

00382

6

24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

**EL CHARMONIO, EL BUTONIO Y LA INTERACCION ENTRE QUARKS
A DISTANCIAS CORTAS**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

CARLOS VILLARREAL LUJAN

México, D.F., junio de 1988

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

Nuestro objetivo es estudiar las fuerzas entre los quarks. El modelo elegido es el quarkonio, esto es, el sistema formado por un quark y un antiquark, cuyos estados ligados dan origen a diversos mesones (Eichten et al. Phys. Rev. D (1978)).

La tesis inicia con una introducción rudimentaria y somera a la cromodinámica cuántica, la cual permite proponer, con cierta certeza, que el potencial de interacción a distancias cortas (≤ 0.1 fermis) es del tipo coulombiano. Sin embargo, la magnitud de la constante de acoplamiento fuerte puede trastornar seriamente un cálculo perturbativo de las correcciones asociadas a las fluctuaciones del vacío. Un poco peor: la naturaleza no abeliana de la teoría debe dar lugar, en principio, al incremento de la constante efectiva con la distancia entre los quarks (libertad asintótica), lo que hace poco factibles los resultados obtenidos empleando este método en las regiones del orden de un fermi. Argumentos de plausibilidad indican un potencial de interacción lineal en esta zona.

A continuación, analizamos la serie de trabajos (Avilez et al., Phys. Rev. D 1981) tendientes a explicar los experimentos de colisiones entre hadrones polarizados que han puesto en jaque a la cromodinámica cuántica perturbativa. Al parecer, dichos experimentos sólo pueden comprenderse en términos de efectos no perturbativos tales como la existencia de un momento cromomagnético anómalo de los quarks o del intercambio de partículas pseudoescalares; de hecho, este tipo de efectos ha permitido construir la única parametrización que se conoce de las

funciones de correlación de espín de los protones.

En el tercer capítulo, exploramos la acción de los efectos no perturbativos en la espectroscopía del quarkonio, con el resultado de que es posible determinar correctamente los desdoblamientos de la estructura fina, mejorando notablemente los cálculos previos en este sentido. Por supuesto, el cálculo desarrollado es exacto y difiere notablemente del perturbativo. Adicionalmente, hacemos ver que la magnitud de la constante efectiva de interacción ocasiona que los quarks se muevan dentro de un hadrón con mayor velocidad que la encontrada por otros autores.

A lo largo del trabajo, conjeturamos sobre el origen de los efectos no perturbativos. Una de nuestras adivinanzas, por el momento, gira en torno a los efectos detectados por un observador no inercial en el vacío cuántico (Hacyan et al, Phys. Rev. D (1988)).

INDICE

I. Las fuerzas entre las partículas elementales

Las simetrías y las teorías de norma (2).
El grupo $SU(3)$ de color (4).
Potencial de interacción entre los quarks (6).
Sobre el confinamiento (14).
Conclusiones (17).
Bibliografía del capítulo I (21).

II. Sobre la polarización de los hadrones.

Fenomenología de las funciones de correlación (4).
Parametrización de las funciones de correlación (7).
Sobre la sección transversal diferencial (9).
Conclusiones (10).
Bibliografía del capítulo II (12).

III. El encanto, la belleza, el charmonio, el botonio y la interacción entre los quarks

La ecuación de Schrodinger y sus valores propios (5).
Amplitudes de decaimiento (10).
Correcciones relativistas en el quarkonio (12).
Conclusiones (31).
Bibliografía del capítulo III. (33)

LAS FUERZAS ENTRE LAS PARTICULAS ELEMENTALES. (1)

La rica espectroscopía de los hadrones es difícil de entender a menos que sus patrones de niveles de energía se deban a la excitación de grados de libertad internos, asociados con los quarks. El modelo de quarks permite explicar las características generales de la espectroscopía hadrónica que se deducen del análisis de los experimentos de colisiones entre hadrones y leptones. De estas reacciones, las propiedades más notables son la libertad asintótica y el confinamiento.

La libertad asintótica implica que cuando las energías involucradas en una colisión son muy grandes, las secciones eficaces de dispersión inelástica pueden caracterizarse, contrariamente al caso elástico, por una sola variable, proporcional a la razón entre la energía y el momento transferidos en la colisión. Esta propiedad se entiende si los quarks se comportan como partículas de Dirac libres en este intervalo de energías, es decir, si sus secciones eficaces se superponen incoherentemente. No obstante, ocurre el hecho un tanto paradójico de que, a pesar de que las energías de colisión son monstruosas, nunca se ha observado un quark aislado, esto es, los quarks parecen encontrarse confinados permanentemente en el interior de los hadrones.

Los quarks que forman un hadrón pueden tener números cuánticos idénticos (de sabor): isospín, extrañeza, etc.. Sin embargo, el principio de Pauli no se viola gracias al grado de libertad adicional denominado color. Este número es trivaluado y sus efectos se manifiestan, por ejemplo, en la correcta predicción de la razón de la producción de hadrones en colisiones electrón-positrón o en el decaimiento de piones en fotones. Podría pensarse que este número cuántico extra multiplicaría el número de partículas observadas. No sucede esto porque el color refleja una simetría exacta generada por el grupo $SU(3)_c$, de manera que los hadrones pueden interpretarse en términos de representaciones singletes de color, con una energía más baja que la de cualquier estado multiplete.

Así como la teoría electromagnética describe las fuerzas

entre los constituyentes cargados de los átomos, en tanto que la fuerza interatómica es complicada y, en principio, derivable de la fuerza entre los constituyentes, del mismo modo se podría esperar que la fuerza entre los quarks fuese simple y que la complicada interacción hadrónica ocurriera como su manifestación secundaria. La forma de la fuerza electromagnética está determinada de una manera única por el hecho de que la carga eléctrica se conserva localmente en todos los puntos del universo, lo cual, según el teorema de Noether, es el eco de alguna simetría. Similarmente, la conservación del color asociada con la simetría SU(3), debe fijar la forma de la interacción entre los quarks. La teoría resultante debe ser capaz de reconstruir tanto la estructura hadrónica, como la dinámica subyacente, amén de reconciliar los fenómenos de la libertad asintótica y el confinamiento permanente.

Las simetrías y las teorías de norma⁽²⁾

Se piensa que todas las interacciones fundamentales pueden describirse por una teoría de norma. Estas tienen su origen en la idea de Einstein de que la gravedad es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo: una partícula material se mueve en una trayectoria determinada, no sujeta a fuerzas externas, sino desplazándose libremente en un universo deformado por la materia misma.

Siguiendo esta idea, Weyl concibió al electromagnetismo como el fenómeno geométrico resultante de la invariancia del espacio-tiempo ante las transformaciones locales de escala o norma, las cuales constituyen las herramientas básicas de estas teorías y les dan su nombre. Aunque Weyl no fue afortunado con su programa inicial, su proposición fructificó al estudiarse el efecto de estas transformaciones en las fases de las funciones de onda cuánticas.

Si entre dos puntos vecinos del espacio-tiempo apartados una distancia dx^μ se cambia la escala, de una unidad arbitraria, a $1+S^\mu dx_\mu$, cualquier función $f(x^\mu)$ cambiará de acuerdo a la

regla siguiente

$$f(x^\mu) = [f(x^\mu) + \theta_\mu f(x^\mu) dx^\mu] \cdot [1 + S_\mu dx^\mu]$$

$$= [f(x^\mu) + (\theta_\mu + S_\mu) f(x^\mu)] dx^\mu$$

Ahora, el momento lineal de una partícula cuántica libre lo proporciona el operador $-i\theta_\mu$ y la presencia de un campo electromagnético modifica dicha expresión a

$$D_\mu = -i\theta_\mu + eA_\mu.$$

Cuando se identifica al cuadripotencial $i e A_\mu$ con el factor S_μ y se exige la invariancia de la función f ante la transformación de escala, podemos interpretar a los campos electromagnéticos como fuerzas que compensan las deformaciones locales de escala.

Las transformaciones de escala de Weyl tienen la particularidad de ser diferentes en todos los puntos. Existe una diferencia importante entre estas transformaciones locales y aquellas que afectan uniformemente, de manera global, a todo el espacio. A nivel cuántico, la discusión de las simetrías globales implica la existencia de representaciones unitarias $g \rightarrow U(g)$ de un grupo de simetría en el espacio de estados de Hilbert. Su acción sobre las observables está dada por

$$\Psi \rightarrow U_g \Psi$$

$$\Omega \rightarrow U_g \Omega U_g^\dagger$$

y dan lugar a cargas conservadas que conmutan con el hamiltoniano. Su acción sobre el espectro, en caso de tratarse de representaciones irreducibles, se traduce a la clasificación en multipletes de los diversos estados del sistema; en particular, el estado de vacío corresponde a la representación idéntica.

Las simetrías locales poseen un grado mayor de versatilidad en el sentido de que sus representaciones de grupo se generan convirtiendo en funciones del espacio y del tiempo a los factores

de fase asociados con las transformaciones globales. La estrategia de las teorías de norma se reduce a buscar los campos compensadores que restauren la simetría perdida en la aplicación de una transformación local de escala.

La electrodinámica, que es la teoría de norma prototipo, tiene como simetría local al grupo abeliano $U(1)$, mientras que las teorías de norma más elaboradas de Yang-Mills resultan de considerar grupos locales de simetría no abelianos; el interés en estas teorías radica en el hecho de que éstas son las únicas que poseen la característica de la libertad asintótica. La cromodinámica es la teoría de norma que resulta de la simetría ante el grupo de transformaciones $SU(3)$.

El grupo $SU(3)$ de color.⁽³⁾

Formulemos la teoría para el grupo que define la simetría de la fuerza entre los quarks, el grupo $SU(3)$ de color. El campo fermiónico está formado por un triplete de campos de quarks

$$q(x) = \begin{bmatrix} q_1(x) \\ q_2(x) \\ q_3(x) \end{bmatrix}$$

mientras que los campos de norma quedarán descritos por la matriz de 3×3

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_a \lambda_a A^\mu_a \quad a=1, \dots, 8$$

donde λ^a denota a las matrices de Gell-Mann que cumplen con la propiedad $\text{tr } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}$ y además

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc} \lambda_c$$

lo que define las constantes de estructura de SU(3).

La ecuación de Dirac para los campos de quarks libres es

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q(x) = 0$$

que al efectuar la substitución de la derivada ordinaria por aquella que es invariante de norma

$$D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu$$

se convierte en

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m)q(x) = 0.$$

Aquí, g es la constante de acoplamiento fuerte. Para construir los campos de norma, podemos acudir a la electrodinámica, en donde los campos de fotones pueden escribirse en términos del conmutador invariante de norma

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$$

de modo que si adoptamos esta definición en la cromodinámica, el tensor de campo gluónico es

$$G_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + ig[A_\nu, A_\mu]$$

Los términos cuadráticos en los campos que surgen aquí resultan de la no conmutatividad de las matrices λ^a . El autoacoplamiento de los campos les permite convertirse en portadores de color y en esto reside la diferencia esencial entre la cromodinámica y la electrodinámica.

La derivada invariante nos permite definir también las ecuaciones cromodinámicas de Maxwell con fuentes:

$$[D_\mu, G^{\mu\nu}] = [\partial_\mu + igA_\mu, G^{\mu\nu}] = j^\nu$$

y la identidad de Jacobi nos proporciona las ecuaciones de Maxwell homogéneas

$$[D_\mu, [D_\nu, D_\lambda]] + [D_\nu, [D_\lambda, D_\mu]] + [D_\lambda, [D_\mu, D_\nu]] = 0.$$

Las ecuaciones de campo y la ecuación de movimiento pueden derivarse del lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \sum q_i (\gamma_\mu D^\mu - m) q_i$$

El subíndice de los campos de quarks indica el sabor $i = u, d, s, c, b, \dots$

Hasta ahora hemos establecido las ecuaciones cromodinámicas en el esquema de la primera cuantización. Es preciso considerar el importante papel que juegan las fluctuaciones del vacío, las cuales permitirán establecer el cumplimiento de la propiedad de la libertad asintótica. Un método usado comúnmente es el de las integrales de trayectoria, formalismo que nos permitirá determinar con cierta aproximación la forma del potencial de interacción entre los quarks a distancias cortas.

Potencial de interacción entre quarks. ⁽⁴⁾

Pasaremos a investigar las fuerzas entre los quarks suponiendo que éstos se mueven tan lentamente como para pensar que su dinámica puede describirse por medio de un potencial de interacción instantánea. Separemos una pareja quark-antiquark hasta una distancia relativa r y mantengamos dicha configuración por un tiempo τ largo ($\tau \rightarrow \infty$). Posteriormente, acerquemos de nuevo la pareja hasta que se aniquile. La línea de universo de los quarks es como en la figura 1. La amplitud de dicho proceso es más fácilmente calculable en el espacio euclidiano, al cual se llega efectuando una rotación de Wick del espacio de Minkowski; operacionalmente puede reducirse a la substitución $\tau \rightarrow iT$ (T juega el papel de un pseudotiempo) en el operador de evolución.

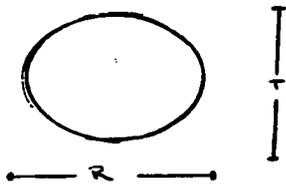


Figura 1

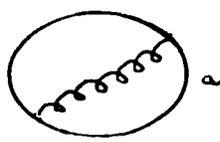


Figura 2

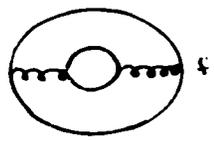
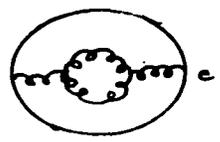
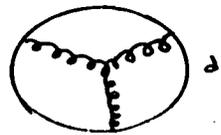
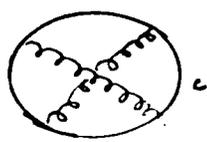
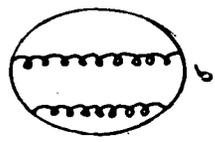


Figura 3

El objeto a calcular es

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle$$

Aquí, $|i\rangle$ y $|f\rangle$ representan al par $q\bar{q}$ separados una distancia R , en tanto que H es el hamiltoniano de la teoría de norma SU(3). La integral de trayectoria asociada es

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \frac{\int D A_M^a D c^a D \bar{c}^a \exp(-S + i \int g \{ A_M^a J_M^a d^4x \})}{\int D A_M^a D c^a D \bar{c}^a e^{-S}}$$

donde S es la acción que define a la teoría, $J_M^a (a = 1, \dots, 8)$ es la corriente externa que sigue las líneas de universo de los quarks y las integrales funcionales se evalúan sobre los campos de norma A_M^a y los campos fermiónicos c^a . Para la trayectoria mostrada en la figura 1, la integral se simplifica a

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \frac{\int D A_M^a D c^a D \bar{c}^a \exp(-S + i \int_C g \{ A_M^a \frac{1}{2} \lambda^a dX^M \})}{\int D A_M^a D c^a D \bar{c}^a e^{-S}}$$

en donde el contorno C sigue la trayectoria de la figura. Identificaremos al numerador y al denominador de (3) como sigue

$$\langle i | e^{-HT} | f \rangle = \frac{Z(J)}{Z(0)}$$

Los estados $|i\rangle$ y $|f\rangle$ son idénticos y dado que el proceso es estático, el lado izquierdo de (4) es simplemente

$$\exp(-V(R)T) \langle i | f \rangle$$

aquí $V(R)$ es el potencial entre los quarks. Si tomamos el logaritmo de (4) tendremos

$$V(R) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle i | e^{-HT} | f \rangle = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \left(\frac{Z(J)}{Z(0)} \right)$$

donde \mathcal{P} implica que el orden en que aparecen los operadores a lo largo de la trayectoria es importante y N resulta de la normalización de los estados inicial y final.

Enumeraremos las gráficas que aparecen en la ecuación (8). A segundo orden tenemos el intercambio de un gluón (fig. 2) cuya expresión integral es

$$\frac{1}{2} g^2 \text{tr} T^a T^a \int dx dy D(x-y)^2$$

donde $D(x-y)$ es el propagador del campo sin masa y $T^a = \lambda^a / 2$. El factor $1/2!$ aparece a modo de evitar contar de más al integrar sobre el circuito completo. Llamemos I_a a la integral en (8) y escribamos el resultado como

$$\frac{1}{2} g^2 \text{tr} T^a T^a I_a$$

Las gráficas de cuarto orden son las de la figura 3. Escribiremos también sus expresiones factorizando los factores de grupo y dejando la integral al final

$$\frac{1}{4} g^4 \text{tr} T^a T^a T^b T^b I_b$$

$$\frac{1}{4} g^4 \text{tr} T^a T^b T^a T^b I_c$$

$$g^4 \text{tr} T^a T^b T^c T^c I_d$$

$$g^4 \text{tr} T^a T^a I_e$$

$$g^4 \text{tr} T^a T^a I_f$$

Desarrollaremos primero el cálculo de la parte abeliana de dichas gráficas, despreciando por el momento los circuitos internos de quarks. El resultado ilustrará la conexión entre la función de correlación y el potencial de interacción. En esta aproximación, los únicos efectos de cuarto orden corresponden a las gráficas b y c; además, no existen matrices I_g que no

consultan, de manera que las dos gráficas se suman trivialmente

$$I_b + I_c = I_a^2$$

como se muestra en la figura 4, de manera que en el modelo abeliano

$$Z = 1 + g^2 I_a + \frac{1}{2} g^4 I_a^2 + \dots$$

y es fácil ver que a todos los órdenes

$$Z = \exp(g^2 I_a)$$

La integral de intercambio de un gluón es idéntica a la que aparece en el intercambio de un fotón, de modo que

$$I_a \sim T/4\pi R$$

y por lo tanto el potencial entre los quarks resulta

$$-i \ln \frac{1}{Z} = \ln Z = \frac{-g^2}{4\pi R}$$

Consideremos la corrección provocada por la polarización del vacío al modelo abeliano, que corresponde a la gráfica f. Esta representa una corrección al propagador del gluón y la expresión de las dos primeras contribuciones en el espacio momental es como sigue

$$D(q^2) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2}$$

$$D(q^2) I_{\mu\nu} D(q^2)$$

donde (Bjorken y Drell, 1984)

$$I_{\mu\nu}(q^2) = (-1)g^2 \int \frac{tr \gamma^\mu(p+m) \gamma^\nu(p-q-m)}{(p^2+m^2)((p-q)^2+m^2)}$$

El resultado es conocido: la carga se renormaliza y la ley de Coulomb cambia

$$-\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \rightarrow -\frac{g^{\mu\nu}}{q^2} (1 + \log q^2/M^2)$$

Al efectuar la transformación de Fourier para pasar al espacio de configuración, obtenemos

$$\frac{g^2}{4\pi R} \rightarrow \frac{g^2}{4\pi R} (1 - (2\alpha/3\pi) \log R/a)$$

en donde $M^2 = 1/a$ es un parámetro de corte de longitudes de onda ultravioleta. Este resultado es importante: las fluctuaciones del vacío modifican la constante de acoplamiento de tal forma que su valor depende de la posición

$$\alpha(R) = \alpha(a) - (2\alpha^2/3\pi) \log(R/a)$$

Notemos que

$$R \partial \alpha(R) / \partial R = -2\alpha^2(R) / 3\pi$$

El signo menos indica que cuando R crece la constante efectiva α disminuye. La razón física estriba en el efecto de apantallamiento: las cargas efectivas de los quarks decrecen debido a la polarización del vacío inducida por la creación de parejas fermión - antifermión.

