

TESIS CON  
FALLAS DE ORIGEN

2ij, 12

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"MÉTODO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES CON RESTRICCIONES  
ADICIONALES"

T E S I S

Que para obtener el título de ACTUARIO presenta:

MARGARITA CRUZ MILLAN

Director de tesis: Dr. Sergio Fuentes Maya  
Asesor de tesis: Actuario José Antonio Flores Díaz  
Revisores: M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez  
Fernández  
Mat. María del Carmen Hernández Ayuso  
M. en C. Manuel Jesús Falconi Magaña

México D. F.

1988



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

	Pag.
Introducción.....	1
1. Programación Lineal.....	6
1.1 Definiciones básicas.....	7
1.2 El problema de la Programación Lineal.....	10
1.3 Método de solución.....	18
1.4 Algoritmo Simplex.....	24
2. Teoría de Gráficas.....	26
2.1 Definiciones básicas.....	27
2.2 Árboles y sus propiedades.....	31
2.3 Operaciones y algoritmos en árboles.....	48
2.4 Ejemplos.....	50
3. Método Simplex Especializado en Redes.....	55
3.1 Caracterización de la base.....	57
3.2 Especialización del Método Simplex Primal.....	62
3.3 Aspectos especiales.....	66
3.4 Algoritmos empleados.....	71
3.5 Ejemplos.....	77
4. Método Simplex Especializado en Redes con restricciones adicionales.....	133
4.1 Descripción del problema.....	135
4.2 Caracterización de la base.....	137
4.3 Cálculo de las variables duales.....	141
4.4 Actualización de la inversa de la base de trabajo.....	146
4.5 Algoritmos empleados.....	148
5. Ejemplos.....	154
6. Conclusiones.....	220
Apéndice I.....	221
Apéndice II.....	224
Bibliografía.....	228



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N T R O D U C C I O N

La programación lineal estudia el problema de minimizar o maximizar una función lineal sujeta a desigualdades lineales en las mismas variables. Desde el desarrollo del método simplex por George B. Dantzig en 1947, la programación lineal se ha utilizado en diferentes áreas como son la militar, industrial, de planificación y otros. Uno de los atractivos de la programación lineal es la facilidad para modelar problemas complejos y la habilidad de los usuarios para resolver problemas a gran escala en un tiempo razonable mediante el uso del método Simplex.

A partir de la Segunda Guerra Mundial se hizo evidente la necesidad de planificación y coordinación entre varios proyectos, así como el uso eficaz de los recursos disponibles. En junio de 1947 se inició un trabajo intensivo en el equipo de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos conocido como SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs). Como resultado, George B. Dantzing desarrolló el método simplex para el final del verano de ese año.

Desde la creación del método Simplex mucha gente ha contribuido al crecimiento de la Programación Lineal, ya sea en el desarrollo de su teoría matemática, en el diseño de códigos y algoritmos.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

mos computacionales eficientes, al intentar nuevas aplicaciones, y también al utilizar la programación lineal como herramienta para resolver problemas mas complejos.

Las aplicaciones de la programación lineal a las diferentes areas de la ciencia y la técnica no cesan de extenderse. Nuevos problemas prácticos necesitan la formulación y la resolución de nuevos problemas teóricos y numéricos, de ahí la necesidad de perfeccionar las maneras de abordar los métodos de programación lineal.

Una clase especial de problemas de programación lineal son los conocidos como de transporte en los cuales debe determinarse un esquema óptimo del transporte que se origina en los lugares de oferta, donde la existencia de una cierta mercancía es conocida, y llega a los lugares de demanda donde se conoce la cantidad requerida. Este tipo de problemas comenzó a estudiarse en 1939 por L.V. Kantorovich, despertándose poco interés en ese tiempo, pero conforme se fue estudiando su solución, resaltó el hecho de que poseían propiedades matemáticas que permitían simplificaciones notables en su proceso de cálculo.

Esta clase de problemas y su extensión, la clase de los problemas de flujo en redes, poseen una estructura especial que

permiten el desarrollo de algoritmos simples y eficientes y propicia una mayor intuición y un mejor entendimiento de las técnicas de programación lineal y del método simplex la siguiente es una lista de algunos de los sistemas en los cuales el modelo de redes puede ser empleado:

- 1.- Sistema de distribución de la producción
- 2.- Sistema de logística militar
- 3.- Sistema de tráfico urbano
- 4.- Sistema de vías ferroviarias
- 5.- Sistema de comunicaciones
- 6.- Sistema de redes de drenaje
- 7.- Sistema de rutas y horarios.
- 8.- Sistema de redes eléctricas
- 9.- Sistemas de redes de riego.

Estos sistemas pueden ser planteados como casos especiales de los problemas de redes, algunos de estos son: el problema de transporte, problema de flujo máximo, problema de la ruta más corta, etc.

En 1956 Alex Orden propuso una generalización del modelo de transportación en el cual la capacidad de transportación en cada ruta se consideraba infinita, al mismo tiempo, los problemas de flujo máximo y el de costo mínimo eran investigados por Lester Ford y Delbert Fulkerson.



De 1950 a 1965 se desarrollaron muchos algoritmos para modelos de redes lineales. La especialización del método simplex en redes comenzó con los trabajos de Dantzing y culminó con los escritos de Ellis Johnson, la mayor parte de esta actividad llevó a la implementación de las técnicas básicas para la solución de los problemas de redes a otros más específicos como son el problema "multicomodity" lineal, el problema de redes con restricciones adicionales lineales, entre otros.

El propósito de esta tesis es mostrar la especialización del método Simplex para resolver el problema de flujo en redes con restricciones adicionales, la estrategia que se sigue es la de emplear la especialización del método Simplex para redes, siguiendo cada paso del algoritmo Simplex y analizando las posibilidades que se tienen para aprovechar la estructura parcial de red del problema.

Este trabajo se desarrolla como sigue: en el primer capítulo se muestran los fundamentos de la programación lineal, se describe el problema de la programación lineal y el algoritmo simplex para resolver este problema. En el capítulo dos se dan las bases de la teoría de gráficas sobre los cuales se sustentan los planteamientos que se formulan en torno a las características de las redes y sus propiedades. El capítulo

tres trata de la especialización del método primal simplex en Redes y se dan ejemplos de dicho método. El capítulo cuarto muestra los pasos que se siguen para la especialización del método simplex para resolver un problema de flujo en redes con restricciones adicionales, en donde se procura explotar al máximo la característica de que la mayor parte del problema se encuentra representado en una red. En el capítulo cinco se dan ejemplos y aplicaciones de este método para mostrar su eficacia en la resolución de problemas cuyo planteamiento corresponde en la mayoría de sus restricciones a una red, quedando una cantidad reducida de estas fuera de la red.

Las conclusiones de este trabajo se describen en el capítulo seis. Asimismo se anexan dos apéndices en los que se describen resultados empleados en el capítulo cuatro.

# CAPITULO I

## PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es parte de la programación matemática mediante la cual se estudian problemas con características lineales. El término "programación", se refiere a un proceso sistemático para determinar un curso de acción. Al referirnos a esta programación como "lineal", se requiere que todas las relaciones involucradas en el problema sean representadas mediante funciones lineales.

Uno de los métodos de solución del problema de programación lineal mas efectivos es el método simplex, el cual fué desarrollado en 1947 por el matemático George B. Danzting, en su artículo "Maximization of a linear fuction of variables subject to lineal inequalities". El método fué desarrollado para resolver problemas de programación lineal, en la Fuerza Aerea de los Estados Unidos de Norteamérica.

El propósito del presente capítulo es establecer las bases de la programación lineal que son utilizadas en capítulos posteriores. Específicamente, se definen los conceptos de transformación lineal, conjunto convexo, punto extremo así como matriz base. Se define la forma estandar y canónica del problema de programación lineal y el correspondiente método simplex.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

### 1.1 Definiciones básicas.

Un resumen de los principales conceptos y definiciones usados en este trabajo es dado como sigue:

#### TRANSFORMACIÓN LINEAL:

Se dice que  $T$  es una transformación lineal si cumple que

$$T(\lambda x + \beta y) = \lambda T(x) + \beta T(y) \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

de esta definición vemos que para que una transformación sea lineal debe cumplir:

- i). Propiedad aditiva:  $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- ii). Propiedad homogénea:  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$  ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

La transformación lineal de un punto en un espacio  $E^m$  de dimensión  $m$ , se tiene perfectamente definida si se conocen las transformaciones de los  $m$  vectores unitarios de este conjunto, es decir, las transformaciones de cada uno de los elementos de su base canónica, específicamente:

$$T \sim \begin{bmatrix} T(e_1) \\ T(e_2) \\ \vdots \\ T(e_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz  $A=[a_{ij}]$  se conoce como la matriz asociada a la transformación  $T$ .

### 1.1 Definiciones básicas.

Un resumen de los principales conceptos y definiciones usados en este trabajo es dado como sigue:

#### TRANSFORMACIÓN LINEAL:

Se dice que  $T$  es una transformación lineal si cumple que

$$T(\lambda x + \beta y) = \lambda T(x) + \beta T(y) \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

de esta definición vemos que para que una transformación sea lineal debe cumplir:

- i). Propiedad aditiva:  $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- ii). Propiedad homogénea:  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

La transformación lineal de un punto en un espacio  $E^m$  de dimensión  $m$ , se tiene perfectamente definida si se conocen las transformaciones de los  $m$  vectores unitarios de este conjunto, es decir, las transformaciones de cada uno de los elementos de su base canónica, específicamente:

$$T \sim \begin{bmatrix} T(e_1) \\ T(e_2) \\ \vdots \\ T(e_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La matriz  $A = [a_{ij}]$  se conoce como la matriz asociada a la transformación  $T$ .

### INDEPENDENCIA LINEAL.

Se dice que un conjunto de vectores

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

son linealmente independientes si la ecuación

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n = 0$$

se cumple únicamente si  $c_i = 0$  con  $i = 1, \dots, n$ .

En caso contrario se dice que los elementos de B son linealmente dependientes.

### CONJUNTO GENERADOR DE VECTORES:

Un conjunto de vectores B, seleccionado del espacio vectorial  $E^n$ , se dice que generan a  $E^n$  si cualquier vector de  $E^n$  puede ser representado como una combinación lineal de los elementos de B.

### BASE:

Un conjunto de vectores

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

forma una base de  $E^n$ , si se cumplen las condiciones:

- i). Los elementos de B generan a  $E^n$
- ii). Los elementos de B son linealmente independientes.

O lo que es lo mismo, una base es un conjunto máximo de vectores linealmente independientes en  $E^n$  y este corresponde a  $k = n$ .

#### CONJUNTO CONVEXO:

Un conjunto  $X$  es convexo si para todo par de puntos  $x_1, x_2$  en el conjunto, todos los puntos de la forma:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

están en  $X$ . O bien de manera equivalente y más general:

Si  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  y  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$

donde  $\lambda_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  entonces  $x \in X$

#### PUNTO EXTREMO DE UN CONJUNTO CONVEXO:

Es aquel que perteneciendo al conjunto convexo no se puede expresar como combinación lineal convexa de otros puntos distintos a él, que se encuentren en el conjunto. En otras palabras: Si  $x$  es un punto extremo entonces

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

si y solo si  $x_i = x$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

#### POLIEDRO CONVEXO:

Es un conjunto convexo no vacío cuyo número de puntos extremos es finito.



## 1.2 El problema de la programación lineal.

El problema fundamental de la programación lineal es el de optimizar (maximizar o minimizar) una función de dos o mas variables, en donde las variables están sujetas a ciertas restricciones y tanto las restricciones como la función a ser optimizada deben ser lineales.

El problema general de la programación lineal, se define como sigue:

$$\text{Maximizar (minimizar) } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sujeto a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \quad (\leq = \geq) \quad b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad (\leq = \geq) \quad b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad (\leq = \geq) \quad b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

donde:  $Z$  = función objetivo

$x_j$  = variable de decisión (actividad),  $j = 1, \dots, n$

$c_j$  = coeficiente de la variable  $x_j$  en  $Z$  (costo)

$a_{ij}$  = coeficiente de la variable  $x_j$  en la restricción  $i$ -ésima

$b_i$  = cantidad disponible del recurso  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Un modelo de programación lineal puede ser planteado en diferentes formas equivalentes, mediante transformaciones. Dos formatos son los más utilizados: el canónico y el estandar.

#### FORMATO CANONICO DE UN P.P.L:

En este formato todas las variables son no-negativas y todas las restricciones son del tipo " $\geq$ " para el caso de minimización y del tipo " $\leq$ " para el caso de maximización.

#### FORMATO ESTANDAR DE UN P.P.L:

En este formato todas las variables son no-negativas y todas las restricciones son ecuaciones.

Para los propósitos del presente trabajo se dará la descripción de este último formato ya que será el usado en lo subsecuente, en su forma de minimización. La forma estandar de un P.P.L. es:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$u_j \geq x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

En este planteamiento se ha introducido además de la restricción de no-negatividad de  $x_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , la correspondiente cota superior  $u_j$ .

Un planteamiento equivalente al anterior, que también será empleado en los capítulos posteriores es de la forma matricial, que a continuación se muestra:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad z = \bar{c} \bar{x} \\ \text{sujeto a} \quad A\bar{x} = \bar{b} \\ \quad \quad \quad \bar{u} \geq \bar{x} \geq \bar{0} \end{array} \right\} \quad (4)$$

donde  $\bar{c} = [c_j]$ ,  $\bar{x} = (x_j)$  con  $j = \overline{1, n}$ ;  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  y  $\bar{b} = [b_i]$   $i = \overline{1, m}$ ;  $\bar{u} = [u_j]$  con  $j = \overline{1, n}$ .

De todo el conjunto de soluciones de un P.P.L. no todas cumplen con la restricción (3). Aquellas que satisfacen (2) y (3) las llamaremos *soluciones factibles*.

#### MATRIZ BASE:

La matriz base es una matriz no singular  $m \times m$  formada por  $m$  columnas de la matriz de restricciones  $A$  que sean linealmente independientes.

Por la definición anterior, se ve que el rango de  $A$  debe ser  $m$  para que tenga una matriz base, cuando esto no ocurre se procede agregando variables artificiales cuyo valor sea cero hasta completar el rango.

#### SOLUCION BASICA:

Una solución básica será entonces aquel vector único determinado por la matriz base escogida para el cual el

conjunto de  $n-m$  variables asociadas con las columnas de  $A$  que no se encuentran en la base tienen valor cero ó el de su cota superior, y que además resuelven el sistemas (2).

#### SOLUCION BASICA FACTIBLE.

Cuando una solución básica cumpla además con la restricción (3) se dice que es una solución básica factible.

#### SOLUCION OPTIMA.

La solución óptima de un P.P.L. será una solución factible que minimize a  $Z$  en (1).

Una vez que ha quedado definido lo que es una solución óptima para un P.P.L, falta dar las características que nos ayuden a identificar la del conjunto de soluciones.

## TEOREMA 1.1

Un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es un punto extremo del conjunto de restricciones del P.P.L, si y solo si,  $x$  es una solución básica factible de las restricciones (2) y (3).

Prueba. Sea  $x^*$  cualquier punto extremo de  $Q$  y sean las variables agrupadas como sigue:

$$0 < x_i^* < u_i \text{ para } i = 1, \dots, k$$

y  $x_i^* \in \{0, u_i\}$  para  $i = k + 1, \dots, n$ . Reordenamos también las columnas de  $A$  para que correspondan al orden de  $x^*$ .

Súpongamos que las primeras  $k$  columnas de  $A$  son linealmente dependientes entonces existen escalares  $\lambda_i$ , no todos cero tales que:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i A(i) = 0$$

Sea 
$$\alpha_1 = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{x_i^*}{|\lambda_i|} \mid \lambda_i \neq 0 \right\}$$

y sea 
$$\alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{u_i - x_i^*}{|\lambda_i|} \mid \lambda_i \neq 0 \right\}$$

Seleccionamos  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < \min(\alpha_1, \alpha_2)$  entonces

$$0 < x_i^* \pm \varepsilon \lambda_i < u_i \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

Sea el vector con  $n$ -componentes

$$\mu = [\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0]$$

Sea  $x^1 = x^* + \epsilon\mu$

y  $x^2 = x^* - \epsilon\mu$

Por construcción  $0 < x^1 < u$  y  $0 < x^2 < u$ . Además por la suposición de dependencia lineal y el hecho de que  $\mu_i = 0$  para  $i \geq k + 1$

$$A\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i A(i) = 0$$

y  $Ax^1 = Ax^* = b$  y  $Ax^2 = Ax^* = b$

como  $\mu \neq 0$  entonces  $x^1$  y  $x^2$  son soluciones factibles diferentes una de la otra y de  $x^*$ , además tenemos que:

$$x^* = \frac{1}{2} x^1 + \frac{1}{2} x^2$$

y esto contradice la hipótesis de que  $x^*$  es un punto extremo y esto sucede por la suposición de que las primeras  $k$ -columnas de  $A$  son linealmente dependientes.

Si  $\text{rango}(A) = m$ ,  $k \leq m$ . Si  $k = m$  entonces  $B$  (la base), está formada precisamente por las primeras  $m$  columnas de  $A$ . Si  $k < m$  entonces  $B$  está formada por las primeras  $k$  columnas de  $A$  junto con  $m-k$  columnas de  $\{A(k+1), \dots, A(n)\}$  que formen un conjunto linealmente independiente de  $m$  columnas. Por lo tanto  $x^*$  es una solución básica factible.

## TEOREMA 1.2

Si existe una solución factible óptima del problema de programación lineal mostrado en (4), entonces la función objetivo  $Z$  alcanza su valor mínimo en un punto extremo del conjunto determinado por las restricciones.

Prueba. Sea  $Q = \{x, \text{ tal que: } Ax = b, 0 \leq x \leq u\}$ , el conjunto de soluciones factibles. Por hipótesis  $Q \neq \emptyset$ . Se demostrará primero que  $Q$  es un poliedro convexo.

Sean  $x_1, x_2$  en  $Q$  y sea  $x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 \leq \lambda \leq 1$ . Se probará que  $x_3$  está en  $Q$ . Sabemos que  $0 \leq x_1 \leq u; 0 \leq x_2 \leq u$ , entonces  $0 \leq (1-\lambda)x_1 \leq (1-\lambda)u$ , de aquí tenemos que:  $0 \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 \leq u$ , además:

$$\begin{aligned} A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= A(\lambda x_1) + A(1-\lambda)x_2 \\ &= \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 \\ &= \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto  $x_3$  está en  $Q$ , esto significa que  $Q$  es un conjunto convexo.

Sin pérdida de generalidad suponemos que el rango de  $A$  es  $m$ , por el teorema 1.1 sabemos que  $x$  es un punto extremo si y solo si  $x$  es una solución básica factible, el número de soluciones básicas factibles está acotado superiormente por

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

donde  $n$  es el número de vectores columna de  $A$ , por lo tanto  $Q$  es un poliedro convexo.

Llamemos  $k = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  al conjunto de los puntos extremos de  $Q$  y sea  $x^* \in Q$ , el punto donde  $z$  alcanza su valor mínimo, al que llamamos  $z^*$ . Supongamos que  $x^*$  no es un punto extremo, entonces podemos escribirlo como combinación convexa de los elementos de  $k$ , esto es:

$$x^* = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

con  $\lambda_i \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ . Entonces, como  $z = cx$  es lineal, tenemos que:

$$\begin{aligned} cx^* &= c \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i cx_i = z^* \end{aligned}$$

Sea  $cx_m = \min \{cx_i, i=1, \dots, p\}$ , entonces:

$$z^* = cx^* \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i cx_m = cx_m$$

pero como  $z^*$  es el valor mínimo entonces  $cx_m = z^*$ , por lo tanto existe un punto extremo  $x_m$  en el que la función objetivo  $z$  alcanza su mínimo.



### 1.3 Método de Solución.

Para encontrar la solución a un problema de programación lineal se verifica primero que este cumpla los siguientes requisitos:

a. La matriz de restricciones  $A$  debe ser de rango completo.

Cuando esto no ocurra se procede agregando variables artificiales cuyo coeficiente en la función objetivo será cero y su cota superior también, el número de estas dependerá del rango que se quiera para  $A$ . Este requisito es necesario para poder obtener una base de las columnas de  $A$ , ya que si ésta no es de rango completo entonces el número máximo de columnas linealmente independientes sería menor al número de renglones y no se tendría una base.

b. Las variables de decisión deben ser no-negativas.

Si alguna de las variables de decisión tuviera valores negativos este se arregla creando una nueva variable para la cual se tenga que es la variable original más su cota inferior y de esta manera la nueva variable siempre será no-negativa además la cota superior de ésta también se modifica en la misma forma.

Una vez que se ha revisado que estos requisitos se cumplan se procede al planteamiento de la solución del P.P.L., como se sabe la matriz  $A$  es de rango completo, además la solución óptima se alcanza en un punto extremo del conjunto

de restricciones generado por A y estos puntos extremos son los correspondientes a las soluciones básicas factibles.

Por todo lo anterior se concluye que basta con recorrer las soluciones básicas factibles y revisar cual de estas corresponde al óptimo de nuestro P.P.L.

Como A es de rango completo entonces existe un conjunto de columnas linealmente independientes de A que son base, esta base la llamaremos B. y a las columnas de A que no forman la base, es decir, las no básicas las llamaremos N de esta manera A queda particionada como sigue:

$$A = [ B \ ; \ N ]$$

con este mismo criterio particionamos los vectores c, x, b y u.

$$c = [ c^B \ ; \ c^N ]$$

$$x = \begin{bmatrix} x^B \\ \text{---} \\ x^N \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u^B \\ \text{---} \\ u^N \end{bmatrix}$$

y nuestro problema de programación lineal queda así:

$$\text{minimizar } Z = c^B x^B + c^N x^N$$

$$\text{sujeto a: } Bx^B + Nx^N = b$$

$$0 \leq x^B \leq u^B$$

$$0 \leq x^N \leq u^N$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión:

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Nx^N$$

Sustituyendo  $x^B$  se obtiene el problema siguiente

$$\text{minimizar } Z = c^B B^{-1}b + (c^N - c^B B^{-1}N)x^N \dots\dots (5)$$

$$\text{sujeto a } 0 \leq B^{-1}b - B^{-1}Nx^N \leq u^B \dots\dots (6)$$

$$0 \leq x^N \leq u^N$$

suponemos que  $0 \leq B^{-1}b - B^{-1}Nx^N < u^B$  para que las soluciones sean factibles.

Cuando dos sistemas de ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones, se dice que son equivalentes.

Las siguientes operaciones transforman un sistema de ecuaciones dado en otro equivalente:

i) Multiplicar cualquier ecuación  $E_t$  por una constante

$$\lambda \neq 0.$$

- ii) Reemplazar cualquier ecuación  $E_t$  por la ecuación  $E_t + \lambda E_i$ . Donde  $E_i$  es cualquier otra ecuación del sistema y  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Estas operaciones son llamadas "operaciones de renglón elementales".

#### PIVOTEO:

Una secuencia particular de operaciones de renglón elementales que tiene una particular aplicación en la programación lineal, es la llamada operación de pivoteo que se define como sigue: Una operación de pivoteo consiste en  $n$  operaciones elementales mediante las cuales se reemplaza un sistema lineal por otro equivalente en el cual una variable específica tiene coeficiente uno en una ecuación y cero en las demás.

Esto se realiza de la siguiente manera:

- i) Seleccionar un término  $a_{rs}x_s$  en el renglón (ecuación  $r$  y columna  $s$ ), con  $a_{rs} \neq 0$ . Lo llamamos término pivote.

- ii) Reemplazar la  $r$ -ésima ecuación por  $\frac{1}{a_{rs}} E_r$ .

- iii) Para cada  $i=1, \dots, m$ ; excepto  $i=r$ ; reemplazamos la  $i$ -ésima ecuación  $E_i$  por la ecuación  $E_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}} E_r$ .

Los criterios para decidir cual es el término pivote son los siguientes:

De (5) tenemos que para que la función objetivo se minimice entonces

$$(C^N - C^B B^{-1} N)_i < 0 \text{ y } (x^N)_i = 0$$

o bien

$$(C^N - C^B B^{-1} N)_i > 0 \text{ y } (x^N)_i = (u^N)_i$$

De esta manera se selecciona la columna sobre la cual se efectuará el pivoteo (k).

Resolviendo el problema (5) y (6) tenemos que:

$$\text{minimizar } z = C^B B^{-1} b + (C^N - C^B B^{-1} N)(x^N + \alpha d)$$

sujeto a

$$0 \leq x^N + \alpha d \leq u^N$$

$$x^B = B^{-1} b - B^{-1} N(x^N + \alpha d)$$

$$0 \leq x^B \leq u^B$$

donde  $d$  es el vector de dirección de los elementos de  $x^N$ .

Para saber cual es el valor óptimo de  $\alpha$  se hace lo siguiente:

$$\text{Sea } \alpha_1 = \max_{\alpha > 0} \{ \alpha \mid 0 \leq x^N + \alpha d \leq u^N \}$$

$$\text{y sea } \alpha_2 = \max_{\alpha > 0} \{ \alpha \mid 0 \leq B^{-1} b - B^{-1} N(x^N + \alpha d) \leq u^B \}$$

y  $\Delta_i = \min \{ \alpha_1, \alpha_2, u_k^N \}$  con  $i$  el índice de la variable para la cual se escogió  $\Delta$ .

Si  $\Delta = \alpha_1$  entonces  $B$  no sufre ningún cambio si no, entonces el cambio se realiza con la variable para la cual se escogió

$\alpha_2$ .

Una vez que se ha revizado que el problema de programación lineal cumple con que la matriz de restricciones  $A$  es de rango completo y que las variables de decisión son no-negativas, y conociendo la forma en que se realiza el pivoteo, podemos proponer un método de solución al problema.

Como se probó en el teorema 1.1 los puntos extremos del conjunto de restricciones corresponden a las soluciones básicas factibles del problema y entre estas se encuentra la solución óptima, esto se mostró en el teorema 1.2, ambos resultados nos sugieren que para encontrar la solución óptima basta con revisar las soluciones básicas del problema hasta llegar a aquella que minimice a la función objetivo.

Dada una solución básica factible necesitamos obtener una nueva solución básica factible que nos de un mejor valor de la función objetivo, para esto seguimos la estrategia mostrada en el pivoteo la cual nos indica las variables de decisión que no están en la base actual y que al entrar en la base mejoran la solución, a la vez que nos muestra cual de las variables básicas debe salir de la base para que la variable entrante ocupe su lugar.

Este proceso es finito, puesto que el conjunto de restricciones tiene un número finito de puntos extremos, y sabremos que hemos encontrado la solución óptima cuando al hacer el análisis de costos reducidos ninguna de las variables no-básicas sea candidata de entrar a la base.

#### 1.4 Algoritmo Simplex.

Algoritmo 1.1 Método Simplex revisado para variables acotadas.

Propósito: Encontrar la solución óptima de un problema de programación lineal con variables acotadas.

#### Descripción

Paso 1. Inicialización. Sea  $x = [x^B ; x^N]^t$  una solución básica factible con base B.

Paso 2. Pivoteo. Calcular  $\Pi = c^B B^{-1}$ . Determinamos costos reducidos  $(c^N - \Pi N)$  de las variables no-básicas.

Si  $x_i^N = 0$  y  $(c^N - \Pi N)_i \geq 0$  y

si  $x_i^N = u_i^N$  y  $(c^N - \Pi N)_i \leq 0$  entonces terminar la solución x es óptima.

Si no, seleccionamos k como sigue:

$x_k^N = 0$  y  $(c^N - \Pi N)_k < 0$ ; ir al paso 3,  $\delta$

$x_k^N = u_k^N$  y  $(c^N - \Pi N)_k > 0$ ; ir al paso 4.

Paso 3. Cambio de variable. Calcular  $y_k = B^{-1} N(k)$ .

$$\Delta_k = \min \left\{ \frac{u_i^B - x_i^B}{-y_{ki}} \text{ con } y_{ki} < 0; \frac{x_i^B}{y_{ki}} \text{ con } y_{ki} > 0; u_k^N; \infty \right\}$$

Si  $\Delta_k = u_k^N$  ir al paso 2, si no ir al paso 5.

Paso 4. Cambio de variable. Calcular  $y_k = B^{-1}N(k)$

$$\Delta_k = \min \left\{ \frac{u_i^B - x_i^B}{y_{ki}} \text{ con } y_{ki} > 0; \frac{x_i^B}{-y_{ki}} \text{ con } y_{ki} < 0; u_k^N; \infty \right\}$$

Si  $\Delta_k = u_k^N$  ir al paso 2, si no ir al paso 6.

Paso 5. Actualización de la base.  $x_k^N = \Delta_k$ ,  $\tilde{x} = x^B - y_k \Delta_k$ .

La nueva solución es  $\tilde{x}$  con la componente  $x_k^N$ . Ir al paso 2.

Paso 6. Actualización de la base  $x_k^N = u_k^N - \Delta_k$ ,  $\tilde{x} = x^B + y_k \Delta_k$ .

$\Delta_k$ . La nueva solución  $\tilde{x}$  con la componente  $x_k^N$ . Ir al paso 2.



## CAPITULO II

## TEORIA DE GRAFICAS

En este capítulo se definen las nociones de la teoría de gráficas finitas que serán de suma importancia para el desarrollo del método Simplex especializado en redes, que a su vez, determina en gran medida la eficiencia del método de solución para redes de flujo con restricciones adicionales.

Dada la particularidad de las gráficas llamadas "árbol" para facilitar la realización de operaciones de tipo matricial -- cuando estas se relacionan, se cuenta con una herramienta -- fuerte para el tratamiento de problemas lineales con características específicas.

Este capítulo se desarrolla como sigue: primero se enumeran las definiciones básicas necesarias para el planteamiento del problema de flujo en redes, después se define el concepto de árbol y se dan algunas de sus propiedades que serán utilizadas para la descripción del método de solución al problema de flujo en redes y por último se muestran algunas operaciones y algoritmos en árboles con sus ejemplos.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

2.1 Definiciones básicas.

Las definiciones necesarias para el planteamiento posterior del problema de flujo en redes se dan a continuación.

GRAFICA DE UNA RED:

Sea un conjunto finito  $X = \{x_i\} \ i=1, \dots, I$  y el conjunto  $Ar$  de elementos  $(x_i, x_j)$  tales que  $x_i, x_j \in X$ . La pareja  $G = [X, Ar]$  constituye una gráfica de orden  $I$ .

A cada elemento de  $X$  le corresponde un vértice de la gráfica y que representa el elemento de  $X$  al cual corresponde, a cada elemento  $(x_i, x_j) \in Ar$  le corresponde un arco en la gráfica que va del nodo  $x_i$  al nodo  $x_j$ .

MATRIZ DE INCIDENCIA NODO-ARCO

Sea la gráfica  $G = [X, Ar]$  con  $n$  arcos  $e_j$  y  $m$  nodos  $x_i$ . Se llama matriz de incidencia nodo-arco de la gráfica  $G$  a una matriz  $A = [a_{ij}]$  tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } x_i \text{ es extremo inicial de } e_j \\ -1 & \text{si } x_i \text{ es extremo final de } e_j \\ 0 & \text{si } x_i \text{ no es extremo de } e_j \end{cases}$$

FUNCION DESDE:

Se define la función  $D(j)$  como sigue: para cada arco  $j$  tal que  $a_{ij} = 1$  y  $D(j) = -1$ .

### FUNCION "HACIA"

Se define la función  $H(j)$  como sigue: para cada arco  $j$  tal que  $a_{kj} = -1$  y  $H(j) = k$ .

A partir de las definiciones anteriores, podemos ver que para cualquier arco  $j$  este puede ser descrito por la pareja ordenada  $[D(j), H(j)]$ , donde  $D(j) \neq H(j)$ .

### SUBGRAFICA

Para una gráfica  $\hat{G} = [\hat{X}, \hat{Ar}]$  en la cual  $\hat{X} \subset X$  y  $\hat{Ar} \subset Ar$ , se dice que  $\hat{G}$  es una subgráfica de  $G$ . Cuando  $\hat{X} = X$ , entonces podemos decir que  $\hat{G}$  expande a  $G$ .

### CADENA

Definimos una cadena como una serie finita

$$P = \{x_1, e_{j_1}, x_2, e_{j_2}, \dots, x_n, e_{j_n}, x_{n+1}\}$$

con por lo menos un arco; donde los  $x_i$  corresponden a nodos distintos de  $G$  y los  $e_{j_i}$  corresponden a arcos en  $G$  que cumplen que:

$$e_{j_i} \in \{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\}$$

Se dice que la cadena "une" a su primer elemento ( $x_1$ ) con el último ( $x_{n+1}$ ).

### CICLO

Un ciclo es una serie finita:

$$C = \{x_1, e_{j_1}, x_2, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}, x_{n+1}\},$$

con por lo menos 2 arcos, en donde

$$\{x_1, e_{j_1}, x_2, e_{j_2}, \dots, x_n\},$$

es una cadena en  $G$ ,  $e_{j_n} \neq e_{j_1}$  y  $x_1 = x_{n+1}$  y

$$e_{j_n} \in \{(x_n, x_{n+1}), (x_{n+1}, x_n)\},$$

#### LONGITUD DE UNA CADENA O CICLO

La longitud de una cadena o ciclo  $P$  está dada por su número de arcos.

#### ORIENTACION EN UNA CADENA O CICLO

Para cualquier cadena o ciclo  $P$ , con longitud  $n$ , se define su orientación por la serie  $O(P)$  de  $n$  elementos como sigue:

$$O_i(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } e_{j_i} = (x_i, x_{i+1}) \\ -1 & \text{si } e_{j_i} = (x_{i+1}, x_i) \end{cases}$$

$i=1, \dots, n$

#### GRAFICA ACICLICA

Una gráfica  $G$ , se dice que es acíclica, si ningún ciclo puede ser formado con  $X$  y  $Ar$ .

#### GRAFICA CONEXA

Se dice que una gráfica  $G$  es conexa, si para cualquier par de nodos distintos  $(i, j)$  de  $X$ , existe una cadena de  $X$  y  $Ar$  que los une.

**ARBOL**

Un árbol es una gráfica conexa y acíclica. Un árbol que sea una subgráfica expandida de  $G$  se dice que es un árbol expandido o árbol de expansión de  $G$ .

**GRADO DEL NODO  $i$ .**

El grado de un nodo  $i$  de una gráfica  $G$ , denotado por  $g(i)$  es el número de arcos de  $G$ , incidentes en el nodo  $i$ .

**NODO TERMINAL**

Un nodo  $k$  en un árbol con grado igual a 1 ( $g(k)=1$ ), se llama nodo terminal del árbol.

**ARCO RAIZ**

Un arco raíz se representa en una red como un arco incidente en un sólo nodo; en la matriz de incidencia nodo-arco se representa como un vector con ceros en todos los componentes excepto a la que corresponde el nodo en el que es incidente y donde tiene un "1".

**NODO RAIZ**

Es el nodo en el cual un arco raíz es incidente.

**GRAFICA ENRAIZADA**

Es aquella que tiene un nodo raíz y un arco raíz.

**ARBOL ENRAIZADO**

Es una gráfica enraizada que además es árbol.

## 2.2 Arboles y sus propiedades.

Como se dijo en la sección anterior un árbol es una gráfica conexa y acíclica, de esta definición surgen las características que hacen de un árbol la representación gráfica de la base de un problema de flujo en redes.

Las principales propiedades de un árbol, son las siguientes:

Para todo par de nodos existe una cadena que los une, dicha cadena es única y el número de arcos que forman el árbol es menor en uno al número de nodos del mismo; además de ser conexa y acíclica. Las propiedades antes citadas nos ayudan a mostrar que para la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica  $G$ , las bases que generan a esta corresponderán a árboles de expansión de  $G$  y biceversa, además de que dicha base son matrices triangulares. Todo esto nos sirve para mostrar como las operaciones requeridas en la solución de un problema de flujo en redes se pueden llevar a cabo mediante operaciones de etiquetado en el árbol. A continuación se enumeran las características y propiedades de estas gráficas.

## TEOREMA 2.1.

Sea la gráfica  $T = [X, Ar]$  con al menos un nodo, los siguientes puntos son equivalentes;

- i)  $T$  es un árbol
- ii) Para cualquier par de nodos distintos  $(p, q)$ , existe una y sólo una cadena que los une.
- iii)  $T$  tiene un arco menos que nodos y es conexa
- iv)  $T$  tiene un arco menos que nodos y es acíclica.

Prueba. i) implica ii)  $T$  es un árbol; sean  $p \neq q$  dos nodos cualesquiera de  $X$ . Sabemos que existe al menos una cadena que los une y suponemos que no es única. Sean

$$P = \{x_1, e_{j_1}, x_2, \dots, x_n, e_{j_n}, x_{n+1}\}$$

$$\bar{P} = \{\bar{x}_1, \bar{e}_{j_1}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t, \bar{e}_{j_t}, \bar{x}_{t+1}\}$$

dos cadenas distintas que unen a  $p$  y  $q$ . Sea  $i$  el mayor entero positivo tal que  $\bar{x}_i = x_i$  y  $\bar{x}_{i+1} \neq x_{i+1}$ , esto es posible dado que  $x_1 = \bar{x}_1$  y si esta  $i$  no existiera entonces  $P$  y  $\bar{P}$  no serían distintas.

Sea  $m$  el mayor entero positivo tal que  $m > i$  y para alguna  $k$  se cumple que  $x_m = \bar{x}_k$ , esto puede existir puesto que  $x_{m+1} =$

$\bar{x}_{t+1}$ . Definimos ahora la siguiente serie:



$$C = \{x_i, e_{j_i}, x_{i+1}, e_{j_{i+1}}, \dots, x_m, \bar{e}_{j_{k-1}}, \bar{x}_{k-1}, \bar{e}_{j_{k-2}}, \dots, \bar{x}_i\}$$

por construcción  $C$  es un ciclo, y esto contradice la definición de  $T$ , por lo tanto  $P$  y  $\bar{P}$  no son distintas.

ii) implica iii). Obviamente  $T$  es conexa ya que para todo par de nodos  $p, q$  en  $X$ , existe una cadena que los une. Sea  $n$  el número de nodos en  $T$ , por inducción sobre  $n$ , supongamos  $n = 2$ , como existe sólo una cadena que une a los dos únicos nodos de  $T$  entonces este tiene un sólo arco. Vemos que para  $n = 2$  iii) se cumple.

Sea  $n \geq 2$ , suponemos que iii) se cumple para toda  $m$  que satisficé  $1 \leq m \leq n$ . Se demostrará para  $n+1$ . Sea  $T$  como se indica en ii) y con  $n+1$  nodos, por ser conexa podemos formar dos conjuntos  $T_1$  y  $T_2$  no vacíos tales que ambos sean conexos y  $T_1$  esta unido a  $T_2$  por lo menos por un arco, llamemos a este  $e_r$ , además este es único puesto que si existiera otro no se cumpliría la condición de que la cadena que une a cualquier par de nodos en  $T$  es única.

Sean  $k_1$  el número de nodos en  $T_1$  y  $k_2$  el número de nodos en  $T_2$ ,  $1 \leq k_1 \leq n$  y  $1 \leq k_2 \leq n$ , puesto que  $k_1 + k_2 = n+1$ . Para estas gráficas se cumple iii) entonces  $T_1$  tiene  $k_1 - 1$  arcos y  $T_2$  tiene  $k_2 - 1$  arcos, entonces la suma de los arcos de  $t_1$  y  $t_2$  es  $k_1 + k_2 - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$ , a esto agregamos el arco que une a  $t_1$  con  $t_2$  y podemos concluir que

iii) se cumple para  $n+1$ .

iii) implica iv). Sea  $n$  el número de nodos en  $T$ , tenemos que demostrar que  $T$  es acíclica. Suponemos lo contrario.

Sea  $C$  un ciclo de  $T$  de longitud  $m$ , entonces  $C$  tiene  $m$  nodos distintos y  $m$  arcos distintos, entonces existen otros nodos en  $X$  que no están en el ciclo pues si no el número de nodos sería igual al de los arcos. Definimos

$$X^1 = \{x \in C\} \text{ y } A_r^1 = \{e_j \in C\}$$

Sea  $X^2$  el conjunto de nodos de  $X - X^1$  que están unidos con algún nodo de  $X^1$  por una cadena de longitud 1 y sea  $A_r^2$  el conjunto de arcos que son elementos de dichas cadenas. La cardinalidad de  $X^2$  es igual a la de  $A_r^2$  y  $A_r^2$  intersección  $A_r^1$  es igual al vacío.

Continuamos este proceso definiendo  $X^{i+1} = \{x \in X - \bigcup_{j=1}^i X^j \mid \text{están unidos por 1 cadena de longitud 1 a un nodo en } X^i\}$  y  $A_r^{i+1} = \{e_j \mid \text{están en la cadena que une a un nodo de } X^{i+1} \text{ con otro de } X^i\}$ .  $A_r^{i+1}$  tiene tantos arcos como nodos tiene  $X^{i+1}$  y ninguno de estos se encuentra en  $\bigcup_{j=1}^i A_r^j$ , como  $x$  es finito este proceso se detiene pero siempre se han encontrado tantos arcos como nodos, esto contradice nuestra hipótesis, por lo tanto  $E$  es acíclica.

iv) implica i).  $T$  es acíclica, falta demostrar que es conexa.

Sea  $M$  el conjunto máximo de subgráficas conexas de  $T$ . Sea  $p \in X$ , si no existe ningún arco en  $A_T$  que sea incidente en  $p$ , entonces hacemos  $T^1 = [\{p\}, \emptyset] \in M$ . Si no es así entonces algún arco  $e_j$  incide en  $p$ , hacemos  $T^2 = [\{D(j), H(j)\}, e_j]$  que es elemento de alguna subgráfica en  $M$ .

Por el razonamiento seguido en  $T^2$  se puede ver que todo arco en  $A_T$  se encuentra en algún elemento de  $M$ . Todos los miembros de  $M$  son ajenos mutuamente con respecto a sus nodos y arcos, puesto que  $M$  es el conjunto máximo. Como  $T$  es acíclica entonces cada elemento de  $M$  es acíclico, entonces son árbol.

Supongamos que  $M$  tiene al menos dos elementos entonces el número total de arcos de los elementos de  $m$  es menor en dos al número de nodos pero esto contradice iv), entonces  $M$  tiene un solo elemento que es  $T$ , por lo tanto  $T$  es conexa y es un árbol.

En el teorema 2.1 se han mostrado las principales características que definen a un árbol y sus respectivas equivalencias, estas son empleadas en la demostración de la mayor parte de las proposiciones que se enumeran mas adelante y que nos van a servir para definir el método de solución para el problema de flujo en redes.

Las proposiciones de la hoja siguiente nos indican que toda gráfica propia que sea árbol tiene por lo menos 2 nodos terminales y que si a esta gráfica se le suprime uno de sus nodos terminales y el arco incidente en él, la gráfica resultante conserva las características de un árbol. Este resultado nos servirá mas adelante para la prueba de otras proposiciones.

PROPOSICION 1. Todo árbol con al menos dos nodos, tiene por lo menos dos nodos terminales.

Prueba. Sea  $T = [X, Ar]$  un árbol con  $m \geq 2$  nodos, todos los nodos en  $T$  tienen por lo menos un arco incidente en ellos, si no  $T$  no sería conexa, entonces el grado de cada nodo es por lo menos 1. Por definición  $T$  tiene  $m-1$  arcos. Supongamos que  $T$  tiene menos de dos nodos terminales.

Caso 1.  $T$  no tiene nodos terminales, entonces para todo  $i \in X$ ,  $D(i) \geq 2$  entonces:

$$\sum_{i \in X} d(i) \geq 2m > 2(m-1)$$

contradice nuestra hipótesis.

2.  $T$  tiene 1 nodo terminal. Sea este el nodo  $j$ , entonces  $D(j) = 1$  además para todo  $i \in X - \{j\}$   $D(i) \geq 2$ , entonces:

$$\sum_{i \in X} D(i) = D(j) + \sum_{i \in X - \{j\}} D(i) \geq 1 + 2(m-1) > 2(m-1)$$

también nos lleva a una contradicción. Por lo tanto  $T$  tiene al menos dos nodos terminales.

PROPOSICION 2. Sea  $T = [X, Ar]$  un árbol con  $m \geq 2$  nodos. Si  $e_j$  es un arco terminal de  $T$  y  $e_j$  el arco de  $T$  incidente en  $i$ .

Si  $\hat{X} = X - \{i\}$  y  $\hat{Ar} = Ar - \{e_j\}$  entonces  $\hat{T} = [\hat{X}, \hat{Ar}]$  es un árbol.

Prueba.  $\hat{T}$  es una subgráfica de un árbol entonces es acíclica. La construcción  $\hat{T}$  tiene un arco menos que nodos, entonces  $\hat{T}$  es un árbol.

PROPOSICION 1. Todo árbol con al menos dos nodos, tiene por lo menos dos nodos terminales.

Prueba. Sea  $T = [X, A_T]$  un árbol con  $m \geq 2$  nodos, todos los nodos en  $T$  tienen por lo menos un arco incidente en ellos, si no  $T$  no sería conexa, entonces el grado de cada nodo es por lo menos 1. Por definición  $T$  tiene  $m-1$  arcos. Supongamos que  $T$  tiene menos de dos nodos terminales.

Caso 1.  $T$  no tiene nodos terminales, entonces para todo  $i \in X$ ,  $D(i) \geq 2$  entonces:

$$\sum_{i \in X} d(i) \geq 2m > 2(m-1)$$

que contradice nuestra hipótesis.

Caso 2.  $T$  tiene 1 nodo terminal. Sea este el nodo  $j$ , entonces  $D(j) = 1$  además para todo  $i \in X - \{j\}$   $D(i) \geq 2$ , entonces.

$$\sum_{i \in X} D(i) = D(j) + \sum_{i \in X - \{j\}} D(i) \geq 1 + 2(m-1) > 2(m-1)$$

que también nos lleva a una contradicción. Por lo tanto  $T$  tiene al menos dos nodos terminales.

PROPOSICION 2. Sea  $T = [X, A_T]$  un árbol con  $m \geq 2$  nodos.

Sea  $i$  un nodo terminal de  $T$  y  $e_j$  el arco de  $T$  incidente en  $i$ . Si  $\hat{X} = X - \{i\}$  y  $\hat{A}_T = A_T - \{e_j\}$  entonces  $\hat{T} = [\hat{X}, \hat{A}_T]$  es un árbol.

Prueba. Como  $\hat{T}$  es una subgráfica de un árbol entonces es acíclica. Por construcción  $\hat{T}$  tiene un arco menos que nodos, entonces  $\hat{T}$  es un árbol.

PROPOSICION 3. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia  $G$ . Sea  $T = [X, Ar]$  una subgráfica de  $G$  que es árbol y tiene por lo menos dos nodos, entonces:

$$\{A(j), e_j \in Ar\}$$

son linealmente independientes.

Prueba. Sea  $m$  el número de nodos de  $T$ , supongamos  $m = 2$ , entonces  $Ar$  tiene sólo un arco, lo llamamos  $e_j$  como  $A(j) = e^{D(j)} - e^{H(j)} \neq 0$ , la proposición es cierta para  $m = 2$ . Supongamos  $m > 2$ . Sea  $n$  el mayor entero tal que para todas las subgráficas de  $G$ ,  $\hat{T} = [\hat{X}, \hat{Ar}]$  que son árboles con  $k$  nodos, donde  $2 \leq k \leq n$ , se cumple que  $\{A(j), e_j \in \hat{Ar}\}$  son linealmente independientes. Sabemos que  $n \geq 2$ . Supondremos que  $m > n$  y llegaremos a una contradicción.

Por definición de  $n$  debe haber árboles  $\hat{T} = [\hat{X}, \hat{Ar}]$  con  $n + 1$  nodos para los cuales  $\{A(j), e_j \in \hat{Ar}\}$  son linealmente dependientes. Esto quiere decir que existe un conjunto  $\{v_j, e_j \in \hat{Ar}\}$  de coeficientes no todos distintos de cero para los cuales:

$$\sum_{e_j \in \hat{Ar}} v_j A(j) = 0$$

Sea  $L$  el conjunto de nodos terminales de  $\hat{T}$ ,  $L \neq \emptyset$ , sea  $p \in L$  y  $e_w$  el arco incidente en  $p$ , sean  $\bar{X} = \hat{X} - \{p\}$  y  $\bar{Ar} = \hat{Ar} - \{e_w\}$ , entonces  $\bar{T} = [\bar{X}, \bar{Ar}]$  es un árbol, como el nodo  $p$  solo tenía un arco ( $e_w$ ) incidente de  $\hat{Ar}$ ,  $a_{pj} = 0$  para todo  $e_j \in \bar{Ar}$ .

entonces para la  $p$ -ésima componente

$$\sum_{e_j \in \bar{A}r} v_j a_{pj} = v_w a_{pw} + \sum_{e_j \in \bar{A}r} v_j a_{pj} = v_w a_{pw} = 0$$

como  $a_{pw} \in \{1, -1\}$  entonces  $v_w = 0$ , pero tenemos  $\sum_{e_j \in \bar{A}r} v_j A(j) = 0$  para todo  $e_j \in \bar{A}r$ , además  $\{v_j; e_j \in \bar{A}r\}$  no son todos cero, pero  $\bar{T}$  es un árbol con  $n$  nodos y esto contradice la definición de  $n$ .

