

16 2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FLUJOS GEODESICOS EN
VARIETADES DE CURVATURA NEGATIVA**

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

Renato Gabriel Iturriaga Acevedo



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1	Introducción	1
---	------------------------	---

Capítulo 1 Algunos Resultados Sobre Geometría Riemanniana

	Introducción	2
1	Flujos Geodésicos	2
2	Variedades Completas	5
3	Curvatura	7
4	Campos de Jacobi	11
5	Teorema de Cartan	14

Capítulo 2 Ergodicidad

	Introducción	19
1	Definiciones de Análisis	19
2	Teorema de Birkhoff	21
3	Ergodicidad	32

Capítulo 3 Flujos Geodésicos en Superficies de Curvatura Constante menos uno

	Introducción	38
1	Medida en el Haz Tangente	39
2	Horociclos	48
3	Teorema de Hedlund-Hopf	53
	Apendice 1	58
	Apendice 2	62
	Bibliografía	64

INTRODUCCION

Resolver una ecuación diferencial en el sentido tradicional de la palabra, resulta en la mayoría de los casos imposible; y aun cuando esto fuera posible muchas veces la solución no nos permite *entender* lo que esta pasando. Lo que quiera decir *entender* una ecuación diferencial dependera de cual es el punto de vista que uno adopte, y puntos de vista en matemáticas hay muchos. En el presente trabajo adoptaremos el que podria ser llamado el punto de vista estadístico. Es decir nos interesaremos por las propiedades estadísticas de un movimiento, a priori determinístico, originado por una ecuación diferencial.

Concretamente estudiaremos el flujo geodésico en el haz tangente unitario (T_1M) a una superficie compacta M de curvatura constante menos uno. Probaremos que tiene una propiedad estadística llamada ergodicidad. Esta puede ser caracterizada por la siguiente propiedad en T_1M : Dado un conjunto A , para casi todo punto x al moverse este por el flujo pasa por A un tiempo proporcional al volumen de A . Es decir casi todo punto a la larga, se comporta como si se moviera al azar.

En el capítulo uno planteamos qué es y donde está el objeto que estudiamos, esto es, el flujo geodésico sobre en el haz tangente a una superficie; además probamos el teorema de Cartan y algunos otros resultados de geometría. En el capítulo dos precisaremos cual sera nuestro punto de vista de enfocar el problema y las herramientas para atacarlo, a saber el concepto de ergodicidad y conceptos básicos de análisis. En el capítulo tres nos ocupamos del resultado principal de este trabajo, probamos la ergodicidad del flujo geodésico cuando la superficie es de curvatura menos uno.

CAPITULO 1

ALGUNOS RESULTADOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

Introducción

El objetivo de este primer capítulo del trabajo es introducir conceptos y teoremas básicos de la Geometría Riemanniana que necesitaremos posteriormente. En primer lugar la definición de geodésicas y de el flujo geodésico, concepto que se tratará durante todo el trabajo. Terminaremos con el teorema de Cartan cuyos corolarios serán utilizados en el capítulo 3. Para entender y demostrar este último teorema demostraremos antes el teorema de Hopf- Rinow y el teorema de Hadamard; y para este último explicaremos primero el papel de los campos de Jacobi.

§ 1 Flujo Geodésico

En una variedad Riemanniana M consideremos el siguiente problema. Dado un punto p en M y un vector v en $T_p M$ encontrar una curva que "no se acelere" y que pase al tiempo cero por p y con velocidad v .

Para precisar lo que quiere decir que una curva "no se acelere" usamos la noción de derivada covariante. (ver apéndice 1) Introducimos las siguientes definiciones

Definición 1 Un campo de vectores a lo largo de una curva $\alpha(t) : [a, b] \rightarrow M$ es una aplicación $v(t) : [a, b] \rightarrow TM$ tal que $v(t)$ esta en $T_{\alpha(t)}M$. Donde TM es el haz tangente y $T_{\alpha(t)}M$ es el plano tangente a M en $\alpha(t)$.

Definición 2 Un campo de vectores $v(t)$ a lo largo de una curva $\alpha(t)$ es *paralelo* si la derivada covariante del campo es cero. Diremos entonces que una curva $\alpha(t)$ no se acelera si el campo de vectores $v(t)$ definido como $v(t) = \alpha'(t)$ es paralelo a lo largo de la curva $\alpha(t)$.

Recordemos que en coordenadas locales la derivada covariante de un campo

$$V(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{es}$$
$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Donde $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ son las coordenadas de la curva α y $\Gamma_{i,j}^k$ son los símbolos de Christoffel. De esta manera la ecuación de una curva α que no se acelera es

$$0 = \frac{DV}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Así hemos resuelto nuestro problema original; dadas condiciones iniciales (un punto y un vector de velocidad) encontramos una solución.

Una ecuación diferencial en \mathbb{R} o un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^n de segundo grado se puede transformar en un sistema del doble de incógnitas pero de primer orden. Esto se logra introduciendo n ecuaciones extras $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ y luego sustituyendo $\frac{dv_i}{dt}$ por $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$. De esta manera el sistema

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = F(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt})$$

se transforma en

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

En el caso de una variedad diferenciable podemos hacer algo semejante introduciendo de nuevo el haz tangente. Si (U, \mathbf{x}) es un sistema de coordenadas tenemos que todo vector $v \in T_q M$ con $q \in U$ se puede escribir como $\sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Por lo tanto, con las coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ parametrizamos a TU .

Definimos el levantamiento de una curva $\gamma(t) : [0, a] \rightarrow M$ como la curva en TM $(\gamma(t), \gamma'(t))$. Es claro que una curva $\gamma(t)$ es geodésica si y sólo si su levantamiento satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j \end{cases} \quad \text{para } k = 1, \dots, n$$

en términos de las coordenadas en TU .

Recordemos ahora el siguiente teorema de ecuaciones diferenciales

Teorema 1

Sea V un campo C^∞ en un abierto de M entonces

a) Para cada $p \in M$ existe una solución α_p tal que $\alpha_p(0) = p$. Además si β_p es otra solución con $\beta_p(0) = p$, entonces $\alpha_p = \beta_p$ en la intersección de los dominios.

De esta manera hay una única solución $\tilde{\alpha}_p$ definida en un intervalo maximal.

b) Si llamamos $\varphi(p, t) = \tilde{\alpha}_p(t)$, entonces φ está definida en un abierto Ω de $M \times \mathbb{R}$. A la función φ se le acostumbra llamar el flujo de la ecuación diferencial.

Con este teorema probamos el siguiente

Lema 2

Existe un único campo G en TM cuyas trayectorias son de la forma $(\gamma(t), \gamma'(t))$ donde $\gamma(t)$ es geodésica.

Demostración: dado un (p, v) en TM el teorema 1 muestra que existe una única geodésica $\gamma_{(p,v)}$ (salvo el tamaño del intervalo) que pasa por p con velocidad v al instante cero definimos

$$G(p, v) = \frac{d}{dt}(\gamma_{(p,v)}, \gamma'_{(p,v)})|_{t=0}$$

Al campo arriba definido lo llamaremos campo geodésico y a su flujo el flujo geodésico.

Observación 1 Por la segunda parte del teorema 1 si tomamos una vecindad compacta W de p en M y definimos $W_\epsilon = \{(p, v) \in TM; p \in W, |v| < \epsilon\}$ entonces podemos escoger δ de tal manera que el flujo está definido para todo t con $|t| < \delta$ siempre y cuando (p, v) esté en W_ϵ .

Denotemos por $\gamma(t, q, v)$ la geodésica que pasa por q con velocidad v al tiempo cero. Al aumentar las velocidades los tiempos disminuyen y viceversa; sin embargo la curva geométrica no cambia. La demostración de este hecho es el siguiente lema

Lema 3 (de homogeneidad)

Si la geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida en el intervalo $(-\delta, \delta)$ entonces la geodésica (t, q, av) está definida en $(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ y

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$$

Demostración

$$\text{Sea } h : (\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M \quad h(t) = \gamma(at, q, v)$$

Tenemos que

$$h(0) = q, \quad h'(0) = av \text{ y que}$$

$$\frac{D}{dt} \frac{dh}{dt} = \nabla_{h'(t)} h'(t) = \nabla_{\gamma'(at)} \gamma'(at) = a^2 \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$$

Luego $h(t)$ es una geodésica con las mismas condiciones iniciales que $\gamma(t, q, av)$ por la unicidad de estas concluimos que son iguales.

Este lema junto con la observación 1 nos permite definir el mapeo exponencial $exp_p : U \subset T_p M \rightarrow M$ como

$$exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$$

Sabemos por la observación 1 que si la norma de v es menor que ϵ existe un δ tal que $\gamma(t, p, v)$ está definido siempre que $|t| < \delta$ y por el lema de homogeneidad $\gamma(t, q, \frac{\delta v}{2})$ está definido en $(-2, 2)$ lo que implica que $exp_p(w)$ está definida si la norma de w es

menor que $\frac{\epsilon\delta}{2}$. De hecho \exp_p es un difeomorfismo si la vecindad es suficientemente chica. Esto se debe a que:

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt} \exp_p(tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma(t, q, v)|_{t=0} = v$$

En consecuencia la diferencial del mapeo exponencial en cero es la identidad y la afirmación se sigue del teorema de la función inversa.

Denotemos por $B_r(0) = \{v \in T_p M : |v| < r\}$ y $B_r(p) = \exp_p(B_r(0))$. Si r es suficientemente pequeño de manera que $\exp_p|_{B_r(0)}$ sea un difeomorfismo llamamos a $B_r(p)$ una *bola normal* centrada en p .

El nombre de geodésicas queda justificado por la siguiente proposición, la demostración puede ser encontrada en [C2].

Proposición 4

Sea $p \in M$ y $B_\epsilon(p)$ una bola normal centrada en p ; sea γ una geodésica contenida en $B_\epsilon(p)$ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$; consideremos cualquier otra curva diferenciable (diferenciable por partes) c tal que $c(0) = p$ y $c(1) = q$, entonces la longitud de γ es menor o igual que la longitud de c . Mas aun si las longitudes son iguales entonces las trazas coinciden.

Observación 2

El problema pudo ser tratado desde el principio desde este punto de vista. Es decir considerar la funcional:

$$L : \{c; c : [0, 1] \rightarrow M \quad c(0) = p, c(1) = q\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt$$

Y buscar los mínimos de esta funcional. Las ecuaciones de Euler-Lagrangé de esta funcional resultan ser las ecuaciones que ya teníamos. Ver [C3],[S2].

§ 2 Variedades Completas

Dos preguntas surgen mas o menos naturalmente

¿Cuándo esta el flujo geodésico definido para todo t ?

¿Cuándo podemos unir dos puntos arbitrarios por una geodésica de longitud mínima?

Por el lema de homogeneidad, la primera pregunta la podemos reformular en ¿Cuándo \exp_p esta definida en todo $T_p M$? Las respuestas a estas preguntas estan dadas por el teorema de Hopf-Rinow.

Definición 3 Una variedad M es (geodésicamente) completa si para todo p en M \exp_p esta definida en todo el espacio tangente.

Intuitivamente quiere decir que la variedad no tiene ni hoyos ni fronteras. Definamos la siguiente distancia en M

$$d(p, q) = \inf\{l(c); c(0) = p, c(1) = q\}$$

Es claro que es una distancia y que por la proposición 4 la topología inducida es la misma.

Teorema 5 (Hopf-Rinow)

Sea M una variedad Riemanniana; las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- \exp_p esta definido en todo $T_p M$ para algun p en M .
- Los acotados y cerrados son compactos en M .
- M es completa como espacio métrico.
- M es completa (geodésicamente).
- Existe una sucesión de compactos $K_n \subset M$ tales que $K_n \subset K_{n+1}$, $\cup K_n = M$ y tal que si q_n es una sucesión que satisface $q_n \notin K_n$ entonces $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Además cada una de estas implica que

- Para todo q en M existe una geodésica γ ligando a p con q y de longitud $d(p, q)$.

Demostración (a \Rightarrow f)

Sea $d(p, q) = r$ y $B_\delta(p)$ una bola normal en p , y S su frontera. Tomemos un punto x en S de tal manera que $d(x, q)$ sea un mínimo en S . (Existe por la continuidad de la distancia y por la compacidad de S) Entonces $x = \exp_p(\delta v)$ con $|v| = 1$. Vamos a mostrar que $\exp_p(rv) = q$

Sea $\gamma(s) = \exp_p(sv)$ y consideremos la siguiente ecuación

$$d(\gamma(s), q) = r - s \tag{1}$$

Definimos $A = \{s : s \in [0, r] \text{ tales que (1) vale}\}$. A es distinto del vacío pues (1) vale para $s = 0$. Probemos que el supremo es r ; supongamos que $s_0 \in A$, probaremos que $s_0 + \delta' \in A$ si δ' es suficientemente chico. Consideramos $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ una bola normal y x' nuevamente un punto en la frontera S' de esta nueva bola donde la distancia a q tome un mínimo.

Basta ver que $x' = \gamma(s_0 + \delta')$ pues tenemos que:

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + d(x', q) \text{ por como escogimos a } x'$$

$$d(\gamma(s_0), q) = r - s_0 \text{ pues } s \text{ esta en } A$$

Concluimos que

$$r - s_0 = \delta' + d(x', q) \tag{2}$$

Tendríamos entonces que

$$r - s_0 = \delta' + d(\gamma(s_0), q)$$

Que es (1) para $s_0 + \delta'$

Para ver que $x' = \gamma(s_0 + \delta')$. De la igualdad (2) y de la desigualdad del triángulo obtenemos que:

$$d(p, x') \geq d(p, q) - d(q, x') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$$

Pero la curva ligando p con x' definida como la geodésica $\gamma(s)$ hasta $\gamma(S_0)$ y luego por el rayo geodésico, en principio quebrada, tiene longitud $s_0 + \delta'$. Por la proposición 4 una curva que realice la distancia entre dos puntos es una geodésica y por lo tanto no es una curva quebrada y concluimos que $x' = \gamma(s_0 + \delta')$.

Probamos que $\sup A = r$. Pero por continuidad, r de hecho esta en A , por lo tanto $d(\gamma(r), q) = 0$ y en consecuencia $\gamma(r) = q$

(a) \Rightarrow (b) Sea $A \subset M$ cerrado y acotado. Por ser acotado A esta contenido en una bola B con la métrica d centrada en p de radio digamos r por (f) esta bola esta contenida en la imagen de la exponencial de la cerradura de la bola $B_{r+1}(0)$. Luego A es un cerrado en un compacto por lo tanto es compacto.

(b) \Rightarrow (c) Sea p_n una secuencia de Cauchy el conjunto $\{p_n\}$ es un conjunto acotado, por (b) su cerradura es compacta, entonces hay una subsucesión convergente y siendo de Cauchy, la sucesión misma converge.

(c) \Rightarrow (d) Supongamos que M no es geodésicamente completa. Consideramos una geodésica $\gamma(s)$ que este definida para todo $s < s_0$ y que no este definida para s_0 . Sea s_n un sucesión que tienda a s_0 . Ahora $d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m|$ concluimos que la sucesión $\gamma(s_n)$ es de Cauchy. Por (c) $\gamma(s_n)$ converge a un punto q en M .

Tomamos una bola $W_\delta(p)$ tal que las geodésicas que partan de aqui esten definidas por lo menos una distancia δ ; escogemos N tal que si $n, m \geq N$ entonces $\gamma(n), \gamma(m) \in W_{\frac{\delta}{2}}(p)$. Luego existe una única geodésica g ligando a $\gamma(n)$ con $\gamma(m)$ de longitud menor que δ por lo tanto g coincide con γ , sin embargo g esta definida por lo menos una longitud δ , con lo cual g extiende a γ mas alla de s_0 .

(d) \Rightarrow (a) Obvio

(b) \Rightarrow (e) Sea q en M y $K_n = \overline{B_n(q)}$, K_n es compacto pues es cerrado y acotado. Además la unión de todos es todo M . Ahora supongamos que q_n no esta en K_n , sea p en M , entonces $d(q_n, p) + d(p, q) \geq d(q_n, q)$ la distancia de q_n a q tiende a infinito y como la distancia de p a q es fija concluimos que $d(q_n, p) \rightarrow \infty$.

(e) \Rightarrow (b) Sea C un conjunto cerrado y acotado. Entonces C esta contenido en una bola de la métrica d de radio r centrada en p , supongamos sin perdida de generalidad que p esta en C . Afirmamos que C esta contenido en un K_n , pues en caso contrario, de existir q_n en $C - K_n$ para todo n por (b) tendríamos que $d(p, q_n) \rightarrow \infty$ contradicción con que C este contenido en una bola. Luego C es compacto por ser cerrado en un compacto.