Regresemos al cálculo no abeliano. Dado que $T^a T^a = 4/3$, la gráfica b puede escribirse

$$\frac{1}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M T^P T^P I_0 = \frac{1}{2}(g^2 \text{tr} T^M T^M)^2 I_0$$

Sumemos esta expresión con la resultante de la gráfica c

$$b+c = \frac{1}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M T^P T^P (I_0 + I_0) \\ + \frac{1}{2}g^4 \text{tr} T^M [T^P, T^M] T^P I_0$$

Si usamos el resultado $I_0 + I_0 = I_0^2$, tendremos

$$b+c = \frac{1}{2}(g^2 \text{tr} T^M T^M)^2 I_0^2 + \frac{1}{2}g^4 \text{tr} T^M [T^P, T^M] T^P I_0$$

pero

$$\text{tr} T^M [T^P, T^M] T^P = \frac{1}{2} \text{tr} (T^P, T^M) [T^P, T^M] \\ = \frac{1}{2} f^{MNP} f^{NPM} \text{tr} T^P T^P$$

y como $f^{MNP} f^{NPM} = 3g^2 f^2$:

$$b+c = \frac{1}{2}(g^2 \text{tr} T^M T^M)^2 I_0^2 + \frac{3}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M I_0$$

Abordemos ahora la gráfica d

$$d = g^4 \text{tr} T^M T^P T^P f^{MNP} I_0 \\ = \frac{1}{2}g^4 \text{tr} (T^M, T^P) T^P f^{MNP} I_0 \\ = \frac{1}{2}f^{MNP} f^{NPM} \text{tr} T^P T^P I_0 \\ = \frac{3}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M I_0$$

Si reunimos todas las contribuciones, tendremos una función de correlación de orden g^4

$$Z = 1 + (g^2 \text{tr} T^M T^M)^2 I_0 + \frac{1}{2}(g^2 \text{tr} T^M T^M)^2 I_0^2 \\ + \frac{3}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M I_0 + \frac{3}{2}g^4 \text{tr} T^M T^M I_0 + g^4 \text{tr} T^M T^M (I_0 + I_0)$$

cuyo logaritmo determinará al potencial de interacción

$$\ln Z = g^2 \text{tr} T^{\mu} T^{\mu} [I_0 + \frac{2}{3} g^2 I_0 + \frac{2}{3} g^2 I_d + g^2 (I_0 + I_f)]$$

La evaluación de las integrales aparece, por ejemplo, en el trabajo de Kogut ⁽⁴⁾. La clave es extraer los términos lineales en T y descartar todos aquellos que no crezcan con la rapidez suficiente. Resulta:

$$I_0 \sim T/4\pi R$$

$$I_0 \sim \log(R/a) T/4\pi^2 R$$

$$I_d = 0$$

$$I_0 = \frac{10 g^4}{16 \pi^2} \frac{3 \text{tr} T^{\mu} T^{\mu} \log(R/a)}{4 \pi R}$$

$$I_f = \frac{-2 g^4}{12 \pi^2} \frac{\log(R/a)}{4 \pi R}$$

La suma de estas expresiones nos conducen directamente al resultado

$$V(R) = \frac{-\text{tr} T^{\mu} T^{\mu}}{4 \pi R} \left[g^2 + \frac{22}{16 \pi^2} g^4(a) \log(R/a) \right]$$

con una constante de acoplamiento efectiva

$$g^2(R) = g^2(a) + \frac{22}{16 \pi^2} g^4(a) \log(R/a)$$

cuyo comportamiento está determinado por la función

$$-R\alpha^2(R)/\alpha R = -11\alpha^2(R)/16\pi^2 + \dots$$

El signo menos en esta expresión implica que el acoplamiento es más intenso a medida que crece la distancia entre los quarks. Esto sugiere que el confinamiento es posible en esta teoría. Pero por otro lado, muestra que los cálculos perturbativos a distancias grandes en la cromodinámica carecen de sentido, y no se sabe cómo calcular o aún formular la teoría en estas regiones. Este es un problema muy serio: no existen reglas claras de cómo dividir los fenómenos dependientes de la parte perturbativa de la teoría de aquellos que no lo son. Desde un punto de vista formal, en el régimen de acoplamiento débil puede usarse la teoría de perturbaciones para relacionar estados asintóticos de electrones y fotones libres con las variables del campo; sin embargo, tales estados sólo existen a distancias grandes, por lo que este enfoque parece estar vedado para la cromodinámica cuántica ⁽¹⁰⁾. Entonces, si bien es plausible que la constante de acoplamiento decrece con la distancia relativa entre los quarks, no podemos calcular de manera precisa su comportamiento dentro de este esquema.

Cuando se incluyen N_f sabores de quarks la constante de acoplamiento se reescribe en el espacio de Fourier como

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(M^2)}{1 + \frac{\alpha(M^2) (33 - 2N_f) \log(q^2/M^2)}{12\pi}}$$

o, empleando la definición

$$\Lambda^2 = M^2 \exp \frac{-12\pi}{(33 - 2N_f) \alpha(M^2)}$$

y entonces

$$\alpha(q^2) = \frac{4}{3} \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \log(q^2/\Lambda^2)}$$

que es una forma compacta de describir a la constante de acoplamiento válida, repetimos, en el esquema perturbativo, cuando las transferencias de momento son muy grandes.

Tratando de averiguar el comportamiento del potencial a distancias lejanas, Richardson ⁽⁶⁾ usó lazos estos inconvenientes y aplica las fórmulas perturbativas en el límite $q^2 \rightarrow 0$

$$\frac{4}{3} \frac{12 \pi}{(33 - 2 N_f) \log (q^2 / \Lambda^2)} + \frac{16 \pi \Lambda^2}{(33 - 2 N_f) q^2}$$

que en espacio de configuración corresponde a un crecimiento lineal, que coincide con los resultados de la cromodinámica cuántica en redes y con el modelo de confinamiento de las cuerdas duales. En particular, la constante efectiva de acoplamiento está relacionada con la tensión K de estas cuerdas como sigue

$$K = \frac{1}{2} q^2 \alpha(q^2) \Big|_{q^2=0} \approx 0.25 \pm 0.15 \text{ GeV}^2$$

Como veremos, la estimación es bastante buena.

Sobre el confinamiento. ⁽⁶⁾

Situamos el origen del confinamiento en la interacción que pueden desarrollar los campos gluónicos entre sí. De acuerdo con esto, las líneas de flujo de color pueden quedar aprisionadas dentro de un tubo o bolsa ⁽⁷⁾, lo que modelaría la propiedad esencial de los gluones que es su actuación como portadores de color. Este efecto puede parametrizarse suponiendo que una región espacial de volumen $V = AR$ que contiene flujo de color, contribuye a la energía de un hadrón con la cantidad positiva $W = BV = BAR$, con B constante. El efecto de la presión B de la bolsa será comprimir las líneas de campo tanto como sea posible, pudiendo adquirir eventualmente la forma de cuerdas. Más

precisamente, en esta teoría los hadrones estarían conformados por un campo cuántico (de espín arbitrario) confinado en una región finita del espacio, la cual se mantendría inflada contra la presión del vacío debido a la presión térmica del campo. En el límite termodinámico, la bolsa tiene una temperatura T_0 , independiente de su energía E ; en otras palabras, la densidad de niveles del sistema es una exponencial del tipo $\zeta \sim e^{E/T_0}$.

Supongamos que la distribución de equilibrio de un campo cuántico dentro de la cavidad es la asociada con un cuerpo negro en equilibrio térmico en equilibrio a una temperatura T_0 , el cual tiene una energía $E \sim VT^4$. El momento angular $J_{\text{máx}}$ de la bolsa será máximo cuando, para una energía dada, ésta desarrolle una forma en la que una de sus dimensiones lineales se maximice también. Este es el caso de una bolsa con forma de cigarro girando sobre el eje perpendicular a su extensión más larga. Su anchura mínima debe ser del orden de la semilongitud de onda asociada con la temperatura T_0 del campo y entonces su volumen será $V \sim L/T_0^3$, donde L es la longitud de la bolsa. De esta manera:

$$J_{\text{máx}} \sim NT_0 L \sim EVT_0^2 \sim E^2 \sim M^2$$

Tenemos como consecuencia inmediata de este modelo una relación típica entre la masa y el momento angular de una partícula (trayectoria de Regge) del tipo $J \sim M^2$, la cual se cumple muy bien para una buena cantidad de resonancias hadrónicas, como se puede apreciar en la figura 4. Este tipo de comportamiento es reproducible también en un modelo estrechamente vinculado con el anterior, el modelo hadrónico de cuerdas duales⁽⁴⁾, las cuales pueden considerarse como la degeneración de la geometría de una bolsa que gira rápidamente. En este modelo, las líneas de fuerza del campo de color están tan colapsadas que puede pensarse que forman una cuerda que une a los quarks. Así como el lagrangiano de una partícula libre en el espacio de Minkowski está dado por su línea de universo, el lagrangiano de un par de quarks unidos por la cuerda deberá expresarse en términos de la hipersuperficie barrida por el sistema⁽⁵⁾. El lagrangiano considerado tiene dos consecuencias inmediatas:

(1) Los quarks se mueven en los extremos de la cuerda con la velocidad de la luz.

(2) Los quarks desarrollan trayectorias de Regge

Si se supone válida la primera relación (válida, en principio, para partículas de Dirac libres), la segunda puede entenderse como una consecuencia directa de una interacción lineal entre los quarks⁽⁶⁾. En efecto, supongamos que K es la densidad de energía de la cuerda que conecta dos quarks sin masa; el momento angular del par de quarks será igual al momento angular del tubo de fuerza. Por otro lado, la velocidad local cuando estos se encuentran separados una distancia r será

$$v(r)/c = 2r/r_0$$

donde r_0 es la mitad de la longitud de la cuerda. La energía total es entonces

$$E = Mc^2 = 2 \int K(1 - v^2(r)/c^2)^{1/2} dr = \frac{1}{2} \pi K r_0$$

y el momento angular

$$J = 2 \int K r v(r) (1 - v^2(r)/c^2)^{1/2} dr = \pi K r_0^2 / 8$$

Si eliminamos r_0 entre (2) y (3), obtendremos la relación observada entre la masa y el momento angular

$$J = M^2 / 2\pi K$$

Este resultado es válido para el caso en el que la densidad de energía es constante, i.e., si el potencial tiene la forma

$$V(r) = Kr$$

En general, si el potencial posee una dependencia

$$V(r) \sim r^n$$

es fácil mostrar que la trayectoria de Regge asociada es

$$J \sim M^{4+2/n}$$

Es interesante notar que esta misma relación se cumple para una jalea relativista⁽⁴⁰⁾ en las que n representa su dimensionalidad, dado que su masa es proporcional al volumen $\sim R^n$, mientras que su momento angular es proporcional a R^{n+1} . Sin embargo, hay que notar que este argumento sólo es válido si la jalea al rotar no cambia en un objeto de dimensionalidad menor, lo cual sería de esperarse en general⁽⁴¹⁾.

Según se observa en la figura 1, las trayectorias de Regge son consistentes con un potencial lineal Kr , y el valor de la tensión K de las cuerdas puede fijarse de las trayectorias empíricas, cuya pendiente α , de acuerdo a la teoría es inversamente proporcional a la tensión:

$$\alpha = 1/(2\pi Kc) = 0.93 \text{ GeV}^{-2}.$$

Cuando se produce una aniquilación e^+e^- es posible producir una pareja $q\bar{q}$. Si la cuerda que en este modelo une a los quarks se estira, el rompimiento de ésta resulta favorable energéticamente y se produce un segundo par $q\bar{q}$. El procedimiento puede continuar hasta que la cuerda original se ha roto en varias cuerdas con una longitud típica del tamaño hadrónico de un fermi; esto corresponde a la conversión del par original de quarks en un conjunto de hadrones con masa típica de 1 GeV. La cascada de hadrones producidos en este proceso se observa experimentalmente en forma de jets. Empíricamente se observa que los hadrones producidos en dicha reacción presentan una distribución de sus momentos transversales de tipo térmico, con una temperatura equivalente $T_0 \sim 100$ MeV. Nielsen⁽⁴²⁾ mostró que esta distribución es consistente con la teoría de las cuerdas duales, mientras que para Barshay y Throst⁽⁴³⁾, dicho efecto podría ser entendido en términos de la aceleración transversal que sufren los quarks en la colisión.

Toda esta fenomenología podría ser una consecuencia inmediata

de las propiedades del vacío cuántico cuando éste es descrito por observadores en sistemas de referencia privilegiados^(44,45). Los nuevos efectos encontrados en la investigación de los fenómenos cuánticos en espacio-tiempos curvos o en sistemas acelerados están íntimamente ligados con el concepto del vacío. El hecho esencial es que para este tipo de observadores, la densidad espectral del vacío aparece modificada por el efecto Doppler, de manera que a la distribución de punto cero se le suma una distribución planckiana en la que la aceleración equivale a una temperatura efectiva. El mismo fenómeno será observado en diversos sistemas privilegiados, en los cuales los parámetros característicos del sistema jugarán el papel de la temperatura: el inverso del radio en un universo de Einstein, la masa de un hoyo negro de Scharzchild, el inverso de la longitud de una caja dentro de la cual se encuentra un observador en reposo, etc. En general, un observador inmerso en una situación mixta, v.gr., alguien situado entre dos placas paralelas y acelerado en la dirección longitudinal, mediría el producto de las distribuciones asociadas a cada situación separada más "términos de interferencia".

→ Dentro de este esquema, podemos imaginarnos⁽⁴⁶⁾ que las fluctuaciones del vacío pueden "calentarse" desde el punto de vista de los quarks, debido al hecho de encontrarse confinados, así como por el hecho de estar acelerados, o por el efecto combinado de ambas circunstancias. En este contexto, los quarks se encontrarían en equilibrio con el campo de vacío a una "temperatura" $T \sim 1/L$, donde $L \sim 1$ fermi, en concordancia con el modelo de la bolsa. En el decaimiento de un fotón en un par quark - antiquark, los quarks se moverían en direcciones opuestas con impulsos considerables, aunque unidos por la cuerda gluónica. Si se supone que la tensión de la cuerda es constante, entonces los quarks se encontrarían sujetos a una aceleración constante dentro de una cavidad alargada (con un diámetro de ~ 1 fermi). Si se despeja la tensión de la cuerda de las trayectorias de Regge, y se utiliza la ley de Newton (factible de utilizar en el límite cuántico si las fuerzas involucradas son lineales), suponiendo una masa ~ 300 MeV para los quarks constitutivos, entonces se obtiene una temperatura de aceleración

~ 100 MeV, de acuerdo con los cálculos anteriormente mencionados y con la evidencia experimental. Aunado a este efecto, debe presentarse el asociado con el "término de interferencia", que en este caso decrece como E^{-2} modulado por una oscilación alrededor de $L/2$. De esta manera, la producción hadrónica en la aniquilación electrón-positrón implicaría jets térmicos compuestos de un término planckiano y una cola oscilatoria decreciente como una potencia negativa de la energía. Este tipo de comportamiento es compatible también con la sección diferencial determinada experimentalmente (véase el final del capítulo que sigue). Una pregunta factible es si este tipo de interacciones al interpretarse como una interacción escalar efectiva (de origen no perturbativo) causaría alteraciones observables en la espectroscopía de los estados ligados hadrónicos.

La forma del potencial de confinamiento resultante de toda esta fenomenología, concuerda asimismo con los resultados del estudio de la cromodinámica cuántica en redes⁽⁴⁷⁾, los cuales, aún cuando no pueden considerarse definitivos, dan plausibilidad a la hipótesis del comportamiento lineal del potencial para distancias lejanas.

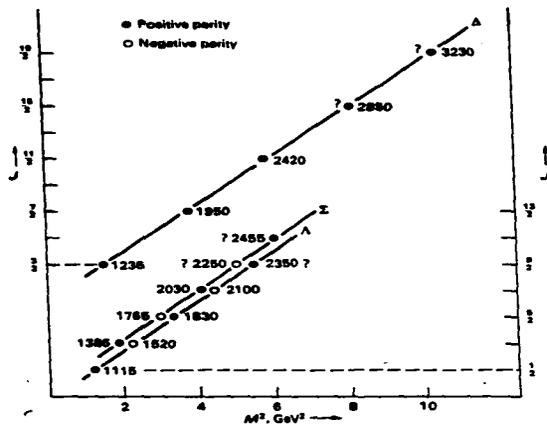
Conclusiones

La cromodinámica cuántica es una teoría con un fuerte basamento teórico que permite entender, en principio, la fenomenología más conspicua de las interacciones hadrónicas, creando un esquema en el que tienen cabida tanto el fenómeno de la libertad asintótica como el confinamiento. Sin embargo, como mencionamos anteriormente, no existen reglas que nos permitan discernir el rango de aplicabilidad de los tratamientos perturbativos, ocasionando con ello el no poder obtener resultados concluyentes sobre la estructura e interacciones hadrónicas. Si bien se tiene certeza de que las interacciones a distancias cortas, respecto del tamaño de un hadrón, deben estar dominadas

por el intercambio de gluones vectoriales, en las regiones lejanas la incertidumbre es considerable. Cualquier modelo de interacciones propuesto debería ser resuelto entonces en forma exacta, con el consiguiente aumento en la dificultad de la solución.

El análisis de las colisiones de hadrones polarizados nos revela comportamientos que al parecer no pueden ser explicados dentro de la cromodinámica perturbativa. Su explicación tiene que realizarse fuera de este marco, lo que da lugar a la aparición de efectos adicionales no perturbativos en la interacción entre los quarks que no han sido contemplados anteriormente. Estos efectos deben alterar también los cálculos de la espectroscopía de las partículas fundamentales. El estudio de estos fenómenos es el objeto de los dos capítulos que siguen.

Figura 4



Trajectories de Regge para los mesones

Bibliografía del capítulo I

1. Aitchison I., "An Informal Introduction to Gauge Field Theories", Cambridge University Press, 1984
2. Cheng Li, "Gauge Fields", Oxford University Press, 1985
3. Bjorken J.D., "Lectures on Lepton-Nucleon Scattering and Quantum Chromodynamics", Birkhauser, 1982
4. Kogut J.B., Revs. Mod. Phys. 55 (1983) 775
5. Richardson J.L., Phys. Lett. 82B (1979) 272
6. Quigg C., "Théories de Jauge en Physique des Hautes Energies", North-Holland Pub. Co., 1983
7. Chodos et al., Phys. Rev. D10 (1974) 2599
8. Nambu Y., Phys. Rev. D10 (1974) 4262
9. Scherk J., Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 123
11. Dethlefsen J., Nielsen H.B., Tze H.C., Phys. Lett. 48B (1974) 48.
12. Nielsen H.B., Nucl. Phys. B54 (1973)
13. Barshay S., Troost W., Phys. Lett. 73B (1978) 437
14. Hacyan S., Sarmiento A., Cocho G., Soto F., Phys. Rev. D32 (1985) 914
15. Soto F., Cocho G., Villarreal C., Hacyan S., Sarmiento Rev. Mex. Ffs. 33 (1987) 389
16. Hacyan S., Sarmiento A., Cocho G., Soto F., Villarreal C., Preprint IFUNAM 1988, enviado a Phys. Rev. D
17. Kogut J.B., Revs. Mod. Phys. 55 (1983) 775

SOBRE LA POLARIZACION DE LOS HADRONES.

La cromodinámica cuántica ha logrado describir con bastante éxito los resultados de la dispersión de leptones por hadrones, las aniquilaciones de electrones y positrones, así como la espectroscopía hadrónica. Sin embargo, en todos los experimentos, tanto el blanco como el haz de proyectiles carecían de polarización. Los experimentos realizados en los últimos años con protones polarizados muestran hechos que la cromodinámica cuántica perturbativa no puede, al parecer, explicar. Resulta que los efectos del espín modifican de una manera sustancial las secciones eficaces de dispersión. Anteriormente se pensaba⁽¹⁾ que la influencia del espín debería disminuir con el incremento de la energía de la colisión: la energía asociada con el espín de una partícula es constante, de modo que resultaría una fracción cada vez más pequeña de la energía total a medida que la colisión se tornase violenta. Se observa lo contrario. La influencia del espín aumenta notablemente con el incremento de la energía de la colisión. De hecho, aquellos protones cuyos espines están alineados paralelamente, tienen mucha mayor probabilidad de ser fuertemente dispersados que aquellos cuyos espines son antiparalelos.

Existen variables que proporcionan información relevante sobre tales sistemas, como el parámetro de asimetría A y las llamadas funciones de correlación de espines A_{ij} , los cuales miden la diferencia de secciones eficaces de los protones que sufren una colisión con una polarización dada i y j . Las correlaciones mejor determinadas experimentalmente son las que sigue⁽²⁾:

$A_{LL} = (\sigma_{L+L+} - \sigma_{L+L-}) / (\sigma_{L+L+} + \sigma_{L+L-})$: se refiere a la asimetría de polarización cuando los espines iniciales están polarizados en la dirección L del haz del laboratorio versus los espines antiparalelos a ésta.

$A_{NN} = (\sigma_{N+N+} - \sigma_{N+N-}) / (\sigma_{N+N+} + \sigma_{N+N-})$: indica que ambos nucleones son paralelos o antiparalelos a la normal N del plano de dispersión.