Por lo tanto  $n = m$  y todas las subgráficas de  $G$  que sean árbol tienen dicha propiedad.

Como se definió en el primer capítulo la matriz base de un problema de programación lineal es aquella formada por un conjunto de  $n$  columnas de la matriz de restricciones del problema que tienen la característica de ser linealmente independientes entre si. Siguiendo este criterio para el problema de flujo en redes, que es un caso particular de los problemas de programación lineal, necesitamos un conjunto que tenga dichas características. En la proposición siguiente se muestra que las columnas de la matriz de incidencia nodo-arco asociadas a los arcos de un árbol son linealmente independientes entre si, aunque todavía falta delinear más detalladamente las características del conjunto que será la base de nuestro problema de flujo en redes.

Por otro lado se prueba en la proposición cinco que el rango de la matriz de incidencia nodo-arco asociada a  $G$  es menor



en 1 al número de restricciones del problema, esta característica nos llevará mas adelante a agregar un elemento mas a nuestro problema para que las restricciones sean de rango completo.

PROPOSICION 4. Para toda gráfica conexa  $G = [X, A_r]$  con  $X \neq \emptyset$  existe una subgráfica que es árbol de expansión de  $G$ .

Prueba. Sea  $G$  conexa y  $n \geq 1$  el número de nodos de  $G$ . Suponemos  $n = 1$ , entonces  $A_r = \emptyset$  y esto implica que  $G$  es un árbol de expansión de si mismo. Suponemos  $n \geq 2$ , sea  $m$  el mayor entero positivo tal que existe una subgráfica de  $G$  que es árbol y tiene  $m$  nodos; cualquier subgráfica de  $G$  con un nodo es un árbol, por lo tanto  $m \geq 1$ . Suponemos  $m < n$ , por la definición de  $m$  existe una subgráfica de  $G$ ,  $T = [\hat{X}, \hat{A}_r]$  que es árbol y tiene  $m$  nodos. Como  $\hat{X}$  tiene  $m < n$  nodos entonces  $X - \hat{X} \neq \emptyset$ .

Sea  $L$  el conjunto de arcos de  $A_r$  que son incidentes en un nodo de  $\hat{X}$  y en un nodo de  $X - \hat{X}$ , el conjunto  $L \neq \emptyset$  pues  $G$  es conexa. Escogemos un arco  $e_i$  en  $L$ , entonces  $e_i$  no es elemento de  $\hat{A}_r$ , sea  $j$  el nodo en  $\{D(i) - H(i)\}$  que esta en  $X - \hat{X}$ . Hacemos  $T = [\bar{X}, \bar{A}_r]$  con  $\bar{X} = \hat{X} \cup \{j\}$  y  $\bar{A}_r = \hat{A}_r \cup \{e_i\}$ , por construcción  $\bar{T}$  es una subgráfica de  $G$  que es árbol y tiene  $m + 1$  nodos, esto contradice la definición de  $m$ , por lo tanto  $m = n$  y existe un árbol de expansión de  $G$ .

PROPOSICION 5. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia  $G$  conexa con  $n$  nodos, entonces el rango de  $A$  es  $n - 1$ .

Prueba.  $G$  tiene un árbol de expansión  $T$  pues es conexa el conjunto  $\{A(j), e_j \in T\}$  es linealmente independiente además  $T$  tiene  $n-1$  arcos, entonces el rango de  $A$  es por lo menos  $n-1$ . Como  $E.A = 0$  el rango de  $A$  es menor que  $n$ , por lo tanto el rango de  $A$  es  $n-1$ .

En la proposición tres se mostró que las columnas de la matriz de incidencia nodo-arco asociadas a los arcos de un árbol son linealmente independientes. En la proposición siguiente se da la definición inversa es decir que si se tiene un conjunto de columnas de dicha matriz que sean linealmente independientes entonces los arcos asociados a estas corresponden a un árbol. Este resultado es importante ya que de aquí se deriva la correspondencia entre base y árbol en los problemas de flujo en redes.

PROPOSICION 6. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia  $G = [X, \text{Ar}]$ , donde  $G$  tiene  $n$  nodos. Sea  $\hat{\text{Ar}} \subset \text{Ar}$  tal que  $\{A(j), e_j \in \hat{\text{Ar}}\}$  es linealmente independiente y  $\hat{\text{Ar}}$  tiene  $n-1$  arcos, entonces  $T = [X, \hat{\text{Ar}}]$  es un árbol.

Prueba. Antes de dar la demostración de esta proposición se verá el siguiente resultado.

Sea  $C = \{x_1, e_{j_1}, x_2, e_{j_2}, \dots, x_n, e_{j_n}, x_{n+1}\}$

un ciclo de una gráfica propia  $G$  con matriz de incidencia nodo-arco  $A$ , entonces  $\{A(j_i), i=1, 2, \dots, n\}$  son linealmente dependientes. Sabemos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (C) A(j_i) = e^{j_1} - e^{j_{n+1}}$$

como  $C$  es un ciclo, entonces  $e^{j_1} = e^{j_{n+1}}$ , por lo tanto existe una combinación lineal con coeficientes no todos cero de los  $\{A(j_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  que nos da al vector cero.

De lo anterior se concluye que  $T$  no puede tener ciclos pues to que las columnas asociadas son linealmente independientes, además tiene un arco menos que nodos, por lo tanto  $T$  es un árbol.

Una vez que hemos mostrado que las columnas de una matriz matriz de incidencia nodo arco asociadas a los arcos de un árbol son linealmente independientes y biceversa, generalizamos este concepto y nos referimos ahora a un árbol de expansión enraizado y a la matriz de incidencia nodo-arco le agregamos un elemento asociado al arco raíz de nuestra gráfica. En las proposiciones siguientes se prueba la correspondencia antes enunciada se sigue cumpliendo y que además se ha obtenido un conjunto generador del espacio de restricciones del problema, además se prueba que las únicas bases de nuestro problema corresponden a estos conjuntos.

PROPOSICION 7. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia conexa  $G = [X, Ar]$  con  $n$  nodos. Sea  $T = [X, \hat{Ar}]$  un árbol expandido de  $G$ , entonces

$$\Omega = \{A(j), e_j \in \hat{Ar}\} \cup \{e^\rho\},$$

con  $e^\rho$  columna correspondiente a un arco raíz con nodo raíz  $\rho$ ; expande a  $E^n$ .

Prueba. Se mostrará que  $E^n = \{e^i, i = 1, \dots, n\}$  son combinaciones lineales de los vectores de  $\Omega$ .

El vector  $e^\rho$  es combinación. Sea  $p \in \{1, \dots, n\}$  y  $p \neq \rho$ , como  $T$  es un árbol de expansión de  $G$  existe una cadena única  $P$  de longitud  $q$  en  $T$  que une al nodo  $p$  con el nodo  $\rho$ ; además:

$$\sum_{i=1}^q \theta_i(p) A(j_i) = e^p - e^\rho,$$

entonces la combinación lineal de vectores de  $\Omega$

$$e^\rho + \sum_{i=1}^q \theta_i(p) A(j_i) = e^p$$

por lo tanto  $\Omega$  expande a  $E^n$ .

PROPOSICION 8. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia enraizada  $G = [X, Ar]$  con nodo raíz  $\rho$ . Si  $\Omega$  es una base de  $[A; e^\rho]$  entonces  $e^\rho \in \Omega$  y  $T = [X, \hat{Ar}]$  es un árbol de expansión de  $G$  con  $\hat{Ar} = \{e_j \mid A(j) \in \Omega\}$ .

Prueba. Sea  $\Omega$  cualquier base de  $[A; e^\rho]$ , por la proposición 7  $[A; e^\rho]$  es de rango completo,  $A$  sola no es de rango completo, entonces  $e^\rho$  está en  $\Omega$ .

Sea  $n$  el número de nodos en  $G$ , entonces  $\hat{Ar}$  corresponde a  $n-1$  columnas linealmente independientes de  $A$ , entonces  $T$  es un árbol expandido de  $G$ .

PROPOSICION 9. Sea  $A$  la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica enraizada  $G$  con nodo raíz  $\rho$ , que es conexa. Las únicas bases de  $[A; e^\rho]$  son  $e^\rho$  con un conjunto de columnas de  $A$  correspondientes a un árbol de expansión de  $G$ .

Prueba. Sabemos que si  $T = [X, \hat{Ar}]$  es un árbol expandido de  $G$ , entonces  $\Omega = \{A(j), e_j \in \hat{Ar}\} \cup \{e^\rho\}$  expande a  $E^n$ , entonces  $\Omega$  es base de  $[A; e^\rho]$ , también sabemos que para toda base de  $[A; e^\rho]$  se tiene que  $e^\rho$  está en la base  $\Omega$  y  $T = [X, \hat{Ar}]$  es un árbol de expansión de  $G$  con  $\hat{Ar} = \{e_j \mid A(j) \in \Omega\}$ , por lo tanto queda demostrado.

Con esto queda definido que las bases de  $[A; e^\rho]$  son aquellas que corresponden a un árbol de expansión de  $G$  enraizado

cuyo nodo raíz es precisamente el nodo  $\rho$ , después de esto nos encontramos preparados para proponer un método de solución para nuestro problema.



### 2.3 Operaciones y Algoritmos en árboles.

En esta sección se muestra como realizar mediante operaciones de etiquetado en una gráfica, productos y cálculos que involucran a la matriz B asociada a un árbol.

Operación 2.1 Cálculo de  $Y = B^{-1}(A(k))$

Los arcos en T se reordenan correspondiendo a las I columnas de B:  $e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_I}$ ; las I componentes de Y se determinan de la siguiente manera.

Llamamos P al ciclo que se forma en T con el Arco  $e_k$ , entonces:

$$Y_n = \begin{cases} 0_i(p) & \text{si } e_{k_n} = e_{j_i} \in P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es decir, si el arco  $e_{k_n}$  se encuentra en el ciclo P,  $Y_n$  toma el valor 1, si sigue la dirección contraria de  $e_k$ , -1 si tienen la misma dirección y 0 si no está en el ciclo.

Algoritmo 1.1 Encuentra un nodo terminal.

Propósito: Encontrar un nodo terminal en un árbol enraizado  $T = [X, A_r]$  con nodo raíz  $\rho$ .

### Descripción

Paso 1. Inicialización. Sea  $j \in X$  un nodo cualesquiera y  $n := j$ .

Paso 2. Revisa si  $n$  es un nodo terminal. Si el grado de  $n$  es 1 termina,  $n$  es un nodo terminal, si no ir al paso 3.

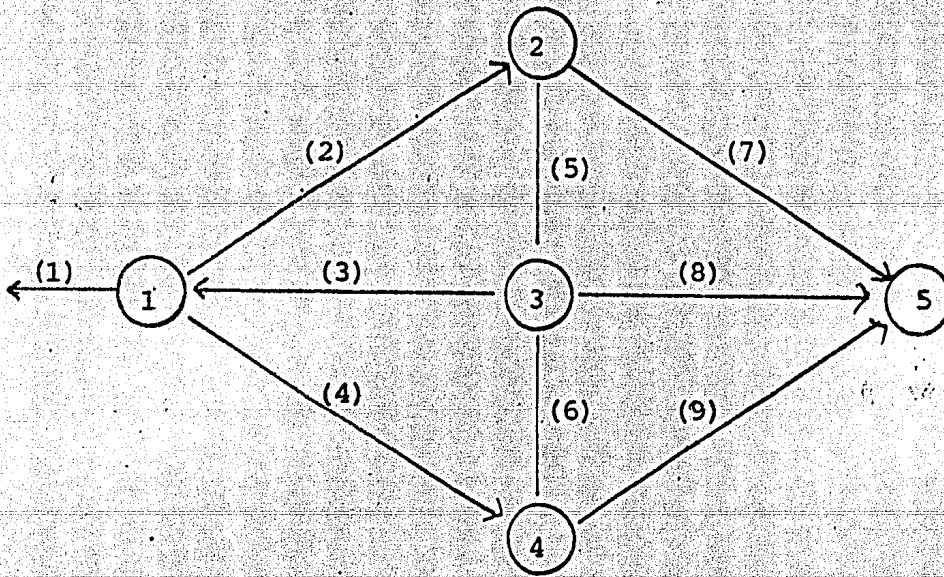
Paso 3. Arcos incidentes en  $n$ . Hacemos  $D_n = \{e_j \text{ tales que } D(j) = n\}$ , si  $D_n \neq \emptyset$  escogemos  $e_k \in D_n$  y  $n := H(k)$ , si no hacemos  $H_n = \{e_j \text{ tales que } H(j) = n\}$  y escogemos  $e_k \in H_n$  y  $n := D(k)$ . Ir al paso 2.

2.4 Ejemplos.

Los siguientes son dos ejemplos en los que se muestra la aplicación de la operación 2.1 y el algoritmo 2.1 descritos en la sección anterior. En el primer ejemplo se calcula el vector  $Y = B^{-1}A(k)$  mediante operaciones de etiquetado sobre una gráfica. El ejemplo dos muestra como se localiza un no do terminal de un árbol al ir revisando los grados de los nodos que lo forman.

Ejemplo 1.

Considérese la siguiente gráfica enraizada G:



cuya matriz de incidencia nodo-arco es:

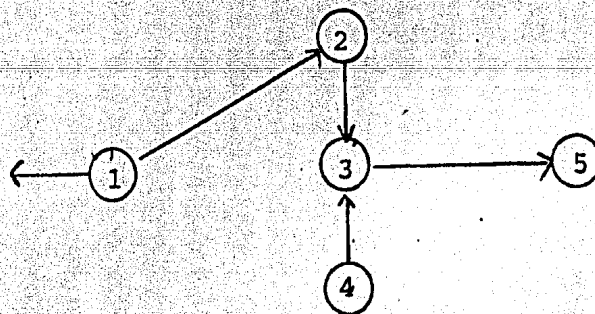
arco:            1    2    3    4    5    6    7    8    9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

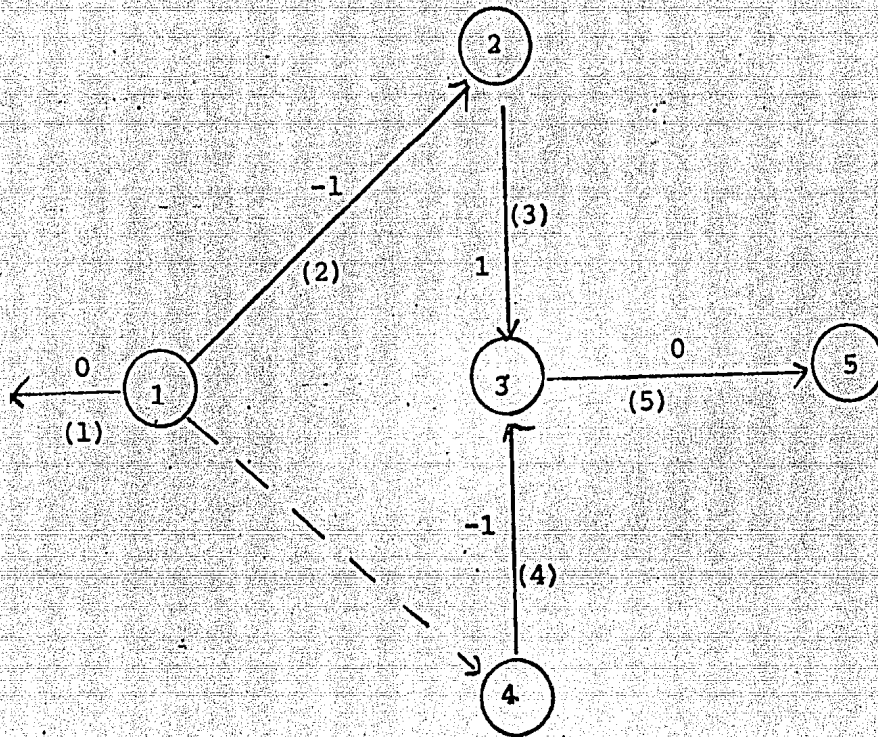
y sea B su base correspondiente como sigue:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con el árbol asociado T:



Para calcular  $Y = B^{-1} A(4)$  se realiza la siguiente operación de etiquetado

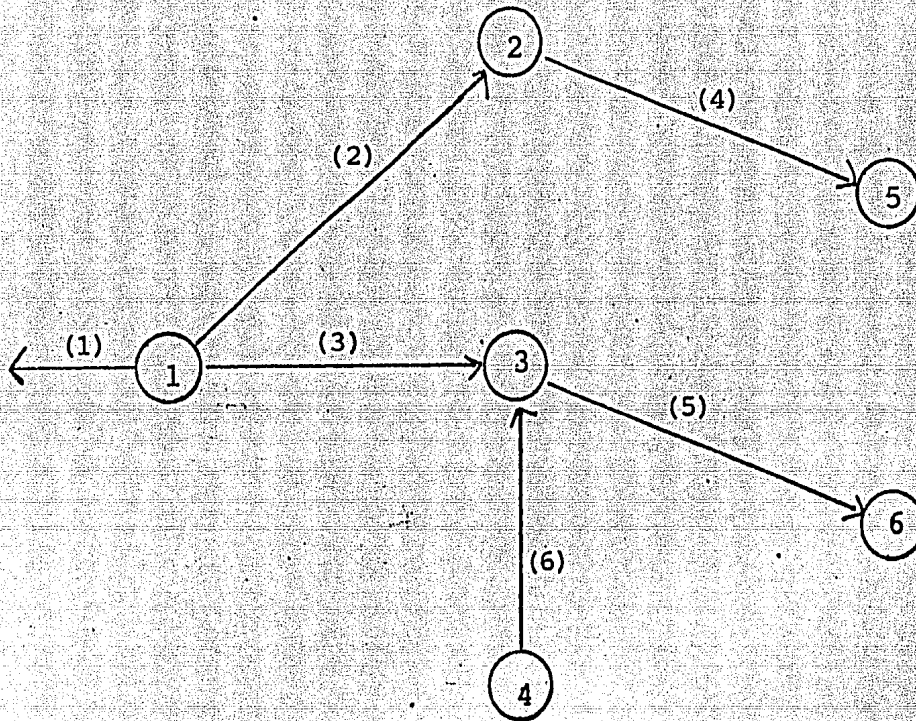


es decir:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.

Sea  $T$  el siguiente árbol enraizado:



deseamos encontrar un nodo terminal.

Iteración 1.

Sea  $n = 1$   $g(1) = 3$ , entonces hacemos:

$D_1 = \{1, 2, 3\}$  y escogemos un arco en  $D_1$  sea este el arco (2)

y  $n := H(2) = 2$

Iteración 2.

$n = 2$ ,  $g(2) = 2$ , entonces hacemos:

$D_2 = \{4\}$  y escogemos un arco en  $D_2$ , este será el arco (4) y

$$n: = H(4) = 5$$

Iteración 3.

$n = 5$ ,  $g(5) = 1$ , este es un nodo terminal de  $T$ .

## CAPITULO III

## MÉTODO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES

A partir del desarrollo del método simplex por George Dantzig en 1947, los modelos de redes de flujo se han estudiado en forma extensiva, dado que hay numerosas aplicaciones de estos modelos. La estructura de las redes puede ser explotada para el desarrollo de algoritmos que son más eficientes que los generales, además de que geoméricamente la representación gráfica se hace en dos dimensiones, lo que simplifica su comprensión para aquellas personas ajenas al tema.

Dentro de la programación lineal, al encontrarnos con problemas que pueden ser planteados en términos de una red, se pueden aprovechar las ventajas que dan las características particulares de estas; de esta manera si se tiene un problema como el siguiente:

Minimizar  $cx$

Sujeto a:  $Ax + a e^p = r$

$0 \leq x \leq u, 0 \leq a \leq 0$





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Donde  $A$  es la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica  $G$  conexa y  $\rho$  es cualquier entero positivo no mayor al número de nodos  $n$ , " $a$ " es un arco raíz y  $\rho$  es el nodo raíz. Estos últimos son necesarios puesto que  $A$  no es de rango completo y  $[A : e^\rho]$  si.

En el presente capítulo se mostrará una especialización del método simplex para redes con variables acotadas.

### 3.1 Caracterización de la base.

En el capítulo anterior se demostró que las únicas bases del sistema  $A^* = [A \ ; \ e^1]$ , donde  $A^*$  es la matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica conexa enraizada con nodo raíz 1, son  $e^1$  con un conjunto de columnas de  $A$  correspondientes a un árbol de expansión.

A continuación se enuncia un teorema que establece la caracterización de cualquier base de  $[A \ ; \ e^1]$ , la cual es triangular, el procedimiento que se sigue para probar esto es precisamente el que se sigue para triangularizar una base de este tipo. Sabiendo que la base de una red conexa enraizada es triangular, se examinarán las operaciones del método Simplex que involucran a dicha base o a su inversa.

TEOREMA 3.1 Sea A matriz de incidencia nodo-arco de una gráfica propia G con nodo raíz 1, conexa. Sea B cualquier base de  $[A; e^1]$ , entonces B es triangular.

Prueba. Sea  $T = [X, Ar]$  el árbol de expansión enraizado asociado a B es n el número de nodos de T como G es una gráfica propia  $n \geq 2$ . T tiene al menos dos nodos terminales. Sea  $n_1$  un nodo terminal de T que no es el nodo raíz y  $e_{j_1}$  el arco incidente en  $n_1$  de T, entonces el renglón  $n_1$  de B tiene un solo elemento diferente de cero; hagamos que el primer renglón y la primera columna de B corresponden al nodo  $n_1$  y al arco  $e_{j_1}$  entonces se tendrá B como sigue:

$$\begin{array}{c}
 e_{j_1} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \pm 1 & & & & & 0 \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 \pm e^s & & & & & B^1
 \end{array} \right] \text{ nodo } n_1
 \end{array}$$

Sea  $T^1 = [X - \{n_1\}, Ar - \{e_{j_1}\}]$  entonces  $T^1$  es un árbol con  $n-1$  arcos, si  $n-1 = 1$  entonces  $B^1$  es  $1 \times 1$  y B es triangular. Suponemos  $n-1 > 1$  entonces  $T^1$  tiene al menos dos nodos terminales, sea  $n_2$  un nodo terminal de  $T^1$  que no es raíz y sea  $e_{j_2}$  el arco incidente en el, entonces el renglón  $n_2$  de  $B^1$  tiene un elemento diferente de cero, hagamos que el primer renglón y la primera columna de  $B^1$  corresponden a  $n_2$  y  $e_{j_2}$  B queda como sigue:

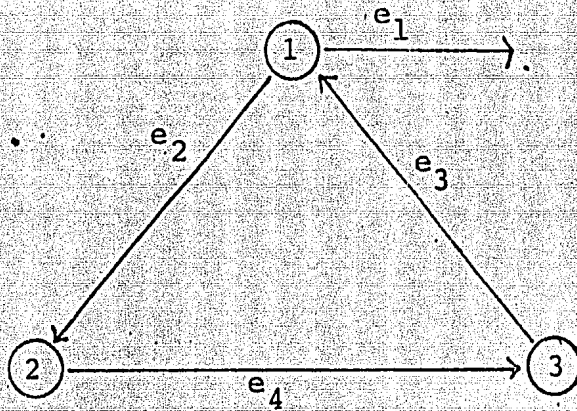
$$\begin{array}{cccc}
 & e_{j_1} & & e_{j_2} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 \pm 1 & & & 0 & & 0 \\
 & & & & & \\
 \pm e^{s_1} & & & \pm 1 & & 0 \\
 & & & & & \\
 & & & \pm e^{s_2} & & B^2
 \end{array} \right] & \text{nodo } n_1
 \end{array}$$

Repitiendo este proceso  $n$  veces tendríamos a  $B$  como sigue:

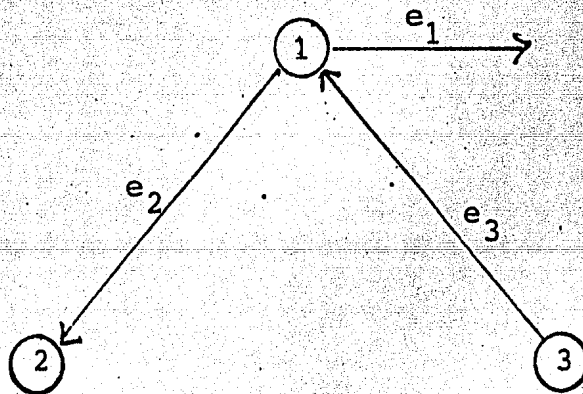
$$\begin{array}{cccccc}
 & e_{j_1} & e_{j_2} & \dots & e_{j_n} & e_{\rho} \\
 \left[ \begin{array}{cccc|ccc}
 \pm 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & \\
 & & \pm 1 & & & & \\
 \pm e^{s_1} & & \pm e^{s_2} & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & \pm 1 & \\
 & & & & & \pm e^{s_n} & \pm 1
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{nodo } n_1 \\ \text{nodo } n_2 \\ \dots \\ \text{nodo } n_n \\ \text{nodo raiz} \end{array}
 \end{array}$$

Por lo tanto  $B$  es triangular.

Ejemplo. Sea la gráfica dirigida



y el siguiente árbol de expansión enraizado:



su base es:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nodo 1} \\ \text{nodo 2} \\ \text{nodo 3} \end{array}$$

e<sub>1</sub> e<sub>2</sub> e<sub>3</sub>

tomamos primero el nodo terminal 2 y movemos los renglones y columnas de B

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & 0 \\ -1 & & 1 & & 1 \\ 0 & & -1 & & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{nodo 2} \\ \text{nodo 1} \\ \text{nodo 3} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_2 & e_3 & e_1 \end{array} & \end{array}$$

Tomamos ahora el nodo terminal 3 y B nos queda como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{nodo 2} \\ \text{nodo 3} \\ \text{nodo 1} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_2 & e_3 & e_1 \end{array} & \end{array}$$

y esta matriz tiene ya la forma triangular inferior.

### 3.2 Especialización del método Simplex primal.

A partir de que la base  $B$  de un problema de flujo en redes es de forma triangular, examinamos las operaciones del método primal simplex para poder simplificar las operaciones que involucran a  $B$  o su inversa, con el propósito de encontrar la solución óptima a un problema de flujo en redes con cotas superiores.

Inicialización. Para comenzar a aplicar el método primal Simplex se requiere de una solución básica factible inicial y la base correspondiente a esta, sea  $[x^B ; x^N]^t$  la solución inicial y  $T$  su base correspondiente. La suma de obtener esta solución inicial se muestra mas adelante en el punto 3.3.

Pivoteo. Es necesario determinar cual de las variables no básicas deberán ingresar a la base para mejorar la solución que se tiene, para llevar a cabo esta selección se calculan primero las variables duales  $\Pi = C^B B^{-1}$  usando el algoritmo 3.1, una vez obtenidas estas se forman los siguientes conjuntos:

$$\psi_1 = \{e_j, x_j = 0 \text{ y } \Pi_{D(j)} - \Pi_{H(j)} - c_j > 0\}$$

$$\psi_2 = \{e_j, x_j = u_j \text{ y } \Pi_{D(j)} - \Pi_{H(j)} - c_j < 0\}$$



Si la unión de ambos conjuntos es vacía la solución es óptima, si no es así seleccionamos un elemento de esta unión como candidato para entrar a la nueva base en la siguiente iteración. La estrategia para decidir cual se selecciona primero se muestra en la sección 3.3.

Seleccionamos entonces  $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$  y hacemos

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } e_k \in \psi_1 \\ -1 & \text{si } e_k \in \psi_2 \end{cases}$$

$\delta$  nos indica si la variable que seleccionamos tiene el valor de su cota inferior o el de su cota superior.

Incremento de flujo: Como  $T$  es un árbol, existe una cadena única  $p$  que une los nodos  $D(k)$  y  $H(k)$ , entonces:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i(p) A(i) = e^{D(k)} - e^{H(k)}$$

Se observa que para el cálculo de  $Y = B^{-1}A(k)$  se deben reordenar los arcos en  $T$  como sigue:

$$e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_I}$$

correspondiendo a las  $I$  columnas de  $B$ , entonces los  $I$  elementos de  $Y$  se determinan de la siguiente manera:

Si la unión de ambos conjuntos es vacía la solución es óptima, si no es así seleccionamos un elemento de esta unión como candidato para entrar a la nueva base en la siguiente iteración. La estrategia para decidir cual se selecciona primero se muestra en la sección 3.3.

Seleccionamos entonces  $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$  y hacemos

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } e_k \in \psi_1 \\ -1 & \text{si } e_k \in \psi_2 \end{cases}$$

$\delta$  nos indica si la variable que seleccionamos tiene el valor de su cota inferior o el de su cota superior.

Incremento de flujo: Como  $T$  es un árbol, existe una cadena única  $p$  que une los nodos  $D(k)$  y  $H(k)$ , entonces:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i(p) A(i) = e^{D(k)} - e^{H(k)}$$

Se observa que para el cálculo de  $Y = B^{-1}A(k)$  se deben reordenar los arcos en  $T$  como sigue:

$$e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_I}$$

correspondiendo a las  $I$  columnas de  $B$ , entonces los  $I$  elementos de  $Y$  se determinan de la siguiente manera:

$$y_n = \begin{cases} 0_i(P) & \text{si } e_{k_n} = e_{j_i} \in P \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, los elementos de  $Y$  pueden tomar los valores de 0, 1 y -1; ahora podemos calcular el incremento de flujo que tendrán los arcos en  $P$  a partir del siguiente criterio.

$$\Delta_1 = \min \{x_j, \infty \text{ con } Y_j = \delta\}$$

$$\Delta_2 = \min \{u_j - x_j, \text{ con } Y_j = -\delta\}$$

y finalmente  $\Delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_k\}$  es el incremento que se hará a la nueva solución.

Actualización de Flujo. A la variable  $x_k$  se le asigna el valor que tenía más  $(\delta\Delta)$  y a todos los elementos de la cadena  $P$  se les cambia el flujo que tienen siguiendo la fórmula:

$$x_j = x_j - \Delta \delta 0_j^{(p)}$$

Si el incremento  $\Delta$  es igual a la cota superior de la variable  $x_k$  la base no se altera y se escoge otra variable no básica para que ingrese a la base.

Actualización de la base. Una vez que sabemos cual variable entra a la base debemos seleccionar una de las variables básicas para que sea sustituida por la nueva variable, el criterio que se sigue es el siguiente, de los elementos de la cadena  $P$  se forman los siguientes conjuntos:

$$\psi_3 = \{e_{j_i}, x_i = 0 \text{ y } 0_j(P) = \delta\}$$

$$\psi_4 = \{e_{j_i}, x_i = u_i \text{ y } 0_j(P) = \delta\}$$

y se escoge  $e_m \in \psi_3 \cup \psi_4$  para que sea reemplazada por  $e_k$  en  $T$  y se siguen obteniendo nuevas soluciones hasta llegar al óptimo.

La convergencia de este algoritmo se deriva de la convergencia del método simplex.

### 3.3 Aspectos especiales.

Solución inicial. En el punto de inicialización de la sección 3.2 se asume que podemos encontrar una solución básica factible con la cual iniciamos los cálculos para encontrar la solución óptima. Existen numerosas estrategias para conseguir la solución inicial como la llamada "inicio con todas las variables artificiales". En este método, sólo los arcos artificiales tienen flujo. Las otras estrategias asignan el flujo a una combinación de los arcos artificiales y los originales.

Supongamos que la red asociada a nuestro problema tiene  $I$  nodos. El inicio de la estrategia con todas las variables artificiales implica alargar la red agregando primero un nodo  $I + 1$ . Para cada nodo  $i$  con oferta  $r_i$  extendemos un arco de  $i$  a  $I+1$  con costo igual a cero y cota superior infinita; el flujo en este arco será  $r_i$ , para satisfacer la conservación de flujo en el nodo  $i$ . Para cada nodo  $k$  con demanda  $|r_k|$  se extiende un arco artificial de  $I+1$  a  $k$ , con costo igual a uno y cota superior infinita, el flujo en este arco será  $|r_k|$ , para satisfacer la conservación de flujo en el nodo  $k$ .

La función objetivo de nuestro problema original no se considera en la obtención de la solución inicial, en lugar de esta se tendrá la suma de los costos de los arcos artificiales

que transportan flujo a los nodos con demanda y el óptimo se alcanzará cuando la función objetivo tenga valor cero, es decir, cuando ninguno de los arcos artificiales tenga flujo. A continuación se muestra un ejemplo de como se obtiene la solución inicial de un problema de flujo en redes.

Consideramos el siguiente sistema:

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

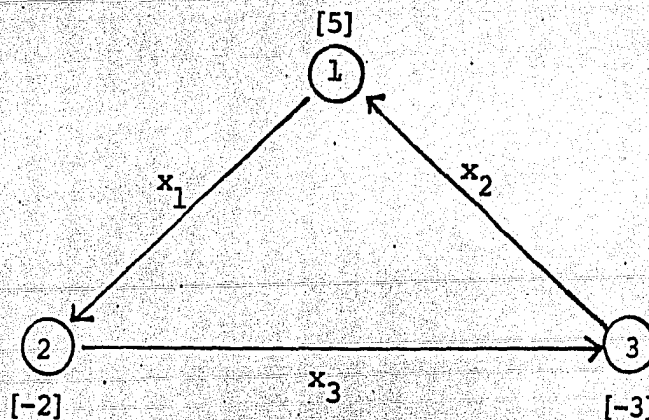
$$\text{sujeto a: } -x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 - x_3 = -2$$

$$-x_2 + x_3 = -3$$

$$0 \leq x_1 \leq 5; \quad 0 \leq x_2 \leq 3; \quad 0 \leq x_3 \leq 1.$$

Su gráfica es:



la solución inicial se obtiene resolviendo el siguiente sistema:

$$\min z = x_5 + x_6$$

sujeto a:

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 5$$

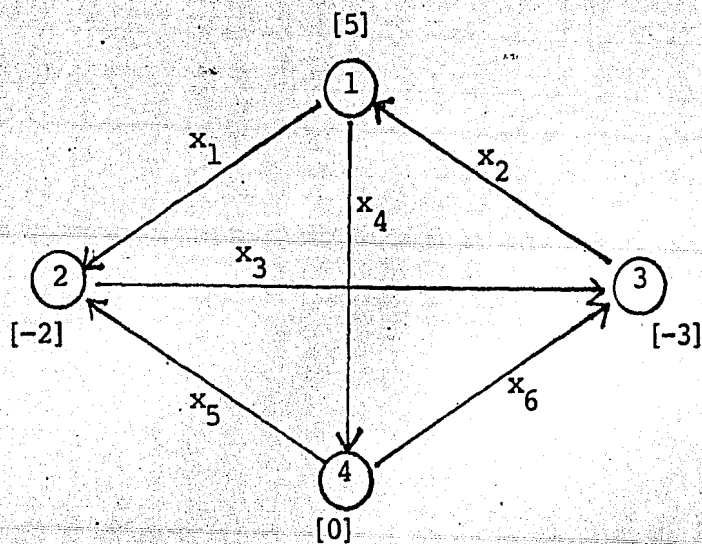
$$-x_3 + x_5 = -2$$

$$+x_6 = -3$$

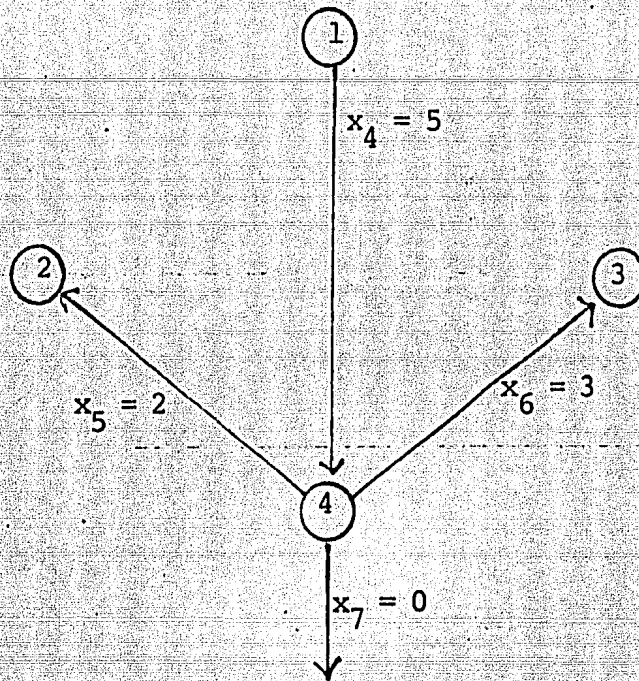
$$x_4 - x_5 + x_6 = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1, 0 \leq x_4, x_5, x_6 \leq \infty$$

su gráfica es:

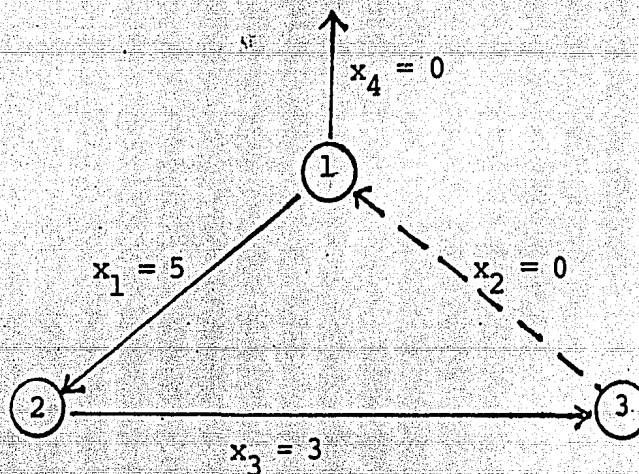


A esta gráfica le agregamos un arco raíz, escogemos como nodo raíz al nodo cuatro; la solución básica inicial será:



y las demas variables con valor cero.

Ya con estos elementos se aplica el método de solución mostrado en la sección 3.2, la solución inicial obtenida es:



y con esta podemos continuar aplicando el método simplex especializado en redes hasta llegar al óptimo.



Estrategia del pivoteo. Decimos que un arco  $e_j$  es candidato de entrar a la base si  $e_j \in \psi_1 \cup \psi_2$ . Pero sin embargo no siempre hay un sólo elemento en este conjunto. Para seleccionar cual de todos los  $e_j$  será el primero en entrar a la base se sugiere la siguiente estrategia: aquel  $e_j \in \psi_1 \cup \psi_2$  que tenga el mayor valor de  $|\Pi_D(j) - \Pi_H(j) - c_j|$  será preferido a los demas.

Para las siguientes iteraciones se tiene que el último elemento escogido se encuentra en la posición  $k$ , la búsqueda del elemento a escoger en dicha iteración comienza en la posición  $k+1$ , cuando se llega al último (I), la selección se continúa en la posición 1.

El método simplex especializado en redes termina cuando ya no hay ningún candidato por entrar en la base, es decir cuando  $\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$ , que es cuando se ha alcanzado el óptimo.

Algoritmo 3.1. Cálculo de las variables duales.

Propósito: Resolver el sistema  $\Pi B = c^B$  para obtener el valor de las variables duales donde B es la base asociada a un árbol  $T = [x, Ar]$  con nodo raíz,  $\rho$ .

Descripción

Paso 1. Inicialización

$$\Pi_{\rho} := 0; X^L := \{\rho\}; X^U := X - \{\rho\}.$$

Paso 2. Encuentra un arco con nodo etiquetado "Hacia".

Escogemos  $e_j \in Ar$  tal que  $D(j) \in X^U$  y  $H(j) \in X^L$ , si este no existe ir al paso 4.

Paso 3. Nodo etiquetado "desde".

$$\Pi_{D(j)} := c_j + \Pi_{H(j)}; X^L := X^L \cup \{D(j)\}; X^U := X^U - \{D(j)\}. \text{ ir al paso 2.}$$

Paso 4. Encuentra un arco con nodo etiquetado "Desde".

escogemos  $e_j \in Ar$  tal que  $H(j) \in X^U$  y  $D(j) \in X^L$ , si no existe terminar.

Paso 5. Nodo etiquetado "hacia"

$$\Pi_{H(j)} := -c_j + \Pi_{D(j)}; X^L := X^L \cup \{H(j)\}; X^U := X^U - \{H(j)\}. \text{ ir al paso 2.}$$

### Algoritmo 3.2. Cálculo de columna de cambio.

**Propósito:** Resolver el sistema  $By = d$  (para obtener la columna de cambio) donde  $B$  es una base de  $[A ; e^p]$  y  $T = [X, A_r]$  es su árbol de expansión enraizado correspondiente.

#### Descripción

- Paso 1. Inicialización.** Se renumeran los arcos de tal manera que la  $j$ -ésima columna de  $B$  corresponda a un arco  $e_j$ .
- Paso 2. Encuentra nodo terminal.** Sea  $n$  cualquier nodo terminal de  $T$ , (el nodo raíz se considera también como terminal si el único arco incidente en él es el arco raíz) y sea el arco  $e_j$  el incidente en el nodo  $n$ .
- Paso 3. Cálculo de  $y_j$ .** Si  $D(j) = n$ , entonces  $y_j := d_j$  y  $\delta := -1$ , si no  $y_j := -d_j$  y  $\delta := 1$ .
- Paso 4. Revisar para terminar.** Si  $n = p$  termina, si no  $X := X - \{n\}$  y  $A_r := A_r - \{e_j\}$ .
- Paso 5. Actualización de  $d$ .** Si  $\delta = -1$  entonces  $d_{D(j)} := d_{D(j)} - y_j$  si no  $d_{H(j)} := d_{H(j)} + y_j$ . Ir al paso 2.

Paso 4. Actualización de flujo.  $x_k := x_k + \Delta \cdot \delta$ , para todos los  $e_{j_i} \in P$  hacemos  $x_{j_i} := x_{j_i} - \Delta \cdot \delta \cdot 0_i(P)$ .  
Si  $\Delta = u_k$  ir al paso 2.

Paso 5. Actualización de la base. Definimos

$$\psi_3 = \{e_{j_i} \text{ con } x_{j_i} = 0 \text{ y } 0_i(P) = \delta\},$$

$$\psi_4 = \{e_{j_i} \text{ con } x_{j_i} = u_{j_i} \text{ y } -0_i(P) = \delta\};$$

escogemos  $e_m \in \psi_3 \cup \psi_4$  y reemplazamos  $e_m$  por  $e_k$  en  $T$ .

Ir al paso 2.

### Algoritmo 3.3. Método Simplex especializado en Redes.

Propósito: Encontrar la solución óptima de un problema de flujo en redes con variables acotadas.

#### Descripción

Paso 1. Inicialización. Sea  $[x^B; x^N]^t$  una solución básica factible con árbol base  $T$ .

Paso 2. Pivoteo. Calcular  $\Pi = C^B B^{-1}$  utilizando el algoritmo 2.1. Se definen los siguientes conjuntos:

$$\psi_1 = \{e_j, x_j = 0 \text{ y } \Pi_{D(j)} - \Pi_{H(j)} - c_j > 0\}$$

$$\psi_2 = \{e_j, x_j = u_j \text{ y } \Pi_{D(j)} - \Pi_{H(j)} - c_j < 0\}$$

si  $\psi_1 \cup \psi_2 = \emptyset$  la solución es óptima, si no seleccionamos  $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$  como candidato para entrar a la base y hacemos  $\delta = 1$  si  $e_k \in \psi_1$ ,  $\delta = -1$  si  $e_k \in \psi_2$ .

Paso 3. Incremento de flujo. Sea  $P = \{s_1, e_{j_1}, s_2, e_{j_2}, \dots, s_n, e_{j_n}, s_{n+1}\}$  la única cadena en  $T$  que une a  $D(k)$  con  $H(k)$ . Calculamos  $y$  como sigue:  $y_j = 0_i(P)$  si  $e_{k_n} = e_{j_1} \in P$ ,  $y_j = 0$  en otro caso. Para calcular el incremento de flujo hacemos:

$$\Delta_1 = \min \{x_{j_i}, \infty; \text{ con } 0_i(P) = \delta\}; \quad \Delta_2 = \min \{u_{j_i} - x_{j_i}, \infty; \text{ con } 0_i(P) = -\delta\}$$

y finalmente el incremento de flujo es  $\Delta = \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_k\}$ .

$$\psi_3 = \{e_{j_i}, x_i = 0 \text{ y } 0_j(P) = \delta\}$$

$$\psi_4 = \{e_{j_i}, x_i = u_i \text{ y } -0_j(P) = \delta\}$$

y se escoge  $e_m \in \psi_3 \cup \psi_4$  para que sea reemplazada por  $e_k$  en  $T$  y se siguen obteniendo nuevas soluciones hasta llegar al óptimo.

La convergencia de este algoritmo se deriva de la convergencia del método Simplex.

### 3.5 Ejemplos.

Los siguientes son ejemplos en los que se muestra la aplicación del método Simplex especializado en redes y de los algoritmos mostrados en la sección anterior. Se han incluido dos ejemplos en los que se muestra el cálculo de la solución inicial para mostrar los pasos que se siguen en cada iteración.

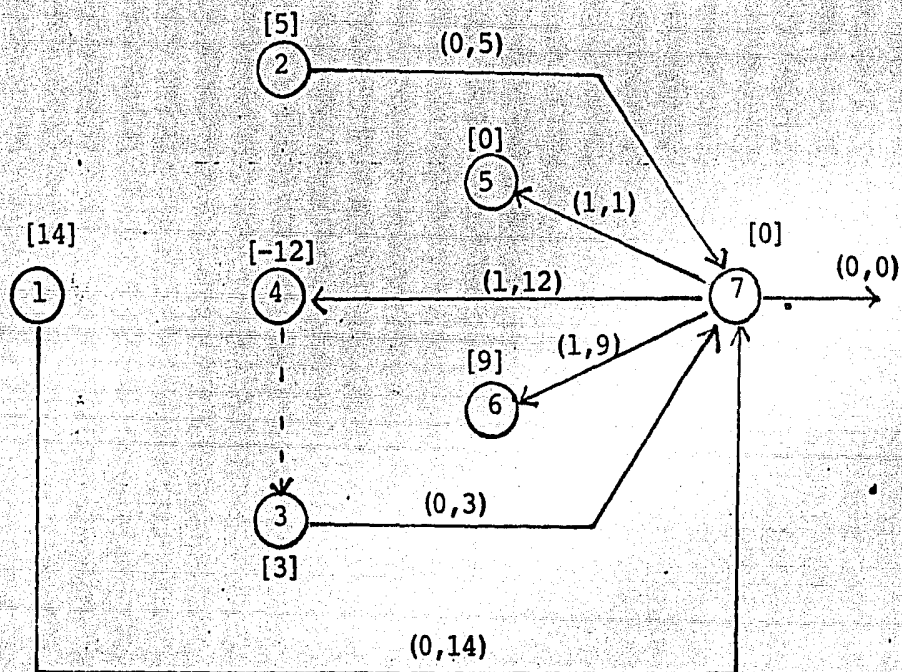
Ejemplo 1. Considere el problema de flujo a costo mínimo mostrado en la siguiente tabla:

Nodo	Oferta	Demanda
1	14	0
2	5	0
3	3	0
4	0	12
5	0	1
6	0	9

Arco $j$	$u_j$	$c_j$	$D(j)$	$H(j)$
1	10	1	1	2
2	8	4	1	4
3	12	0	1	3
4	7	2	4	2
5	13	0	4	3
6	10	1	3	6
7	6	0	5	4
8	12	2	2	5
9	8	5	5	6



Para obtener una solución inicial factible aplicamos el procedimiento mostrado en la sección 3.3. Agregamos a nuestra red los arcos artificiales requeridos; y el nodo en el que inciden (7)



Se ilustran en esta gráfica los requerimientos de cada nodo  $[r_i]$  y el costo y flujo de cada arco artificial  $j$   $(c_j, f_j)$ .