§ 3 Curvatura

En esta sección definiremos dos nociones de curvatura, y daremos algunas interpretaciones. Omitiremos gran parte de las pruebas, las demostraciones completas de estas pueden ser encontradas en [C2] y [M2].

Definición 4 La *curvatura* R de una variedad Riemanniana M es una ley a cada pareja de campos diferenciables X, Y asocia una aplicación

$$R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

Donde $\chi(M)$ es el conjunto de campos diferenciables en M ; dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

Si X, Y provienen de un sistema de coordenadas ($X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$) tenemos que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ con lo cual la curvatura mide la no simetría de la derivada covariante.

Proposición 6

$R(X, Y)Z(p)$ sólo depende de los valores de los campos en el punto.

Mostremos primero que es lineal en las tres variables. Por las propiedades de la conexión tenemos que es aditiva en las tres variables (ver apéndice 1) para demostrar que

$$R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X (fZ) &= \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) = \\ &= f \nabla_Y \nabla_X Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + Y(X(f))Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) = \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z + X(f) \nabla_Y Z + Y(f) \nabla_X Z + X(Y(f))Z \end{aligned}$$

$$\nabla_{[X, Y]} fZ = f \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z$$

Sumando obtenemos

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + [Y, X](f)Z + f \nabla_{[X, Y]} Z + [X, Y](f)Z = \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y)Z + f \nabla_{[X, Y]} Z = fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

Cálculos semejantes muestran que la función es lineal en las otras dos variables.

Ahora en un sistema de coordenadas (U, \mathbf{x}) , definimos R_{ijk}^l de tal manera que $R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) \frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_i R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_i}$. Ahora si tenemos tres campos

$$X = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Z = \sum w_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Obtenemos que

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l u_i v_j w_k \frac{\partial}{\partial x_l}$$

lo que muestra que $R(X, Y)Z(p)$ solo depende de los valores de X, Y, Z en p . Debido a esta propiedad llamaremos a la curvatura el *tensor de curvatura*.

Proposición 7

Sea σ un subespacio de dimensión 2 de $T_p M$, sean x, y dos vectores linealmente independientes entonces

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

solo depende del subespacio.

Para demostrar la proposición necesitaremos el siguiente

Lema 8

El tensor de curvatura satisface las siguientes identidades

i) $\langle R(x, y)z, t \rangle + \langle R(y, z)x, t \rangle + \langle R(z, x)y, t \rangle = 0$

ii) $\langle R(x, y)z, t \rangle = -\langle R(y, x)z, t \rangle$

iii) $\langle R(x, y)z, t \rangle = -\langle R(x, y)t, z \rangle$

iv) $\langle R(x, y)z, t \rangle = \langle R(z, t)x, y \rangle$

La demostración de estos hechos puede ser encontrada en [C2].

Para demostrar la proposición 7 observese que podemos pasar de una base cualquiera $\{x, y\}$ a otra $\{x', y'\}$ con composiciones de las siguientes transformaciones elementales

$$\{x, y\} \rightarrow \{y, x\} \quad \{x, y\} \rightarrow \{\lambda x, y\} \quad \{x, y\} \rightarrow \{x + \lambda y, y\}$$

Ahora $K(x, y)$ es invariante bajo estas transformaciones; la primera combinando (ii) y (iii) del Lema 8, la segunda por la linealidad la tercera es un cálculo simple usando (ii), (iii) y (iv) del lema.

En vista de esta proposición definimos dado un subespacio σ de dimensión dos de $T_p M$ la *curvatura seccional* como $K(p, \sigma)$

Observación 3 Una interpretación geométrica de la curvatura seccional es la siguiente; sea $B \subset T_p M$ un abierto que contenga al cero y donde \exp_p sea un difeomorfismo. Entonces $\exp_p(B \cap \sigma)$ es una superficie S encajada en M formada de pequeñas geodésicas. S como subvariedad de M tiene una métrica inducida y por

lo tanto una curvatura Gaussiana, esta en p es precisamente $K(p, \sigma)$. (Ver [C2] páginas 112 ,113).

Además de esta interpretación geométrica la curvatura seccional determina al tensor de curvatura, esto es

Proposición 9

En un espacio vectorial V con producto interior de dimensión mayor o igual que dos, R y R' son funciones trilineales satisfaciendo (i),(ii),(iii),(iv) del lema 8, si denotamos por

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

$$K'(x, y) = \frac{\langle R'(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

Y si $K(x, y) = K'(x, y)$ entonces, $R = R'$.

Basta probar que $\langle R(x, y)z, t \rangle = \langle R'(x, y)z, t \rangle$ para todo x, y, z, t . Por hipótesis tenemos que $\langle R(x, y)x, y \rangle = \langle R'(x, y)x, y \rangle$ entonces

$$\langle R(x+z, y)x+z, y \rangle = \langle R'(x+z, y)x+z, y \rangle$$

de donde

$$\begin{aligned} & \langle R(x, y)x, y \rangle + 2\langle R(x, y)z, y \rangle + \langle R(z, y)z, y \rangle = \\ & = \langle R'(x, y)x, y \rangle + 2\langle R'(x, y)z, y \rangle + \langle R'(z, y)z, y \rangle \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\langle R(x, y)z, y \rangle = \langle R'(x, y)z, y \rangle$$

y de aqui que

$$\langle R(x, y+t)z, y+t \rangle = \langle R'(x, y+t)z, y+t \rangle$$

de donde

$$\langle R(x, y)z, t \rangle + \langle R(x, t)z, y \rangle = \langle R'(x, y)z, t \rangle + \langle R'(x, t)z, y \rangle$$

es decir

$$\langle R(x, y)z, t \rangle - \langle R'(x, y)z, t \rangle = \langle R(x, t)z, y \rangle - \langle R'(x, t)z, y \rangle.$$

Con lo que concluimos que la expresión $\langle R(x, y)z, t \rangle - \langle R'(x, y)z, t \rangle$ es invariante por permutaciones cíclicas de los primeros tres elementos. Por lo tanto usando (i) del lema 8 obtenemos el resultado.

Terminamos la sección con otro resultado que usaremos mas adelante y que no demostraremos, la prueba puede ser encontrada en [M2].

Proposición 10

Si $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ es una superficie parametrizada, y V es un campo a lo largo de la superficie entonces

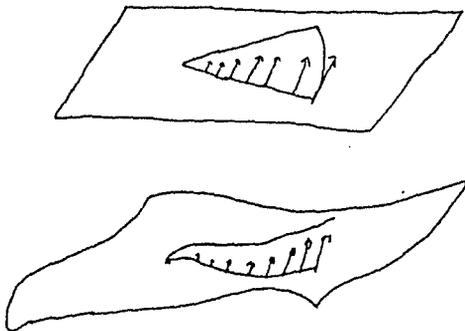
$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} V - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} V = R\left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}\right)V$$

§ 4 Campos de Jacobi

Los campos de Jacobi jugarán un papel fundamental en las demostraciones de los teoremas de Hadamard y de Cartan. Comenzemos considerando la siguiente superficie parametrizada.

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s))$$

Donde $v(s)$ es una curva en $T_p M$ con $v(0) = v$ y $v'(0) = w$. Consideramos sobre la geodésica $\gamma(t) = \exp_p(tv(0))$ el campo de vectores, a lo largo de esta, $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = d(\exp_p)_{tv}(tw)$.



Intuitivamente $J(t)$ “empuja” la geodésica $\gamma(t)$ a otra geodésica cercana que comienza en p y sale con dirección $v + \varepsilon w$

Proposición 11

El campo $J(t)$ considerado anteriormente satisface la ecuación

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = 0 \quad \text{ecuación de Jacobi}$$

Donde $R(\gamma', J)\gamma'$ es el tensor de curvatura.

Para probar esta afirmación necesitaremos el siguiente lema, su demostración se puede encontrar en la página 59 de [C2].

Lema 12

En una superficie parametrizada $f(t, s)$ tenemos:

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

Demostración (Proposición)

$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$ pues $f(t, s_0)$ es una geodésica.

$$0 = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (*)$$

$$= \frac{D^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (**)$$

$$= \frac{D^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + R(\gamma', J)\gamma'$$

La igualdad (*) es por la proposición (10) y la (**) por el lema (12).

Definición 5 Un campo a lo largo de una geodésica que satisface la ecuación anterior se llama campo de Jacobi.

Como veremos mas adelante, todo campo de Jacobi que empiece en cero se puede obtener de manera análoga.

Lema 13

Todo campo de Jacobi $J(t)$ queda determinado por $J(0)$ y $\frac{DJ}{dt}(0)$. Demostración, sean $e_i(t)$ campos ortonormales y paralelos a la geodésica en cuestión. Escribimos $J(t) = \sum_i f_i(t)e_i(t)$ y si definimos $a_{i,j}(t) = \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle$. Entonces:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t)e_i(t)$$

Y la ecuación de Jacobi es equivalente al sistema de ecuaciones

$$f_j''(t) + \sum_i a_{i,j}(t)f_i(t) = 0 \quad (j = 1 \dots n)$$

Y por lo tanto $J(t)$ queda determinado por sus condiciones iniciales.

Afirmamos ahora que $\frac{DJ}{dt}|_{t=0} = w$ Donde $J(t)$ esta construido apartir de la superficie parametrizada considerada anteriormente.

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{dt} (d(\exp_p)_{t_0}(t w)) = \frac{D}{dt} (t d(\exp_p)_{t_0}(w)) \\ &= d(\exp_p)_{t_0}(w) + t \frac{D}{dt} (d(\exp_p)_{t_0}(w)) \end{aligned}$$

valuando en $t = 0$ obtenemos que

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \Big|_{t=0} = d(\exp_p)_0(w) = w$$

Corolario 14

Un campo de Jacobi que se anula en cero, esta dado por

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)} \left(t \left(\frac{DJ}{dt}(0) \right) \right)$$

Definición 6 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica; decimos que $\gamma(t_0)$ ($t_0 \in (0, a)$) es un *punto conjugado* de $\gamma(0)$ a lo largo de γ si existe un campo no idénticamente cero que se anule en $\gamma(0)$ y en $\gamma(t_0)$.

Teorema 15

Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica $t_0 \in (0, 1]$, entonces $\gamma(t_0)$ es un punto conjugado si y sólo si $v_0 = t_0 \gamma'(0)$ es un punto crítico de la exponencial.

Por el corolario 9 $J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)} \left(t \left(\frac{DJ}{dt}(0) \right) \right)$. Si $J(t_0) = 0$ entonces la diferencial se anula en un vector distinto de cero y por lo tanto la exponencial tiene ahí un punto crítico.

Y si w esta en el nucleo de la diferencial en el punto $t_0 \gamma'(0)$ Construimos un campo de Jacobi que se anule en $\gamma(t_0)$.

Como una primera aplicación de los campos de Jacobi probemos el siguiente

Teorema 16

Sea M^n una variedad completa, simplemente conexa con curvatura seccional menor o igual que cero. Entonces M^n es difeomorfa a \mathbb{R}^n . Antes dos Lemas

Lema 17

Sea M^n una variedad completa con curvatura seccional no positiva, entonces $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo local. Por el teorema (15) basta ver que no hay puntos conjugados. Sea γ una geodésica, supongamos que hay un campo de Jacobi con $J(0) = J(t_0) = 0$, veamos que $J \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle J, \frac{DJ}{dt} \right\rangle &= \left\langle J, \frac{D^2 J}{dt^2} \right\rangle + \left\langle \frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle = \langle J, -R(\gamma', J)\gamma' \rangle + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 = \\ &= \frac{-K(J, \gamma')}{|J|^2 |\gamma'|^2 - \langle J, \gamma' \rangle} + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $\langle J, \frac{DJ}{dt} \rangle$ es no decreciente, sin embargo

$$\left\langle J, \frac{DJ}{dt} \right\rangle \Big|_{t=0} = \left\langle J, \frac{DJ}{dt} \right\rangle \Big|_{t=t_0} = 0$$

luego $\langle J, \frac{DJ}{dt} \rangle \equiv 0$. Ahora:

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), J(t) \rangle = 2 \langle J, \frac{DJ}{dt} \rangle = 0$$

Y por lo tanto $|J(t)|$ es una constante y en consecuencia $J(t) \equiv 0$.

Lema 18

Sea M una variedad completa, $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo local que expande en el siguiente sentido; para todo p en M y todo v en $T_p M$ se tiene que $|df_p(v)| \geq |v|$. Entonces f es una proyección cubriente.

Por una propiedad de los espacios de cubrientes basta ver que f levanta arcos. Ver [C1], página 382.

Consideremos una curva $c : [0, 1] \rightarrow N$ y q en M tal que $f(q) = c(0)$, por ser un difeomorfismo local c puede ser levantada a \tilde{c} por lo menos en un intervalo $[0, \varepsilon]$. Por la misma razón el conjunto de puntos en $[0, 1]$ al que puede ser levantada es un conjunto abierto de la forma $[0, t_0)$. Si mostramos que la curva puede ser levantada también en t_0 habremos terminado. Puesto que el conjunto será abierto y cerrado.

Sea t_n una sucesión creciente convergente a t_0 , afirmamos que $\tilde{c}(t_n)$ esta contenido en un compacto en M . Pues de no ocurrir esto tendríamos que:

$$\begin{aligned} l_{0, t_n}(c) &= \int_0^{t_n} \left| \frac{dc}{dt} \right| dt = \int_0^{t_n} |df_{\tilde{c}(t)} \left(\frac{d\tilde{c}}{dt} \right)| dt \geq \int_0^{t_n} \left| \frac{d\tilde{c}}{dt} \right| dt \\ &\geq d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(t_0)) \end{aligned}$$

Y como M es completa $d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(t_0)) \rightarrow \infty$. Por lo tanto la longitud del arco de $c(0)$ a $c(t_n)$ sería arbitrariamente grande lo que no es posible.

En consecuencia existe un punto de acumulación r de $\tilde{c}(t_n)$, escogemos una vecindad de r donde f sea biyectiva. Consideramos un levantamiento de c empezando en r . Esto es posible ya que $f(r) = c(t_0)$. Los levantamientos coinciden por ser f biunívoca. Entonces \tilde{c} se extiende a t_0 .

Demostración del teorema 16

Como M es completa, $exp_p : T_p M \rightarrow M$ esta bien definida y es sobre. Por el lema (17) es un difeomorfismo local. Esto permite introducir una métrica en $T_p M$ de manera que exp_p sea una isometría local. Esta métrica es completa pues las geodésicas pasando por el origen son las mismas rectas, ya que una isometría local manda geodésicas en geodésicas. De lo que se concluye que $Exp_0 : T_0 T_p M \rightarrow T_p M$ esta definida para todo vector. Usando (a) implica (d) del teorema de Hopf-Rinow, obtenemos que la métrica es completa.

Por el lema (18) $exp_p : T_p M \rightarrow M$ resulta ser una aplicación cubriente y como M es simplemente conexo, concluimos que exp_p es un difeomorfismo.

§ 5 Teorema de Cartan

El teorema egregio de Gauss afirma que si dos superficies son isométricas entonces sus curvaturas se corresponden. El teorema de Cartan es el recíproco local de este.

Más precisamente, sean M y \tilde{M} dos variedades de la misma dimensión, p y \tilde{p} en M y \tilde{M} , $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ una isometría lineal, y $f : V \subset M \rightarrow \tilde{M}$ definida como $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$; definida en V una bola normal en suficientemente chica para que \exp_p este definido en $i \circ \exp_p^{-1}(V)$. Para todo q en V existe un única geodésica normalizada γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(t) = q$. Denotamos por P_t el transporte paralelo a lo largo de γ , finalmente sea $\phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \tilde{M}$ definido como $\phi_t = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}$

Teorema 19 (Cartan)

Sean R y \tilde{R} los tensores de curvatura de M y \tilde{M} ; con las notaciones de arriba si para todo q en V y para todos x, y, u, v en $T_q M$ se tiene que $\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle R(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle$, entonces $f : V \rightarrow f(V)$ es una isometría y $df_p = i$

Demostración: Sea q en V y v en $T_q M$, consideramos $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ la geodésica que une a p con q contenida en V . Construimos un campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$ y $J(l) = v$. Definimos $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$.

