t(1)$ con la última perturbación se conserva a lo largo de la propagación posterior.

En la figura 11 se muestra el caso del autómata celular con regla 18 y con estados iniciales ordenados con $p/q=1/5$. En (a) se muestra el patrón que se obtiene antes y después de que aparece una única perturbación (señalada con la flecha); antes de la perturbación, el patrón está caracterizado por un estado ordenado y homogéneo con $n_t(1)$ constante, la aparición de la perturbación origina el rompimiento de la homogeneidad y el surgimiento de un patrón estructurado y con escalamiento múltiple cuya densidad de unos muestra un comportamiento caótico, al menos hasta la generación 150. En (b) tenemos un patrón altamente perturbado, las primeras tres perturbaciones (indicadas con las flechas) aparecen en las generaciones 4, 13 y 18. Tales perturbaciones originan localmente la transición de un estado ordenado a un estado caótico; las perturbaciones que aparecen una vez que el patrón tiene un comportamiento aperiódico no provocan alteraciones al comportamiento dinámico del patrón, pero son capaces de provocar

distorsiones locales en las estructuras triangulares.

Podemos proponer las siguientes conclusiones, para los casos en los que los AC poseen configuraciones iniciales de mínima energía y estén sujetos a perturbaciones:

i) Los AC de clase 1 no modifican la equivalencia topológica frente a perturbaciones pero sí registran cambios no-esenciales en la propagación del patrón, en este sentido puede afirmarse que son "estables" frente a perturbaciones.

ii) Los AC de clase 2 modifican la equivalencia topológica localmente durante el tiempo en el que ocurren las perturbaciones y sólo si ocurren con una probabilidad grande. Una vez que las perturbaciones desaparecen, los AC recuperan el patrón original pero modificado de manera no-esencial. Podríamos decir que los AC de clase 2 son "estables" frente a perturbaciones.

iii) Los AC de clase 3 son "altamente inestables" frente a perturbaciones. Una sola perturbación es capaz de provocar la transición irreversible de un estado altamente ordenado a un estado caracterizado por una propagación caótica, de un estado altamente homogéneo a un estado estructurado y multiescalado. Una sola perturbación provoca un cambio esencial en la propagación del patrón².

3.2c) Un método de clasificación jerárquica de patrones.

La discusión anterior nos permite concluir que el patrón que una AC puede generar depende estrechamente de la configuración inicial, ante ello es necesario especificar el tipo de condiciones iniciales que deben seleccionarse para una clasificación de patrones. Supongamos que hemos seleccionado una condición inicial "altamente ordenada" que consiste en una secuencia de "unos" ($p/q=1$):...111111111... y nos preguntamos cuantos patrones

² Este resultado se aplica a los AC de clase 3 con reglas 106 y 120, sólo si la perturbación origina que una secuencia en la que existe un "uno", mute a una en la que existan dos unos contiguos. Por ejemplo 001*011.

distintos podremos obtener con los 256 AC elementales. Dado que la interacción de vecinos involucra unicamente a tres sitios contiguos para generar un sitio de la siguiente generación, tendremos una única secuencia posible: 111, la cual puede dar lugar al estado "1" o al estado "0". Si da lugar a un cero, la segunda generación del AC estará formada por ceros, si da lugar a unos la secuencia de la segunda generación estará formada tan sólo por unos, es decir:

Generación	caso 1) 111 → 0	caso 2) 111 → 1
1ª	1111111111	1111111111
2ª	0000000000	1111111111

En el caso 1) tenemos nuevamente dos posibilidades, pues la secuencia 000 puede dar origen a un cero o a un uno; si sucede lo primero, de la 3ª generación en adelante tendremos una secuencia de ceros; si sucede lo segundo, tendremos una secuencia de unos:

Generación	caso 1a) 000 → 0	caso 1b) 000 → 1
1ª	1111111111	1111111111
2ª	0000000000	0000000000
3ª	0000000000	1111111111

El caso 2) y los casos 1a) y 1b) definen los únicos tres patrones distintos posibles: un patrón formado por "unos", uno formado por "ceros" y un último formado por la alternancia de ambos. Puesto que unicamente existen tres patrones distintos, tendríamos que preguntarnos que propiedades de los AC elementales son la causa para que autómatas celulares con reglas distintas e incluso AC de clase distintas puedan agruparse en una sola familia de acuerdo al patrón que generan con esta condición inicial. Para este caso la respuesta es muy simple: si el segmento 111 propaga un uno, entonces la regla del autómata celular forzosamente es igual o mayor a 128. Si propaga un cero, es un AC con regla menor

o igual a 127. Si el segmento 000 propaga un uno, la regla es un número impar. Si propaga un cero la regla es par (notemos que el segmento 111 define al bit más significativo de la regla, mientras que el segmento 000 define al bit menos significativo). Lo anterior queda resumido en la siguiente tabla:

111	000	Propiedades	Tipo de patrón
1	1	$R \geq 128$, R impar	unos
1	0	$R \geq 128$, R par	alternado
0	1	$R \leq 127$, R impar	alternado
0	0	$R \leq 127$, R par	ceros

Una condición inicial ordenada distinta a los casos límite ($p/q=1$ ó 0) genera una mayor variedad de patrones³; pero la identificación de las propiedades de las reglas que permiten agrupar a los autómatas celulares en grupos de patrones se complica a medida que el número máximo de patrones distintos aumenta.

Estrictamente el número máximo de patrones distintos que pueden obtenerse es igual al número de autómatas distintos. Si los AC son binarios, el número máximo será $2^{2^{(2r+1)}}$.

Hemos revisado una gran cantidad de condiciones iniciales distintas para los AC elementales y se ha encontrado que la mayor diversidad de patrones se obtiene cuando la configuración inicial es aleatoria con $p=0.5$; pero aún así el número máximo de patrones distintos no es 256. A propósito, es necesario precisar que se entiende por "patrones distintos" ya que el número de tales patrones dependerá del criterio de semejanza que estemos empleando; tanto éste como el problema de la clasificación de patrones los abordaremos a continuación.

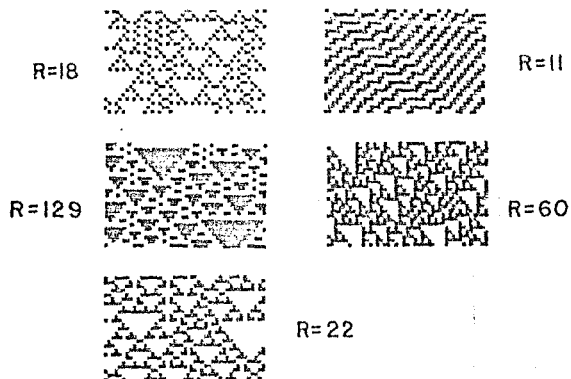
³ Podríamos establecer como un teorema, que el número mínimo de patrones que pueden obtenerse con los autómatas celulares binarios es tres, independientemente del parámetro r ; la demostración tendría los mismos argumentos que la discusión que dimos arriba.

Haremos uso de la siguiente definición:

Df.7 Sea \mathcal{L} el conjunto de todas las p -variables que describen a un conjunto \mathcal{P} de patrones y sean $\mathcal{P}_{R_1}(t)$ y $\mathcal{P}_{R_2}(t)$ dos patrones de \mathcal{P} generados por las reglas R_1 y R_2 . Diremos que ambos patrones son **proximos** si los subconjuntos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 de \mathcal{L} que los describen son iguales y diremos, en este caso, que las reglas R_1 y R_2 son **sinónimas**. Además entenderemos como grupo, clase o familia al conjunto formado por los patrones que son próximos entre sí.

Veamos un ejemplo para aclarar lo anterior. El conjunto \mathcal{L} de variables que caracterizan a los patrones generados por los AC elementales bajo condiciones iniciales ordenadas con $p/q=1$, está formado por tres variables únicas: la variable "unos", la variable "ceros" y la variable "alternados". Todos los patrones que pertenecen a la clase "alternados" son patrones próximos (en este caso simple son, además, idénticos punto a punto); los que pertenecen a la clase "unos" son próximos entre si y lo mismo sucede con los de la clase "ceros". Haremos uso de otro ejemplo con el objeto de precisar aún más, el término proximidad y para introducir las primeras ideas de un clasificación jerárquica de patrones.

Consideremos los cinco patrones que aparecen en la figura siguiente:



que corresponden a las reglas 18, 11, 129, 60 y 22 y definamos al conjunto \mathcal{L} formado por las siguientes variables (o rasgos) subjetivas:

Variable	Característica
V1	Triángulos
V2	triángulos blancos
V3	triángulos negros
V4	triángulos equiláteros
V5	triángulos rectos
V6	corrimento izquierdo

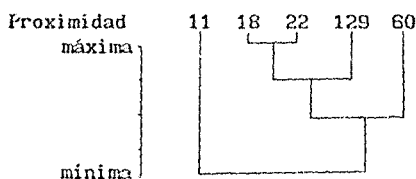
que utilizaremos para describir a los patrones de la siguiente manera:

Patrón	Variables
18	V1, V2, V4
11	V6
129	V1, V3, V4
60	V1, V2, V5
22	V1, V2, V4

Observemos en la tabla anterior, que los subconjuntos de variables para el patrón 18 y el patrón 22 tienen las mismas variables y por ello son iguales, lo anterior nos permite afirmar que bajo el conjunto \mathcal{L} de variables ambos patrones son próximos (y sus reglas sinónimas). La intersección del subconjunto de variables para las reglas 129 y 60 con las reglas 18 ó 22 no es vacía, es decir poseen características comunes en sus patrones; por ejemplo, la regla 18 y la regla 129 comparten las variables v_1 y v_4 que caracterizan a las estructuras triangulares que son equiláteras; pero en un caso son blancas y en el otro negras. Por otra parte la regla 18 y la regla 60 comparten las variables que representan a las estructuras triangulares blancas; pero en un caso son equiláteras y en el otro rectas. Lo anterior vuelve necesario referirnos al término proximidad no ya en términos

absolutos sino relativos; así, podríamos decir que existe "mayor proximidad" entre las reglas 18 y 22 que entre las reglas 18 y 60 o entre las reglas 22 y 129; pero también es necesario jerarquizar la importancia de las variables para poder distinguir entre "mayor" o "menor" proximidad, por ejemplo, las reglas 18 y 129 comparten dos variables y las reglas 18 y 60 también, es necesario entonces, decidir cual de ambas es "más importante". Supongamos que hemos otorgado mayor importancia a las variables "forma del triángulo" que a las variables "color del triángulo". Jerarquizadas de esta manera las reglas 18 y 129 son "más" proximas entre sí de lo que son las reglas 18 y 60.

Basándonos en el razonamiento anterior podemos proponer la siguiente clasificación: los patrones 18 y 22 forman una primera familia con el nivel "máximo" de proximidad; los patrones 18,22 y 129 forman un segundo grupo con un nivel menor de proximidad; los patrones 18,22,129 y 60 forman un tercer grupo con un nivel aún menor de proximidad y por último, el patrón 11 se agrega a los anteriores para formar el grupo con la menor proximidad. De hecho, el razonamiento anterior es el principio de un método de la estadística multivariada que se conoce con el nombre de **Análisis de cúmulos** (e.g. Jardine y Sibson, 1971; Gordon, 1981). La clasificación anterior la podemos expresar graficamente através de un árbol jerárquico llamado Dendrograma:



En el caso de los AC elementales con condiciones iniciales al azar, tenemos 256 patrones (ver el apéndice B), para describirlos, se define el conjunto \mathcal{L} de p -variables que en este caso suman 29 (la elección de las variables es completamente arbitraria y

subjetiva, tanto en el número como en el tipo. Ver el apéndice A), a continuación se define una matriz A que llamaremos **matriz de datos** formada por 256 renglones que corresponden a cada uno de los AC y 29 columnas que corresponden a cada una de las variables de \mathcal{L} . Cada entrada a_{ij} de la matriz de datos registra la presencia o ausencia de la j -ésima variable en el patrón del i -ésimo autómata celular, la ausencia se registra con un "0" y la presencia con un "1"; lo anterior nos dice que la matriz de datos será una matriz binaria (ver el apéndice A) a la que podremos dar la siguiente interpretación: la matriz de datos representa un conjunto de 256 vectores en un espacio ortogonal de dimensión 29, cada una de las componentes de un vector son las proyecciones al conjunto \mathcal{L} de variables. La interpretación geométrica anterior nos facilitará el entendimiento de la forma en la cual se cuantifica la proximidad entre patrones, a través de un coeficiente de disimilitud que definiremos a continuación:

DfB. Sea \mathcal{P} el conjunto de patrones a clasificar, un **coeficiente de disimilitud** Cd es una función de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ a los reales tal que:

- i) $Cd_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{P}.$
 - ii) $Cd_{ii} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{P}.$
 - iii) $Cd_{ij} = Cd_{ji}, \quad \forall i, j \in \mathcal{P}.$
-

Las tres propiedades de Cd definen, en el espacio vectorial \mathcal{P} , una propiedad métrica. El tipo de métrica que se utiliza en el análisis de cúmulos depende del problema particular y no existe un criterio único para seleccionarla; en nuestro caso hemos utilizado la métrica λ_1 de Minkowski:

$$Cd_{i,j}^{(\lambda)} = \left[\sum_{k=1}^P |x_{ik} - x_{jk}|^\lambda \right]^{1/\lambda}, \quad \lambda=1$$

es decir:

$$Cd_{i,j} = \sum_{k=1}^P |x_{ik} - x_{jk}|$$

que recibe el nombre de métrica Manhattan.

Podemos reconocer que la proximidad esta relacionada con la distancia que existe entre los vectores del conjunto \mathcal{P} , sin embargo una vez que se han calculado los coeficientes de disimilitud para todos los vectores y que se procede a aglomerar aquellos de menor disimilitud (los más próximos), es evidente que se requiere de otra manera de medir la disimilitud para poder comparar entre un grupo de vectores y un único vector; por ello se define el coeficiente de disimilitud para grupos de la siguiente manera:

Def. sean G_i y G_j dos grupos que contiene n_i y n_j elementos, si ambos se aglomeran para formar una nueva familia, la disimilitud entre este nuevo grupo y el grupo G_k se expresa como:

$$Cd_{k,(ij)} = \frac{n_i}{n_i+n_j} Cd_{ki} + \frac{n_j}{n_i+n_j} Cd_{kj} \quad (i)$$

Desde luego, este coeficiente de disimilitud se reduce a la métrica Manhattan cuando los grupos que se aglomeran tienen un solo elemento. es decir un solo vector. El método de aglomeración que utiliza el coeficiente de disimilitud definido en (i) se conoce como Método de agrupamiento promediado con peso y su algoritmo es el siguiente (Gordon, 1981):

- 1) Se agrupan los dos grupos G_i G_j que tengan el valor mínimo de Cd_{ij} .
- 2) Se recalcula la disimilitud entre el grupo nuevo y el resto de los vectores utilizando la expresión (i).

La matriz de datos en nuestro caso la hemos dividido en dos submatrices, una de ellas contiene todos los AC que poseen como característica "corrimientos" en sus patrones, la otra submatriz contiene a los AC cuyos patrones no presentan esa característica. La primera submatriz contiene 95 AC y la segunda 20, en total son 115 reglas no sinónimas (la lista de las reglas sinónimas aparece

en el apéndice A). Los resultados de la clasificación jerárquica según el conjunto \mathcal{P} de variables aparece en los dendrogramas de las figuras 12 y 13.

Haremos uso de la siguiente definición que nos será útil para cuantificar la proximidad entre patrones o grupos de patrones:

Def10. Sea Cd_k el coeficiente de disimilitud para el grupo \mathcal{G}_k y sea Cd_{max} el valor máximo de disimilitud que se obtiene tras aplicar el algoritmo de agrupamiento a un conjunto de vectores, el Índice Normalizado de Proximidad para el grupo \mathcal{G}_k será:

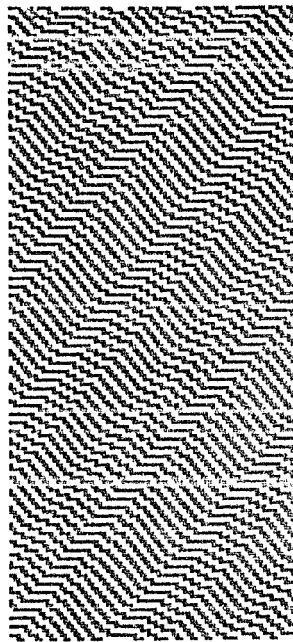
$$I_{p_k} = 1 - \frac{Cd_k}{Cd_{max}} ; I_{p_k} \in [0, 1]$$

Como un ejemplo, podemos decir el índice normalizado de proximidad para los patrones 18 y 22 es igual a 1, y por ello tienen la máxima proximidad bajo el conjunto \mathcal{L} de variables. Las reglas 110, 124, 234, 248, 136, 137, 192 y 193 (así como sus respectivas sinónimas) se agrupan en una gran familia con un coeficiente de disimilitud de 4.5 (véase la figura 12), por otra parte las reglas 0, 160, 237, 250, 129, 18, 146, 45, 169, 106, 120 y 255 (y sus respectivas sinónimas) se agrupan en otra gran familia con un coeficiente de disimilitud igual a 4.37. Ambas familias se agrupan posteriormente a un nivel de disimilitud igual a 5.27, y éste es precisamente, el valor máximo de disimilitud para ese subconjunto de vectores. El índice normalizado de similitud es cero y por ello ambas familias tienen la menor proximidad posible.