$A_{SS} = (\sigma_{S+S+} - \sigma_{S+S-}) / (\sigma_{S+S+} + \sigma_{S+S-})$: da cuenta de la

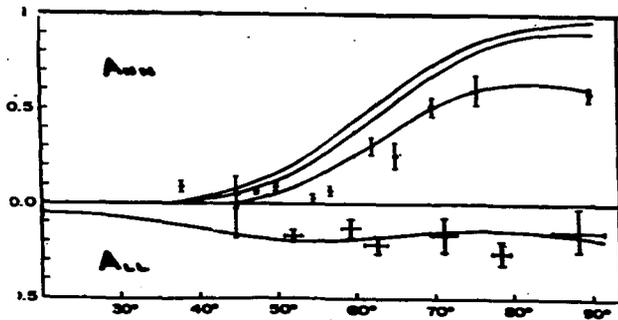
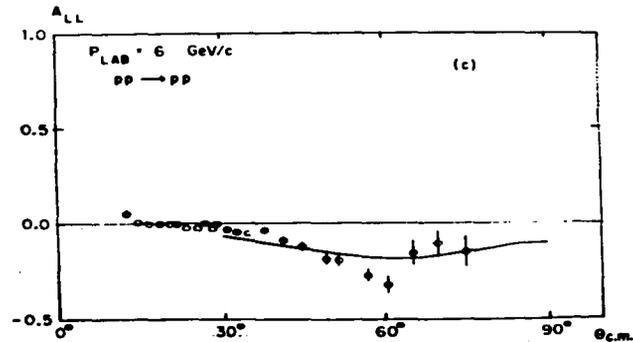
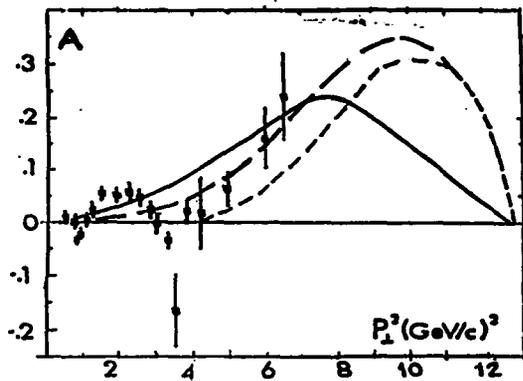
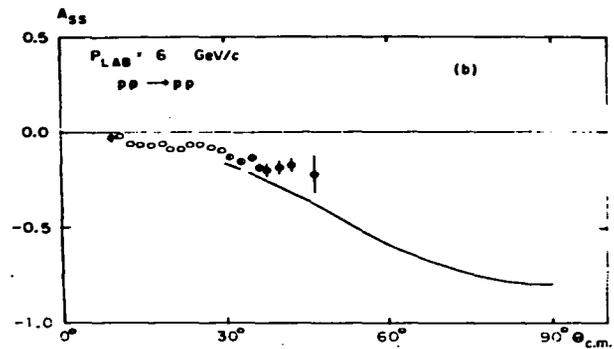
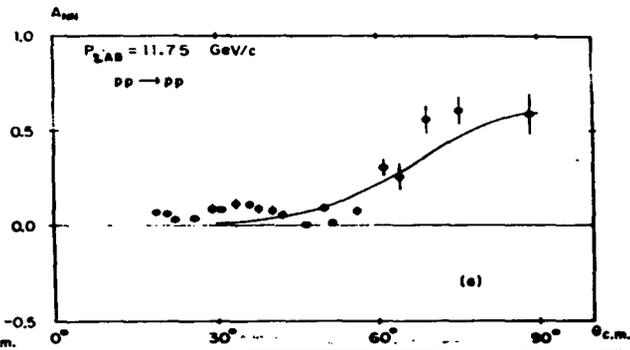
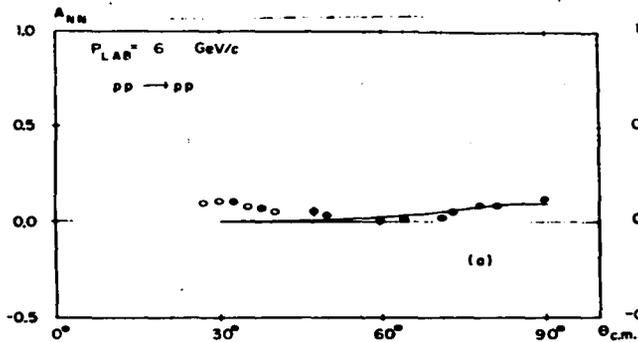
correlación cuando los espines iniciales están polarizados a lo largo de la dirección normal $S=L \times N$.

Las figuras 1 . . . son las gráficas de estos parámetros que proporciona el experimento⁽³⁾. Tanto la correlación A_{NN} , como el parámetro de asimetría A , presentan un comportamiento notable. Si $P_{lab} = 6$ GeV, entonces A_{NN} es menor que 0.15 para cualquier ángulo, mientras que cuando $P_{lab} = 11.75$ GeV, A_{NN} aumenta hasta 0.6 para $\theta_{cm} \sim 90^\circ$. Por otro lado, la asimetría A muestra oscilaciones en la región de momento transferido menor que 3.75 GeV² y luego un incremento monótono cuando P_{\perp}^2 es mayor.

El interés de estos resultados reside en las dificultades que el modelo convencional de quarks debe encarar para interpretarlos. Krisch⁽⁴⁾ señala que una hipótesis usual de este modelo, el que en una colisión sólo interactúe un par de quarks, permaneciendo el resto como espectadores, no puede conducir a una razón de secciones eficaces diferenciales consistente con el experimento: se supone que el protón está formado por tres quarks de espín $1/2$, los cuales, si están en su estado base, dan lugar a la muy exitosa espectroscopía hadrónica. Por otro lado, cuando los protones se dispersan, cada uno debe tener dos espines de quark paralelos al espín del protón y uno antiparalelo. Un conteo simple de las nueve secciones eficaces de espín involucradas, muestra que si los quarks se dispersan independientemente, es imposible tener una razón $d\sigma(\uparrow)/dt : d\sigma(\downarrow)/dt$ tan alta como 4, que es lo que se observa en el experimento. Si los quarks interfieren entre sí, se puede obtener cualquier razón; pero la independencia de los quarks es una suposición básica en la construcción de la espectroscopía.

Los experimentos mencionados representan un reto que la teoría debe enfrentar. En el marco de la cromodinámica perturbativa es preciso incluir contribuciones de orden alto para reproducir las características más obvias de los datos experimentales, dado que la corrección logarítmica no basta⁽⁶⁾. Si bien es cierto que algunas de estas contribuciones permitan entender los experimentos a las escalas de energía actuales, también puede suceder que haya necesidad de considerar extensiones de la teoría usual⁽⁵⁾.

Figura 1



Una posibilidad inmediata es hacer de lado la hipótesis de los quarks espectadores⁽⁶⁾. La descripción de las cantidades A y A_{NN} dentro de la cromodinámica perturbativa conduce a resultados desalentadores; se obtienen valores muy pequeños comparados con los experimentales. Si en las reacciones hadrónicas participa activamente más de un quark por partícula, se puede violar el límite teórico de A_{NN} (≤ 0.3). Esto sucede si se consideran diagramas de Feynman como los de la figura 2. Como resultado se obtiene un valor de A_{nn} del orden de 0.5. Por supuesto, habría que considerar muchos otros diagramas de este tipo para obtener resultados confiables.

Otra posibilidad radica en considerar en el lagrangiano cromodinámico un vértice quirral⁽⁷⁾:

$$\epsilon^{abcd} G_{ab} G_{cd}$$

dado que aún con la generalización anterior, no es posible reproducir valores altos de la asimetría en el esquema perturbativo. Como sabemos, la helicidad se conserva si las energías de las colisiones son grandes comparadas con la masa en reposo de las partículas interactuantes, que es el régimen en que podría considerarse válido un cálculo perturbativo, lo cual hace imposible una transición del tipo $\mathcal{S}_2 = \langle ++ | \mathcal{S} | +- \rangle$ que como veremos, es proporcional a la asimetría A . La misma ley de conservación implica que el parámetro A_{LL} , proporcional a $\mathcal{S}_2 = \langle ++ | \mathcal{S} | -- \rangle$, resulte más pequeño de lo que muestra la evidencia experimental. El lagrangiano extendido puede dar lugar al intercambio de quirrones (fig. 3) y a la aparición de anomalías quirales (fig. 4). Del cálculo de estos diagramas se desprende que las cantidades \mathcal{S}_2 y \mathcal{S}_3 pueden ser diferentes de cero, y esto podría conducir a un buen ajuste de la asimetría A y de la correlación A_{LL} .

Una última posibilidad es que, como ya mencionamos, la cromodinámica perturbativa no sea aplicable en el rango de energías accesibles actualmente. No existe una forma clara de separar los fenómenos perturbativos de aquellos que no lo son. Quizás los enfoques no perturbativos nos proporcionen la clave

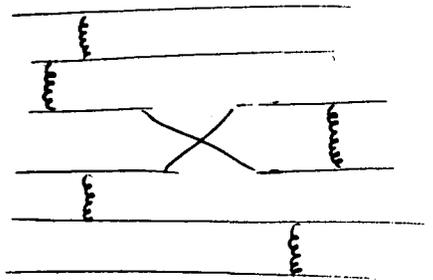
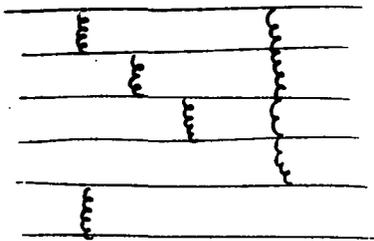


Figura 2

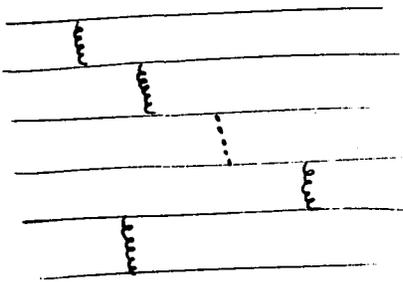


Figura 3

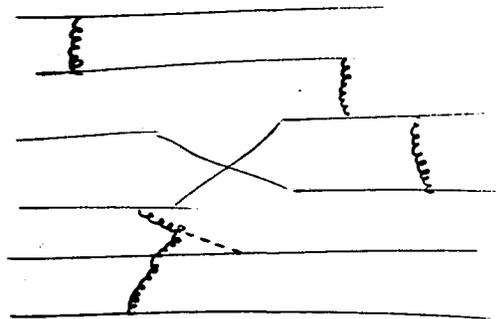


Figura 4

para penetrar en la intimidad hadrónica.

Fenomenología de las funciones de correlación.

Estudiaremos un enfoque un tanto fenomenológico^(8,9) que permite explicar los experimentos de polarización en términos de hipótesis simples, esencialmente independientes de un modelo específico. En esta teoría, los datos se analizan escribiendo la amplitud de dispersión en términos de operadores que representan la interacción y se toma en cuenta la estructura del protón con factores de forma efectivos. Esto es muy similar a la determinación de la estructura electromagnética de los nucleones, con la interacción vectorial dada por las matrices de Dirac y la distribución de carga eléctrica y momento magnético dados por los factores de forma.

Quando las partículas que intervienen en una colisión carecen de espín, su amplitud de dispersión se expresa en la forma $M_{ab} = \alpha(s, t)$. En el caso contrario, además de los invariantes s , t y u , se tienen también los invariantes que se pueden construir mediante las amplitudes de onda de las partículas (bispinores, cuadritensores, etc.). Sólo cinco de tales invariantes son independientes⁽¹⁰⁾ y se puede escoger de entre ellos a las cantidades α_s , α_p , α_v , α_A y α_T , en donde los subíndices se refieren a escalar, pseudoescalar, vector, vector axial y tensor, respectivamente. De esta forma, la amplitud nucleón-nucleón puede parametrizarse de la manera siguiente^(8,9)

$$\begin{aligned}
 M_{ab} = & \alpha_s \langle I \rangle_a \langle I \rangle_b + \alpha_p \langle \gamma^5 \rangle_a \langle \gamma^5 \rangle_b \\
 & + \alpha_v \langle \gamma_\mu \rangle_a \langle \gamma_\mu \rangle_b + \alpha_A \langle \gamma_\mu \gamma^5 \rangle_a \langle \gamma_\mu \gamma^5 \rangle_b \\
 & + \alpha_T \langle \sigma_{\mu\nu} \rangle_a \langle \sigma_{\mu\nu} \rangle_b
 \end{aligned}$$

Aquí, los factores de forma $a_{\alpha}(s, t)$ representan la distribución de carga hadrónica sensible al término de interacción específico. La estrategia a seguir es expresar los factores de forma como funciones de las amplitudes de helicidad invariantes, las cuales a su vez se determinarán de los parámetros de correlación medidos en el experimento.

Las amplitudes invariantes de helicidad se denotan por

$$S_1 = \langle ++ | S | ++ \rangle$$

$$S_2 = \langle ++ | S | -- \rangle$$

$$S_3 = \langle +- | S | +- \rangle$$

$$S_4 = \langle +- | S | -+ \rangle$$

$$S_5 = \langle ++ | S | +- \rangle$$

en donde S es la matriz de dispersión en el espacio de los espines, definida de tal manera que la sección diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \langle \lambda_1 \lambda_2 | S | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

con λ_i las helicidades de las partículas. Estas amplitudes pueden expresarse a su vez en términos de las amplitudes parciales de dispersión

$$\langle eJM\lambda' | S | eJM\lambda \rangle = \langle \lambda' | S^J(e) | \lambda \rangle$$

en donde S es la matriz de dispersión, la cual es diagonal respecto de la energía E , el momento angular J y su proyección M . Si se define $(S^J - 1) = S^J$, se encuentra que⁽¹⁴⁾

$$S_1 = P^{-1} \sum (2J+1) \langle ++ | S^J | ++ \rangle d_{00}^J(\theta)$$

$$S_2 = P^{-1} \sum (2J+1) \langle ++ | S^J | -- \rangle d_{00}^J(\theta)$$

$$S_3 = p^{-1} \Sigma(2J+1) \langle + - | S^J | + - \rangle d_{11}^J(\theta)$$

$$S_4 = p^{-1} \Sigma(2J+1) \langle + - | S^J | - + \rangle d_{-11}^J(\theta)$$

$$S_5 = p^{-1} \Sigma(2J+1) \langle + + | S^J | + - \rangle d_{10}^J(\theta)$$

en donde $d_{\Lambda\Lambda}$ como los operadores de rotación de Schwinger y p la magnitud del momento relativo inicial. La evaluación de estas expresiones en términos de estados de dos cuerpos con helicidad definida, en el sistema del centro de masa, nos conduce a ⁽⁸⁾

$$S_1 = 2[\alpha_V(t) + \alpha_A(t)] + 2[\alpha_V(\omega) + \alpha_A(\omega)]$$

$$S_2 = [\alpha_P(t) - \alpha_B(t)] \sin^2 \theta / 2 + [\alpha_P(\omega) - \alpha_B(\omega)] \cos^2 \theta / 2$$

$$S_3 = (2[\alpha_V(t) - \alpha_A(t)] - [\alpha_P(\omega) + \alpha_B(\omega)]) \cos^2 \theta / 2$$

$$S_4 = (2[\alpha_V(\omega) - \alpha_A(\omega)] - [\alpha_P(t) + \alpha_B(t)]) \sin^2 \theta / 2$$

$$S_5 = 0$$

(se ha omitido un superíndice que denota el intercambio de isospín). Finalmente, los factores de forma quedarán determinados por el experimento mediante la inversión de las siguientes relaciones ⁽⁹⁾

$$\sigma = \frac{1}{2} (|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2 + 4|S_5|^2)$$

$$\sigma_A = -\text{Im}(S_1 + S_2 + S_3 - S_4) S_5^M$$

$$\sigma_{AL} = -\text{Re}(S_1 + S_2 - S_3 + S_4) S_5^M$$

$$\sigma_{NN} = -\text{Re}(S_1 S_2^M - S_2 S_4^M - 2|S_5|^2)$$

$$\sigma_{SS} = -\text{Re}(S_1 S_2^M + S_3 S_4^M)$$

$$\sigma_{SS} = \frac{1}{2} (-|S_1|^2 - |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2),$$

definidas de acuerdo a la convención de la Conferencia Ann Arbor⁽¹²⁾. La inversión de estas ecuaciones es posible si se supone que, al igual que en los modelos teóricos^(13,14), ξ_1 y ξ_2 son predominantemente reales; lo mismo para ξ_3 y ξ_4 .

Parametrización de las funciones de correlación.

El análisis de las distribuciones angulares permite estudiar la dependencia en los invariantes s y t de los factores de forma. Se puede proponer, siguiendo el modelo de quarks, que los factores de forma vectorial y pseudoescalar tienen una dependencia idéntica respecto del invariante t , cumpliéndose el análogo para los factores axial y escalar^(15,16). Por simplicidad, se puede depreciar la dependencia explícita en s de los factores de forma, trasladándola a la cinemática del problema. También se puede hacer de lado al factor tensorial, dado que los datos de las correlaciones A_{NN} y A_{LL} sugieren que en ángulos pequeños, el producto $\xi_1^* \xi_2$ es pequeño. Si se permitiese que el acoplamiento α_p formara parte de la estructura de ξ_2 , el producto $\xi_1^* \xi_2$ involucraría términos que van como $\cos^2 \theta/2$, los cuales crecen cuando θ decrece, contrariamente a la evidencia experimental.

De acuerdo a las teorías de campo con constantes de acoplamiento adimensionales⁽¹⁷⁾, la dependencia en t de los factores de forma debe ir como potencias de t , lo cual implica que la potencia de α_v y α_p es la misma, aunque queda libre su normalización relativa. Similarmente sucede para α_v respecto de α_s . La dependencia restante en t puede parametrizarse como sigue

$$\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_p(t)} = \frac{\alpha_s(t_1)}{\alpha_p(t_1)} \frac{t^{2N}}{t_1^{2N}}$$

en donde t_1 es un punto de referencia (4.75 GeV², para $P_L = 6\text{GeV}$ y $\theta_{cm} = 90^\circ$). En este punto, $N = 0.6 \pm 0.1$. Es conveniente escribir

las amplitudes de helicidad en términos de los factores

$$h_i \equiv \alpha_i(u)/\alpha_i(t), \quad \text{con } i = S, P, V, A$$

y

$$h_S \equiv h_V = h_P$$

$$h_A h_S \equiv h_B = h_A$$

de manera que

$$\mathcal{S}_1 = 2\alpha_V(t)(1+h_S) + 2\alpha_A(t)(1+h_S h_S)$$

$$\mathcal{S}_2 = \alpha_P(t)(\cos^2 \theta/2 + h_S \cos^2 \theta/2) -$$

$$\alpha_B(t)(\cos^2 \theta/2 + h_S h_S \cos^2 \theta/2)$$

$$\mathcal{S}_3 = (2[\alpha_V(t) - \alpha_A(t)] - [h_S \alpha_P(t) + h_S h_S \alpha_B(t)]) \cos^2 \theta/2$$

$$\mathcal{S}_4 = (\alpha_P(t) + \alpha_B(t) - 2[h_S \alpha_V(t) - h_S h_S \alpha_A(t)]) \sin^2 \theta/2$$

$$\mathcal{S}_5 = 0$$

Según estas definiciones, $h_S = h_B/h_P = (\cot^2 \theta/2)^{2M}$. Del mismo modo, el factor h_A puede parametrizarse por una ley de potencias: $h_A = (\cot^2 \theta/2)^M$, restando únicamente por determinar la potencia M y las dos normalizaciones relativas de los factores de forma. Las normalizaciones pueden fijarse con los valores de A_{NN} y A_{LL} en $\theta_{cm} = 90^\circ$ y $P_L = 5 \text{ GeV}$, mientras que la potencia M viene del valor de A_{LL} en 90° y $P_L = 11.75 \text{ GeV}$, resultando $M = 3 \pm 1$, i.e., $\alpha_V \sim t^{-4}$. Con estos valores de los parámetros, la distribución angular predicha para A_{NN} y A_{LL} está en buen acuerdo con los datos experimentales tanto en $P_{lab} = 5 \text{ GeV}$ (fig. 3), como en $P_{lab} = 11.75 \text{ GeV}$ (fig. 4 y 5). Por otro lado, la distribución angular de A_{SS} parece tener el comportamiento correcto; sin embargo, falta mayor evidencia experimental.

Es necesario enfatizar que existe una diferencia notable en el comportamiento del factor de forma efectivo α_B con respecto a α_V y α_P al ajustar los datos experimentales. El factor α_B decrece

Figura 3

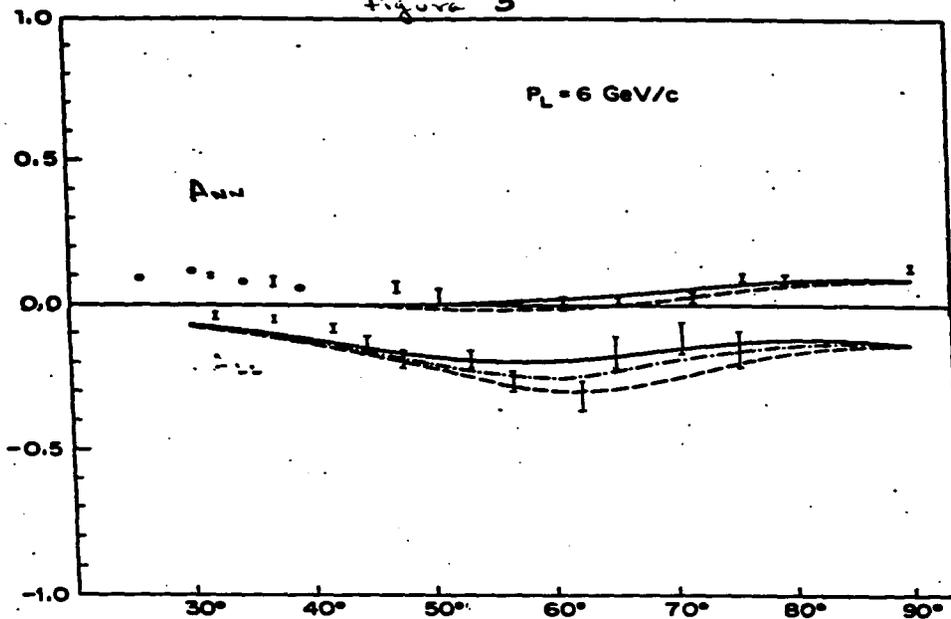
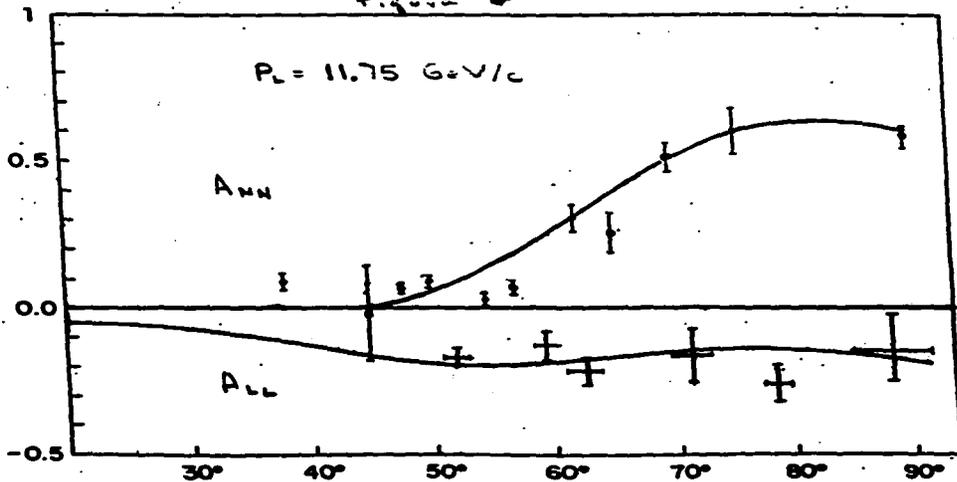


Figura 4



más lentamente con t que los otros dos, lo que puede interpretarse diciendo que en las colisiones nucleón-nucleón, los hadrones interactúan vía una nube externa vectorial y pseudoscalar y una región escalar interna.