Afirmamos que $\tilde{J}(t)$ es un campo de Jacobi. Para ver esto construimos $e_i(t)$; $i = 1 \dots n$ ($e_n = \gamma'$) campos ortonormales paralelos a lo largo de γ . Si hacemos $\tilde{e}_i = \phi_t(e_i(t))$ entonces estos son campos paralelos ortonormales a lo largo de $\tilde{\gamma}$. por lo tanto si $J(t) = \sum y_i(t)e_i(t)$ obtenemos que $\tilde{J}(t) = \sum y_i(t)\tilde{e}_i(t)$. J satisface el sistema de ecuaciones

$$y_j'' + \sum_i \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle y_i = 0 \quad j = 1 \dots n$$

Y por la hipótesis sobre la curvatura tenemos que \tilde{J} satisface

$$y_j'' + \sum_i \langle \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j \rangle y_i = 0 \quad j = 1 \dots n$$

Concluimos que $\tilde{J}(t)$ es un campo de Jacobi. Además como el transporte paralelo es una isometría tenemos que $|\tilde{J}(t)| = |J(t)|$

Solo falta mostrar que $df_p(v) = \tilde{J}(l)$. Tenemos que $\frac{DJ(0)}{dt} = i\left(\frac{DJ(0)}{dt}\right)$ pues

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{J}(0)}{dt} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{J}(0) - \tilde{P}_t^{-1}(\tilde{J}(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i(J(0)) - i(P_t^{-1}(J(t)))}{t} \\ &= i\left(\frac{DJ(0)}{dt}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado por el corolario (14) tenemos que

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}\left(t \frac{DJ}{dt}(0)\right)$$

y

$$\tilde{J}(t) = d(\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t \frac{D\tilde{J}}{dt}(0))$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{J}(l) &= d(\exp_{\tilde{p}})_{l\tilde{\gamma}'(0)}(l(\frac{D\tilde{J}}{dt}(0))) \\ &= d(\exp_{\tilde{p}})_{l\tilde{\gamma}'(0)} \circ i \circ (d(\exp_p)_{l\gamma'(0)})^{-1}(J(l)) \\ &= df_q(J(l)) = df_q(v) \end{aligned}$$

Demostremos ahora el siguiente

Teorema 20

Sea M^n un variedad un variedad completa y de curvatura seccional -1. Entonces el recubrimiento universal \tilde{M} de M^n con la métrica de recubrimiento es isométrico a H^n .

\tilde{M} es una variedad simplemente conexa con curvatura seccional -1. Fijemos puntos $p \in H^n$, y $\tilde{p} \in \tilde{M}$, y una isometría $i : T_p H^n \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$; consideremos ahora $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ (\exp_p)^{-1}$. Por el teorema de Hadamard la función esta bien definida y es un difeomorfismo. Por el teorema de Cartan f es una isometría, ya que como por hipótesis, las curvaturas seccionales son iguales, por lo tanto, por la proposición 9, los tensores de curvatura son iguales.

Por el teorema de Hadamard $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es una proyección cubriente si M es de curvatura no positiva. Y si esta es constante igual a menos uno $T_p M$ con la métrica de la cubriente es isométrico a H^n . Tenemos pues $p : H^n \rightarrow M^n$ una proyección cubriente que es localmente una isometría. Consideremos ahora el grupo $G = \{f : H^n \rightarrow H^n \text{ homeomorfismos de recubrimiento}\}$ conviene recordar que tales f son isometrías pues como $p \circ f = p$ podemos, localmente despejar a f como composición de isometrías. Además se tienen las siguientes dos propiedades:

- i) Si $f \in G$ y $f(x) = x$ para algun x entonces f es la identidad.
- ii) Tomamos U_x una vecindad donde p sea un difeomorfismo entonces $f(U_x) \cap U_x = \emptyset$ para toda $f \in G$ distinta de la identidad.

Demostración (i) Supongamos que $f(x) = x$, sea $y \in H^n$ tomamos una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow H^n$ que una a x con y . Definimos $\beta = p \circ \alpha$. El levantamiento de β que empiece en $f(x)$ termina en $f(y)$. Por hipótesis $f(x) = x$ y como el levantamiento de una curva, dado el punto inicial, es único concluimos que $f(y) = y$.

Para demostrar (ii) supongamos que $w \in f(U_x) \cap U_x$ entonces $p(f(w)) = p(w)$ y como p es uno a uno en esta vecindad tenemos que $f(w) = w$ que por (i) implica que f es la identidad.

Es decir G actúa libre (i) y discontinuamente (ii) en H^n . Por lo tanto H^n/G tiene una estructura natural de variedad diferenciable. Donde $\Pi : H^n \rightarrow H^n/G$ es una

aplicación diferenciable. Además es posible introducir una métrica en H^n/G de la siguiente manera.

Sean $q \in H^n/G$ y $v, w \in T_q(H^n/G)$ escogemos $p \in H^n$ tal que $\Pi(p) = q$ definimos

$$\langle v, w \rangle = \langle (d\Pi_p)^{-1}(v), (d\Pi_p)^{-1}(w) \rangle$$

Esta bien definido porque las transformaciones de cubierta son isometrías. (En la próxima sección lo veremos con mas detenimiento.)

Por construcción Π es una isometría local; es una pregunta natural que tienen que ver M^n y H^n/G . Recordemos que G es el grupo de transformaciones de cubierta de $p : H^n \rightarrow M^n$.

Definamos

$$g : M^n \rightarrow H^n/G \quad \text{como } f(q) = \Pi(r)$$

donde $r \in p^{-1}(q)$, la función esta bien definida ya que si $r' \in p^{-1}(q)$ existe f transformación de cubierta tal que $f(r) = r'$, en consecuencia $\Pi(r) = \Pi(r')$. Es facil verificar que es inyectiva y sobre. Además es una isometría local y por ser difeomorfismo es una isometría global. Demostramos entonces el siguiente

Teorema 21

Si M^n es una variedad completa de curvatura constante negativa entonces esta es isométrica a H^n/G donde G es un grupo libre y discontinuo de isometrías de H^n . De hecho G es isomorfo al grupo fundamental de M^n .

Este teorema será fundamental en lo que resta del trabajo. Para finalizar la sección consideremos la siguiente situación. Supongamos que tenemos $p : M \rightarrow N$ una proyección cubriente. Sea G el grupo de transformaciones de la cubierta.

Definición 7 Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es G -invariante si para toda $g \in G$ tenemos que $f(g(x)) = f(x)$.

Proposición 22

Las funciones $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ G -invariantes estan en correspondencia uno a uno con las funciones $f : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ G -invariante definimos $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(q) = F(r)$ donde $p(r) = q$. No depende de la elección de r pues si $p(r') = q$ existe una transformación de cubierta $g : M \rightarrow M$ tal que $g(r) = r'$ en consecuencia $F(r') = F(g(r)) = F(r)$.

Inversamente si $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $F(r) = f(p(r))$ Esta es G -invariante pues para toda $g \in G$ se tiene que $F(g(r)) = f(p(g(r))) = f(p(r)) = F(r)$

Obsérvese que por construcción bajo la correspondencia definida $F \rightarrow f$ tenemos que $F(r) = f(p(r))$.

Definición 8 En el mismo contexto, decimos que una métrica, un campo son G -invariantes si, respectivamente

$$\begin{aligned} \langle V, W \rangle_x &= \langle dg_x V, dg_x W \rangle_{g(x)} \\ V(g(x)) &= dg(V(x)) \end{aligned}$$

Nótese que la G -invarianza es equivalente a que el grupo G sea un grupo de isometrías.

Proposición 23

Las métricas y los campos G -invariantes en M están, respectivamente en correspondencia uno a uno con las métricas y los campos en N .

Misma prueba que antes, sean $\langle \rangle_V$ invariantes en M

Definimos

$$\langle v, w \rangle_q = \langle V, W \rangle$$

$$v(q) = dp_r(V(r))$$

Donde $p(r) = q$ y $dp_r(V) = v$ $dp_r(W) = w$. Están bien definidos por la invarianza. Inversamente dadas una métrica o un campo en N definimos los correspondientes

$$\langle V, W \rangle_r = \langle v, w \rangle_{p(r)}$$

$$V(r) = v(p(r))$$

Notese nuevamente que bajo la correspondencia establecida tenemos

$$\langle dpV, dpW \rangle_{p(r)} = \langle V, W \rangle_r$$

$$v(p(r)) = dp_r(V(r))$$

Y que esta primera condición es la definición de que p sea una isometría local.

CAPITULO 2

ERGODICIDAD

Introducción

En la primera sección de este capítulo definimos los conceptos básicos de análisis que utilizaremos como lo son una σ -álgebra, una medida, e integrales. Después probamos el Teorema de Birkhoff y algunos corolarios importantes. Finalmente introducimos el concepto de ergodicidad, damos luego definiciones alternativas y condiciones para verificar la ergodicidad de un flujo.

§ 1 Definiciones de Análisis

Definición 1 Una σ -álgebra \mathcal{A} sobre un espacio X es una colección de subconjuntos de X que satisface

- i) $X \in \mathcal{A}$.
- ii) Si $E \in \mathcal{A}$ entonces $X - E \in \mathcal{A}$.
- iii) La unión numerable de conjuntos en \mathcal{A} esta en \mathcal{A} .

Definición 2 Una transformación $T : X \rightarrow Y$ con σ -álgebras \mathcal{A}, \mathcal{B} respectivamente, es *medible* si para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

Definición 3 Una *medida* μ sobre una σ -álgebra \mathcal{A} es una función

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Tal que

- i) μ es no negativa
- ii) Si $\{E_n\}$ es una colección numerable y $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$ entonces $\mu(\cup E_n) = \sum_n \mu(E_n)$
- iii) Para evitar trivialidades suponemos que existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \infty$

Una medida μ sobre \mathcal{A} un σ -álgebra de X permite hablar de la integral de una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Descrito brevemente el proceso es el siguiente; suponemos que s es positiva y que el rango de s es un numero finito de puntos, a esta funciones las llamamos simples. En este caso definimos

$$\int_X s d\mu = \sum_{x_i \in I_m(f)} \mu(s^{-1}(x_i))s(x_i)$$

En el caso de una función f no negativa definimos

$$\int_X f d\mu = \sup_{s < f} \int_X s d\mu \quad \text{donde } s \text{ es simple}$$

Y finalmente para una función arbitraria definimos primero

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Y entonces

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

Y lo único que pedimos es que alguna de las dos integrales sea finita.

También es posible definir la integral de una función solo sobre un cierto conjunto medible E ,

$$\int_E f d\mu = \int_X \chi_E f d\mu$$

donde χ_E es la función característica de E .

Definición 4 Al conjunto de funciones tales que

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

lo llamamos $L^1(\mu)$

Definición 5 Al conjunto de funciones tales que

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

lo llamamos $L^p(\mu)$

Si P es una cierta propiedad, por ejemplo $f = g$ diremos que es cierta en casi todo punto (abreviaremos c.t.p.) si el conjunto de puntos donde no se satisface esta contenido en un conjunto de medida cero. Nótese que si $f = g$ en casi todo punto en E tenemos que

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

Ya que

$$\int_E (f - g) d\mu = \int_N (f - g) d\mu = 0$$

Donde $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ y la última igualdad es que por hipótesis $\mu(N) = 0$.

§ 2 Teorema de Birkhoff

Cuando la medida total de un espacio X es uno lo llamaremos espacio de probabilidad. De aquí en adelante y por todo el resto del capítulo supondremos que los espacios son de probabilidad.

Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación medible. Una pregunta fundamental de los sistemas dinámicos en general es : ¿Que pasa con la órbita de un punto $T^n(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$? ¿ La órbita es periódica? ¿ Es densa ? O, ¿ Cual es el w -límite ? Una manera de atacar el problema es tomando una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y considerar los promedios sobre las distintas órbitas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \quad (1)$$

Al variar las f nos podemos dar una idea de que pasa con la órbita de un punto. Por ejemplo con $f = \chi_E$ donde χ_E es la función característica de E un subconjunto medible. El límite (1) si existe, nos mide intuitivamente cuantas veces pasa x por E . El teorema de Birkhoff da condiciones para que el límite (1) exista.

Definición 6.- Una transformación $T : X \rightarrow X$ *preserva la medida* si para todo E en \mathcal{A} se tiene

$$\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$$

Teorema 1 (Birkhoff) [C3]

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad, $T : X \rightarrow X$ una transformación que preserva la medida, y f en $L^1(\mu)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \quad \text{existe en c.t.p.}$$

Para probar el teorema, necesitaremos el siguiente lema conocido como el teorema ergódico maximal

Lema 2

Sea f en $L^1(\mu)$ si definimos

$$A(f) = \left\{ x : \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n f(T^j(x)) > 0 \right\}$$

entonces

$$\int_{A(f)} f d\mu \geq 0$$

Demostración (Lema)

$$\text{Sea } S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) ; S_0(x) = 0$$

$$\text{Y } \phi_n(x) = \max \{S_0(x) \dots S_n(x)\}$$

$$\phi_n^*(x) = \max \{S_1(x) \dots S_n(x)\}$$

Tenemos

$$S_k(T(x)) = S_{k+1}(x) - f(x) \quad (2)$$

Tomando máximos $0 \leq k \leq n-1$ obtenemos en el lado izquierdo

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq n} S_k(T(x)) &= \max \{0, f(T(x)), \dots, \sum_{j=0}^n f(T^j(x))\} \\ &= \max \{f(x), f(x) + f(T(x)), \dots, \sum_{j=1}^n f(T^j(x))\} - f(x) \\ &= \phi_{n+1}^*(x) - f(x) \end{aligned}$$

Y en el lado derecho

$$\begin{aligned} S_{k+1}(x) - f(x) &= \max_{0 \leq k \leq n} \{f(x), \dots, \sum_{j=1}^{n+1} f(T^j(x))\} - f(x) \\ &= \max \{0, \dots, \sum_{j=1}^{n+1} f(T^j(x))\} \\ &= \phi_n(T(x)) \end{aligned}$$

Deducimos

$$\phi_{n+1}^*(x) - f(x) = \phi_n(T(x)) \quad (4)$$

Tenemos

$$f(x) = \phi_{n+1}^*(x) - \phi_n(T(x)) \geq \phi_n^*(x) - \phi_n(T(x)) \quad (5)$$

Sea $A_n = \{x \in X : \phi_n(x) > 0\}$ entonces $A(f) = \bigcup_n A_n$ por lo cual para demostrar el lema basta ver que para toda n :

$$\int_{A_n} f d\mu \geq 0$$

Tenemos por (5) que :

$$\int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \phi_n^*(x) d\mu - \int_{A_n} \phi_n(T(x)) d\mu \quad (6)$$

Ahora bien si $x \in A_n$ tenemos, $\phi_n^*(x) = \phi_n(x)$ y si $x \notin A_n$ tenemos que $\phi_n(x) = 0$, con lo cual

$$\int_{A_n} \phi_n^* d\mu = \int_X \phi_n(x) d\mu$$

Y por ser ϕ_n no negativa

$$\int_{A_n} \phi_n(T(x)) d\mu \leq \int_X \phi_n(T(x)) d\mu$$

Por lo tanto

$$\int_{A_n} f d\mu \geq \int_X \phi_n(x) d\mu - \int_X \phi_n(T(x)) d\mu$$

Pero como T preserva la medida tenemos que

$$\int_X \phi_n d\mu = \int_X \phi_n \circ T d\mu.$$

Prueba del Teorema 1

Sea $E(a, b) = \{x : \liminf \frac{1}{n} S_n(x) < a, \limsup \frac{1}{n} S_n(x) > b\}$ definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - b & \text{Si } x \in E(a, b) \\ 0 & \text{Si } x \notin E(a, b) \end{cases}$$

Afirmamos que $A(g) = E(a, b)$, siendo $A(g)$ el conjunto construido en el lema para g .

Para ver esto:

$$\begin{aligned} A(g) &= \{x : \sup S_n(x, g) > 0\} \\ &= \{x : \sup \frac{1}{n} S_n(x, g) > 0\} \\ &= \{x : \sup \frac{1}{n} S_n(x, f) > b\} \end{aligned}$$

Y como $\limsup \leq \sup$ obtenemos que $E(a, b) \subset A(g)$. Para ver la otra contención mostremos que $x \notin E(a, b)$ implica que $T^j(x) \notin E(a, b)$.