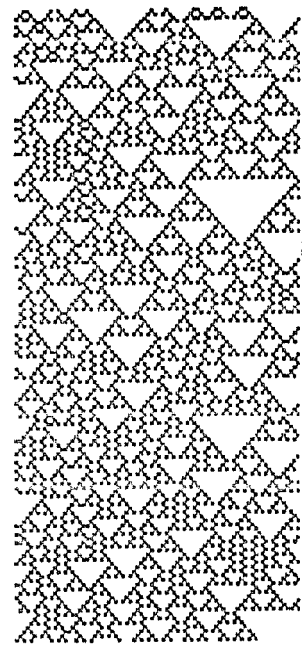
El índice normalizado de proximidad, así como la clasificación que hemos dado de los patrones de los AC elementales serán de gran utilidad en el capítulo siguiente, en el que propondremos a los AC como modelo en morfogénesis.



(a) regla 255



(b) regla 117



(c) regla 18

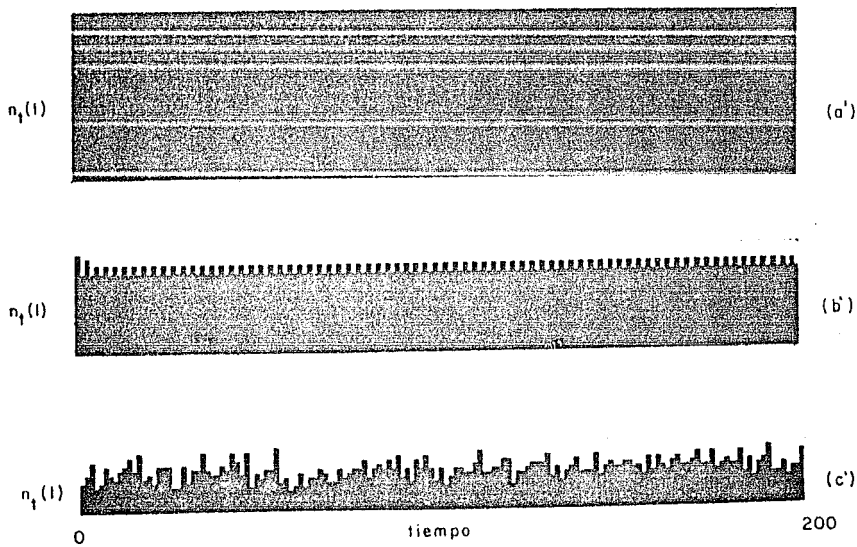


Figura 2

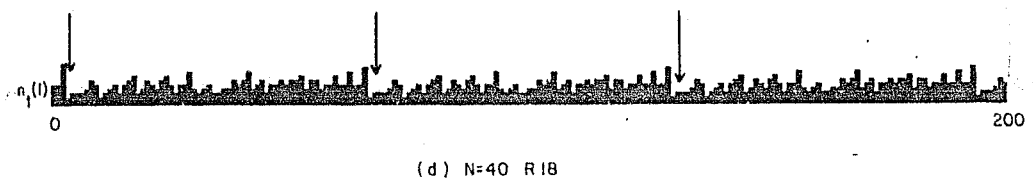
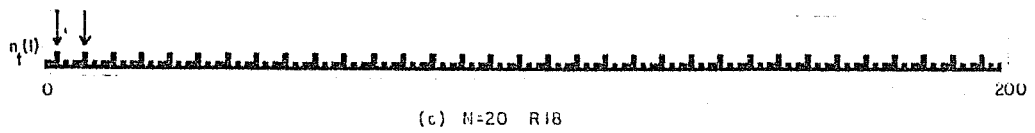
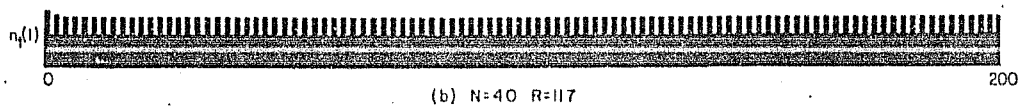
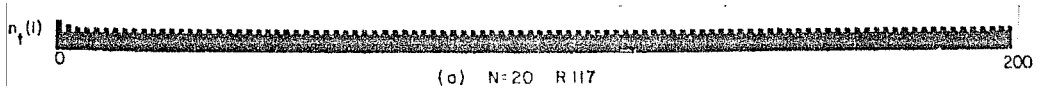


Figura 3

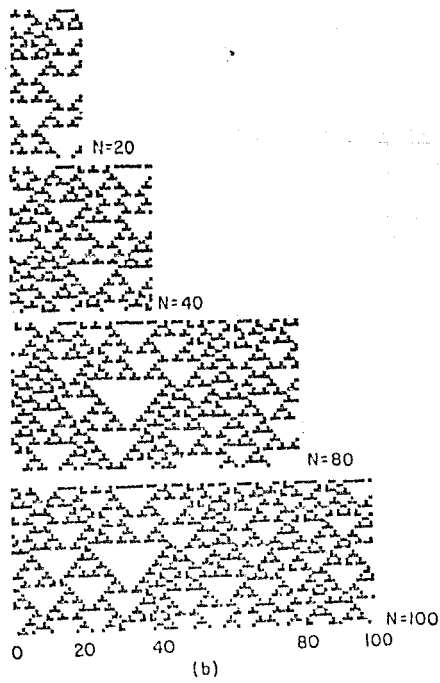
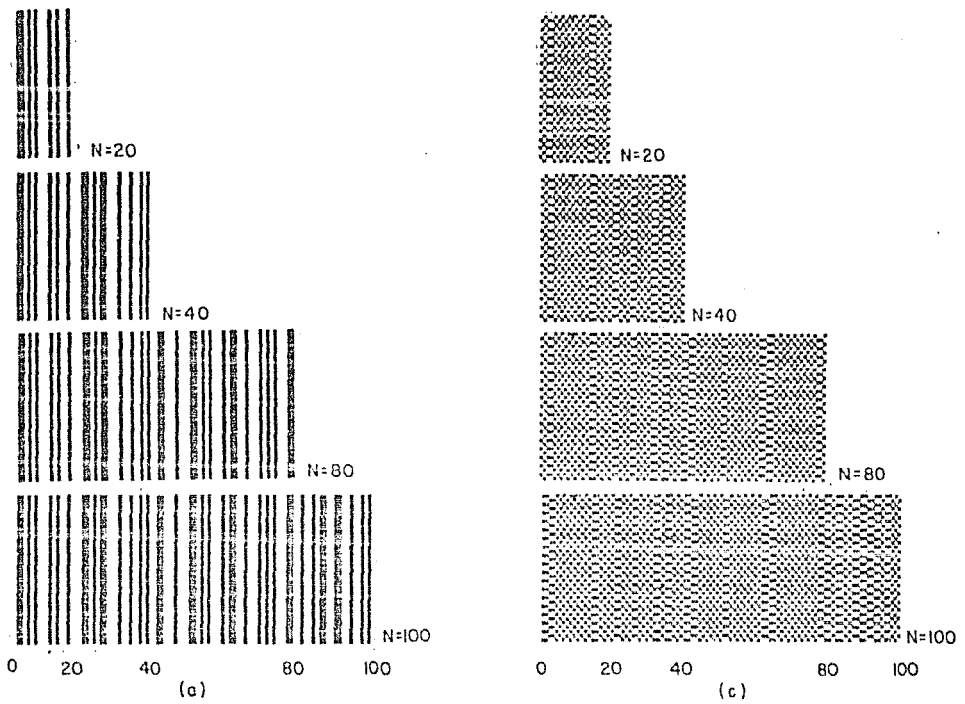
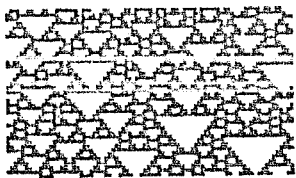
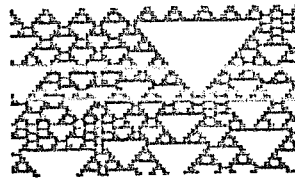


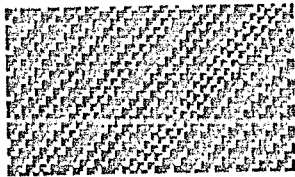
FIGURA 4



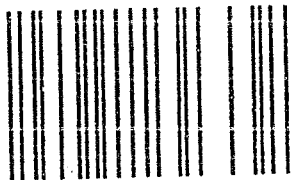
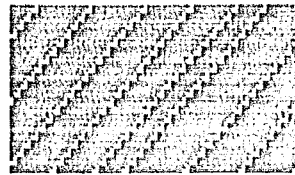
R=126



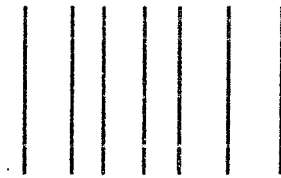
R=106



R=155



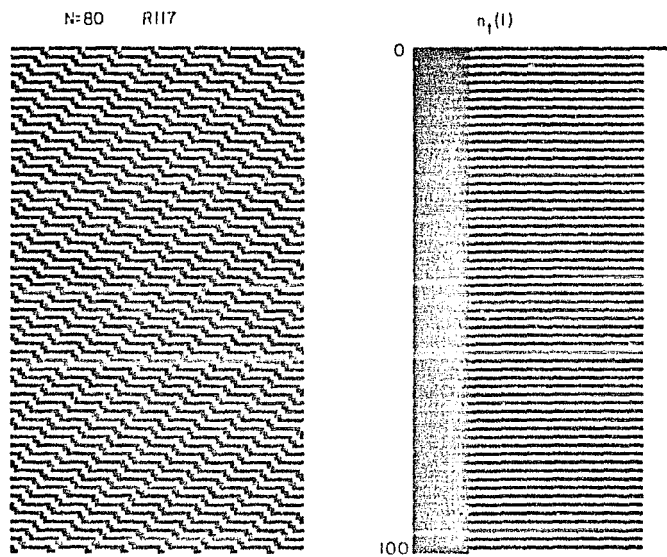
R=12



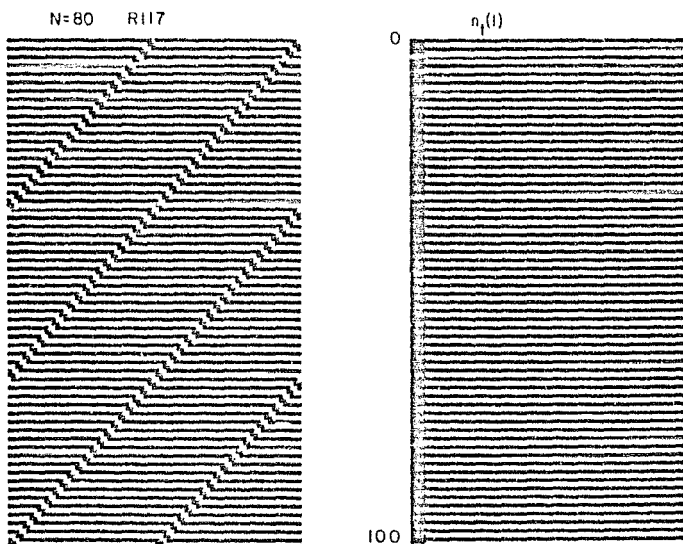
AZAR

DOMINIOS ALTERNOS

FIGURA 5

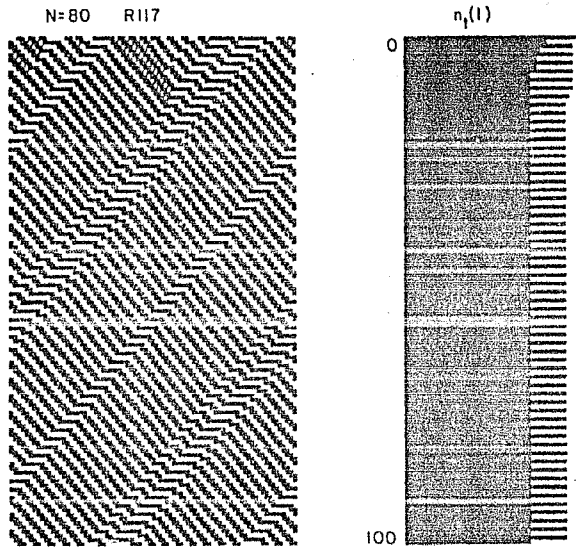


(c) $p/q = 1/10$



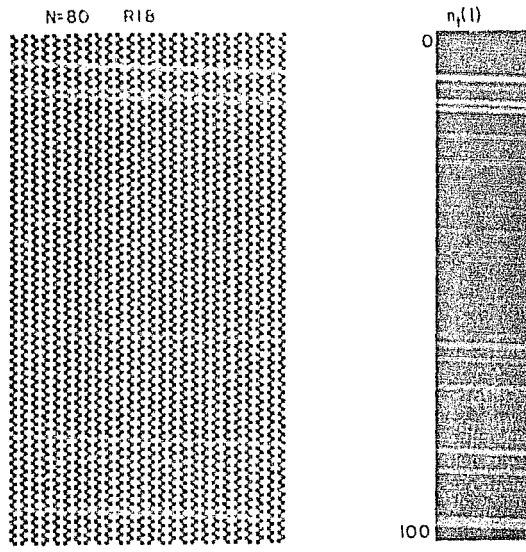
(d) $p = 1/40$

FIGURA 6

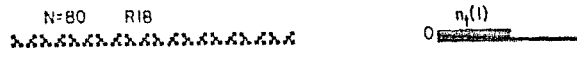


(e) azar

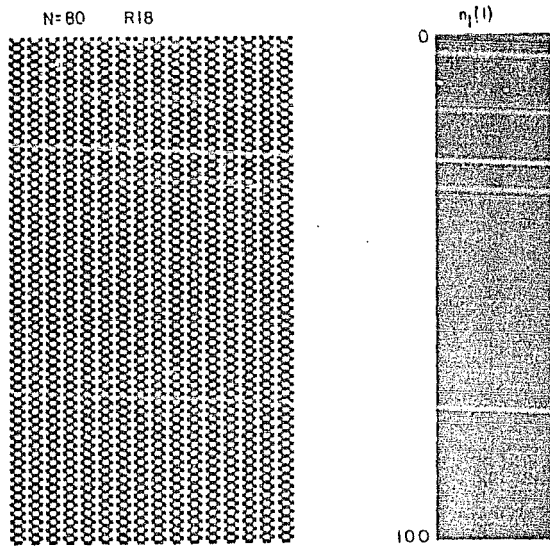
FIGURA 6



(a) $p=1/6$

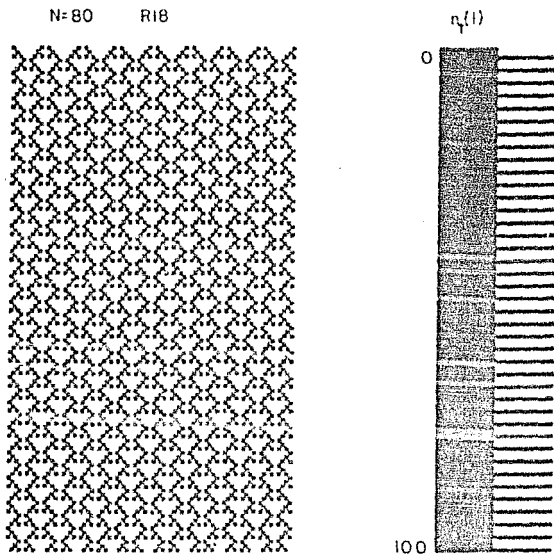


(b) $p=1/8$

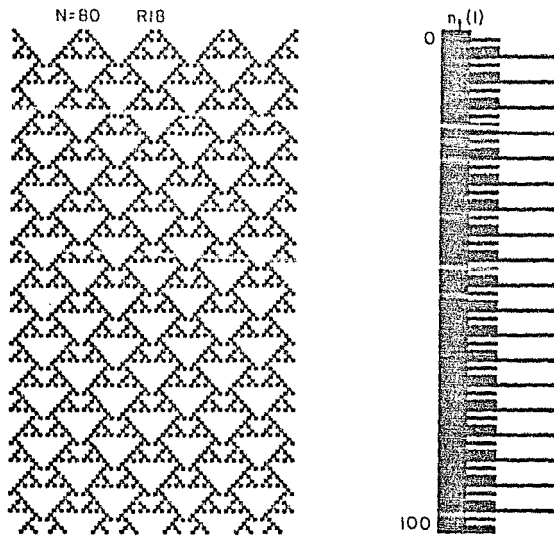


(c) $p=1/5$

FIGURA 7



(d) $p/q=1/10$



(e) $p/q=1/20$

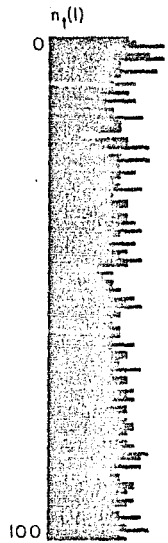
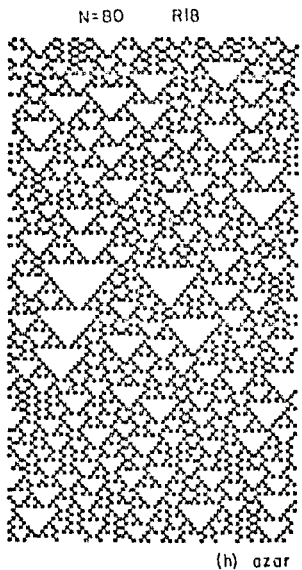
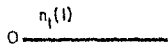
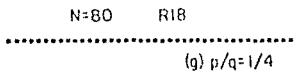
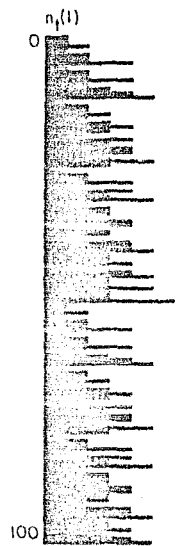
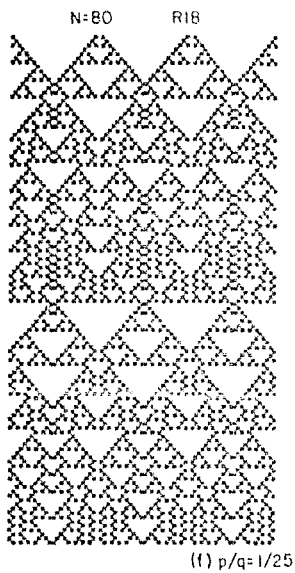
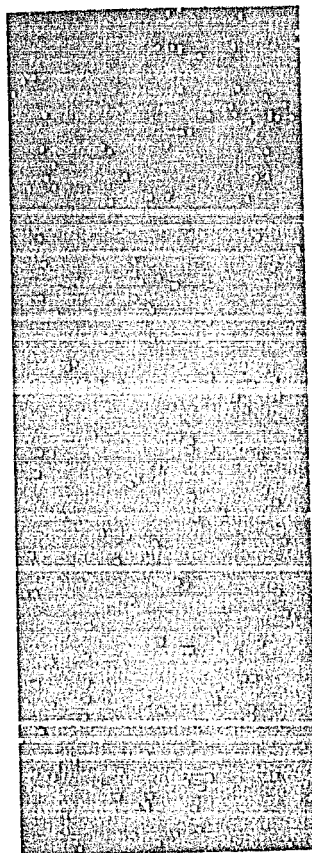