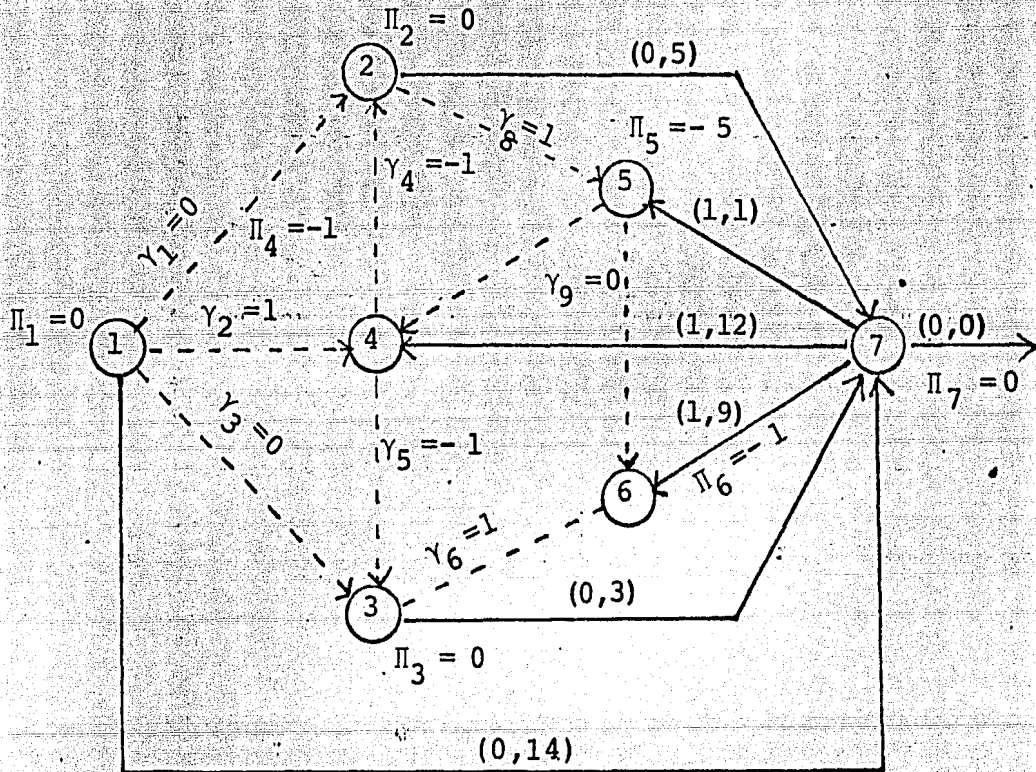
Resolvemos este problema de flujo a costo mínimo considerando a los arcos de nuestro problema inicial con costo y flujo igual a cero y tomamos como solución inicial la mostrada en la gráfica anterior:

Con estos datos podemos aplicar el algoritmo 3.4 para encontrar la solución óptima.

Iteración 1.

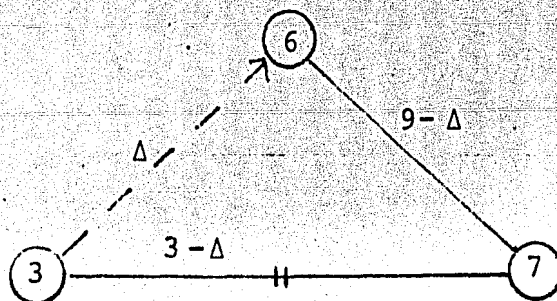
Cálculo de las variables duales  $\Pi = C^B B^{-1}$

Aplicamos el algoritmo 2.1



$$\gamma_j = \Pi_D(j) - \Pi_H(j) - c_j$$

Las variables factibles de entrar a la base son  $x_2, x_6$  y  $x_8$ , tomemos a  $x_6$ , al introducir esta variable se forma el siguiente ciclo y el incremento de flujo esta dado por  $\Delta$

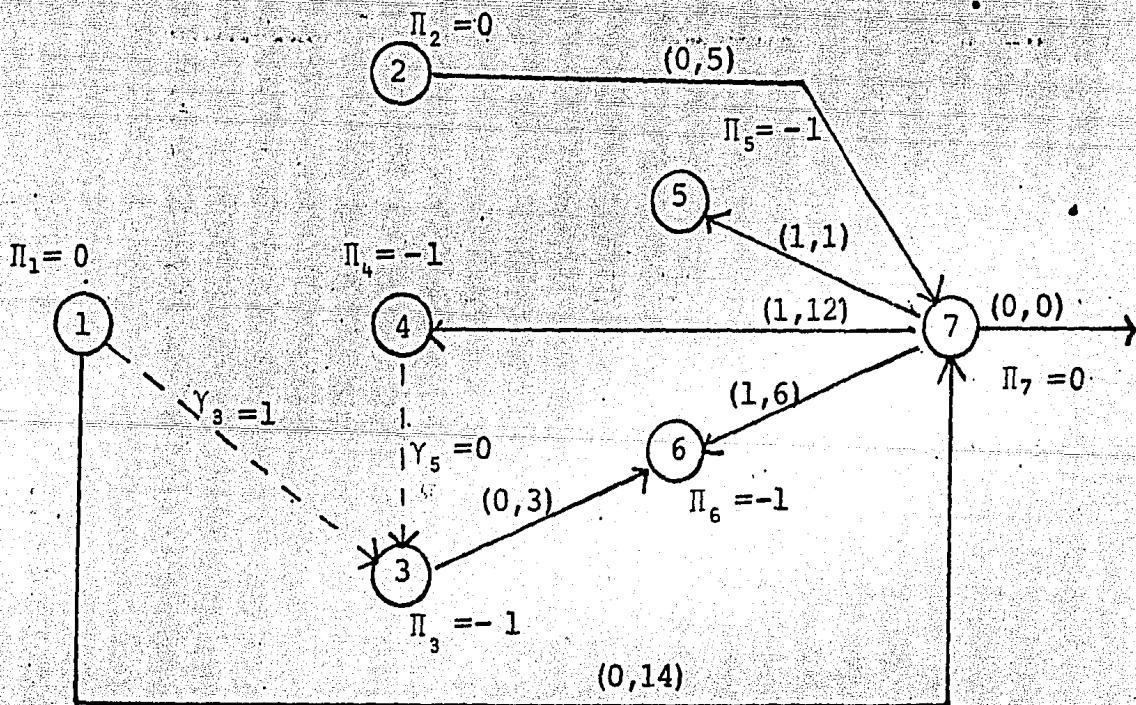


entonces  $\Delta = 3$  y sale el arco que va del nodo 3 al 7.

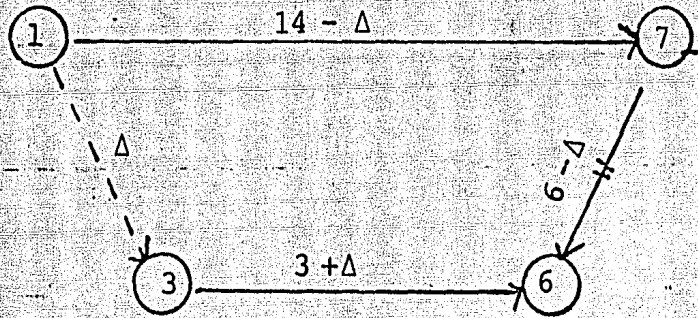
Una vez obtenidas la nueva solución y su base pasemos a la siguiente iteración.

Iteración 2.

Cálculo de las variables duales:



Los valores de  $\gamma$  son iguales que en la iteración anterior salvo aquellos que corresponden a los arcos que inciden en el nodo 3, entonces las variables factibles de entrar a la base son:  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ , tomamos a  $x_1$ : al introducir esta variable a la base el ciclo que se forma es el siguiente:

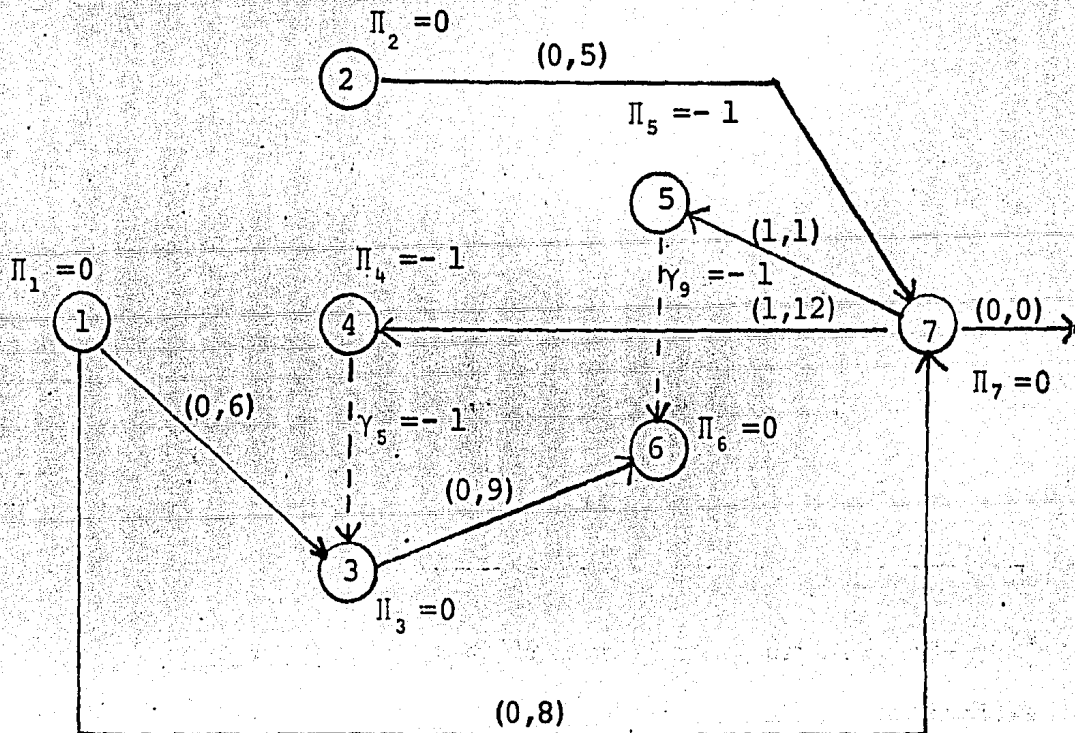


$\Delta = \min \{12, (10-3), 6, 14\} = 6$

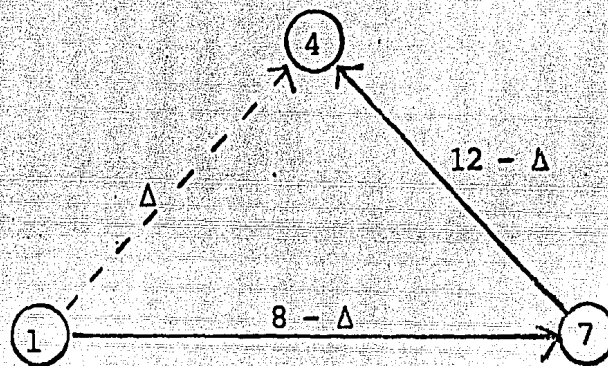
por lo que sale el arco que va del nodo 7 al 6 y  $x_1 = 6$ ,  $x_6 = 9$ , el flujo del nodo 1 a 7 será 8 y esto nos da una nueva solución, con su árbol base respectivo.

Iteración 3.

Calculamos las variables duales:



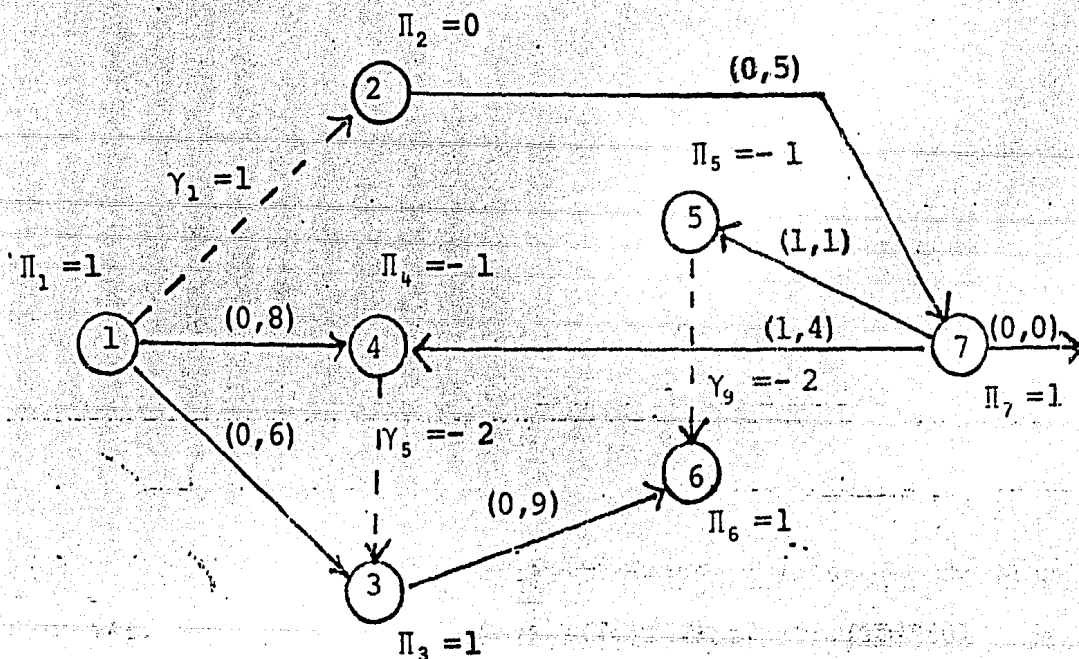
los valores de gama solo cambian con respecto a los de la iteración anterior cuando corresponden a los arcos que inciden en los nodos 3 y 6, entonces las variables factibles de entrar a la base son:  $x_2$  y  $x_8$  escogemos a  $x_2$  y el ciclo que se forma es el siguiente:



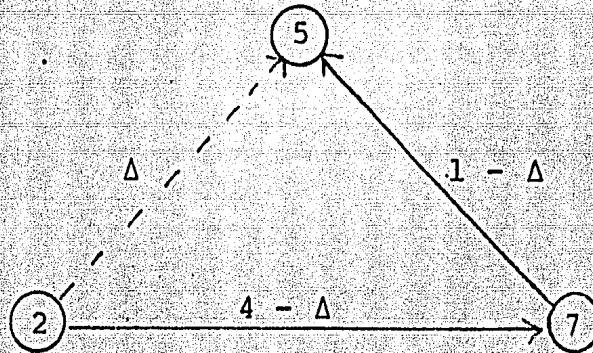
$$\Delta = \min \{8, 12, 8\} = 8$$

y el arco que sale del árbol es el que va del nodo 1 al nodo 7.

Iteración 4.



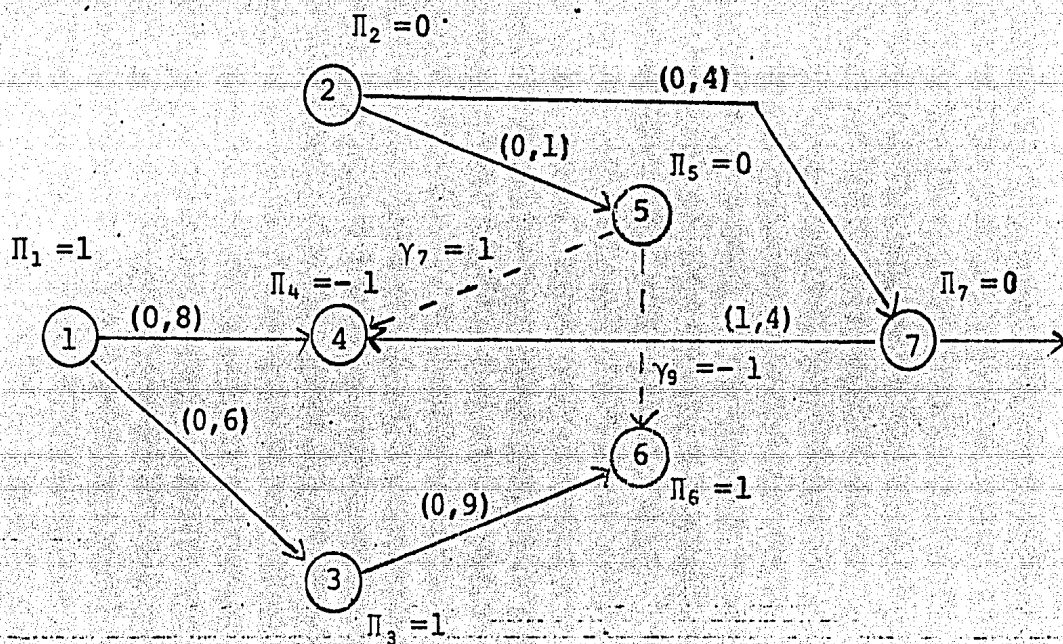
Las variables factibles de entrar a la base son:  $x_1$  y  $x_8$   
 tomamos a  $x_8$  el ciclo que se forma es:



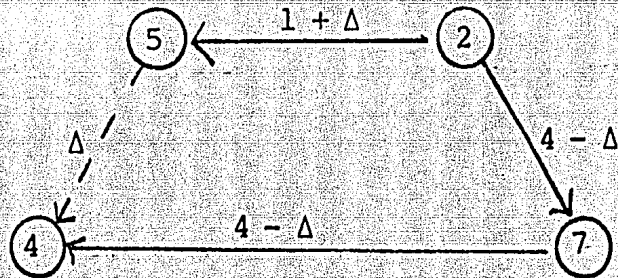
$$\Delta = \min \{12, 1, 4\} = 1$$

Sale el arco que va del nodo 7 al nodo 5;  $x_8 = 1$  y el flujo  
 en el arco que va del nodo 2 al nodo 7 será 3

Iteración 5.

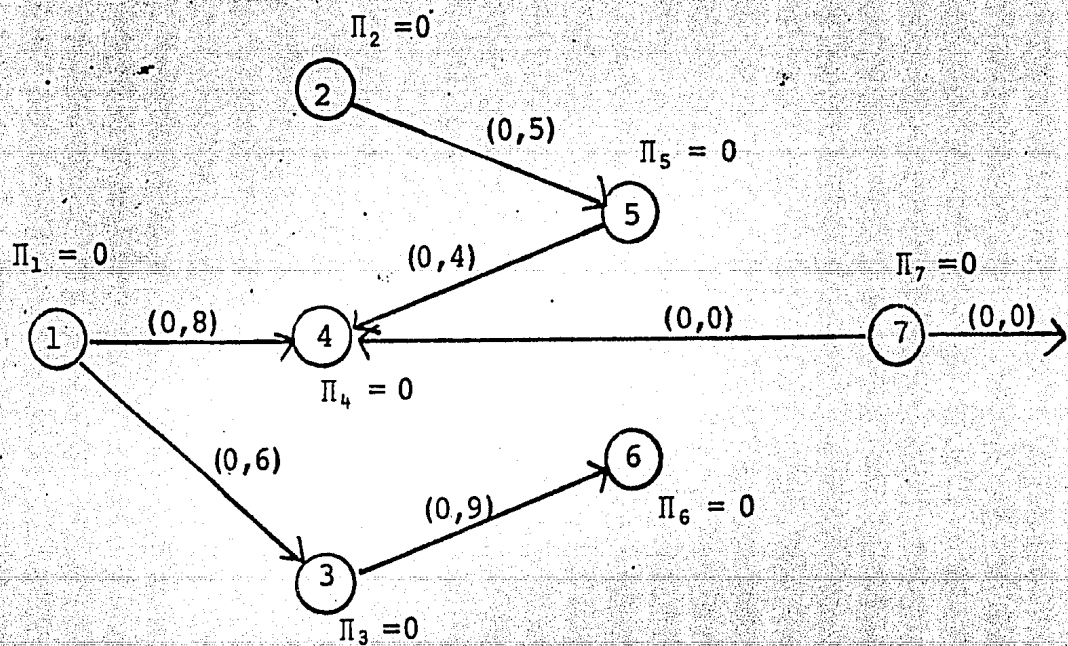


Las variables factibles de entrar a la base son  $x_1$  y  $x_7$  tomamos  $x_7$  y el ciclo que se forma en el árbol es:



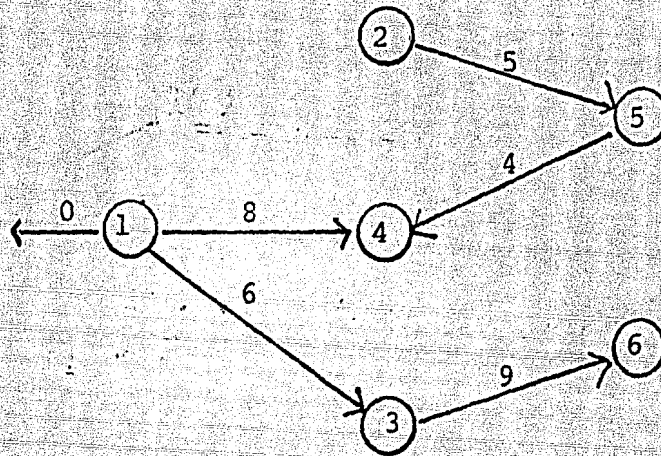
$$\Delta = \text{Min} \{6, 4, 4, 12-1\} = 4$$

La solución que se obtiene es la siguiente:



como  $\Pi = \bar{0}$ ,  $\gamma_j = 0 \forall j = 1, \dots, 7$  esto implica que  $\psi_1, \psi_2 = \phi$ , por lo tanto se tiene una solución óptima a este problema y una solución inicial para el problema original.

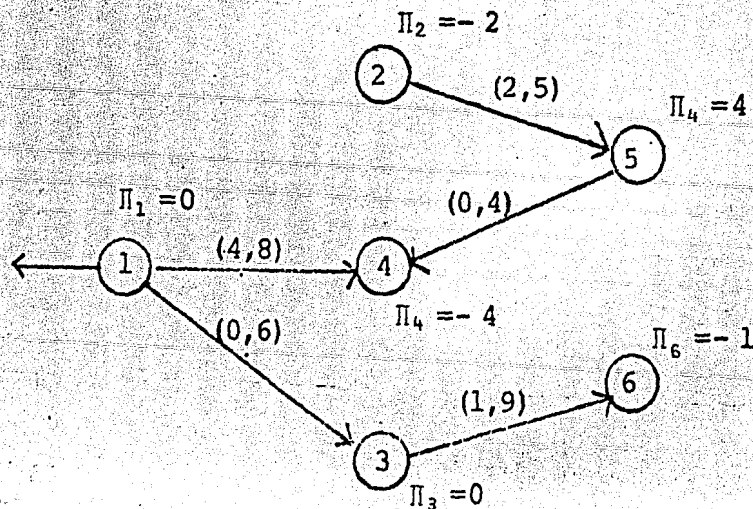
La solución inicial queda de la siguiente manera:



Ya con esta solución podemos empezar a aplicar el algoritmo simplex especializado en redes para llegar a la solución óptima.

Iteración 1.

Cálculo de las variables duales



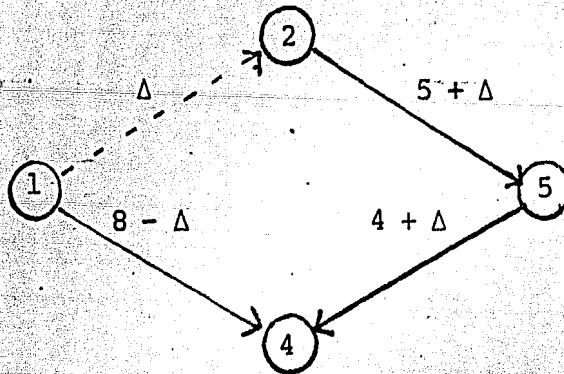


$$\Pi = [0, -2, 0, -4, 4, -1]$$

Calculamos  $\gamma_j = \Pi_D(j) - \Pi_H(j) - c_j$  para  $j$  tal que  $x_j$  no es-  
ta en la base

$$\gamma_1 = 1, \gamma_4 = -4, \gamma_5 = -4, \gamma_9 = 0$$

la única variable factible de entrar a la base es  $x_1$ , el  
ciclo que forma es:

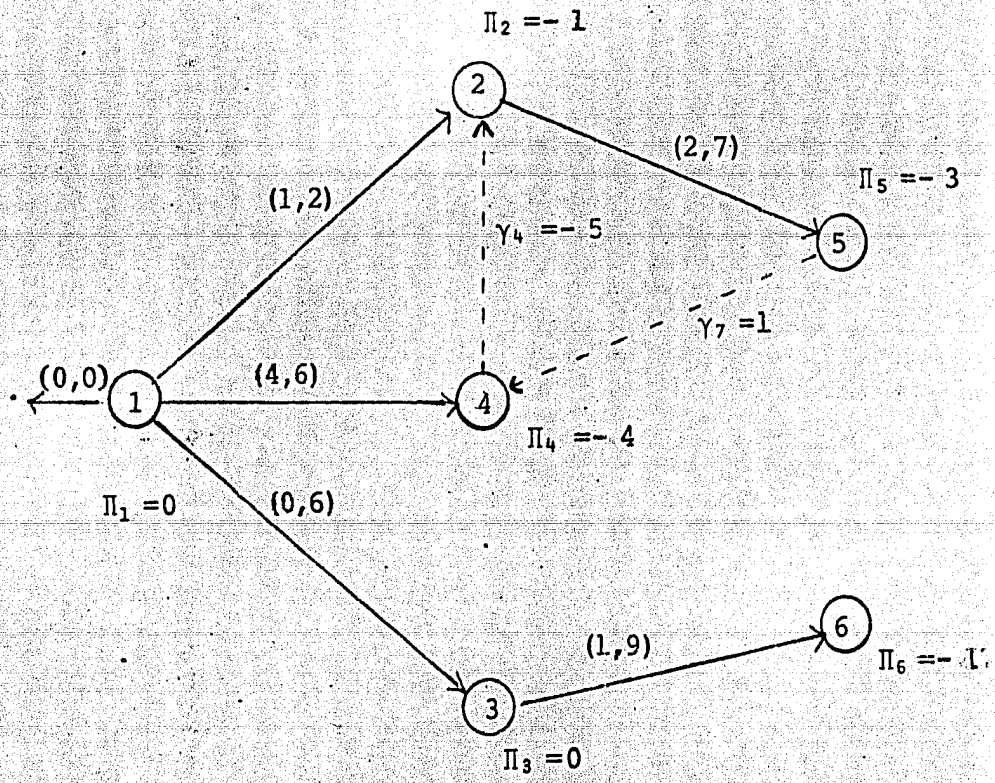


$$\Delta = \min \{10, 12-5, 6-4, 8\} = -2$$

entonces  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_7 = 6$ ,  $x_8 = 7$  y sale de la base  
la variable  $x_7$  pues alcanza el valor de su cota superior.

Iteración 2.

Cálculo de variables duales:



como  $\psi_1 \cup \psi_2 = \{\phi\}$  esta es la solución óptima:

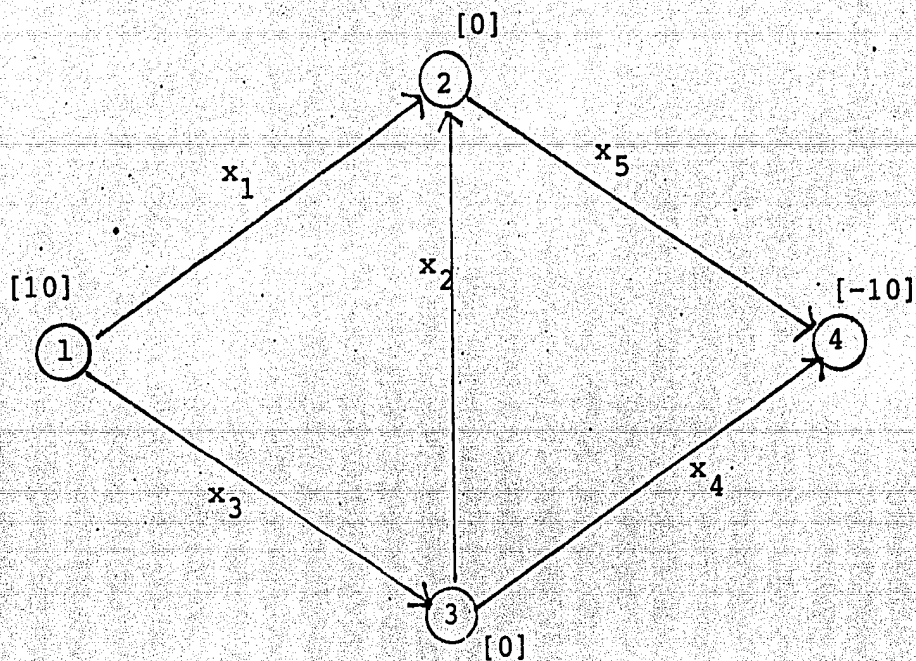
Ejemplo 2. Considerese el problema de flujo en redes

$$\min z = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 10x_5$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a} \quad & -x_1 \quad \quad -x_3 \quad \quad \quad = 10 \\ & x_1 + x_2 \quad \quad \quad -x_5 = 0 \\ & \quad \quad -x_2 -x_3 -x_4 \quad \quad = 0 \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x_4 + x_5 = -10 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_i \leq 7 \quad i = 1, \dots, 5$$

la gráfica correspondiente es:



Resolveremos el problema usando el Simplex. Calculamos la solución inicial como se indica en la sección anterior y es ta resulta ser la siguiente:

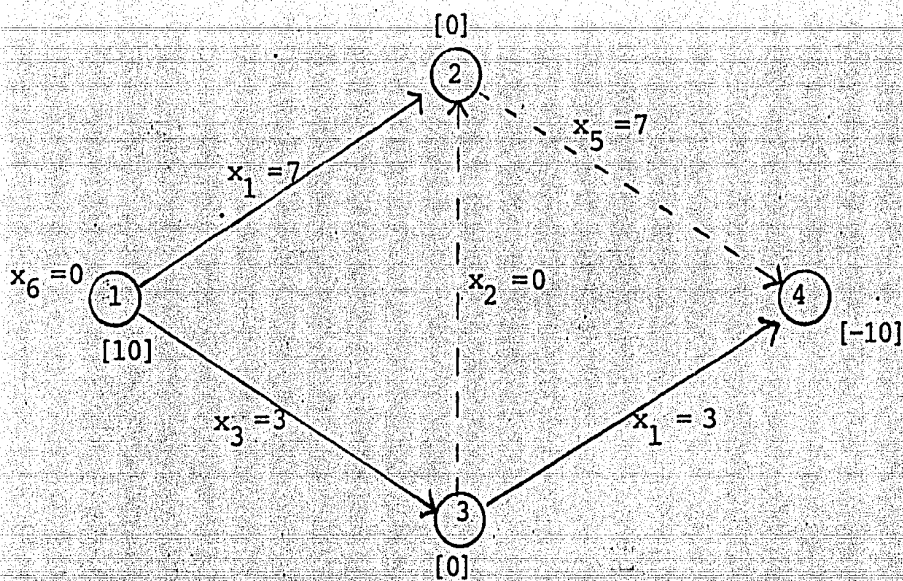
$$x_1 = 7, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 3, x_5 = 7$$

Las variables básicas son  $x_1$ ,  $x_3$  y  $x_4$ , a la gráfica inicial le agregamos un arco raíz  $x_6$  en el nodo 1 con flujo y capacidad cero; este forma parte de la base inicial de nuestro problema y esta es la siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

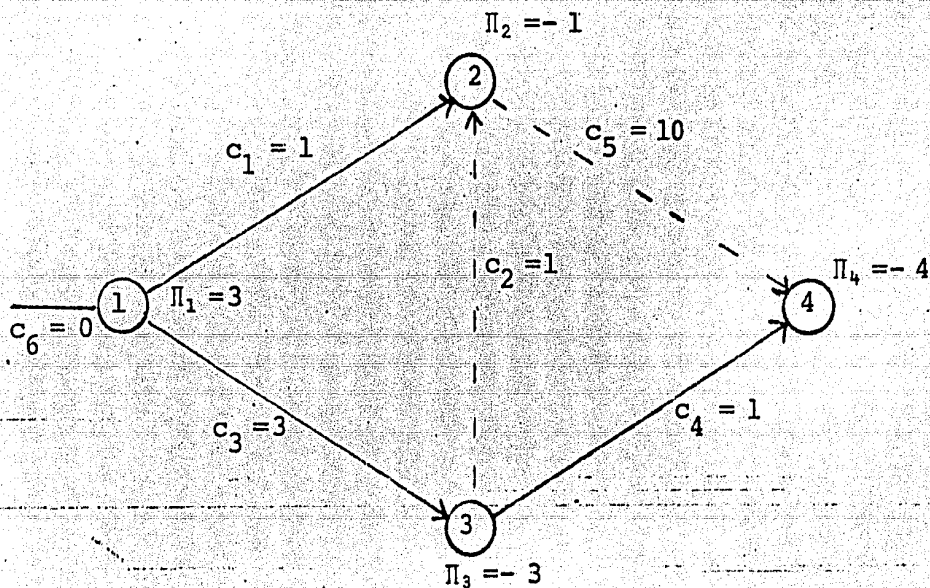
$x_1 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_6$

en nuestra primera iteración la gráfica con los valores del flujo en sus arcos es:



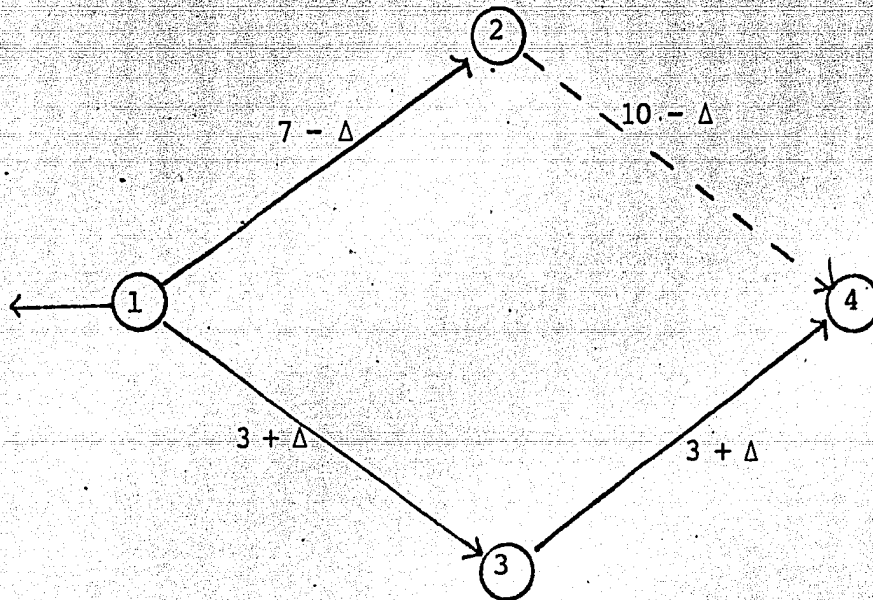
donde los arcos con raya continua corresponden al árbol base.

Calculamos las variables duales  $\Pi$  y analizamos los candidatos para entrar a la base

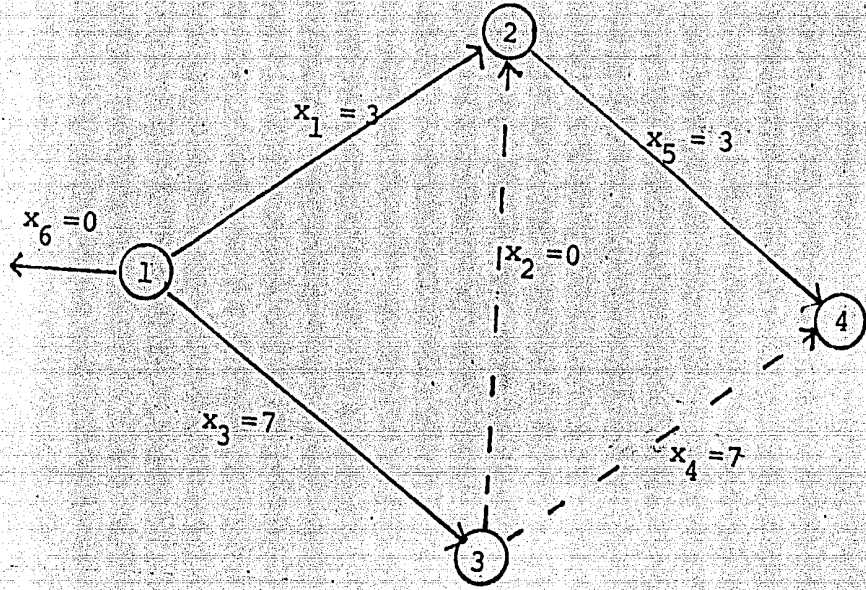


Para  $x_2 = 0$  tenemos que  $\Pi_3 - \Pi_2 - c_2 = 5 < 0$  por lo que  $x_2 \notin \psi_1$  y no es elegible. Para  $x_5 = 7$  tenemos que  $\Pi_2 - \Pi_4 - c_5 = -15 < 0$  por lo que  $x_5 \in \psi_2$  y escogemos a este para que entre a la base.

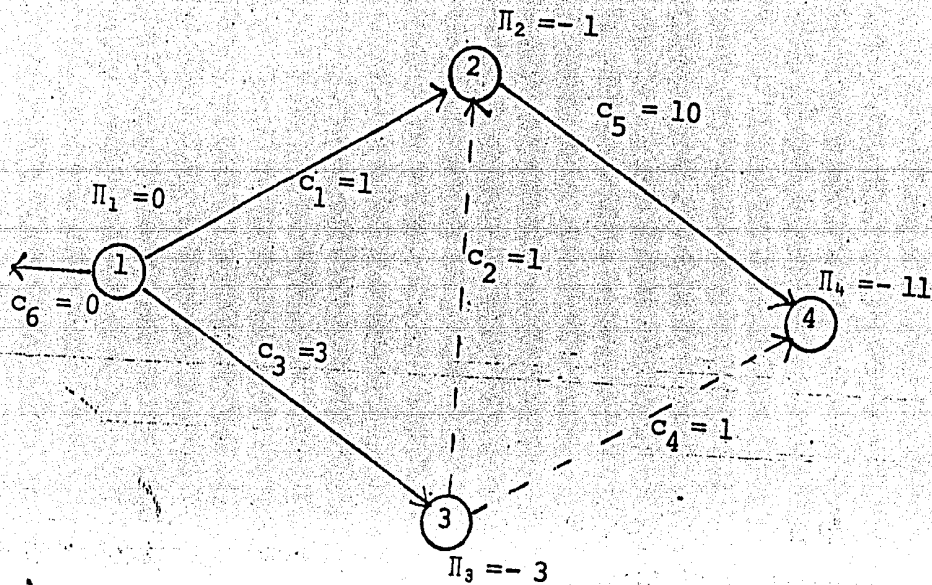
Calculamos el incremento de flujo a nuestra solución y escogemos la variable que saldrá de la base:



$\Delta = \min \{10, 4, 7\} = 4$  y la variable que sale se puede elegir entre  $x_2$  y  $x_4$ , sacamos a  $x_4$  de la base, nuestra solución queda como sigue:



Realizaremos ahora la segunda iteración, calculamos las variables duales de esta gráfica.



Para  $x_2 = 0$  tenemos que  $\Pi_3 - \Pi_2 - c_2 = -5 < 0$  por lo que  $x_2 \notin \psi_1$  y no es elegible.

Para  $x_4 = 7$  tenemos que  $\Pi_3 - \Pi_4 - c_4 = 7 > 0$  por lo que  $x_4 \notin \psi_2$  y tampoco es elegible, entonces

$$\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$$

por lo tanto hemos encontrado la solución óptima

$$x = [3, 0, 7, 7, 3]$$

y la función objetivo  $Z = 61$  es la mínima.



Ejemplo 3. Una fábrica de automóviles necesita determinar el nivel de producción de vehículos de cada una de sus cuatro plantas de ensamble. Los distribuidores de esta fábrica se encuentran en cinco regiones y la demanda de cada una de éstas es la siguiente:

DISTRIBUIDOR DE LA REGION	VEHICULOS REQUERIDOS
1	2840
2	2800
3	2600
4	2820
5	2750

Las plantas de ensamblado se encuentran en ciudades distintas y dado que el equipo utilizado en cada una de estas es diferente, los costos de producción y la capacidad de producción es diferente en cada una de ellas:

PLANTA DE ENSAMBLE	CAPACIDAD DE PRODUCCION	COSTO DE PRODUCCION POR VEHICULO
1	4000	2100
2	4500	2000
3	2700	1600
4	3000	1700

Los costos de transporte entre las cuatro plantas y las cinco regiones, además de la capacidad del sistema de transporte en cada ruta se muestran en la siguiente tabla:

Región de Ventas	Plantas de Ensamblado							
	1		2		3		4	
	Costo	Capacidad	Costo	Capacidad	Costo	Capacidad	Costo	Capacidad
1	800	0	200	3000	500	1000	0	0
2	600	2000	400	2000	200	2000	400	1000
3	300	2000	500	1000	200	1000	400	1000
4	200	2000	900	200	200	1000	300	1000
5	400	300	0	0	400	500	100	2000

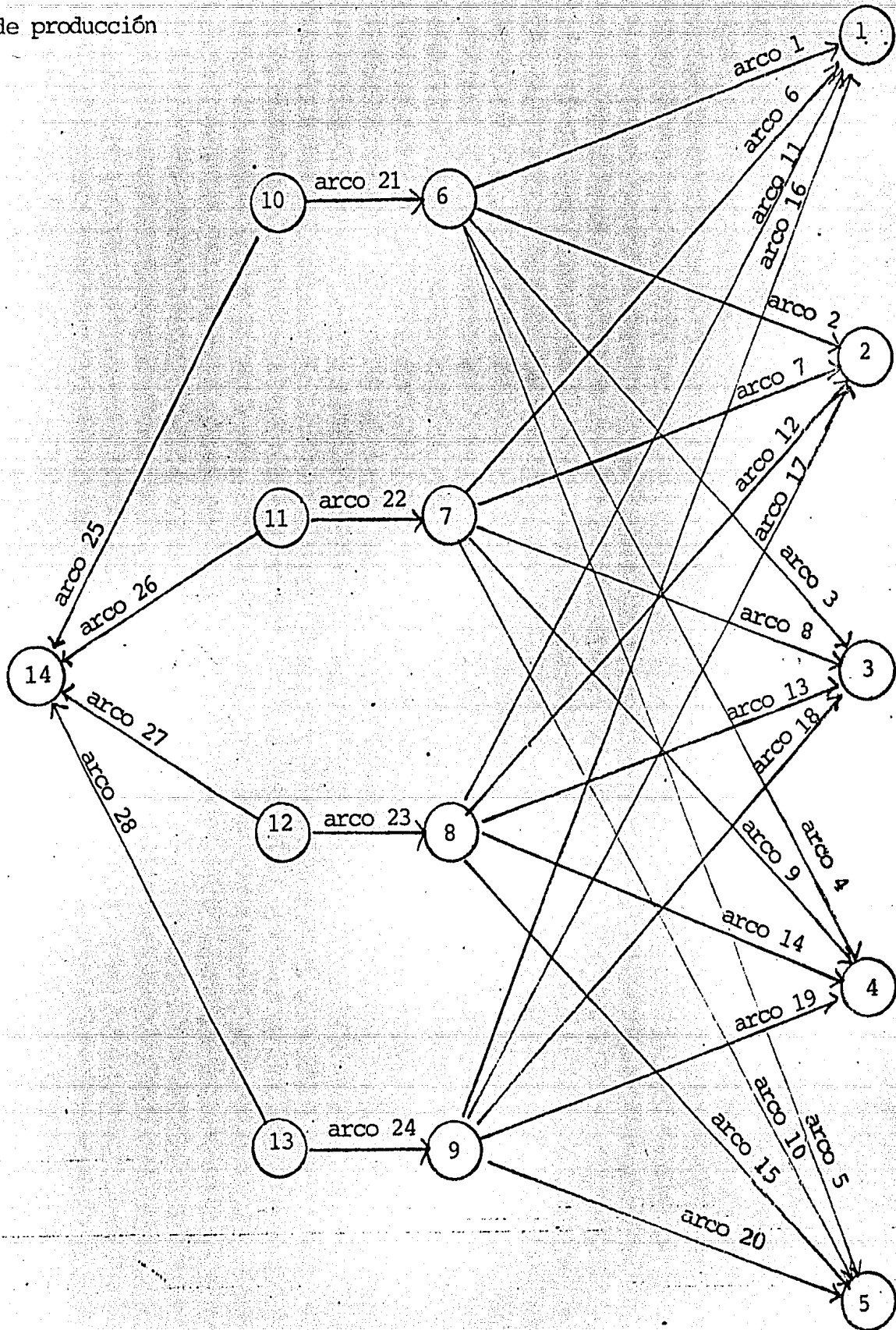
Arco número j	D(j)	H(j)	Costo	Capacidad
1	6	1	2900	0
2	6	2	2700	2000
3	6	3	2400	2000
4	6	4	2300	2000
5	6	5	2500	500
6	7	1	2200	3000
7	7	2	2400	2000
8	7	3	2500	1000
9	7	4	2900	200
10	7	5	0	0
11	8	1	2100	1000
12	8	2	1800	2000
13	8	3	1800	1000
14	8	4	1800	1000
15	8	5	2000	500
16	9	1	0	0
17	9	2	2100	1000
18	9	3	2100	1000
19	9	4	2000	1000
20	9	5	1800	2000
21	6	10	0	$\infty$
22	7	10	0	$\infty$
23	8	10	0	$\infty$
24	9	10	0	$\infty$

Para encontrar la solución a este problema primero encontraremos una solución inicial factible, pero antes se dará la matriz de incidencia nodo arco de nuestra red.