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{j+k}(x)) = \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^{j+k}(x)) + \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{j-1} f(T^i(x))$$

$$\limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n+j-1} f(T^k(x)) = \lim \frac{n}{n+j} \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n+j-1} f(T^k(x))$$

$$= \limsup \frac{1}{n+j} \sum_{j=0}^{n+j-1} f(T_k(x)).$$

Obtenemos $\limsup \frac{1}{n} S_n(T^j(x)) = \limsup \frac{1}{n} S_n(x)$ y análogamente

$$\liminf \frac{1}{n} S_n(T^j(x)) = \liminf \frac{1}{n} S_n(x)$$

Esto muestra que si $x \notin E$ entonces $S_n(x, g) = 0$ y por lo tanto $\sup S_n(x, g) = 0$ y de aquí que $x \notin A(g)$. Por lo cual obtenemos $E(a, b) = A(g)$.

Observación 1 Nótese que de existir el límite (1) probamos que este es el mismo sobre puntos de la misma órbita.

Por el lema 2 tenemos

$$\int_{A(g)} g d\mu \geq 0$$

O sea

$$\int_{E(a,b)} (f - b) d\mu \geq 0 \quad \int_{E(a,b)} f d\mu \geq b\mu(E(a, b)) \quad (7)$$

Si ahora consideramos la función

$$h(x) = \begin{cases} a - f(x) & \text{si } x \in E(a, b) \\ 0 & \text{Si } x \notin E(a, b) \end{cases}$$

obtenemos nuevamente que $A(h) = (a, b)$ y aplicando de nuevo el lema concluimos que

$$\int_{E(a,b)} (a - f) d\mu \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_{E(a,b)} f d\mu \leq a\mu(E(a, b)) \quad (8)$$

Las desigualdades (7) y (8) implican que la medida de $E(a, b)$ es cero dejando correr a, b en los racionales obtenemos el teorema.

Corolario 3

Si f esta en $L^p(\mu)$, entonces $\tilde{f}^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ pertenece a $L^p(\mu)$ y satisface

i) $\int_X \tilde{f}^+ d\mu = \int_X f d\mu$

ii) $\tilde{f}^+(T(x)) = \tilde{f}^+(x)$

Demostración

Tenemos que

$$|\tilde{f}^+(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j(x))|$$

$$|\tilde{f}^+(x)|^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j(x))| \right)^p$$

Entonces para ver que \tilde{f}^+ esta en $L^p(\mu)$, como $|\tilde{f}^+(x)|^p$ es positiva basta ver que este último límite define una función integrable. Por el lema de Fatou tenemos:

$$\begin{aligned} \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j(x))| \right)^p d\mu &\leq \liminf \int_X \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j(x))| \right)^p d\mu \\ &= \liminf \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(T^j(x))| \right\|_p^p \leq \liminf \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \right\|_p^p \\ &=^* \liminf \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|f\|_p \right)^p = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

La igualdad * es porque T preserva la medida. Con lo cual obtenemos:

$$\|\tilde{f}^+\|_p \leq \|f\|_p \tag{9}$$

Para probar (i) del corolario 3 consideramos el conjunto. $C(a, b) = \{x \in X : a < \tilde{f}^+(x) < b\}$ Definimos nuevamente

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - b & \text{Si } x \in C(a, b) \\ 0 & \text{Si } x \notin C(a, b) \end{cases}$$

Volvemos a tener que $A(g) = C(a, b)$ con lo cual aplicando el lema 2 como en el teorema 1 obtenemos

$$\int_{C(a,b)} f d\mu \leq b\mu(C(a, b))$$

De la misma manera concluimos que

$$a\mu(C(a, b)) \leq \int_{C(a, b)} f d\mu$$

Por lo tanto

$$a\mu(C(a, b)) \leq \int_{C(a, b)} f d\mu \leq b\mu(C(a, b))$$

además por definición

$$a\mu(C(a, b)) \leq \int_{C(a, b)} \bar{f}^+ d\mu \leq b\mu(C(a, b))$$

concluimos:

$$\left| \int_{C(a, b)} \bar{f}^+ d\mu - \int_{C(a, b)} f d\mu \right| \leq (b - a)\mu(C(a, b))$$

Si fijamos un número natural q y consideramos a y b de la forma $\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q}$ con p entero obtenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_X \bar{f}^+ d\mu - \int_X f d\mu \right| &\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left| \int_{C(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q})} \bar{f}^+ d\mu - \int_{C(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q})} f d\mu \right| \\ &\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^q} \mu(C(\frac{p}{2^q}, \frac{p+1}{2^q})) = \frac{1}{2^q} \end{aligned}$$

Debido a que la medida de X es uno. Haciendo tender q a infinito se sigue que

$$\int_X \bar{f}^+ d\mu = \int_X f d\mu$$

La demostración de la segunda afirmación, esta ya hecha en la prueba del teorema cuando probamos que si x no estaba en $E(a, b)$ implicaba que sus iteradas tampoco estaban, probamos de hecho que los promedios coincidían (Observación 1).

Lo que nos interesará posteriormente sera estudiar la órbita de un punto pero no a través de una función sino a lo largo de un flujo φ^t . El promedio de una función f en $L^1(\mu)$ sobre la órbita de un punto será:

$$\bar{f}^+(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t(x)) dt$$

Definición 7.-Un flujo φ en X *preserva la medida* si φ^t preserva la medida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4 (Birkhoff para flujos)

Sea (X, \mathfrak{A}, μ) un espacio de probabilidad, φ un flujo que preserva la medida. Entonces para toda f en $L^1(\mu)$ el siguiente límite existe en casi todo punto.

$$\bar{f}^+(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t(x)) dt$$

Demostración

Definamos la siguiente función:

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^1 f(\varphi^t(x)) dt$$

Afirmamos que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\varphi^j(x)) = \frac{1}{n} \int_0^n f(\varphi^t(x)) dt$$

Ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\varphi^j(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f(\varphi^t(\varphi^j(x))) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} f(\varphi^{t+j}(x)) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n f(\varphi^t(x)) dt \end{aligned}$$

De esta manera

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t(x)) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\varphi^j(x))$$

Lo que queda por hacer es demostrar que F esta en $L^1(\mu)$, y luego aplicar el teorema de Birkhoff para el caso que ya probamos. Para demostrar esto utilizaremos el Teorema de Fubini.

Teorema 5 (Fubini)

Si (X, \mathfrak{A}, μ) y $(Y, \mathfrak{B}, \lambda)$ son espacios σ -finitos (unión numerable de conjuntos de medida finita) y g es una función $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ medible.

Y si definimos

$$\phi(x) = \int_Y g_x d\lambda \quad , \quad \psi(y) = \int_X g_y d\mu$$

Donde $g_x : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g_x(y) = g(x, y)$ y $g_y : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g_y(x) = g(x, y)$. Entonces ϕ es \mathfrak{A} -medible, ψ es \mathfrak{B} -medible y

$$\int_X \phi(x) d\mu = \int_{X \times Y} g(x, y) d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi(y) d\lambda$$

La demostración de este teorema escapa a nuestros propósitos. Una prueba puede ser encontrada en [R1]. En nuestro caso $(Y, \mathfrak{B}, \lambda)$ será el intervalo $[0, 1]$ con los boreleanos (la σ -álgebra generada por lo abiertos) y la medida de Lebesgue.

Definimos $h : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x, t) = f(\varphi^t(x))$. Supondremos que f es no negativa y en consecuencia h es no negativa para aplicar el teorema; posteriormente nos ocuparemos del caso general, h es $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ medible pues φ es continua y f es medible. Siguiendo el teorema obtenemos:

$$F(x) = \int_0^1 f(\varphi^t(x)) dt = \int_0^1 h_x(t) dt$$

$$\psi(t) = \int_X f \circ \varphi^t(x) d\mu$$

Son medibles y

$$\int_X F(x) d\mu = \int_0^1 \psi(t) dt$$

ahora

$$\psi(t) = \int_X f \circ \varphi^t(x) d\mu = \int_X f d\mu = r < \infty$$

Donde la segunda igualdad es porque φ^t preserva la medida. Con lo cual obtenemos

$$\int_X F(x) d\mu = \int_0^1 r dt = r \tag{10}$$

Lo que implica que f esta en $L^1(\mu)$. Para ver el caso general dividimos a nuevamente f en su parte positiva y en su parte negativa.

De esta manera $f = f_+ - f_-$ y

$$F(x) = \int_0^1 f \varphi^t(x) dt = \int_0^1 f_+ \varphi^t(x) dt - \int_0^1 f_- \varphi^t(x) dt$$

Si definimos $F_1 = \int_0^1 f_+ \varphi^t(x) dt$ y $F_2 = \int_0^1 f_- \varphi^t(x) dt$ obtenemos que F_1 y F_2 están en $L^1(\mu)$ y en consecuencia F tiene integral finita, con lo cual terminamos la demostración del teorema 4.

Corolario 6

Si f está en $L^p(\mu)$ entonces $\tilde{f}^+(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t(x)) dt$ está en $L^p(\mu)$ y

$$i) \int_X \tilde{f}^+ d\mu = \int_X f d\mu$$

$$ii) \tilde{f}^+(\varphi^t(x)) = \tilde{f}^+(x).$$

Para probar la primera afirmación notese que de la fórmula (9) si f está en $L^p(\mu)$ entonces F está en $L^p(\mu)$ y que

$$\tilde{f}^+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} F(\varphi^j(x)) \quad (11)$$

y luego aplíquese el corolario (3). Para probar (i) tenemos nuevamente por la fórmula (11) y por (i) del corolario 3 que

$$\int_X \tilde{f}^+ d\mu = \int_X \tilde{F}^+ d\mu = \int_X F d\mu$$

Ahora recuerdese que por la ecuación (10) $\int_X F d\mu = r = \int_X f d\mu$. Finalmente (ii) se prueba igual que antes.

Demostremos ahora el siguiente:

Teorema 7

El promedio orbital del flujo es el mismo hacia adelante que hacia atrás, es decir, para toda f en $L^1(\mu)$ se tiene que $\tilde{f}^+(x) = \tilde{f}^-(x)$ en casi todo punto. Donde $\tilde{f}^- = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^{-t}(x)) dt$

Basta tomar funciones positivas pues descomponiendo como antes en su parte positiva y en su parte negativa obtenemos que $\tilde{f}^+ = \tilde{f}_+^+ - \tilde{f}_-^+$ y $\tilde{f}^- = \tilde{f}_+^- - \tilde{f}_-^-$; entonces si tuvieramos $\tilde{f}_+^+ = \tilde{f}_+^-$ y $\tilde{f}_-^+ = \tilde{f}_-^-$ concluimos que $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-$.

Para demostrar el teorema necesitaremos los siguientes

Lema 8

Si f está en $L^1(\mu)$ y $f \geq 0$ hay una sucesión f_m en $L^2(\mu)$ que tiende a f en norma uno y que f_m es menor o igual que f .

Teorema 9

El espacio vectorial $L^2(\mu)$ con el producto interior $\langle f, g \rangle = \left(\int_X |fg| d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$ es un espacio de Hilbert. Es decir es un espacio vectorial con producto interior, completo con la norma inducida por este.

Teorema 10

Si H es un espacio de Hilbert, M un subespacio cerrado de H entonces H se descompone como suma directa de M y el ortogonal a M (M^\perp)

La demostración del lema la dejaremos para después. Las demostraciones de los teoremas 9 y 10 pueden ser encontradas en [R1].

Continuando con la demostración del teorema 7, tomamos una sucesión f_m de las características del lema 8, tenemos que

$$\begin{aligned} |f - f_m|^{\sim+}(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f - f_m|(\varphi^t(x)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t(x)) dt - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_m(\varphi^t(x)) dt \\ \tilde{f}^+(x) - \tilde{f}_m^+(x) &= |\tilde{f}^+ - \tilde{f}_m^+|(x) \end{aligned}$$

Por (i) del corolario (6) tenemos

$$\int_X |f - f_m| d\mu = \int_X |f - f_m|^{\sim+} = \int_X |\tilde{f}^+ - \tilde{f}_m^+| d\mu$$

Entonces la convergencia de f_m a f en $L^1(\mu)$ implica la convergencia de \tilde{f}_m^+ a \tilde{f}^+ en $L^1(\mu)$, análogamente la primera condición implica la convergencia de \tilde{f}_m^- a \tilde{f}^- en $L^1(\mu)$. De esta manera basta demostrar el teorema cuando f esta en $L^2(\mu)$ ya que

$$\begin{aligned} \int |\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-| &= \int_X |\tilde{f}^+ - \tilde{f}_m^+ + \tilde{f}_m^- - \tilde{f}^- + \tilde{f}_m^+ - \tilde{f}_m^-| d\mu \\ &\leq \int_X |\tilde{f}^+ - \tilde{f}_m^+| d\mu + \int_X |\tilde{f}_m^- - \tilde{f}^-| d\mu + \int_X |\tilde{f}_m^+ - \tilde{f}_m^-| d\mu \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + 0 \text{ si } m \text{ es suficientemente grande} \end{aligned}$$

Y de aquí que $\|\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-\|_1 = 0$ lo que implica que $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-$ en casi todo punto. Para demostrar el teorema en $L^2(\mu)$ consideramos el subespacio $F = \{g : g \in L^2(\mu), \text{ y } g(\varphi^s(x)) = g(x) \text{ c.t.p. para toda } s\}$. F es cerrado, pues si consideramos una sucesión g_n en F tal que $\lim \|g_n - g\|_2 = 0$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \|g\varphi^s - g\|_2 &= \left(\int_X |g\varphi^s(x) - g(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_X |g\varphi^s(x) - g_n\varphi^s(x) + g_n(x) - g(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_X |g\varphi^s(x) - g_n\varphi^s(x)| + |g_n(x) - g(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$(*) \leq \left(\int_X |g\varphi^n(x) - g_n\varphi^n(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X |g_n(x) - g(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(**) = \left(\int_X |g(x) - g_n(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_X |g(x) - g_n(x)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n \text{ es suficientemente grande}$$

La desigualdad (*) es por la desigualdad de Minkowski, y la igualdad (**) es porque φ^n preserva la medida. Concluimos que $\|g\varphi^n - g_n\varphi^n\|_2 = 0$ y por lo tanto que $g\varphi^n(x) = g_n(x)$ en casi todo punto. Con esto probamos que g esta en F y en consecuencia F es cerrado.

Ahora utilizando los teoremas 9 y 10 consideramos $\Pi : L^2(\mu) \rightarrow F$ la proyección ortogonal. Mostremos que $\Pi(f) = \tilde{f}^+$, $f = (f - \tilde{f}^+) + \tilde{f}^+$ por (ii) del corolario (6) \tilde{f}^+ esta en F tenemos que mostrar que $f - \tilde{f}^+$ esta en F^\perp . Consideremos g en F entonces:

$$\int_X (f - \tilde{f}^+)g d\mu = \int_X fg d\mu - \int_X \tilde{f}^+g d\mu \\ = \int_X \tilde{f}^+\tilde{g}^+ d\mu - \int_X \tilde{f}^+g d\mu \\ = \int_X \tilde{f}^+g d\mu - \int_X \tilde{f}^+g d\mu = 0$$

Análogamente se prueba que $\tilde{f}^+ = \Pi(f) = \tilde{f}^-$, con lo cual concluimos que $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-$ en casi todo punto.

Demostración del lema (8)

Sea $a_n = f^{-1}(n, n+1)$ y $A_n = f^{-1}(0, n)$ definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_n \\ 0 & \text{si } x \in A_n^c \end{cases}$$

Entonces f_n esta en $L^\infty(\mu)$ y en consecuencia en $L^2(\mu)$ además $f_n(x) \leq f(x)$ Demostremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_X |f_n - f|_1 d\mu = \int_{A_n^c} f d\mu$$

Pero tenemos que $\int_X f d\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{a_n} f d\mu < \infty$ lo que implica que dado $\epsilon > 0$ existe

n tal que $\sum_{j=n}^{\infty} \int_{a_n} f d\mu < \epsilon$ y como $\sum_{j=n}^{\infty} \int_{a_n} f d\mu = \int_{A_n^c} f d\mu$ obtenemos el resultado.

§ 2 Ergodicidad

Seguimos trabajando con espacios de probabilidad, si φ^t es un flujo con $t \in \mathbb{R}$ decimos que un conjunto E es φ -invariante si $\varphi^t(E) = E$ para todo t en \mathbb{R} . Análogamente decimos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es φ -invariante si $f(\varphi^t(x)) = f(x)$ para todo t en \mathbb{R} .

Definición 8 Un flujo φ es *ergódico* si todo conjunto invariante tiene medida cero o total.