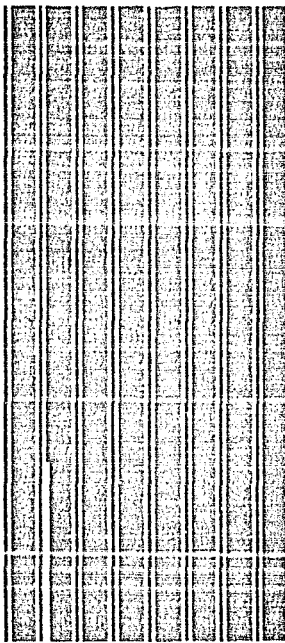
FIGURA 7



(a) $P=0.0001$



(b) $P=0.01$



$P/Q = 1/10$

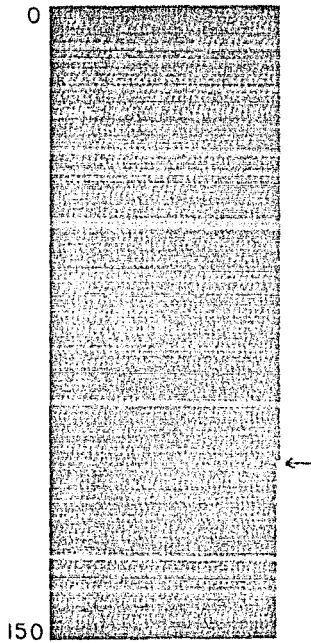
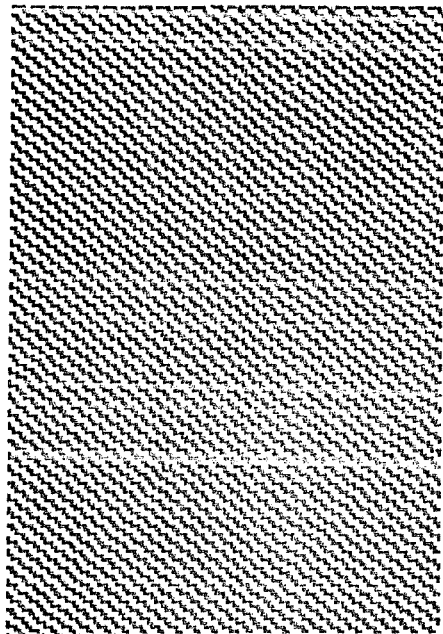
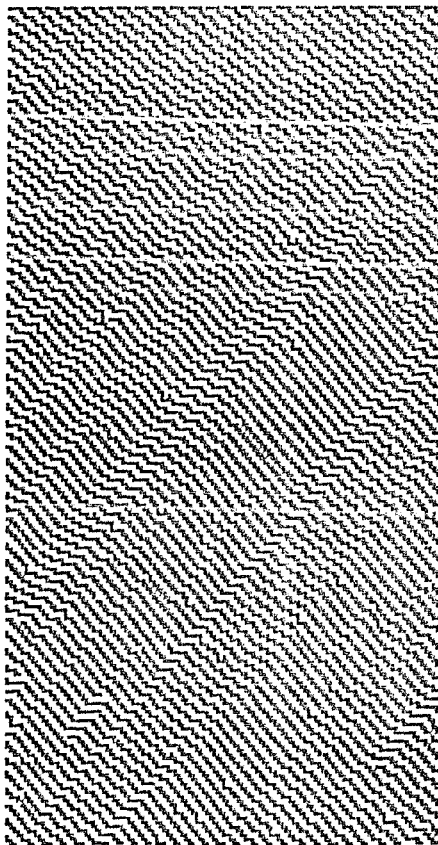
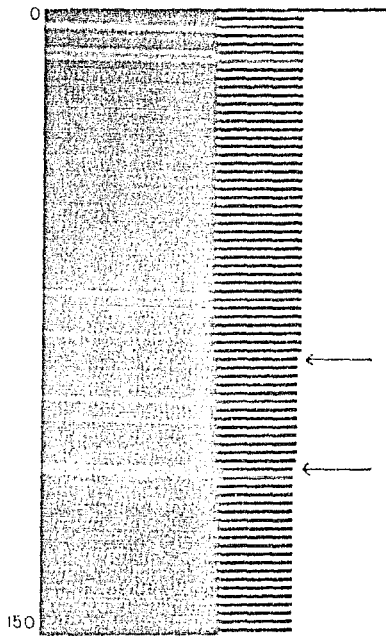


FIGURA 9



(a) $p/q=1/5$



(b) $p/q=1/5$

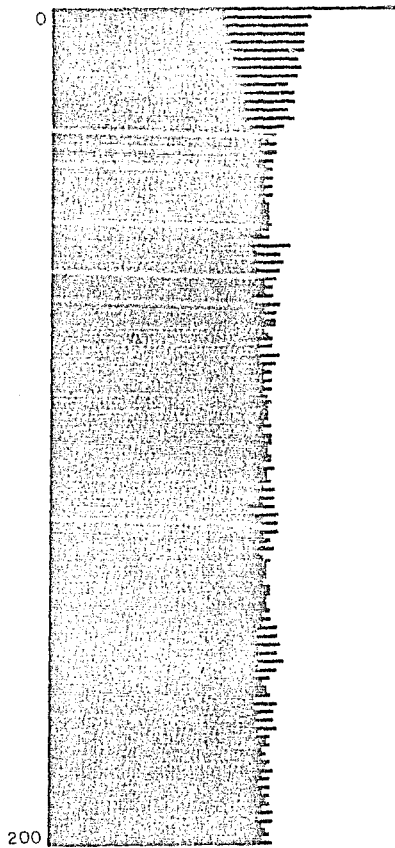
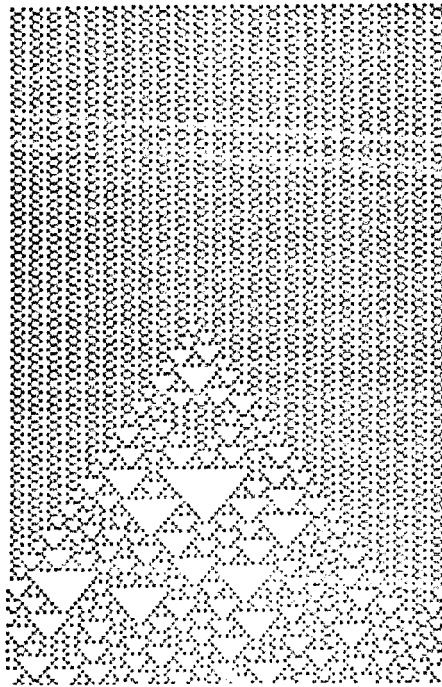
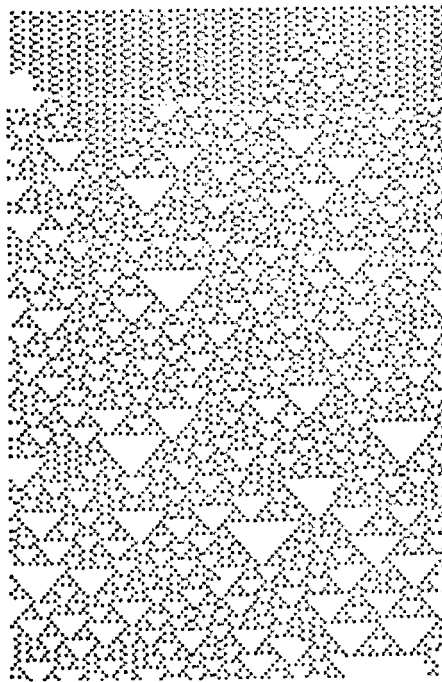
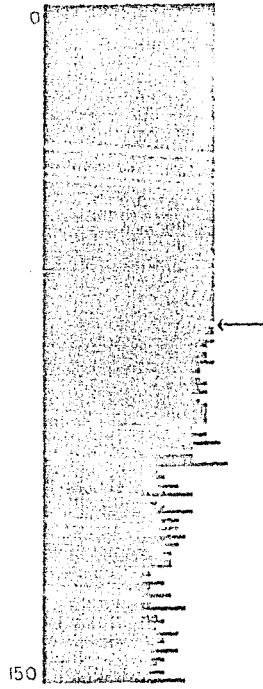


FIGURA 10



(c) $p/q=1/5$



(b) $p/q=1/5$



FIGURA II

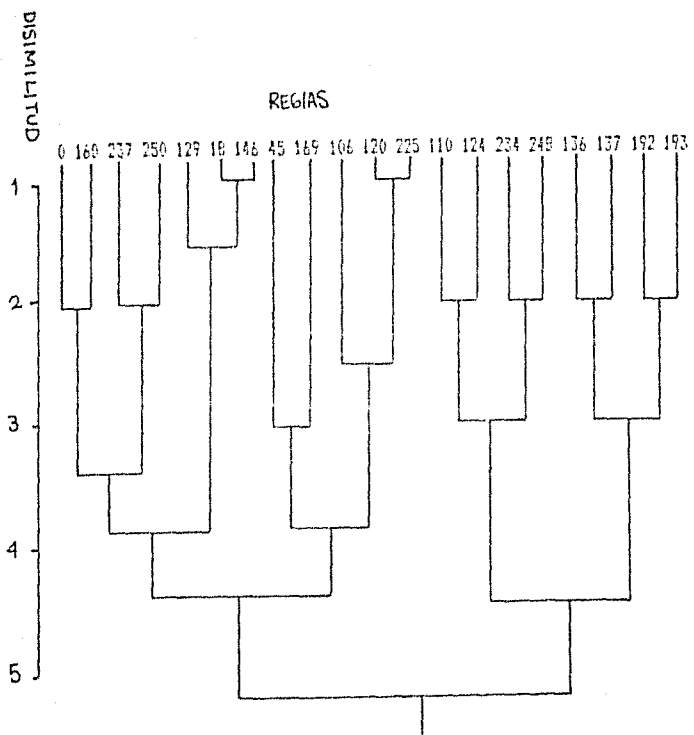


FIGURA 12

Discrimin. fud

REGLAS

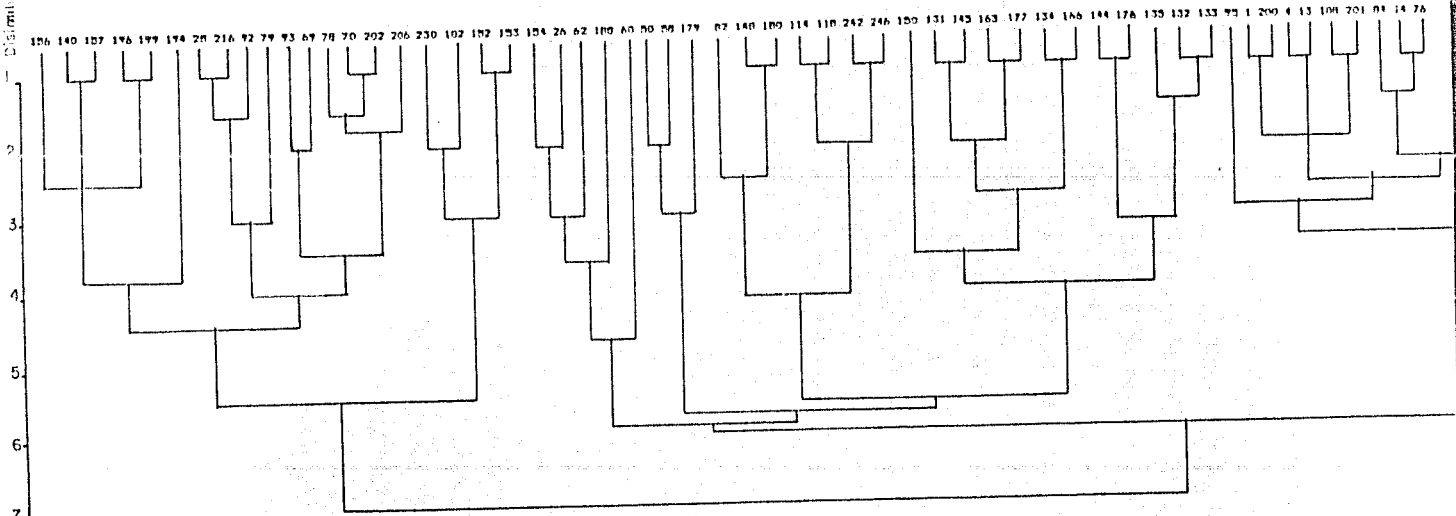


FIGURA 13

REGIAS

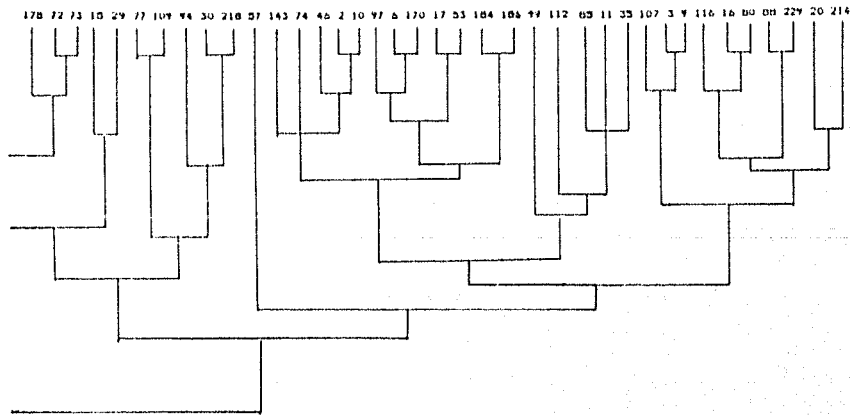


FIGURA 13 (CONT.)

LOS AUTOMATAS CELULARES COMO MODELO MORFOGENETICO.

4.1) INFORMACION POSICIONAL Y CRECIMIENTO CLONAL

Vamos a proponer un modelo que utiliza el marco teórico propuesto por dos modelos anteriores (Cocho et. al., 1986a; Wolpert, 1968, 1978). Consideremos un número pequeño de células que se acomodan inicialmente en una secuencia lineal. Una vez que cada célula se acomoda, se "congela" en su sitio y no posee más la propiedad de movilidad; tal congelamiento puede ocurrir mediante mecanismos diversos: se ha propuesto que para algunos tipos celulares, sobre todo tejidos vegetales, las células son capaces de fijarse entre si por medio de estructuras especializadas que actúan como "tabiques de enlace" (Albersheim, 1975) o bien se ha propuesto la existencia de moléculas especializadas en las superficies de las membranas que son capaces de actuar como "pegamentos" celulares (Edelman, 1984). Las células son capaces de interactuar químicamente entre si y pueden reproducirse una sola vez por bipartición. Las células madres pueden crecer y aumentar de tamaño (le llamaremos crecimiento clonal, vease Cocho et. al., 1986a); las células hijas se adhieren a las madres en una segunda secuencia lineal.