Exceso de la capacidad  
de producción

plantas de ensamblado

distribuidores



Red de flujo que representa la problemática

En la red de flujo que representa la problemática se tienen los siguientes parámetros:

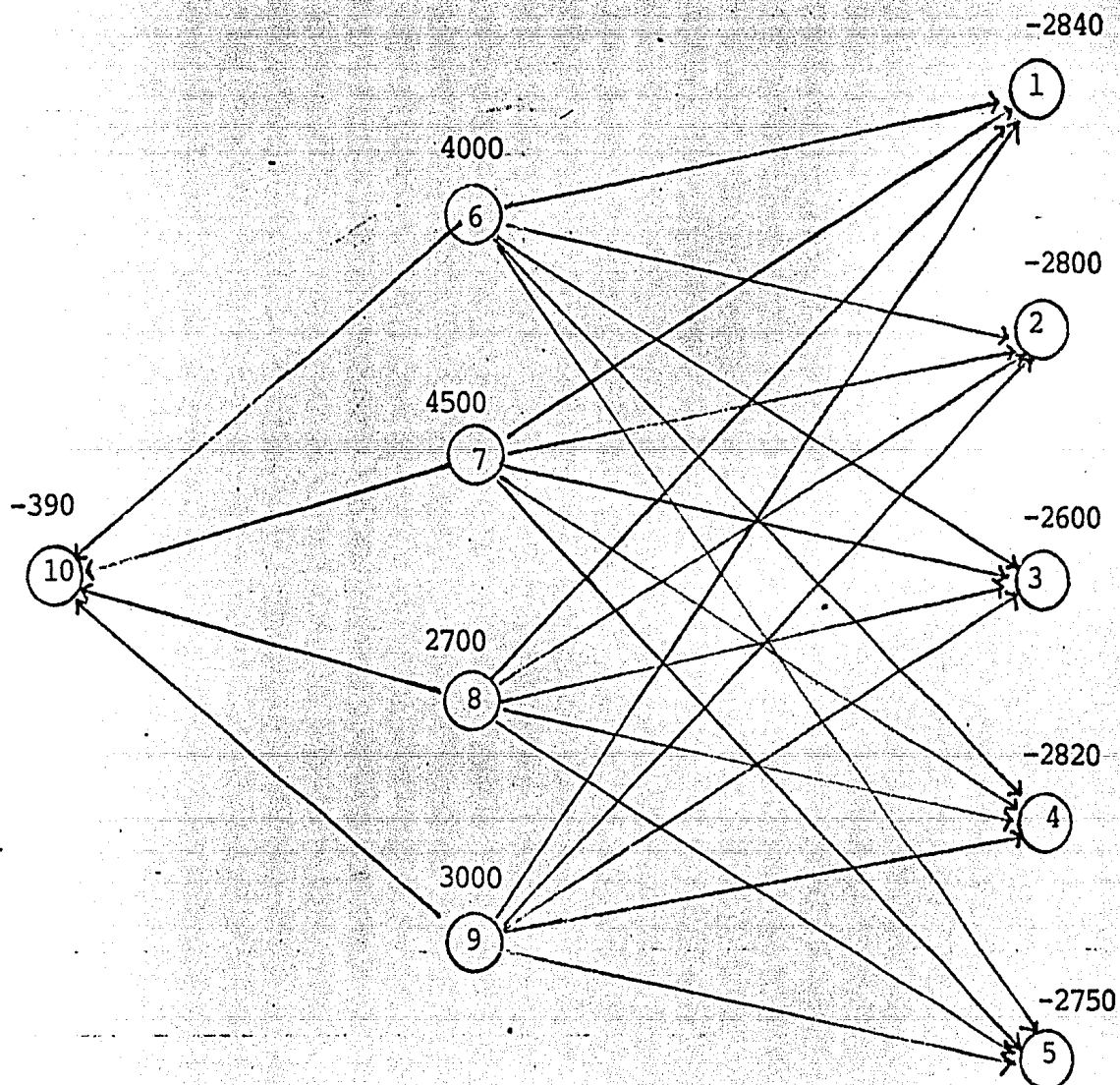
NODO	REQUERIMIENTO
1	- 2840
2	- 2800
3	- 2600
4	- 2820
5	- 2750
6	0
7	0
8	0
9	0
10	4000
11	4500
12	2700
13	3000
14	- 390

y los costos y capacidad de los arcos son:

Arco j	D(j)	H(j)	Costo	Capacidad	Arco j	D(j)	H(j)	Costo	Capacidad
1	6	1	800	0	12	8	2	200	2000
2	6	2	600	2000	13	8	3	200	1000
3	6	3	300	2000	14	8	4	200	1000
4	6	4	200	2000	15	8	5	400	500
5	6	5	400	500	16	9	1	0	0
6	7	1	200	3000	17	9	2	400	1000
7	7	2	400	2000	18	9	3	400	1000
8	7	3	500	1000	19	9	4	300	1000
9	7	4	900	200	20	9	5	100	2000
10	7	5	0	0	21	10	6	2100	4000
11	8	1	500	1000	22	11	7	2000	4500

Arco (J)	D(j)	H(j)	Costo	Capacidad
23	12	8	1600	2700
24	13	9	1700	3000
25	10	14	0	$\infty$
26	11	14	0	$\infty$
27	12	14	0	$\infty$
28	13	14	0	$\infty$

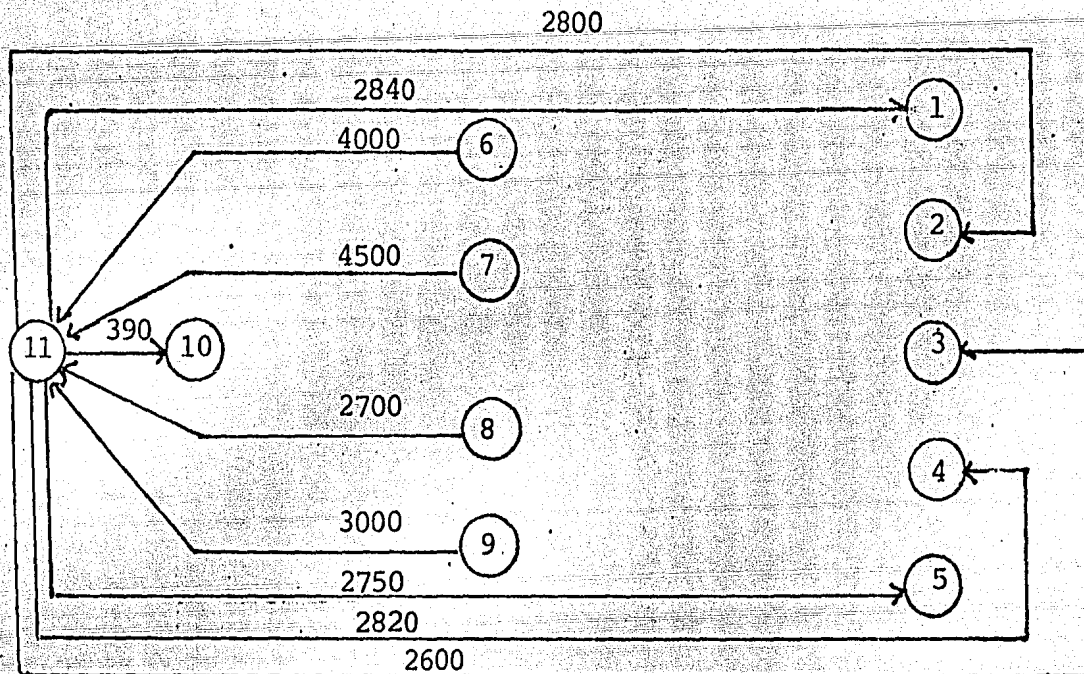
Un planteamiento alternativo de este mismo problema es el siguiente:







Cálculo de la solución inicial;

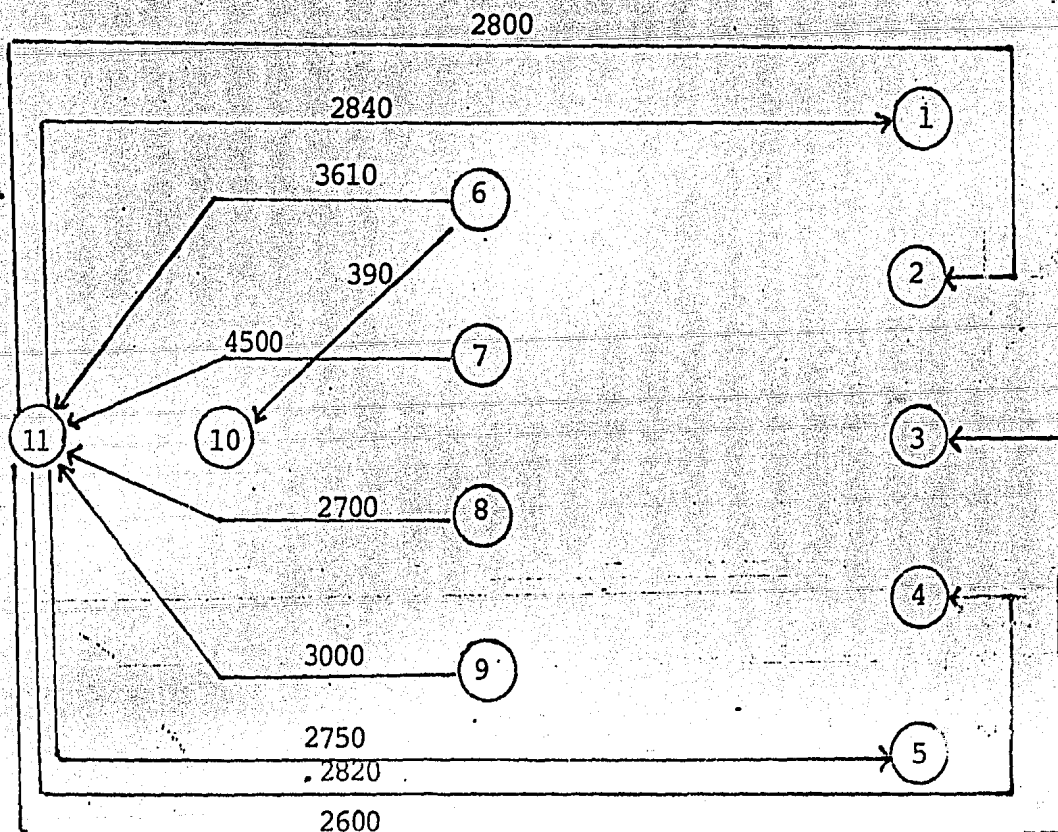


$$\Pi = [-1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1]$$

$$\psi_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{23}, e_{24}\}, \psi_2 = \phi$$

Tomamos  $e_{23}$ , entonces  $P = \{10, z_{10}, 11, z_6, 6\}$

$$\Delta = \min \{390, 4000, \infty\} = 390 \Rightarrow e_{23} = 390 \text{ y sale } z_{10}.$$

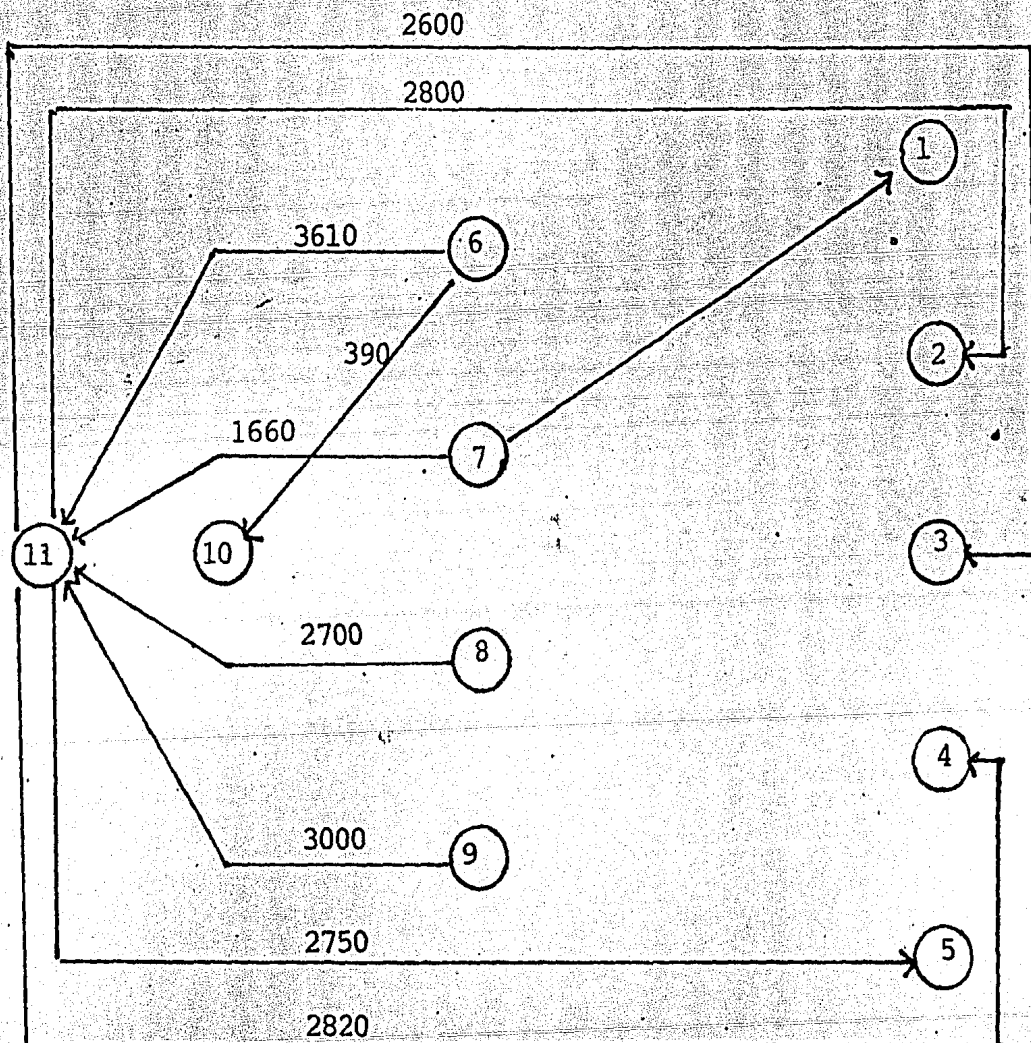


$$\Pi = [-1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{20}\}, \psi_2 = \{\phi\}$$

$$\text{Tomamos } e_6, \text{ entonces } P = \{1, z_1, 11, z_7, 7\}$$

$$\Delta = \min \{2840, 4500, 3000\} = 2840, \text{ sale } z_1 \text{ y } e_6 = 2840$$



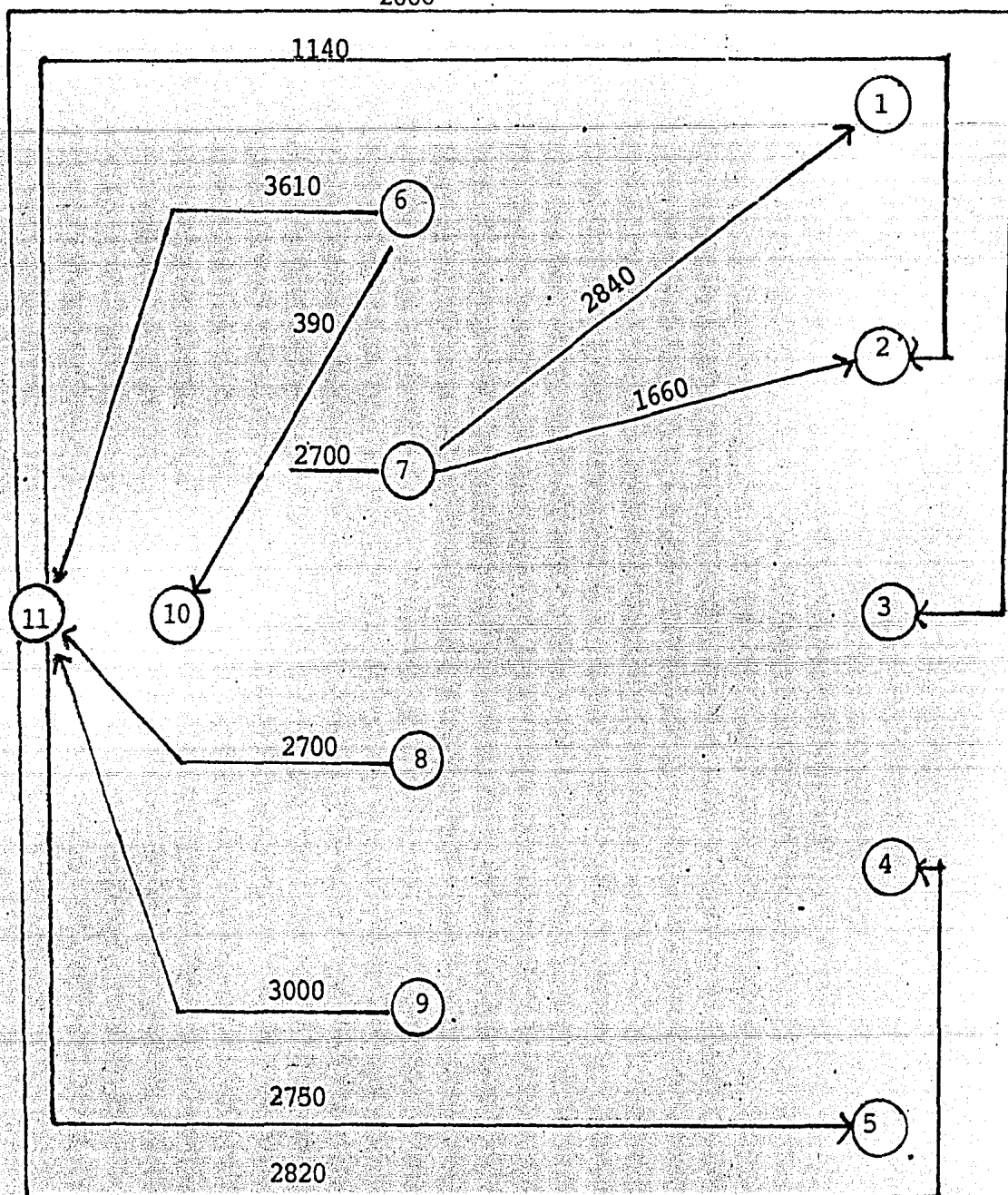
$$\Pi = [1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = \{e_2, \dots, e_5, e_7, \dots, e_{10}, e_{12}, \dots, e_{15}, e_{17}, \dots, e_{20}\}; \psi_2 = \{\phi\}$$

$$\text{Tomamos } e_7, \text{ entonces } P = \{2, z_2, 11, z_7, 7\}$$

$$\Delta = \min \{2800, 1660, 2000\} = 1660, \text{ sale } z_7 \text{ y } e_7 = 1660$$

2600

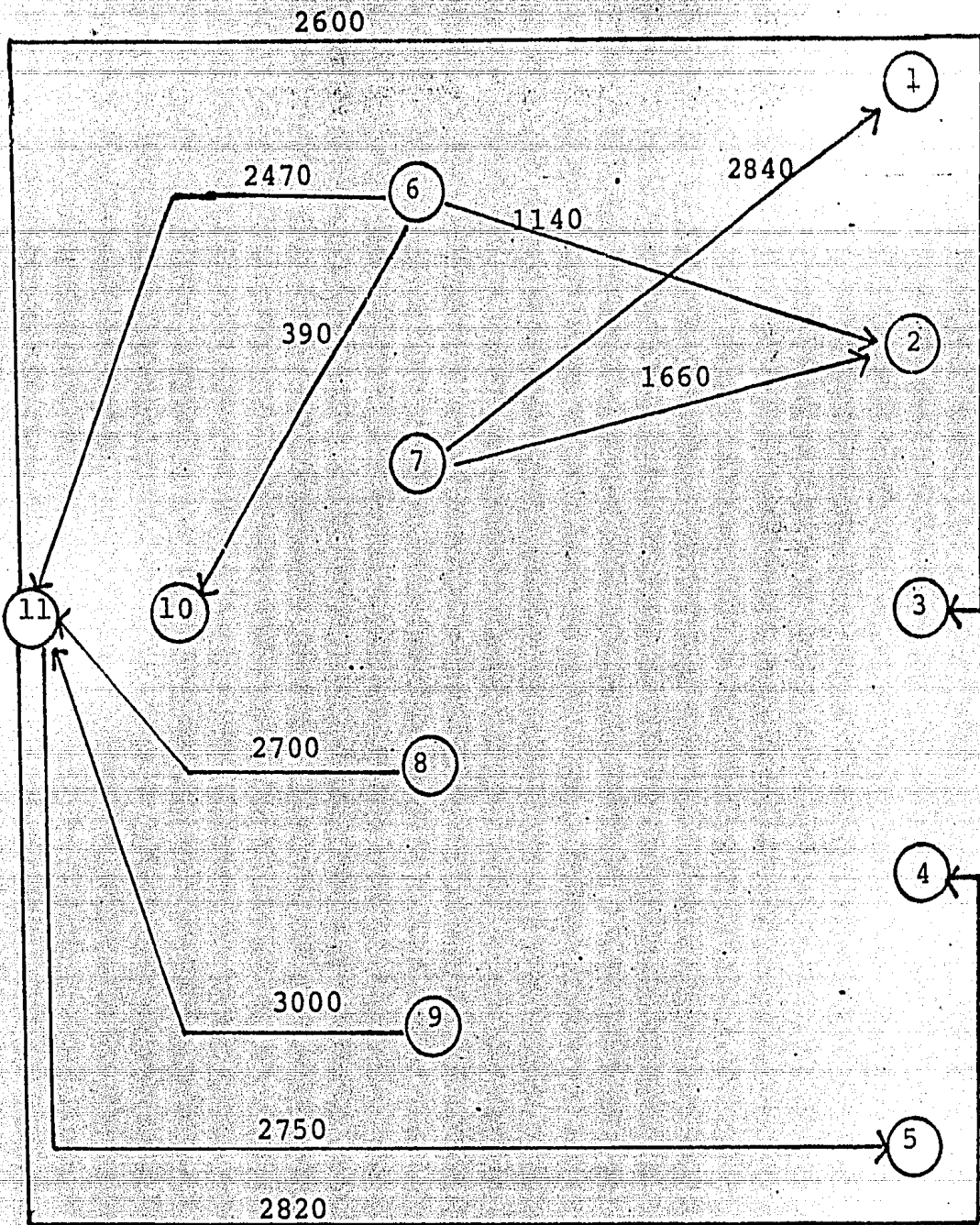


$$\Pi = [-1, -1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = [e_1, \dots, e_5, e_{11}, \dots, e_{20}], \psi_2 = \{\phi\}$$

$$\text{Tomamos } e_2 \Rightarrow P = \{2, z_2, 11, z_6, 6\}$$

$$\Delta = \min \{1140, 3610, 2000\} = 1140, \text{ sale } z_2 \text{ y } e_2 = 1140$$



$$\Pi = [1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = \{e_3, \dots, e_5, e_8, \dots, e_{10}, e_{13}, \dots, e_{15}, e_{18}, \dots, e_{20}\} \quad \psi_2 = \{\phi\}$$

$$\text{Tomamos } e_{13} \Rightarrow P_1 = \{3, z_3, 11, z_8, 8\}$$

$\Delta = \min \{2600, 2700, 1000\} = 1000 \Rightarrow e_{13} = 1000$ , pero no entra a la base, los arcos básicos en  $P_1$  quedan con el siguiente flujo  $z_3 = 1600, z_8 = 1700$ .

$$\text{Tomamos } e_{14} \Rightarrow P_2 = \{4, z_4, 11, z_8, 8\}$$

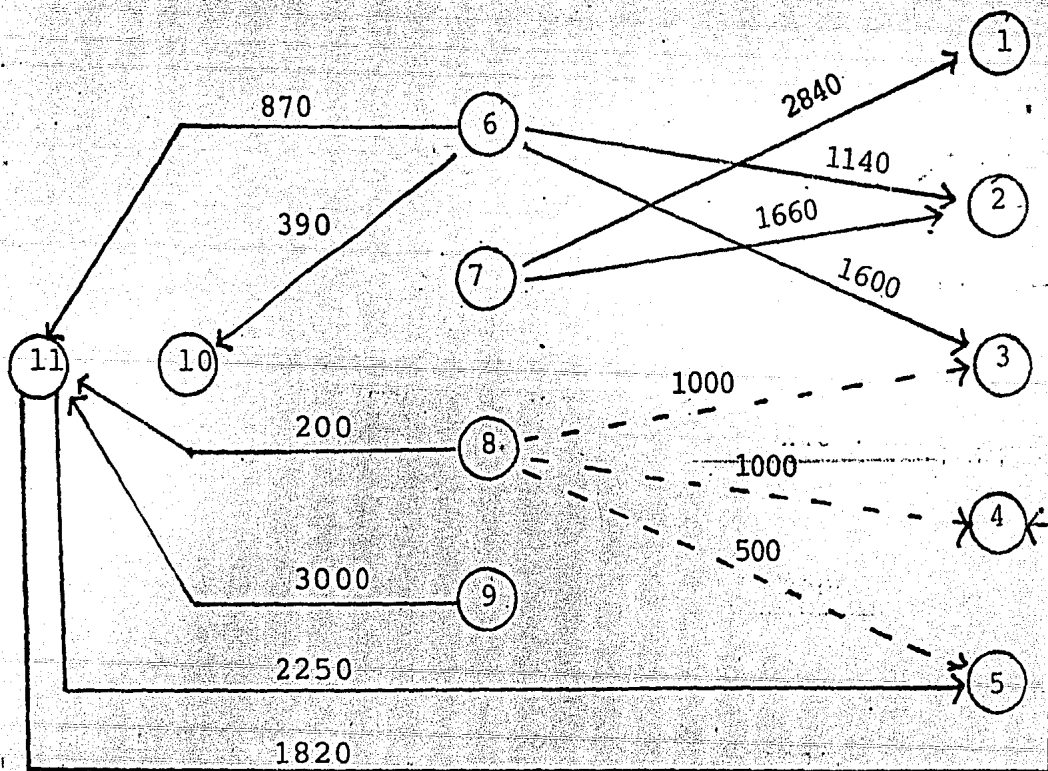
$\Delta = \min \{2820, 1700, 1000\} = 1000 \Rightarrow e_{14} = 1000$ , pero no entra a la base, los arcos básicos en  $P_2$  quedan con el flujo siguiente  $z_4 = 1820$ ,  $z_8 = 700$ .

Tomamos  $e_{15} \Rightarrow P_3 = \{5, z_5, 11, z_8, 8\}$

$\Delta = \min \{2750, 700, 500\} = 500 \Rightarrow e_{15} = 500$  pero no entra a la base, los arcos básicos en  $P_3$  quedan con el siguiente flujo  $z_5 = 1820$ ,  $z_8 = 200$ .

Tomamos  $e_3 \Rightarrow P_4 = \{3, z_3, 11, z_6, 6\}$

$\Delta = \min \{1600, 2470, 2000\} = 1600$ , sale  $z_3$  y  $e_3 = 1600$

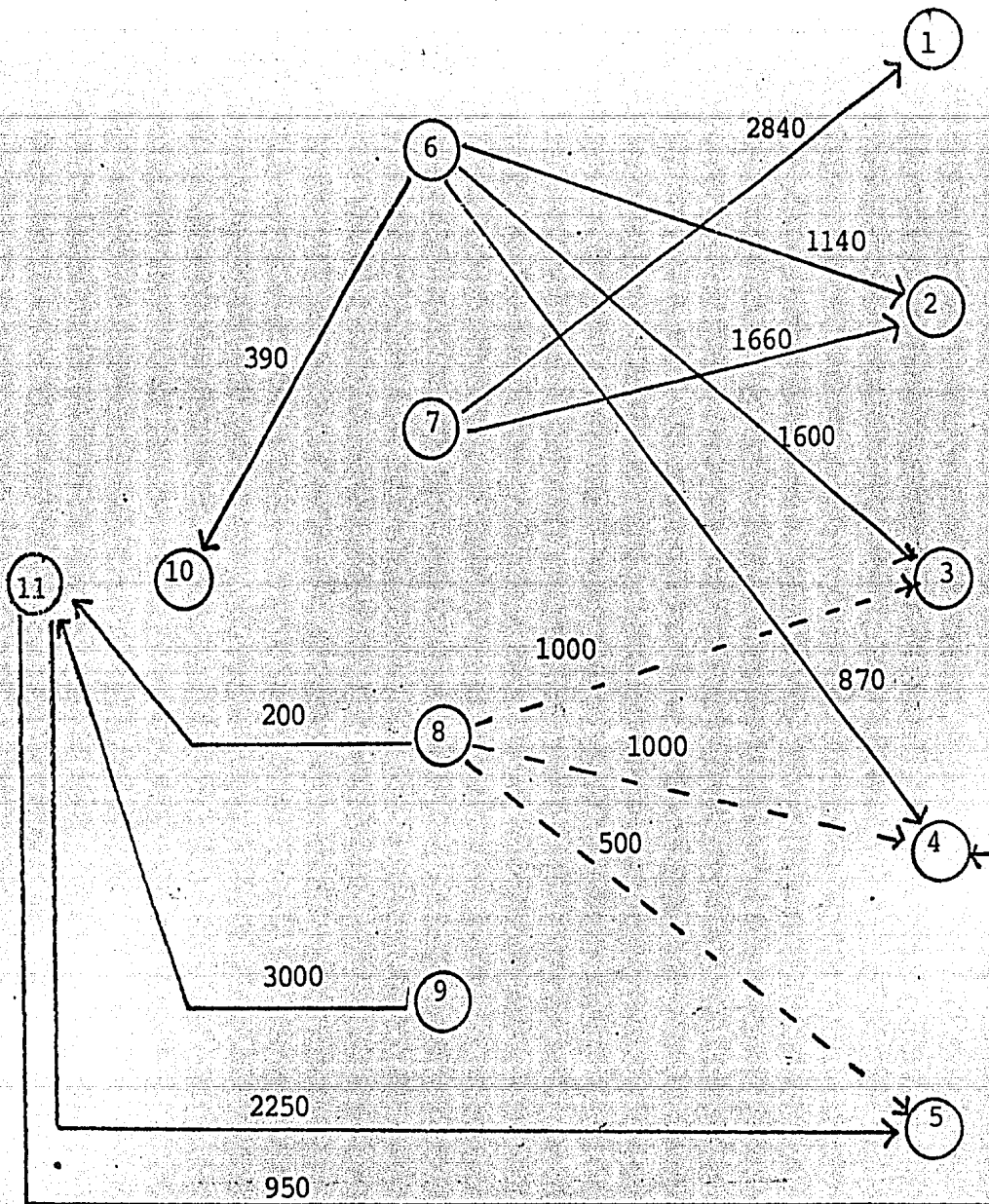


$$\Pi = [1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = \{e_4, e_5, e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}, e_{19}, e_{20}\}$$

Tomamos  $e_4$ , entonces  $P = \{4, z_4, 11, z_6, 6\}$

$\Delta = \min \{1820, 870, 2000\} = 870$ , sale  $z_5$  y  $e_4 = 870$

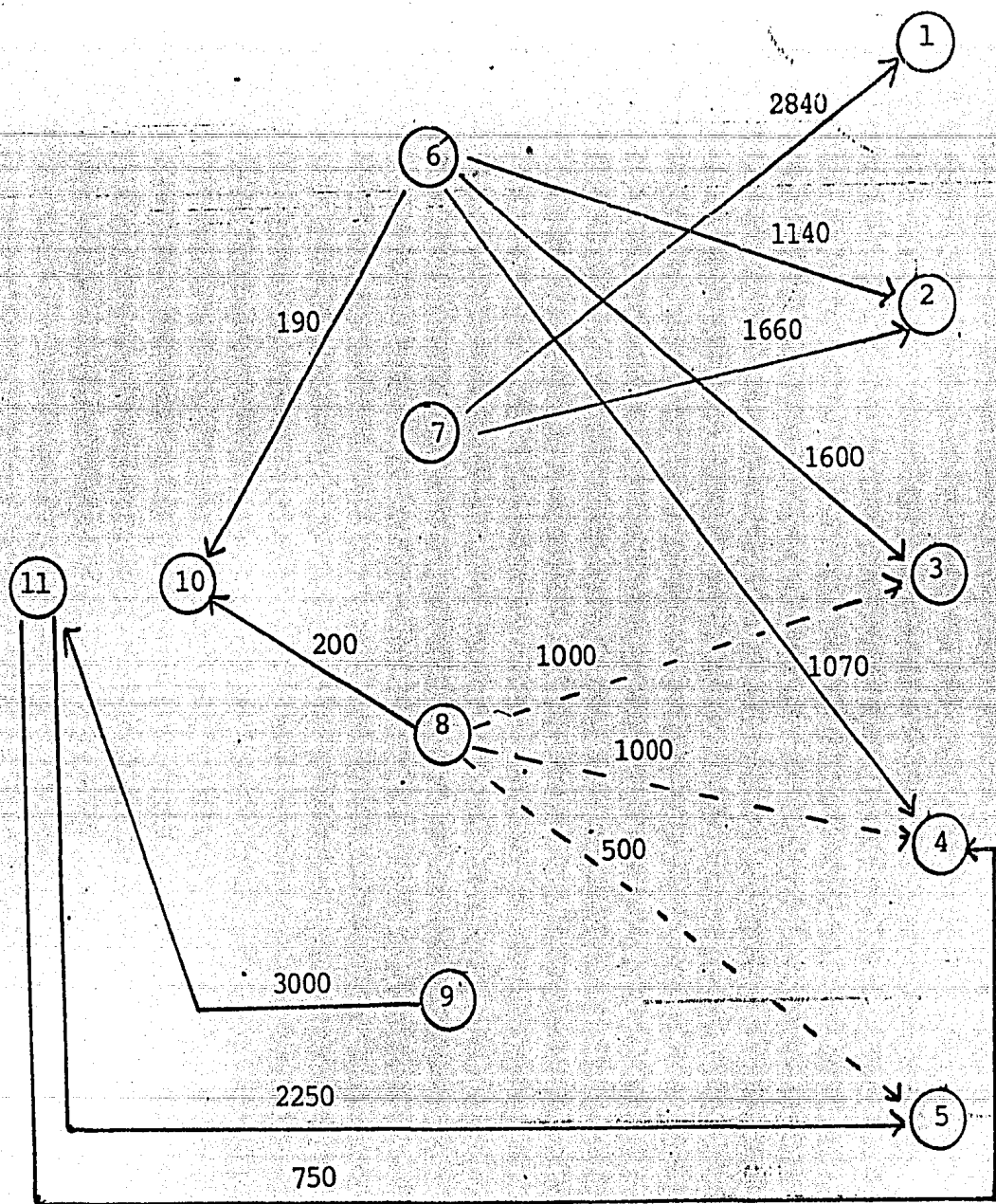


$$\Pi = [-1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1]$$

$$\psi_1 = \{e_{19}, e_{20}, e_{23}, e_{24}\}$$

$$\text{Tomamos } e_{23} \Rightarrow e = \{10, e_{21}, 6, e_4, 4, z_4, 11, z_8, 8\}$$

$$\Delta = \min \{390, 2000 - 870, 950, 200\} = 200 \text{ sale } z_8 \text{ y } e_{23} = 200.$$

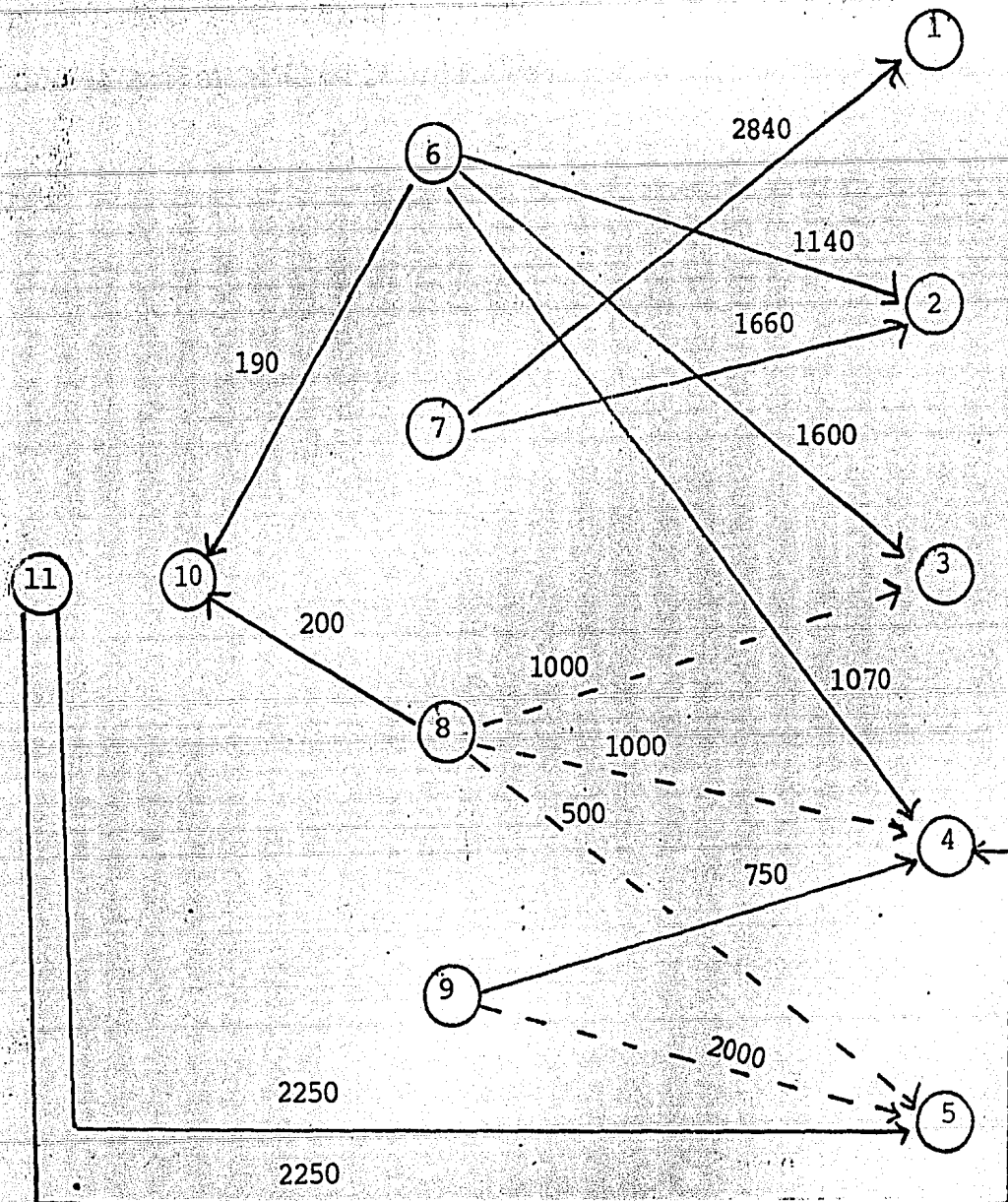


$\Pi = [-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, -1]$

$\psi_1 = e_{19}, e_{20}, e_{24}$

Tomamos  $e_{19}$ , entonces  $P = \{4, z_4, 11, z_9, 9\}$

$\Delta = \min \{750, 3000, 1000\} = 750$ , sale  $7_4$  y  $e_{19} = 750$



MATERIAL DIDACTICO SIN VALOR COMERCIAL. FEDERACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES AUTONOMAS DE MEXICO. ESTADISTICA. UNAM. CUERPO ACADÉMICO.

$$\Pi = [1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

$$\psi_1 = \{e_5, e_{10}, e_{20}, e_{24}\}$$

Tomamos  $e_{20}$ , entonces  $P_1 = \{5, z_5, 11, z_9, 9\}$ .

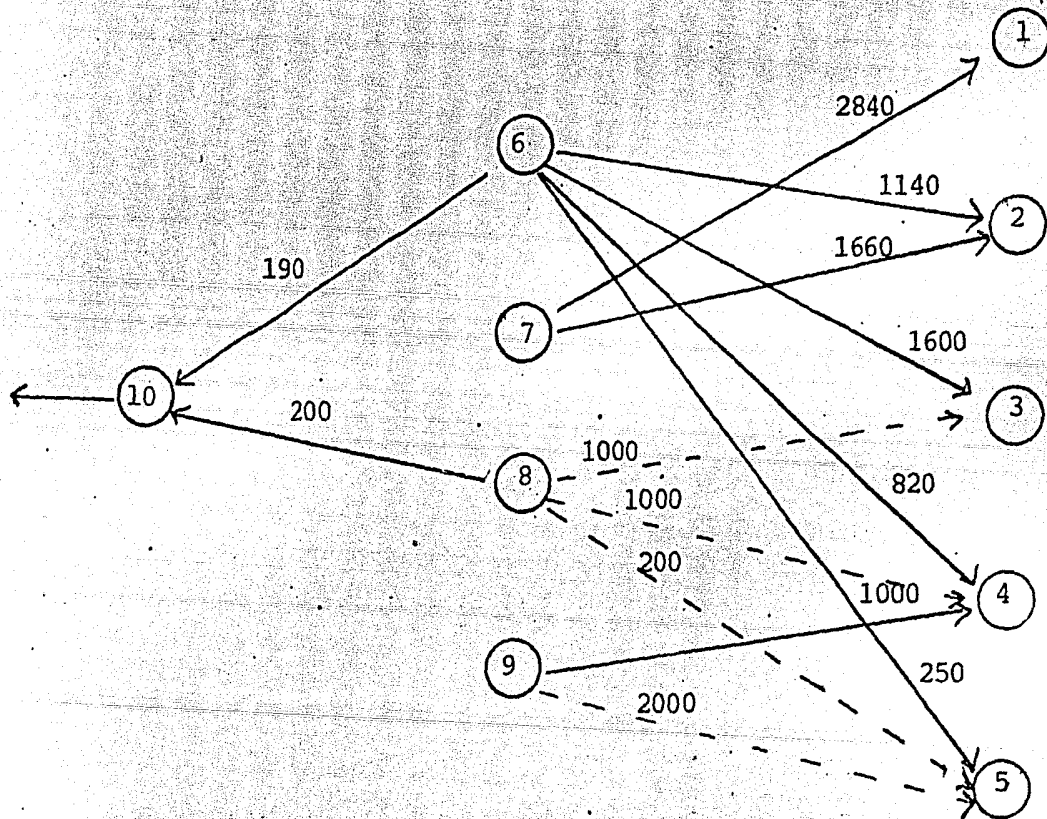
$\Delta = \min \{2250, 2250, 2000\} = 2000 \Rightarrow e_{20} = 2000$  pero no entra a la base, el flujo en los arcos básicos de  $P_1$  queda como sigue  $z_5 = 250, z_9 = 250$ .



Tomamos  $e_5$ , entonces  $P = \{5, z_5, 11, z_9, 9, e_{19}, 4, e_4, 6\}$

$$\Delta = \min \{250, 250, 1000 - 750, 1070\} = 250 \Rightarrow e_5 = 250$$

La solución inicial a nuestro problema queda como sigue:



Con esta solución inicial básica factible aplicamos el algoritmo simplex especializado en redes para encontrar la solución óptima.

$$\Pi = [-3240, -2700, -2400, -2800, -2500, 0, -400, 0, 300, 0]$$

El cálculo de costos reducidos lo hacemos para los siguientes arcos:

$$e_8 = 0 \rightarrow \Pi_7 - \Pi_3 - c_8 = -400 - (-2400) - 2500 < 0$$

$$e_9 = 0 \rightarrow \Pi_7 - \Pi_4 - c_9 = -400 - (-2300) - 2900 < 0$$

$$e_{10} = 0 \rightarrow \Pi_7 - \Pi_5 - c_{10} = -400 - (-2750) - 0 > 0, \text{ entonces tomamos } e_{10}.$$

$$e_{10} \in \psi_1, P = \{5, e_5, 6, e_2, 2, e_7, 7\}$$

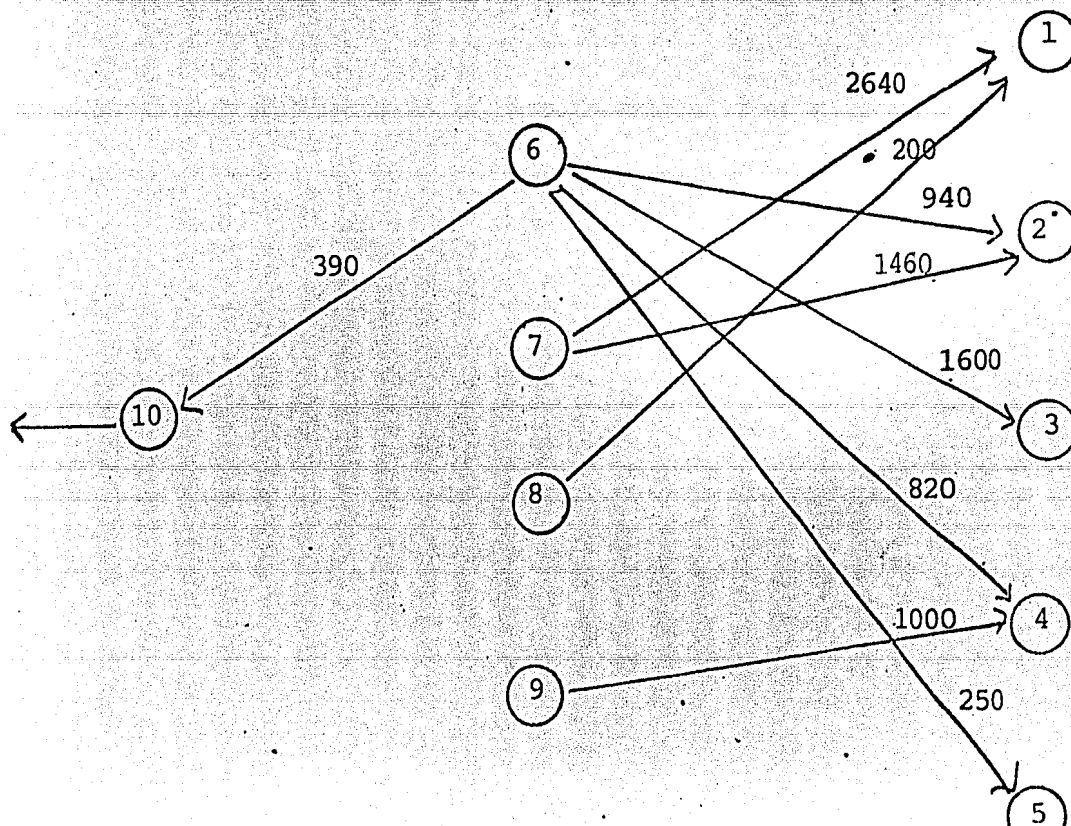
$$\Delta = \min \{250, 2000 - 1140, 1660, 0\} = 0 = e_{10} \text{ no entra a la base.}$$

$$e_{11} = 0 \rightarrow \Pi_8 - \Pi_1 - c_{11} = 0 - (-3240) - 2100 > 0 \rightarrow e_{11} \in \psi_1,$$

$$P = \{1, e_6, 7, e_7, 2, e_2, 6, e_{21}, 10, e_{23}, 8\}$$

$$\Delta = \min \{2840, 2000 - 1660, 1140, \infty, 200, 1000\} = 200$$

$$e_{11} = 200 \text{ y sale } e_{23}.$$

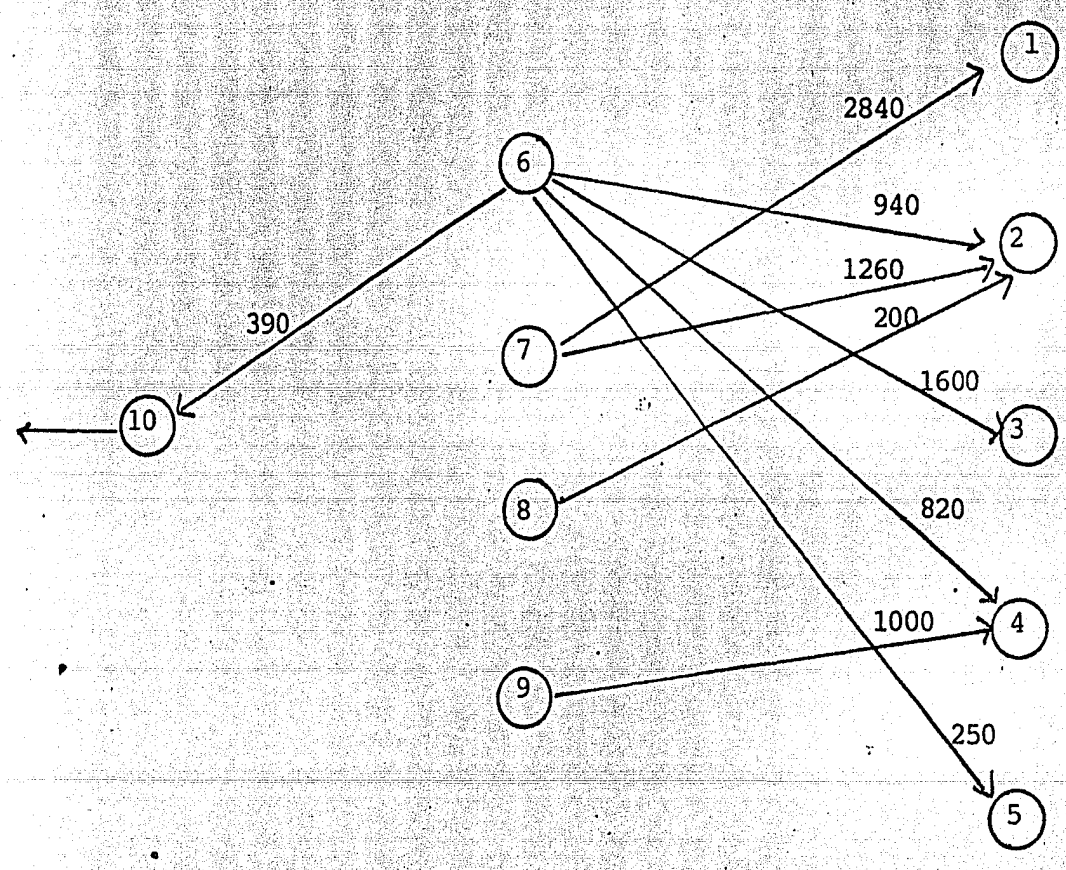


$$\Pi = [-2500, -2700, -2400, -2300, -2500, 0, -300, -400, -300, 0]$$

Para  $e_{12} = 0$  tenemos:  $\Pi_8 - \Pi_2 - c_{12} = -400 - (-2700) - 1800 > 0$

entra a la base pues  $P = \{2, e_7, 7, e_6, 1, e_{11}, 8\}$  y

$$\Delta = \min \{1460, 3000 - 2640, 200, 2000\} = 200 \text{ y sale } e_{11}, e_{12} = 200$$

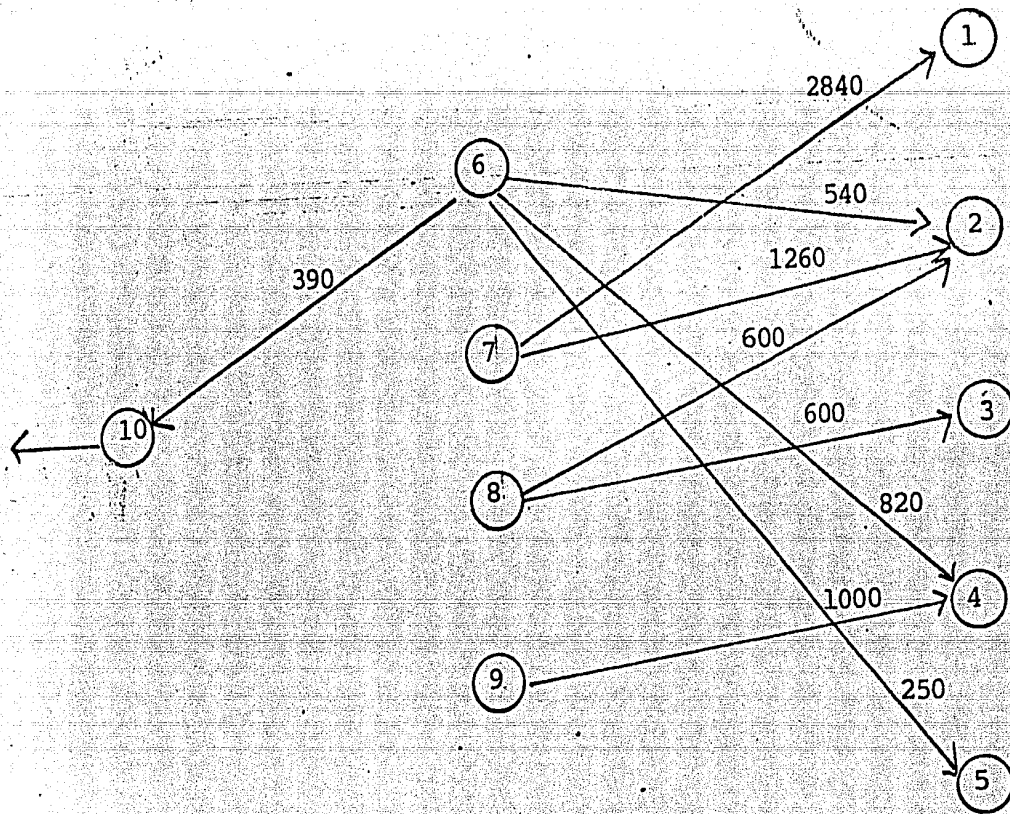


$$\Pi = [-2500, -2700, -2400, -2300, -2500, 0, -300, -900, -300, 0]$$

Para  $e_{13} = 1000 = U_{13}$  tenemos que  $\Pi_8 - \Pi_3 - c_{13} = -900 - (2400) - 1800 < 0 \Rightarrow e_{13}$  entra a la base ya que  $e_{13} \in \psi_2$  y

$$P = \{8, e_{12}, 2, e_2, 6, e_3, 3\} \text{ y } \Delta = \min \{2000 - 200, 940, 2000 - 1600, 1000\} = 400 \text{ y sale } e_3 = 2000 \text{ y } e_{13} = 600.$$

MATERIAL DE REFERENCIA PARA EL CURSO DE ECONOMIA DE EMPRESAS Y ADMINISTRACION DE EMPRESAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE ECONOMIA  
CARRERA DE ECONOMIA DE EMPRESAS Y ADMINISTRACION DE EMPRESAS  
15

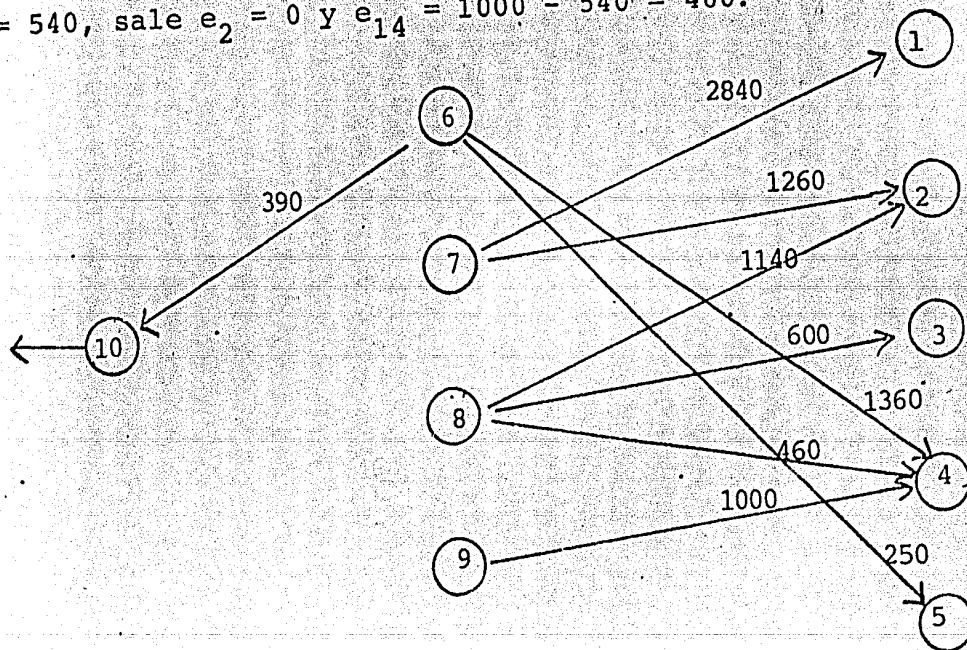


$$\Pi = [-2500, -2700, -2700, -2300, -2500, 0, -300, -900, -300, 0]$$

tomamos  $e_{14}$  pues  $\Pi_8 - \Pi_4 - c_{14} = -900 - (-2300) - 1800 < 0$  y  $e_{14} = u_{14}$

$P = \{8, e_{12}, 2, e_2, 6, e_4, 4\}$  y  $\Delta = \min \{2000 - 600, 540, 2000 - 820, 1000\}$

$= 540$ , sale  $e_2 = 0$  y  $e_{14} = 1000 - 540 = 460$ .