Teorema 11

Sea (X, \mathfrak{A}, μ) un espacio de probabilidad φ un flujo que preserve la medida entonces las siguientes propiedades son equivalentes :

- (i) φ es ergódica
- (ii) Si f esta en $L^1(\mu)$ y es φ -invariante entonces es constante en casi todo punto
- (iii) Si f esta en $L^p(\mu)$ y es φ -invariante entonces es constante en casi todo punto
- (iv) Para todo A y B en \mathfrak{A} vale que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \mu(\varphi^{-t}(A) \cap B) dt = \mu(A)\mu(B)$$

- (v) Para toda f en $L^1(\mu)$ se tiene que :

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu \quad \text{c.t.p.}$$

Probaremos

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1, \quad \text{y} \quad 2 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$$

$1 \Rightarrow 2$ Sea f en $L^1(\mu)$ φ -invariante. Definimos $A_c = \{x : f(x) \leq c\}$ Por la invarianza de f concluimos que el conjunto A_c es invariante para toda c . Por ser φ un flujo ergódico tenemos que la medida de A_c es cero o uno. Si $c < C$ tenemos que $A_c \subseteq A_C$ con lo cual $\mu(A_c) \leq \mu(A_C)$ Sea :

$$K = \sup\{c : \mu(A_c) = 0\} = \inf\{c : \mu(A_c) = 1\}$$

Mostremos que $f = K$ en casi todo punto. Consideremos a_n y b_n sucesiones monótonas creciente y decreciente respectivamente que tiendan a K . Ahora

$$\mu(\{x : f(x) < K\}) = \mu(\cup A_{a_n}) \leq \sum_n \mu(A_{a_n}) = 0$$

$$\mu(\{x : f(x) > K\}) = \mu(\cup (X - A_{b_n})) \leq \sum_n \mu(X - A_{b_n}) = 0$$

Con lo cual tenemos $\mu(\{x : f(x) \neq K\}) = 0$

2 \Rightarrow 3 Recordemos que $L^p(\mu)$ esta contenido en $L^1(\mu)$ por ser la medida finita y por lo tanto si f esta en $L^p(\mu)$ y es φ invariante estara en $L^1(\mu)$ y por (2) es constante en casi todo punto.

3 \Rightarrow 1 Si A es φ -invariante concluimos que su función característica es φ -invariante. Esta es ademas acotada y por lo tanto esta en $L^p(\mu)$ para toda p . Entonces $\chi_A = a$ en casi todo punto donde a es igual a cero a uno. Por lo tanto

$$\mu(A) = \int_X \chi_A d\mu = a$$

Lo que implica que $\mu(A)$ es cero o uno.

2 \Rightarrow 5 Por el corolario (6) tenemos que \tilde{f}^+ esta en $L^1(\mu)$ y que es φ invariante. \tilde{f} es constante en casi todo punto. Además por (i) del mismo corolario y porque la medida total es uno tenemos que:

$$\int f d\mu = \int \tilde{f} = \tilde{f}(x) \quad \text{c.t.p.}$$

5 \Rightarrow 4 Tenemos que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A \varphi^t(x) dt = \tilde{\chi}_A = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \mu(A) \int_X \chi_B d\mu = \int_X \mu(A)\chi_B d\mu \\ &= \int_X \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\chi_A \varphi^t(x) dt) \right) \chi_B d\mu \\ (1) \quad &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_X \left(\int_0^T (\chi_A(\varphi^t(x)) dt) \right) \chi_B d\mu \\ (2) \quad &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_X \chi_A(\varphi^t(x)) \chi_B d\mu \right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^T \left(\int_X \chi_{\varphi^{-t}(A)} \chi_B d\mu \right) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^T \mu(\varphi^{-t}(A) \cap B) dt \end{aligned}$$

La igualdad (1) es por el teorema de la convergencia dominada ya que $\frac{1}{T} \int_0^T (\chi_A \varphi^t(x) dt) \chi_B \leq 1$ y 1 esta en $L^1(\mu)$ pues la medida de X es finita. La igualdad (2) es por el teorema de Fubini con la función $h: [0, T] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(t, x) = \chi_B \chi_A(\varphi^t(x))$.

Finalmente 4 \Rightarrow 1 Si A es φ invariante tomamos A y A^c entonces

$$\mu(A)\mu(A^c) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu(\varphi^{-t}(A) \cap A^c) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu(A \cap A^c) dt = 0$$

Concluimos que $\mu(A)\mu(A^c) = 0$ lo que implica que $\mu(A)$ es cero o uno.

Cuando tenemos una transformación medible T que preserva la medida, y fijamos un conjunto A medible podemos definir :

$$\tau(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{j : 0 \leq j \leq n : T^j(x) \in A\}}{n}$$

El límite a la derecha nos mide intuitivamente cuantas veces pasa la órbita de x por el conjunto A . Tenemos que $\tau(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \bar{\chi}_A$. Motivados por esto definimos, ahora para flujos el tiempo de estadía media como:

$$\tau(x, A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_A \varphi^t(x) dt = \bar{\chi}_A$$

Proposición 12

Sea φ un flujo este es ergódico si y solo si para todo A medible se tiene que $\tau(x, A) = \mu(A)$ para casi todo punto.

Una manera de reformular el teorema es "Hay que verificar la propiedad (5) sólo en las funciones que son funciones características de algún conjunto medible para concluir la ergodicidad del flujo."

Demostración

Supongamos que φ es ergódico entonces en casi todo punto, tenemos:

$$\tau(x, A) = \bar{\chi}_A = \int_X \bar{\chi}_A d\mu = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A)$$

Inversamente sea A un conjunto φ invariante supongamos que es de medida positiva, mostremos que es de medida total. Por ser A invariante obtenemos que $\tau(x, A) = 1$ para todo x en A . Por hipótesis sabemos que $\tau(x, A) = \mu(A)$ en casi todo punto pero por lo anterior $\tau(x, A)$ es igual a uno en casi todo punto y por lo tanto la $\mu(A)$ es igual a uno.

Los teoremas 11 y 12 tienen sus análogos para transformaciones en lugar de flujos. Las demostraciones son esencialmente las mismas, estas pueden ser encontradas en [M1]. De hecho las pruebas aquí presentadas son adaptaciones de estas.

El siguiente teorema muestra lo complicado y enmarañado que llega a ser un sistema ergódico.

Teorema 13

Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de probabilidad, φ un flujo que preserva la medida y ergódico. Supongamos además que X es un espacio métrico separable y que la medida de los abiertos no vacíos es positiva. Entonces casi todas las órbitas son densas.

Demostración

Sea p_m un conjunto denso en X definimos los conjuntos $V_n(p_m) = \{x : d(x, p_m) < \frac{1}{n}\}$ y $A(p_m, n) = \{x : \varphi^t(x) \notin V_n(p_m) \text{ para toda } t\}$ Veamos que $\mu(A(p_m, n)) = 0$ Por la proposición (11) sabemos que

$$\tau(x, V_n(p_m)) = \mu(V_n(p_m)) > 0 \text{ c.t.p.}$$

En particular para casi todo punto existe t tal que $\varphi^t(x) \in V_n(p_m)$ pues en caso contrario

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_{V_n(p_m)} \varphi^t(x) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 0 dt = 0$$

De esta manera definimos $A = \bigcup A(p_m, n)$ la unión sobre todas las n y m , luego $\mu(A) \leq \sum_{p_m, n} \mu(A(p_m, n)) = 0$

Finalmente probemos que las órbitas de los puntos en $X - A$ son densas. Sea x en $X - A$, y en X y V una vecindad de y . Entonces existen p_m y n tales que $V_n(p_m) \subset V$ y como $x \in X - A$ existe t tal que $\varphi^t(x) \in V_n(p_m) \subset V$.

Para terminar con este capítulo demostraremos un teorema que necesitaremos en el próximo.

Proposición 14

Si existe un conjunto F denso en $L^1(\mu)$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \int_X f d\mu \quad \text{c.t.p.}$$

para todo f en F , entonces φ es ergódico.

Para probar la proposición necesitaremos el siguiente lema que demostraremos posteriormente.

Lema 15

Si denotamos por $f_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^n f \varphi^t(x) dt$ entonces f_n converge a \tilde{f} en norma uno.

Prueba (Proposición) Definimos f_n como en el Lema 15, por este tenemos que:

$$\|\tilde{f} - \int_X f d\mu\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \int f d\mu\|_1$$

Por el teorema (11) ((5) implica (1)) nos basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \int f d\mu\|_1 = 0$$

Sea g en F tal que $\|f - g\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$ definimos g_n como en el Lema 15 tenemos que g_n tiende a \tilde{g} y por hipótesis

$$\|\tilde{g} - \int_X g d\mu\|_1 = 0$$

Escogemos N_0 tal que $n > N_0$ implique

$$\|g_n - \int_X g d\mu\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f_n - \int_X f d\mu\|_1 &\leq \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - \int_X g d\mu\|_1 + \left| \int_X g d\mu - \int_X f d\mu \right| \\ \|f_n - g_n\|_1 &= \int_X \left| \frac{1}{n} \int_0^n f \varphi^t(x) dt - \frac{1}{n} \int_0^n g \varphi^t(x) dt \right| d\mu \\ &\leq \frac{1}{n} \int_X \left(\int_0^n |(f-g) \varphi^t(x)| dt \right) d\mu \\ (1) &= \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_X |(f-g) \varphi^t(x)| d\mu \right) dt \\ (2) &= \frac{1}{n} \int_0^n \left(\int_X |(f-g)(x)| d\mu \right) dt \\ &= \|f-g\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

(1) Es por el teorema de Fubini, (2) es porque φ^t preserva la medida, ahora

$$\left| \int_X g d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |g-f| = \|g-f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Y si $n > N_0$ obtenemos que :

$$\|f_n - \int_X f d\mu\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Prueba del lema 15

Consideremos primero el caso en que f esta en $L^\infty(\mu)$, tenemos por el teorema de Birkhoff que la secuencia $|\tilde{f} - f_n|$ converge a cero en casi todo punto. Y que:

$$|\tilde{f}(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n |f \varphi^t(x)| dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

Por lo tanto $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ y

$$|\tilde{f} - f_n| \leq \|\tilde{f}\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|\tilde{f}\|_\infty$$

En consecuencia la sucesión $|\tilde{f} - f_n|$ esta acotada por una constante y aplicando el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f} - f_n\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\tilde{f} - f_n| d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{f} - f_n| d\mu = 0$$

En el caso general tomamos h en $L^\infty(\mu)$ tal que $\|f-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Tal h existe por el Lema 7, no por el enunciado sino por la prueba. Escogemos N tal que:

$$\|\tilde{h} - h_n\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Si n es mayor que N , entonces

$$\|\tilde{f} - f_n\|_1 \leq \|\tilde{f} - \tilde{h}\|_1 + \|\tilde{f} - h_n\|_1 + \|h_n - f_n\|_1$$

Por los mismos argumentos que en el teorema anterior obtenemos que

$$\|f_n - h_n\|_1 \leq \|f - h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Recordamos que por la fórmula (9) del corolario 3 que $\|\tilde{f}\|_1 \leq \|f\|_1$ y como $\tilde{f} - \tilde{h} = (f - h)^+$ tenemos

$$\|\tilde{f} - \tilde{h}\|_1 \leq \|f - h\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Y si n es mayor que N_0 obtenemos que:

$$\|\tilde{f} - f_n\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Concluimos que f_n tiende a \tilde{f} en $L^1(\mu)$.

CAPITULO 3

FLUJOS GEODESICOS EN SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE MENOS UNO

Introducción

Este capítulo consiste en una serie de proposiciones para finalmente probar el Teorema de Hedlund - Hopf (Teorema 12) que afirma: El flujo geodésico en una superficie compacta de curvatura menos uno es ergódico. Un bosquejo de la demostración puede ser una buena introducción para este capítulo.

-Sea M una superficie compacta de curvatura menos uno.

-El Teorema 21 del capítulo 1 nos permite ver a M como un cociente de H^2 por un subgrupo de isometrías. Esta proyección permite definir una proyección de $T_1H^2 \rightarrow T_1M$

-Definimos una medida "natural" invariante en T_1M .

-Para verificar la ergodicidad del flujo geodésico usaremos el Teorema 11 y la proposición 14 del capítulo 2; Es decir probaremos que para toda función continua $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R}$ el promedio hacia adelante (\bar{f}^+) es constante en casi todo punto.

-Construimos dos flujos mas (el horocíclico expansor φ_t^+ , y el expansor φ_t^-), cuyos campos, junto con el geodésico forman una base de $T_xT_1H^2$ para todo x en T_1M . Como los campos son invariantes podemos definir los correspondientes campos en T_1M .

-Probamos que si Y esta en la órbita de X bajo φ^c (φ^e) en T_1H^2 entonces la distancia entre $G_t(X)$ y $G_t(Y)$ decrece exponencialmente cuando t es positivo (negativo).

-Como consecuencia de esto obtenemos que los promedios de funciones $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R}$ hacia adelante (hacia atras) de dos puntos en la órbita del horociclo contactor (expansor) son iguales.

-Por el Teorema 7 del capítulo dos $\bar{f}^+(x) = \bar{f}^-(x)$ en casi todo punto. Además puntos en la misma órbita del flujo geodésico tienen promedios iguales tanto hacia adelante como hacia atras. La idea ahora, es adaptar el problema, gracias a que los campos son linealmente independientes a la siguiente situación en \mathbb{R}^3 . Supongamos que en \mathbb{R}^3 tenemos dos funciones reales g_1, g_2 (\bar{f}^+, \bar{f}^-) tales que $g_1 = g_2$ y

i) g_1 es constante en las rectas paralelas al eje X (\bar{f}^+ es constante en la órbita del flujo contractor)

ii) g_2 es constante en las rectas paralelas al eje Y (\bar{f}^- es constante en la órbita del flujo expansor)

iii) g_1, g_2 son constantes en las rectas paralelas al eje Z (\bar{f}^-, \bar{f}^+ son constantes en

la órbita del flujo geodésico)

Concluimos que $g_1(\tilde{f}^+)$ es constante pues si $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en \mathbb{R}^3 tenemos

$$g_1(x_1, y_1, z_1) \stackrel{(1)}{=} g_1(x_2, y_1, z_1) \stackrel{(2)}{=} g_1(x_2, y_1, z_2) \stackrel{(3)}{=} g_2(x_2, y_1, z_2) \stackrel{(4)}{=} g_2(x_2, y_2, z_2) \stackrel{(5)}{=} g_2(x_2, y_2, z_2)$$

(1) es por (i)

(2) es por (iii)

(3),(5) pues $g_1 = g_2$

(4) es por (ii)

Usando esta idea probamos que \tilde{f}^+ restringido a un abierto es constante en casi todo punto.

Finalmente por la conexidad y la compacidad de T_1M lo anterior implica que es \tilde{f}^+ es constante en casi todo punto.

§ 1 Medida en el Haz Tangente

Primero definimos un producto interior en el haz tangente. Sea $(p, v) \in TM$ tomamos V, W en $T_{(p,v)}TM$. Escogemos curvas $\alpha(t) = (p(t), v(t)), \beta(t) = (q(t), w(t))$ adaptadas a V y a W respectivamente; Es decir $(p(0), v(0)) = (q(0), w(0)) = (p, v)$ y $V = (p'(0), v'(0))$ y $W = (q'(0), w'(0))$. Definimos el producto interior en TM por

$$\langle V, W \rangle_{p,v} = \langle d\Pi(V), d\Pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{dt}(0) \right\rangle_p$$

Donde $\Pi : TM \rightarrow M$ es la proyección; Y $\frac{Dv}{dt}, \frac{Dw}{dt}$ son las derivadas covariantes de los campos $v(t), w(t)$ a lo largo de las curvas $p(t), q(t)$. El producto esta bien definido ya que la derivada covariante esta dada por la fórmula

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k v_j \frac{dp_i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Es decir $\frac{Dv}{dt}(0)$ sólo depende de $v(0)$ y de las derivadas de $v(t)$ y $p(t)$ en cero.

Ya definida la métrica y cuando la variedad es orientable (como en el caso de cualquier haz tangente ver [C2]) obtenemos una forma de volumen de la siguiente manera. Si la base esta positivamente orientada definimos

$$\nu_p(v_1 \dots v_n) := (\det(a_{i,j}))^{\frac{1}{2}}$$

Donde $a_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$. De esta manera podemos definir la medida integrando en pequeños abiertos

$$\mu(U) = \int_U p(x) dx_1 \dots dx_n$$

Donde \tilde{U} es la imagen de U bajo alguna carta positiva y $p(\mathbf{x}) = \nu(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = (\det(g_{i,j}))^{\frac{1}{2}}$. Al coeficiente $p(\mathbf{x})$ se le llama densidad de la forma de volumen de las coordenadas usadas.