Sobre la sección transversal diferencial.

Estudiaremos ahora el comportamiento de la sección transversal diferencial y verificaremos si el análisis recién desarrollado se modifica o restringe. La sección diferencial es dominada por la interacción vectorial, las restricciones afectarán principalmente al factor de estructura α_V . Hay que tomar en cuenta que:

i) Las teorías con constantes de acoplamiento adimensionales⁽⁴⁰⁾ sugieren que $d\sigma/dt \sim |f(p_{\perp}^2)|^2$ para ángulos grandes, donde $f(p_{\perp}^2)$ está dada por una ley de potencias.

ii) Cuando el ángulo de dispersión en el centro de masas es mayor que 45° , existen datos solamente para $P_{\perp} < 30$ GeV.

iii) El comportamiento en ángulos pequeños de la sección diferencial es consistente con una contribución difractiva como la producida por el intercambio múltiple de gluones vectoriales⁽⁴⁴⁾ o la debida a diagramas tipo Landshoff⁽⁴⁵⁾. En ambos casos, la amplitud de transición es predominantemente imaginaria.

iiii) Se ha sugerido que en ángulos grandes, los diagramas perturbativos provenientes de la cromodinámica que describen el intercambio de un quark, dominarían con una contribución real a la amplitud de dispersión proporcional a $t^{-2}u^{-2}$ ⁽⁴⁶⁾.

Tomando en cuenta los argumentos anteriores, se puede parametrizar el factor de forma vectorial como

$$\alpha_V = AC(Ct^{-6} + t^{-2}u^{-2})$$

donde C es el peso relativo del término difractivo con respecto a

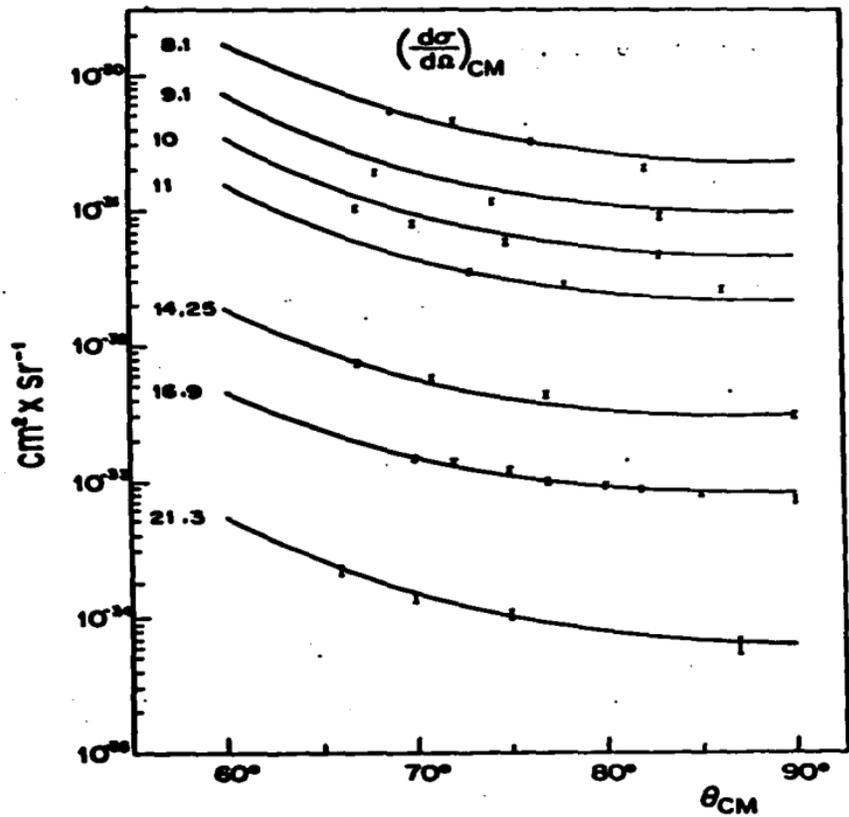


Figura 3

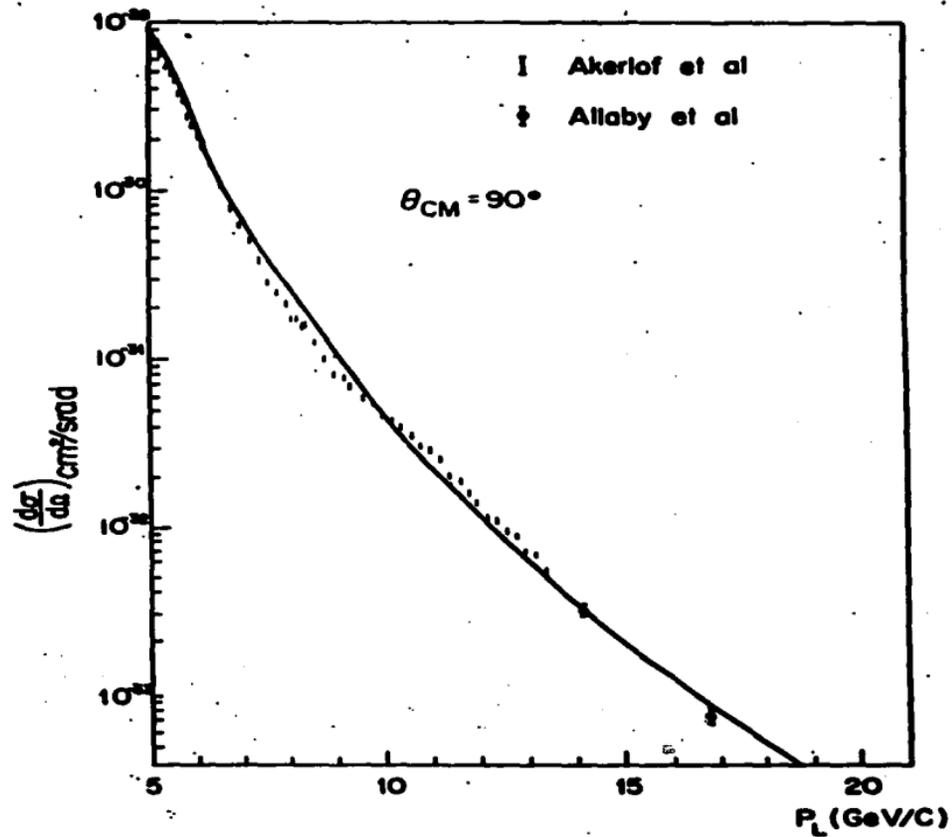


Figura 4

la contribución de intercambio de un quark para ángulos grandes. Notemos que que esta expresión del factor de forma vectorial difiere de la propuesta con anterioridad; sin embargo, los resultados obtenidos son estables ante la nueva definición. Un análisis paralelo al efectuado en la sección anterior, permite obtener un muy buen ajuste de la sección transversal diferencial (figs. 5 - 6). Un rasgo sobresaliente del ajuste es que la sección diferencial resulta una curva suave alrededor de la cual oscilan levemente los datos experimentales. Los datos existentes del parámetro A_{NN} en la región de los 11.75 GeV, son consistentes con oscilaciones importantes alrededor de una curva suave. El origen de dichas oscilaciones es una cuestión abierta. Como mencionamos en el capítulo anterior, su origen puede situarse en las modificaciones del vacío cuántico que se observan por encontrarse los quarks confinados y acelerados longitudinalmente en una colisión⁽¹⁷⁾. Por supuesto, habría que hacer predicciones más precisas relacionadas con reacciones específicas.

Conclusiones

Según hemos visto, es posible realizar un buen ajuste de las funciones de correlación de espín de los protones, así como de su sección eficaz diferencial de dispersión. El análisis fenomenológico no supone una estructura nucleónica específica y es el procedimiento de inversión de los datos experimentales lo que permite obtener información sobre los factores de forma hadrónicos.

Se puede afirmar que una interacción vectorial pura no basta para describir los datos experimentales considerados; también se necesitan interacciones pseudoescalares y escalares que den cuenta de las distribuciones angulares.

La existencia de un acoplamiento pseudoescalar a distancias cortas sugiere el intercambio de una partícula pseudoescalar; un quiralón. Por otro lado una contribución escalar es compatible con

la existencia de un momento cromomagnético anómalo, provocado quizás por las modificaciones del vacío según los observadores no inerciales o confinados. Tanto la contribución pseudoescalar como la escalar deben modificar los cálculos de los espectros hadrónicos. Un análisis realizado por Isgur y Karl¹¹ para determinar masas bariónicas, muestra que el intercambio simple de un gluón implica un potencial de interacción espín-órbita muy grande, que no se revela en la espectroscopía. Sugieren ellos que una contribución espín-órbita adicional proveniente de la interacción de los quarks con el potencial confinante efectivo, puede cancelar a la resultante del intercambio de un gluón. Iniciemos una exploración espectroscópica guiados por estas ideas.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO II

1. Krisch A.D., Jour. de Physique 46 (1985) C2-511
2. Brodsky S., Farrar G., Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 246
3. Cocho G., Rivera Rebolledo J.M., Moreno M., Jour. de Physique 46 (1985) C2-275
4. Avilez C., Cocho G., Moreno M, Phys. Rev. D24(1981) 834
5. Avilez C., Cocho G., Sá Borges J., Candotti E., Mignaco J.A., Preprint IFUNAM 1985.
6. Avilez C., Cocho G., Jáuregui R., Moreno M. Villarreal C., "Proceedings of the XXIII International Conference on High Energy Physics, Berkeley, Cal., World Scientific, 1987.
7. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P., "Teoría Cuántica Relativista", Ed. Reverte, 1971.
8. Jacob M., Wick G.C., Ann.Phys. 7 (1959) 404
9. Goldberger M.L. et al., Phys. Rev. 120 (1960) 2250
10. "Higher Energy Polarized Beams". Proceedings of the Workshop Ann Arbor 1977, AIP, New York 1978.
11. Hacyan S., Sarmirnto A., Cocho G., Soto F., Villarreal C., Preprint IFUNAM 1988, enviado a Phys. Rev. D.

EL ENCANTO, LA BELLEZA, EL CHARMONIO, EL BOTONIO
Y LA INTERACCION ENTRE LOS QUARKS

La serie de estados mesónicos Ψ e Y tienen la particularidad de que pueden clasificarse en un sistema de niveles espectroscópicos muy estrechos, similares a los de un sistema atómico hidrogenoide. El conjunto entero de dichos estados aparecen en las figura 1⁽¹⁾. La apariencia familiar de estos espectros ha llevado a considerar que este conjunto de mesones son estados ligados del quarkonio, i.e., el sistema constituido por un quark pesado y su antiquark correspondiente⁽²⁾. En el caso del quarkonio formado por quarks encantados hablaremos del charmonio, mientras que en el caso de los quarks bellos nos referiremos al botonio.

El charmonio muestra en su espectro estados singuletes y tripletes, clasificados estos últimos como estados S, P o D. Entre los estados S aparecen los estados tripletes Ψ y Ψ' , así como los estados singuletes η y η' , todos bajo el umbral de producción de mesones con encanto neto. También se observan estados tripletes S, P y D por encima de este umbral. En el espectro del botonio pueden verse tres estados S bajo el umbral de producción de belleza y sobre el umbral, un par de tripletes P y estados S. Hasta la fecha, no se han detectado singuletes. La ocurrencia de estados del charmonio y el botonio bajo los umbrales de decaimiento hadrónico, da lugar a su decaimiento por la vía electromagnética, de manera que los números cuánticos del sistema son idénticos a los del fotón⁽³⁾.

Los estados del quarkonio pueden entenderse bien en términos de un potencial de interacción entre los quarks, independiente del sabor, y cuyo comportamiento se conoce con razonable precisión⁽⁴⁾ en la región entre ~ 0.1 fermis (que designaremos como distancias cortas) y ~ 1 fermi (distancias grandes). La conmovedora simplicidad del modelo lo convierte en un sistema alternativo ideal para probar la acción de los efectos no perturbativos

empleados en la descripción de las correlaciones de espín de las colisiones entre hadrones polarizados. Estos efectos entrarán en escena en cuanto se consideren los efectos relativistas en el espectro del quarkonio.

Las suposiciones básicas del modelo son las siguientes ⁽⁵⁾ (Eichten et al. o grupo de Cornell):

- i) Los quarks c y b son lo bastante pesados como para emplear, en una primera aproximación, una formulación no relativista. Queremos decir que escribiremos una ecuación Schrodinger para el sistema.
- ii) Conforme vimos anteriormente, el intercambio de un gluón debe prevalecer a distancias cortas, esto es, el potencial debe ser del tipo coulombiano (con las correcciones debidas a las fluctuaciones del vacío).
- iii) A distancias grandes el potencial debe confinar a los quarks. No conocemos la naturaleza tensorial del potencial confinante. El consenso actual es que se comporta como un escalar, lo que confrontaremos con las ideas planteadas en el capítulo anterior.

Expresaremos el potencial coulombiano en la forma

$$V_c(r) = -\frac{4}{3} g_s^2 / r$$

donde r es la distancia entre los quarks y g_s la constante efectiva de interacción. El factor $4/3$ proviene de la manera en que el acoplamiento de color de $SU(3)_c$ se modifica por el hecho de que los quarks y los gluones son coloreados, en tanto que los hadrones son incoloros (singuletes de color). En lo que sigue haremos la identificación $\frac{4}{3} g_s^2 \equiv \alpha_s$.

El potencial de confinamiento ofrece diversas posibilidades, entre las que podemos considerar ⁽⁴⁾

- i) Un potencial lineal creciente.
- ii) Un potencial de oscilador armónico.
- iii) Un potencial que crece como r^ν ($1 < \nu < 2$).
- iv) Un potencial logarítmico

Martin ⁽⁶⁾ y Gross ⁽⁷⁾ han determinado las condiciones generales que debe cumplir el potencial para asegurar que el

espectro de niveles del quarkonio presenta el ordenamiento determinado por el experimento

$$E_{1S} < E_{1P} < E_{2S} < E_{1D} \dots$$

Estas condiciones son

$$-\frac{d^3}{d r^3} r^2 V_c(r) > 0$$

$$-\frac{d}{d r} \left[-\frac{1}{r} + \frac{d}{d r} \left(2 V_c(r) + \frac{1}{r} \frac{d V_c(r)}{d r} \right) \right] < 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[2r V_c(r) + r^2 \frac{d V_c(r)}{d r} \right] = 0$$

y son satisfechas por cualquier potencial de la forma

$$V_c(r) \sim r^\nu, \quad 0 < \nu < 2$$

así como por potenciales logarítmicos

$$V_c(r) \sim \log r$$

Estas condiciones son relevantes, porque descartan la posibilidad de utilizar un potencial confinante tipo oscilador armónico, muy empleado en otros modelos⁽⁶⁾. También puede mostrarse⁽⁵⁾ que la magnitud relativa de la parte radial de las funciones de onda 1S y 2S en el origen ($r=0$) está determinada por el signo de $V''(r)$. Resulta que

$$V''(r) < 0 \quad \forall r \quad \Rightarrow \quad |R_{2S}(0)/R_{1S}(0)| < 1$$

y viceversa. Por otro lado, las amplitudes de decaimiento leptónico Γ_\bullet son proporcionales a $R_{ns}^2(0)$ ⁽⁵⁾ y de acuerdo al experimento, $\Gamma_\bullet(\Psi) < \Gamma_\bullet(J/\Psi)$, de manera que $V''(r) < 0$.

para toda r . Tal condición la cumplen los potenciales Coulomb más lineal y Coulomb más logarítmico, pero no por Coulomb más r^2 ($1 < \nu < 2$).

El análisis favorece a la forma lineal y a la logarítmica. Si además tomamos en cuenta los resultados de la cromodinámica cuántica en redes, así como aquellos de la teoría hadrónica de las cuerdas duales, queda como opción viable el confinamiento lineal. El potencial central resulta entonces

$$V(r) = -\frac{\alpha_s}{r} + Kr$$

El parámetro α_s puede ajustarse de la diferencia de las energías experimentales de los estados J/Ψ y Ψ' ($1S$ y $2S$, respectivamente) en el charmonio y con la de los estados Y e Y' en el botonio. Los valores utilizados en el cálculo fueron $\alpha_s = 0.52$ para el charmonio y $\alpha_s' = 0.49$ para el botonio. El primero de ellos concuerda con el propuesto por el grupo de Cornell, pero el segundo no, ya que ellos determinan la constante de interacción en el botonio de acuerdo con la fórmula determinada según la teoría de perturbaciones, que conduce al resultado $\alpha_s' = 0.33^{(5)}$.

El comportamiento de la constante efectiva es un asunto muy delicado. Sabemos que ocurre el fenómeno de la libertad asintótica, de manera que α_s debe ser mayor en el charmonio que en el botonio; según la relación de incertidumbre de Heisenberg, el radio medio del sistema es del orden de $R \sim 1/\mu$, donde μ es la masa de los quarks; dado que los quarks con encanto son menos pesados que los bellos, la interacción entre los encantados es más intensa y similarmente para los quarks más livianos. Es fácil demostrar este argumento utilizando el teorema de Feynmann y Hellmann, que establece la variación de la energía de un estado ligado con respecto a un parámetro λ característico del sistema⁽⁶⁾

$$\partial E / \partial \lambda = \langle \partial H / \partial \lambda \rangle$$

Si suponemos que $\lambda = \mu$, la masa reducida del sistema, a medida que ésta se incrementa, la energía de un estado ligado específico decrecerá. Ahora, escribamos el teorema del virial

$$2 \langle T \rangle = \langle r \partial V / \partial r \rangle$$

para una combinación lineal de potenciales homogéneos

$$V(r) = \sum c_i V_i(r).$$

Es inmediato que

$$2 \langle T \rangle = \sum k_i c_i V_i(r)$$

en donde los términos k_i representan el grado de homogeneidad de cada potencial. En nuestro caso particular, la energía total resulta

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{2} \langle \alpha_s / r \rangle + \frac{3}{2} \langle Kr \rangle.$$

de manera que si la energía decrece, la distancia media entre los quarks lo hará también, disminuyendo con ello la intensidad de su interacción (para α_s dada, el valor medio del término coulombiano aumenta, pero tiene signo negativo).

La evaluación del resto de parámetros del sistema es directa. La densidad de energía de confinamiento por unidad de longitud b se deriva de la pendiente de las trayectorias de Regge para los mesones. Se observa que esta es aproximadamente la misma para todos los estados mesónicos⁽¹⁰⁾: $K = 0.18 \text{ GeV}^2$. La masa de los quarks se estima de manera aproximada de los experimentos de colisiones e^+e^- hadrones y de manera exacta con las diferencias de energía entre el estado 1S y el centro de masa del triplete P. Los valores que empleamos en el cálculo son $m_c = 1.84 \text{ GeV}$ y $m_b = 5.17 \text{ GeV}$. Según lo anterior, nuestro potencial es idéntico al de Cornell (en el caso no relativista) salvo el valor de la constante de acoplamiento para el botonio.

La ecuación de Schrodinger y sus valores propios

La ecuación de Schrodinger del sistema en la aproximación no

relativista es la usual. Estamos tratando con un potencial central y es conveniente escribir la función de onda en la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde $R(r)$ es la función de onda radial y las funciones Y_{lm} representan a los armónicos esféricos. Con esta substitución, la ecuación se separa y la parte radial satisface

$$-\frac{1}{2\mu} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \right] R - \left[E - V(r) - \ell(\ell+1) \right] R = 0$$

Puede establecerse una correspondencia con la ecuación de onda unidimensional si se escribe

$$u(r) = rR(r)$$

que define la función radial reducida. Resulta

$$-u''(r) = 2\mu[E - V(r) - \ell(\ell+1)/r^2]u(r)$$

con las condiciones de contorno

$$u(0) = 0$$

$$u'(0) = R(0)$$

y la normalización

$$\int dr |u(r)|^2 = 1$$

Utilizaremos dos recursos distintos para determinar los valores propios de la energía: el método variacional y la integración numérica. Esto lo hacemos porque como posteriormente veremos, en la aproximación cuasirrelativista el cálculo puede tornarse extremadamente inestable, de modo que el método numérico servirá para verificar los resultados obtenidos con el variacional. Hay que recordar que es permisible determinar estados excitados con el método variacional siempre que la función de onda asociada a uno de estos estados pertenezca a un espacio ortogonal a aquellos en que residen las funciones de onda de los estados

inferiores⁽⁴⁴⁾. Una comodidad que nos brinda el método variacional es que nos permite, con una buena elección de base, conocer simultáneamente el espectro de niveles y los valores medios de las observables asociados a cada eigenestado.