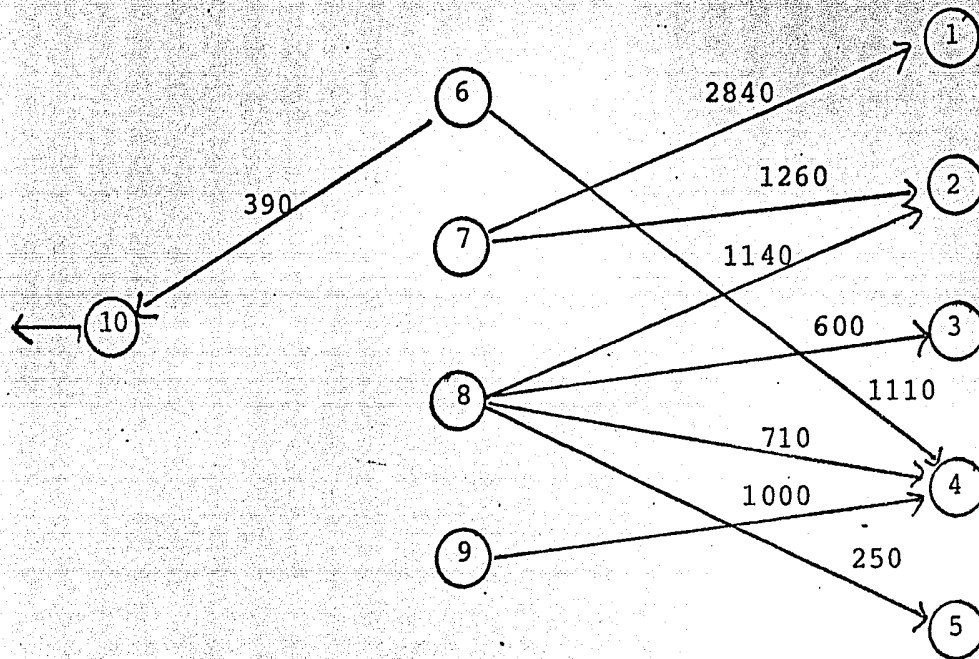
$$\Pi = [-2500, -2700, -2700, -2300, -2500, 0, -300, -900, -300, 0]$$

tomamos  $e_{15}$  pues  $\Pi_8 - \Pi_5 - c_{15} = -900 - (2500) - 2000 < 0$  y  $e_{15} = u_{15}$

$$P = \{8, e_{14}, 4, e_4, 6, e_5, 5\}$$

$$\Delta = \min \{1000 - 460, 1360, 500 - 250, 500\} = 250$$

sale  $e_5 = 500$  y entra  $e_{15} = 250$



$$\Pi = [-2100, -2300, -2300, -2300, -2500, 0, 100, -500, -300, 0]$$

Para  $e_{17}$  tenemos que  $-300 - (-2300) - 2100 < 0$  y  $e_{17} = 0 \notin \psi_1 \cup \psi_2$

Para  $e_{18}$  se tiene que  $-300 - (-2300) - 2100 < 0$  y  $e_{18} = 0 \Rightarrow \notin \psi_1 \cup \psi_2$

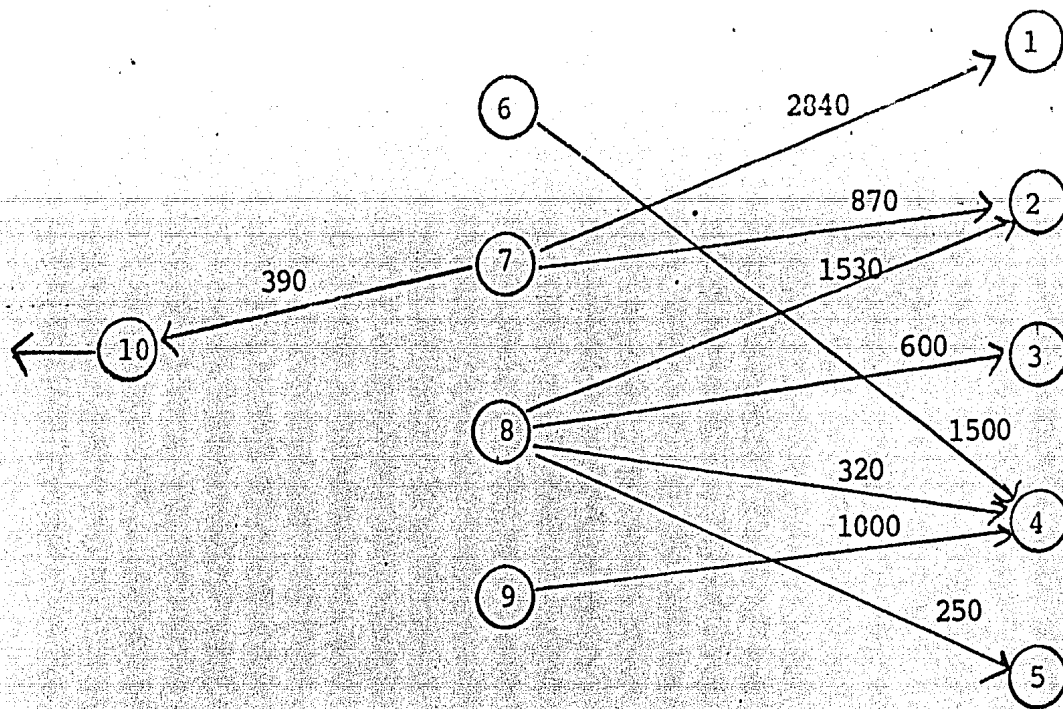
Para  $e_{20}$  tenemos  $-300 - (-2500) - 1800 > 0$  y  $e_{20} = u_{20} \Rightarrow \notin \psi_1 \cup \psi_2$

Para  $e_{22}$  se tiene  $100 - 0 - 0 > 0$  y  $e_{22} = 0$ , de aquí  $e_{22} \in \psi$ ,

$$P = \{10, e_{20}, 6, e_4, 4, e_{14}, 8, e_{12}, 2, e_7, 7\}$$

$$\Delta = \min \{390, 2000 - 1110, 710, 2000 - 1140, 1260\} = 390$$

sale  $e_{21} = 0$  y entra a la base  $e_{22} = 390$



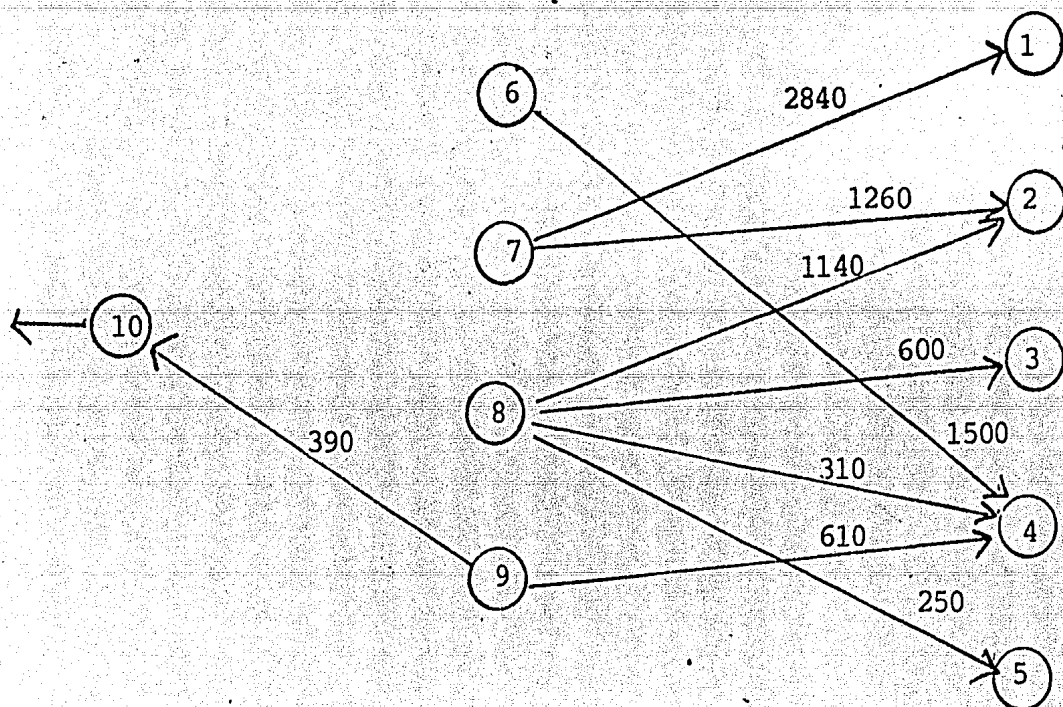
$$\Pi = [-2000, -2400, -2400, -2400, -2600, -100, 0, -600, 200, 0]$$

Para  $e_{23}$  tenemos  $\Pi_8 - \Pi_{10} - c_{23} = -600 - 0 - 0 < 0$  y  $e_{23} = 0 \notin \psi_1$  u  $\psi_2$

Para  $e_{24}$  tenemos que  $\Pi_9 - \Pi_{10} - c_{24} = 200 - 0 - 0 > 0$  y  $e_{24} = 0 \in \psi_1$

$$P = \{10, e_{22}, 7, e_7, 2, e_{12}, 8, e_{14}, 4, e_{19}, 9\}$$

$$\Delta = \min\{390, 2000 - 870, 1530, 1000 - 320, 1000, \infty\} = 390, \text{ sale } e_{22}$$



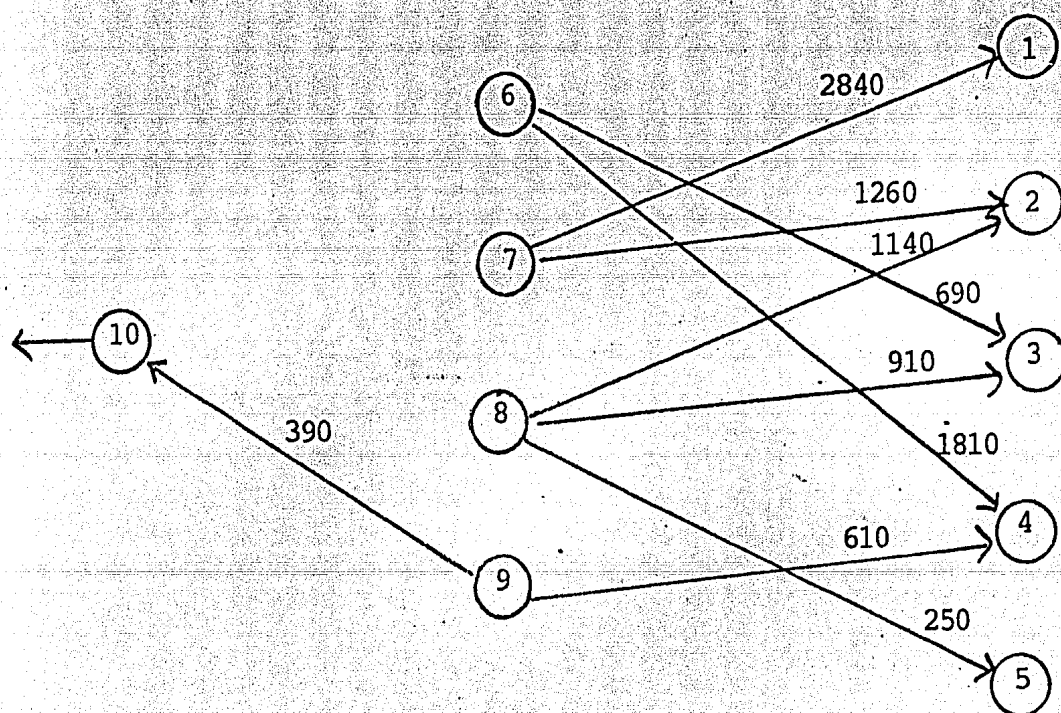
$$\Pi = [-1800, -2000, -2000, -2000, -2200, 300, 400, -200, 0, 0, ]$$

Para  $e_2$  tenemos que  $\Pi_6 - \Pi_2 - c_2 = 300 - (-2000) - 2700 < 0$  no esta en  $\psi_1 \cup \psi_2$

Para  $e_3$  tenemos que  $\Pi_6 - \Pi_3 - c_3 = 3000 - (-2000) - 2400 < 0$  y  $e_3 = u_3 \Rightarrow e_3 \in \psi_2$

$$P = \{6, e_4, 4, e_{14}, 8, e_{13}, 3\}$$

$$\Delta = \min \{2000 - 1500, 310, 1000 - 600, 2000\} = 310, \text{ sale } e_{14} \text{ y } e_3 = 2000 - 310 = 690$$

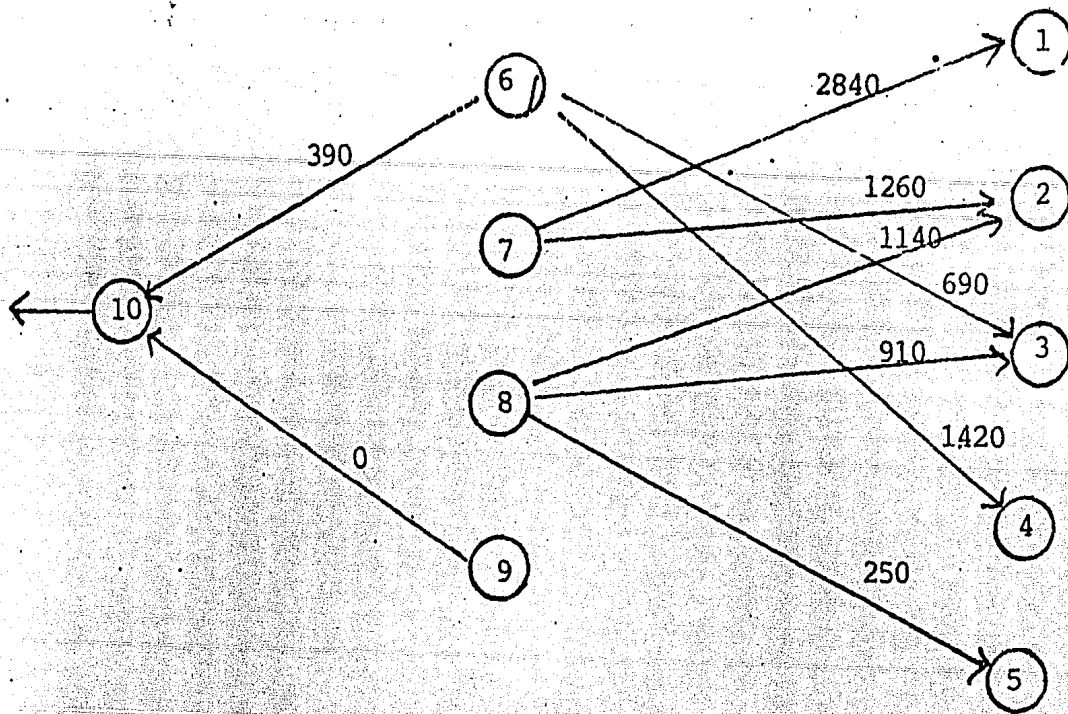


$$\Pi = [-1900, -2100, -2100, -2000, -2300, 300, -300, -300, 0, 0]$$

Para  $e_{21} = 0$  tenemos:  $\Pi_6 - \Pi_{10} - c_{21} = 300 - 0 - 0 > 0 \Rightarrow e_{21} \in \psi_1$

$$P = [10, e_{24}, 9, e_{19}, 4, e_4, 6]$$

$$\Delta = \min \{390, 1000, -610, 1810, \infty\} = 390 \text{ sale } e_{19} \text{ y } e_{21} = 390$$



$$\Pi = [-2200, -2400, -2400, -2300, -2600, 0, 0, -600, 0, 0]$$

Para  $e_2 = 0$ :  $\Pi_6 - \Pi_2 - c_2 = 0 - (-2400) - 2700 < 0$ ;  $e_2 \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_5 = u_5$ :  $\Pi_6 - \Pi_5 - c_5 = 0 - (-2600) - 2500 > 0$ ;  $e_5 \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_8 = 0$ :  $\Pi_7 - \Pi_3 - c_8 = 0 - (-2400) - 2500 < 0$ ;  $e_8 \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_9 = 0$ :  $\Pi_7 - \Pi_4 - c_9 = 0 - (-2300) - 2900 < 0$ ;  $e_9 \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_{11} = 0$ :  $\Pi_8 - \Pi_1 - c_{11} = -600 - (-2200) - 2100 < 0$ ;  $e_{11} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_{14} = 0$ :  $\Pi_8 - \Pi_4 - c_{14} = -600 - (-2300) - 1800 < 0$ ;  $e_{14} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_{17} = 0$ :  $\Pi_9 - \Pi_2 - c_{17} = 0 - (-2400) - 2100 > 0$ ;  $e_{17} \in \psi_1$

$e_{18} = 0$ :  $\Pi_9 - \Pi_3 - c_{18} = 0 - (-2300) - 2100 > 0$ ;  $e_{18} \in \psi_1$

$e_{19} = u_{19}$ :  $\Pi_9 - \Pi_4 - c_{19} = 0 - (-2300) - 2000 > 0$ ;  $e_{19} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_{20} = u_{20}$ :  $\Pi_9 - \Pi_5 - c_{20} = 0 - (-2600) - 1000 > 0$ ;  $e_{20} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$e_{22} = 0$ :  $\Pi_7 - \Pi_{10} - c_{22} = 0 - 0 - 0 = 0$ ;  $e_{22} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

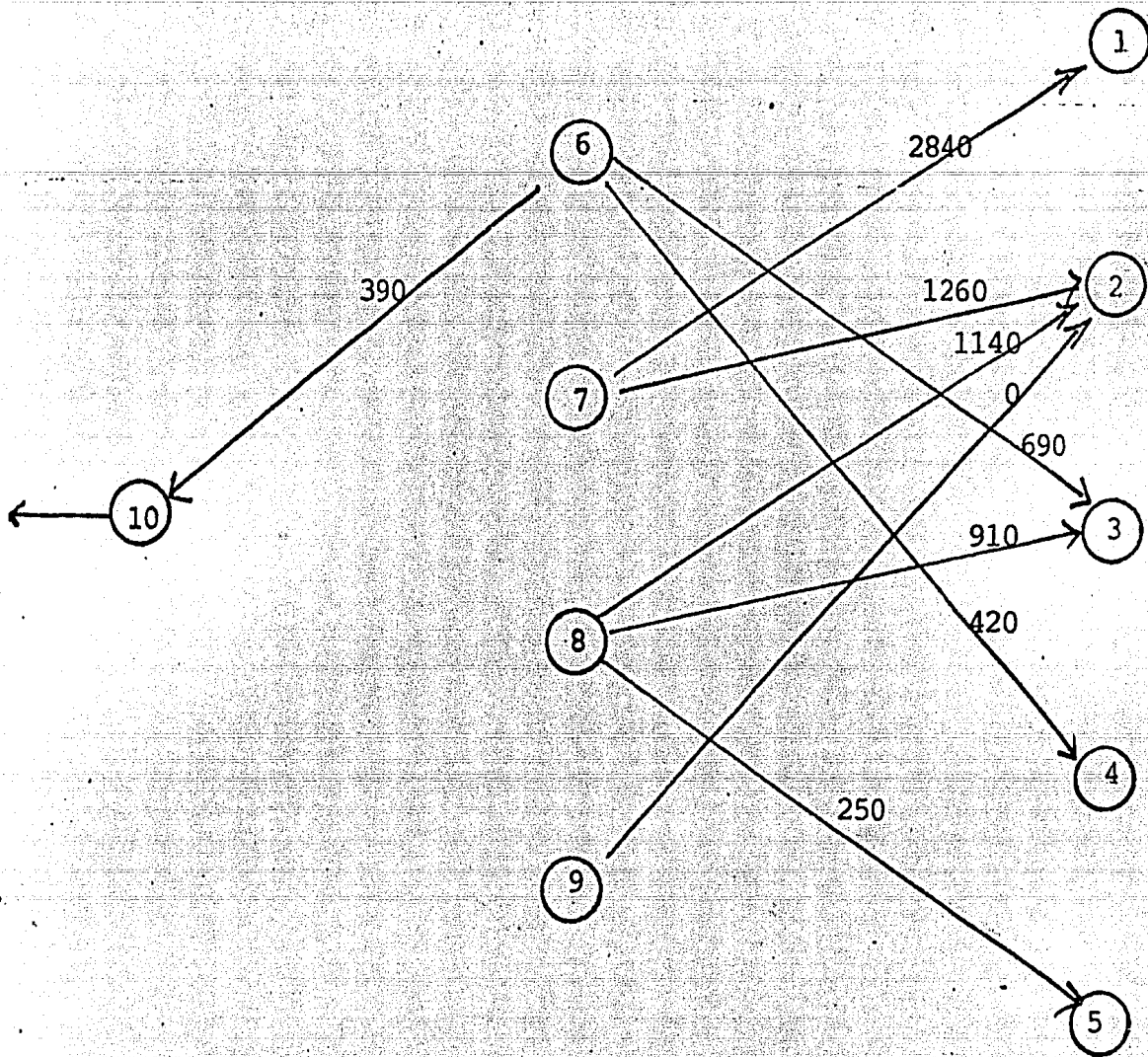
$e_{23} = 0$ :  $\Pi_8 - \Pi_{10} - c_{23} = -600 - 0 - 0 < 0$ ;  $e_{23} \notin \psi_1 \cup \psi_2$

$$\Rightarrow \psi_1 = \{e_{17}, e_{18}\}, \psi_2 = \{\phi\}$$

Tomamos  $e_{17}$ ,  $p = [2, e_{12}, 8, e_{13}, 3, e_3, 6, e_{21}, 10, e_{24}, 9]$

$\Delta = \min \{1140, 1000 - 910, 690, \infty, 0, 1000\} = 0$ , no altera el valor de nuestra función objetivo pero entra a la base.





$$\Pi = [-2200, -2400, -2400, -2300, -2600, 0, 0, -600, -300, 0]$$

$$\text{Para } e_{18} = 0 : -300 - (-2400) - 2100 = 0 \Rightarrow e_{18} \notin \psi_1 \text{ u } \psi_2$$

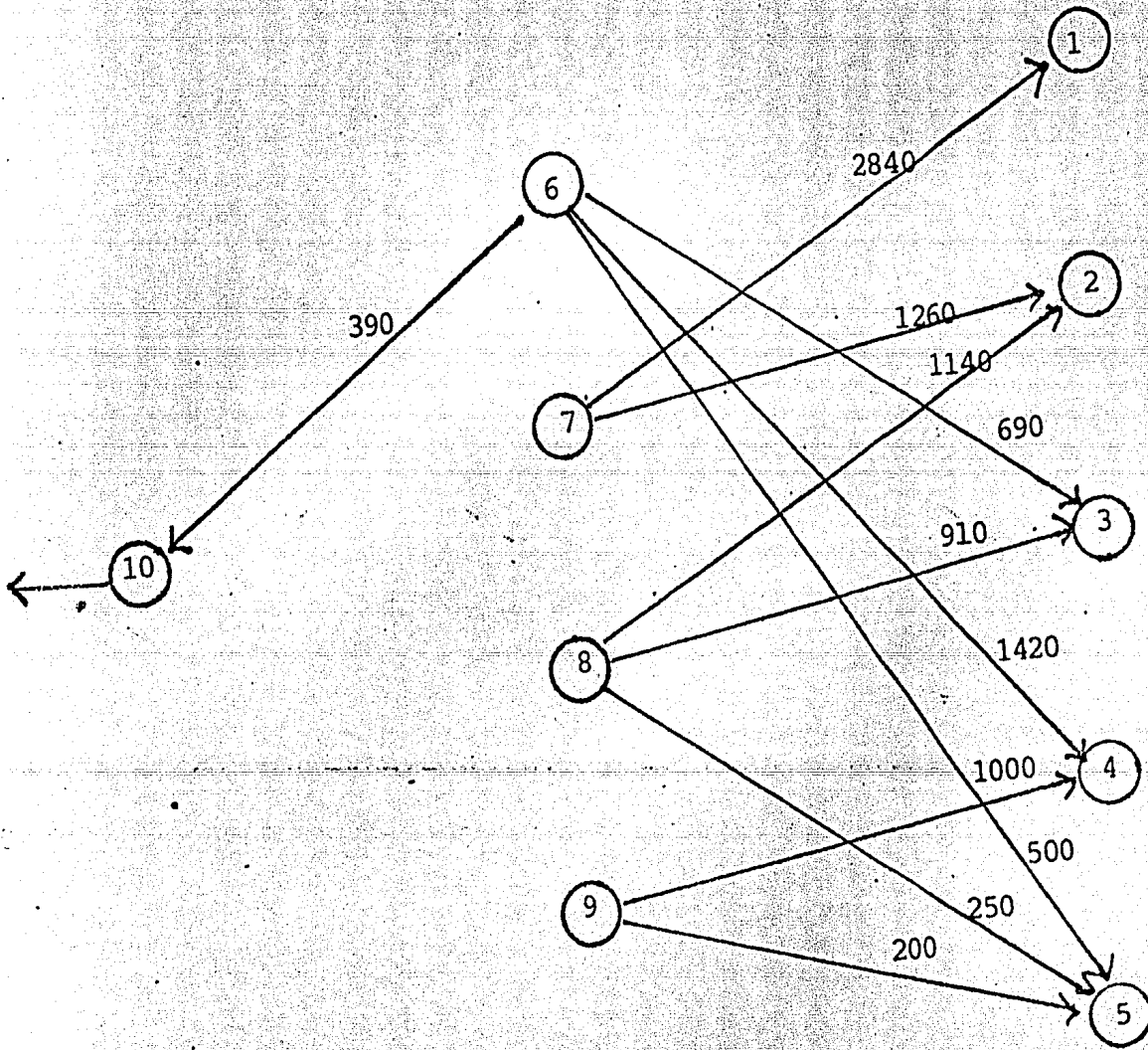
$$\text{para } e_{19} = u_{19} : -300 - (-2600) - 2000 > 0 \Rightarrow e_{19} \notin \psi_1 \text{ u } \psi_2$$

$$\text{para } e_{24} = 0 : -300 - 0 - 0 < 0 \Rightarrow e_{24} \notin \psi_1 \text{ u } \psi_2$$

los demas valores de costo reducido de los arcos no básicos restantes son iguales a los de la iteración anterior:.

$\psi_1 \text{ u } \psi_2 = \{\emptyset\} \therefore$  este es el óptimo

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}) = (0, 0, 690, 1420, 500, 2840, 1260, 0, 0, 0, 0, 1140, 910, 0, 250, 0, 0, 0, 1000, 2000, 390, 0, 0, 0)$



MATERIAL DE REFERENCIA PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS BÁSICAS  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS  
 CUERPO ACADÉMICO DE INVESTIGADORES

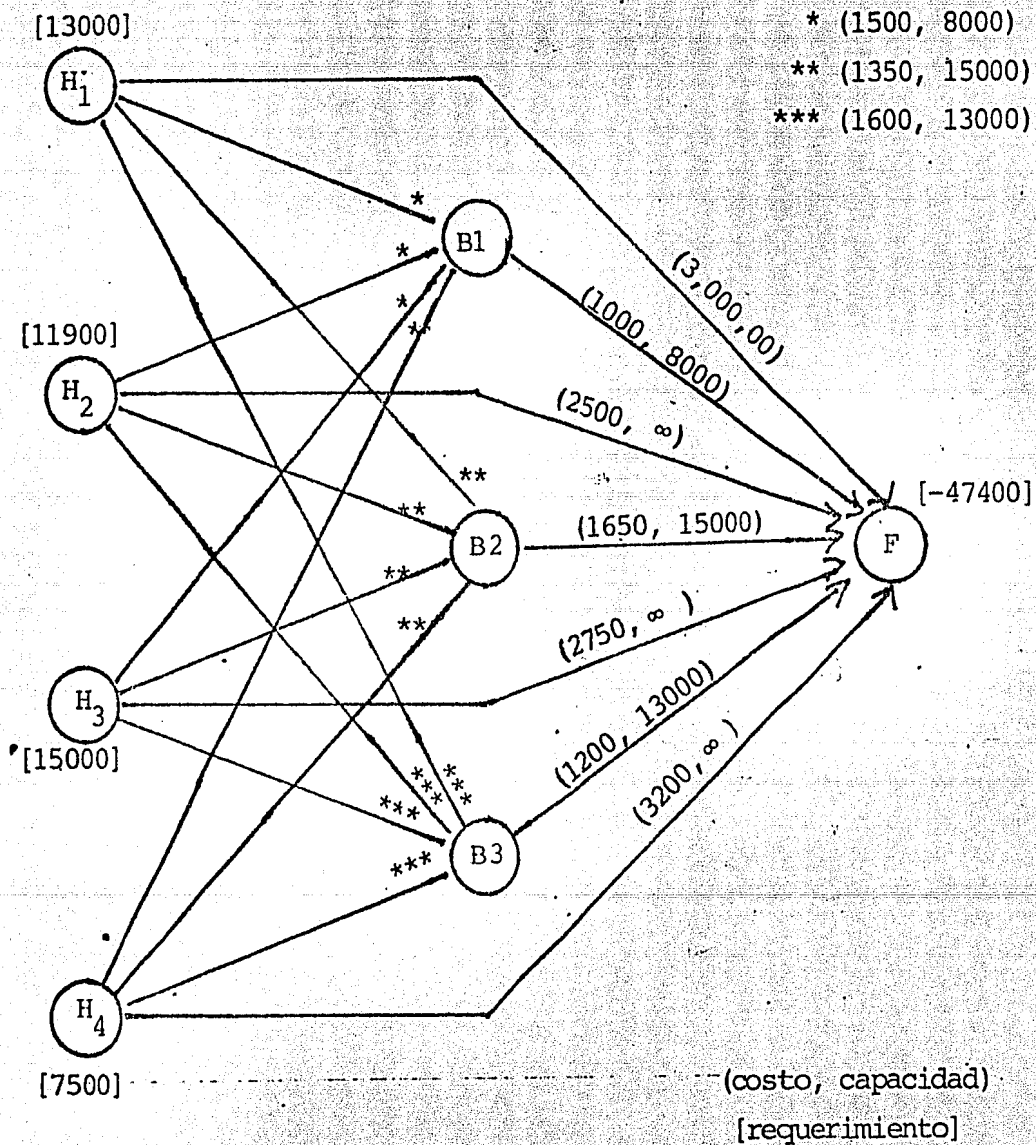
Ejemplo 4. Una fábrica de aceite de limón compra toda la cosecha de cuatro huertos de la región. La producción y costo de envío de cada huerto a la fábrica es como sigue:

Huerta	A	B	C	D
Prod. (ton)	13000	11900	15000	7500
Costo (\$/ton)	3000	2500	2750	3200

La fábrica dispone de tres bodegas que pueden ser usadas como centros de recolección de la producción. Las bodegas, denotadas B1, B2, y B3, tienen una capacidad de 8000, 15000 y 13000 toneladas respectivamente. El costo por envío de la producción de limón de cada huerta a cualquier bodega es nulo. Sin embargo, existe un costo de transporte de las bodegas a la fábrica. Dicho costo es de 1000, 1650 y 1200 pesos por tonelada, de las respectivas bodegas B1, B2 y B3. Asimismo, existe un costo por manejo y almacenamiento del producto en cada bodega dado por 1500, 1350 y 1600 pesos por tonelada respectivamente.

El gerente de la fábrica de limón desea determinar el plan de transporte de la cosecha a costo mínimo.

La red de flujo que representa la problemática es:



y la solución óptima que se obtiene aplicando el método simplex especializado en redes con variables acotadas, se muestra en la siguiente tabla:

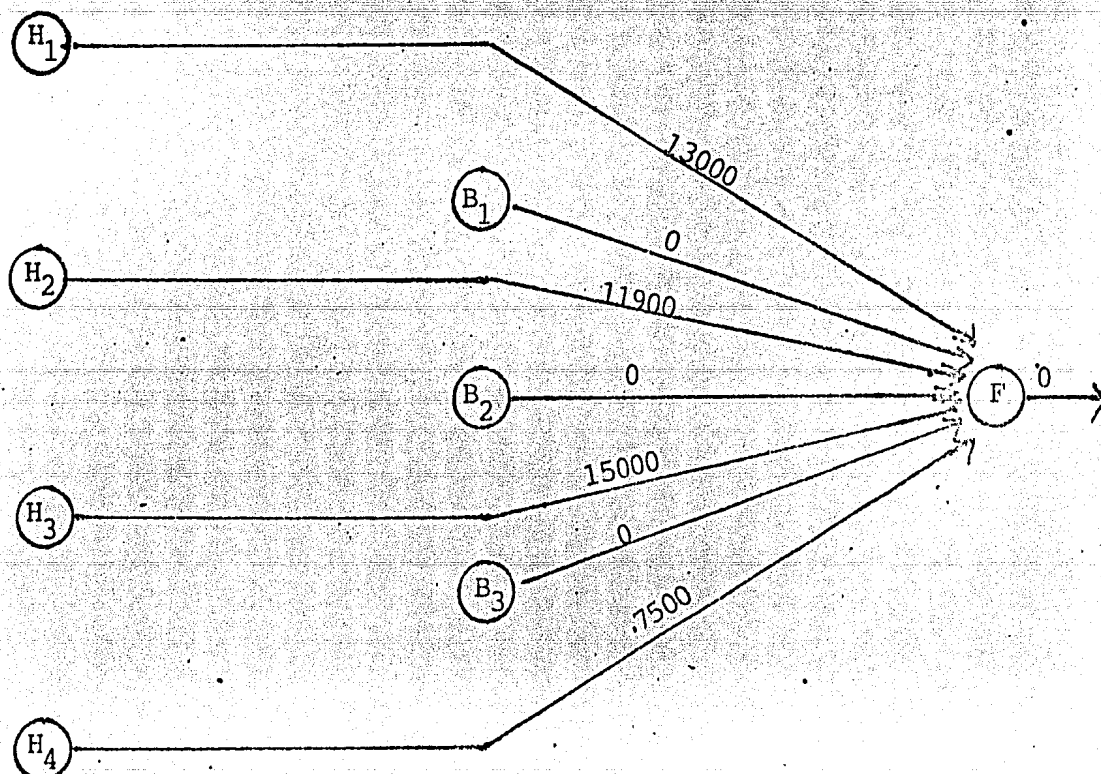
MATERIAL DIDACTICO SIN VALOR COMERCIAL. FES-CCAUQUILIAN 15  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## Nodos

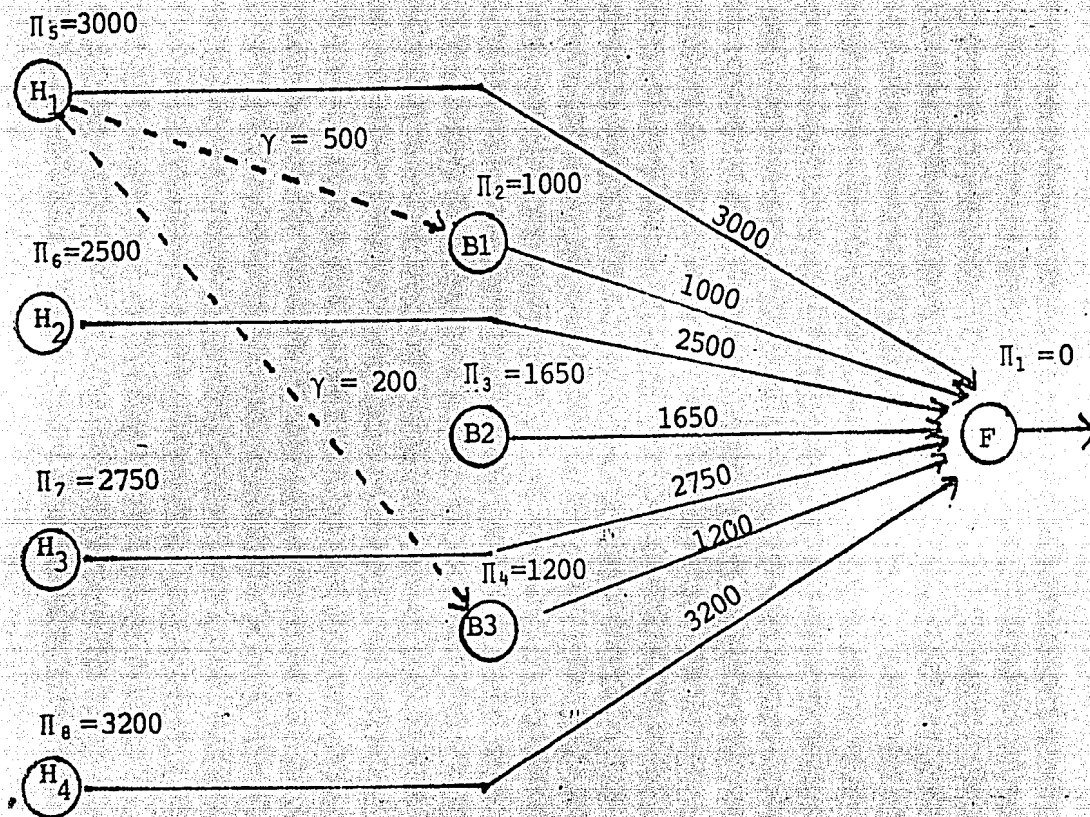
Desde	Hacia	Costo	Flujo
A	B1	1500	4500
A	B3	1600	5500
B	F	2500	11900
C	F	2750	14500
C	B1	1500	500
D	B3	1600	7500
B1	F	1000	8000
B3	F	1200	1300

Con un costo mínimo en el transporte total de la mercancía de: \$ 111,985,000.

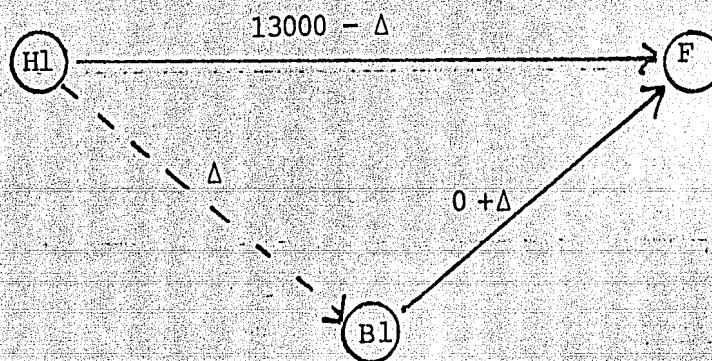
La solución se obtuvo como sigue: se requiere de una solución básica inicial, o bien, un árbol con raíz que sea factible. Empezaremos con el árbol siguiente:



Iteración 1. Cálculo de las variables duales:



donde  $\gamma = \Pi_D(j) - \Pi_H(j) - c_j$ . Seleccionamos el arco que va de H1 a B1 y se forma el ciclo siguiente:

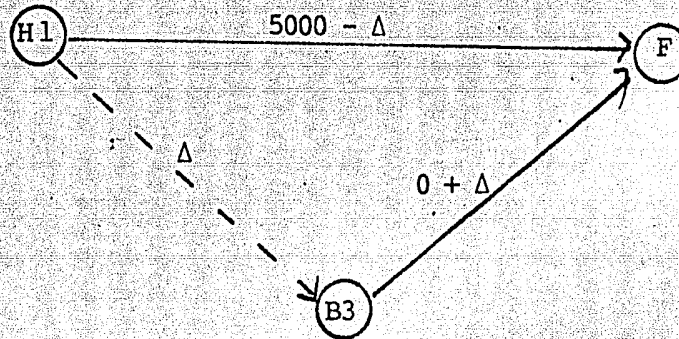


$$\Delta = \min \{8000, \infty, 13000\} = 8000,$$

MATERIAL DE REFERENCIA SIN VALOR COMERCIAL DE MEXICO

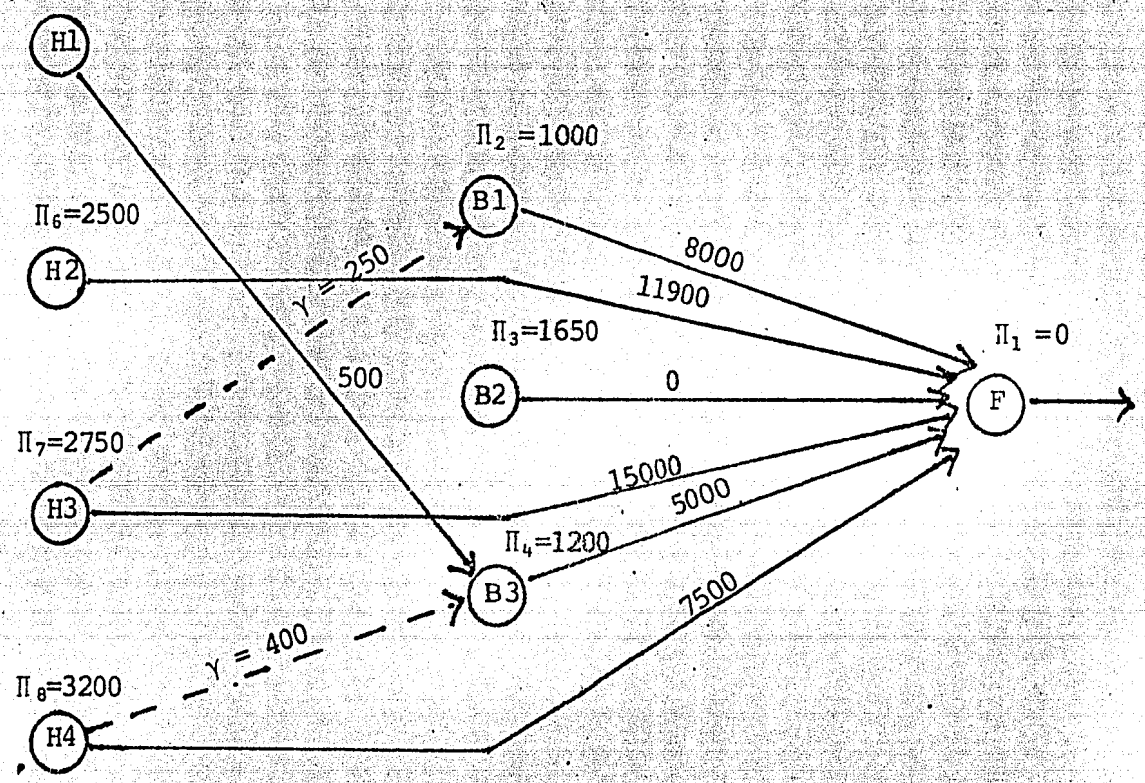
entonces, este arco no entra a la base pero la solución si se altera quedando los valores de los arcos que se encontraban en el ciclo anterior de la siguiente manera:  $(H1, B1) = 8000$  ;  $(B1, F) = 8000$ , y  $(H1, F) = 5000$ .