Para verificar que no depende de la parametrización escogida utilizamos el Teorema de cambio de variables para integrales. En efecto si h y f son dos parametrizaciones, $g_{i,j}, \tilde{g}_{i,j}$ los coeficientes de la métrica y r es el cambio de coordenadas tenemos que:

$$\int_V (\det(\tilde{g}_{i,j}(\mathbf{y}))^{\frac{1}{2}} dy = \int_U (\det(\tilde{g}_{i,j}(r(\mathbf{x})))^{\frac{1}{2}} J(\frac{dr}{d\mathbf{x}}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

Y como $h = f \circ r$ tenemos que $\frac{\partial h}{\partial x_i} = df(\frac{\partial r}{\partial x_i})$ concluimos que $g_{i,j} = (\frac{\partial r}{\partial x_i})^T (\tilde{g}_{i,k}) (\frac{\partial r}{\partial x_j})$
Por lo tanto

$$(g_{i,j}) = (\frac{dr}{d\mathbf{x}})(\tilde{g}_{i,k})(\frac{dr}{d\mathbf{x}})$$

Se sigue que

$$\det(g_{i,j}) = \det(g_{i,k}) (J(\frac{dr}{d\mathbf{x}}))^2$$

Concluimos por (1) que

$$\int_V (\det(\tilde{g}_{i,j}(\mathbf{y}))^{\frac{1}{2}} dy = \int_U (\det(g_{i,j}(\mathbf{x}))^{\frac{1}{2}} dx$$

Por lo tanto el volumen (la medida) esta bien definida.

Teorema 1 (Liouville) (ver [C3])

Sea M una variedad Riemanniana, F un campo y ν su forma de volumen. Tomamos una carta donde F se escribe como

$$x'_1 = F_1(x), \dots, x'_n = F_n(x)$$

Y la forma ν como

$$\nu = p(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Entonces una condición necesaria y suficiente para que el flujo φ^t , asociado al campo F preserve el volumen es que

$$\operatorname{div} pF = \sum_k \frac{d(pF_k)}{dx_k} = 0$$

Una prueba intuitiva del Teorema es la siguiente, por el Teorema de la divergencia

$$\int_{\partial R} (F \cdot n) p ds = \int_R \operatorname{div}(pF) dx dy$$



Pensamos en el flujo de un líquido con densidad $p(x)$ interpretando el lado izquierdo como la cantidad de masa que entra a la región R . Obtenemos por un lado, que si la divergencia de pF es cero la cantidad neta de lo que entra es cero. Es decir al menos infinitesimalmente no entra mas masa de la que había. Inversamente si para cualquier región siempre entra lo mismo de lo que sale concluimos que para cualquier región $\int_R \text{div}(pF) = 0$ y por ser ésta arbitraria concluimos que la divergencia de pF es cero.

A continuación la prueba del Teorema, podemos restringirnos sin pérdida de generalidad a cuando los abiertos y el tiempo son pequeños.

Tomemos U una vecindad coordenada de M , f una función concentrada en U , es decir que su soporte este contenido en U . Tomamos T suficientemente pequeño para que $f(\varphi^t(x))$ también esta concentrada en U si $|t| < T$. Para la invarianza de la medida es condición necesaria y suficiente que para todas estas f tengamos que

$$\int_M f p dx_1 \dots dx_n = \int_M f(\varphi^t) p dx_1 \dots dx_n \quad (2)$$

Es suficiente ya que si E es pequeño con $f = \chi_E$ obtenemos que

$$\mu(E) = \mu(\varphi^t(E))$$

Y la ecuación dos es una consecuencia de que φ^t preserve la medida.

La ecuación dos es equivalente a que para toda f se tenga que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int_M f(\varphi^t(x)) p(x) dx_1 \dots dx_n \Big|_{t=0} \quad (3) \\ &= \frac{d}{dt} \int_U f(\varphi^t(x)) p(x) dx_1 \dots dx_n \Big|_{t=0} \\ &= \int_U \frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) p(x) dx_1 \dots dx_n \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$= \int_U \frac{d}{dt} f(\varphi^t(x)) p(x) dx_1 \dots dx_n = \int_U \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx_k} f(\varphi^t(x)) \frac{d\varphi_k^t}{dt} p(x) dx_1 \dots dx_n$$

Valuando en cero obtenemos

$$0 = \int_U \sum_{k=1}^n \frac{df}{dx_k}(x) F_k(x) p(x) dx_1 \dots dx_n$$

$$(*) = - \int_U \sum_{k=1}^n \frac{d(pF)}{dx_k}(x) f(x) dx_1 \dots dx_n$$

Entonces como f es arbitraria, tenemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{d(pF)}{dx_k} = \operatorname{div}(pF) = 0$$

La igualdad (*) es porque si definimos el campo h como $f p F$ obtenemos por el Teorema de la divergencia que

$$\int_U \operatorname{div} h = \int_{\partial U} h \cdot n dS = 0$$

Pues h se anula en la frontera por hacerlo f , luego

$$\int_U \sum_{k=1}^n \frac{df}{dx_k}(x) F(x) p(x) dx_1 \dots dx_n + \int_U \sum_{k=1}^n \frac{d(pF)}{dx_k}(x) f(x) dx_1 \dots dx_n = 0$$

Con lo que terminamos la demostración del teorema 1

A continuación calculamos $p(x, y, w_1, w_2)$ la densidad de la forma de volumen en las coordenadas canónicas de TH^2 ; Calculamos entonces la matriz $(g_{i,j})$ de la métrica en TH^2

$$\begin{aligned} g_{i,j}(p, w) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p, w), \frac{\partial}{\partial x_j}(p, w) \right\rangle_{(p, w)} \\ &= \left\langle d\Pi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), d\Pi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_p + \left\langle \frac{Dv_i}{dt}(0), \frac{Dv_j}{dt}(0) \right\rangle_p \end{aligned}$$

Las curvas que tomaremos adaptadas a las curvas a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ serán las propias curvas coordenadas. Usando nuevamente la fórmula de la derivada covariante y usando que los símbolos de Christoffel en H^2 , según el apéndice 2, son:

$$\Gamma_{1,1}^1 = \Gamma_{1,2}^2 = \Gamma_{2,2}^1 = 0 \quad \Gamma_{1,1}^2 = \Gamma_{1,2}^1 = \frac{1}{y} \quad \Gamma_{2,2}^2 = \frac{-1}{y}$$

Obtenemos

$$\frac{Dv_1}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \Gamma_{1,j}^k w_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\frac{-w_2}{y}, \frac{w_1}{y} \right)$$

$$\frac{Dv_2}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \Gamma_{2,j}^k w_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\frac{-w_1}{y}, \frac{-w_2}{y} \right)$$

$$\frac{Dv_3}{dt} = (1, 0)$$

$$\frac{Dv_4}{dt} = (0, 1)$$

Entonces la matriz del producto interior será

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} + \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^4} & 0 & \frac{-w_2}{y^3} & \frac{w_1}{y^3} \\ 0 & \frac{1}{y^2} + \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^4} & \frac{-w_1}{y^3} & \frac{w_2}{y^3} \\ \frac{-w_2}{y^3} & \frac{-w_1}{y^3} & \frac{1}{y^2} & 0 \\ \frac{w_1}{y^3} & \frac{w_2}{y^3} & 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante observamos que la matriz es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & b & v_2 & v_4 \\ v_1 & v_2 & c & 0 \\ v_3 & v_4 & 0 & d \end{pmatrix}$$

En consecuencia el determinante, es desarrollando por menores,

$$a(b(cd) - v_2(v_2d) - v_4(v_4c)) + v_1(v_4(v_1v_4 - v_2v_3) - b(v_1d)) - v_3(b(cv_3) + v_2(v_1v_4 - v_3v_2))$$

$$= abcd - adv_2^2 - acv_4^2 + v_1^2v_4^2 - v_1v_4v_2v_3 - bdv_1^2 - bcv_3^2 - v_3v_2v_1v_4 - v_3^2v_4^2$$

$$= (v_1v_4 - v_2v_3)^2 + abcd - adv_2^2 - acv_4^2 - bdv_1^2 - bcv_3^2$$

En nuestro caso además

$$a = b \quad c = d \quad v_1 = v_4 \quad v_2 = -v_3$$

Y obtenemos la fórmula

$$(v_1^2 + v_2^2)^2 + a^2c^2 - 2ac(v_2^2v_1^2)$$

$$= (v_1^2 + v_2^2 - ac)^2$$

Sustituyendo, el determinante de la matriz del producto interior es

$$\left(\frac{w_2^2}{y^6} + \frac{w_1^2}{y^6} - \frac{1}{y^4} - \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^6} \right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{y^4}\right)^2 = \frac{1}{y^8}$$

Entonces la densidad que buscamos es $p(x, y, w_1, w_2) = \frac{1}{y^4}$.

El campo geodésico en estas coordenadas es, según lo que vimos en el capítulo I.

$$G_1(x, y, w_1, w_2) = w_1$$

$$G_2(x, y, w_1, w_2) = w_2$$

$$G_3(x, y, w_1, w_2) = -\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^1 w_i w_j = \frac{2w_1 w_2}{y}$$

$$G_4(x, y, w_1, w_2) = -\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^2 w_i w_j = -\left(\frac{w_1^2}{y} - \frac{w_2^2}{y}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div} pG &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w_1}{y^4}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_2}{y^4}\right) + \frac{\partial}{\partial w_1} \left(\frac{2w_1 w_2}{y^5}\right) + \frac{\partial}{\partial w_2} \left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{y^5}\right) \\ &= 0 + \frac{-4w_2}{y^5} + \frac{2w_2}{y^5} + \frac{2w_2}{y^5} = 0 \end{aligned}$$

Por el Teorema de Liouville concluimos

Proposición 2

El flujo geodésico en TH^2 preserva el volumen (la medida).

Corolario 3

Sea M una superficie de curvatura menos uno, entonces el flujo geodésico en T_1M preserva la medida.

Por el Teorema 16 del capítulo 1 sabemos que M es isométrica a H^2/G donde G es un subgrupo de isometrías de H^2 que actúa libre y discontinuamente. Consideremos $p : H^2 \rightarrow H^2/G$ la proyección, que a partir de ahora escribiremos $p : H^2 \rightarrow M$. Definimos ahora $P : TH^2 \rightarrow TM$ como $P(x, v) = (p(x), dp_x(v))$. El corolario se sigue de las siguientes afirmaciones

- i) P es una aplicación cubriente
- ii) P es una isometría local
- iii) P manda el campo y el flujo geodésico (G, G^t) en TH^2 en el campo y flujo geodésico (g, g^t) en TM

Demostración (Corolario)

Sean $q \in TM$ y U una vecindad normal de q . Tomemos E y T suficientemente chicos para que $g^t(E)$ este contenido en U para todo t con $|t| < T$. Sea $f : U \rightarrow TH^2$ una inversa local de P .

Por (iii) tenemos que

$$g^t(E) = P(G^t(f(E)))$$

y por (ii)

$$\mu(g^t(E)) = \Omega(G^t(f(E))) = \Omega(f(E)) = \mu(E)$$

Donde la segunda igualdad es por la proposición dos.

Prueba de (i),(ii),(iii)

(i) Sea V una vecindad normal de $p : H^2 \rightarrow M$ Entonces TV es una vecindad normal de $P : TH^2 \rightarrow TM$.

(ii) Para probar (ii) necesitaremos el siguiente

Lema 4

Si h es una isometría, h preserva la derivada covariante. Mas precisamente si $w(t) = dh_{\gamma(t)}v(t)$ entonces $\frac{Dv}{d\gamma} = \frac{Dw}{dh \circ \gamma}$.

Para su demostración ver [C2].

Sean $(q, v) \in TH^2$ y $W_1, W_2 \in TH^2$. Consideremos curvas $(q_i(t), w_i(t))$ adaptadas a W_i . Entonces $P(q_i(t), w_i(t))$ estan adaptadas a $dP_{q,v}(W_i)$. A estas las llamamos $(r_i(t), z_i(t))$. Entonces

$$\begin{aligned} & \langle dP(W_1), dP(W_2) \rangle_{P(q,v)} = \\ & = \langle r'_1(0), r'_2(0) \rangle_{p(q)} + \left\langle \frac{Dz_1}{dt}(0), \frac{Dz_2}{dt}(0) \right\rangle_{p(q)} \\ & = \langle q'_1(0), q'_2(0) \rangle_q + \left\langle \frac{Dw_1}{dt}(0), \frac{Dw_2}{dt}(0) \right\rangle_q \\ & = \langle W_1, W_2 \rangle_{(p,v)} \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es por ser p una isometría local y por el Lema (4).

(iii) Es consecuencia inmediata de (ii) y de que las isometrías mandan geodésicas en geodésicas.

Observación 1 Las transformaciones de las cubiertas p, P son esencialmente las mismas. Si g esta en la primera entonces (g, dg) es transformación de la segunda. Además nótese que por el lema 4 si g es isometría entonces (g, dg) también lo es.

Si definimos $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x, v) = |v|$; f es una primera integral del flujo geodésico, puesto que la velocidad de un geodésica es constante. Esto muestra,

en particular, que el flujo geodésico no es ergódico en TM . Como veremos posteriormente, la situación cambia en el caso de que M sea una superficie de curvatura negativa, si restringimos el espacio fase a $f^{-1}(1)$. Por lo pronto reducimos el espacio fase en una dimensión, por otro lado por el lema de homogeneidad al entender que pasa en $T_1M = f^{-1}(1)$ habremos comprendido todo el sistema.

Observación 2 El único valor crítico de f es el cero, por lo tanto $f^{-1}(r)$ es una subvariedad suave de TM de codimensión 1 para toda r mayor que cero. (Denotemos por $T_rM = f^{-1}(r)$)

Quedan por aclarar dos preguntas

- i) ¿ Cual es la medida en T_1M ?
- ii) ¿ Por que es invariante esta medida ?

T_1M como subvariedad de TM tiene una métrica natural inducida por la métrica en TM ; Y por lo tanto como ya vimos una medida.

Para ver que esta medida es invariante necesitaremos el siguiente

Lema 5

Para cada (p, v) en TH^2 con v distinto de cero existe una parametrización H alrededor de (p, v) con las siguientes características

- a) Dejando fija la primera coordenada, las otras tres parametrizan un abierto de T_rM para un cierto r .
- b) El vector $\frac{\partial H}{\partial s_1}$ es unitario y ortogonal a T_rH^2 para toda r mayor que cero:

Construcción

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ y $h : U \rightarrow T_1H^2$ una parametrización de un abierto de T_1H^2 que cubra a $\frac{v}{|v|}$. Entonces $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$. Definimos

$$H : U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow TH^2$$

$$H(x, s) = (h_1(x), s h_2(x))$$

La curva $(r_1(t), v_1(t)) = (h_1(x), (|v| + t)h_2(x)) = (p, |v| + t) \frac{v}{|v|}$ esta adaptada a $\frac{\partial H}{\partial s}$ en (p, v) . Sea $W_2 \in T_{(p,v)}(T_{|v|}H^2)$ y una curva $(r_2(t), v_2(t))$ adaptada a W_2 . Podemos suponer que ésta, está contenida en $T_{|v|}H^2$.

Calculamos

$$\begin{aligned} \langle W_2, \frac{\partial H}{\partial s} \rangle_{(p,v)} &= \langle d\pi W_2, d\pi(\frac{\partial H}{\partial s}) \rangle_p + \langle \frac{Dv_2}{dt}(0), \frac{Dv_1}{dt}(0) \rangle_p \\ &= \langle d\pi W_2, 0 \rangle_p + \langle \frac{Dv_2}{dt}(0), \frac{v}{|v|} \rangle_p \\ &= \frac{1}{|v|} \langle \frac{Dv_2}{dt}(0), v \rangle_p \end{aligned}$$

Por como tomamos $v_2(t)$ tenemos que

$$\langle v_2(t), v_2(t) \rangle = |v|$$

Concluimos que

$$\left\langle \frac{Dv_2}{dt}(0), v_2(0) \right\rangle_p = 0$$

Pero como $v_2(0) = v$ pues la curva estaba adaptada tenemos que $\left\langle \frac{Dv_2}{dt}(0), v \right\rangle_p = 0$.
Concluimos que

$$\left\langle W_2, \frac{\partial H}{\partial s} \right\rangle_{(p,v)} = 0$$

Ahora

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial s} \right\rangle = \langle 0, 0 \rangle_p + \left\langle \frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|} \right\rangle = 1$$

Con lo que terminamos la demostración del lema.