A medida que el "tejido celular" se propaga en el tiempo y en el espacio, se encuentra sujeto (además de las interacciones celulares locales) a influencias ejercidas por "campos" químicos externos que son capaces de modificar las interacciones celulares, tales campos reciben el nombre de **gradientes de morfógenos** (Wolpert, 1968). Un morfógeno es pues un agente químico capaz de modificar la reproducción y la diferenciación celular. Si bien es cierto que no se conoce ninguna sustancia identificada como un morfógeno específico, se sabe de la existencia de moléculas cuya presencia en las zonas de reproducción celular contribuyen decisivamente al proceso de la diferenciación celular (Gierer,

1974; Levi-Montalcini et. al., 1979).

Supongamos que se tiene un espacio en el cual va a ocurrir el crecimiento de un tejido celular (e.g. una caja de petri con un medio de cultivo), en un extremo se coloca una cadena lineal de células. En el medio existe un gradiente de concentración de una sustancia con acción morfógena, de tal manera que existe la mayor concentración en el zona donde se colocó el arreglo celular inicial, y la concentración disminuye en la dirección en la que ocurre la división celular¹. A medida que el frente celular formado por las células más jóvenes avanza, encuentra una disminución gradual de la concentración del morfógeno. Si las células son capaces de percibir la concentración por medio de mecanismos de umbral, las células podrían diferenciarse en distintos tipos celulares, dependiendo de la concentración. Así, las células se diferenciarían de acuerdo a su posición relativa en el gradiente de concentración. Esta hipótesis se conoce como hipótesis de información posicional (véase Wolpert, 1978).

4.2) LOS AC COMO MODELO EN LA FORMACION DE PATRONES BIOLÓGICOS

El esquema anterior lo podemos modelar con autómatas celulares de la siguiente manera: consideremos un arreglo binario inicial de sitios que poseen interacciones de primeros vecinos. Supongamos que en el espacio en el que se propagan los AC, está acotado al cabe de una cierta longitud x_0 . En este espacio se encuentran distribuidos dos "morfógenos" (m_1 y m_2) de tal manera que la concentración de m_1 es máxima al inicio y mínima en x_0 , mientras que la concentración de m_2 es mínima al inicio y máxima en x_0 . Supongamos que la concentración de m_1 es análoga a la probabilidad de que el autómata celular se propague bajo la regla R_1 (ρ_{R1}) y la concentración de m_2 es análoga a ρ_{R2} . ρ_{R1} decrece

¹ Se sabe perfectamente que un tejido celular que crece en un medio de cultivo, se inhibe cuando la capa celular toca las paredes del recipiente. Si el arreglo celular se coloca en el extremo de un recipiente rectangular, el tejido crece en una sola dirección.

linealmente al mismo tiempo que p_{m2} crece, de tal manera que $p_{m1} + p_{m2} = 1$ en todo momento. La interacción entre las reglas se produce en un espacio delimitado por 200 generaciones de propagación y 120 sitios de longitud en la condición inicial. Para la definición del estado en cada sitio, se genera un número fraccionario al azar en el intervalo $[0,1]$; si resulta mayor o igual a p_{m1} , el autómata celular se propaga en ese sitio con la regla R1, en caso contrario se propaga con la regla R2. En todos los casos que hemos analizado, la condición inicial se ha tomado con una distribución al azar y equiprobable para los dos estados.

Consideremos la figura 14 en la que $R_1=126$ y $R_2=129$; en la primera generación el autómata se reproduce con $p_{m1}=1$ y genera un patrón estructurado de triángulos "equiláteros" blancos; cuando $p_{m1}=0.75$ las estructuras blancas comienzan a perderse en el fondo negro; cuando $p_{m1}=0.5$ el número de sitios caracterizados por el color blanco igualan a los de color negro, podríamos decir que esta zona está caracterizada por "ruido estadístico"; cuando $p_{m1}=0.25$ comienzan a evidenciarse los triángulos negros sobre fondo blanco y por último cuando $p_{m1}=0$ las estructuras negras dominan el patrón.

Lo que hemos descrito anteriormente puede ser interpretado de la siguiente forma: la concentración de m_1 provoca que las "células" se "diferencien" de tal manera que la interacción entre ellas da lugar a un patrón caracterizado por estructuras triangulares blancas. Cuando la concentración del mismo morfógeno es del 75% de su valor máximo, las "células" responden mediante un mecanismo de umbral probabilístico de tal modo que el 75% de ellas se "diferencian" de acuerdo a m_1 y el 25% de acuerdo a m_2 . A medida que la concentración de m_1 disminuye, el porcentaje de "células" que se "diferencian" con este morfógeno disminuye, de tal manera que cuando la concentración es cero, las "células" en su totalidad se "diferencian" de acuerdo a m_2 para dar lugar a estructuras triangulares negras. De esta manera, las "células" adquieren la "información" de como interaccionar, de acuerdo a su

posición relativa en el espacio. Esta interpretación le daría a nuestro modelo, la equivalencia con la hipótesis de información posicional.

Podemos dar una discusión adicional, ahora en base a lo afirmado sobre las perturbaciones a los AC en el capítulo anterior. Consideremos de nuevo la figura 14, en la primera generación el autómata celular se propaga sin perturbaciones bajo la regla 126; a medida que transcurre el tiempo, comienzan a aparecer perturbaciones con una probabilidad baja de ocurrencia, sabemos que el autómata celular 126 es un AC de clase 3 y que por lo tanto es sensible a las perturbaciones siempre y cuando las condiciones iniciales de su propagación sean ordenadas de energía mínima, pero una vez que el patrón generado es estructurado multiescalado y aperiódico, las perturbaciones sólo pueden provocar distorsiones a las estructuras, por ello, las perturbaciones que aparecen en la propagación del AC distorsionan el patrón y la distorsión es mayor a medida que aumenta la probabilidad de ocurrencia de la perturbación; que por cierto no es del todo azarosa, pues de hecho, obedece una regla: la regla 129. Cuando la probabilidad de ocurrencia alcanza el valor 0.75 la perturbación es tan fuerte que domina el patrón, de ahí en adelante la regla 129 domina la propagación. Es importante insistir sobre los efectos de la perturbación; en el ejemplo de la figura 14 tanto el AC 126 como el 129 son autómatas celulares de clase 3, tenemos entonces la transición gradual entre autómatas celulares de una misma clase (es decir entre comportamientos dinámicos caóticos). Si denominamos a la región acotada por $\rho=0.25$ y $\rho=0.75$ (la zona alrededor del punto de equiprobabilidad) como la **región de transición**, entonces en este caso tal región está caracterizada también por un comportamiento caótico.

Surgen inmediatamente dos tipos de preguntas: ¿que efecto tiene sobre los patrones la transición de autómatas celulares de distintas clases? y ¿que efectos tiene sobre los patrones la interacción de reglas con distintos índices de similitud?.

Vamos a distinguir un subconjunto de variables del conjunto \mathcal{L} , a las que llamaremos **variables dicotomas** o **variables de conflicto**, debido a que aparecen en pares y, a que describen características "encontradas" de los patrones. Estas variables son, por ejemplo, las dos variables color (blanco y negro) y las dos variables de dirección de corrimiento lateral (izquierda y derecha). Volvamos al ejemplo de la figura 14, los AC con regla 126 (sinónima a la 18) y 129 son autómatas celulares muy próximos, su índice normalizado de proximidad es $\frac{1}{P} = 1 - (1.5/5.27) = 0.72$. De hecho la única variable que les impide ser próximos y sinónimos es la variable color, por ello la interacción de ambos autómatas celulares es una "interacción de conflicto". En lo sucesivo vamos a revisar diversos ejemplos en los que estén involucrados patrones con distintas proximidades, distintas clases y distintas variables de conflicto.

En la figura 15 tenemos la interacción de las reglas 12 y 68, ambas reglas son sinónimas (y también lo son con la regla 4), ambos autómatas celulares son clase 1 y no poseen variables de conflicto entre sí. Lo anterior ocasiona una transición suave, continua y homogénea de una regla a la otra.

En la figura 16 tenemos la interacción de las reglas 74 y 89, ambas corresponden a autómatas celulares de clase 2; la proximidad de sus patrones es de 0.33 y poseen variables de conflicto, en el caso de la regla 74 el corrimiento lateral ocurre hacia la izquierda, mientras que en la regla 88 ocurre a la derecha. El resultado es un fuerte conflicto que provoca la muerte del autómatas al comienzo de la región de interacción, lo interesante es notar sin embargo, que el patrón que se obtiene en esta zona es un patrón ramificado que *no corresponde a ninguno* de los 256 AC elementales individuales.

En la figura 17 la interacción sucede entre las reglas 67 y 107, ambos son autómatas de clase 2 con proximidad de 0.33 y con la dirección de corrimiento como variable de conflicto. El resultado es un patrón con "manchas" en la región de interacción

que no corresponde al patrón de ningún AC elemental individual. Lo mismo ocurre en el caso de los autómatas celulares con reglas 17 y 49 que aparecen en la figura 18. Un caso análogo ocurre con las reglas 106 y 120 (figura 19), en este caso los AC son clase 3 y su interacción es de conflicto (la variable es la dirección de corrimiento), el resultado es un patrón en la zona de interacción que no pertenece a ningún AC individual.

Otro tipo de fenómeno se presenta, además del anterior, cuando existen interacciones de conflicto. Veamos el caso representado en la figura 20, en la que interactúan dos AC de clase 2 con reglas 82 y 26, y que poseen distintas direcciones de corrimiento lateral. El resultado es un patrón en la región de interacción idéntico al patrón del autómata 18, lo singular, es que este último es un AC ... de clase 3! La interacción de conflicto de dos AC de clase 2 implicó el paso por un AC de clase 3, y por ello, el cambio originado en la interacción es un cambio esencial: se trata de una perturbación que produce la transición de un comportamiento periódico a uno caótico y de vuelta a uno periódico. La interacción de conflicto anterior es pues, capaz de "simular" el patrón de otro autómata celular². Este fenómeno "mimético" es aún más claro en el ejemplo de la figura 21, en la que interactúan los autómatas de clase 2 con reglas 73 y 109. La interacción conflictiva (la variable es el color) de ambos, implica la transición de uno a otro a través de tres zonas definidas: alrededor de la región con $\rho_{R1}=0.75$, el patrón es similar al patrón del AC 89; alrededor de la región con $\rho_{R1}=0.5$, el patrón es similar al patrón del AC 105; alrededor de la región con $\rho_{R1}=0.25$, el patrón es similar al del AC 45. Lo interesante

² El "mimetismo" es tal que no sería posible distinguir un patrón generado por la regla 18 de uno generado por la interacción equiprobable de las reglas 82 y 26; excepto en el caso particular en que la condición inicial fuera de energía mínima, pues la más pequeña fluctuación, intrínseca de la naturaleza "perturbada" de la interacción de las dos reglas, originaría una transición de un estado ordenado y homogéneo, a uno caótico.

es, además, que los tres autómatas celulares "intermedios" son... de clase 3!.

Si regresamos a nuestro modelo morfogenético podríamos, en analogía a la discusión anterior, sugerir que la acción cooperativa de los gradientes químicos en los espacios de reproducción celular, es capaz de generar una mayor diversidad en las conductas morfogenéticas de los tejidos, que la que podría obtenerse sin tal interacción. Por el momento, no intentaremos llevar tal sugerencia más allá del contexto del modelo.

Examinaremos a continuación dos variantes de nuestro modelo. Vamos primeramente a considerar que la concentración de los morfógenos no decrece de modo lineal con la distancia, en lugar de ello, la concentración varía periódicamente de manera sinusoidal, como resultado tendremos una alternancia de zonas de máxima y mínima concentración de morfógenos. La fenomenología de la interacción de ambos morfógenos es la misma que ya discutimos, sin embargo, lo interesante en este caso, es destacar la aparición de una nueva organización espacial global en el patrón. La propagación del autómata celular bajo una u otra regla origina una organización espacial local, formada por el tipo de estructuras u otras características propias del patrón de una regla; esta organización local está caracterizada por una escala "celular" típicamente con una longitud de pocos espacios celulares. La nueva organización global posee una escala de mayor longitud que no depende del tipo particular de reglas sino de la longitud de las zonas de probabilidad, o si se quiere, de la longitud del alcance de los campos químicos. Consideremos la figura 22, en ella interactúan periódicamente los autómatas con reglas 125 y 129, los patrones estructurados triangulares son la organización local del patrón, la sucesión en bandas es la organización global. En la figura 23 se destaca mejor el fenómeno, en este patrón la regla 129 ha sido reemplazada por la regla 255. Por último en la figura 24 interactúan las reglas 120 y 106; lo notable en el patrón que resulta, es la nueva organización global que se destaca junto a la

interacción de conflicto de las reglas, de tal modo, que el patrón está lejos de recordarnos al que se obtiene con las mismas reglas por separado, en este sentido podríamos hablar de un verdadero cambio cualitativo debido a la interacción cooperativa de los dos autómatas celulares.

La segunda variante al modelo supone que la distribución periódica de los morfógenos es bidimensional, tanto en la dirección longitudinal de la reproducción como en la dirección perpendicular a ella. El resultado es una organización espacial global caracterizada por zonas "circulares" alternadas de máxima y mínima concentración. Como ejemplo tenemos la figura 25 en la cual interactúan las reglas 129 y 0, las zonas de mayor concentración del morfógeno equivalente a la probabilidad de propagación según la regla 129 muestra una organización local estructurada, el otro morfógeno exhibe zonas blancas.

La anterior variante del modelo la utilizaremos para mostrar una posible conexión con el problema de la coloración en la piel de animales. Recordemos lo que se había dicho del crecimiento clonal. Si este crecimiento se realiza arbitrariamente en cada "célula" (en ambas direcciones), el crecimiento clonal inhomogeneo provoca distorsiones tanto en la organización local como en la global. Veamos el ejemplo de la figura 20, en (a) tenemos el patrón generado por la propagación del autómata celular con regla 54. En (b) se ha tomado una porción de "tejido" para ilustrar con detalle las "células" que darían origen a las estructuras triangulares del patrón del AC 54, se muestran las tres "células" que forman las estructuras 1, 2, 3 y 4. En (c) el crecimiento clonal ocurre en la misma dirección de la reproducción. Las estructuras triangulares han sufrido una deformación en una sola dimensión, pero la distorsión no afecta grandemente las estructuras triangulares. En (d) el crecimiento clonal ocurre en dos direcciones y deforma tanto a las estructuras triangulares que difícilmente se pueden identificar como tales. El crecimiento clonal es capaz de distorsionar tanto la organización local que

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

posiblemente la destruye, en cambio, la organización global sufre distorsiones pero se conserva, debido a que ocurre en una escala de longitud mayor. Con los argumentos anteriores, consideremos la figura 27(a) las dos reglas de interacción son 0 y 255, la primera origina "ceros" y la otra "unos". Se ha dibujado una línea que envuelve a cuatro zonas de estructura local de color negro de tal manera que su trazo fronterizo pasa por la zona de interacción equiprobable, los puntos sobreimpuestos coinciden con una malla rectangular. En (b) se muestra un posible mecanismo de crecimiento clonal que provoca la distorsión del patrón, dando lugar a manchas irregulares del tipo de las que se muestran en el dibujo de la piel de un jaguar (c). En (d) se muestra un dibujo de este mamífero³.

³ Las figuras (c) y (d) fueron tomadas de Cocho et. al., 1966b.