Iteración 2. El árbol con raíz es el mismo. El cálculo de las variables duales es igual que en la iteración 1. Seleccionamos el arco que va de H1 a B3 y el ciclo que se forma es el siguiente:

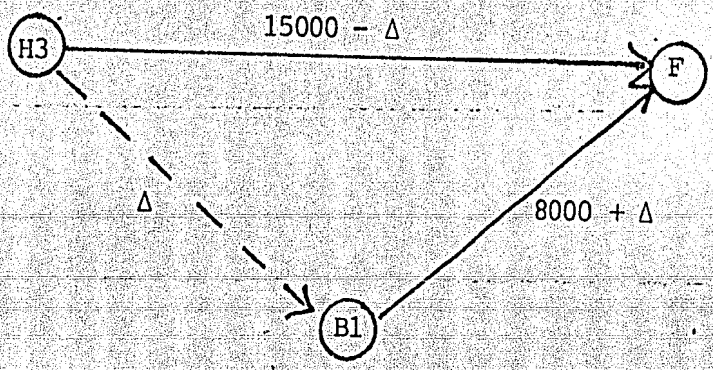


$$\Delta = \min \{13000, \infty, 5000\} = 5000$$

Iteración 3. La nueva base y el cálculo de las respectivas variables duales es como sigue:



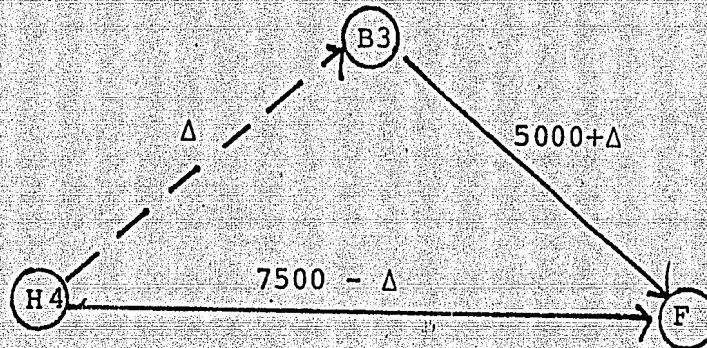
Seleccionamos el arco (H3, B1) y el ciclo que se forma es:



$$\Delta = \min \{8000, 0, 15000\} = 0$$



Como el flujo no se altera escogemos otro arco para que entre a la base, sea este el arco (H4, B3), el ciclo que se forma es:

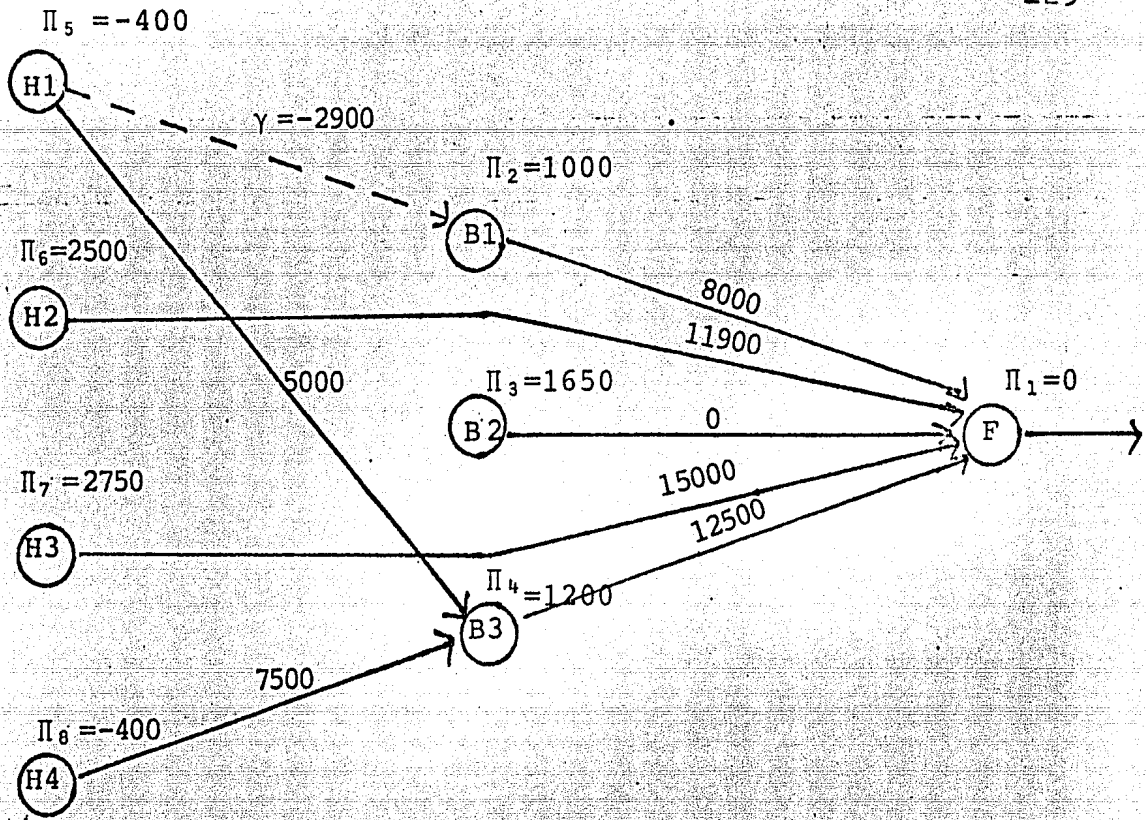


$$\Delta = \min \{13000, 13000 - 5000, 7500\} = 7500$$

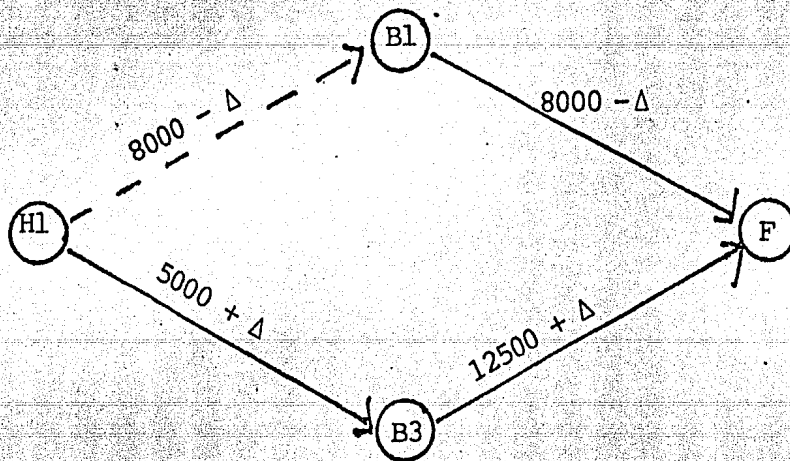
sale el arco (H4, F) y el flujo en los demás arcos queda de la siguiente manera: (H4, B3) = 7500; (B3, F) = 12500; y (H4, F) = 0.

Iteración 4. La nueva base y el cálculo de las variables duales es:

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE GUATEMALA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 COMISIÓN DE INVESTIGACIONES Y DESARROLLO



como el flujo del arco (H1,B1) esta en su cota superior y  $\gamma < 0$ , es candidato para entrar a la base; el ciclo que se forma es el siguiente:



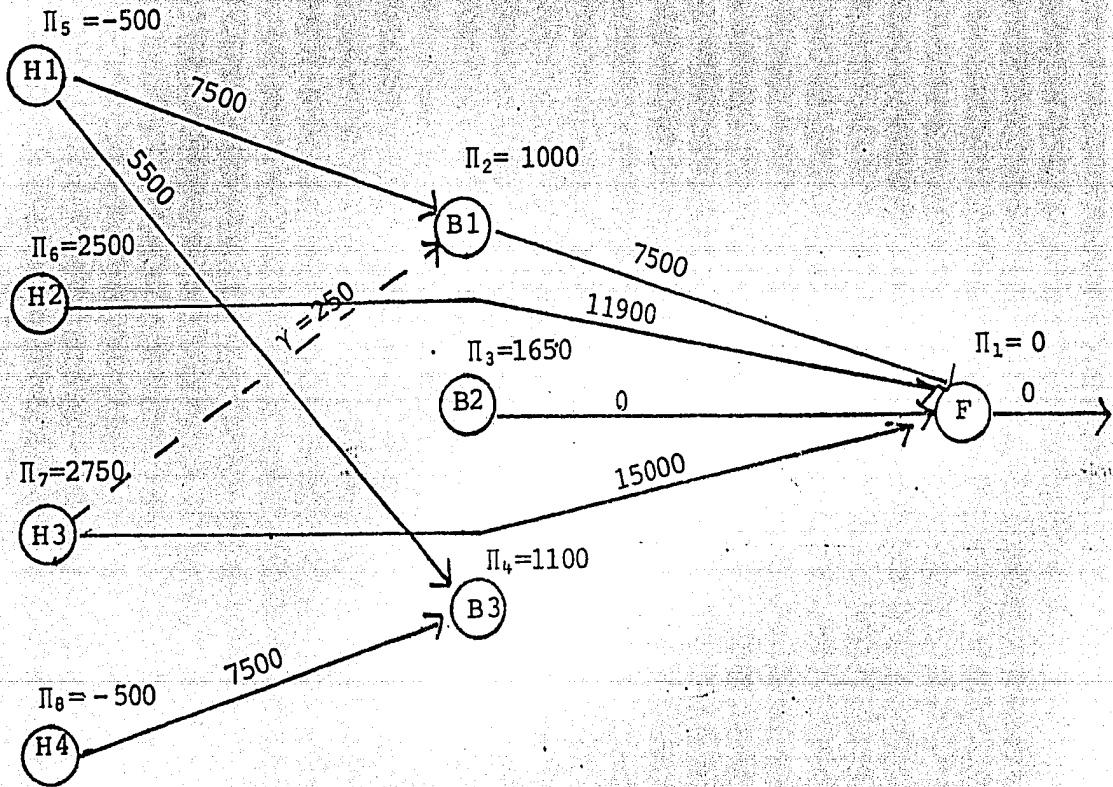
$$\Delta = \min \{8000, 13000 - 12500, 13000 - 5000\} = 500$$

Sale el arco (B3,F) y los valores de los arcos alterados son:

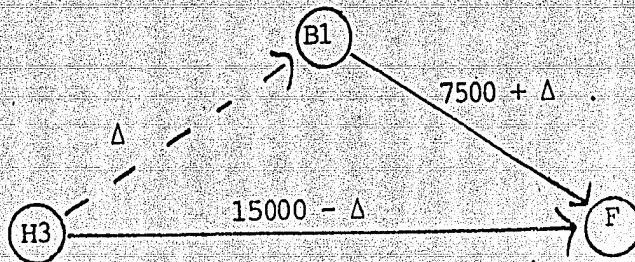
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN AERONÁUTICA

$(H1, B1) = 7500$ ;  $(B1, F) = 7500$ ;  $(B3, F) = 13000$ ; y  
 $(H1, B3) = 5500$ .

Iteración 5. La nueva base y el cálculo de las variables duales es como sigue:



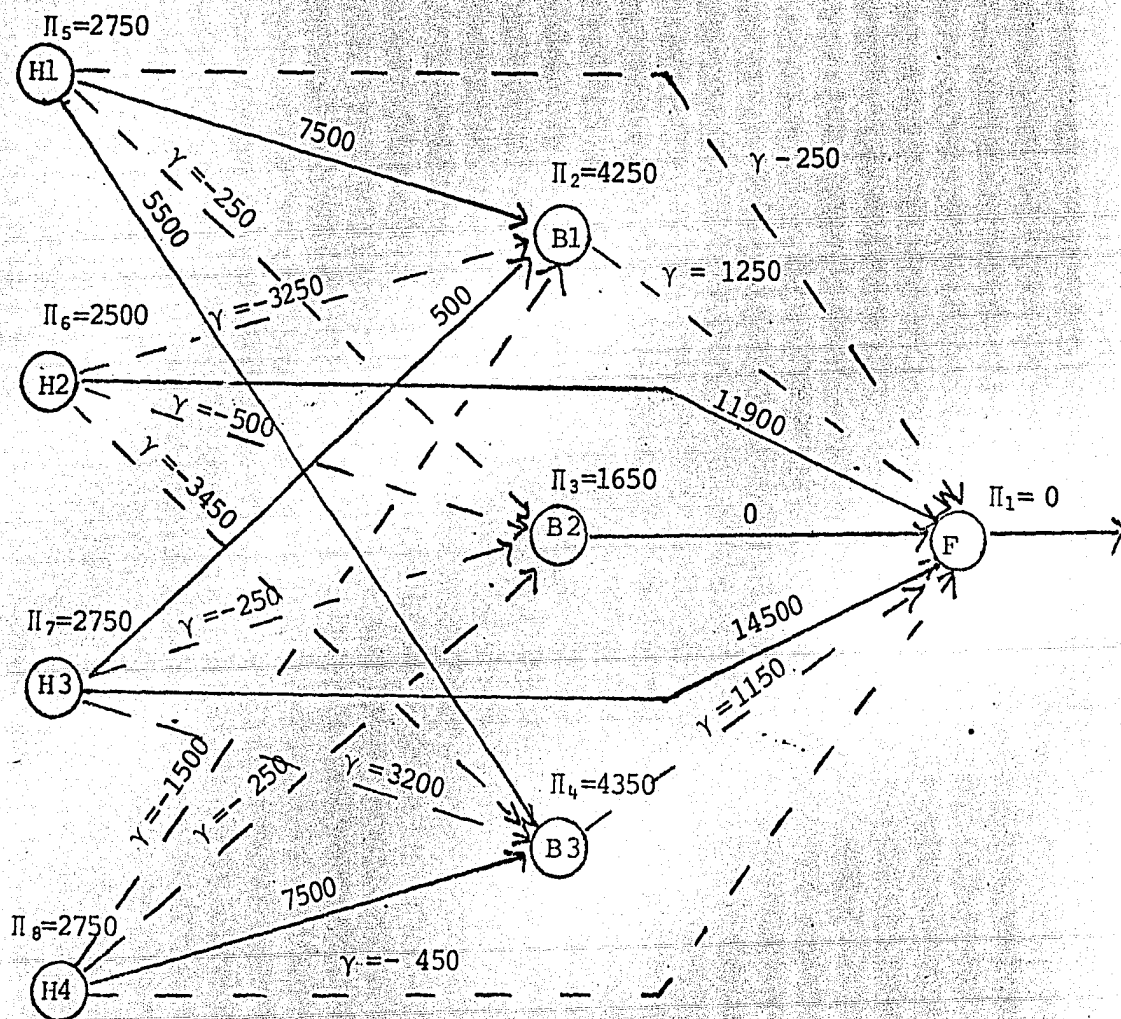
El arco (H3, B1) es candidato de entrar a la base, el ciclo que forma es el siguiente:



$$\Delta = \text{Min} \{8000, 500, 15000\} = 500$$

Sale de la base el arco (B1, F) y los valores de la nueva solución que cambian son los siguientes:  $(H3, B1) = 500$ ;  $(B1, F) = 8000$ ;  $(H3, F) = 14500$ .

Iteración 6. La nueva base y el cálculo de las variables duales es como sigue:



que es la óptima pues  $\psi_1() \psi_2 = \phi$

MATERIAL DIDACTICO DE LA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MEXICO

En conclusión, la estrategia óptima para transportar a un costo mínimo toda la cosecha de limón, se logró utilizando las bodegas B1 y B3 cuyos costos por manejo y almacenamiento, conuinados con el costo del transporte a la fábrica, resultan mas bajos que la transportación directa desde los huertos, claro que este se encuentra restringido por la capacidad de cada bodega; teniendo que transportarse el resto de la cosecha siguiendo la ruta de costo mínimo, que nos indica el algoritmo empleado.

## CAPITULO IV

## MÉTODO SIMPLEX ESPECIALIZADO EN REDES CON RESTRICCIONES ADICIONALES.

El problema de la programación lineal se puede representar en diversas formas siendo la mas simple aquella en la que el problema se describe en términos de una Red, esto no siempre es posible y con frecuencia nos encontramos con problemas en los cuales una parte de las restricciones no está incluida en la Red. Sin embargo, cuando la mayoría de las restricciones se hayan representadas en una Red, y solo un número menor quedan fuera de esta se encuentra atractiva la idea de aprovechar las características de los problemas de flujo en redes para simplificar los cálculos de la solución a nuestro problema. En los capítulos anteriores hemos visto el método simplex y su especialización para resolver el problema de flujo a costo mínimo en una Red, en el presente capítulo se muestra una especialización mas del Simplex para resolver el problema de Redes con restricciones adicionales, ya que, como se mencionó antes, la estructura de red que forma parte del problema, nos ayuda enormemente a simplificar los cálculos para obtener la solución óptima, como paso inicial se describe el problema que nos interesa y se muestran las características de las partes que lo forman, a continuación se da la caracterización de la base y una serie de resultados que nos llevan a una expresión de la inversa de la base, ya que hemos definido nuestro problema y



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

su base se procede al análisis de los cálculos y operaciones que se realizan en el método Simplex para obtener la solución del problema, en cada paso se ha aprovechado la estructura de red que contiene nuestro problema para realizar en ésta el mayor número posible de operaciones de tal manera que los calculos sean lo más simples, para terminar se enumeran los algoritmos empleados, finalizando con el Algoritmo Simplex especializado en redes con restricciones adicionales.



#### 4.1 Descripción del problema.

Considere el problema de redes de flujo con restricciones adicionales

$$\min Z = cx + dy$$

$$Ax = r$$

$$Sx + Py = b$$

$$0 \leq x \leq u ; 0 \leq y \leq v$$

donde

A, matriz de incidencia nodos-arcos de una gráfica conexa  $G = [X, Ar]$  con I nodos y J arcos.

S, P, matrices de orden  $k \times J$  y  $k \times L$ , respectivamente tales que la matriz [S, P] es de rango completo .

u, v, vectores columna de J y L componentes respectivamente

x, y, vectores columna de J y L componentes respectivamente

r, b, vectores columna de I y K componentes, respectivamente.

En dicho problema se supone que la suma de los componentes del vector r es cero, que equivale decir que la demanda de artículos es igual a la oferta. Esto equivale a decir que la parte

del problema de redes esta balanceado. Es inmediato que si la matriz  $S$  es nula el problema planteado se reduce a la solución de dos problemas independientes uno de redes de flujo a costo mínimo y otro de programación lineal.

Como puede observarse el problema planteado es un problema de programación lineal que puede resolverse usando los métodos generales ya existentes, sin embargo, la estructura inmersa del problema de redes puede y ayuda a proponer métodos de solución especializados que resultan más eficientes.

Un aspecto que conviene puntualizar es que la matriz  $A$  tiene rango  $I-1$  y lo mismo es cierto de la matriz aumentada  $[A,r]$ . Es por ello que, para propósitos de análisis, resulta adecuado introducir una variable adicional asociada a un vector que denominaremos arco raíz. La idea de la introducción de este vector es lograr que la matriz de restricciones del problema lineal tenga rango completo. Específicamente el problema resultante queda como:

$$\min Z = cx + dy$$

$$Ax + e_1 a = r$$

$$Sx + Py = b$$

$$0 \leq a \leq 0 ; 0 \leq x \leq u ; 0 \leq y \leq v$$

donde  $e_1$  es un vector con primer elemento igual a uno y el resto de los elementos iguales a cero.

#### 4.2 Caracterización de la base.

Considere la matriz de restricciones del problema de redes de flujo con restricciones lineales adicionales

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A & | & O & | & e_1 \\ \hline & & & & \\ S & | & P & | & O \end{bmatrix}$$

donde  $\underline{A}$  es una matriz de orden  $(I+K) \times (J+L+1)$ . Asimismo se tiene que  $\underline{A}$  es de rango completo y cada una de las matrices bases  $\underline{B}$  de  $\underline{A}$  puede expresarse en términos sencillos como sigue:

Proposición 1. Cualquier base de  $\underline{A}$  será de la siguiente forma:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B & | & C \\ \hline & & \\ D & | & F \end{bmatrix} \begin{matrix} \} I \\ \\ \} K \\ \\ \end{matrix}$$

I      K

donde B es una submatriz de  $[A \ ; \ e_1]$  y determinante de B es distinto de cero.

Prueba. Toda base de  $\underline{A}$  se puede representar en la siguiente forma:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} V \\ \hline U \end{bmatrix} \begin{matrix} \} I \\ \\ \} K \\ \\ \end{matrix}$$

I+K

con V contenido en  $[A, e_1]$

Supongamos que el rango de  $V$  es menor que  $I$ , entonces los renglones de  $V$  no son linealmente independientes y esto contradice la hipótesis de la independencia lineal de  $B$ , por lo tanto podemos particionar  $V$  de la siguiente manera:

$$V = \begin{bmatrix} B & C \\ I & K \end{bmatrix}$$

con el determinante de  $B$  distinto de cero y  $B$  submatriz de  $[A, e_1]$ .

Conviene señalar que la submatriz  $B$  es una base de  $[A, e_1]$  y que sus columnas corresponden a un árbol generador enraizado al que denotaremos por  $T$ . Dicho árbol sirve de base para efectuar el cálculo (sencillo) de la inversa de  $B$  en diversas operaciones.

Como no todas las componentes de  $B$  corresponden a una estructura de red, al realizarse los cálculos de una solución al problema se encuentran con frecuencia diferentes productos de los elementos de  $B$ , una de las expresiones que ayudaran para simplificar los cálculos de estos es la siguiente:

$$Q = F - DB^{-1}C$$

a la cual llamaremos la "Matriz de trabajo". Esta matriz será empleada de manera extensa en su forma inversa en los cálculos de una solución óptima al problema, por lo cual se propone lo siguiente.

Proposición 2. Si la matriz

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \end{bmatrix}$$

es invertible, entonces  $F - DB^{-1}C$  es también invertible.

Prueba. Observe que el determinante de

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} I & -B^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}$$

es uno. Asimismo

$$\underline{B} \underline{T} = \begin{bmatrix} -B & C \\ D & F - DB^{-1}C \end{bmatrix}$$

y el determinante de  $(\underline{B} \underline{T})$  es igual al producto del determinante de  $(\underline{B})$  por el determinante de  $(\underline{T})$ , que será diferente de cero cuando  $\det(B)$  y  $\det(T)$  son distintos de cero. Como  $\underline{B}$  y  $\underline{T}$  son invertibles, entonces sus determinantes son distintos de cero, por lo tanto

$$Q = F - DB^{-1}C$$

es de rango completo, es decir, es invertible.

Proposición 3. Si

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \end{bmatrix}$$

es invertible y B es invertible, entonces:

$$\underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1} C Q^{-1} D B^{-1} & -B^{-1} C Q^{-1} \\ -Q^{-1} D B^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots (1)$$

Prueba. Sabemos por la proposición anterior que Q es invertible, entonces  $Q^{-1}$  existe. Multiplicamos  $\underline{B}$  por  $B^{-1}$  y mediante operaciones algebraicas se prueba el resultado.

MATERIAL PEDAGÓGICO DEL VALOR ECONÓMICO DE LA ACTIVIDAD EMPRESARIAL  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 ESTADÍSTICA Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES  
 ESTADÍSTICA Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES

### 4.3 Cálculo de las variables duales.

Uno de los cálculos requeridos en el método simplex es el de las variables duales que se definen como:

$$\Pi = C^B \underline{B}^{-1}$$

donde  $C^B$  es el vector de costos asociado a las variables básicas. Particionamos  $\Pi$  y  $C^B$  de manera similar de como se hizo con la base  $\underline{B}$  en la sección anterior:

$$\Pi = [\Pi^1 ; \Pi^2], \quad C^B = [C^1 ; C^2]$$

Entonces, haciendo los cálculos pertinentes tenemos que:

$$\begin{aligned} [\Pi^1, \Pi^2] &= [C^1, C^2] \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= [(C^1 + C^1B^{-1}CQ^{-1}D - C^2Q^{-1}D)B^{-1}, (C^2 - C^1B^{-1}C)Q^{-1}] \dots\dots (2) \end{aligned}$$

Una vez obtenida esta expresión las variables duales pueden calcularse fácilmente puesto que, como puede observarse, el producto  $C^1B^{-1}$  se realiza fácilmente mediante operaciones de etiquetado en T utilizando el algoritmo 3.1. Con este valor se calcula  $\Pi$  en forma bastante simple siguiendo el algoritmo 4.1

Con el valor obtenido de las variables duales se calculan los costos reducidos de las variables no básicas  $C^N - \Pi^N$

donde  $C^N$  es el vector de costos asociado a las variables no básicas y  $N$  son las columnas de la matriz de restricciones  $A$  asociadas a dichas variables.

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\psi_1 = \{e_j : x_j = 0 \text{ y } \Pi_D^1(j) - \Pi_H^1(j) + \Pi^2 s(j) - c_j > 0\} \text{ y}$$

$$\psi_2 = \{e_j : x_j = U_j \text{ y } \Pi_D^1(j) - \Pi_H^1(j) + \Pi^2 s(j) - c_j < 0\}$$

De estos dos conjuntos seleccionamos la variable que entrará a la base, llamémosla  $x_k$ , además definimos  $\delta_k$  de la siguiente manera:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{si } e_k \in \psi_1 \\ -1 & \text{si } e_k \in \psi_2 \end{cases}$$

conviene ahora decidir cual variable saldrá de la base, para esto calculamos

$$Y = \underline{B}^{-1} \underline{A}(k)$$

y consideramos dos casos:

Caso 1. La columna entrante corresponde a un arco.

Particionamos  $Y$  y  $\underline{A}(k)$  para que sean compatibles con (1)

MATERIA DE OPTIMIZACION LINEAL Y NO LINEAL. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO. FACULTAD DE INGENIERIA. SECCION DE INGENIERIA EN SISTEMAS DE COMPUTACION.



$$Y = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^2 \end{bmatrix} \quad \underline{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) \\ \vdots \\ S(k) \end{bmatrix}$$

de aquí:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(k) \\ \vdots \\ S(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B^{-1}[A(k) + CQ^{-1}DB^{-1}A(k) - CQ^{-1}S(k)] \\ \vdots \\ Q^{-1}[S(k)] \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

Esta expresión se calcula con el algoritmo 4.2 en el cual se aprovechan las características de  $B^{-1}$  para hacer las operaciones en forma simple y rápida empezando operaciones de equiquetado en el árbol asociado a B y reduciéndose en forma considerable el número de operaciones algebraicas empleadas para la obtención de (3).

Caso 2. La columna que entra no es un arco.

Particionamos Y y  $\underline{A}(k)$  para que sean compatibles con (1).

Específicamente sean

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y CENSOS DE MEXICO

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{A}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ p(k) \end{bmatrix}$$

la componente de  $\underline{A}(k)$  asociada al árbol es cero por tratarse de una variable que no está representada en el árbol, de aquí:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & \vdots & -B^{-1}CQ^{-1} \\ -Q^{-1}DB^{-1} & \vdots & Q^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ p(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -B^{-1}CQ^{-1}p(k) \\ Q^{-1}p(k) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

Siguiendo el mismo criterio que en el caso 1, se aprovechan las características de B y los cálculos de (4) se realizan mediante el algoritmo 4.3.

Toda vez que se ha obtenido el vector Y se debe decidir cual variable saldrá de la base, para esto consideramos los siguientes criterios: hacemos

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{u_j - x_j}{|y_j|}, \text{ con } y_j < 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\}$$

$$\Delta_2 = \min \left\{ \frac{x_j}{|y_j|}, \text{ con } y_j > 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\}$$

y escogemos  $\Delta_k = \min \{\Delta_1, \Delta_2, u_k\}$ , si  $\Delta_k = u_k$  la solución no se altera y se escoge otra  $k$ , si esta no existe entonces hemos llegado al óptimo, si no es así, hacemos

$$\tilde{x} = x_B - \delta_k Y_k \Delta_k$$

la nueva solución se obtiene al cambiar la componente correspondiente a  $\Delta_k$  del vector  $\tilde{x}$  por  $x_k = \Delta_k$ , cuando  $\delta_k = 1$ , o bien si  $\delta_k = -1$  entonces  $x_k = u_k - \Delta_k$ .

#### 4.4 Actualización de la inversa de la base de trabajo.

Una vez obtenida la nueva solución, si esta no es la óptima se tiene que realizar una nueva iteración, como a la base de nuestro problema se le ha cambiado una de sus columnas es necesario actualizarla, hemos observado que los algoritmos que se aplican para los cálculos de cada iteración no requieren de la inversa de  $\underline{B}$  sino solamente de sus componentes y de la matriz de trabajo  $Q$  en su forma inversa. De todos los elementos que se requieren para el cálculo de la nueva solución el único que desconocemos es la inversa de la matriz de trabajo, esta sección está dedicada a la obtención de una expresión de  $Q^{-1}$  en términos conocidos, y la demostración de como se llega a este resultado se muestra en el apéndice II.

Empezaremos por recordar que  $Q = F - DB^{-1}C$ . en la  $i$ -ésima iteración, llamamos  $\underline{B}_i$  y  $Q_i$  a la base y a la matriz de trabajo respectivamente. Deseamos una expresión para  $Q_{i+1}^{-1}$  en términos de  $Q_i^{-1}$ .

La base en la iteración  $i+1$  - esima ( $\underline{B}_{i+1}$ ) se ha obtenido a partir de  $\underline{B}_i$  al cambiar en esta última una de sus columnas por un vector de  $\underline{A}$  que no se encontraba en  $\underline{B}_i$ , además se sigue conservando la independencia lineal de las columnas de  $\underline{B}_{i+1}$ , se puede decir que:

$$\underline{B}_{i+1}^{-1} = E \underline{B}_i^{-1}$$

donde E es una matriz de columnas elementales o de permutación. Particionamos E para que sea compatible con  $\underline{B}_i$ :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & | & E_2 \\ \hline E_3 & | & E_4 \end{bmatrix}$$

Los cálculos de la matriz E se muestran en el apéndice I.

Mediante una serie de sustituciones que se muestran en el apéndice II se llega al siguiente resultado:

$$Q_{i+1}^{-1} = [E_4 - E_3 \underline{B}_i^{-1} C_i] Q_i^{-1}$$

que es la inversa de la matriz de trabajo en la iteración  $i+1$ .

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## 4.5 ALGORITMOS

Algoritmo 4.1 Cálculo de variables duales.

Propósito: Determinar el valor de las variables duales de un problema de redes con restricciones adicionales. Específicamente:

$$[\Pi^1 ; \Pi^2] = [(c^1 + c^1 B^{-1} C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D) B^{-1} \quad (c^2 - c^1 B^{-1} C) Q^{-1}]$$

## DESCRIPCION

Paso 1.  $\gamma^1 := c^1 B^{-1}$  (Algoritmo 2.1)

Paso 2.  $\gamma^2 := c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D$

Paso 3.  $\Pi^1 := \gamma^2 B^{-1}$  (Algoritmo 2.1)

Paso 4.  $\Pi^2 := (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1}$

La importancia de este algoritmo reside en que los cálculos de  $C^B B^{-1}$  en los pasos 1 y 3, se facilitan aprovechando la estructura de  $B^{-1}$ .

Algoritmo 4.2 Cálculo de la columna de cambio (caso 1).

Propósito: Calcular la columna de cambio de un problema de redes con restricciones adicionales, para el caso en el que la variable entrante corresponde a un arco. Específicamente:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}[A(k) + CQ^{-1}DB^{-1}A(k) - CQ^{-1}S(k)] \\ Q^{-1}[S(k) - DB^{-1}A(k)] \end{bmatrix}$$

#### Descripción

Paso 1.  $\gamma^1 := B^{-1}A(k)$ , utilizando la operación 2.1

Paso 2.  $\gamma^2 := A(k) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(k)$ .

Paso 3.  $\gamma^1 := B^{-1}\gamma^2$ , (Algoritmo 2.2).

Paso 4.  $\gamma^2 := Q^{-1}[S(k) - D\gamma^1]$

INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE AVILA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE AVILA

Algoritmo 4.3 Cálculo de la columna de cambio (caso 2).

Propósito: Calcular la columna de cambio de un problema de redes con restricciones adicionales, para el caso en el que la variable que entra no corresponde a un arco. Específicamente:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \hline y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}C Q^{-1}P(k) \\ \hline Q^{-1}P(k) \end{bmatrix}$$

#### Descripción

Paso 1.  $y^2 := Q^{-1}P(k)$

Paso 2.  $\gamma := C y^2$

Paso 3.  $y^1 := -B^{-1}\gamma$  (algoritmo 2.2)



Algoritmo 4.4 Simplex especializado en redes con restricciones adicionales.

Propósito: Resolver el problema de redes con restricciones adicionales.

Descripción

Paso 1. Inicialización. Sea  $x^B$  una solución básica factible.

Paso 2. Cálculo de las variables duales. Se calcula  $\Pi = c^B \underline{B}^{-1}$  utilizando el algoritmo 4.1.

Paso 3. Análisis de costos reducidos. Definimos:

$$\psi_1 = \{e_j \text{ con } x_j = 0 \text{ y } \Pi_D^1(j) - \Pi_H^1(j) + \Pi^2 S(j) - c_j > 0\}$$

$$\psi_2 = \{e_j \text{ con } x_j = u_j \text{ y } \Pi_D^1(j) - \Pi_H^1(j) + \Pi^2 S(j) - c_j < 0\}$$

Si  $\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$  terminar, la solución es óptima, si no escogemos  $e_k \in \psi_1 \cup \psi_2$  y  $\delta: = 1$  si  $e_k \in \psi_1$  ó  $\delta: = -1$  si  $e_k \in \psi_2$ .

Paso 4. Columna de cambio. Calculamos  $Y = \underline{B}^{-1} \underline{A}(k)$ .

Si  $A(k) \neq 0$  se emplea el algoritmo 4.2 si no usamos algoritmo 4.3.

Si  $\delta = 1$  definimos

MATERIAL DE REFERENCIA PARA EL CURSO DE ECONOMÍA DE EMPRESAS

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{u_j - x_j}{|x_j|}, \text{ con } y_j < 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\}$$

$$\Delta_2 = \min \left\{ \frac{x_j}{|y_j|}, \text{ con } y_j > 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\},$$

escogemos  $\Delta_k = \min \{ \Delta_1, \Delta_2, u_k \}$

hacemos  $\tilde{x} = x^B + y_k \Delta_k$ ; y la nueva solución será el vector  $\tilde{x}$  cambiando su componente  $\tilde{x}_{\Delta k}$  por  $x_k = u_k$ .

Si  $\Delta_k = u_k$  la base no cambia y escogemos otra variable, en este caso ir al paso 3.

Si  $\delta_k = -1$  definimos.

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{u_j - x_j}{|y_j|}, \text{ con } y_j < 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\}$$

$$\Delta_2 = \min \left\{ \frac{x_j}{|y_j|}, \text{ con } y_j \geq 0 \text{ y } x_j \text{ básica} \right\},$$

escogemos  $\Delta_k = \min \{ \Delta_1, \Delta_2, u_k \}$

hacemos  $x = x^B + y_k \Delta_k$ ; y la nueva solución será el vector  $\tilde{x}$  cambiando su componente  $\tilde{x}_{\Delta k}$  por  $x_k = u_k - \Delta_k$ . Si  $\Delta_k = u_k$  la base no cambia y escogemos otra variable para que entre a la base, en este caso ir al paso 3.

Paso 5. Actualización de la inversa de la matriz de trabajo.

Calculamos E tal que  $\underline{B}_{i+1}^{-1} = E \underline{B}_i^{-1}$  (ver apéndice I)

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & & E_2 \\ & \vdots & \\ E_3 & & E_4 \end{bmatrix}$$

$$Q_{i+1}^{-1} = [E_4 - E_3 B_i^{-1} C_i] Q_i^{-1}$$

Ir al paso 1.

## CAPITULO V

## EJEMPLOS

En este capítulo se presentan tres ejemplos en los que se aplica el algoritmo Simplex Especializado en Redes con Restricciones Adicionales. En el primer ejemplo se muestra como obtener una solución inicial para este tipo de problemas. El ejemplo número dos es un problema clásico de transporte al cual se le ha agregado la condicionante de que exista una estación de gasolina en la ruta que se elija como óptima. El tercer ejemplo refleja como, a pesar de que no todas las restricciones del problema son representadas en la red, los cálculos resultan bastante sencillos al aprovechar esta parte de la estructura del problema siguiendo el algoritmo descrito en el capítulo cuatro. Los tres ejemplos de este capítulo procuran mostrar como se efectúan los cálculos y las diferentes opciones que se presentan en el transcurso de la ejecución de cada paso del algoritmo propuesto para resolver este tipo de problemas.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Ejemplo 1. Considere el problema de

$$\text{Minimizar: } Z = 2x_1 + 4x_3$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_3 \leq -2$$

$$-x_2 - x_3 \leq -2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 1; 0 \leq x_3 \leq 3$$

Resolveremos este problema de redes con restricciones adicionales usando el método descrito en este trabajo. Empezaremos por resolver un problema modificado para determinar una solución inicial, específicamente sea el problema:

$$\text{Minimizar } z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

$$\text{sujeto a: } z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$$

$$x_1 + x_2 + z_1 = 5$$

$$+ x_3 - z_2 = -2$$

$$-x_2 - x_3 - z_3 = -2$$

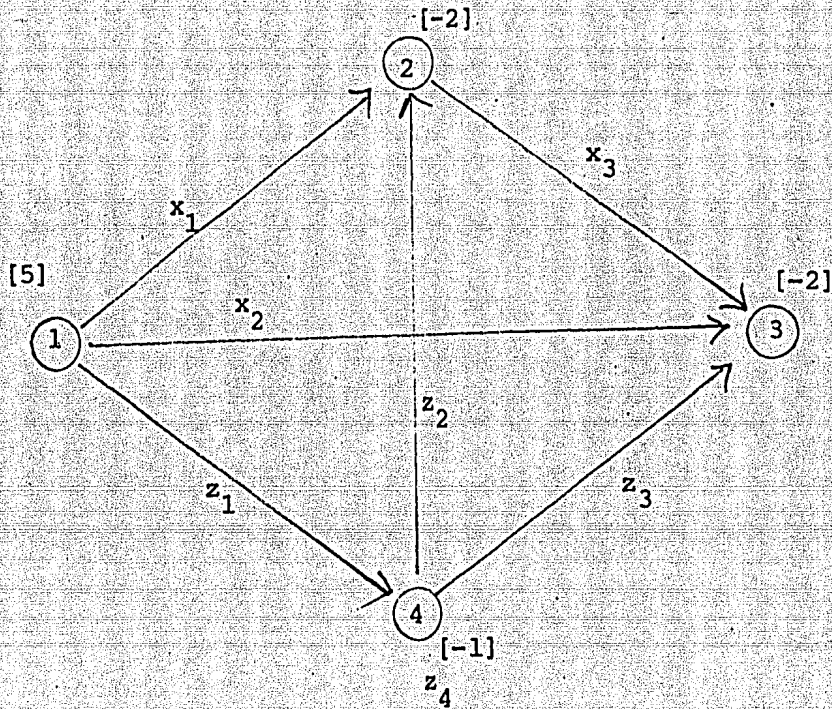
$$2x_1 + x_2 + z_5 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + z_6 = 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 3, 0 \leq z_i \leq \infty \quad i=1, \dots, 3$$

$$z_4 = 0.$$

La gráfica asociada a este problema es:



Sea la solución inicial:

$$x^B = [z_4, z_1, z_2, z_3, z_5, z_6]^t = [0, 5, 2, 2, 7, 0]^t$$

$$x^N = [x_1, x_2, x_3] = [0, 0, 0]$$

y observese que la base tiene la forma:

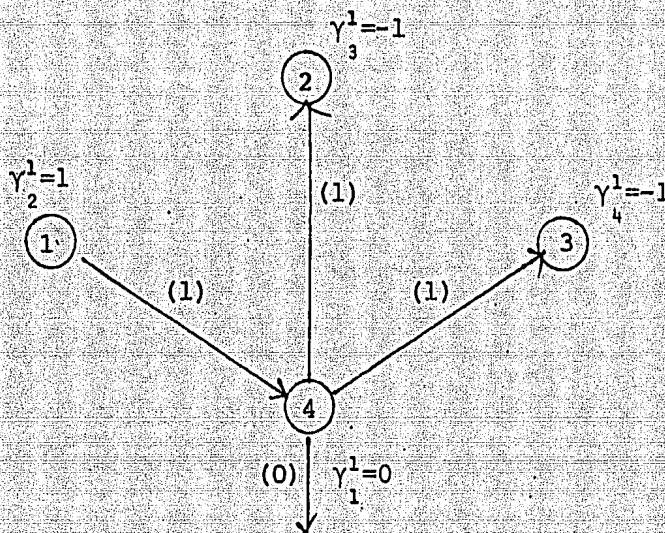
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C$  es la matriz identidad de orden  $2 \times 2$  y lo mismo  $Q^{-1}$ .

Iteración 1

Cálculo de las variables duales:

$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 0, -1, -1]$ , como se muestra en la gráfica



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = [0, 1, 1, 1]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = \gamma^1 = [0, 1, -1, -1]$$

$$\Pi^2 = [c^2 - \gamma^1 C] Q^{-1} = [0, 0]$$

$$\Pi = [0, 1, -1, -1 ; 0, 0]$$

Hacemos el cálculo de costos reducidos para  $x_1 = 0$  tenemos que

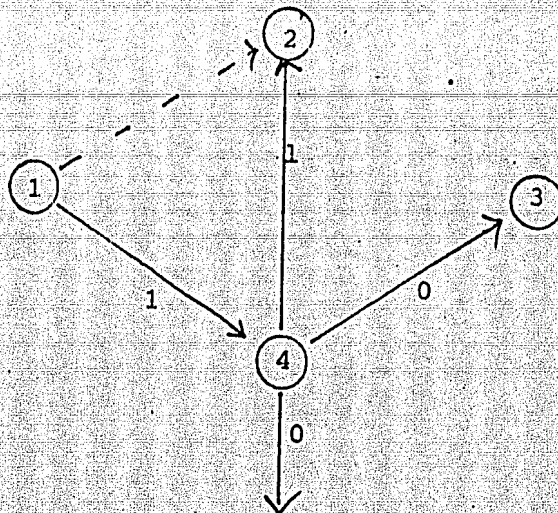
$$\Pi_{D(1)}^1 + \Pi_{H(1)}^1 + \Pi^2 S(1) - c_1 = 2 > 0$$

Entonces  $x_1$  es candidato de entrar a la base

$$Y = B^{-1} A(1)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$





$$Y^2 = A(1) + C Q^{-1} D Y^1 - C Q^{-1} S(1) = A(1)$$

$$Y^1 = B^{-1} Y^2 = B^{-1} A(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = Q^{-1} [S(1) - D Y^1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{0}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

y  $\Delta = 0$  corresponde a  $z_6$  que sale de la base y  $x_1 = 0$  entra en esta

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x^B = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 2.

Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 1, -1, -1]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } D = [\bar{0}]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 0, -1, -1]$$

$$\Pi^2 = [c^2 - \gamma^1 C] Q^{-1} = [0, -2]$$

$$\Pi = [0, 1, -1, -1 ; 0, -2]$$

Para  $x_2 = 0$  tenemos que

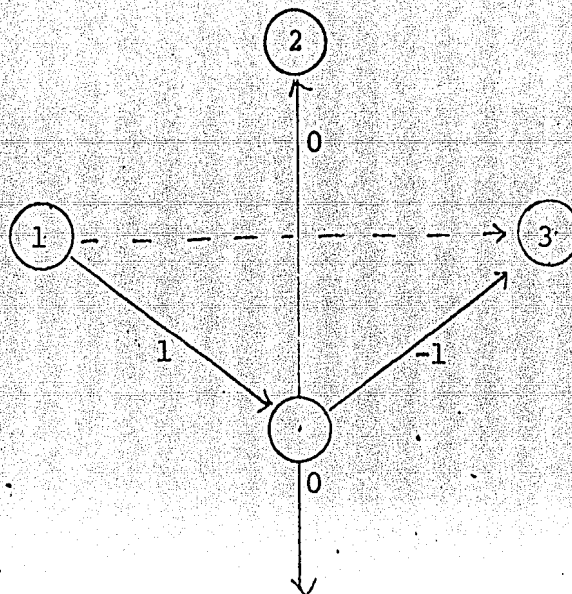
$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^2 + \Pi^2 S(2) - c_2 = 6 > 0$$

tomamos  $x_2$

$$Y = B^{-1} A(1)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

como se muestra en la siguiente gráfica



$$Y^2 = A(2) + CQ^{-1}DY^1 - CQ^{-1}S(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

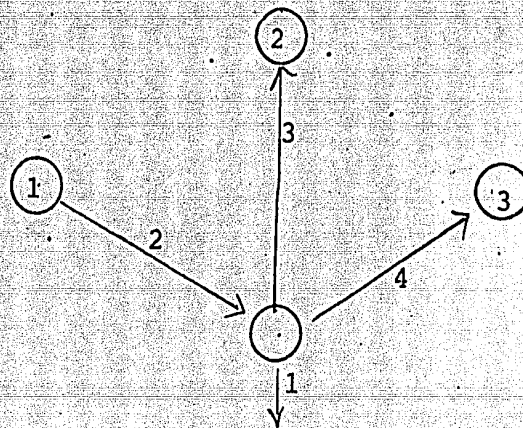
$$Y^1 = B^{-1}Y^2$$

$$1) n=3, J=4, Y_4 = -(-1) = 1, \delta = -1, d_1 = 0 + 1 = 1$$

$$2) n=2, J=3, Y_3 = -(-2) = 2, \delta = -1, d_1 = d_1 + Y_3 = 1 + 2 = 3$$

$$3) n=1, J=2, Y_2 = 3, \delta = 1, d_1 = d_1 - Y_1 = 3 - 3 = 0$$

$$4) n=4, J=1, Y_1 = 0, \delta = 1, n = \text{al nodo terminal}$$



$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = Q^{-1} [S(2) - [0]Y^1] = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO INSTITUTO DE ECONOMÍA

$\Delta = 1$  que corresponde a  $Z_2$  que sale de la base y entra  $x_2 = 1$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces } x^B = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_1 \\ x_2 \\ z_3 \\ z_5 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

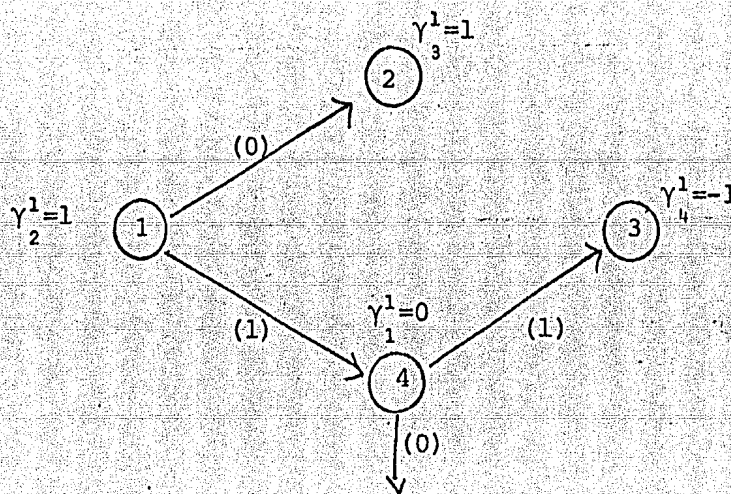
como B no es de rango completo hay que cambiar una columna de esta por una de C, en este caso cambiamos la columna 3 por la 5.

Iteración 3.

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x^B = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_1 \\ x_1 \\ z_3 \\ z_5 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

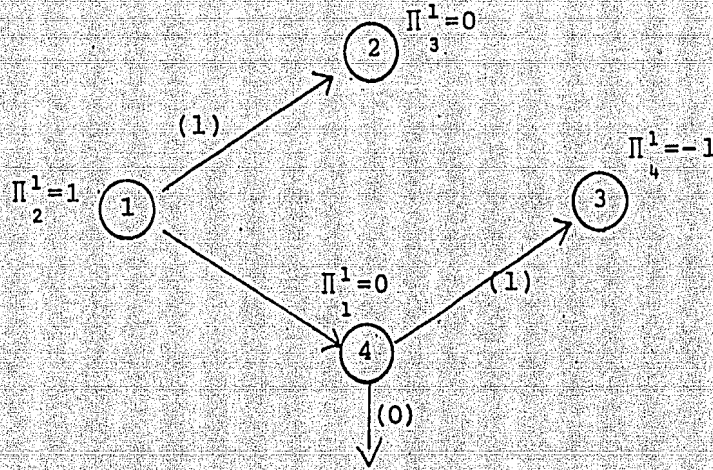
cálculo de las variables duales

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 1, 1, -1]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = [0, 1, 1, 1]$$

$$\Pi^1 \gamma^2 B^{-1} = [0, 1, 0, -1]$$



$$\Pi^2 = [c^2 - \gamma^1 C] Q^{-1} = [0, -1]$$

$$\Pi \doteq [0, 1, 0, -1 \mid 0, -1]$$

Cálculo de costos reducidos.