La idea del método variacional es simple: se escoge una base ϕ_i que refleje las simetrías del sistema para calcular los elementos de matriz H_{ij} del hamiltoniano; una transformación unitaria permite diagonalizar esta matriz, lo que determina los valores propios del hamiltoniano. Si se varían los parámetros que fijan a las funciones ϕ_i se obtendrán valores distintos de la energía, la cual debe minimizarse.

El potencial de interacción tiene a distancias cortas la forma coulmbiana, por lo que hemos escrito la función de onda como una superposición de orbitales de Slater

$$\phi_i = r^{i-1} \exp(-\alpha \beta^{n(i)} r)$$

Aquí, los parámetros variacionales son α y β y el momento angular está dado por $l=i-1$; β aparece elevado a la potencia $n(i)$ ($n(i)=1, 2, \dots$, para cada i). Los distintos valores que se asignan a α , β y $n(i)$ permiten construir orbitales con máximos localizados en posiciones radiales diferentes. Esta base es completa mas no ortogonal y para ello es conveniente utilizar el método de Gramm-Schmidt, que permite obtener orbitales ortogonales como una combinación lineal de las funciones de Slater

$$\chi_i = \sum_j C_{ij} \phi_j$$

Los elementos de matriz de los distintos términos del hamiltoniano tienen una expresión simple en la base de Slater

$$\langle \phi_i | r^m | \phi_j \rangle = [\alpha(\beta^{n(i)} + \beta^{n(j)})]^{-m-1} \Gamma(n_i + n_j + m)$$

y en la base ortogonal se escriben

$$\langle \chi_i | r^m | \chi_j \rangle = \sum_q \sum_s C_{iq} C_{sj} \langle \phi_i | r^m | \phi_j \rangle$$

El paso siguiente es diagonalizar la matriz hamiltoniana por medio de una transformación unitaria

$$H_{ij} = S^{-1}_{ij} H_{jk} S_{ki}$$

ya que esto nos permite leer los valores propios de la energía directamente de su diagonal y con ello llevar adelante el cálculo.

El mecanismo recién descrito fue implementado por medio de un programa de computación escrito en Fortran IV que aparece en el apéndice I. El programa permite calcular los valores propios de la energía así como los valores medios de las observables. También determina las amplitudes de aniquilación del sistema.

El espectro de energías no relativistas y los valores medios de la energía cinética, de Coulomb, de confinamiento y de la velocidad cuadrática media, aparecen en la tabla I (las energías están dadas en MeV). Los estados con momento angular neto están calculados en ausencia de interacciones que involucren al espín y la comparación con el experimento⁽⁴⁾ se efectúa de acuerdo con la fórmula que determina el centro de gravedad de un multiplete

$$E_{\text{cog}} = \sum (2J+1) E_J / \sum (2J+1)$$

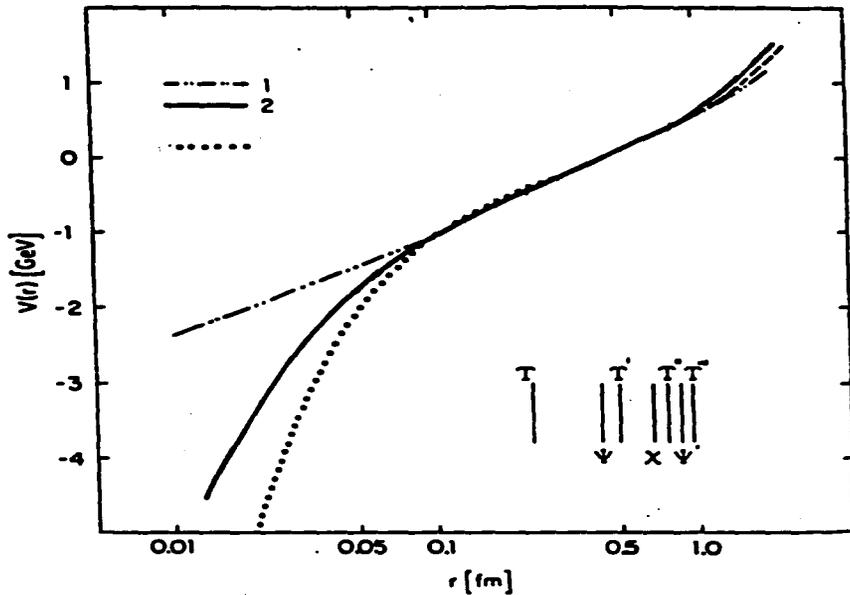
en donde J es el momento angular total.

En la tabla II comparamos nuestros datos con los de otros autores^(5,12,13,14). Es difícil discernir qué modelo provee los mejores resultados y cada uno de ellos ajusta mejor diferentes regiones del espectro. La equivalencia aproximada de los distintos modelos proviene de que los diversos potenciales propuestos son muy similares en la zona de interés⁽¹²⁾ (figura 2). En particular, nuestros resultados corresponden bien al experimento (figura 3).

En la tabla III se encuentran los valores de la velocidad cuadrática media (dividida por c^2) calculados según la expresión de coordenadas relativas $\langle T \rangle = \frac{1}{2} \mu v^2$ (en donde μ es la masa reducida), de manera que

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 4 \langle T \rangle / m.$$

Fig. 2



Comportamiento cerca del origen de los diversos potenciales propuestos. Las barras verticales indican la posición cuadrática media correspondiente a los estados más bajos del quarkonio.

1) Martin $\sim r^0$ $v \approx 0.1$

2) Buchmüller $\sim \frac{1}{r} \ln(1/r^2) \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(1/r^2)}\right) \right]$

3) Cornell $\sim -\frac{1}{r} + kr$. Nuestra proposición coincide con la de Cornell, cuando no se considera la estructura fina. En este último caso, el comportamiento en el origen cambia radicalmente.

TABLA II

Charmonio

Experimento	Martin	Buchmuller	Gupta	Cornell	Mexico
3085(1S)	3085	3100	3087	3085	3087
3524(1P)	3502	3520		3522	3518
3684(2S)	3684	3700	3686	3684	3685
3772(1D)	3787	3810		3810	3801
4030(3S)	4032	4120		4110	4104
4414(4S)	4280	4480		4480	4482

Botonio

Experimento	Martin	Buchmuller	Gupta	Cornell	Mexico
9480(1S)	9480	9480	9480	9480	9480
9802(1P)	9861	9880		9880	9832
10023(2S)	10025	10020	10013	10050	10020
10261(1D)	10242	10250		10310	10270
10355(3S)	10380	10350	10358	10040	10388
10575(4S)	10600	10620		10670	10633
10880(5S)	10780	10880		10920	10875

Comparación de las espectroscopias del quarkonio determinadas por grupos diversos. La energía se expresa en MeV.

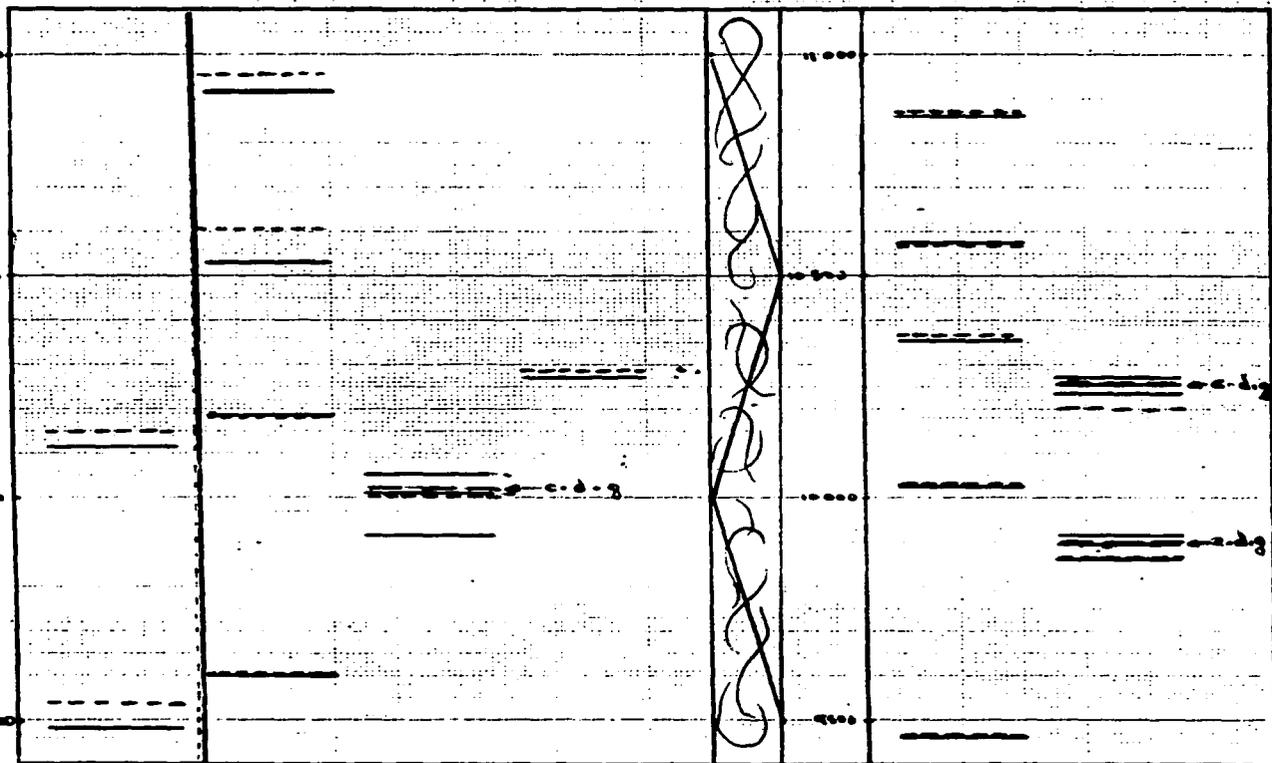
CHARMONIO

BOTONIO

Singuletos

Tripletos

Tripletos



— Experimental

- - - Teórico

c.d.g.: centro de gravedad del triplete P

TABLA III

Charmonio

Estado	Cornell	Buchmuller	México
1S	0.20	0.23	0.88
1P	0.20	0.23	0.92
2S	0.24	0.29	0.98
1D	0.23	0.29	0.98
3S	0.30	0.36	1.08
4S	0.35	0.44	1.18

Bottonio

Estado	Cornell	Buchmuller	México
1S	0.068	0.077	0.44
1P	0.068	0.068	0.38
2S	0.076	0.078	0.42
1D	0.076	0.078	0.44
3S	0.083	0.083	0.50
4S	0.097	0.098	0.58
5S		0.130	0.48

Comparación de los distintos valores de v^2/c^2 .

Notese un factor ~ 4 en nuestros cálculos.

Por otro lado, tanto el grupo de Cornell⁽⁹⁾, como Buchmüller⁽¹²⁾ y Quigg y Rosner⁽¹⁰⁾ utilizan la aproximación

$$v^2 \approx p^2/m^2 = (p^2/m) / m = \langle T \rangle / m$$

y sus resultados difieren de los nuestros por un factor de cuatro, como puede apreciarse en la tabla. La clave reside en la última igualdad, dado que el lado izquierdo se refiere a las coordenadas de una sola partícula, mientras que el derecho se evalúa en coordenadas relativas y la identidad carece de significado. Aún cuando nuestra expresión sería en principio la correcta, conduce a valores consternadoramente altos de la velocidad, mayores para algunos estados que la de la luz. Esto indica que la evaluación de la energía cinética debería efectuarse en términos de operadores del tipo $T = \sum (p_i + m_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Posteriormente regresaremos a este cuestión.

El hecho de que el sistema sea "más relativista" de lo que se espera proviene de la aceptada suposición común (injustificada) de que los quarks se mueven lentamente porque son pesados. En principio, debería esperarse un valor, alto de la velocidad cuando el potencial de interacción es suficientemente intenso. Supongamos por un momento que desconectamos la parte confinante del potencial, esto es, hagamos $K = 0$. En este caso, el sistema se convierte en hidrogenoide y posee un espectro de niveles

$$E_n = -\mu \alpha_s^2 / 2n^2$$

Según el teorema del virial, $\langle E \rangle = -\langle T \rangle$ y de aquí, el valor cuadrático medio de la velocidad relativa entre los quarks en su estado fundamental es (recordemos que $c^2=1$)

$$\langle v^2 \rangle = \alpha_s^2$$

Hay que notar que este resultado es independiente de la masa de los quarks. En el caso del charmonio $\alpha_s^2 = .27$, mientras que en el botonio $\alpha_s^2 = .24$, lo que proporciona una cota mínima mayor que el valor de la velocidad cuadrática total (i.e. la resultante de la

acción combinada de los potenciales coulombiano y confinante) reportada por los otros autores. Aún más: el teorema del virial nos indica que cuando $K \neq 0$:

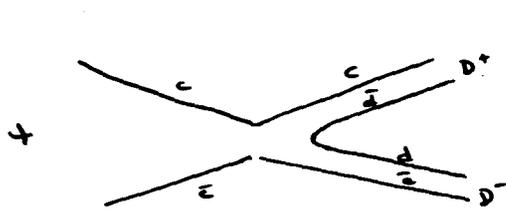
$$2 \langle T \rangle = \langle \alpha_s/r \rangle + \langle Kr \rangle$$

de manera que el potencial confinante añade energía cinética a la proporcionada por el potencial coulombiano y la velocidad cuadrática de los quarks aumentará hasta el valor indicado en la tabla III. Este resultado implica que si la constante de acoplamiento efectiva o la densidad de energía de la bolsa son grandes, los quarks se moverán rápidamente dentro de un hadrón y las correcciones relativistas serán apreciables⁽¹⁰⁾, contrariamente a las esperanzas previas. No obstante, es notable que tanto el espectro de energías como las amplitudes leptónicas de decaimiento (que estudiaremos a continuación) quedan bastante bien determinados en la aproximación no relativista.

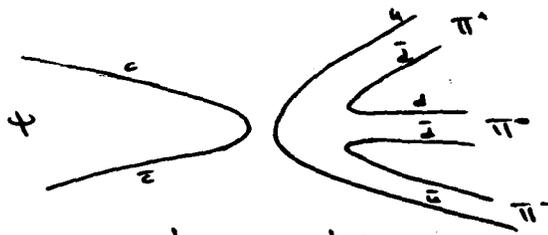
Amplitudes de decaimiento

La estrechez de los estados del charmonio puede entenderse en términos de la regla de Zweig⁽⁹⁾, que afirma que las líneas no conectadas en un diagrama de flujo de quarks dan lugar a la supresión del decaimiento de dichos estados (véase la figura 4). De acuerdo con esta regla, la transición $J/\psi \rightarrow$ mesones encantados sería preferida al resto de las transiciones posibles; sin embargo, la masa de J/ψ es insuficiente para dicha reacción y queda como opción viable el decaimiento electromagnético en partículas sin encanto, lo cual se traduce en tiempos de vida media relativamente largos. Los estados del charmonio más pesados que J/ψ y ψ' se encuentran encima del umbral de producción de mesones encantados y al existir canales alternativos de decaimiento, dichos estados son sucesivamente más anchos, viéndose favorecidos por la regla de Zweig.

La amplitud de decaimiento leptónico de una partícula vectorial ($J^{PC} = 1^{--}$) no relativista de masa M_V en un par leptón



Permitida



Nu permitida

Figura 4

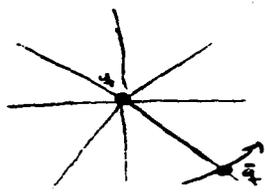


Figura 5

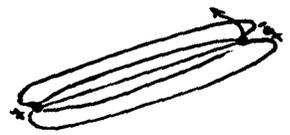


Figura 6

- antileptón vía un fotón virtual es ⁽⁹⁾

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 q^2 |\Psi(0)|^2 / M_V^2$$

en donde α es la constante electromagnética de estructura fina, q la carga del quark en términos de la del protón y M_V la masa de la partícula que se aniquila.

Vemos que el problema de determinar las amplitudes de aniquilación se reduce a evaluar la función de onda en el origen. La evaluación no es inmediata porque en el cálculo variacional aparecen integrales del tipo $\int \Psi^2(r) V(r) r^2 dr$, que no dependen del valor específico de la función de onda en un punto, lo que permite determinar la energía de un estado con bastante aproximación aún cuando no se posea información precisa sobre su función de onda en el origen. Esto es consecuencia de que en el método variacional el error en la aproximación a los eigenvalores es de segundo orden respecto del error correspondiente a las eigenfunciones⁽¹⁷⁾ (el error es comparable en otros métodos). El espectro que presentamos previamente no se altera aún cuando el valor de la función de onda en el origen se incrementa por un valor de diez, por ejemplo.

El problema de la evaluación de la función de onda en un punto se soluciona empleando un teorema atribuido a Schwinger⁽⁹⁾, el cual da la conexión entre el valor de la función de onda de estados S en el origen y el gradiente del potencial

$$4\pi |\Psi(0)|^2 = m \langle V'(r) \rangle$$

y de aquí podemos calcular los valores de las razones de decaimiento respecto del estado $1S$ que aparecen en la tabla IV. El hecho de que presentemos razones de las amplitudes de decaimiento en vez de su valor individual, se debe a que este valor resulta más alto de lo esperado por un 30%. Esta situación se modifica si a la amplitud Γ se le añaden las correcciones provenientes del intercambio de gluones^(9,18), las cuales, si el cálculo perturbativo tuviese sentido, tomarían la forma

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 (1 - 16\alpha_s / 3\pi) q^2 |\Psi(0)|^2 / M_V^2$$

TABLA IV

Razones de decaimiento de los estados 3S del charmonio

E_{exp}	Γ/Γ_{1S}	$(\Gamma/\Gamma_{1S})_{exp}$
3007	1.00	1.00
3595	0.48	0.45
4030	0.34	0.15
4415	0.28	0.10

Razones de decaimiento de los estados 3S del botonio

E_{exp}	Γ/Γ_{1S}	$(\Gamma/\Gamma_{1S})_{exp}$
9464	1.00	1.00
9955	0.45	0.44
10295	0.35	0.33
10580	0.32	0.20
10882	0.26	0.25

TABLA V

Charmonio

Edo.	Exp.	Cornell	Buchmuler	Martin	Gupta	México
1S	1	1	1	1	1	1
2S	.40±.06	.44	.46	.40	.57	.45±.01
3S	.16±.02	.31	.32	.29		.31±.01
4S	.24±.07	.23	.25			.26±.01

Botonio

Edo.	Exp.	Cornell	Buchmuler	Martin	Gupta	México
1S	1	1	1	1	1	1
2S	.45±.05	.46	.44	.51	.51	.45±.01
3S	.32±.05	.31	.32	.35	.37	.33±.01
4S	.24±.05	.20	.26	.27		.31±.01
5S	.25±.05		.25	.21		.26±.01

Tabla de razones de decaimiento Γ_{exp} respecto del estado 1S

y la amplitudes de decaimiento de $J/\psi \rightarrow \gamma$ estarían dadas por

$$\Gamma_{J/\psi} = 4.39 \qquad \Gamma_{\gamma} = 1.01$$

que son valores cercanos al experimental⁽⁴⁾

$$\Gamma_{J/\psi} = 4.45 \qquad \Gamma_{\gamma} = 1.01$$

Según la tabla IV, las amplitudes de decaimiento tienen valores aceptables para los estados del charmonio que se encuentran por debajo del umbral de producción de encanto, en tanto que en el botonio el cálculo parece razonable en todo el espectro, salvo el estado 4S. Debemos notar que aquellos estados cuya energía está más lejana del valor experimental, también tienen asociada una mala predicción de su decaimiento electromagnético. La tabla V compara (favorablemente) nuestras amplitudes con las determinadas por otros autores^(5,12,13,14).

Correcciones relativistas en el quarkonio

El estudio de las correcciones relativistas al espectro nos permitirá determinar las propiedades de transformación de los potenciales (su naturaleza de Lorentz) y con ello el ensayo de las ideas en torno de la descripción de las correlaciones de espín de los hadrones polarizados. Podemos considerar dos tipos diferentes de efectos relativistas: aquellos provenientes de la modificación de la masa con la velocidad y las relacionadas con la aparición de efectos de tipo magnético. Estos últimos se manifiestan a nivel atómico a través de interacciones que dependen del espín, que a su vez determinan el desdoblamiento de multipletes en el espectro.