Proposición 6

Demostración

El flujo geodésico preserva la medida en T_1H^2 .

Sea $U \subset T_1H^2$. Si denotamos $DU_\epsilon = \bigcup_{s < \epsilon} sv$ con $v \in U$. Tomamos la parametrización dada por el Lema 4, denotamos por ν, μ las medidas en TH^2 y T_1H^2 respectivamente. Sea $p(x)$ la densidad en esta parametrización.

Sea

$$g(\epsilon) = \nu(DU_\epsilon) = \int_{DU_\epsilon} p(x) dx_1 \dots dx_4 = \int_1^{1+\epsilon} f(x_1) dx_1$$

Donde $f(x_1) = \int p(x) dx_2 dx_3 dx_4$

Por el desarrollo de Taylor

$$g(\epsilon) = g(0) + g'(0)\epsilon + o(\epsilon^2)$$

$$= 0 + f(1)\epsilon + o(\epsilon^2)$$

Afirmamos que $f(1) = \mu(U)$ Esto ya que

$$p(x) = \det^{\frac{1}{2}}(g_{i,j})_{i,j=1\dots 4} = \det^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (g_{i,j})_{i,j=2\dots 4} \end{pmatrix}$$

$$= \det^{\frac{1}{2}}(g_{i,j})_{i,j=2\dots 4}$$

Que es precisamente la densidad de μ .

Ahora puesto que la medida se preserva tenemos que

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \nu(G^t(DU_\varepsilon)) \\ &= \nu(D(G^t(U))_\varepsilon) \end{aligned}$$

Esta última igualdad por la invarianza de $T_r H^2$ bajo el flujo. Y procediendo igual que antes tenemos que

$$g(\varepsilon) = \mu(G^t(U))\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

Por lo tanto

$$\mu(U)\varepsilon + o(\varepsilon^2) = \mu(G^t(U))\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(U)\varepsilon + o(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(G^t(U))\varepsilon + o(\varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

$$\mu(U) = \mu(G^t(U))$$

Corolario 7

Sea M una variedad con las hipótesis del Corolario 3. La medida inducida en $T_1 M$ es invariante bajo el flujo geodésico.

Sea $P : TH^2 \rightarrow TM$ como P es isometría local tenemos que $P|_{T_1 H^2} : T_1 H^2 \rightarrow T_1 M$ sigue siendo una isometría local y proyección cubriente. Ahora sígase la prueba del corolario 3.

§ 2 Horociclos

Durante toda esta sección, para no tratar casos especiales en las definiciones adoptaremos la convención de considerar a las rectas como círculos con radio infinito.

En el modelo del semiplano superior las geodésicas son (geométricamente) círculos ortogonales al eje real. Sea $x = (p, v) \in T_1 H^2$ tomamos la geodésica en H^2 que pasa por p y dirección v . Definimos los puntos $\infty(x)$, $-\infty(x)$ a los puntos de intersección de la geodésica (el círculo) con el eje real, $\infty(x)$, cuando se recorre la geodésica en la dirección de v y $-\infty(x)$ en el otro caso. A los círculos tangentes al eje real que pasan por p y por $\infty(x)$, $-\infty(x)$ los llamamos los *horociclos contactor* y *expansor* respectivamente. Será conveniente parametrizar estas curvas por longitud de arco; Así $h^c(t, x)$, $h^e(t, x)$ denotarán esta parametrización de tal manera que $h^c(0, x) = h^e(0, x) = p$ y que las bases $\{v, \frac{dh^c(t, x)}{dt}|_{t=0}\}$, $\{v, \frac{dh^e(t, x)}{dt}|_{t=0}\}$ sean positivas.

Denotemos por $n^c(t, x)$ ($n^e(t, x)$) el campo continuo normal unitario a lo largo de $h^c(t, x)$ ($h^e(t, x)$) de tal manera que $n^c(t, x) = v$ ($n^e(t, x) = v$)

Si no hay lugar a confusión llamaremos también horociclo contractor (expansor) a la curva en T_1H^2 $H^c(t, x) = (h^c(t, x), n^c(t, x))$ ($H^c(t, x) = (h^c(t, x), n^c(t, x))$).

Definimos ahora dos flujos en T_1H^2

$$\varphi^c : T_1H^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T_1H^2$$

$$\varphi^e : T_1H^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T_1H^2$$

$$\varphi^c(x, t) = H^c(t, x)$$

$$\varphi^e(x, t) = H^e(t, x)$$

Hay que verificar que:

i) $\varphi_0 = \text{id}$

ii) $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$

i) Es clara.

ii) Basta ver que $\infty(x) = \infty(\varphi_t^c(x))$ y que $-\infty(x) = -\infty(\varphi_t^e(x))$. Puesto que en este caso los horociclos coinciden geoméricamente, y por lo tanto recorrer t y luego s es lo mismo que recorrer $t + s$. Tomamos el círculo ortogonal al eje real que pase por $\infty(x)$ y $\varphi_t^c(x)$. Este círculo es una geodésica y es ortogonal al horociclo en H^2 $h^c(x)$. Se concluye que $\infty(x) = \infty(\varphi_t^c(x))$. La demostración para el caso expansor es análoga. Estos dos flujos dan lugar a dos campos vectoriales que llamaremos contractor y expansor respectivamente.

Proposición 8

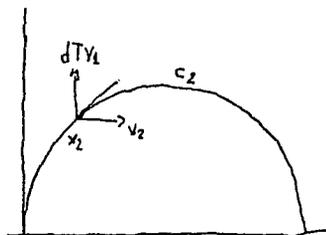
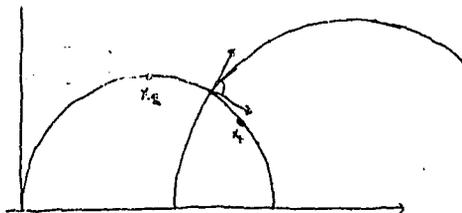
Los campos horocíclicos y el campo geodésico son linealmente independientes.

Para probar la proposición necesitaremos los siguientes lemas.

Lema 9

Dados dos puntos $x_1, x_2 \in T_1H^2$ existe una isometría $g : H^2 \rightarrow H^2$ tal que $g(p_1) = p_2$ y $dg_{p_1}(v_1) = v_2$

Las inversiones con respecto a círculos ortogonales al eje real son isometrías ver [V1]. Para construir la isometría requerida consideramos primero el círculo C_1 ortogonal al eje real que une a x_1 con x_2 . Sea m el punto medio, definimos T_1 como la transformación obtenida al invertir con respecto al círculo que pasa por m y es ortogonal a C_1 . Definimos ahora T_2 la inversión con respecto al círculo que pasa por x_2 y que biseca a v_2 , $dT_1(v_1)$. $T_2 \circ T_1$ es la isometría buscada.



Lema 10

Sea $h : H^2 \rightarrow H^2$ una isometría entonces tanto h como (h, dh) llevan horociclos en horociclos.

Entendidos los horociclos en H^2 el resultado es consecuencia de que las las isometrías por ser inversiones mandan círculos en círculos; y entendidos en $T_1 H^2$ se sigue de lo anterior y de que los campos campos ortonormales van a campos ortonormales por tratarse de una isometría.

Por los lemas basta demostrar entonces que los campos son linealmente independientes en un punto. Tomamos la parametrización punto-ángulo alrededor de $(i, \frac{3}{2}\pi)$

las curvas correspondientes a los campos son
para g $x_1(t) = 0$, $y_1(t) = e^{-t}$, $\theta_1(t) = \frac{3}{2}\pi$;
para h^c $x_2(t) = t$, $y_2(t) = 1$, $\theta_2(t) = \frac{3}{2}\pi$;
para h^c $x_3(t) = \frac{t}{t^2+1}$, $y_3(t) = \frac{1}{t^2+1}$, $\theta_3(t) = \dots$

No calculamos explícitamente $\theta_3(t)$ pues como veremos mas adelante solo necesitaremos saber que $\theta_3'(t) \neq 0$. Para calcular x_3, y_3 lo que se hizo fue considerar la transformación de Moebius que manda a la recta en el círculo considerado. Al derivar los campos correspondientes obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \\ -e^{-t} & 0 & \frac{-2t}{(t^2+1)^2} \\ 0 & 0 & \theta_3'(t) \end{pmatrix}$$

Y evaluando en cero

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3'(0) \end{pmatrix}$$

Sólo hay que ver que $\theta_3'(0)$ es distinto de cero para tener probado la Proposición 8. Ahora

$$\cos \theta_3(t) = \frac{\langle n^c(t, (i, \frac{3}{2}\pi)), (1, 0) \rangle}{|(1, 0)|}$$

tenemos que

$$\frac{d}{dt} h^c(t, (i, \frac{3}{2}\pi)) = \left(\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}, \frac{-2t}{(t^2+1)^2} \right)$$

Por lo tanto

$$n^c(t, (i, \frac{3}{2}\pi)) = \left(\frac{-2t}{(t^2+1)^2}, \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} \right)$$

Ahora

$$\begin{aligned} |(1, 0)|_{(x, y)} &= \frac{1}{y} \\ \langle n^c(t), (1, 0) \rangle_{(x, y)} &= \frac{-2t}{(t^2 + 1)^2 y^2} \\ \cos \theta_3(t) &= \frac{-2t}{(t^2 + 1)^2 y} = \frac{-2t}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Derivando

$$\operatorname{sen} \theta_3(t) \theta_3'(t) = \frac{-2(t^2 + 1)^3 + 2t(3(t^2 + 1)^2 2t)}{(t^2 + 1)^6}$$

Y evaluando en cero

$$\operatorname{sen} \theta_3(0) \theta_3'(0) = -2$$

con lo que concluimos que $\theta_3'(0) \neq 0$.

En seguida justificaremos los nombres de contractor y expansor. Diremos "y esta en horociclo contractor (expansor) de x". Si existe t tal que $\varphi_t^c(x) = y$ ($\varphi_t^e(x) = y$)

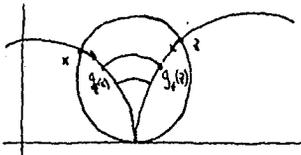
Proposición 11

Si z esta en el horociclo contractor de x entonces

- i) $g_t(z)$ esta en el horociclo contractor de $g_t(x)$ donde g_t es el flujo geodésico.
- ii) Para todo $t > 0$ $d(g_t(x), g_t(z)) \leq ac^{-t}$

Y si z esta en el horociclo expansor de x entonces

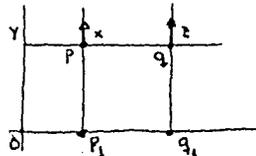
- i') $g_t(z)$ esta en el horociclo expansor de $g_t(x)$
- ii') Para todo $t < 0$ $d(g_t(x), g_t(z)) \leq ac^t$



Sea $x \in T_1 H^2$ tomamos la geodésica en H^2 determinada por x. Por cada $p \in H^2$ existe un único vector v tal que $\infty(p, v) = \infty(x)$. Consideramos la familia de círculos ortogogales y una transformación de Moebius que mande $\infty(x)$ al infinito;

Las geodésicas van a dar a rectas perpendiculares al eje real y la familia ortogonal de círculos a la familia de rectas paralelas al eje real. Basta demostrar entonces la proposición para este caso particular.

Pero en este caso (i) es trivial, como la métrica solo depende de y, si empezamos a la misma altura y recorremos la misma distancia llegamos a la misma altura. Para probar (ii) sean $p, q \in H^2$ tales que $p = (p_1, y)$ y $q = (q_1, y)$. Sean $x = (p, (y, 0)), z = (q, (y, 0)) \in T_1 H^2$. Entonces la curva $\alpha(s) = (s, y, (y, 0))$ satisface que $\alpha(p_1) = x$ y $\alpha(q_1) = y$. Por lo tanto



$$d(x, z) \leq \int_{p_1}^{q_1} |\alpha'(s)| ds$$

Ahora

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle_{\alpha(s)} = \langle d\Pi\alpha'(s), d\Pi\alpha'(s) \rangle_{(s,y)} + \left\langle \frac{D(y,0)}{ds}(s), \frac{D(y,0)}{ds}(s) \right\rangle_{(s,y)}$$

Un cálculo sencillo usando la fórmula de la derivada covariante y los símbolos de Christoffel, muestra que

$$\frac{D(y,0)}{ds}(s) = (-1, 0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha' \rangle &= \langle (1, 0), (1, 0) \rangle_{(p_1, y)} + \langle (-1, 0), (-1, 0) \rangle_{(p_1, y)} \\ &= \frac{2}{y^2} \end{aligned}$$

$$\int_{p_1}^{q_1} |\alpha'(s)| ds = \int_{p_1}^{q_1} \frac{2}{y} ds = (q_1 - p_1) \frac{2}{y}$$

Ahora y crece exponencialmente con respecto a t ($y(t) = e^t$). Por lo tanto

$$d(g_t(x), g_t(z)) \leq \frac{a}{e^t} = ae^{-t}$$

Para demostrar (i') y (ii') se puede proceder de manera análoga o de hecho se puede ver que si

$$\text{Si } x = (p, v) \text{ y denotamos por } x' = (p, -v)$$

se tiene que

$$g_t(x) = g_{-t}(x')$$

Y que si y esta en el horociclo expensor de x entonces y' esta en el horociclo contractor de x' y viceversa.

Por lo tanto

i') Si y esta en el horociclo expensor de x , y' esta en el horociclo contractor de x' y por (i) tenemos que $g_t(y')$ esta en el horociclo contractor de $g_t(x')$ y por lo tanto $g_{-t}(y)$ esta en el horociclo expensor de $g_{-t}(x)$.

ii') Si y esta en el horociclo expensor

$$d(g_t(x), g_t(y)) = d(g_{-t}(x), g_{-t}(y)) \leq ae^{-t} \quad \text{si } -t > 0$$

por lo tanto

$$d(g_t(x), g_t(y)) < ae^t \quad \text{si } t < 0$$

Por las últimas observaciones del primer capítulo y por el lema 8 de éste. Podemos definir los campos horocíclicos en T_1M , siempre que M satisfaga las hipótesis del corolario 3.

§ 3 Teorema de Hedlund Hopf

Teorema 12(Hedlund- Hopf)

El flujo geodésico en una superficie de compacta de curvatura menos uno es ergódico.

Antes de probar este teorema aun necesitamos los siguientes lemas.

Lema 13

Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en una variedad riemanniana. Y $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ es una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco. Entonces existe $s \in [0, l]$ tal que

$$f(\gamma(l)) - f(\gamma(0)) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle l$$

Demostración

Sea $g = f \circ \gamma$ por el teorema de valor medio, existe s tal que

$$g'(s) = \frac{g(l) - g(0)}{l} = \frac{f(\gamma(l)) - f(\gamma(0))}{l}$$

Pero

$$g'(s) = df_{\gamma(s)}\gamma'(s) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle$$

Y de aqui que

$$f(\gamma(l)) - f(\gamma(0)) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle l$$

A partir de ahora M siempre será una superficie compacta de curvatura constante menos uno. Y g_t denotará su flujo geodésico.

Lema 14

Con las notaciones del capítulo 2, sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tomamos $x \in T_1H^2$ tal que $\tilde{f}^+(x)$ existe. Sea y en el horociclo contractor de x . Entonces

$$\tilde{f}^+(y) = \tilde{f}^+(x)$$

Consideramos X, Y puntos en la preimagen de x, y bajo el recubrimiento P , de tal manera que Y este en el horociclo contractor de X . Sea F el levantamiento de f , G_t el flujo geodésico en T_1H^2 . Como P manda G_t en g_t tenemos que

$$F(G_t(X)) = f(g_t(x))$$

Por lo tanto

$$\tilde{F}^+(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(X)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t(x)) dt = \tilde{f}^+(x)$$

Basta demostrar entonces que $\tilde{F}^+(Y) = \tilde{F}^+(X)$. Como F es el levantamiento de f , F esta determinada en la cerradura de un dominio fundamental y debido a que T_1M es compacto éste es acotado. En particular $|\nabla F|$ esta acotado pues para toda g transformación de cubierta se tiene que $F \circ g = F$; por la observación 1 obtenemos que g es isometría, en consecuencia

$$\begin{aligned} dF_{g(x)} \circ dg_x(v) &= dF_x(v) = \langle \nabla F(x), v \rangle_x \\ &= \langle dg(\nabla F(x)), dg(v) \rangle_x \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\nabla F(g(x)) = dg_x(\nabla F(x))$$

y nuevamente por ser g isometría

$$|\nabla F(g(x))| = |\nabla F(x)|$$

Por demostrar que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(X)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(Y)) dt$$

Sea $\gamma_t(s)$ la geodésica que realiza la distancia de $G_t(X)$ a $G_t(Y)$. Esta existe por ser T_1H^2 completo, y denotemos por s_t a un punto sobre la geodésica γ_t tal que

$$F(G_t(X)) - F(G_t(Y)) = \langle \nabla F(\gamma_t(s_t)), \gamma'_t(s_t) \rangle d(G_t(X), G_t(Y))$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(X)) - F(G_t(Y)) dt = \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \nabla F(\gamma_t(s_t)), \gamma'_t(s_t) \rangle d(G_t(X), G_t(Y)) dt \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\nabla F(\gamma_t(s_t))| d(G_t(X), G_t(Y)) dt \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Kae^{-t} dt = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(X)) - F(G_t(Y)) dt \leq 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(X)) dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(G_t(Y)) dt$$

Invirtiendo los papeles de X y Y obtenemos la otra desigualdad y el lema estará probado.