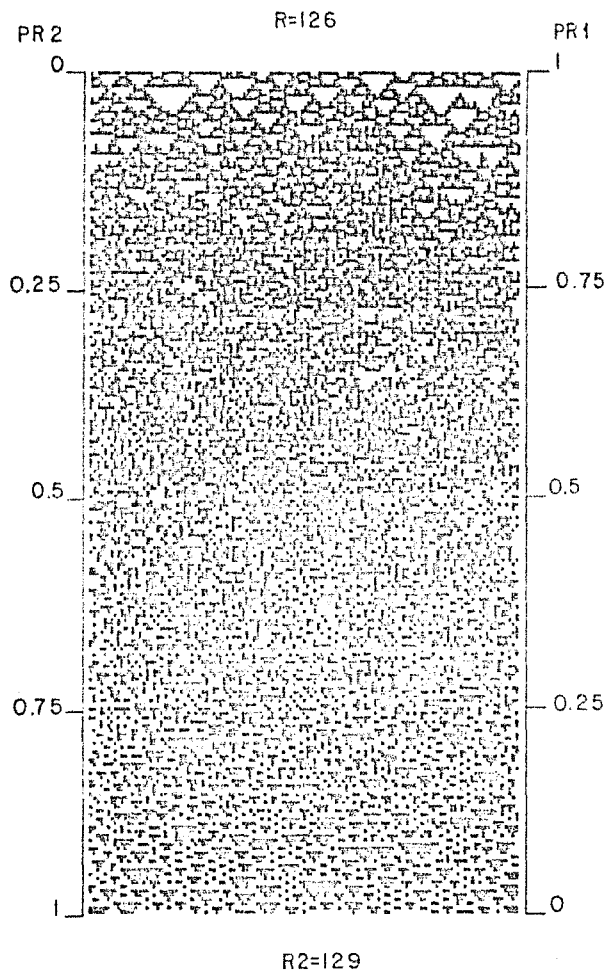


FIGURA 14

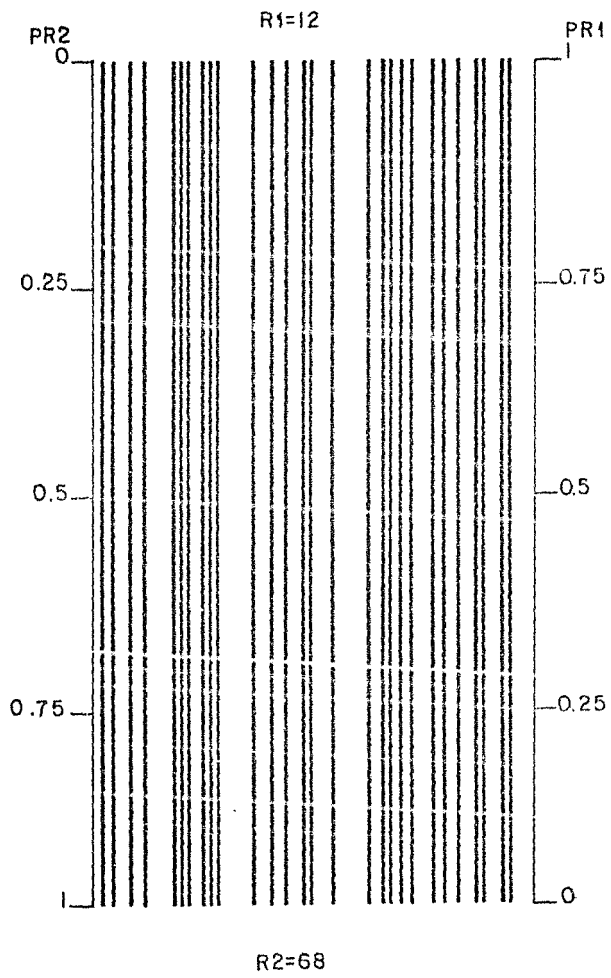


FIGURA 15

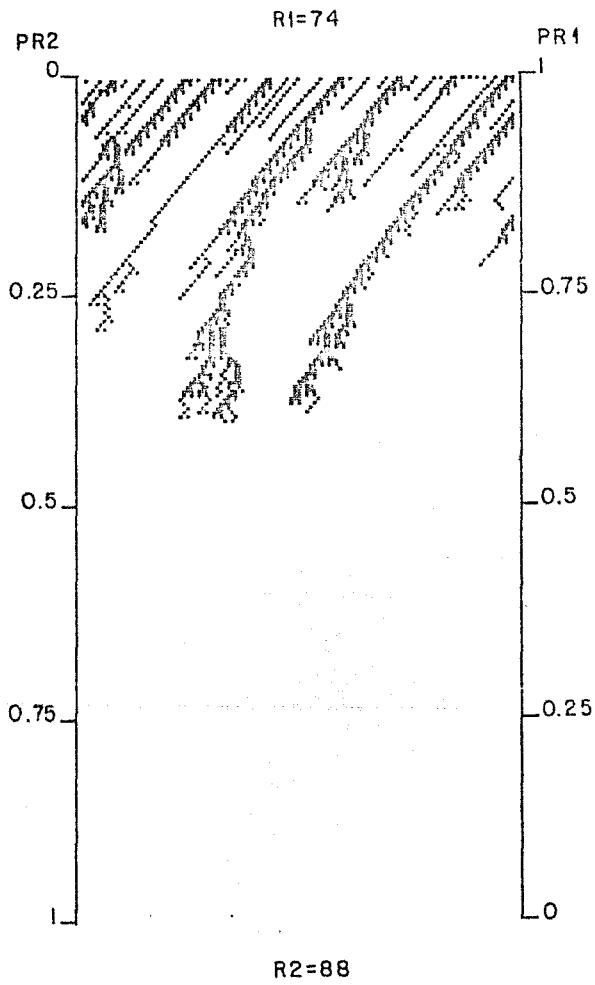


FIGURA 16

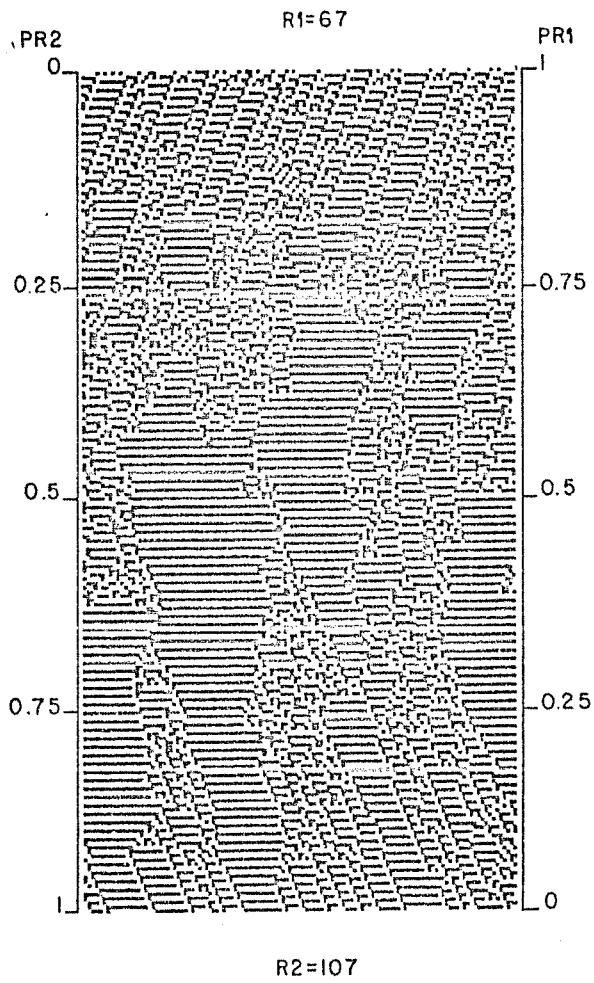


FIGURA 17

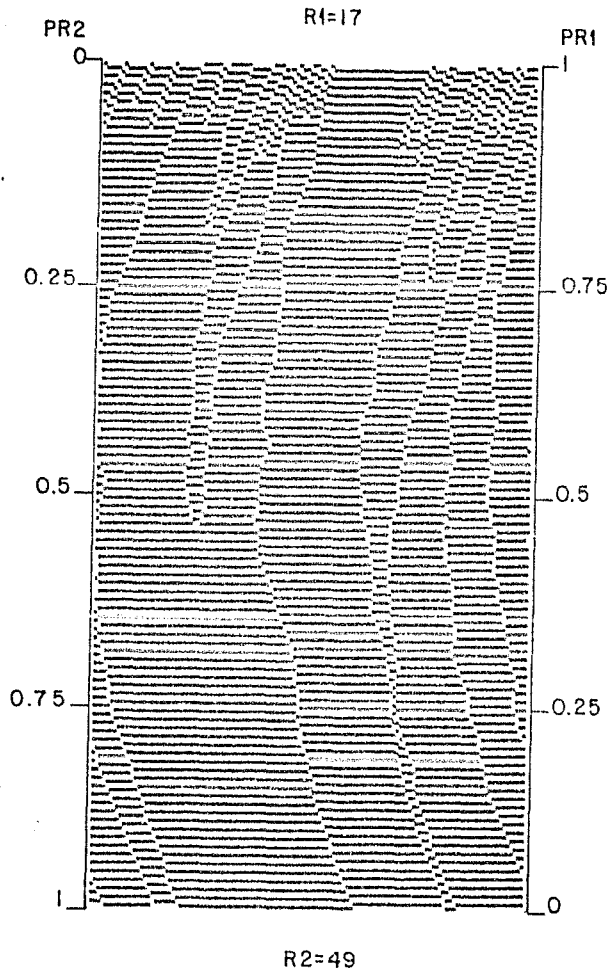


FIGURA 1B

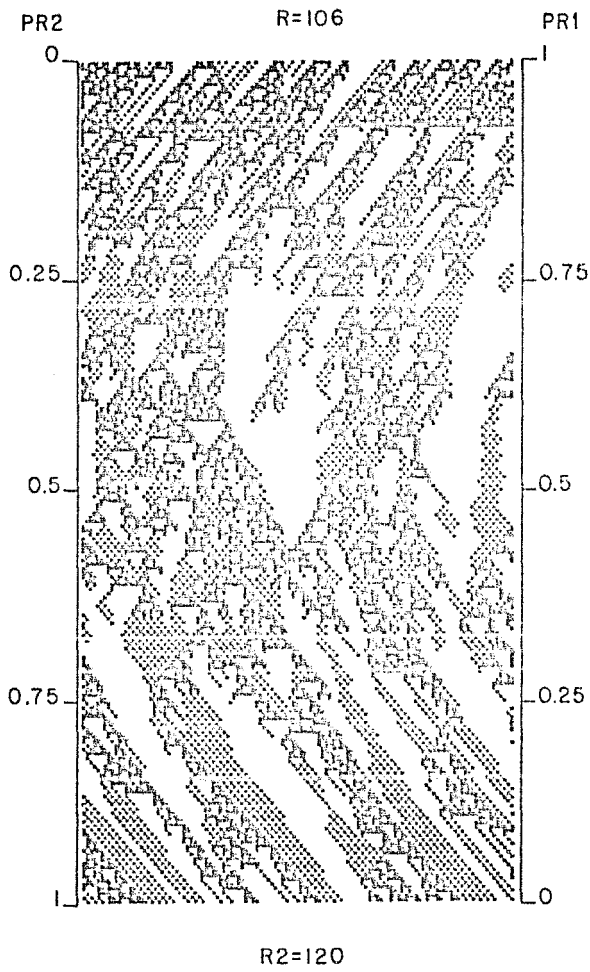


FIGURA 19

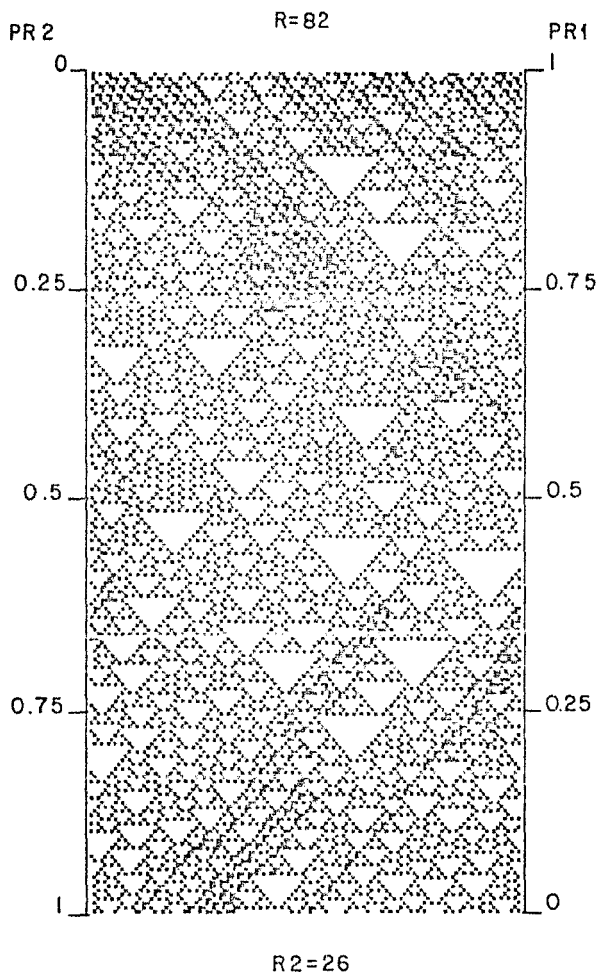


FIGURA 20

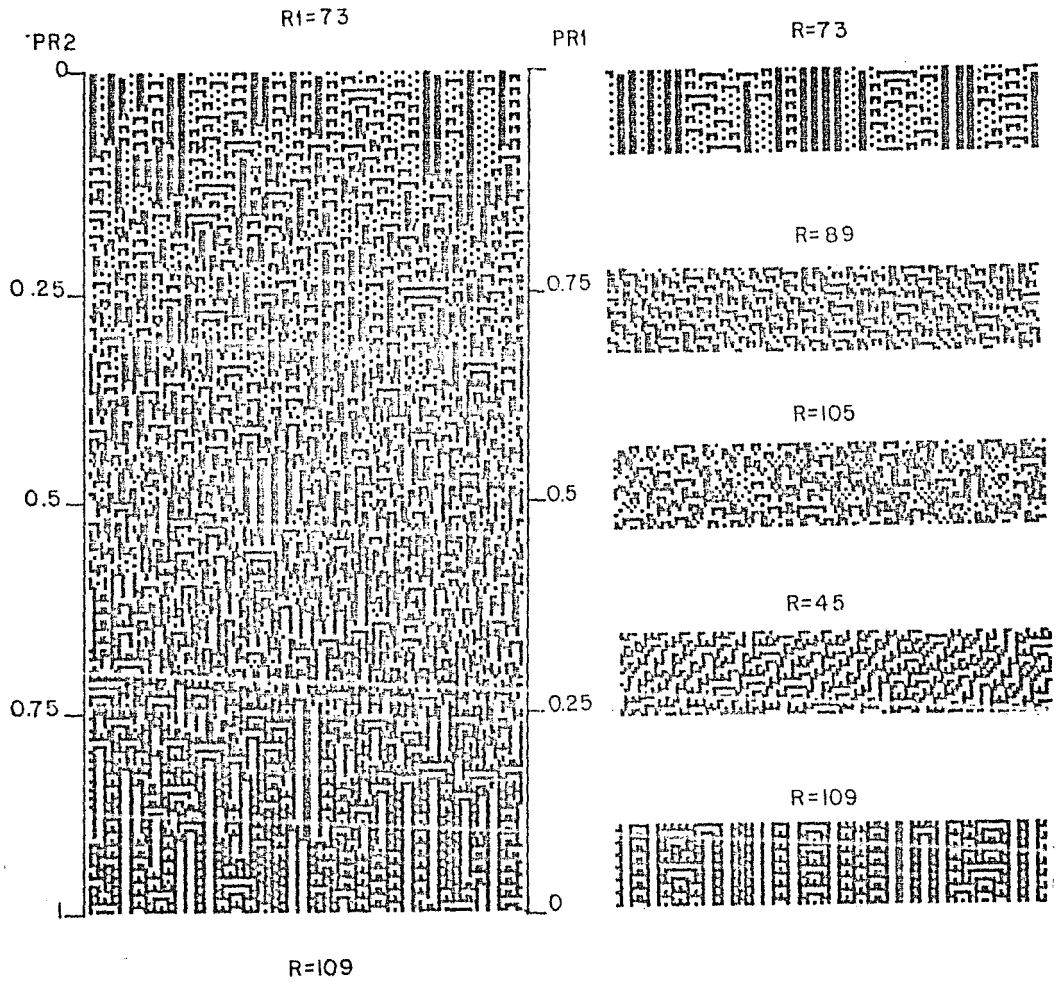


FIGURA 21



- R1=126

- R=129

FIGURA 22

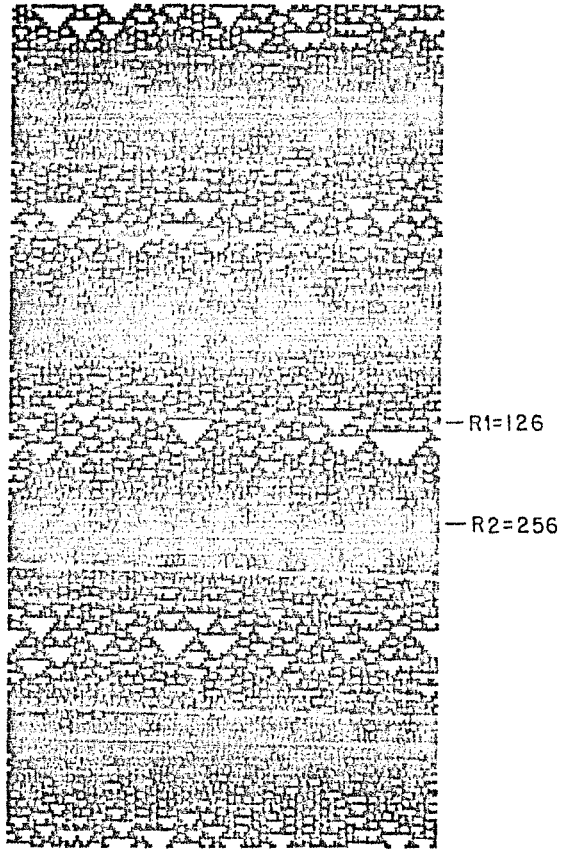
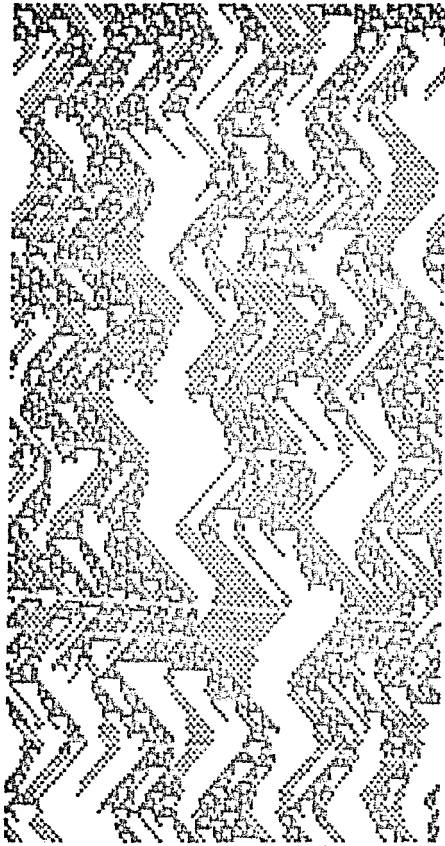