Para  $x_3 = 0$  tenemos que

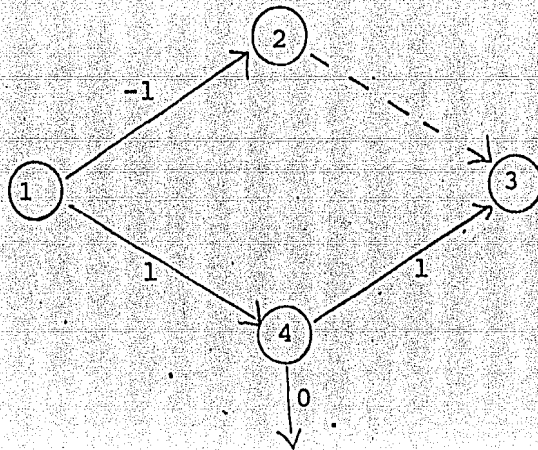
$$\Pi_{D(3)}^1 - \Pi_{H(3)}^1 + \Pi^2 S(3) - c_3 = 0 - (-1) + [0, -1] \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 0 = 2 > 0$$

tomamos  $x_3$

$$Y = B^{-1} A(3)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(3)$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

$$\gamma^2 = A(3) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(3) = A(3)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} \gamma^2 = B^{-1}A(3) = \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[S(3) - D\gamma^1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y  $\Delta = 1$  que corresponde a  $z_3$  que sale de la base y entra  $x_3 = 1$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ entonces } x^B = \begin{bmatrix} z_4 \\ z_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ z_5 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta es nuestra solución inicial factible.

El planteamiento de nuestro problema original queda como sigue:

minimizar  $z = 2x_1 + 4x_3$   
 sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + z_1 &= 4 \\ -x_1 + x_3 &= -2 \\ -x_2 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + z_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + z_4 &= 0 \end{aligned}$$

y la solución inicial es:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ z_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observese que la base correspondiente tiene la forma siguiente:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & -1 \\ \hline & & & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & & -2 \end{bmatrix}$$

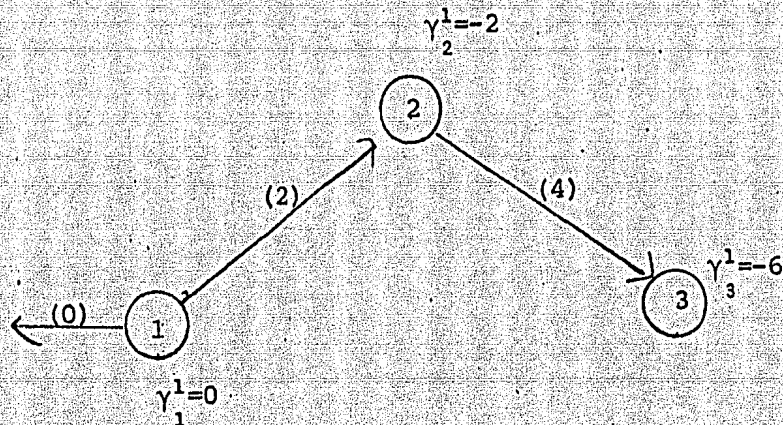
La matriz de trabajo en este caso es:

$$Q = F - DB^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Iteración 1.

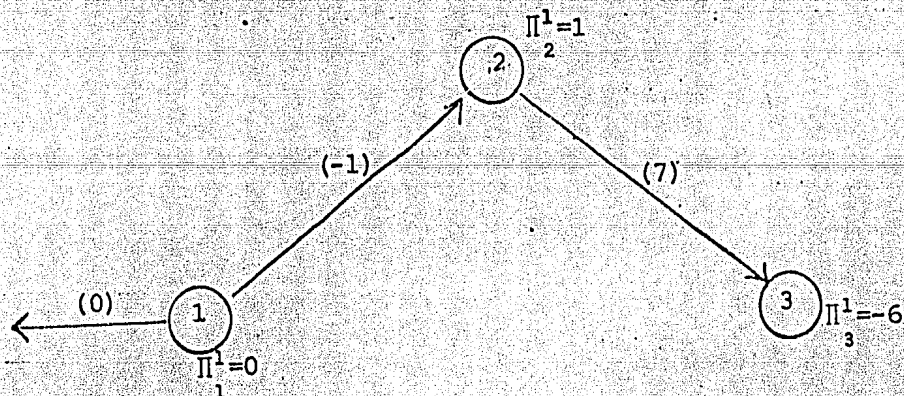
Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, -2, -6]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = [0, -1, 7]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 1, -6]$$



$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0, 3]$$

$$\Pi = [0, -1, 7 \mid 0, 3]$$



Cálculo de costos reducidos para  $z_4 = 0$  tenemos que:

$$\Pi^2 S(6) - c_6 = 3 > 0$$

Entra  $z_4$

$$Y = B^{-1}A(4)$$

$$Y^2 = Q^{-1}P(k) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Y = C Y^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Y^1 = -B^{-1}Y$$

- 1)  $n = 3, j = 3, y_3 = \frac{1}{2}, \delta = -1, d_2 = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- 2)  $n = 2, j = 2, y_2 = \frac{1}{2}, \delta = -1, d_1 = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0$
- 3)  $n = 1, j = 1, y_1 = 0, \delta = 1$  n es el nodo raíz, terminar.

$$Y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad \Delta = \min \left\{ \frac{3}{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\frac{1}{2}}, \frac{\infty - 2}{\frac{1}{2}}, \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}}, \infty \right\} = 2$$

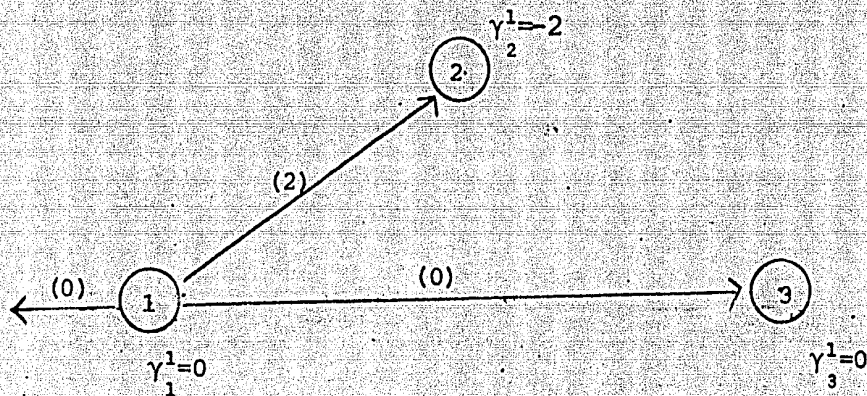
y  $\Delta = 2$  que corresponde a  $x_1 = 0$  que sale de la base y entra

$$z_4 = 2.$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{entonces } x^B = \begin{bmatrix} z_1 \\ x_1 \\ z_4 \\ z_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteración 2.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, -2, 0]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^2 = [0, 2, 0]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = \gamma^1 = [0, -2, 0]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0, 0]$$

$$\Pi = [0, -2, 0, 0, 0]$$

MATERIAL DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Cálculo de costos reducidos para  $x_3 = 0$  tenemos que:

$$\Pi^1_{D(3)} - \Pi^1_{H(3)} - \Pi^2_{S(3)} - c_3 = -6 < 0$$

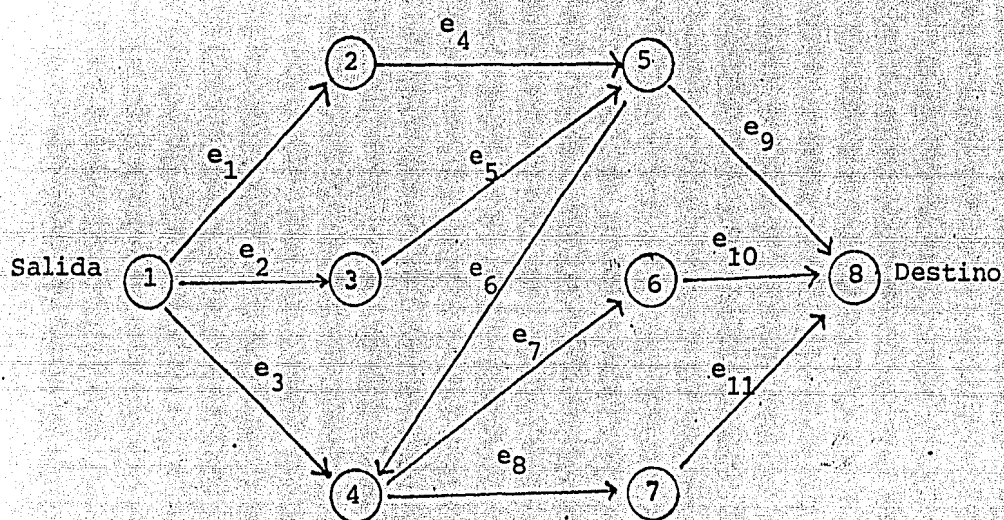
$x_3$  no puede entrar a la base y  $\psi_1 \cap \psi_2 = \emptyset$

∴ la solución es óptima.

$S_0 = [z_1x_1, x_2x_3, z_3z_4] = [0, 2, 1, 0, 3, 0]$  y  $z = 4$  es el mínimo.

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Ejemplo 2. Un chofer desea seguir la ruta más corta entre dos ciudades, existen varios caminos que lo pueden guiar a su destino, pero es necesario que en la ruta que elija halla por lo menos una estación de gasolina. La red de caminos entre los que puede elegir es la siguiente:



La distancia que se recorre en cada camino se da en la siguiente tabla:

camino	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$
Distancia	15	13	25	12	16	5	13	11	14	9	7

Las estaciones de gasolina disponibles se encuentran en los caminos  $e_3$ ,  $e_5$  y  $e_6$ .

¿Cuál es la ruta que optimiza este problema?.

BIBLIOTECA DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA Y ESPACIO, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA Y ESPACIO, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA Y ESPACIO

El planteamiento de este problema queda como sigue:

$$\text{Min } Z = 15x_1 + 13x_2 + 25x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 5x_6 + 13x_7 + 11x_8 + 14x_9 + 9x_{10} + 7x_{11}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_5 &= 0 \\ -x_3 - x_6 + x_7 + x_8 &= 0 \\ -x_4 - x_5 + x_6 + x_9 &= 0 \\ -x_7 + x_{10} &= 0 \\ -x_8 + x_{11} &= 0 \\ -x_9 - x_{10} - x_{11} &= -1 \\ x_3 + x_5 + x_6 + x_{12} &= 3 \end{aligned}$$

$$0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 11, 0 \leq x_{12} \leq 2$$

Se propone la siguiente solución inicial:

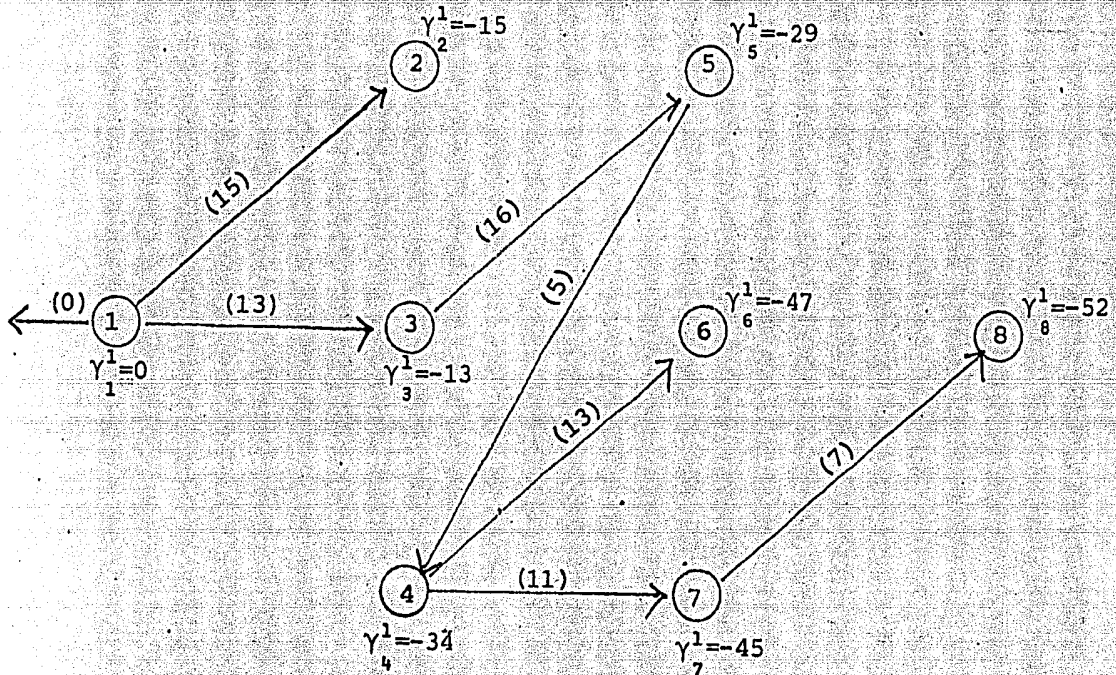
$$\begin{aligned} x^B &= (x_0, x_1, x_2, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}) \\ &= (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$x^N = (x_3, x_4, x_9, x_{10}) = (0, 0, 0, 0)$$



Iteración 1.

Cálculo de las variables duales:



$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = (0, -15, -13, -34, -29, -47, -45, -52)$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = c^1 B^{-1} = \gamma^1$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = c^2 Q^{-1} = c^2 = 0$$

$$\Pi = [\Pi^1 ; \Pi^2] = [0, -15, -13, -34, -29, -47, -45, -52, ; 0]$$

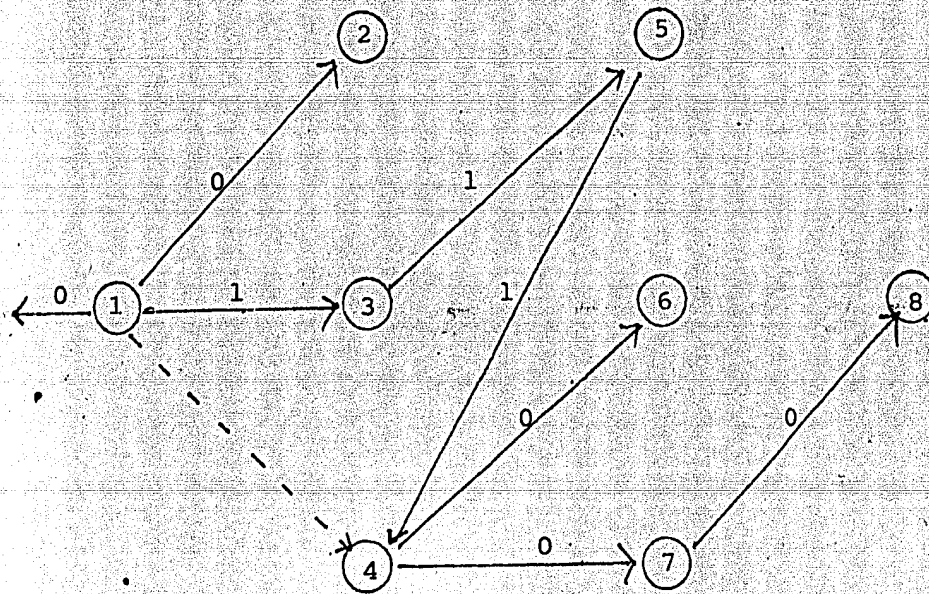
Análisis de costos reducidos, para  $e_3 = 0$  tenemos que:

$$\Pi^1_{D(3)} - \Pi^1_{H(3)} + \Pi^2 S(3) - c_3 = 9 > 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Entonces es candidato de entrar a la base y  $\delta = 1$ . Calculamos  $Y = B^{-1}A(3)$  usando el algoritmo 4.2

$$Y^1 = B^{-1}A(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$Y^2 = A(3) + C Q^{-1} D Y^1 - C Q^{-1} S(3) = A(3)$$

$$Y^1 = B^{-1}Y^2 = B^{-1}A(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$Y^2 = Q^{-1}[S(3) - DY^1]$$

$$Y^2 = [-1]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

como  $\delta = 1$  definimos

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{2-1}{1} \right\}, \Delta_2 = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1, \Delta = \min \{1, 1, 1\} = 1$$

la base no se altera pero los valores de nuestra solución si.

$$x^B = x^B - Y\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad y \quad x_3 = 1$$

Escogemos otra variable.

Para  $x_4 = 0$  tenemos que

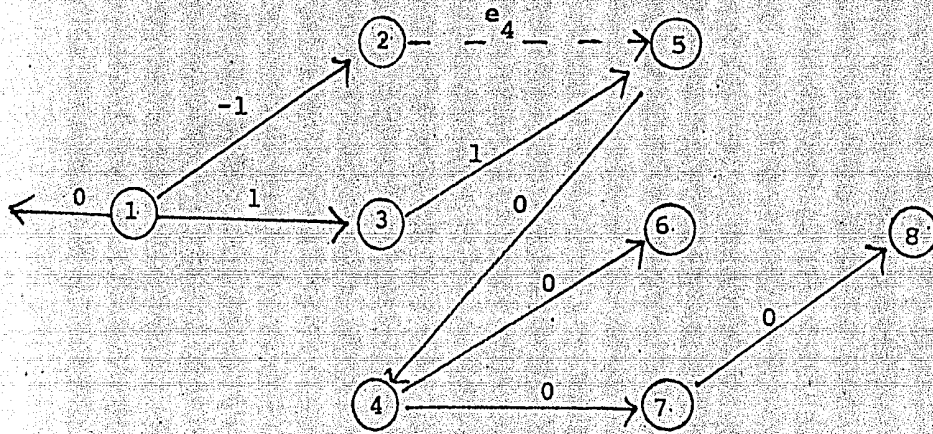
$$\frac{\Pi^1}{D(4)} - \frac{\Pi^1}{H_4} + \Pi^2 S(4) - c_4 = 2 > 0$$

Entonces puede entrar a la base, y  $\delta = 1$

Calculamos  $Y = B^{-1}A^{(4)}$

MATERIAL DIDACTICO PARA EL CURSO DE ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA ANALITICA DE MEXICO

$$\gamma^1 = B^{-1} A(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\gamma^2 = A(4) + CQ^{-1}D \gamma^1 - CQ^{-1}S(4) = A(4)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} \gamma^2 = B^{-1} A(4) = \gamma^1$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[S(4) - D\gamma^1] = [-1]$$

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^1 = \min \left\{ \frac{1-0}{1}, \frac{2-2}{1} \right\} = 0 \quad \Delta^2 = \min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{1} \right\} = 0 \quad \Delta = \min \{0, 0, 1\} = 0$$

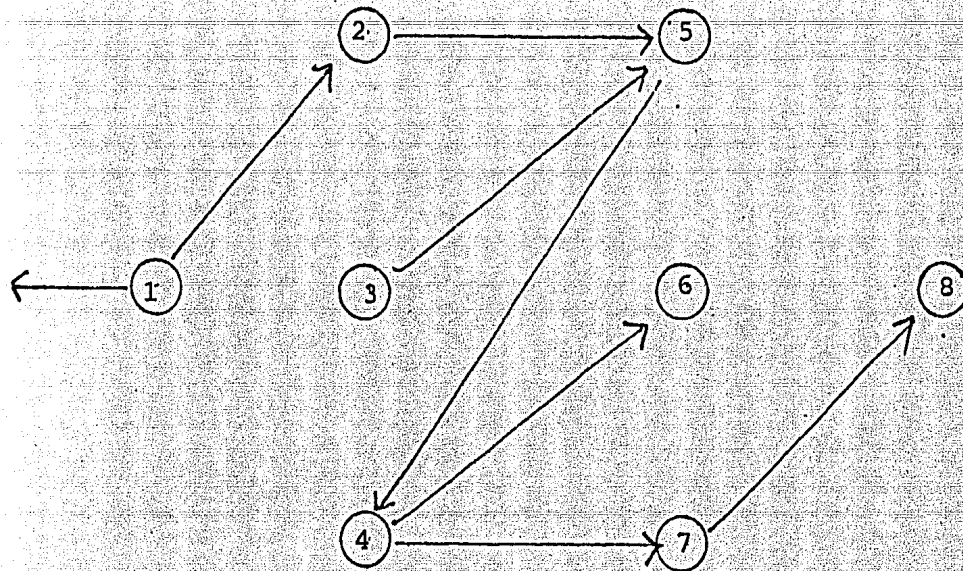
Sale  $x_2$  de la base y entra  $x_4 = 0$

Calculamos la nueva solución

$$\tilde{x} = x^B - Y \Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y } x_2 = 0$$

La gráfica asociada a esta es



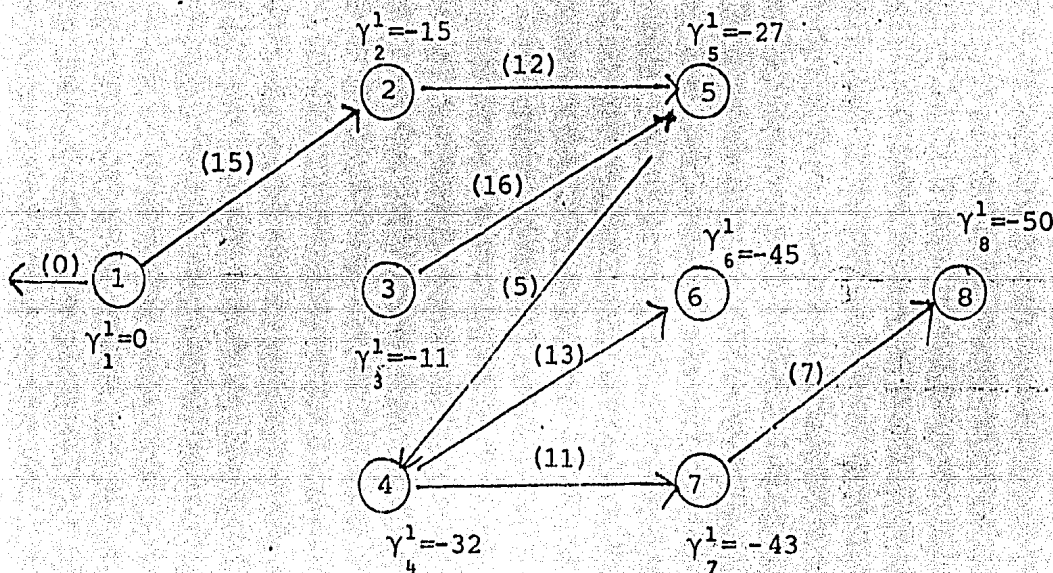
que si corresponde a un árbol

Actualizamos la inversa de la matriz de trabajo

$Q = F - DB^{-1}C$  pero  $C = [0]$  entonces  $Q$  no cambia y  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 2.

Cálculo de las variables duales:  $\gamma^1 = c^1 B^{-1}$



INSTITUTO TECNOLÓGICO DE VAQUERÍA, COAHUILA DE ZARAGOZA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

$$\gamma^1 = [0, -15, -11, -32, -27, -45, -43, -50]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = c^1 B^{-1} = \gamma^1$$

$$\Pi^1 = [0, -15, -11, -32, -27, -45, -43, -50]$$

$$\pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = 0$$

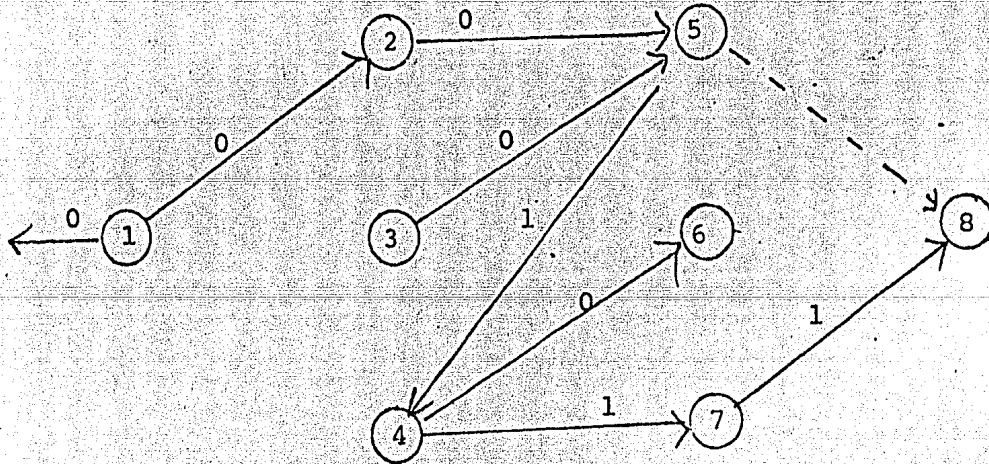
$$\Pi = [0, -15, -11, -32, -27, -45, -43, -50, ; 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_0 = 0$  tenemos que

$$\Pi_{D(9)}^1 - \Pi_{H(9)}^1 + \Pi^2 S(9) - c_9 = 9 > 0$$

es candidato de entrar a la base y  $\delta = 1$ , calculamos

$$y = \underline{B}^{-1} \underline{A}(9) \quad \gamma^1 = \underline{B}^{-1} \underline{A}(9)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
 MATERIAL DE REFERENCIA PARA EL VALOR COMERCIAL DE LOS PRODUCTOS AUTÓNTICOS DE MÉXICO

$$\gamma^2 = A(9) + C Q^{-1} D \gamma^1 - C Q^{-1} S(9) = A(9) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^1 = B^{-1} \gamma^2 = B^{-1} A(9) = \gamma^1$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1} [S(9) - D \gamma^1] = [-1]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Definimos

$$\Delta^1 = \min \left\{ \frac{2-2}{1} \right\}, \Delta_2 = \min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 0, \Delta = \min \{0, 0, 1\} = 0.$$

Sale  $x_6$  de la base y entra  $x_9 = 0$ , la nueva solución es:

$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y } x_6 = 0$$

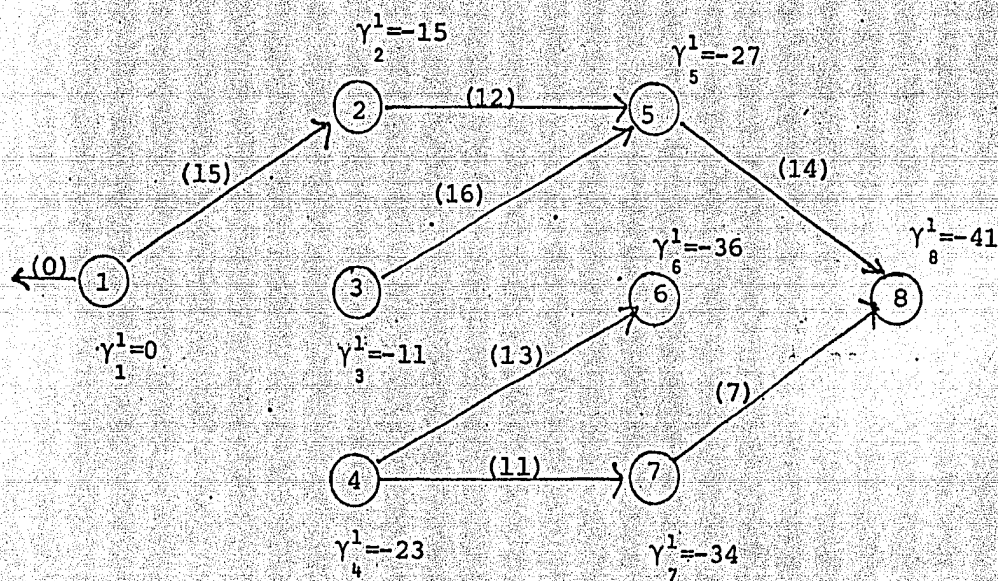
La gráfica asociada a esta solución sigue siendo un árbol.

La matriz de trabajo  $Q = F - D B^{-1} C$  no se altera pues  $C = [\bar{0}]$ , entonces  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 3.

Cálculo de las variables duales

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1}$$



$$\gamma^1 = [0, -15, -11, -23, -27, -36, -34, -41]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = c^1 B^{-1} = \gamma^1$$

$$\Pi^1 = [0, -15, -11, -23, -27, -36, -34, -41]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0] \text{ pues } c^2 = 0 \text{ y } C = [\bar{0}]$$

$$\Pi = [0, -15, -11, -23, -27, -36, -34, -41 ; 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = -4 < 0$$

entonces no puede entrar a la base. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = -2 < 0$$

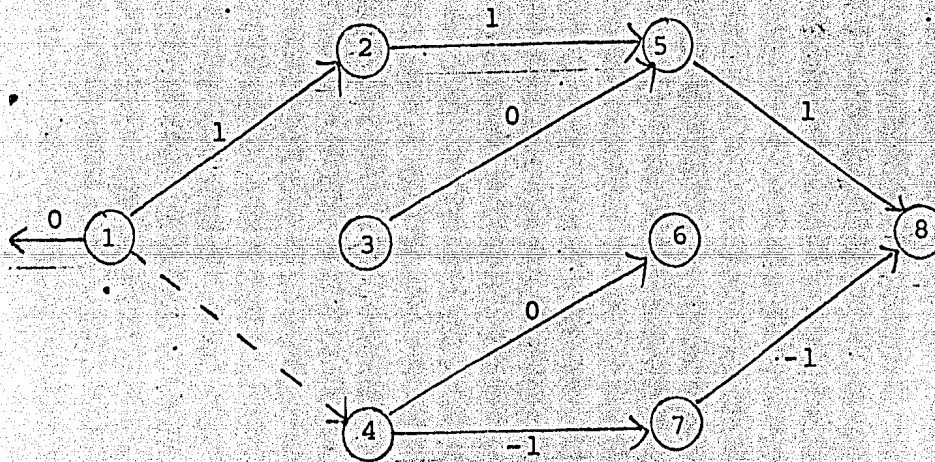
entonces no puede entrar a la base. Para  $x_3 = 1$  tenemos que:

$$\Pi_{D(3)}^1 - \Pi_{H(3)}^1 + \Pi^2 S(3) - c_3 = 2 < 0$$

entonces  $x_3 = 1$  entra a la base y  $\delta = -1$ .

Calculamos  $\gamma = \underline{B}^{-1} A(3)$

$$\gamma^1 = \underline{B}^{-1} A(3)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



$$\gamma^2 = A(3) + CQ^{-1} \cdot D\gamma^1 - CQ^{-1}S(3) = A(3) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = B^{-1}A(3) = \gamma^1$$

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1} [S(3) - D\gamma^1] = [1]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{1-1}{1}, \frac{1-1}{1}, \frac{2-2}{1} \right\} = 0, \quad \Delta^2 = \min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{2}{1} \right\} = 0$$

$\Delta = \min \{0, 0, 1\} = 0$  entonces  $x_3 = 1 - 0 = 1$  y sale de la base  $x_1 = 0$ , la nueva solución es:

$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_9 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

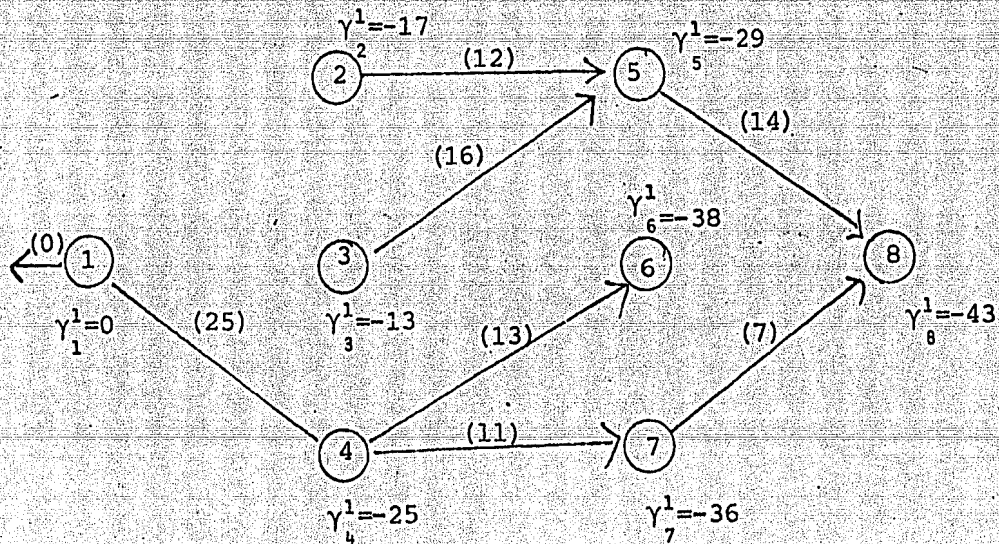
La gráfica asociada a esta solución sigue siendo un árbol.

La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C$  no se altera y  $Q^{-1} = [1]$  nuevamente.

Iteración 4

Cálculo de las variables duales:

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1}$$



$$\gamma^1 = [0, -17, -13, -25, -29, -38, -36, -43]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = c^1 B^{-1} = \gamma^1$$

$$\Pi^1 = [0, -17, -13, -25, -29, -38, -36, -43]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0] \text{ pues } c^2 = 0 \text{ y } C = [\bar{0}]$$

$$\Pi = [0, -17, -13, -25, -29, -38, -36, -43 \mid 0].$$

Análisis de costos reducidos.

Para  $x_6 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(6)}^1 - \Pi_{H(6)}^1 + \Pi^2 S(6) - c_6 = -9 < 0$$

entonces no puede entrar a la base. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = -4 < 0$$

entonces no puede entrar a la base. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = 0$$

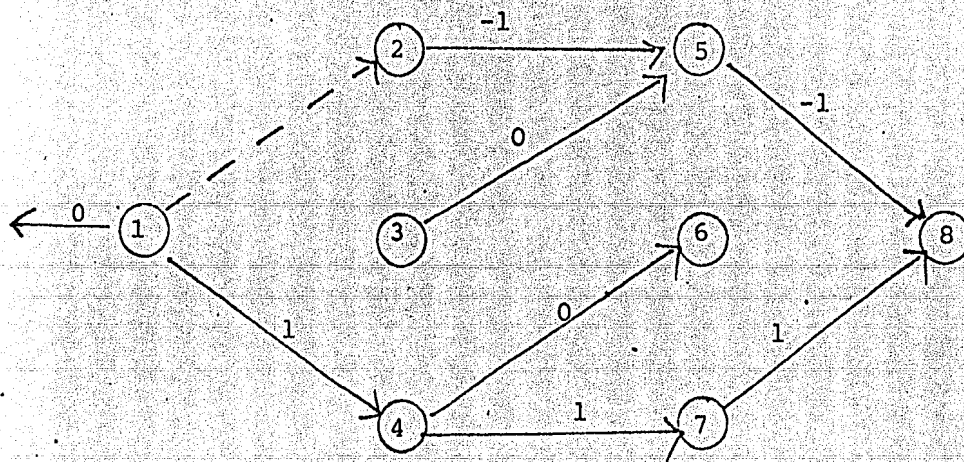
entonces no puede entrar a la base. Para  $x_1 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(1)}^1 - \Pi_{H(1)}^1 + \Pi^2 S(1) - c_1 = 2 > 0$$

Entonces entra a la base y  $\delta = 1$ .

Calculamos  $Y = B^{-1}A(1)$

$$\gamma^1 = B^{-1}A(1)$$



INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
 CENTRO DE INVESTIGACIONES Y DESARROLLO TECNOLÓGICO  
 AV. INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO S/N  
 CDMX, MÉXICO

$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(1) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(1) = A(1)$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = B^{-1}A(1) = \gamma^1$$

$$Y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^2 = Q^{-1}[S(i) - D\gamma^1] = [-1]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \min \left\{ \frac{1-0}{1}, \frac{1-0}{1}, \frac{2-2}{1} \right\} = 0, \quad \Delta_2 = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1,$$

$$\Delta = \min \{0, 1, 1\} = 0$$

Entonces  $x_1 = 0$  entra a la nueva base en el lugar de  $x_{12} = 2$

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
 INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Para calcular la inversa de la matriz de trabajo encontramos primero la matriz E tal que

$$\underline{B}_5^{-1} = E \underline{B}_4^{-1}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & -2 \\ & 1 & & & & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & & & & 0 \\ & & & & 1 & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 & & & & 0 \\ & & & & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & & & 1 & & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & & E_2 \\ & & \\ & & \\ E_3 & & E_4 \end{bmatrix}$$

$$Q_5^{-1} = [E_4 - E_3 B_4^{-1} C_4] Q_4^{-1} = [1]$$

Nuestra matriz de trabajo en la iteración cinco será  $Q = [1]$ .

Iteración 5.

Cálculo de las variables duales.

$\gamma^1 = c^1 B^{-1}$ , como B no cambió  $\gamma^1$  es igual que en la iteración anterior.

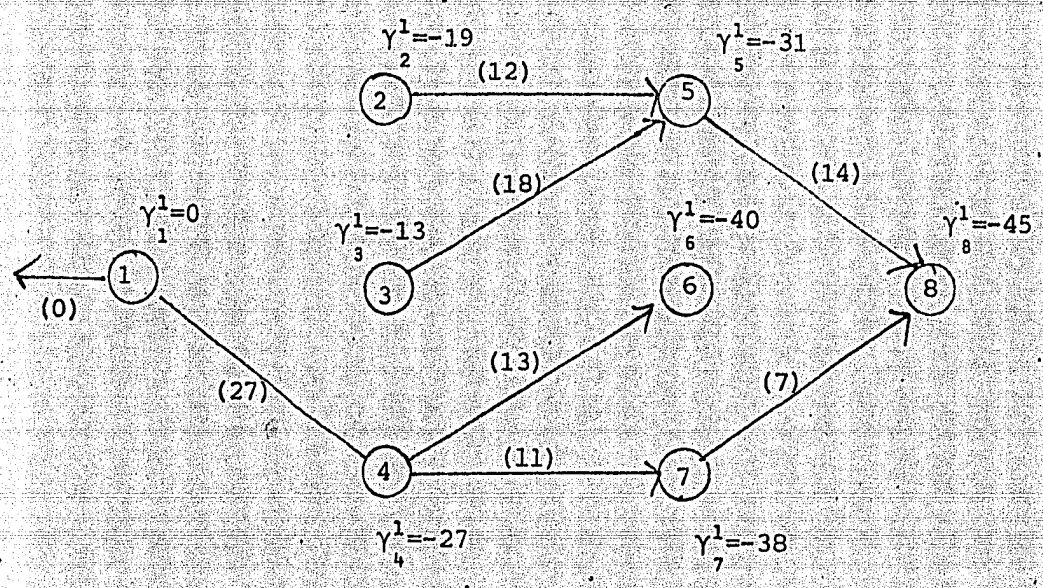
$$\gamma^1 = [0, -17, -13, -25, -29, -38, -36, -43]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D$$

$$\gamma^2 = [0, 27, 12, 18, 14, 13, 11, 7]$$

SECRETARÍA DE ECONOMÍA INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICAS Y CENSOS

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1}$$



$$\Pi^1 = \{0, -19, -13, -27, -31, -40, -38, -45\}$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 c) Q^{-1} = [-2]$$

$$\Pi = [0, -19, -13, -27, -31, -40, -38, -45 \mid -2]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = 0$$

no es candidato de entrar a la base. Para  $x_6 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(6)}^1 - \Pi_{H(6)}^1 + \Pi^2 S(6) - c_6 = -11 < 0$$

Entonces no puede entrar a la base. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = -4 < 0$$

Entonces no puede entrar a la base. Por lo tanto  $\psi_1 \cap \psi_2 = \phi$

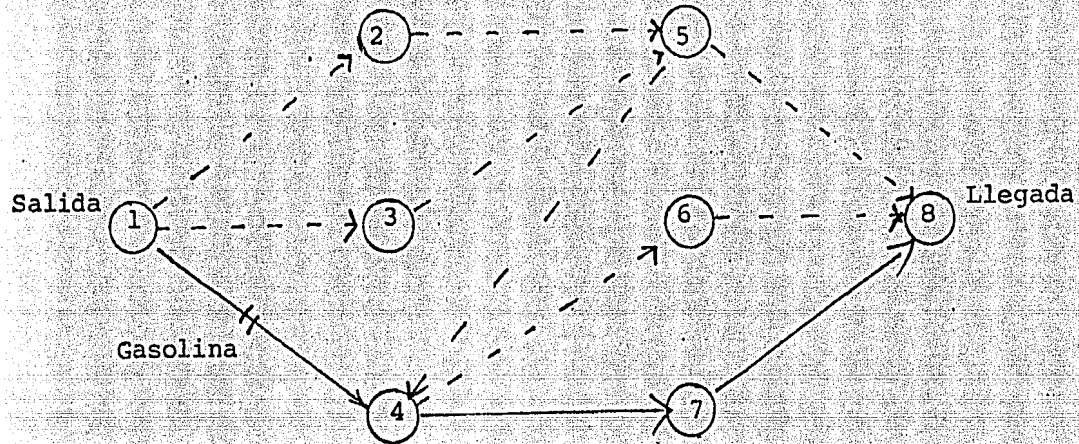
y la solución que tenemos es la óptima con  $Z = 33$ .

INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
 CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0$$

$$x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 0, x_{11} = 1, x_{12} = 2$$

y la ruta que se debe seguir es la siguiente:





## Ejemplo 3.

Una cadena de tiendas de juguetes debe abastecerse para la época navideña, para este fin cuenta con 2 casas proveedoras en las que pueden surtirse, o bien puede comprarlos a precio de lista en cualquier tienda del mercado. El precio de los juguetes se ve alterado por el costo de envío a cada una de las tiendas, la tabla siguiente nos muestra los costos:

	Proveedor 1	Proveedor 2
tienda 1	425	430
tienda 2	452	400
tienda 3	416	420

y el precio de lista es de 450 por unidad.

Las casas proveedoras tienen un límite en sus existencias, el proveedor 1 cuenta con 55 unidades y el proveedor 2 con 38 unidades. Las unidades que requiere cada tienda son las siguientes:

Tienda	Requerimiento
1	30
2	26
3	39

Como el envío de los juguetes por parte de los proveedores es responsabilidad de estos, las tiendas no tienen ningún problema del transporte de las mercancías, pero, para las compras que se realicen en cualquier tienda del mercado se limitan a cierto número de unidades pues depende de los medios de transporte con que cuenta cada tienda

Tienda	Unidades que puede transportar
1	10
2	11
3	17

Además se desea que para la tienda 2 las compras que se le hagan al proveedor 1 sean al menos el doble que las hechas al proveedor 2.

¿Cuál es la estrategia óptima que se debe seguir para que las tiendas cubran sus necesidades a un costo mínimo?.

El planteamiento del problema queda como sigue:

$$\text{minimizar } z = 425x_1 + 452x_2 + 416x_3 + 430x_4 + 400x_5 + 420x_6 + 450(x_7 + x_8 + x_9)$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 55$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 38$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = 30$$

$$x_2 + x_5 + x_8 = 26$$

$$x_3 + x_9 = 39$$

$$x_2 \geq 2x_5$$

$$0 \leq x_0 < \infty ; 0 \leq x_1 < \infty, i=1, \dots, 9, 13; 0 \leq x_{10} < 10; 0 \leq x_{11} < 11, 0 \leq x_{12} < 17$$

Un planteamiento alternativo para que las restricciones se puedan representar en forma gráfica es el siguiente:

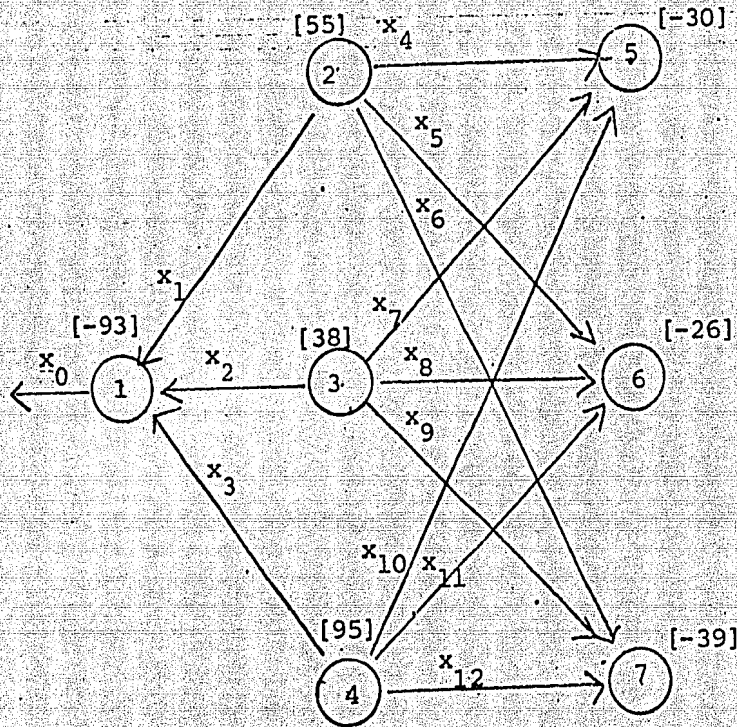
$$\text{Minimizar } z = 425x_4 + 452x_5 + 416x_6 + 430x_7 + 400x_8 + 420x_9 + 450(x_{10} + x_{11} + x_{12})$$

suje to a:

$$\begin{array}{r}
x_0 - x_1 - x_2 - x_3 \hspace{15em} = -93 \\
\phantom{x_0} + x_4 + x_5 + x_6 \hspace{14em} = 55 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} + x_7 + x_8 + x_9 \hspace{14em} = 38 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} \phantom{x_7} + x_{10} + x_{11} + x_{12} \hspace{12em} = 95 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} \phantom{x_7} \phantom{x_{10}} - x_4 \phantom{x_{11}} - x_7 \phantom{x_{12}} - x_{10} \hspace{10em} = -30 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} \phantom{x_7} \phantom{x_{10}} \phantom{x_{11}} - x_5 \phantom{x_{12}} - x_8 \phantom{x_{13}} - x_{11} \hspace{11em} = -26 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} \phantom{x_7} \phantom{x_{10}} \phantom{x_{11}} \phantom{x_{12}} - x_6 \phantom{x_{13}} - x_9 \phantom{x_{14}} - x_{12} \hspace{10em} = -39 \\
\phantom{x_0} \phantom{x_4} \phantom{x_7} \phantom{x_{10}} \phantom{x_{11}} \phantom{x_{12}} - x_2 \phantom{x_{13}} + 2x_5 \phantom{x_{14}} + x_{13} \hspace{10em} = 0
\end{array}$$

$$0 \leq x_0 < \infty; 0 \leq x_1 < \infty, i=1, \dots, 9, 13; 0 \leq x_{10} < 10; 0 \leq x_{11} < 11, 0 \leq x_{12} < 17.$$

La gráfica asociada a este problema es:



Se propone la siguiente solución inicial;

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 93, x_4 = 30, x_5 = 25, x_6 = 0,$$

$$x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 38, x_{10} = 0, x_{11} = 1, x_{12} = 1, x_{13} = 25$$

$$x^B = [x_0, x_1, x_4, x_5, x_7, x_9, x_{11} \mid x_{13}]^t$$

y la base asociada a esta solución básica factible tiene la forma siguiente:

INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

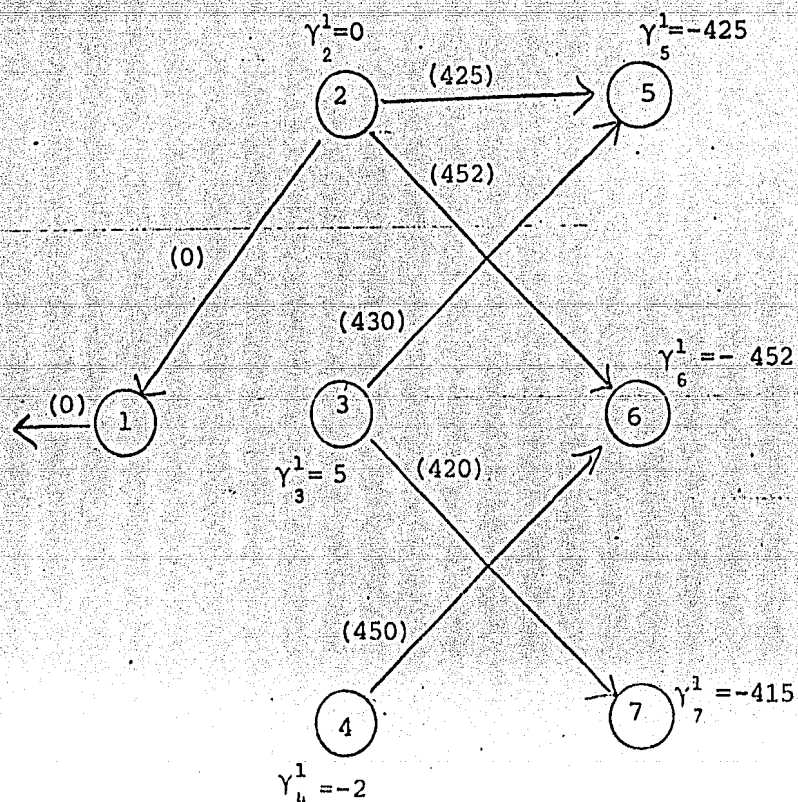
$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{C} \\ \underline{D} & \underline{F} \end{bmatrix}$$

la matriz de trabajo  $Q = F - D B^{-1} C = [1]$  pues  $C = [\vec{0}]$  y  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 1.