Corolario 15

Si debilitamos la hipótesis de la diferenciabilidad de la f en el lema anterior y le pedimos solo continuidad, este, sigue siendo cierto.

Sea $\varepsilon > 0$ Como T_1M es compacto podemos encontrar una h diferenciable tal que

$$|f - h| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t(x)) - f(g_t(y)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t(x)) - h(g_t(x)) dt +$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(g_t(y)) - f(g_t(y)) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(g_t(x)) - h(g_t(y)) dt$$

$$\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon T}{2T} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon T}{2T}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Corolario 16

Si f es una función continua de T_1M a \mathbb{R} y si y esta en el horociclo expansor de x entonces $\tilde{f}^-(y) = \tilde{f}^-(x)$.

Si $x = (p, v)$ denotamos, como antes, $x' = (p, -v)$, definimos análogamente a y' .

$$\tilde{f}^-(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_{-t}(y)) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t(y')) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_t(x')) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g_{-t}(x)) dt$$

Pasemos a la prueba del Teorema 12. Para probar que el flujo geodésico es ergódico es suficiente, por la Proposición 14 del capítulo 2, que si $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces \tilde{f}^+ es constante en casi todo punto. Basta verificar que \tilde{f}^+ es constante, en casi todo punto, en una vecindad de un punto arbitrario. Ya que si definimos $A_k = \{x; \text{existe una vecindad } U_x \text{ donde } f|_{U_x} = k \text{ c.t.p.}\}$ éste es abierto y cerrado. En consecuencia para alguna k_0 tenemos que $A_{k_0} = T_1M$. Sea $B = \{x : \tilde{f}^+(x) \neq k_0\}$ para demostrar que $\mu(B) = 0$. Por la compacidad de T_1M tomamos, una subcubierta finita U_{x_1}, \dots, U_{x_m} de la cubierta dada en la definición de A_{k_0} . Definimos $B_j = B \cap U_{x_j}$. Entonces $\mu(B) \leq \sum_j \mu(B_j) = 0$.

Sea $x_0 \in T_1M$ $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$

Definimos

$$\gamma_{\delta_1}(x_0) = \varphi_t^c(x_0) \quad \text{con } |t| < \delta_1$$

$$\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0) = g_s(\varphi_t^c(x_0)) \quad \text{con } |t| < \delta_1, |s| < \delta_2$$

$$U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x_0) = \varphi_r^c(g_s(\varphi_t^c(x_0))) \quad \text{con } |t| < \delta_1, |s| < \delta_2, |r| < \delta_3$$

Como los campos son linealmente independientes $U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x_0)$ es una vecindad de x_0 . La medida μ induce medidas condicionales μ_1 en las superficies $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$ de la siguiente manera Tomamos una parametrización de una vecindad de x_0 tal que las primeras dos variables parametrizen $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$. Entonces definimos μ_1 integrando nada mas estas dos variables.

Si definimos

$$A = \{x \in U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}, \tilde{f}^+(x) = \tilde{f}^-(x)\}$$

$$A(x_0) = A \cap \sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$$

obtenemos el siguiente

Lema 17

Para μ -c.t.p. tenemos que $\mu_1(A(x_0)) = \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0))$.

Demostración : Por el teorema 7 del capítulo anterior tenemos que

$$\mu(A) = \mu(U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$$

En consecuencia

$$\int_{-\delta_3}^{\delta_3} \mu_1(A(\varphi_t^c(x_0))) dt = \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi^c(x_0))) dt$$

Pasemos a la prueba del Teorema 12. Para probar que el flujo geodésico es ergódico es suficiente, por la Proposición 14 del capítulo 2, que si $f : T_1M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces \tilde{f}^+ es constante en casi todo punto. Basta verificar que \tilde{f}^+ es constante, en casi todo punto, en una vecindad de un punto arbitrario. Ya que si definimos $A_k = \{x; \text{existe una vecindad } U_x \text{ donde } f|_{U_x} = k \text{ c.t.p.}\}$ éste es abierto y cerrado. En consecuencia para alguna k_0 tenemos que $A_{k_0} = T_1M$. Sea $B = \{x : \tilde{f}^+(x) \neq k_0\}$ para demostrar que $\mu(B) = 0$. Por la compacidad de T_1M tomamos, una subcubierta finita $U_{x_1} \dots U_{x_m}$ de la cubierta dada en la definición de A_{k_0} . Definimos $B_j = B \cap U_{x_j}$. Entonces $\mu(B) \leq \sum_j \mu(B_j) = 0$.

Sea $x_0 \in T_1M$ $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$

Definimos

$$\gamma_{\delta_1}(x_0) = \varphi_t^c(x_0) \quad \text{con } |t| < \delta_1$$

$$\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0) = g_s(\varphi_t^c(x_0)) \quad \text{con } |t| < \delta_1, |s| < \delta_2$$

$$U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x_0) = \varphi_r^c(g_s(\varphi_t^c(x_0))) \quad \text{con } |t| < \delta_1, |s| < \delta_2, |r| < \delta_3$$

Como los campos son linealmente independientes $U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x_0)$ es una vecindad de x_0 . La medida μ induce medidas condicionales μ_1 en las superficies $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$ de la siguiente manera. Tomamos una parametrización de una vecindad de x_0 tal que las primeras dos variables parametrizen $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$. Entonces definimos $\tilde{\mu}$ integrando nada más estas dos variables.

Si definimos

$$A = \{x \in U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}, \tilde{f}^+(x) = \tilde{f}^-(x)\}$$

$$A(x_0) = A \cap \sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0)$$

obtenemos el siguiente

Lema 17

Para μ -c.t.p. tenemos que $\mu_1(A(x_0)) = \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(x_0))$.

Demostración : Por el teorema 7 del capítulo anterior tenemos que

$$\mu(A) = \mu(U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3})$$

En consecuencia

$$\int_{-\delta_3}^{\delta_3} \mu_1(A(\varphi_t^c(x_0))) dt = \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi^c(x_0))) dt$$

lo que implica puesto que δ_3 es arbitraria que para casi toda t se tenga

$$\mu_1(\varphi_t^c(A(x_0))) = \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi_t^c((x_0))))$$

Tomamos ahora una t_0 suficientemente pequeña tal que el abierto $U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\varphi_{t_0}^c)$ sea vecindad de $U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(x_0)$ y que $\mu_1(\varphi_{t_0}^c(A(x_0))) = \mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi_{t_0}^c((x_0))))$. Análogamente tomamos un $\gamma_{\delta_1}(\varphi_{t_0}^c(x_0))$ de manera que con respecto a una nueva medida condicional μ_2 tengamos que $\tilde{f}^+ = \tilde{f}^-$. En casi todo punto.

Sea $J = \{x : x \in \gamma_{\delta_1}(\varphi_{t_0}^c(x_0)), \tilde{f}^+ = \tilde{f}^-\}$. Por hipótesis tenemos que J es de medida total ($\mu_2(J) = \mu_2(\gamma_{\delta_1}(\varphi_{t_0}^c(x_0)))$). Definimos

$$H = g_s(J) \quad \text{con} \quad |s| < \delta_2$$

H es de medida total pues

$$\mu_1(\sigma_{\delta_1, \delta_2} - H) = \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \mu_2(g_s(\gamma_{\delta_1}(\varphi_{t_0}^c(x_0)) - J)) ds$$

Pero como g_s es diferenciable manda conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero. Finalmente construimos

$$B = \varphi_t^c(H) \quad \text{con} \quad |t| < \delta_3$$

Por la misma razón afirmamos que B es de medida total en $U_{\delta_1, \delta_2, \delta_3}(\varphi_{t_0}^c(x_0))$

Veamos que f es constante en B . Sea $x \in B$, denotamos por $y \in H$ su proyección a $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi_{t_0}^c(x_0))$ y por $z \in J$ la proyección de esta a $\sigma_{\delta_1, \delta_2}(\varphi_{t_0}^c)$.

Sean $x_1, x_2 \in B$ entonces

$$\tilde{f}^+(x_1) \stackrel{(1)}{=} \tilde{f}^+(y_1) \stackrel{(2)}{=} \tilde{f}^+(z_1) \stackrel{(3)}{=} \tilde{f}^-(z_1) \stackrel{(4)}{=} \tilde{f}^-(z_2) \stackrel{(5)}{=} \tilde{f}^+(z_2) \stackrel{(6)}{=} \tilde{f}^+(y_2) \stackrel{(7)}{=} \tilde{f}^+(x_2)$$

Las igualdades

(1) y (7) son por el corolario 14

(2) y (6) porque los promedios sobre puntos de la misma órbita son los mismos.

(3) y (5) porque $z_1, z_2 \in J$

(4) por el corolario 15

Concluimos que f es constante en B .

APENDICE 1

Conexiones

Definición 1 Una *conexión* en una variedad diferenciable es una función

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

Donde $\chi(M)$ es el conjunto de campos vectoriales C^∞ de M ; que satisface

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$

En terminos de unas coordenadas x_1, \dots, x_n definimos $\Gamma_{i,j}^k$ de manera que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Entonces si

$$X = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i u_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} u_i v_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} u_i v_j \Gamma_{i,j}^k + X(v_k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Lo que muestra que la conexión esta determinada por las funciones real valuadas $\Gamma_{i,j}^k$ llamadas los *símbolos de Christoffel*, y que $\nabla_X Y(p)$ sólo depende de los valores de X y Y en el punto y de las derivadas $X(y_k)$ en p .

Proposición 1

Para cada curva c en M existe una única operación que asocia a cada t a cada campo V a lo largo de esta otro campo, llamado la *derivada covariante* $\left(\frac{DV}{dt}\right)$ que satisface las condiciones

i) $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$

ii) $\frac{DfV}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

iii) Si $V(t) = Y(c(t))$ para algun campo en M entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$

Prueba

Probamos primero la unicidad, sean c_1, \dots, c_n las coordenadas de la curva y $V = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ entonces por (i),(ii) y (iii) la derivada covariante tiene que ser

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_j \frac{dv_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} + v_j \nabla_{\frac{dc}{dt}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_k \left(\frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dc}{dt} v_j \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Por otro lado si definimos la derivada covariante por esta fórmula obtenemos que esta satisface (i),(ii) y (iii).

Definición 2 Una conexión ∇ es compatible con la métrica si para todo par de campos paralelos P_1, P_2 $\langle P_1(t), P_2(t) \rangle$ es constante.

Lema 2 Si la conexión es compatible con la métrica entonces para cualesquiera dos campos V, W se tiene que

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle$$

Tomamos una base ortonormal p_1, \dots, p_n la desplazamos paralelamente a lo largo de la curva, por hipótesis sigue siendo una base ortonormal en cada punto. Si

$$V = \sum v_i p_i, \quad W = \sum w_j p_j$$

Se sigue que

$$\langle V, W \rangle = \sum v_i w_i$$

y que

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv_i}{dt} p_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum \frac{dw_i}{dt} p_i$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \frac{d}{dt} \sum v_i w_i = \sum_i \frac{dv_i}{dt} w_i + \frac{dw_i}{dt} v_i \\ &= \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

Corolario 3

Si la conexión es compatible entonces para cualesquiera dos campos Y, Z y un vector $X(p)$ en T_pM se tiene

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle$$

Prueba

Escoga una curva tal que su velocidad en p sea $X(p)$ y aplíquese el lema 2.

Definición 4 Una conexión es *simétrica* si satisface la identidad

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Obsérvese que en un sistema de coordenadas como el corchete se anula la condición de simetría es equivalente a que $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0$

Proposición 4

Una variedad riemanniana tiene una única conexión simétrica y compatible con su métrica.

Prueba de la unicidad

Dado un sistema de coordenadas, si denotamos por $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ y aplicamos el corolario 3 a los vectores $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g_{j,k}) = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (g_{k,i}) = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,j}) = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle \quad (3)$$

Sumando (1), (2) y restando (3) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (g_{j,k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,j}) = 2 \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle$$

por lo tanto

$$\sum_l \Gamma_{i,j}^l g_{k,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g_{j,k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,j}) \right)$$

Multiplicando por la matriz $(g^{k,l})$ inversa de $(g_{k,l})$ obtenemos que

$$\Gamma^l_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g_{j,k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{i,j}) \right) g^{k,l}$$

Lo que además de mostrar la unicidad de los símbolos de Christoffel y en consecuencia de la conexión, nos da una manera de calcularla en términos de la métrica. Inversamente si definimos la conexión por medio de esta fórmula es inmediato verificar que es simétrica y que es compatible con la métrica.

APENDICE 2

Plano Hiperbólico

Definimos

$$H^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$$

con la métrica

$$g_{i,j} = \frac{\delta_{i,j}}{x_2^2}$$

La curvatura seccional, en el unico subespacio posible, es por definición es

$$K = \frac{\langle R(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}) \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle (x_1, x_2)}{(|\frac{\partial}{\partial x_1}|^2 |\frac{\partial}{\partial x_2}|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Sean R_{ijk}^s tal que

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} (\sum_l \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l}) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\sum_l \Gamma_{jk}^l \frac{\partial}{\partial x_l}) \end{aligned}$$

Concluimos que

$$R_{ijk}^s = \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} \quad (1)$$

Por la fórmula del apéndice anterior tenemos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right) g^{km}$$

En el caso del plano hiperbólico tenemos que $g^{k,m} = \delta_{k,m} x_2^2$ por lo tanto

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) x_2^2$$

Con un cálculo directo obtenemos

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{x_2} \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{-1}{x_2}$$

En nuestro caso particular para calcular el producto interior de $R\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$ con $\frac{\partial}{\partial x_2}$ nos basta conocer $R_{1,2,1}^2$. Sustituyendo en la fórmula uno

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= \sum_l \Gamma_{11}^l \Gamma_{2l}^2 - \sum_l \Gamma_{21}^l \Gamma_{1l}^1 + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x_1} \\ &= \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^1 + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x_1} \\ &= \frac{-1}{x_2^2} + \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{-1}{x_2^2} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\frac{\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle(x_1, x_2)}{\left(|\frac{\partial}{\partial x_1}|^2 \left|\frac{\partial}{\partial x_2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{1}{x_2^2}}{\frac{1}{x_2^2} \frac{1}{x_2^2}} = -1$$

En el caso general definimos

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

con la métrica

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

Si fijamos todas las coordenadas excepto la x_i y la x_n obtenemos un plano de dimensión dos isométrico a H^2 . Además las geodésicas de este son geodésicas del espacio hiperbólico (Ver [C2]). En consecuencia por la observación 3 del capítulo 3 concluimos que la curvatura seccional del plano σ contenido en $T_p H^2$ generado por $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_n}$ es menos uno.

Finalmente la métrica es invariante bajo inversiones con respecto a esferas ortogonales al hiperplano $x_n = 0$ (ver [V1]). Estas transformaciones nos permiten llevar cualquier plano en cualquier otro, se sigue que la curvatura es constante igual a menos uno.

BIBLIOGRAFIA

- [C1] Manfredo do Carmo, *Differential Geometry of curves and Surfaces*; Prentice Hall
- [C2] Manfredo do Carmo, *Geometria Riemanniana*; IMPA
- [C3] Cornfield Fomin Sinai , *Ergodic Theory* ; Springer Verlag
- [C4] Courant , *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*;
Limusa
- [M1] Mañé , *Teoría Ergódica* ; IMPA
- [M2] Milnor , *Morse Theory* ; Princeton
- [R1] Rudin , *Real and Complex Analysis* ; McGraw Hill
- [S1] Sinai , *Introduction to Ergodic Theory* ; Princeton
- [S2] Spivak , *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*; Publish or Perish
- [V1] Verjovsky , *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas* ;
CINVESTAV