FIGURA 23



— R1=120

— R2=106

FIGURA 24

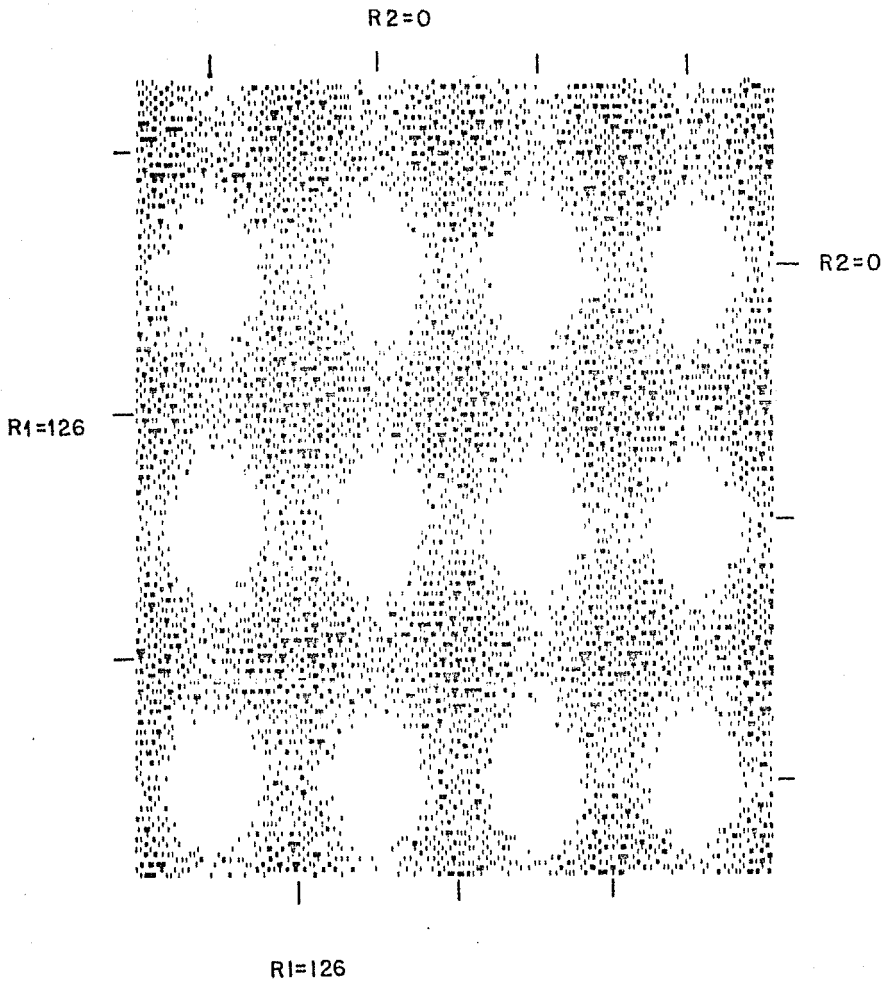


FIGURA 25

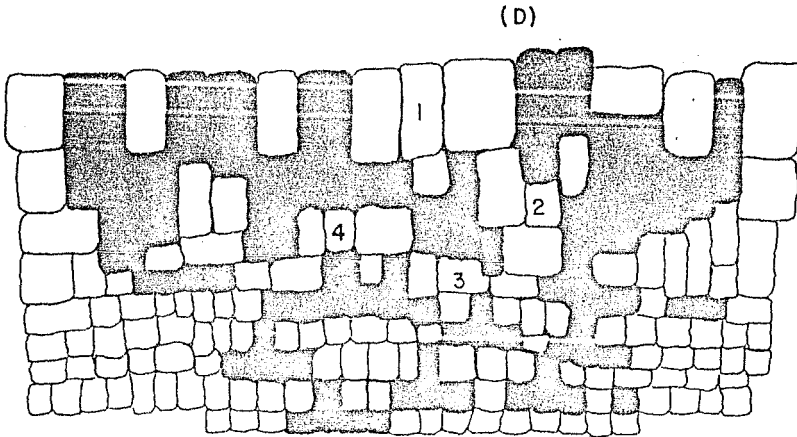
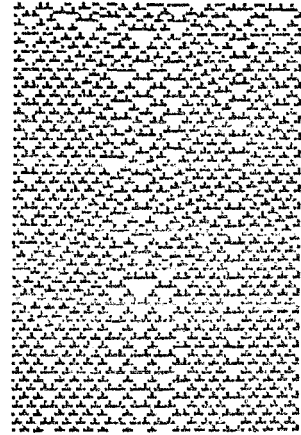
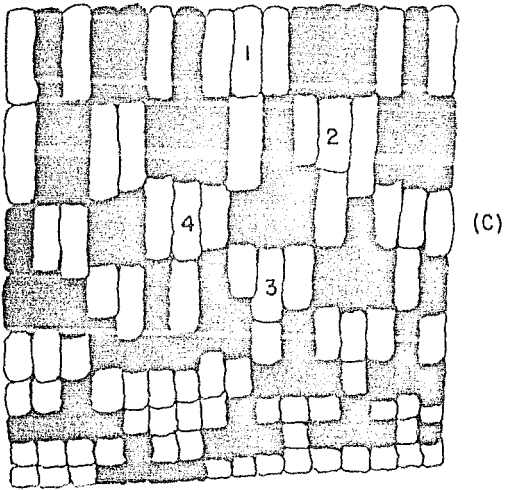
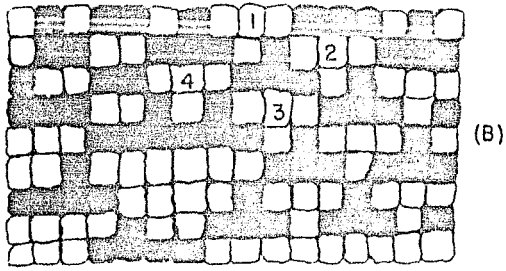
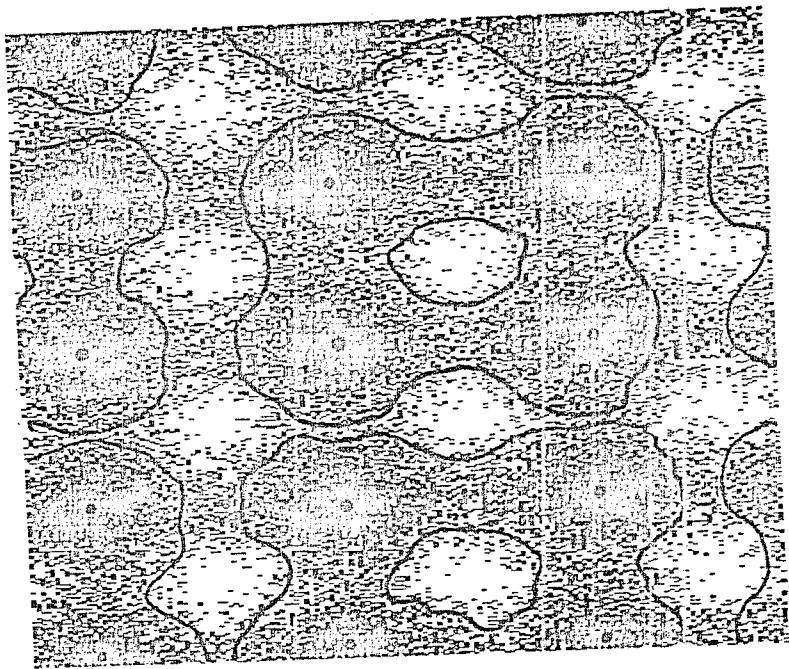
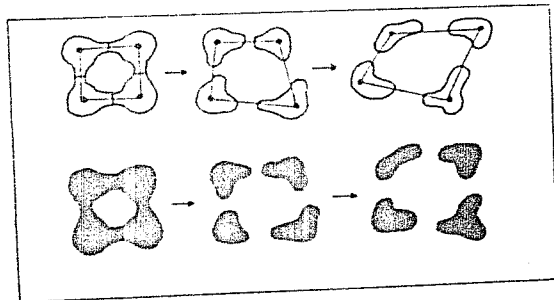


FIGURA 26

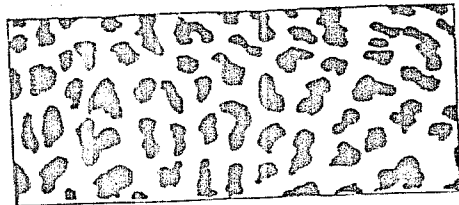


(A)



(B)

(C)



(D)



CONCLUSIONES

los autómatas celulares son capaces de exhibir comportamientos complejos similares a los que se observan en diversos fenómenos naturales, lo cual sugiere que podrían ser adecuados para modelar tales fenómenos. Los AC elementales pueden ser clasificados en base a las propiedades cualitativas que exhiben en su espacio de configuración, en el histograma de la densidad de estado o bien, debido a los rasgos característicos que exhiben en sus patrones. Una clasificación de patrones es posible en la medida en que puedan identificarse comportamientos y propiedades que sean invariantes frente a cambios en las configuraciones iniciales y frente a situaciones en las que existan perturbaciones durante la propagación de los AC. La clasificación de patrones es útil cuando se pretende utilizar a los AC como modelos de formación de patrones biológicos, debido a que permite agrupar a los patrones en familias que reducen el número total de patrones distintos. Tal clasificación permite pues, hablar de patrones distintos e iguales, permitiendo incluso cuantificar tales diferencias.

Los autómatas celulares pueden ser utilizados como modelos morfogenéticos con los cuales, puedan ser implementadas las hipótesis de otros modelos, en particular las de información posicional. Un modelo de esta naturaleza es capaz de exhibir algunos de los posibles comportamientos que resultan de la interacción célula-célula y célula-sustrato (gradientes químicos). Es capaz por ejemplo, de sugerir posibles mecanismos que resultan en una mayor diversidad de patrones y es capaz, de implementar comportamientos de simulación de patrones (comportamientos miméticos).

BIBLIOGRAFIA

- Albersheim (1975). Alberseim L., "The walls of growing plant cells". En: *Scientific American* 232(4), (1975).
- Cocho et.al.(1986a). Cocho, G., Perez-Pascual, R. y Rius J.L., "Discrete systems, cell-cell interactions and color patterns of animals. I) Conflict dynamics and pattern formation", preprint (Instituto de Fisica, UNAM).
- ___ (1986b). Cocho, G., Perez-Pascual, R., Rius J.L. y Soto F., "Discrete systems, cell-cell interactions and color patterns of animals. II) Clonal theory and cellular automata", preprint (Instituto de Fisica, UNAM).
- Edelman,(1984). Edelman, G.M., "Cell adhesion molecules: a molecular basis for animal form". En: *Scientific American* (abril 1984).
- Gierer,(1974). Gierer, A., "Hydra as a model for the development of biological form". En: *Scientific American* 231(6), (1974).
- Gordon,(1981). Gordon, A.D., *Classification*, (Chapman and Hall: New York, 1981).
- Jardine y Sibson,(1971). Jardine, N. y Sibson R., *Mathematical Taxonomy*, (John Wiley & Sons Ltd: London, 1971).
- Levi-Montalcini et. al.,(1979). Levi-Montalcini, R. y Calissano, P., "The nerve-grow factor". En: *Scientific American* 240(6), (1979).
- Wolpert,(1968). Wolpert, L., "El problema de la bandera francesa: una contribución al estudio sobre desarrollo y regulación de un patrón". En: Waddington, H. (comp), *Hacia una biología teórica*. (Ed. Alianza: Madrid, 1976).
- ___ (1978). Wolpert, L., "Pattern Formation in biological development". En: *Scientific American* 239(4), (1978).
- Wolfram (1983). Wolfram,S., "Statistical mechanics of cellular automata". En: *Rev of Mod Physics* 55(3), (1983).
- ___ (1984a). Wolfram, S., "Universality and complexity in cellular automata". En: *Physica* 10D (1984) 1-35.
- ___ (1984b). Wolfram, S., "Cellular automata as models of complexity". En: *Nature* 311(4), (1984).

APENDICE A

CONJUNTO 2 DE 29 VARIABLES SUBJETIVAS

Variable	Característica o rasgo
1	Corrimiento
2	Corrimiento alternado
3	Corrimiento izquierdo
4	Corrimiento derecho
5	Corrimiento recto
6	Corrimiento "trebol"
7	Corrimiento doble
8	Corrimiento "L"
9	Corrimiento simple
10	Triangulo blanco
11	Escalamiento multiple
12	Triangulo recto
13	Triangulo equilatero
14	Triangulo negro
15	Triangulo recto izquierdo
16	Triangulo recto derecho
17	Triangulo alternado
18	Pseudo triangulos
19	Homogeneo en "ceros"
20	Homogeneo en "unos"
21	Fondo en "malla"
22	Estructuras "H"
23	Monte izquierdo
24	Monte Derecho
25	Monte Blanco
26	Monte Negro
27	Corrimiento Sierra
28	Monte
29	Triangulo no fractal

TABLA DE REGLAS SINONIMAS EN EL CONJUNTO DE AC ELEMENTALES

Regla	Reglas sinónimas
0	8, 32, 40, 64, 96, 128.
1	5, 19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
2	34, 66, 98, 130
3	7, 31, 63, 123
4	12, 36, 44, 68, 100, 203, 207, 217, 219, 221, 223
5	19, 23, 33, 37, 51, 55, 91, 127
6	38, 155, 159
9	25, 27, 39, 41, 103, 111
10	42, 138, 139
11	43, 47, 59, 81, 113, 115, 117
15	87
16	24, 48, 56, 231, 243, 247
17	21, 61, 119
18	22, 54, 122, 126
20	52, 211, 215
29	71
30	86, 90
35	49
45	75, 89, 101, 105
46	142
53	65, 67, 83, 125
72	104
74	173
76	204, 205
80	208, 209, 240, 241, 244, 245
82	210
84	212, 213
97	121
129	147, 151, 161, 183
131	162
132	164
135	149, 165
136	168
140	141, 172
146	182
154	158
156	198

166	167
170	171, 174, 175, 185, 187, 189, 190, 191
180	181
184	226, 227
192	224
193	195
196	197, 228
200	232, 233, 236
216	220
218	222
234	235, 238
237	239, 251, 253, 255
248	249, 252
250	254

MATRIZ DE DATOS PARA LOS 256 AUTOMATAS CELULARES

1	variables	29	R	1	variables	29	R
000000000000000000000000000000		0	1	110010000000000000000000000000		1	1
101000001000000000000000000000		2	2	110100000000000000000000000000		3	3
100010001000000000000000000000		4	4	110010000000000000000000000000		5	5
101001000000000000000000000000		6	6	110100000000000000000000000000		7	7
00000000000000000000100000000000		8	8	110100010000000000000000000000		9	9
101000101000000000000000000000		10	10	111100100000000000000000000000		11	11
100010001000000000000000000000		12	12	100010001000000010000000000000		13	13
101010101000000000000000000000		14	14	111010001000000000000000000000		15	15
100100001000000000000000000000		16	16	111000000000000000000000000000		17	17
000000000110100000000000000000		18	18	110010000000000000000000000000		19	19
100101000000000000000000000000		20	20	111000000000000000000000000000		21	21
000000000110100000000000000000		22	22	110010000000000000000000000000		23	23
100100001000000000000000000000		24	24	110100010000000000000000000000		25	25
101000000100100000000000000000		26	26	110100010000000000000000000000		27	27
100011001101000100000000000000		28	28	110011001000000000000000000000		29	29
100010001110100000000000000000		30	30	110100000000000000000000000000		31	31
00000000000000000000001000000000		32	32	110010000000000000000000000000		33	33
101000001000000000000000000000		34	34	111100001000000000000000000000		35	35
100010001000000000000000000000		36	36	110010000000000000000000000000		37	37
101001000000000000000000000000		38	38	110100010000000000000000000000		39	39
00000000000000000000100000000000		40	40	110100010000000000000000000000		41	41
101000101000000000000000000000		42	42	111100100000000000000000000000		43	43
100010001000000000000000000000		44	44	000000000010000001000000000000		45	45
101000100000000000000000000000		46	46	111100100000000000000000000000		47	47
100100001000000000000000000000		48	48	111100001000000000000000000000		49	49
100010100100100000000100000000		50	50	110010000000000000000000000000		51	51
100101000000000000000000000000		52	52	111000010000000000000000000000		53	53
000000000110100000000000000000		54	54	110010000000000000000000000000		55	55
100100001000000000000000000000		56	56	100000000000000010001000000000		57	57
101000100100100000000100000000		58	58	111100100000000000000000000000		59	59
101000000110001000000000000000		60	60	111000000000000000000000000000		61	61
101000100110100000000000000000		62	62	110100000000000000000000000000		63	63
00000000000000000000001000000000		64	64	111000010000000000000000000000		65	65
101000001000000000000000000000		66	66	111000010000000000000000000000		67	67
100010001000000000000000000000		68	68	100000001001001010000000000000		69	69
100011001101001000000000000000		70	70	110011001000000000000000000000		71	71
100010100000000000000000000000		72	72	100010100000000000000010000000		73	73
101000001000000000000000000100		74	74	000000000010000000100000000000		75	75
100010101000000000000000000000		76	76	100010101000100010000000000000		77	77
100010101101001000000000000000		78	78	100010101001000110000000000000		79	79