El tratamiento teórico de la estructura fina en el quarkonio se desarrolla usualmente en forma paralela a un cálculo de la electrodinámica cuántica, efectuando un cálculo exacto para la parte central del potencial y aplicando la teoría de

perturbaciones para la parte dependiente del espín^(42,43,48-55). Este procedimiento es justificable en la espectroscopía atómica, dada la pequeñez de la constante de acoplamiento electromagnético; en cambio, en la región de las interacciones fuertes, la magnitud de la constante de color, dos órdenes de magnitud mayor que la electromagnética, nos conduce a un par de cuestiones importantes: la primera es si la derivación de los potenciales cuasirrelativistas de interacción puede efectivamente realizarse siguiendo los lineamientos de la electrodinámica. Intimamente relacionada con la anterior, está la cuestión de si un cálculo perturbativo de los valores medios de estos potenciales es equivalente al cálculo exacto.

La siguiente imagen⁽⁴⁴⁾ puede darnos cierta intuición sobre la forma que deben desarrollar las correcciones relativistas: a distancias cortas, el sistema quark-antiquark es coulombiano (figura 5). Un quark en órbita cruza líneas del campo producido por el otro quark y se encuentra sujeto a un campo cromomagnético $\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}$, en donde \mathbf{E} es el campo cromoelectrónico radial, lo cual conduce a una fuerza explícita espín-órbita. La intensidad de esta interacción puede modificarse si los quarks poseen un momento cromomagnético anómalo. Por otro lado, un intercambio escalar puede generar, vía la precesión de Thomas, una interacción de $-1/3$ de la magnitud de la fuerza $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. El cálculo de las correcciones a orden $1/c^2$ a la electrodinámica, proporciona también potenciales de interacción espín-espín y tensorial. Un intercambio pseudoescalar se revelará, según veremos, por la modificación de la magnitud del potencial tensorial, en tanto que la interacción $S_1 \cdot S_2$ solamente nos dará información sobre el intercambio de partículas vectoriales, contribuyendo con términos proporcionales a la función δ de Dirac (y a la constante de acoplamiento).

A distancias grandes, un quark orbitante arrastra consigo las líneas de campo cromoelectrónico (figura 6) y, en principio, no puede existir una fuerza del tipo $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. Sin embargo, por estar en un sistema rotante, el quark se encuentra sujeto a la fuerza de Thomas. Como es de signo opuesto a aquella asociada con $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$, el potencial confinante podría interpretarse como un intercambio escalar. No obstante, es difícil precisar la región en la que esta descripción tiene sentido y podría ocurrir una superposición con

los fenómenos identificados como de distancias cortas. Aunado a este efecto, Kogut y Parisi⁽²⁶⁾ han sugerido que las fluctuaciones cuánticas de las cuerdas pueden originar una interacción tensorial de largo alcance.

En conclusión, es plausible la existencia de fuerzas cromodinámicas de interacción dependientes del espín similares a las proporcionadas por la electrodinámica. El análisis de las fuerzas espín-órbita y tensorial tiene relevancia tanto a distancias pequeñas como a distancias grandes, ya que determinan tanto la estructura fina, como la naturaleza tensorial de los potenciales. No así las contribuciones espín-espín dado que, por un lado, sólo describen intercambios vectoriales y por el otro, a distancias cortas, son proporcionales al valor de la constante de acoplamiento en el origen en donde, por encontrarse en la región de libertad asintótica, su valor debería ser nulo. A este respecto, cabe la pregunta de cómo reconciliar este hecho con los conocidos cálculos de masas bariónicas por Karl e Isgur⁽⁸⁾, en los cuales el término de contacto de Fermi es determinante.

El enfoque usual en la electrodinámica para describir las correcciones relativistas al movimiento de partículas en interacción ocurre en términos del hamiltoniano de Breit⁽²⁷⁾, equivalente en el límite clásico, al hamiltoniano de Darwin⁽²⁸⁾. En ese límite, un sistema de partículas en interacción mutua puede caracterizarse mediante un hamiltoniano que depende solamente de las coordenadas y de los momentos de las partículas. Cuando se toma en cuenta la velocidad finita de la propagación de las interacciones, el campo de fuerzas adquiere sus propios grados de libertad, los cuales pasan a formar parte del hamiltoniano. Sin embargo, si la velocidad de las partículas es pequeña se puede escribir un hamiltoniano aproximado (el hamiltoniano de Darwin), correcto hasta términos del orden $\sim 1/c^2$, que no depende del campo. Esta circunstancia está ligada con el hecho de que la radiación de ondas electromagnéticas por cargas en movimiento se presenta sólo al orden $1/c^3$ ⁽²⁸⁾.

En la teoría cuántica, a esta situación corresponde la posibilidad de describir el sistema por una ecuación de Schrodinger que tome en cuenta los términos de segundo orden⁽²⁷⁾. Una aproximación posible es considerar la expresión relativista de

la amplitud de dispersión de dos partículas, que en la aproximación no relativista se reduce a la amplitud de dispersión de Born ordinaria, proporcional a la transformada de Fourier del potencial de interacción estático entre las partículas. Hay que tener en cuenta un ingrediente más: Bethe y Salpeter⁽²⁰⁾ señalaron que el enfoque usual a la Breit es plenamente justificable sólo cuando se le trata a primer orden en la teoría de perturbaciones (por supuesto, si el valor de la constante de acoplamiento lo permite) y que, en principio, un cálculo perturbativo a segundo orden y más aún, un cálculo exacto, podría conducir a resultados erróneos como consecuencia de no considerar las fluctuaciones del vacío. En el caso de las interacciones fuertes, un punto de partida nos lo proporcionaría (con las debidas reservas) la expresión estática perturbativa

$$U(q) \sim 4\pi\alpha (\Lambda^2) / [q^2 \ln(q^2/\Lambda^2)].$$

La aproximación siguiente respecto de $1/c$ en la interacción puede calcularse en términos de la función de onda de Schrodinger de partícula libre que satisface la ecuación

$$\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{m^2} \right] (p^2)^2 \right] \phi = [E - m] \phi$$

en la que se toma en cuenta el término siguiente del desarrollo de la fórmula relativista de la energía cinética. Si designamos por ω a la amplitud espinorial asociada con la onda plana ϕ , la amplitud biespinorial u de una partícula libre se expresa en función de la amplitud ω (en esta aproximación) en la forma

$$u = (2m)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} (1 - p^2 / 8 m^2) \omega \\ (\sigma \cdot p / 2 m) \omega \end{bmatrix}$$

la cual nos permite construir la amplitud de dispersión

$$M_{fi} = -2m_1 m_2 (\omega_1^\dagger \omega_2^\dagger U(p_1, p_2, q) \omega_1 \omega_2)$$

en donde $q = p_1' - p_1 = p_2' - p_2$. Notemos que este desarrollo se puede efectuar también cuando los espinores ω son soluciones conocidas de ecuaciones con interacción⁽³⁰⁾. En el caso usual en que aquellos representan estados asintóticos libres, la expresión para la amplitud de transición conduce directamente a un hamiltoniano de Breit con correcciones de fluctuaciones del vacío:

$$\begin{aligned} & m_1 + m_2 + \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{1}{E} \left[\frac{1}{m_1} \not{p}_1 + \frac{1}{m_2} \not{p}_2 \right] (\not{p}^2)^2 + \\ & + \alpha_e (q^2) \left[\frac{1}{q^2} - \frac{1}{E} \left[\frac{1}{m_1} \not{p}_1 + \frac{1}{m_2} \not{p}_2 \right] \right] + \\ & + \frac{(\not{q} \cdot \not{p}_1)(\not{q} \cdot \not{p}_2)}{m_1 m_2 q^4} - \frac{\not{p}_1 \cdot \not{p}_2}{m_1 m_2 q^2} \\ & + \frac{i}{4m_1^2} \frac{\sigma_1 \cdot q \times p_1}{q^2} - \frac{i}{4m_2^2} \frac{\sigma_2 \cdot q \times p_2}{q^2} + \\ & - \frac{i}{2m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot q \times p_2}{q^2} - \frac{\sigma_2 \cdot q \times p_1}{q^2} \right] + \\ & + \frac{1}{4m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot q \sigma_2 \cdot q}{q^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right] \end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4 m_1^2} \frac{\sigma_1 \cdot q \times p_1}{q^2} - \frac{i}{4 m_2^2} \frac{\sigma_2 \cdot q \times p_2}{q^2} + \\
& - \frac{i}{2 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot q \times p_2}{q^2} - \frac{\sigma_2 \cdot q \times p_1}{q^2} \right] + \\
& + \frac{1}{4 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot q \sigma_2 \cdot q}{q^2} - \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right]
\end{aligned}$$

en donde

$$\alpha_s(q^2) = \alpha_s(\Lambda^2) / [\ln(q^2/\Lambda^2)].$$

Si suponemos de nuevo, como Richardson⁽²¹⁾, que tiene algún sentido pasar al límite $q^2 \rightarrow 0$ y recordando que esto da lugar a un comportamiento lineal (en el espacio de configuración), entonces es plausible el que las interacciones dependientes del espín tengan la misma forma (i.e., aquellos factores del tipo $s_1 \cdot s_2$ o $l \cdot s$ que multiplican a una función radial) para la parte lineal del potencial que aquellas asociadas con la parte coulombiana. Este resultado es consistente con la proposición de T.D.Lee⁽²²⁾, en el mismo sentido, al suponer que los quarks interactúan exclusivamente, (como hasta ahoratambién hemos hecho nosotros, implícitamente) via una partícula vectorial. De esta manera, el hamiltoniano cuasirrelativista de interacción en el espacio de configuración se escribe en la forma

$$m_1 + m_2 + \frac{p_1^2}{2 m_1} + \frac{p_2^2}{2 m_2} - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{m_1} s_1 + \frac{1}{m_2} s_2 \right] (p^2)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_s \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2 m_1 m_2} p \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{r \cdot r}{r^3} \right) \cdot p \right] + \\
& -\frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right] \left[-4\pi\alpha_s \delta(r) + \frac{2K}{r} \right] + \\
& -\frac{\alpha_s}{4 m_1^2} \frac{\sigma_1 \cdot r \times p_1}{r^3} + \frac{\alpha_s}{4 m_2^2} \frac{\sigma_2 \cdot r \times p_2}{r^3} + \\
& + \frac{\alpha_s}{2 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot r \times p_2}{r^3} + \frac{\sigma_2 \cdot r \times p_1}{r^3} \right] + \\
& -\frac{K}{4 m_1^2} \frac{\sigma_1 \cdot r \times p_1}{r} + \frac{K}{4 m_2^2} \frac{\sigma_2 \cdot r \times p_2}{r} + \\
& + \frac{K}{2 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot r \times p_2}{r} + \frac{\sigma_2 \cdot r \times p_1}{r} \right] + \\
& -\frac{\alpha_s}{4 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot r \sigma_2 \cdot r}{r^3} + \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{r^3} \right] + \\
& -\frac{\alpha_s}{4 m_1 m_2} \left[\frac{\sigma_1 \cdot r \sigma_2 \cdot r}{r^3} + \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{r} \right] + \\
& -\frac{2}{8 m_1 m_2} \left[-4\pi\delta(r) + \frac{2K}{r} \right] \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2
\end{aligned}$$

En el sistema de centro de masa y cuando las partículas son de masa idéntica, el potencial adquiere una forma simple

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + Kr + V_{\text{spin}}(r)$$

donde $V_{\text{spin}} = V_{SS} + V_{LS} + V_T$ y

$$V_{LS}(r) = \frac{3\alpha}{2m^2} \frac{L \cdot S}{r^3} + \frac{3K}{2m^2} \frac{L \cdot S}{r}$$

$$V_T(r) = \frac{-\alpha}{m^2} \frac{S_{12}}{r^3} - \frac{K}{3m^2} \frac{S_{12}}{r}$$

$$V_{SS}(r) = \frac{2}{3m_1m_2} \left[-4\pi\delta(r) + \frac{2K}{r} \right] \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

Salta de inmediato a la vista el comportamiento altamente divergente de este hamiltoniano en el origen de coordenadas. En la parte potencial aparecen términos que caen como $-1/r^3$; es un hecho conocido⁽²²⁾ el que un potencial más divergente que $-1/r^2$, con $\nu \geq 2$, no posee un estado de energía mínima. La inexistencia de mínimos absolutos de la energía haría inaplicable, en principio, el método variacional y esto nos situaría en una encrucijada, ya que en esta situación un cálculo perturbativo es escasamente confiable. Nuestra opción será el llevar el formalismo variacional tan lejos como sea posible hasta su fallo eventual, opción factible debido a que, como veremos posteriormente, existen estados de energía metaestables. Esto se reflejará en el cálculo mediante la restricción de los los parámetros variacionales a modo de excluir a la función de onda de regiones muy cercanas al origen de coordenadas, evitando la caída del sistema al precipicio de potencial.

Un problema similar aparece relacionado con el operador de

energía cinética $-p^4$, que conduce a divergencias difícilmente manejables mediante un cálculo variacional y fuerzan a estimar su valor medio en el esquema perturbativo⁽⁴³⁾. Esta dificultad desaparece si considera el operador completo $(p^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$. En un cálculo en esta dirección, Gupta⁽⁴⁵⁾ evalúa los elementos de matriz de este operador en el espacio de Fourier y determina variacionalmente las correcciones cinéticas al espectro. El espectro del botonio permanece esencialmente inalterado, mientras que algunos eigenestados del charmonio aparecen más cercanos a su valor experimental.

Efectuaremos ahora una estimación de las condiciones de aplicabilidad del operador de Breit relacionadas con las energías de enlace en el quarkonio. Bethe y Salpeter⁽²⁹⁾ encontraron que la condición de que el sistema sea no relativista en la deducción de la ecuación de Breit, es equivalente a afirmar que las energías de amarre de los estados ligados son pequeñas comparadas con la masa de las partículas interactuantes. Nos interesa en particular averiguar el efecto de las correcciones relativistas en los estados tripletes P, en los cuales existe evidencia experimental de que ocurre el desdoblamiento de sus niveles. Podemos dividir el análisis en dos regiones: la región cercana, en la que el intercambio de un gluón es dominante, y la región lejana, en la que predomina la acción de la bolsa. De acuerdo a la tabla I, la energía del "centro de gravedad" de los dos primeros tripletes P en el charmonio, asociada con el intercambio de un gluón es

$$E_{\text{conf}} = \langle -\alpha_s/r \rangle = -206 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{conf}}' = \langle -\alpha_s/r \rangle = -158 \text{ MeV}$$

de manera que si la masa del quark encantado es de 1840 MeV, el empleo de la interacción de Breit en esta región es medianamente justificable. El análisis de la región lejana debe realizarse de manera diferente, porque no se tiene el intercambio simple de un gluón. Si utilizamos el teorema del virial para un potencial lineal

$$T = \frac{1}{2} \langle Kr \rangle$$

resulta que $v^2 = .57$ para el primer triplete y $v^2 = .90$ para el segundo, por lo que una corrección cuasirrelativista tipo Breit describiría mejor la región lejana del primero, que es el único que se observa experimentalmente. Según esto, el cálculo en términos de potenciales de sistemas más ligeros que el charmonio sería incorrecto, dado que la distancia promedio entre las partículas ligeras, proporcional a $1/m$, sería mayor y con ello, la constante de acoplamiento y la energía de la bolsa, convirtiendo al sistema en altamente relativista. La aproximación resulta mejor para el botonio

$$E_{\text{conf}} = \langle -\alpha_s/r \rangle = -251 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{conf}}' = \langle -\alpha_s/r \rangle = -158 \text{ MeV}$$

y la energía asociada con el intercambio de un gluon es unas veinte veces menor que la masa de los quarks bellos, 5170 MeV. La velocidad cuadrática en las regiones alejadas es del orden de .15 y .20 para el primero y segundo triplete, respectivamente, de modo que la corrección de Breit parece bastante razonable en este sistema.

El paso que sigue es determinar la acción sobre la función de onda de los operadores $L \cdot S$, $S_1 \cdot S_2$ y S_{12} que aparecen en los potenciales. Los dos primeros actúan de una manera simple si consideramos funciones propias de J^2 y de $S^2 = (S_1 + S_2)^2$, ya que

$$L \cdot S = \frac{1}{2} (J^2 + L^2 + S^2)$$

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2} (S^2 + S_1^2 + S_2^2)$$

El término tensorial opera de una manera más complicada porque mezcla funciones de onda con el mismo valor de J . Consideraremos funciones del tipo Ω_{LSJ}^M , donde

$$\Omega_{LSJ}^M = \sum_L Y_L^M(\theta, \phi) |S\mu\rangle \langle LS\mu\mu | JM\rangle$$

las funciones Y_L^M son los armónicos esféricos y las cantidades $\langle LS\mu\mu | JM \rangle$ son los coeficientes de Clebsch - Gordan. Si se adoptan las convenciones

$$S_{12} = 2(3Q - S^2).$$

$$\Omega^0 \equiv \Omega_{J0J}^M, \quad \Omega^1_0 \equiv \Omega_{J1J}^M, \quad \Omega^1_{\pm} \equiv \Omega_{J\pm 1J}^M,$$

resulta⁽³³⁾

$$Q\Omega^0 = 0 \qquad Q\Omega^1_0 = \Omega^1_0$$

$$\Omega^1_{+} = [J\Omega^1_{+} + (J(J+1))^{1/2}\Omega^1_{-}] / (2J+1)$$

$$\Omega^1_{-} = [(J+1)\Omega^1_{-} + (J(J+1))^{1/2}\Omega^1_{+}] / (2J+1)$$

de manera que al aplicar el operador tensorial sobre las funciones Ω correspondientes a los estados con $J = 0, 1, 2$, tendremos

$$S_{12}\Omega^0 = -2(S(S+1))\Omega_{J0J}$$

$$S_{12}\Omega_{110} = -2(S(S+1))\Omega_{110}$$

$$S_{12}\Omega_{111} = 2(3 - S(S+1))\Omega_{111}$$

$$S_{12}\Omega_{112} = 2[3(\sqrt{6}\Omega_{312} + 3\Omega_{112}) / 5 - (S(S+1))\Omega_{112}]$$

En este trabajo no consideraremos las mezclas, por lo que despreciaremos el término $\sigma\sqrt{6}\Omega_{112}/5$. Esta aproximación es lícita tomando en cuenta que aquellos estados en los que cabría esperar mezclas (3S y 1D, en el charmonio), están muy pobremente definidos por el experimento⁽⁴⁾.

Con lo anterior queda (en principio) determinada la forma de la interacción y podemos ahora romper la degeneración de los estados tripletes. Por principio de cuentas, el cálculo en teoría de perturbaciones de la razón F de estructura fina

$$F = \langle {}^3P_2 - {}^3P_1 \rangle / \langle {}^3P_1 - {}^3P_0 \rangle$$

cuando el potencial central es de la forma $V(r) \sim r^\nu$, conduce a la expresión⁽²⁾

$$2(13+\nu)/5(5-\nu)$$

y resulta $F = 7/5$, cuando $\nu = 1$ y $F = 4/5$, si $\nu = -1$, ambas muy distintas del valor experimental, $F \approx 1/2$ en el charmonio y $F \approx 2/3$ para los dos tripletes P observados en el botonio⁽¹⁾.

La estrategia para reproducir adecuadamente los desdoblamientos de la estructura fina en ambos sistemas, consistirá en suponer que los potenciales L·S y tensorial tienen pesos distintos de los asociados con el mero intercambio vectorial, lo cual, a su vez, devendrá en intercambios de partículas de diferentes virtudes tensoriales. Parametrizaremos el potencial de la manera siguiente

$$V_{LS}(r) = \frac{3 \alpha_s C_{int}}{2 m^2} \frac{L \cdot S}{r^3} + \frac{3 K C_{ext}}{2 m^2} \frac{L \cdot S}{r}$$

$$V_{LS}(r) = \frac{-\alpha_s T_{int}}{m^2} \frac{S_{12}}{r^3} + \frac{-K T_{ext}}{3 m^2} \frac{S_{12}}{r}$$

aquellos términos que van como $1/r^3$ los llamaremos internos, inducidos por el potencial de Coulomb, en contraposición con aquellos que van como $1/r$ que llamaremos externos, generados por el potencial confinante. De las correcciones relativistas a la energía potencial, la interacción espín - órbita interna es la más intensa y desestabiliza fácilmente a la función de onda; la caída se evita si se dan valores no muy altos al parámetro C_{int} que pesa a esta interacción. El tener cierto control sobre los valores que tomen los factores de peso es la razón que nos permite generar potenciales de interacción metaestables, síntesis del conflicto entre el potencial centrífugo y el potencial $\sim 1/r^3$. Es en una pequeña vecindad del mínimo relativo de energía en donde es posible realizar el cálculo variacional.

Como antes, el cálculo se desarrolló utilizando tanto el programa de método variacional como el de integración numérica. Para emplear el primer método, hubo necesidad de analizar el comportamiento de la energía según los valores que tomaban los parámetros variacionales. Este se muestra en las figuras (7) y (8). Es claro que la energía no alcanza un mínimo absoluto sino metaestable. La permanencia en la región metaestable se asegura seleccionando a los parámetros variacionales en las vecindades $.16 \leq \alpha \leq .30$ y $1.45 \leq \beta \leq 1.65$. La figura (9) muestra el potencial asociado al primer estado triplete 3P_0 del charmonio, que es el más explosivo, así como la gráfica de la función de onda correspondiente. Las gráficas de las funciones de onda fueron obtenidas del cálculo numérico; en el caso del estado 3P_0 del charmonio, fue necesario restringir a la función de onda a no penetrar en una región de dimensiones de .06 "radios de Bohr del sistema" para mantener estable el cálculo. Una aproximación mayor hacia la región interna provoca oscilaciones de la función de onda de varios órdenes de magnitud, relacionadas con los infinitos niveles de energía que pueden existir en las profundidades del potencial. Los estados energéticos determinados de acuerdo a este método difieren de los obtenidos en el cálculo variacional en alrededor de 0.1%.