Cálculo de las variables duales:

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1}$$



$$\gamma^1 = [0, 0, 5, -2, -425, -452, -415]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 0, 5, -2, -425, -452, -415]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, 0, 5, -2, -425, -452, -415 \ ; \ 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = -5 < 0$$

No es candidato de entrar a la base. Para  $x_3 = 93$  tenemos que:

$$\Pi_{D(3)}^1 - \Pi_{H(3)}^1 + \Pi^2 S(3) - c_3 = 2 > 0$$

No es candidato de entrar a la base. Para  $x_6 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(6)}^1 - \Pi_{H(6)}^1 + \Pi^2 S(6) - c_6 = -5 < 0.$$

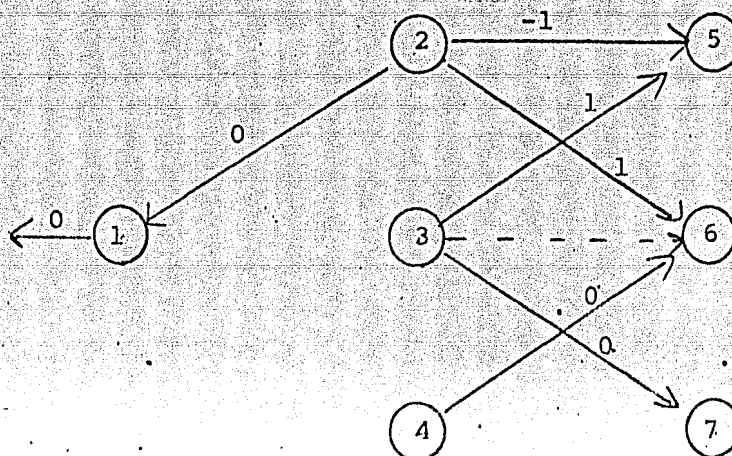
No es candidato de entrar a la base. Para  $x_8 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(8)}^1 - \Pi_{H(8)}^1 + \Pi^2 S(8) - c_8 = 7 > 0$$

Entonces  $x_8$  entra a la nueva base y  $\delta = 1$ .

Calculamos  $\gamma = B^{-1} A(8)$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(8)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(8) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}s(8) = A(8) \text{ pues } C = [0]$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[s(8) - D\gamma^1] = [-2]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Definimos: } \Delta_1 = \min \left\{ \frac{\infty - 30}{1}, \frac{\infty - 25}{2} \right\} = \infty$$

$$\Delta_2 = \min \left\{ \frac{25}{1}, \frac{0}{1} \right\} = 0; \quad \Delta = \min \{ \infty, 0, \infty \} = 0$$

entonces sale de la base  $x_7 = 0$  y entra  $x_8$ .

La nueva solución es:

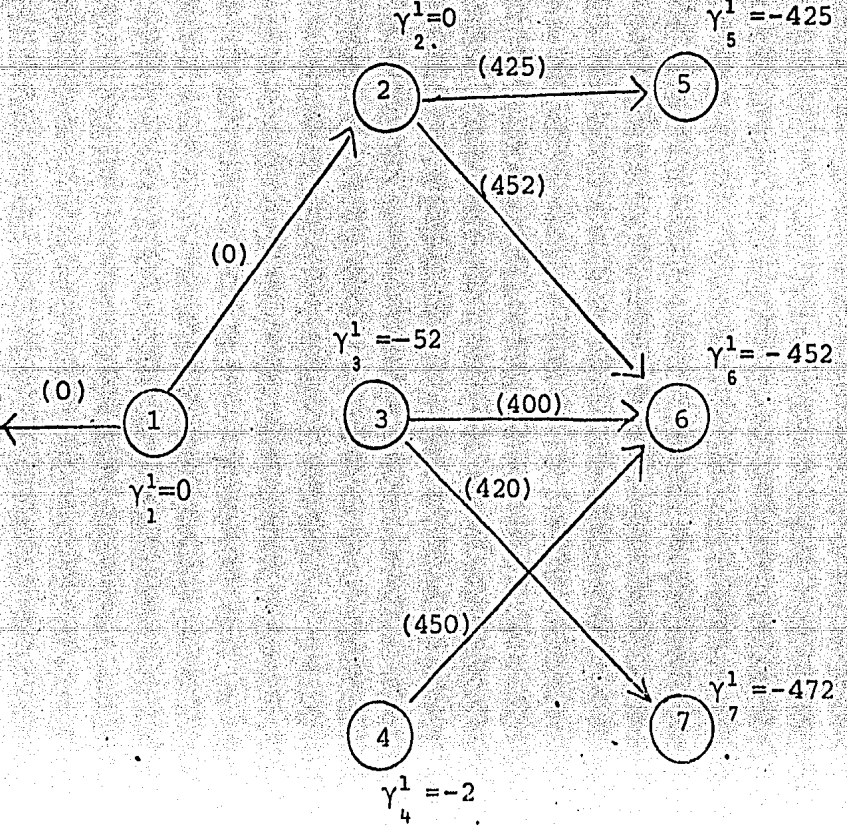
MATERIAL DIDACTICO SIN VALOR COMERCIAL. INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA Y ESPACIO. UNIDAD DE INVESTIGACIÓN NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. COAHUILA 15

$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 25 \\ 0 \\ 38 \\ 1 \\ 25 \end{bmatrix} \text{ con } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -1 \\ & & & -1 & -1 & & -1 & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & -2 & & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C$  no cambia pues  $C = [\bar{0}]$ , entonces  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 2.

Cálculo de las variables duales



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL AUTÓNOMO DE MÉXICO



$$\gamma^1 = [0, 0, -52, -4, -425, -452, -472]$$

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C D^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^2 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 0, -52, -4, -425, -452, -472]$$

$$\Pi^2 = c^2 - \gamma^1 C Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, 0, -52, -4, -425, -452, -472 \mid 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = -27 < 0$$

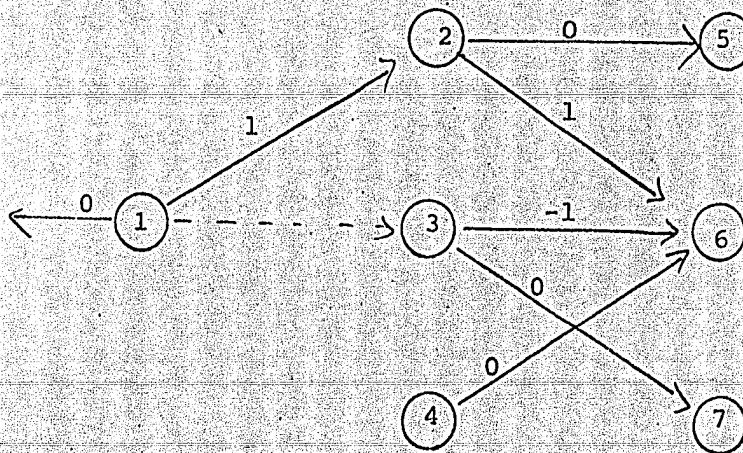
No es candidato de entrar a la base. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = 2 > 0$$

Entonces  $x_2$  puede entrar a la base y  $\delta = 1$

Calculamos  $\gamma = B^{-1} A(2)$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(2)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

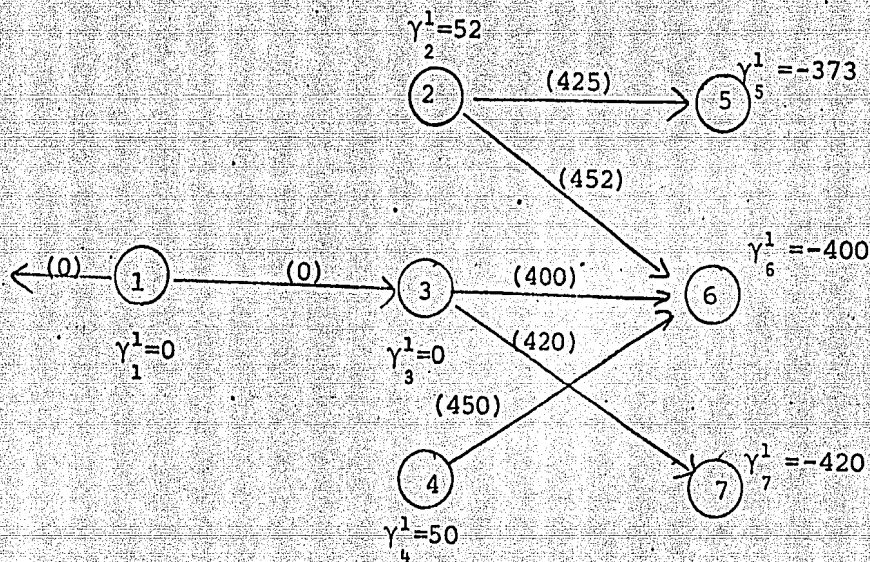


La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C$  no cambia pues  $C = [0]$ , entonces  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 3.

Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 52, 0, 50, -373, -400, -420].$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 52, 0, 50, -373, -400, -420]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, 52, 0, 50, -373, -400, -420 \mid 0]$$

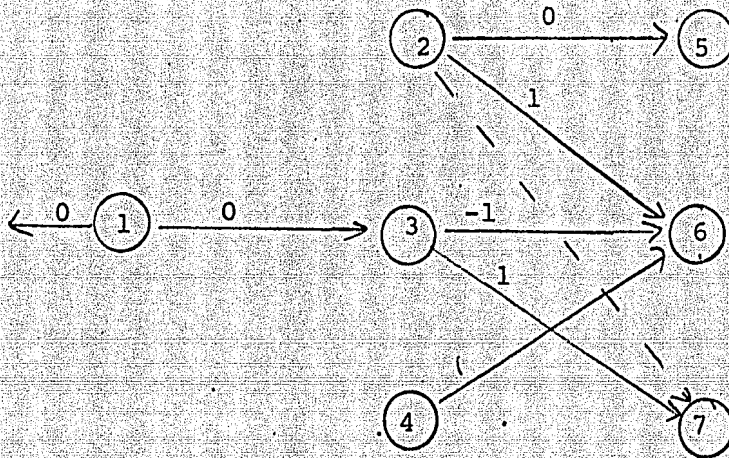
Análisis de costos reducidos. Para  $x_6 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(6)}^1 - \Pi_{H(6)}^1 + \Pi^2 S(6) - c_6 = 52 > 0$$

Entonces  $x_6$  es candidato para entrar a la base y  $\delta = 1$ .

Calculamos  $Y = B^{-1}A(6)$

$$Y^1 = B^{-1}A(6)$$



$$Y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y^2 = A(6) + CQ^{-1}DY^1 - CQ^{-1}S(6) = A(6) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$Y^1 = B^{-1}Y^2 = B^{-1}A(6) = Y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

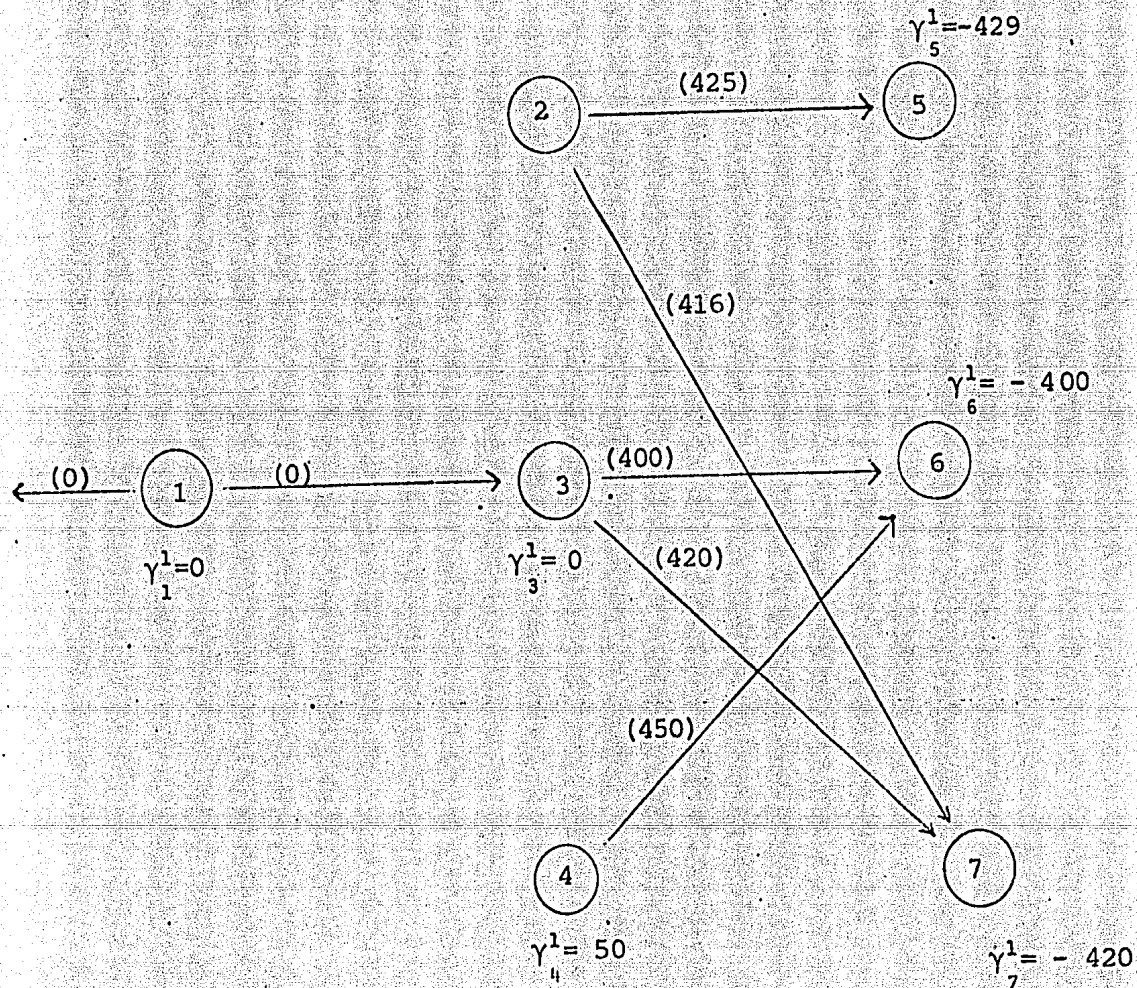
$$Y^2 = Q^{-1}[S(6) - DY^1] = [-2]$$



Iteración 4.

Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, -4, 0, 50, -429, -400, -420]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, -4, 0, 50, -429, -400, -420]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, -4, 0, 50, -429, -400, -420 \ ; \ 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_7 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(7)}^1 - \Pi_{H(7)}^1 + \Pi^2 S(7) - c_7 = -1 < 0$$

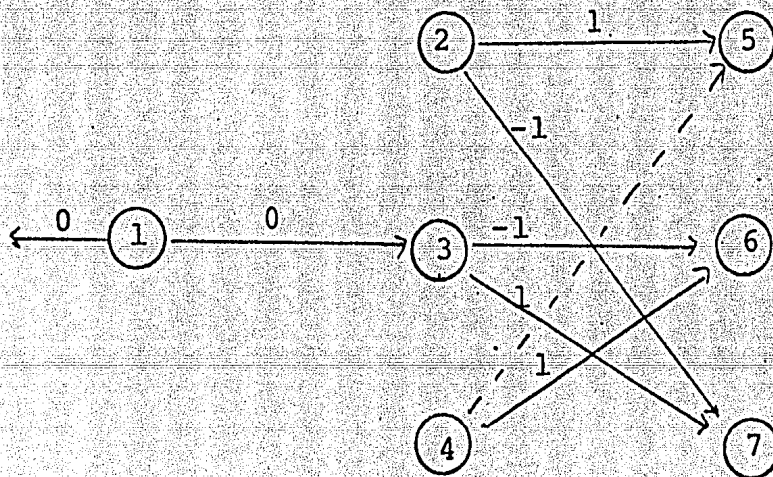
No es candidato de entrar a la base. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = 29 > 0$$

Es candidato de entrar a la base.

Calculamos  $\gamma = \underline{B}^{-1} \underline{A}(10)$

$$\gamma^1 = \underline{B}^{-1} \underline{A}(10)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATERIAL DE ASESORIA TECNICA PARA LA INDUSTRIA Y COMERCIO  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

$$\gamma^2 = A(10) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(10) = A(10) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = B^{-1}A(10) = \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[S(10) - D\gamma^1] = [0]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos:  $\Delta_2 = \min \left\{ \frac{\infty - 25}{1}, \frac{\infty - 25}{1} \right\} = \infty$ ;  $\Delta_2 = \min \left\{ \frac{13}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1$ ;

$$\Delta = \min \{ \infty, 1, 10 \} = 1$$

Salen  $x_{11} = 1 - \Delta = 0$  y entra  $x_{10} = 0 + \Delta = 1$ .

Hacemos el cálculo de la nueva solución

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \\ 25 \\ 25 \\ 13 \\ 1 \\ -1 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 29 \\ 26 \\ 26 \\ 12 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

MATERIAL DIDACTICO SIN VALOR COMERCIAL. FES-QUAUTILLAN IS  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO





$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0.$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, -4, 0, 25, -429, -400, -420]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, -4, 0, 25, -429, -400, -420 \ ; \ 0]$$

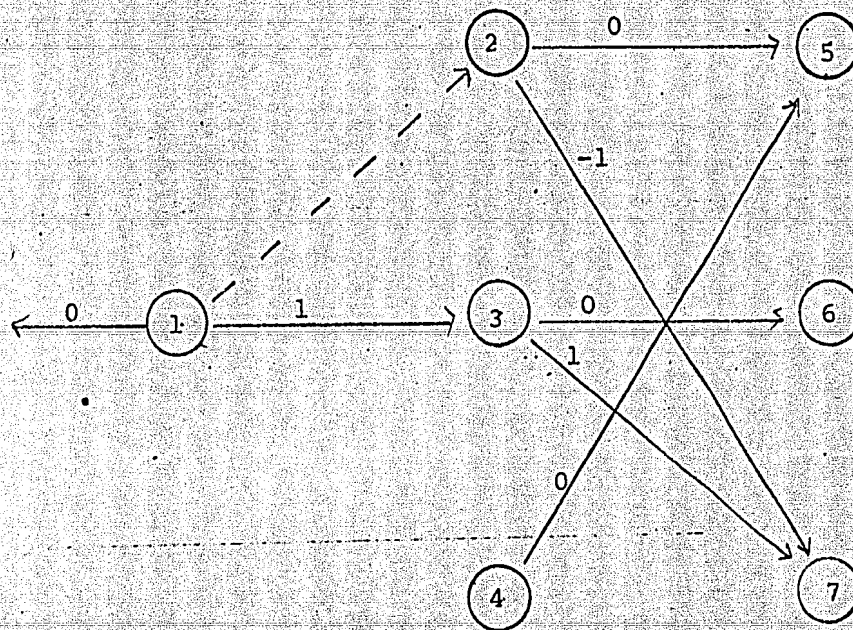
Análisis de costos reducidos: Para  $x_1 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(1)}^1 - \Pi_{H(1)}^1 + \Pi^2 S(1) - c_1 = 4 > 0$$

Es candidato para entrar en la base.

$$\text{Calculamos } Y = \underline{B}^{-1} \underline{A}(1)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(1)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(l) - CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(l) = A(l) \text{ pues } C = [0]$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[S(l) - D\gamma^1] = [0]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Definimos: } \Delta_1 = \min \left\{ \frac{\infty - 26}{1} \right\} = \infty; \Delta_2 = \min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{12}{1} \right\} = 0$$

$$\Delta = \min \{ \infty, 0, \infty \} = 0 \text{ sale } x_2 = 0 \text{ y entra } x_1 = 0$$

La nueva solución es:

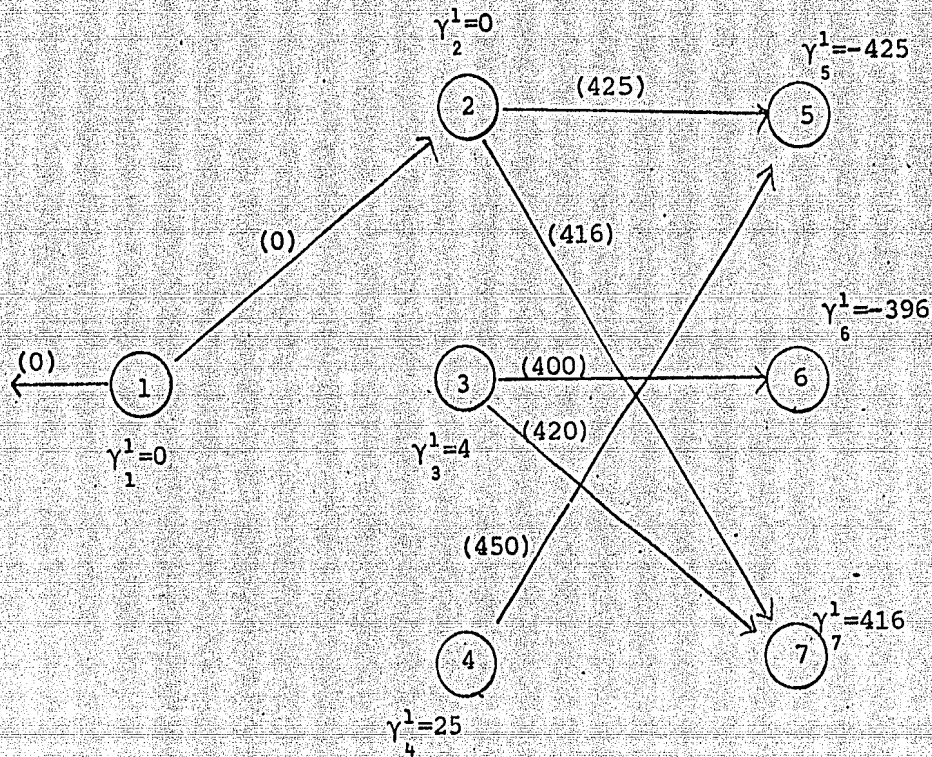
$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 29 \\ 26 \\ 26 \\ 12 \\ 1 \\ 75 \end{bmatrix} \text{ con } \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C = [1]$  y  $Q^{-1} = [1]$ .

Iteración 6.

Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 0, 4, 25, -425, -396, -416]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } c^2 = 0.$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = c^1 B^{-1} = \gamma^1 = [0, 0, 4, 25, -425, -396, -416]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, 0, 4, 25, -425, -396, -416 \ ; \ 0]$$

Análisis de costos reducidos: Para  $x_3 = 93$  tenemos que:

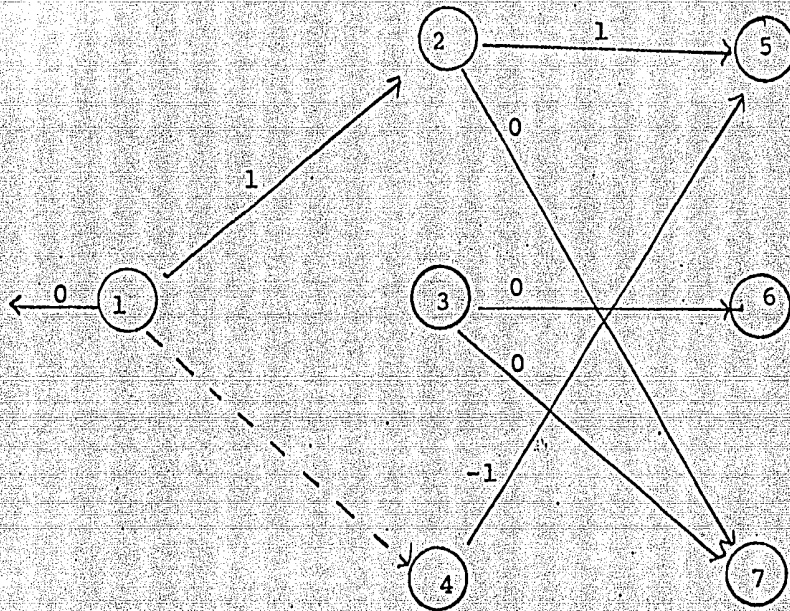
$$\Pi_{D(3)}^1 - \Pi_{H(3)}^1 + \Pi^2 S(3) - C_3 = -25 < 0$$

MATERIAL DIDACTICO SIN VALOR COMERCIAL EFECTIVO  
 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
 CANTON GUAYMAS, GUAYMAS, SUCRE, PANAMA

Es candidato de entrar a la base y  $\delta = -1$

Calculamos  $Y = B^{-1} A(3)$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(3)$$



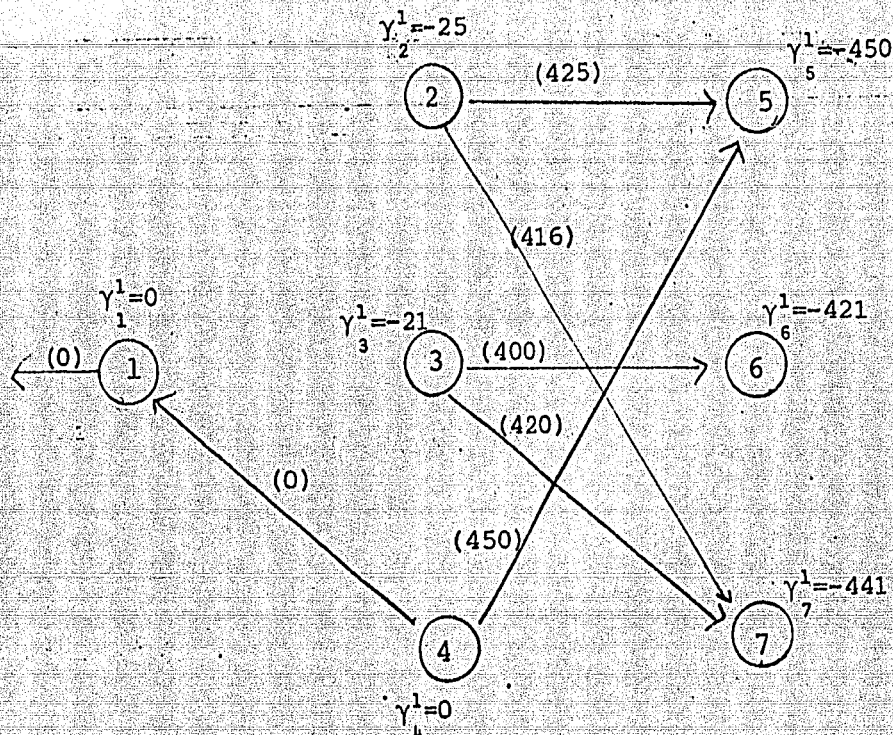
$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(3) - CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}s(3) = A(3) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^1 = B^{-1}\gamma^2 = B^{-1}A(3) = \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[s(3)] - D\gamma^1 = [0]$$





$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [0] \text{ y } D = [\bar{0}]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, -25, -21, 0, -450, -421, -441]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, -25, -21, 0, -450, -421, -441 \mid 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_5 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(5)}^1 - \Pi_{H(5)}^1 + \Pi^2 S(5) - c_5 = -56 < 0$$

No es candidato para entrar en la nueva fase. Para  $x_7 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(7)}^1 - \Pi_{H(7)}^1 + \Pi^2 S(7) - c_7 = -21 < 0$$

No es candidato para entrar en la base. Para  $x_{11} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(11)}^1 - \Pi_{H(11)}^1 + \Pi^2 S(11) - c_{11} = -29 < 0$$

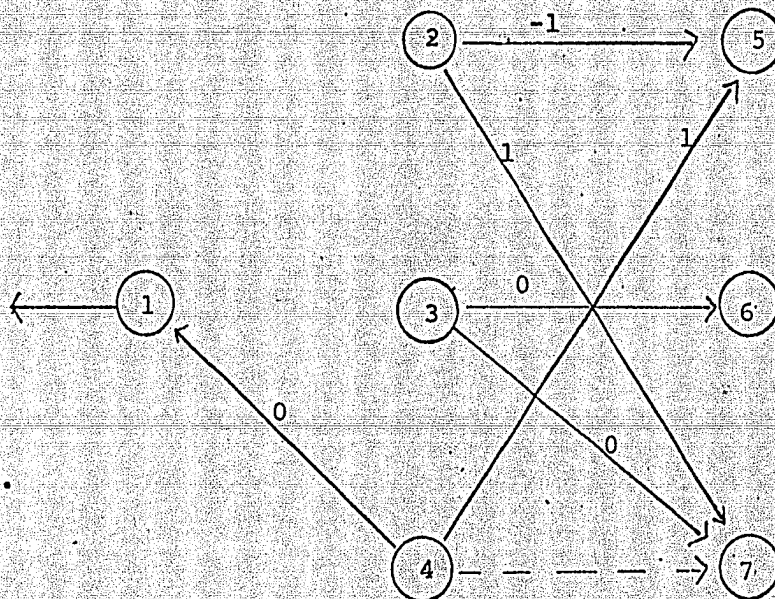
No es candidato de entrar en la base. Para  $x_{12} = 1$  tenemos que:

$$\Pi_{D(12)}^1 - \Pi_{H(12)}^1 + \Pi^2 S(12) - c_{12} = -9 < 0$$

Es candidato para entrar en la nueva base y  $\delta = -1$

Calculamos  $\gamma = B^{-1} A(12)$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(12)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(12) - CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(12) = A(12) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$



$$y^1 = B^{-1}y^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^2 = Q^{-1} [S(12) - Dy^1] = [0]$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos:  $\Delta_1 = \min \left\{ \frac{\infty - 29}{1} \right\} = \infty$ ;  $\Delta_2 = \min \left\{ \frac{26}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1$ ;

$\Delta = \min \{ \infty, 1, 17 \} = 1$ , sale  $x_{10} = 0$  y entra

$x_{12} = 1 - \Delta = 0$ .

Calculamos la nueva solución.

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 93 \\ 29 \\ 26 \\ 26 \\ 12 \\ 1 \\ 75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 93 \\ 30 \\ 25 \\ 26 \\ 12 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}, \quad x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 93 \\ 30 \\ 25 \\ 26 \\ 12 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

y la nueva base es:

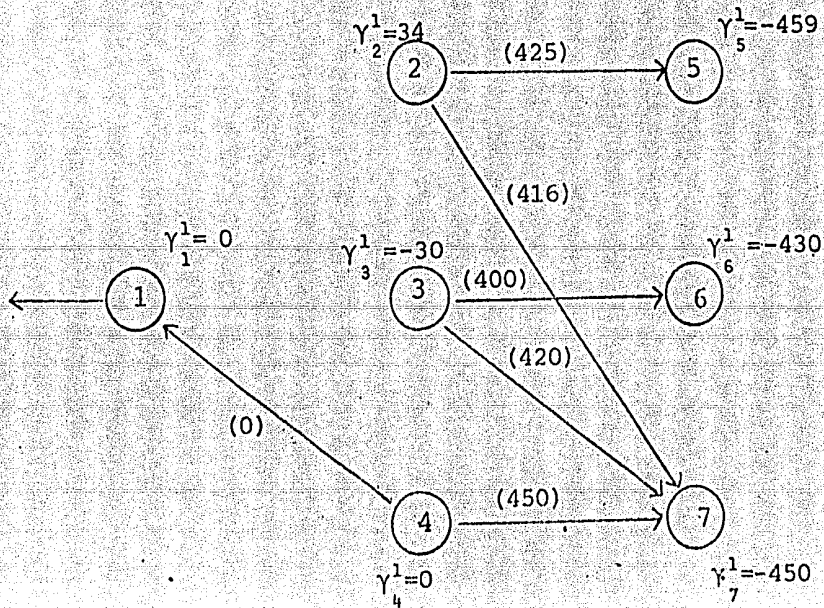
$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & 1 & & & & & 1 & \\ & & -1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & -1 & \\ & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

La matriz de trabajo  $Q = F - DB^{-1}C = [1]$  y  $Q^{-1} = [1]$

Iteración 8.

Cálculo de las variables duales.

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, -34, -30, 0, -459, -430, -450]$$



$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } D = [\bar{0}]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, -34, -30, 0, -459, -430, -450]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, -34, -30, 0, -459, -430, -450 \mid 0]$$

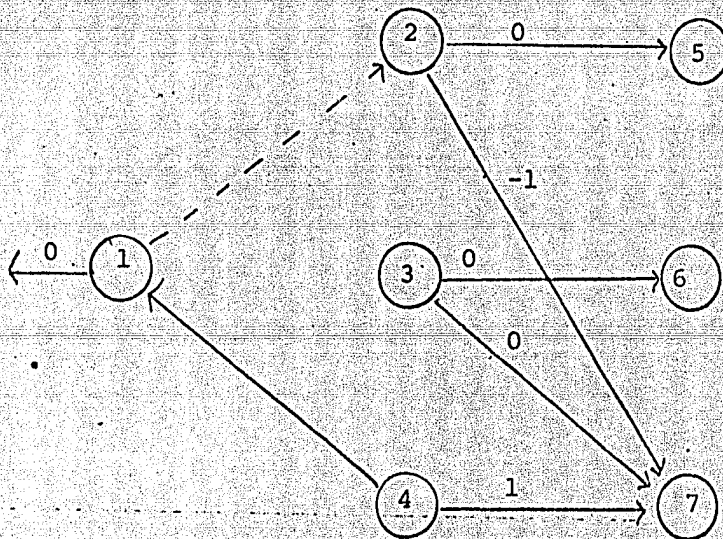
Análisis de costos reducidos. Para  $x_1 = 0$  tenemos que

$$\Pi_{D(1)}^1 - \Pi_{H(1)}^1 - \Pi^2 S(1) - c_1 = 34 > 0$$

Es candidato de entrar en la base y  $\delta = 1$

$$\text{Calculamos } \gamma = \underline{B}^{-1} \underline{A}(1)$$

$$\gamma^1 = B^{-1} A(1)$$



$$\gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = A(1) - CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(1) = A(1) \text{ pues } C = [\bar{0}]$$

$$\gamma^1 = B^{-1} \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^2 = Q^{-1}[S(1) - D\gamma^1] = [0]$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos:  $\Delta_1 = \min\{\frac{\infty - 93}{1}, \frac{\infty - 25}{1}\} = \infty$ ;  $\Delta_2 = \min\{\frac{0}{1}\} = 0$ ;

$\Delta = \min\{\infty, 0, \infty\} = 0$  sale  $x_{12} = 0$  y entra  $x_1 = 0$ .

La nueva solución es:

$$x^B = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{11} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 93 \\ 30 \\ 25 \\ 26 \\ 12 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}$$

y la nueva base es:

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

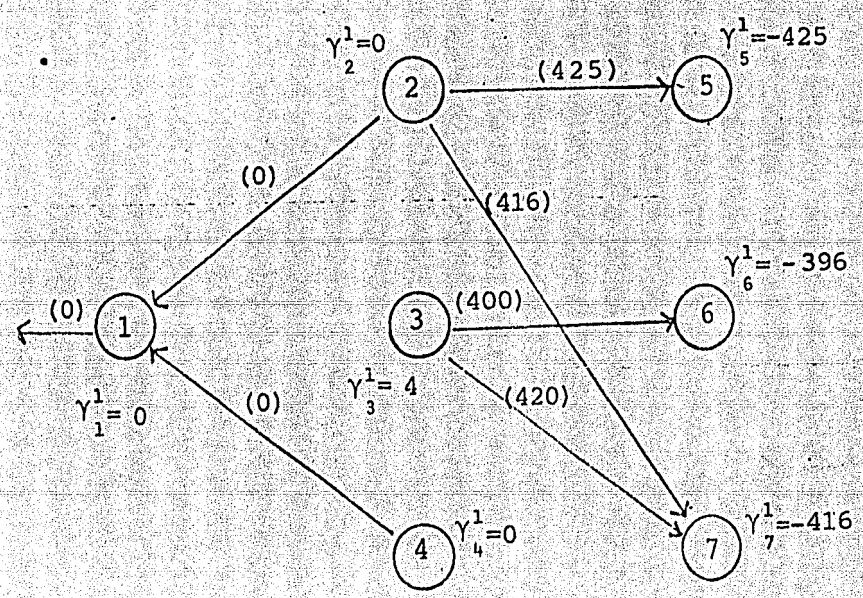
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & -1 \\ & & 1 & 1 & & & 1 \\ & & & & 1 & 1 & \\ & 1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & -1 & \text{---} & -1 & \text{---} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de trabajo Q sigue siendo la misma.

Iteración 9.

Cálculo de las variables duales

$$\gamma^1 = c^1 B^{-1} = [0, 0, 4, 0, -425, -396, -416]$$



INSTITUTO TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO  
 SECRETARÍA DE ECONOMÍA  
 CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

$$\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D = c^1 \text{ pues } C = [\bar{0}] \text{ y } D = [\bar{0}]$$

$$\Pi^1 = \gamma^2 B^{-1} = [0, 0, 4, 0, -425, -396, -416]$$

$$\Pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1} = [0]$$

$$\Pi = [0, 0, 4, 0, -425, -396, -416 \ ; \ 0]$$

Análisis de costos reducidos. Para  $x_2 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(2)}^1 - \Pi_{H(2)}^1 + \Pi^2 S(2) - c_2 = -4 < 0$$

No es candidato de entrar en la base. Para  $x_5 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(5)}^1 - \Pi_{H(5)}^1 + \Pi^2 S(5) - c_5 = -56 < 0$$

No es candidato de entrar en la base. Para  $x_7 = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(7)}^1 - \Pi_{H(7)}^1 + \Pi^2 S(7) - c_7 = -21 < 0$$

No es candidato de entrar en la base. Para  $x_{10} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(10)}^1 - \Pi_{H(10)}^1 + \Pi^2 S(10) - c_{10} = -25 < 0$$

No es candidato de entrar en la base. Para  $x_{11} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(11)}^1 - \Pi_{H(11)}^1 + \Pi^2 S(11) - c_{11} = -54 < 0$$

No entra a la nueva base. Para  $x_{12} = 0$  tenemos que:

$$\Pi_{D(12)}^1 - \Pi_{H(12)}^1 + \Pi^2 S(12) - c_{12} = -34 < 0$$

No entra a la nueva base. Como  $\psi_1 \cup \psi_2 = \phi$  la solución que tenemos es la óptima, con  $Z = 29230$

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 93, x_4 = 30, x_5 = 0, x_6 = 25, x_7 = 0, x_8 = 26,$$

$$x_9 = 12, x_{10} = 0, x_{11} = 0, x_{12} = 0, x_{13} = 75.$$

## CAPITULO VI

## CONCLUSIONES

En este trabajo se describieron las bases, estructura y análisis del problema de programación lineal así como su solución mediante el método simplex; se definieron algunas nociones de la teoría de gráficas finitas y se mostró el planteamiento del problema de flujo en redes con variables acotadas y la correspondiente especialización del método simplex para la solución de dicho problema. Para ello se explotó la equivalencia existente entre base y árbol enraizado, lo que facilita las operaciones de cálculo de variables primales y duales, así como la determinación de la inversa de la matriz base.

El problema especial de redes de flujo con restricciones adicionales, que da nombre a esta tesis, se analizó y resolvió siguiendo una extensión del análisis empleado en el caso de redes de flujo con Variables acotadas. Se describió el método de solución y su justificación, mostrándose al final algunos ejemplos ilustrativos.

Entre los aspectos que quedan por analizar se tiene el caso en donde la función de costos no es necesariamente lineal, digamos una función convexa, también resulta importante analizar el caso de redes con varios flujos.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## APÉNDICE I.

Sea una matriz base definida como:

$$\underline{B}_i = \left[ \begin{array}{c|c} B_i & C_i \\ \hline D_i & F_i \end{array} \right]$$

columnas      columnas  
llave          mono

a la cual se le cambia una de sus columnas (la  $r$ -ésima) por un vector columna  $\underline{A}(k)$ , sin que cambien sus características de base, se tiene que:

$$\underline{B}_{i+1}^{-1} = E \underline{B}_i^{-1}$$

donde

$$E = \left[ \begin{array}{c|c} E_1 & E_2 \\ \hline E_3 & E_4 \end{array} \right]$$

definimos  $Q_i = F_i - D_i B_i^{-1} C_i$ ; y  $Q_{i+1}^{-1} = [E_4 - E_3 B_i^{-1} C_i] Q_i^{-1}$ .

Para calcular la matriz  $E$  se deben considerar dos casos:

Caso 1. La columna que sale es del tipo "mono", entonces  $E$  tiene la forma siguiente:

$$E = \left[ \begin{array}{c|c} I & E_2 \\ \hline O & E_4 \end{array} \right]$$



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

y  $Q_{i+1}^{-1} = E_i Q_i^{-1}$ . La matriz  $E$  resulta de encontrar un vector  $e$ , tal que:  $B_i e = A(k)$ , este vector se coloca en la  $r$ -ésima columna de  $I$  y a esta nueva matriz se le calcula su inversa resultando de estas operaciones la matriz  $E$ .

$$E = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & e & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ r\text{-ésimo renglón} \\ \\ \\ r\text{-ésima columna} \end{matrix}$$

Caso 2. La columna que sale es del tipo "llave", estas son las que corresponden a los arcos de un árbol, entonces el árbol de la iteración  $i$ -ésima ha quedado incompleto y un nuevo arco debe reemplazar al que salió; se hace la siguiente prueba: el arco que salió se encontraba en la  $r$ -ésima columna de  $B_i$ , sea  $\beta^r$  el  $r$ -ésimo renglón de  $B_i^{-1}$  y  $A(k)$  el vector columna correspondiente a la variable que entra a la nueva base, calculamos  $\gamma = \beta^r [C_i \ ; \ A(k)]$ , entonces, si  $\gamma_j = 0$  implica que la  $j$ -ésima columna de  $[C_i \ ; \ A(k)]$  puede ser cambiada por la  $r$ -ésima columna de  $B_{i+1}$ , de aquí se tienen dos subcasos:

Caso 2.1  $\gamma_j$  corresponde a  $A(k)$ , es decir, la variable que entra ocupa el lugar de la que sale, entonces:

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & \vdots & & \\ & & & \\ E_3 & & & I \end{bmatrix}$$

y se calcula igual que para el caso 1; Además

$$Q_{i+1}^{-1} = [I - E_3 B_i^{-1} C_i] Q_i^{-1}$$

Caso 2.2  $\gamma_j$  corresponde a  $C_i(j)$ , la columna  $C_i(j)$  se coloca en el lugar  $r$ -ésimo de  $B_{i+1}$  y el vector  $A(k)$  ocupa el lugar  $j$ -ésimo de  $C_{i+1}$ . E resulta entonces del cálculo siguiente: obtenemos  $E^*$  como en el caso 1 y hacemos  $T$  como una matriz de columnas elementales que difiere de la identidad en 2 columnas, que son las correspondientes al vector que salió y al vector que cambia de lugar, estas dos solo se intercambian; y finalmente  $E = TE^*$  y la inversa de la matriz de trabajo en la iteración  $i+1$  es:

$$Q_{i+1}^{-1} = [E_4 - E_3 B_i^{-1} C_i] Q_i^{-1}$$

INSTITUTO NACIONAL DE ESTADÍSTICA Y CENSOS  
 SECRETARÍA DE ECONOMÍA  
 AV. CALZADA DE LA ESTADÍSTICA 1105  
 P.O. BOX 6363, MEXICO DF 06631

## APÉNDICE II.

Para la base

$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{ccc|c} B & & C & \\ \hline & & & \\ D & & F & \\ \hline & & & \end{array} \right] \begin{array}{l} \} I \\ \\ \} k \\ \\ \end{array}$$

I            I

Llamaremos a las primeras I columnas "columna llave" que vienen siendo las correspondientes a los arcos que forman la base en nuestra red; y a las k columnas restantes las llamamos "columna mono"..

Definimos la matriz de transformación L asociada a cualquier base  $\underline{B}$  como sigue:

$$L = \left[ \begin{array}{ccc|c} I & & -B^{-1}C & \\ \hline & & & \\ & & & \\ \hline & & & I \end{array} \right]$$

entonces el producto  $\underline{BL}$  será:

$$\underline{BL} = \left[ \begin{array}{ccc|c} B & & & \\ \hline & & & \\ D & & F - DB^{-1}C & \\ \hline & & & \end{array} \right]$$

donde  $Q = F - DB^{-1}C$  es la base de trabajo para la cual buscamos actualizar su inversa.

Sean  $\underline{B}_i$ ,  $L_i$  y  $Q_i$  la base, la matriz de transformación y la

base de trabajo en la iteración  $i$ -ésima respectivamente.

Necesitamos encontrar una expresión para  $Q_{i+1}^{-1}$  en términos de  $Q_i^{-1}$

Sea  $B_i^* = \underline{B}_i L_i$  entonces:

$$(B_i^*)^{-1} = L_i^{-1} (B_i)^{-1}$$

además:

$$B_{i+1}^* = \underline{B}_{i+1} L_{i+1} \quad \text{y}$$

$$(B_{i+1}^*)^{-1} = L_{i+1}^{-1} (\underline{B}_{i+1})^{-1}$$

$$\underline{B}_{i+1}^{-1} = E \underline{B}_i^{-1}$$

Donde  $E$  es una matriz de columnas elementales o de permutaciones.

Particionamos  $E$  para que sea compatible con  $\underline{B}$ :

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & & E_2 \\ & \vdots & \\ E_3 & & E_4 \end{bmatrix}$$

Ahora hacemos las siguientes sustituciones:

$$(B_{i+1}^*)^{-1} = L_{i+1}^{-1} E (\underline{B}_i)^{-1}$$

$$(B_{i+1}^*)^{-1} = L_{i+1}^{-1} E L_i (B_i^*)^{-1} \dots \dots \dots (5)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

$$(B_{i+1}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} B_{i+1} & & \\ & \vdots & \\ & & Q_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{i+1}^{-1} & & \\ & \vdots & \\ H_{i+1} & & Q_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(B_i^*)^{-1} = \begin{bmatrix} B_i & & \\ & \vdots & \\ & & Q_i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_i^{-1} & & \\ & \vdots & \\ H_i & & Q_i^{-1} \end{bmatrix}$$

donde  $H = [-Q \ D]B^{-1}$

$$L_{i+1} = \begin{bmatrix} I & & V_{i+1} \\ & \vdots & \\ & & I \end{bmatrix}, \quad L_i = \begin{bmatrix} I & & V_i \\ & \vdots & \\ & & I \end{bmatrix}$$

donde  $V = -B^{-1}C$

Podemos ver que

$$L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} I & & -V_{i+1} \\ & \vdots & \\ & & I \end{bmatrix}$$

sustituyendo en (5);

$$(B_{i+1}^*)^{-1} = L_{i+1}^{-1} E L_i (B_i^*)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} B_{i+1}^{-1} & & \\ & \vdots & \\ H_{i+1} & & Q_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & -V_{i+1} \\ & \vdots & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & E_2 \\ & \vdots & \\ E_3 & & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & & V_i \\ & \vdots & \\ & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^{-1} & & \\ & \vdots & \\ H_i & & Q_i^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E_1 - V_{i+1} E_3 & E_2 - V_{i+1} E_4 \\ \dots & \dots \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^{-1} + V_i H_i & V_i Q_i^{-1} \\ \dots & \dots \\ H_i & Q_i^{-1} \end{bmatrix}$$

Como el cálculo que nos interesa es el que corresponde a  $Q_{i+1}^{-1}$  solo efectuamos este.

$$\begin{aligned} Q_{i+1}^{-1} &= E_3 V_i Q_i^{-1} + E_4 Q_i^{-1} \\ &= [E_4 + E_3 (-B_i^{-1} C_i)] Q_i^{-1} \\ Q_{i+1}^{-1} &= [E_4 - E_3 B_i^{-1} C_i] Q_i^{-1} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



## BIBLIOGRAFIA

- 1 \_ Arreola Risa, A. y Arreola Risa, J. S.. "Programación Lineal, una introducción a la teoría y aplicaciones", Depto. de Ingeniería Industrial, ITESM, México.
- 2 \_ Bazaraa, Mokhtar S. y Jarvis, John J.. "Programación Lineal y Flujo en Redes", Limusa, México (1981).
- 3 \_ Gass, Saul I.. "Linear Programming", McGraw-Hill, New York (1964).
- 4 \_ Goldstein, E. G. y Yudin, D.VB.. "Programación Lineal (Problemas y aplicaciones)", Paraninfo, Madrid (1977).
- 5 \_ Hu, T. C.. "integer Programming and Network Flows", Addison-Wesley, Massachusetts (1969).
- 6 \_ Kennington, J. L. y Helgason, R. W. "algorithms for Network Programming", John-Wiley, (1980).
- 7 \_ Kim, Chaiho. "introduction to Linear Programming", Reinold-Holt, New York (1971).
- 8 \_ Luenberger, David G.. "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley, Massachusetts (1973).



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.