100100101000000000000000000000	80	111100100000000000000000000000	81
100101000100100000000000000001	82	111000010000000000000000000000	83
100110101000000000000000000000	84	111110101000000000000000000000	85
100010001110100000000000000000	86	111010001000000000000000000000	87
100101001000000000000000000100	88	000000000010000001000000000000	89
100010001110100000000000000000	90	110010000000000000000000000000	91
100010101101000100000000000000	92	100010101001001010000000000000	93
100010101100100000000100000000	94	110010101000000000000100000000	95
000000000000000000100000000000	96	101000010000000000000000000000	97
101000001000000000000000000000	98	101100100000000001000000000000	99
100010001000000000000000000000	100	000000000010000001000000000000	101
100100000111001000000000000000	102	110100010000000000000000000000	103
100010100000000000000000000000	104	000000000010000001000000000000	105
000000000010000000000010000100	106	100100010000000000000000000000	107
100010001000000000000010000000	108	100010101000010000100000000000	109
000000000111001000000000000000	110	110100010000000000000000000000	111
101100101000000000000100000000	112	111100100000000000000000000000	113
100100100100100000000000000000	114	111100100000000000000000000000	115
100100100000000000000000000000	116	111100100000000000000000000000	117
100100100100100000000000000000	118	111000000000000000000000000000	119
000000000000000000000000100010	120	101000010000000000000000000000	121
000000000110100000000000000000	122	110100000000000000000000000000	123
000000000111000100000000000000	124	111000010000000000000000000000	125
000000000110100000000000000000	126	110010000000000000000000000000	127
000000000000000000100000000000	128	000000000010110000000000000000	129
101000001000000000000000000000	130	101000001000110000000000000000	131
100010001000110000000000000000	132	100010001000110000000100000000	133
101001000000110000000000000000	134	100010001010110000000000000000	135
000000000001011000100000000000	136	000000000011011000000000000000	137
101000101000000000000000000000	138	101000101000000000000000000000	139
100010001001011000000000000000	140	100010001001011000000000000000	141
101000100000000000000000000000	142	101000001001000000000000000000	143
100100001000110000000000000000	144	101000001000110000000000000000	145
000000000110110000000000000000	146	000000000010110000000000000000	147
100101000000110000000000000000	148	100010001010110000000000000000	149
101000001110110000000000000000	150	000000000010110000000000000000	151
100100001001011000000000000000	152	100100001011011000000000000000	153
101001000100100000000000000000	154	101001000000000000000000000000	155
100011001101011100000000000000	156	100011001001011000000000000000	157
101001000100100000000000000000	158	101001000000000000000000000000	159
000000000000110000100000000000	160	000000000010110000000000000000	161
101000001000110000000000000000	162	101000001000110000000100000000	163
100010001000110000000000000000	164	100010001010110000000000000000	165
101001000000110000000000000001	166	101001000000110000000000000001	167
000000000000101100010000000000	168	00000000001000000000010000100	169
101000000000000000000000000000	170	101000000000000000000000000000	171
100010001001011000000000000000	172	1010000010000000000000000000100	173
101000000000000000000000000000	174	101000000000000000000000000000	175
100100001000110000001000000000	176	101000000000110000001000000000	177
100010100000000000010000000000	178	100010100000110000001000000000	179
100101000000110000000000000001	180	100101000000110000000000000001	181

000000000110110000000000000000	182	000000000010110000000000000000	183
1011000000000000000100000000	184	101000000000000000000000000000	185
10100000000000000000100000000	186	101000000000000000000000000000	187
101000000010100010000000000000	188	101000000000000000000000000000	189
101000000000000000000000000000	190	101000000000000000000000000000	191
000000000001010100100000000000	192	000000000011010100000000000000	193
101000001001010100000000000000	194	000000000011010100000000000000	195
100010001001010100000000000000	196	100010001001010100000000000000	197
100011001101011100000000000000	198	100011001101010100000000000000	199
100010000000000000000000000000	200	100010000000000000000000000000	201
100010001101001000000000000000	202	100010001000000000000000000000	203
100010101000000000000000000000	204	100010101000000000000000000000	205
100010000101001000000000000000	206	100010001000000000000000000000	207
100100101000000000000000000000	208	100100101000000000000000000000	209
100101000100100000000000000000	210	100101000000000000000000000000	211
100110101000000000000000000000	212	100110101000000000000000000000	213
100110001101000100000000000000	214	100101000000000000000000000000	215
100010001101000100000000000000	216	100010001000000000000000000000	217
100010001100100000000000000000	218	100010001000000000000000000000	219
100010001101000100000000000000	220	100010001000000000000000000000	221
100010001100100000000000000000	222	100010001000000000000000000000	223
000000000001010100100000000000	224	000000000010000000000000000000	225
101100000000000000000100000000	226	101100000000000000000000000000	227
100010001001010100000000000000	228	100100001000000000000000000000	229
100100001101001000000000000000	230	100100001000000000000000000000	231
100010000000000000000000000000	232	100010000000000000000000000000	233
000000000001001000010000000000	234	000000000010100100001000000000	235
100010000000000000000000000000	236	000000000000000000000000000000	237
000000000010100100001000000000	238	000000000000000000000000000000	239
100100101000000000000000000000	240	100100101000000000000000000000	241
100100101100100000000000000000	242	100100001000000000000000000000	243
100100101000000000000000000000	244	100100101000000000000000000000	245
100100001100100000000000000000	246	100100001000000000000000000000	247
000000000010100010001000000000	248	000000000010100010001000000000	249
000000000010010000001000000000	250	000000000000000000000000000000	251
000000000010010000001000000000	252	000000000000000000000000000000	253
000000000010010000001000000000	254	000000000000000000000000000000	255

APENDICE B

0 00000000

8 00001000

16 00010000

24 00011000

1 00000001

9 00001001

17 00010001

25 00011001

2 00000010

10 0001010

18 00010010

26 00011010

3 00000011

11 0001011

19 00010011

27 00011011

4 00000100

12 0001100

20 00010100

28 00011100

5 00000101

13 0001101

21 00010101

29 00011101

6 00000110

14 0001110

22 00010110

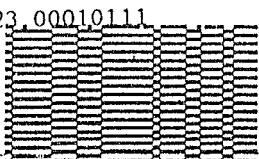
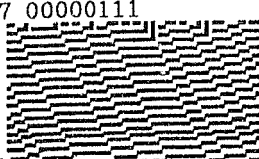
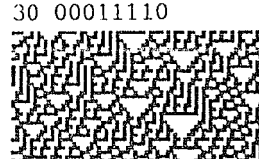
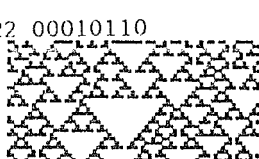
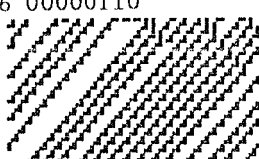
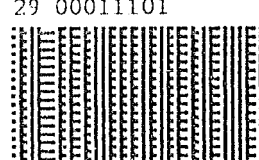
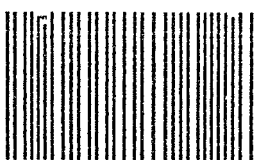
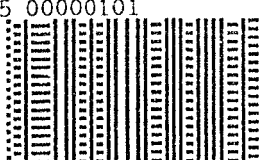
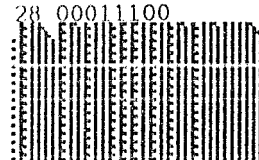
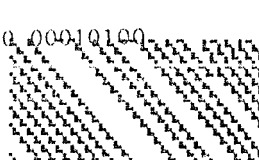
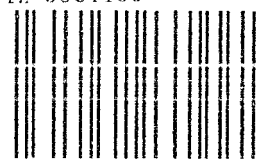
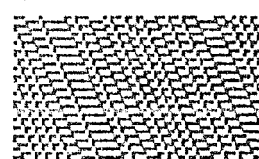
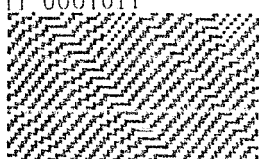
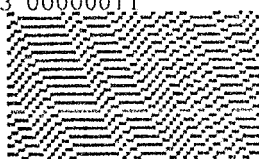
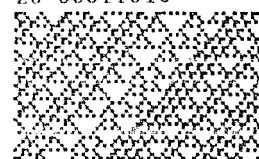
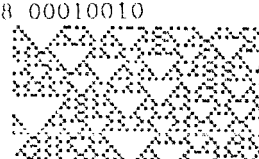
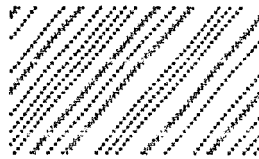
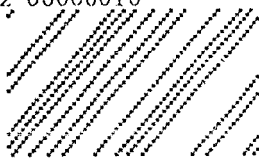
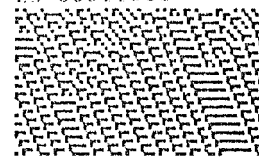
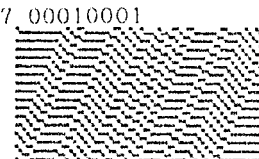
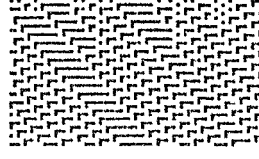
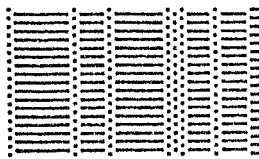
30 00011110

7 00000111

15 00001111

23 00010111

31 00011111



32 00100000

33 00100001

34 00100010

35 00100011

36 00100100

37 00100101

38 00100110

39 00100111

40 00101000

41 00101001

42 00101010

43 00101011

44 00101100

45 00101101

46 00101110

47 00101111

48 00110000

49 00110001

50 00110010

51 00110011

52 00110100

53 00110101

54 00110110

55 00110111

56 00111000

57 00111001

58 00111010

59 00111011

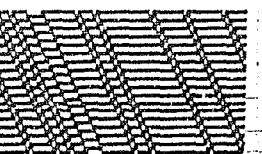
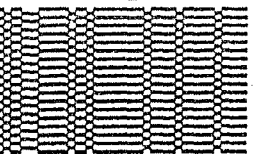
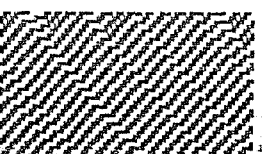
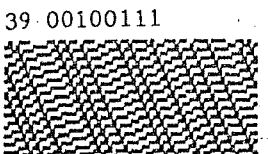
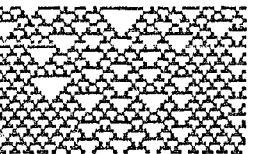
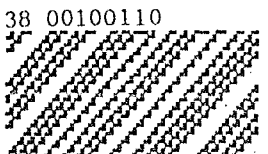
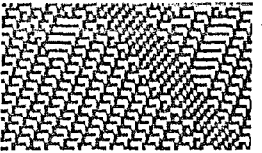
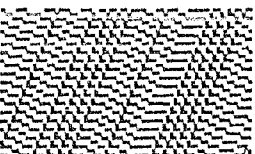
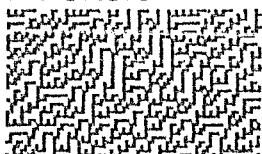
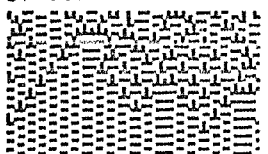
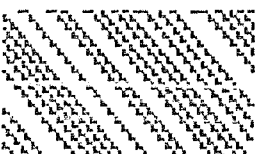
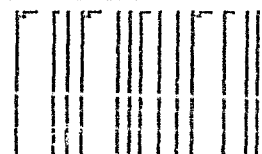
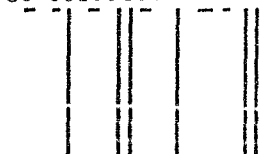
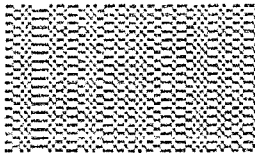
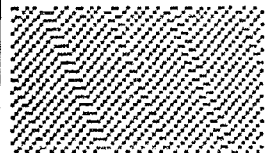
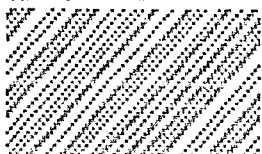
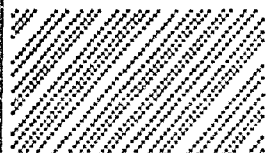
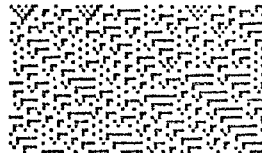
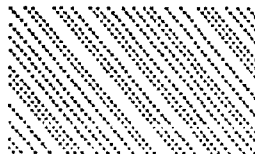
60 00111100