Dado un valor de C_{int} , existe un juego de valores de C_{ext} , T_{int} y T_{ext} , tales que se obtiene un ajuste razonable al espectro de estructura fina (figura(10)). El intervalo en que es posible realizar el ajuste es

$$0.50 \leq C_{int} \leq .68$$

$$0.20 \leq C_{ext} \leq 0.50$$

$$0.28 \leq T_{int} \leq .56$$

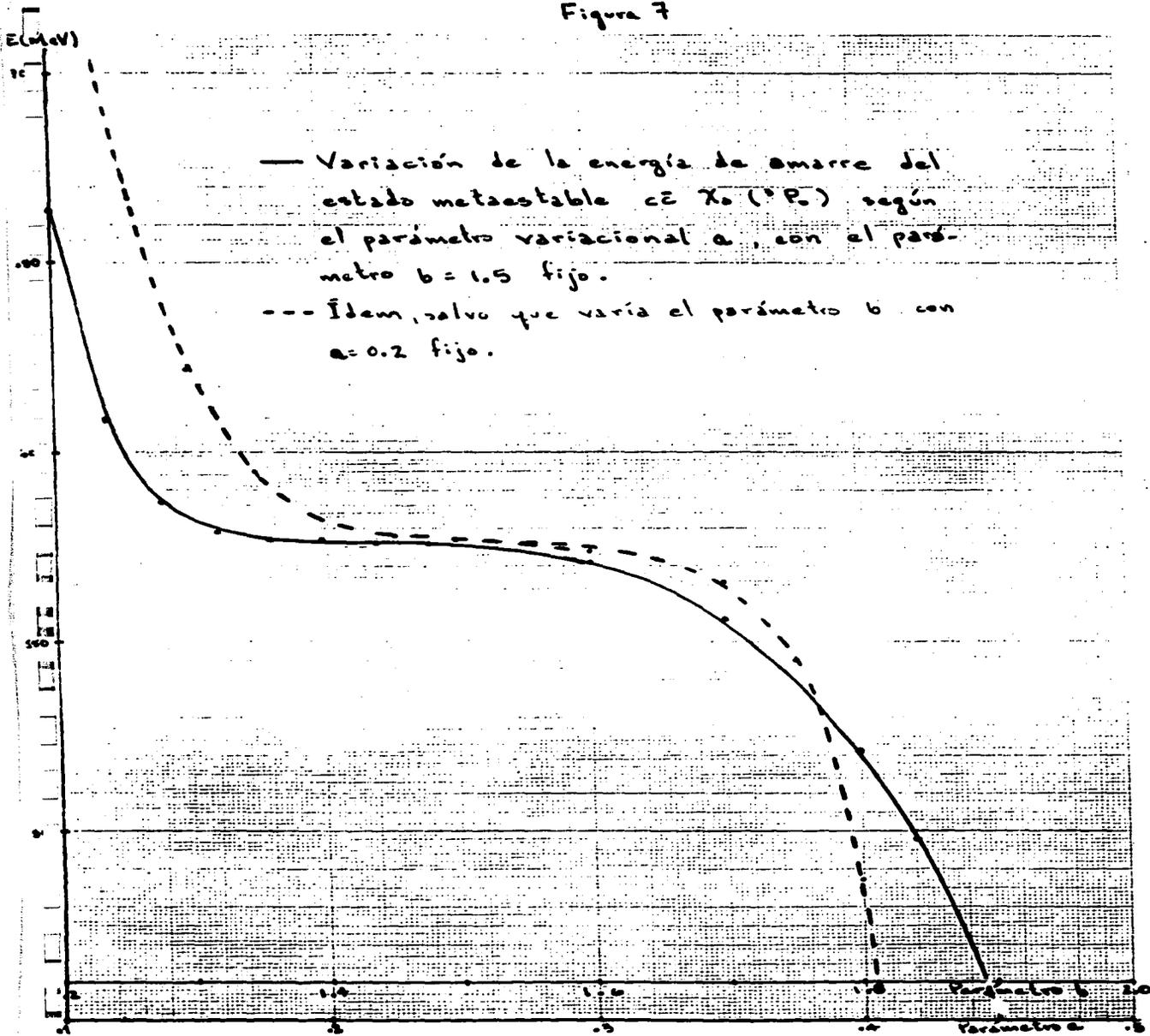
$$0.00 \leq T_{ext} \leq 3.20$$

El espectro que se determina tomando valores de la gráfica tiene variaciones de ± 5 MeV. Una elección cuidadosa de los parámetros, por ejemplo

$$C_{int} = 0.65 \pm .01$$

$$C_{ext} = 0.20 \pm .05$$

Figura 7



E(MeV)

Fig. 8

Variación de la energía de amarre del estado metaestable $b\bar{b}$ X_{60} (3P_0) según el parámetro variacional a con el parámetro $b = 1.5$ fijo.

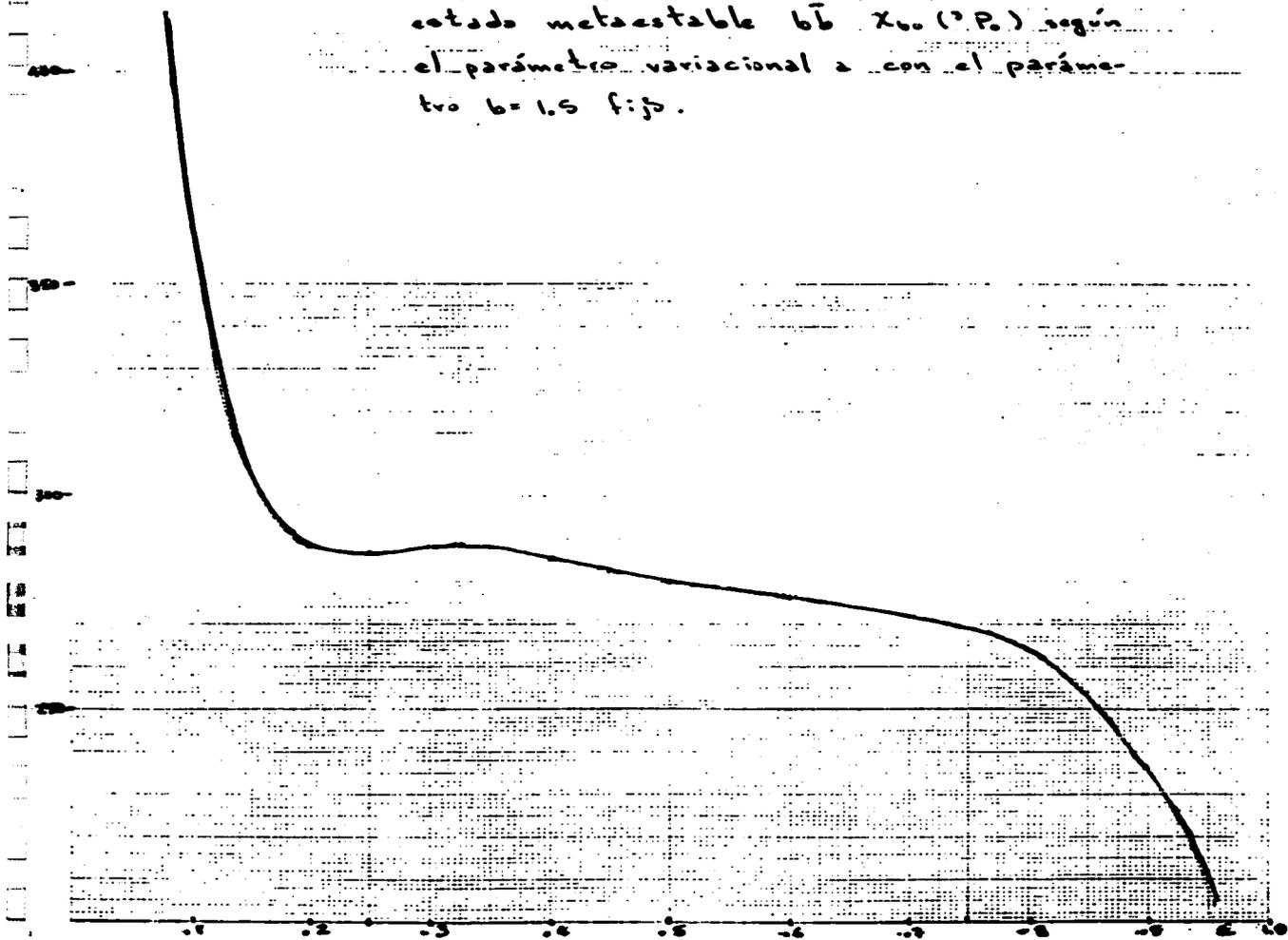
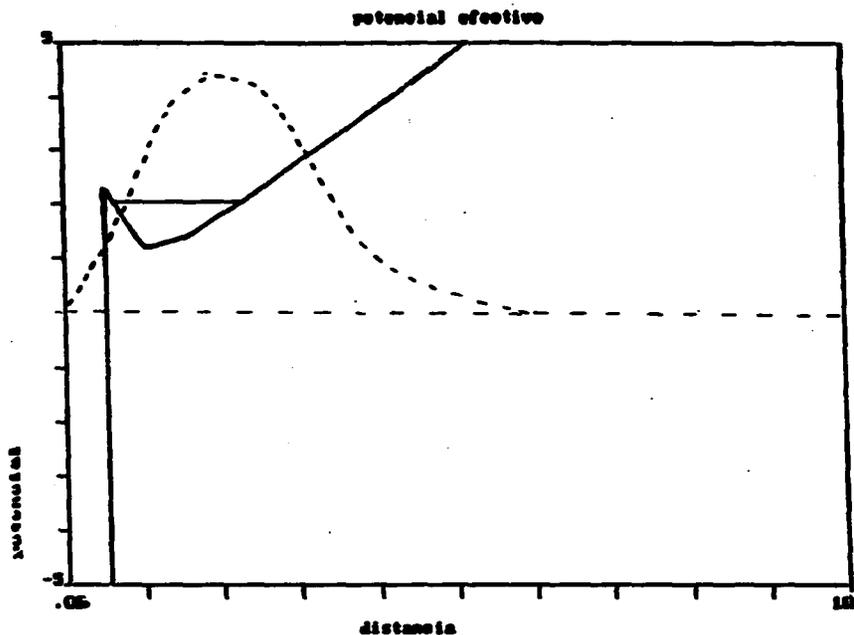
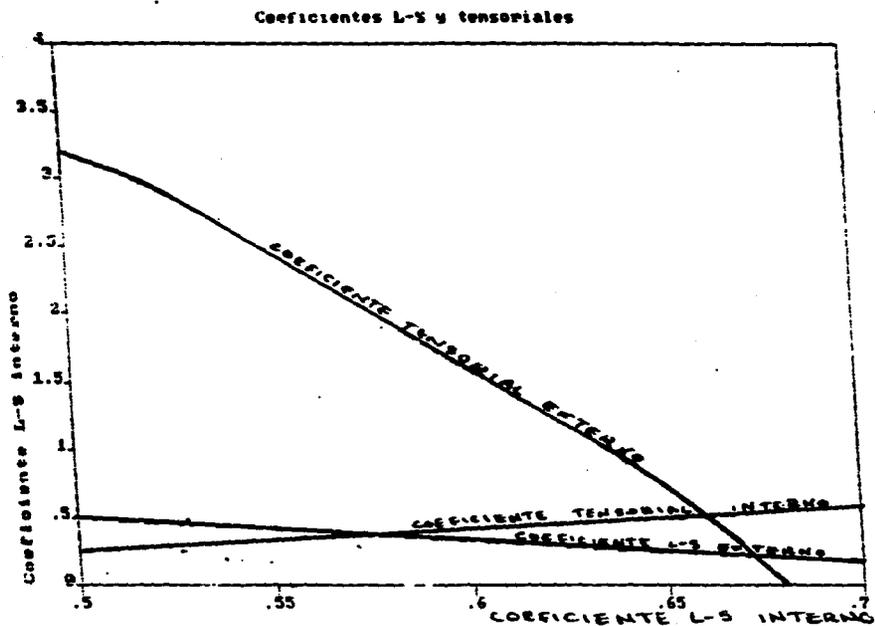


Fig. 9



Comportamiento del potencial efectivo cerca del origen para el estado 3P_0 del charmonio. También aparece dibujada la posición del nivel de energía correspondiente, así como la función de onda.

Fig 10.



Variación de los coeficientes L-S externo y tensorial interno y externo para un coeficiente L-S interno fijo, que permite ajustar de manera aproximada la estructura fina en el charmonio y en el botonio.

TABLA 192

Estados 3P_J del charmonio

$\langle E \rangle$	$\langle T \rangle$	$\langle -a/r \rangle$	$\langle Kr \rangle$	$\langle V_{ls} \rangle$	$\langle V_{ss} \rangle$	$\langle V_{ten} \rangle$	v^2
3401	726	-288	432	-239	10	-54	0.61
3406	390	-215	514	-30	7	8	0.46
3541	343	-200	545	22	7	-1	0.43

Estados 3P_J del botonio

$\langle E \rangle$	$\langle T \rangle$	$\langle -a/r \rangle$	$\langle Kr \rangle$	$\langle V_{ls} \rangle$	$\langle V_{ss} \rangle$	$\langle V_{ten} \rangle$	v^2
9801	393	-350	312	-35	2	-9	0.23
9918	339	-323	330	-12	1	3	0.21
9937	311	-307	343	10	1	0	0.19

Estados $^3P_J'$ del botonio

$\langle E \rangle$	$\langle T \rangle$	$\langle -a/r \rangle$	$\langle Kr \rangle$	$\langle V_{ls} \rangle$	$\langle V_{ss} \rangle$	$\langle V_{ten} \rangle$	v^2
10248	438	-252	520	-29	1	-8	0.61
10269	392	-234	539	-10	1	3	0.46
10284	371	-224	551	8	1	0	0.43

$$T_{\text{int}} = 0.54 \pm .01$$

$$T_{\text{ext}} = 0.30 \pm .05$$

conduce al espectro de energías de la tabla VI. De acuerdo con esta tabla, los valores de la estructura fina del charmonio son

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 96 \pm 2$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 46 \pm 2$$

que se comparan bien con las diferencias experimentales

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 95 \pm 1$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 45 \pm 1$$

Con la misma elección de parámetros, la estructura fina del botonio resulta

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 27 \pm 1$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 19 \pm 1$$

para el primer conjunto de estados tripletes, cuyo valor experimental es

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 30 \pm 1$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 20 \pm 1$$

y para el segundo de ellos

$${}^3P_2' - {}^3P_1' = 19 \pm 1$$

$${}^3P_1' - {}^3P_0' = 14 \pm 1$$

que también están en buen acuerdo con el valor experimental

$${}^3P_2' - {}^3P_1' = 20 \pm 1$$

$${}^3P_1' - {}^3P_0' = 15 \pm 1$$

La confrontación con los valores de la estructura fina proporcionados por otros autores es bastante favorable (figura 10'), salvo en el caso de Gupta⁽¹³⁾ (que solamente permite intercambios vectoriales y escalares), el cual obtiene resultados idénticos a los nuestros. Sin embargo, en su cálculo las correcciones dependientes del espín están determinadas

Figura 10'

	a_c	b_c	a_b	b_b	a_s	b_s
Exp.	34.8 ± 1.3	9.9 ± 0.4	12.7 ± 1.3	2.2 ± 0.9	9.4 ± 2.5	1.4 ± 1.5
QD 15*	34.8	10.1	12.4	2.2	9.8	1.9
QD 18	38	4.4	14	1.7	11	1.3
QD 19	35	8	10	2.1	8	1.6
QD 13	36	10.6	11	2.3	9	1.8
QD 20	33	12.2	17	5.3	15	4.2
QD 21	27	6.5	6.8	3.0	6.5	2.1
QD 22	37	6.8	17	3.0	11	1.8
C) 23	34	8.0	13	3.1	11	2.4
C) 24	38	7.7	17	3.1	12	2.2
C) 25	24	10.3	14	2.5	10	1.8

Tabla de comparación de los parámetros a y b involucrados en la fórmula $E(^3L_J) = \langle E \rangle + a \langle L \cdot S \rangle + b \langle S_{12} \rangle$, en donde a y b son los valores medios del potencial LS y tensorial respectivamente. Las dos primeras columnas se refieren al triplete F del charmonio y las que siguen a los dos tripletes del botonio. Las energías están expresadas en MeV.

* México

perturbativamente a través de las eigenfunciones del hamiltoniano

$$(p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} - \kappa(r)/r + Kr$$

en donde $\kappa(r)$ es una función muy complicada determinada hasta términos del orden α_s^2 . Es un tema abierto a la investigación el que una aproximación de este tipo, en donde los términos cinéticos se encuentra desacoplados de los potenciales, represente el límite no relativista correcto de una ecuación de Dirac para dos fermiones en interacción.

La primera conclusión que obtenemos de nuestros datos es que se reproduce correctamente la estructura fina del quarkonio si los valores medios de los potenciales dependientes del espín son del orden del 10 % de los asociados con el potencial central. Estos valores son grandes para una estimación perturbativa adecuada, sobre todo en el estado 3P_0 del charmonio en donde las correcciones son mayores.

Una vez determinada la estructura fina del quarkonio, la cuestión es dilucidar el carácter tensorial del potencial asociado. Este problema se resuelve calculando el límite estático de los diversos potenciales que se derivan a través del elemento de matriz

$$M = \langle u\bar{u} \rangle \langle v\bar{v} \rangle S \langle q^2 \rangle + \langle u\gamma^\mu \bar{u} \rangle \langle v\gamma_\mu \bar{v} \rangle V \langle q^2 \rangle + \dots$$

en donde los términos S, V, ..., corresponden a los intercambios escalar, vectorial, etc. La expresión explícita de los potenciales es como sigue⁽³⁴⁾

Escalar

$$V_c(r) = \frac{-g_s^2}{r}$$

$$V_{LS}(r) = \frac{-g_s^2}{2m^2 r^3}$$

Pseudoescalar

$$V_T(r) = \frac{-g_e^2}{4 m^2 r^3}$$

Vector

$$V_C(r) = \frac{g_V^2}{r}$$

$$V_{LS}(r) = \frac{3 g_V^2}{2 m^2 r^3}$$

$$V_T(r) = \frac{-3g_V^2}{12 m^2 r^3}$$

Tensor

$$V_T(r) = \frac{-3g_T^2}{12 m^2 r^3}$$

Vector - Tensor

$$V_T(r) = \frac{-3 g_T g_V}{6 m^2 r^3}$$

El análisis de los potenciales puede realizarse introduciendo la siguiente notación

$$C_{int,ext} \equiv (1 + 4g_T/3g_V)_{int,ext}$$

$$T_{int,ext} \equiv [(1 + g_T/g_V)^2 + (g_P/g_V)^2]_{int,ext}$$

en donde el intercambio pseudoescalar seguía el mismo tipo de comportamiento y un intercambio escalar permitía cierta disminución del momento cromomagnético.

En el otro extremo, cuando $C_{int} = 0.68$, tenemos $C_{ext} = 0.2$, $T_{int} = 0.55$, $T_{ext} = 0.00$, lo que da lugar a

$$\begin{aligned} |c_{g_T/g_V}|_{int} &= 0.24 & |c_{g_P/g_V}|_{int} &= 0.03 \\ |c_{g_T/g_V}|_{ext} &= 0.60 & |c_{g_P/g_V}|_{ext} &= 0.16 \end{aligned}$$

Aquí tenemos una situación en que en la región externa se tienen acoplamientos pseudoescalar y de momento cromomagnético considerables, mientras que en la región interna ambos son casi nulos. En este caso, también se precisa de las contribuciones pseudoescalar y anómala, aunque su peso relativo difiere respecto de la situación anterior. Sin embargo, un hecho evidente es que en cualquiera de estas situaciones el factor de peso C_{int} , que mide el momento cromomagnético de los quarks, debe tener un valor alrededor de 0.6. Este valor es consistente con el valor determinado por Hulth y Snellman⁽²⁵⁾, quienes calculan las eigenfunciones asociadas al potencial central que hemos empleado en este trabajo y encuentran concordancia con el experimento si el momento μ del quark c es $\mu \sim 0.6$.

Por lo tanto, una segunda conclusión es que, aún si el peso relativo de los distintos acoplamientos no está unívocamente determinado, la existencia de un momento cromomagnético anómalo, así como la presencia de un intercambio pseudoescalar, resultan cruciales en la correcta determinación de la estructura fina del quarkonio⁽²⁵⁾.