61 00111101

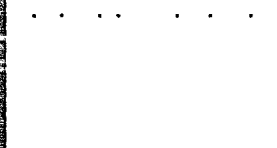
62 00111110

63 00111111

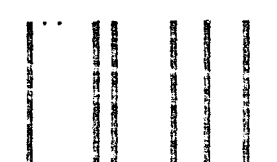
▽ * ▽ * * ▽ *



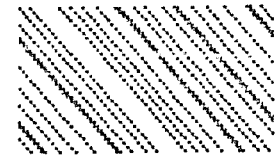
64 01000000



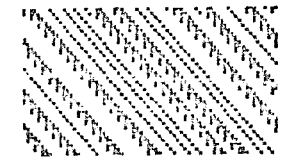
72 01001000



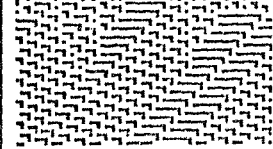
80 01010000



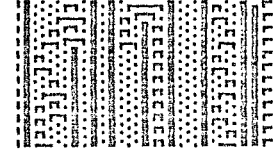
88 01011000



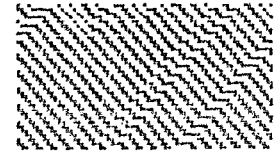
65 01000001



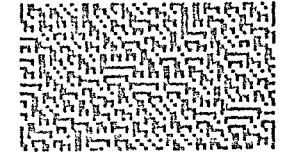
73 01001001



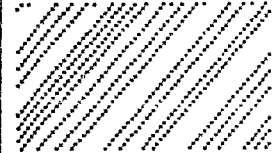
81 01010001



89 01011001



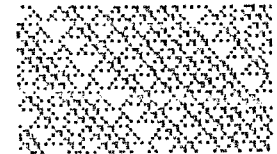
66 01000010



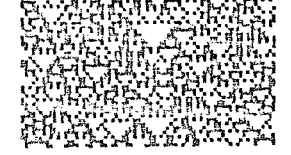
74 01001010



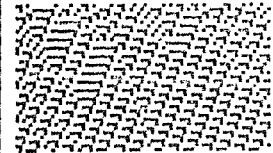
82 01010010



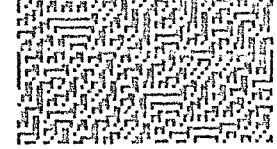
90 01011010



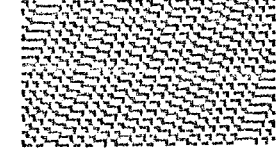
67 01000011



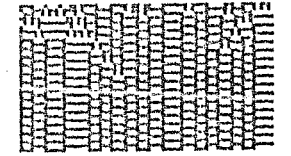
75 01001011



83 01010011



91 01011011



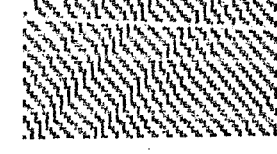
68 01000100



76 01001100



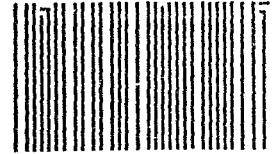
84 01010100



92 01011100



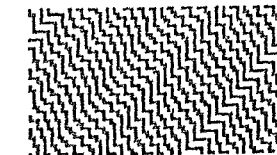
69 01000101



77 01001101



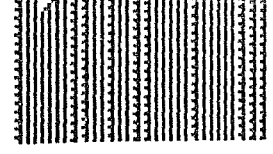
85 01010101



93 01011101



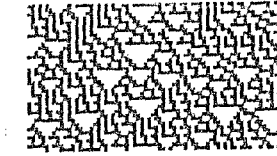
70 01000110



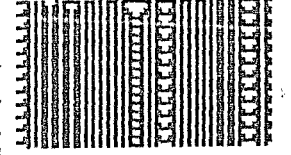
78 01001110



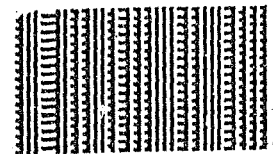
86 01010110



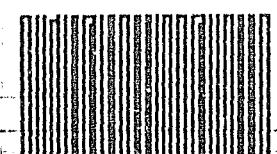
94 01011110



71 01000111



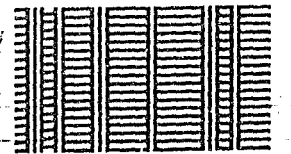
79 01001111



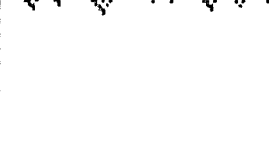
87 01010111



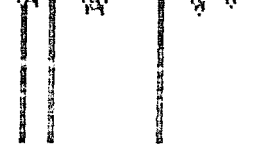
95 01011111



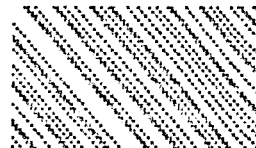
96 01100000



104 01101000



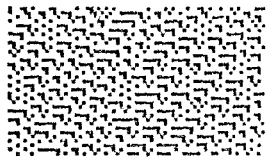
112 01110000



120 01111000



97 01100001



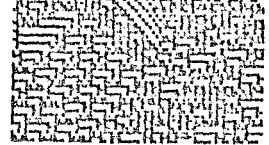
105 01101001



113 01110001



121 01111001



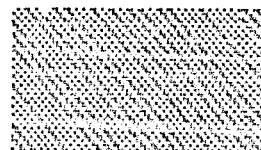
98 01100010



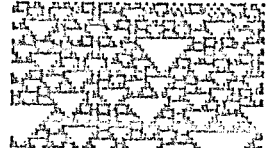
106 01101010



114 01110010



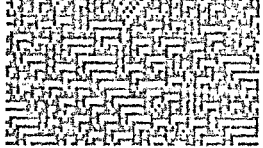
122 01111010



99 01100011



107 01101011



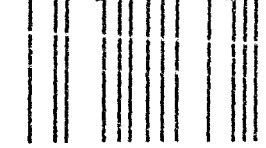
115 01110011



123 01111011



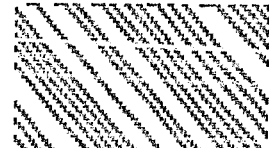
100 01100100



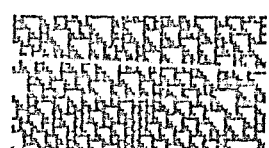
108 01101100



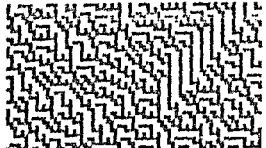
116 01110100



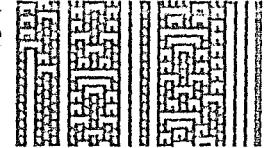
124 01111100



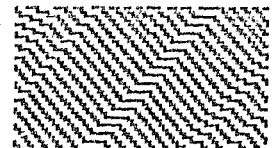
101 01100101



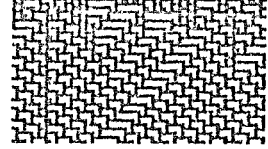
109 01101101



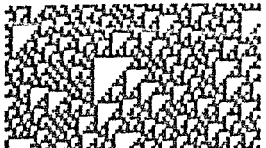
117 01110101



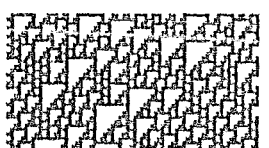
125 01111101



102 01100110



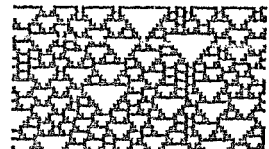
110 01101110



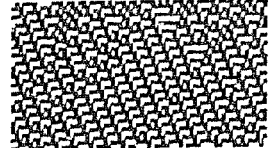
118 01110110



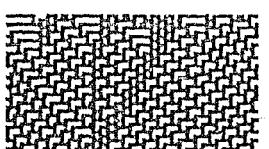
126 01111110



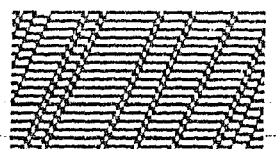
103 01100111



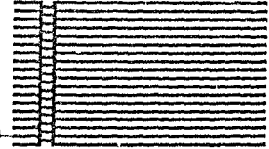
111 01101111



119 01110111



127 01111111



128 10000000

136 10001000

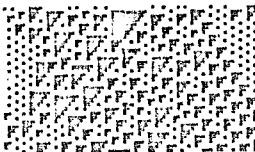
144 10010000

152 10011000

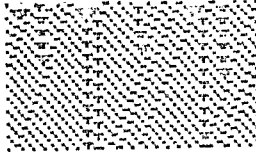
129 10000001



137 10001001



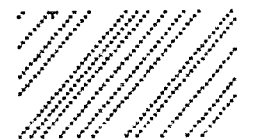
145 10010001



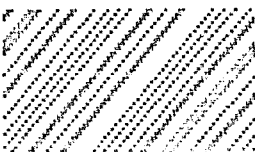
153 10011001



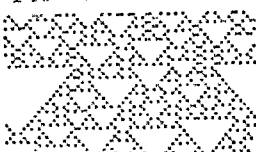
130 10000010



138 10001010



146 10010010



154 10011010



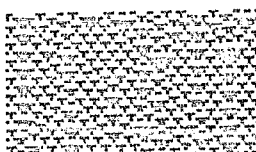
131 10000011



139 10001011



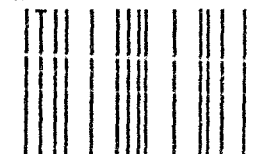
147 10010011



155 10011011



132 10000100



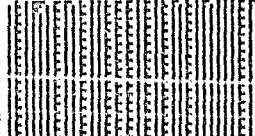
140 10001100



148 10010100



156 10011100



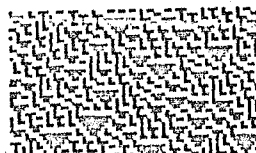
133 10000101



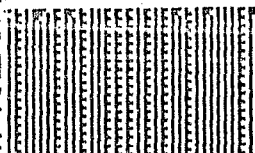
141 10001101



149 10010101



157 10011101



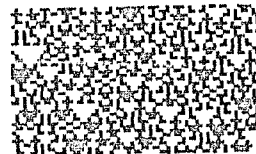
134 10000110



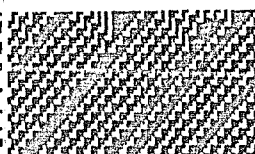
142 10001110



150 10010110



158 10011110



135 10000111



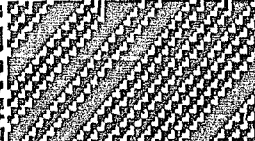
143 10001111



151 10010111



159 10011111



160 10100000



168 10101000



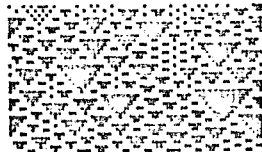
176 10110000



184 10111000



161 10100001



169 10101001



177 10110001



185 10111001



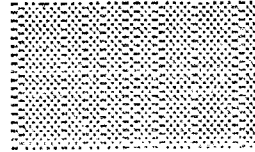
162 10100010



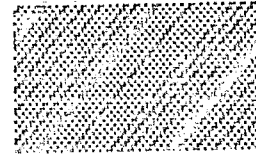
170 10101010



178 10110010



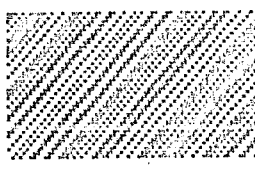
186 10111010



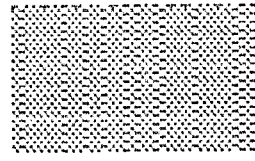
163 10100011



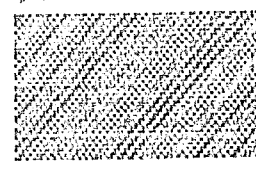
171 10101011



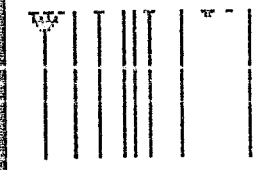
179 10110011



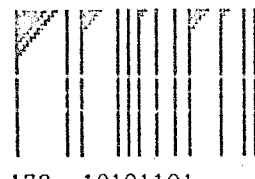
187 10111011



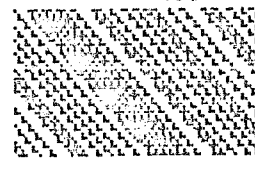
164 10100100



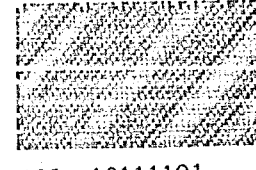
172 10101100



180 10110100



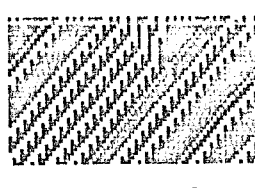
188 10111100



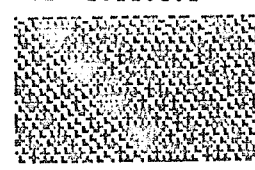
165 10100101



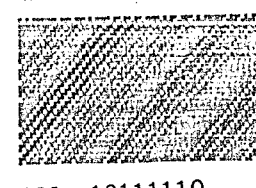
173 10101101



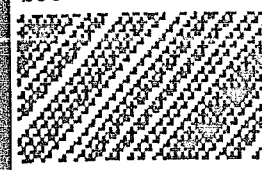
181 10110101



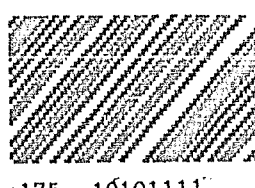
189 10111101



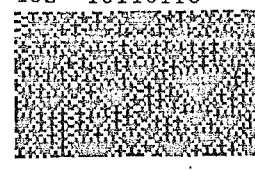
166 10100110



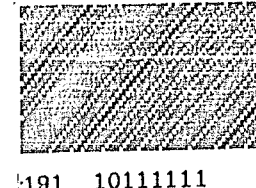
174 10101110



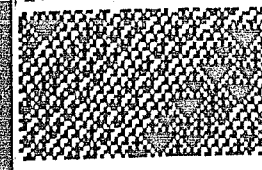
182 10110110



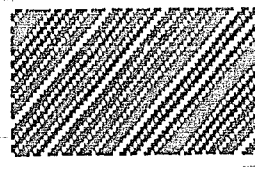
190 10111110



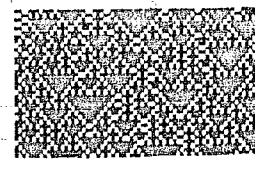
167 10100111



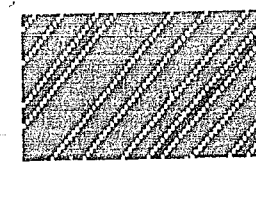
175 10101111



183 10110111



191 10111111

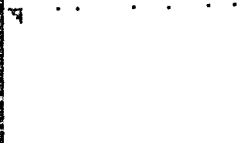


92 11000000

200 11001000

208 11010000

216 11011000

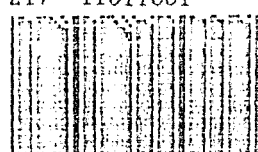
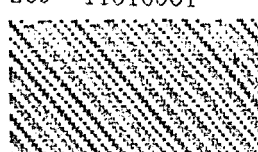
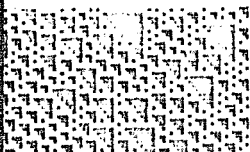


93 11000001

201 11001001

209 11010001

217 11011001

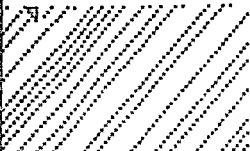


94 11000010

202 11001010

210 11010010

218 11011010

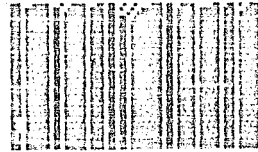
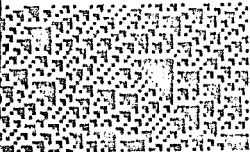


95 11000011

203 11001011

211 11010011

219 11011011

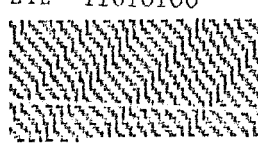


196 11000100

204 11001100

212 11010100

220 11011100

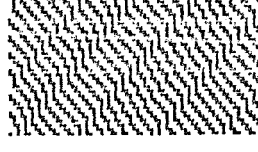
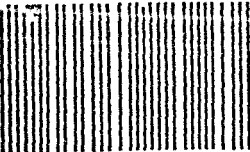


197 11000101

205 11001101

213 11010101

221 11011101

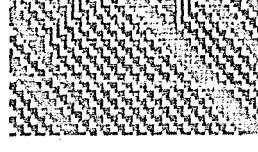
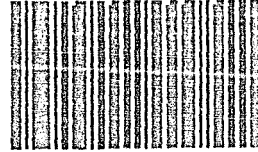
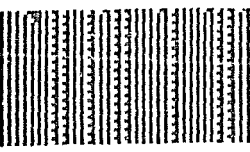


198 11000110

206 11001110

214 11010110

222 11011110

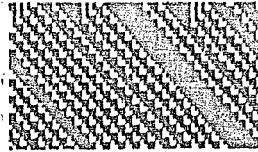
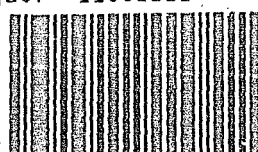
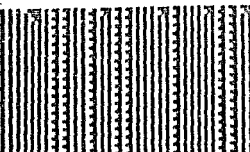


199 11000111

207 11001111

215 11010111

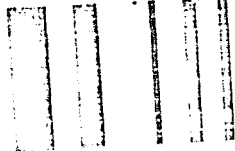
223 11011111



1 11100000



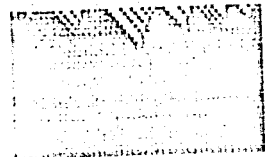
232 11101000



240 11110000



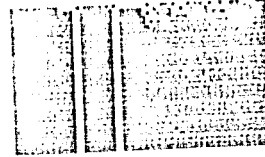
248 11111000



25 11100001



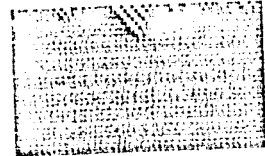
233 11101001



241 11110001



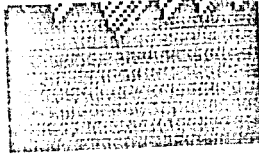
249 11111001



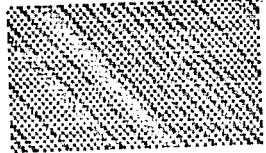
26 11100010



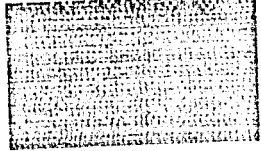
234 11101010



242 11110010



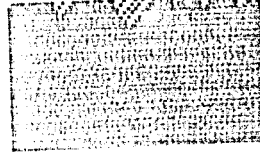
250 11111010



227 11100011



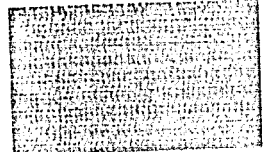
235 11101011



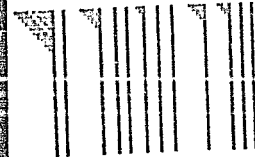
243 11110011



251 11111011



228 11100100



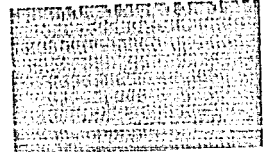
236 11101100



244 11110100



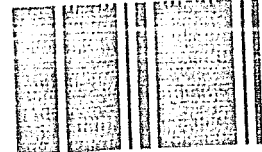
252 11111100



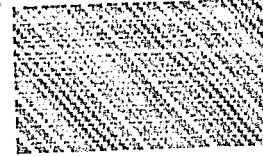
229 11100101



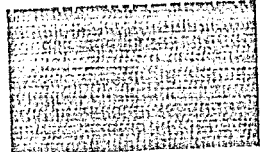
237 11101101



245 11110101



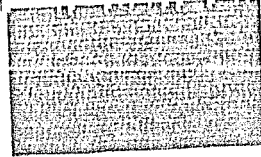
253 11111101



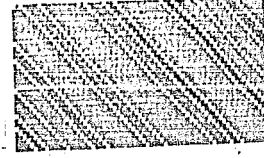
230 11100110



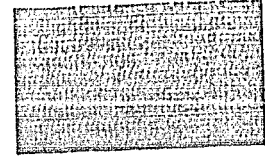
238 11101110



246 11110110



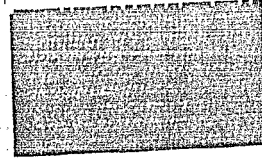
254 11111110



231 11100111



239 11101111



247 11110111



255 11111111