En los cálculos hemos tomado en cuenta solamente los términos potenciales y no los términos de contacto, proporcionales a la función δ de Dirac y a la constante de acoplamiento, dado que no conocemos el comportamiento de esta última en el origen. Ya mencionamos que si suponemos que ocurre el fenómeno de la libertad asintótica, deberíamos esperar que estos términos fuesen nulos. Si a pesar de ello insistimos en mantener el término usual

Pueden vislumbrarse diversas situaciones:

- i) $C_{int} = T_{int} = 1$, que implica la ausencia de efectos pseudoescalares y de momento magnético anómalo en la región interna.
- ii) $C_{int} \sim 2/3$, significa que en la región interna, además de un gluón, se intercambia un escalar.
- iii) $C_{ext} = T_{ext} = 1$, corresponde a que el potencial confinante sea un vector.
- iv) $C_{ext} = -1/3$, $T_{ext} = 0$, da lugar a que el potencial confinante se comporte como un escalar
- v) $C_{int} = 0$, se interpreta como la cancelación del potencial interno L.S. Esta suposición es consistente con el trabajo de Isgur⁽⁸⁾ en el que se muestra que si la interacción espín-órbita es depreciable, se obtienen resultados correctos en las predicciones de las masas de los bariones.
- vi) Si los coeficientes toman valores arbitrarios, entonces debe aceptarse la aparición de un momento anómalo y de una partícula pseudoescalar.

Según la figura (10), excepto el factor asociado al intercambio tensorial externo, existe un intervalo más o menos estrecho de los factores de peso en el que es posible realizar el ajuste de la estructura fina. Tenemos dos situaciones extremas para los valores relativos de los acoplamientos tensoriales y pseudoescalares respecto del vectorial. Cuando $C_{int} = 0.50$, entonces $C_{ext} = 0.50$, $T_{int} = 0.25$ y $T_{ext} = 3.2$. En este caso, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} |(g_T/g_V)|_{int} &= 0.38 & |(g_P/g_V)|_{int} &= 0.37 \\ |(g_T/g_V)|_{ext} &= 0.38 & |(g_P/g_V)|_{ext} &= 1.68 \end{aligned}$$

en donde vemos que existe un acoplamiento cromomagnético anómalo de igual intensidad en la región interna y en la externa; por otro lado, ocurre un intercambio pseudoescalar intenso en el exterior y débil en el interior. Este resultado es compatible con aquellos derivados del análisis de las colisiones de nucleones polarizados.

proveniente del intercambio de una partícula vectorial, podemos obtener un buen ajuste del espectro de los estados S del charmonio y el botonio cambiando las constantes de acoplamiento a $a_s = 0.58$ y 0.45 , respectivamente.

Respecto de los estados P, se mantiene correcta la relación

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 96 \pm 2$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 45 \pm 2$$

para el charmonio y

$${}^3P_2 - {}^3P_1 = 30 \pm 1$$

$${}^3P_1 - {}^3P_0 = 20 \pm 1$$

para el primer triplete del botonio, pero se altera un tanto para el segundo triplete

$${}^3P_2' - {}^3P_1' = 36 \pm 1$$

$${}^3P_1' - {}^3P_0' = 26 \pm 1.$$

La correcta determinación de la parte del espectro independiente del espín, así como una estructura fina razonable, hacen ver que la interacción espín-espín no es determinante en el esquema hemos desarrollado. La misma situación se presenta en los modelos alternativos del quarkonio.

Pasemos a la cuestión de las correcciones provenientes de la modificación relativista de la masa. El cálculo variacional de éstas condujo a divergencias en los valores de las energías y solamente se pudo realizar la estimación perturbativa. La figura (12) nos muestra el gran cambio que sufre el valor medio del operador $-p^4$ con el incremento del controvertido factor de peso C_{int} . Observamos que la corrección es relativamente pequeña si el factor $C_{int} \leq 0.3$; en este último caso, el ajuste de la estructura fina no es muy bueno, aunque comparable con los realizados por otros autores de acuerdo con la figura (10). En cambio, un valor de C_{int} que ajuste bien la estructura fina conduce a valores desmesuradamente altos de la corrección a la energía cinética, mayores que aquellos que posibilita el operador $(p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ y esto nos indica un par de cosas: por un lado, que es peligroso considerar esta expresión solamente hasta términos del orden

Fig. 12

Variación de la corrección ρ^* versus los valores del coeficiente L-S interno.

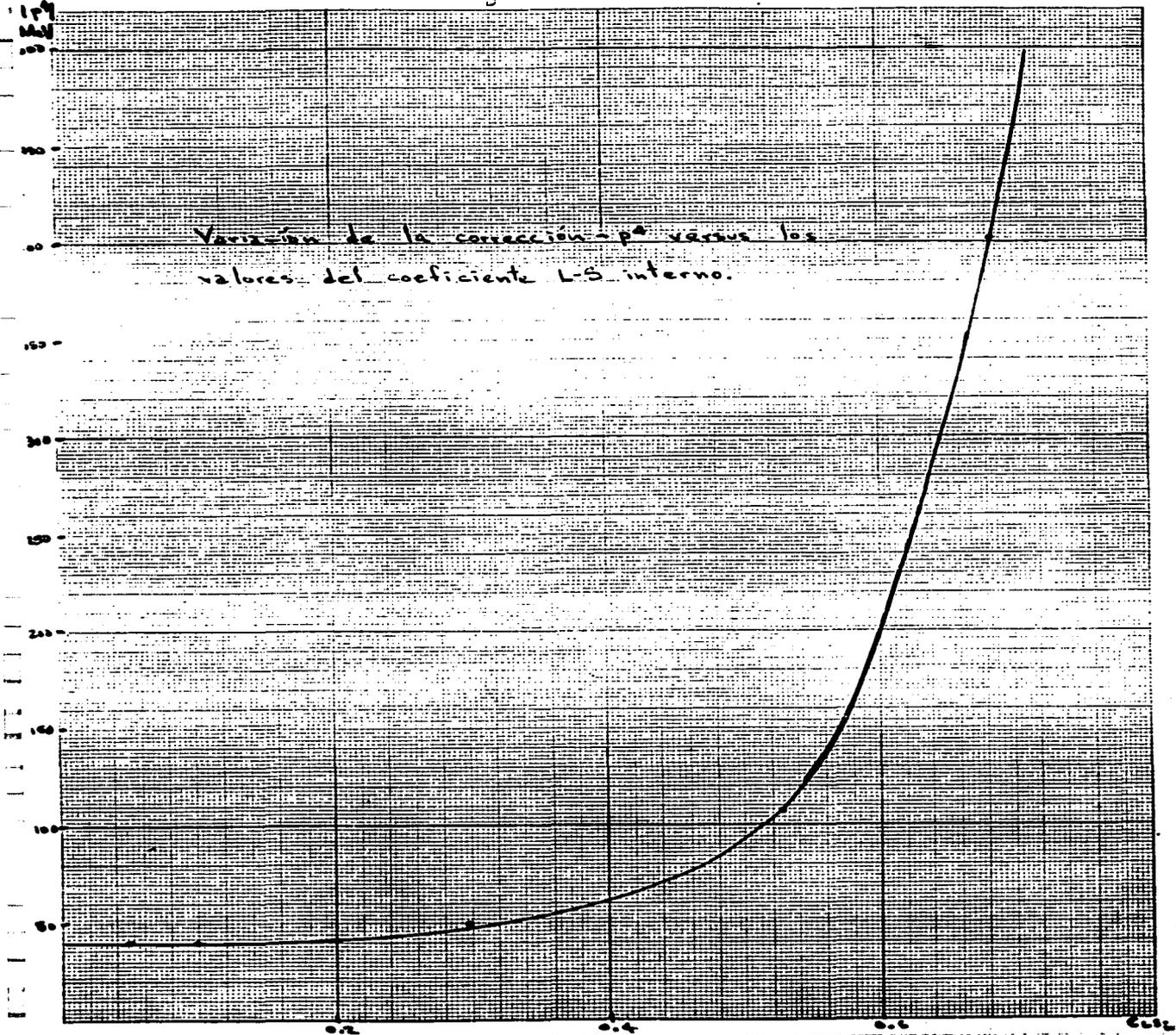


TABLA VII

ESTADOS 3S_1 DEL CHARMONIO

$\langle E \rangle$	$\langle E_{\text{pert}} \rangle$	$\langle \delta \rangle$	$\langle p^4 \rangle$	$\langle \text{Darwin} \rangle$
3097	3093	201	-47	-171
3681	3605	130	-67	-147
4103	3976	111	-96	-148
4452	4290	102	-129	-151

ESTADOS 3S_1 DEL BOTONIO

$\langle E \rangle$	$\langle E_{\text{pert}} \rangle$	$\langle \delta \rangle$	$\langle p^4 \rangle$	$\langle \text{Darwin} \rangle$
9460	9459	206	-39	-172
10025	9995	88	-27	-91
10363	10323	67	-30	-79
10637	10592	58	-33	-70
10879	10826	53	-40	-66
11104	11041	50	-45	-69

TABLA VIII

ESTADOS 3P_1 DEL CHARMONIO

$\langle E \rangle$	$\langle E_{\text{pert}} \rangle$	$\langle \delta \rangle$	$\langle p^4 \rangle$	$\langle \text{Darwin} \rangle$
3401	2676	0	-343	-153
3406	3398	0	-36	-40
3541	3516	0	-24	-31

ESTADOS 3P_1 DEL BOTONIO

$\langle E \rangle$	$\langle E_{\text{pert}} \rangle$	$\langle \delta \rangle$	$\langle p^4 \rangle$	$\langle \text{Darwin} \rangle$
9801	9818	0	-15	-25
9918	9878	0	-10	-19
9937	9925	0	-8	-15

ESTADOS $^3P_1'$ DEL BOTONIO

$\langle E \rangle$	$\langle E_{\text{pert}} \rangle$	$\langle \delta \rangle$	$\langle p^4 \rangle$	$\langle \text{Darwin} \rangle$
10248	10166	0	-23	-30
10260	10221	0	-16	-23
10284	10260	0	-13	-20

v^2/c^2 , aunque, repetimos, los cálculos de Gupta utilizando la expresión completa de la energía cinética, sugieren que el espectro de energías cambia poco con las correcciones cinéticas. Por otro lado, la figura (12) también indica que aún la estimación perturbativa de este tipo de correcciones conduce a resultados muy diferentes ante variaciones pequeñas del potencial de interacción.

En la tabla VII aparecen los valores medios perturbativos de la correcciones que no hemos determinado variacionalmente. A pesar de que cada corrección es bastante grande, su superposición más o menos se cancela y se mantiene una estructura espectral razonable, sobre todo en el botonio, como puede observarse en las figura (13). Hay que notar que la energía asociada con el factor $\sim(p \cdot r)^2/r^3$ es grande; sin embargo, una adecuada redefinición de los factores de peso del potencial dependiente del espín, permitirían suponer que esta parte del hamiltoniano ya está considerada en el cálculo. La estructura fina es mucho más sensible ante estas bruscas correcciones y su alteración se puede observar en la tabla VIII.

Una alternativa de cálculo interesante puede provenir del empleo del potencial no singular desarrollado por Gupta⁽¹⁷⁾ en la aproximación en que el término p^2/p_0^2 es considerado pequeño, en comparación con p^2/m^2 , obteniendo potenciales dependientes del espín del tipo Yukawa $\sim e^{-mr}/r$ (en vez de $\sim r^{-3}$); el cálculo exacto (variacional o numérico) de este tipo de interacción, así como de la expresión completa de la energía cinética, nos proporcionaría una adecuada comparación entre las diversas formas de intercambio de partículas propuestas para los quarks.

Conclusiones

Según hemos visto, es posible obtener una muy buena estimación de la estructura fina del charmonio y el botonio si suponemos que los quarks pueden desarrollar un momento cromomagnético anómalo y ocurre el intercambio de quirales entre ellos. La aparición del momento cromomagnético puede interpretarse

como debido a la presencia de partículas escalares similares a los modos colectivos en el interior de los superconductores o, tal vez, debido a la existencia de una estructura interna de los quarks. También se puede especular en torno a la modificación del vacío cuántico que presencia un observador en movimiento orbital (i.e., acelerado) y que podría dar lugar al momento anómalo (Hacyan et al., 1988). En un esquema aparte, el intercambio de quirales quizás podría interpretarse como un intercambio de piones. Cualquiera que sea la interpretación, el resultado esencial es que la estructura fina en el quarkonio se reproduce correctamente si en el interior de los hadrones se realiza el mismo tipo de intercambios no perturbativos que los asociados con las correlaciones de espines de las partículas polarizadas.

De hecho, la inadecuación de un cálculo perturbativo en el quarkonio se muestra en los valores medios de las correcciones relativistas, los cuales son del mismo orden de magnitud que el valor medio del hamiltoniano no perturbado. Sin embargo, según nuestras estimaciones, el cálculo perturbativo en el botonio podría tener significado, mientras que en el charmonio su empleo es bastante dudoso.

También hacemos ver que el modelo involucra velocidades más altas de las estimadas usualmente, lo cual proviene de la íntima relación (consecuencia directa de la realización física del teorema del virial) existente entre la velocidad y la magnitud de la constante de acoplamiento fuerte o con aquella asociada con el confinamiento de la bolsa. El alto valor de la velocidad parece no influir en la correcta determinación del espectro. Esta última aseveración puede no ser concluyente y tiene sentido una determinación del espectro del quarkonio basada en una ecuación relativista para dos partículas interactuantes, problema que no ha sido resuelto hasta la fecha de una manera clara y que nos permitiría aprender sobre las fuerzas entre los quarks con más certeza que la que poseemos hasta ahora.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO III.

1. Review of Particle Properties, Phys. Lett. 170B (1984)
2. Lee, T.D. "Particle Physics and Introduction to Field Theory" Harwood Acaden. Pub., Chur, 1981.
3. Leader E., Predazzi E. "An Introduction to Gauge Theories and the New Physics" Cambridge University Press 1982.
4. Rosner J.L., Jour. de Physique 46 (1985) C2-77
5. Eichten et al, Phys. Rev. D17 (1978) 3090
Phys. Rev. D21 (1980) 203
6. Martin A., Phys. Lett. 67B (1977) 330
7. Grosse H., Phys. Lett. 68B (1977) 343
8. Isgur N.,Karl G., Phys. Rev. D18 (1978) 4187
9. Quigg C.,Rosner J.L., Phys. Rep. 96 (1979) 167
10. Quigg C., "Theories de Gauge en Physique des Hautes Energies", North- Holland Pub. Co., Amsterdam, 1983.
11. Mc. Donald, J.K.L., Phys. Rev. 43 (1933) 830
12. Bucha"ller W., Tye S.-H. H., Phys. Rev. D24 (1981) 132
13. Gupta S.N., Radford S.F., Phys. Rev. D25 (1982) 2690
Gupta S.N., Radford S.F., Repko W.W., Phys. Rev. D26 (1982) 3305
Gupta S.N., Radford S.F., Phys. Rev. D22 (1985) 781
14. Martin A., Phys. Lett. 100B (1981) 511
15. Gupta S.N., Radford S.F., Repko W.W., Phys. Rev. D31 (1985) 160, Phys. Rev. D34 (1986) 201
16. Moreno. M., Villarreal C. Preprint IFUNAM (1988)
17. Powell J.L., Craseman B., "Quantum Mechanics", Ed. Addison - Wesley, 1960.
18. Eichten E., Feinberg F.L., Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1205
Phys. Rev. D23 (1981) 2724
19. Bucha"ller W., Phys. Lett. 112B (1982) 479
20. Mc. Clary R., Byers N., Phys. Rev. D28 (1983) 1692
21. Moxay P.,Rosner J., Phys. Rev. D28 (1983) 1132
22. Bander et al., Phys. Rev. D29 (1984) 2038
23. Carlson J., Kogut J., Pandharipande V.R., Phys. Rev. D28 (1983) 2807

24. Crater H., Van Alstine P., Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1527
25. Grotch et al., "Proceedings of the XXII International Conference on High Energy Physics", Leipzig, 1984.
26. Kogut J., Parisi G., Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1089
27. Berestetskii V.B., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P., "Teoría Cuántica Relativista", Ed. Reverté, 1971
28. Landau L., Lifshitz E.M., "Teoría Clásica de los Campos", Ed. Reverté, 1973
29. Bethe H.A., Salpeter E.E., "Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms", Springer-Verlag, Berlin, 1957.
30. Sapirstein J., Phys. Scripta 38 (1987) 801
31. Richardson J.L., Phys. Lett. 62B (1979) 272
32. Landau L., Lifshitz E.M., "Mecánica Cuántica (Teoría no Relativista)", Ed. Reverté, 1967
33. Messiah A., "Quantum Mechanics" Vol. II, North-Holland Pub. Co., 1966.
34. Wong Y., Nucl. Phys. 55 (1964) 212
35. Avilez C., Cocho G., Moreno M., Juregui R., Villarreal C. "Proceedings of the XXIII International Conference on High Energy Physics", Berkeley, Cal., World Scientific, 1984.
36. Hulth G., Snellman H., Phys. Rev. D24 (1981) 2978
37. Gupta S.N., Phys. Rev. D35 (1987) 1736

APENDICE I

PROGRAM ENCANTO

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (NDIM=50, NDIM2=NDIM*NDIM, NDIM3=28,
*          NDIMA=(NDIM*NDIM+NDIM)/2, NDIM5=5*NDIM,
*          UNO=1.D00,CERO=0.D0)

DIMENSION C(NDIM2),TRID(NDIM2),TRMA(NDIM2),TRCE(NDIM2),
*          TRCI(NDIM2),TRAR(NDIM2),FACT(0:28),PAR(NDIM2),
*          TRCU(NDIM2),CIUNO(NDIM2),CIDOS(NDIM2),NF(NDIM),
*          CITRE(NDIM2),ORCOR(NDIM2),ORCORR(NDIM2),NE(NDIM),
*          HMTX1(NDIM2),HMT(NDIMA),A(NDIMA),E(NDIM),EN(NDIM),
*          STO(NDIM2),ORTIN(NDIM2),V1(NDIM2),PSI(NDIM),
*          W(NDIM5),NM(NDIM),KP(NDIMA),LP(NDIM),PAR2(NDIM2),
*          LB(NDIM),OCNUM(NDIMA),CDMTX(NDIM2),TRIDD(NDIMA),
*          C1(NDIM,NDIM),JOTA(6),TENLS(6),AH(6),DN(NDIM),RM(NDIM),
*          RV(NDIM),ALFA(NDIM),VJ(NDIM2),DN2(NDIM),
*          TRP4(NDIM2),TRP3(NDIM2),TRP2(NDIM2),TRP1(NDIM2),
*          TRP0(NDIM2),TRR4(NDIM2),PL(NDIM),ECIN(NDIM2),
*          ECIR(NDIM2),VCEN(NDIM2),VLS(NDIM2),VSS(NDIM2),
*          VTEN(NDIM2),B1(NDIM),
*          CTUNO(NDIM2),CTDOS(NDIM2),CTTRE(NDIM2),DARW(NDIM2)

OPEN(UNIT=1,FILE='UPSI.DAT',STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=2,FILE='JOTAPSI4.DAT',STATUS='NEW')

```

LECTURA DE PARAMETROS DEL SISTEMA

```

READ(1,*) NMX,AOPT,BOPT
READ(1,*) AMASSC1,AMASSC2,AMASSB1,AMASSB2
READ(1,*) Q1,Q2,CAPPAC,CAPPAB
READ(1,*) BAG,ENEC,ENEB
READ(1,*) L,MS
READ(1,*) INM
READ(1,*)(NM(J),J=1,INM)
READ(1,*) IE
READ(1,*) NV1
READ(1,*) IORD
READ(1,*) INF

READ(1,*) H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7
READ(1,*) P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10

WRITE(2,*) ' NMX=' ,NMX
WRITE(2,*) ' AOPT=' ,AOPT
WRITE(2,*) ' BOPT=' ,BOPT

```

```

FSC=.00729720D0
PI=3.141592653589793D0

```

```
NEM1=NM(1)
```

```

DO J=1,NDIM
  KP(J)=(J*J-J)/2
END DO

```

```

DO J=1,NDIM
  LB(J)=(J-1)*NMX
END DO

```

Construccion de los orbitales de Slater

CALL ORBITAL(AOPT,BOPT,NMX,INM,NM,NP,ALFA,C,LB)

Calculo de las integrales

CALL INTEGR(NP,NMX,ALFA,TRAR,TRMA,TRCE,TRCI,TRCU,TRID,
* TRR4,DN)

Ortonormalizacion de los orbitales

CALL SCHMIDT(NMX,C,TRID,LB,INF)

Coefficientes Clebsch-Gordan

```
TENLS(1)=-2.DO*DFLOAT(MS*MS+MS)           ! COEF.TENSORIAL J=0
TENLS(2)= 2.DO*(3.DO-DFLOAT(MS*MS+MS))     ! COEF.TENSORIAL J=1
TENLS(3)= 2.DO*(9.DO/5.DO-DFLOAT(MS*MS+MS))! COEF.TENSORIAL J=2
TENLS(4)= TENLS(1)
TENLS(5)= TENLS(2)
TENLS(6)= TENLS(3)
JOTA(1)= 0
JOTA(2)= 1
JOTA(3)= 2
JOTA(4)= JOTA(1)
JOTA(5)= JOTA(2)
JOTA(6)= JOTA(3)
```

95 CONTINUE

```
PRINT*,'CLS(1/R),CT(1/R),CLS(R),CT(R)'
READ(5,*) CLS3,CT3,CLS1,CT1
WRITE(2,*) 'CLS3=',CLS3,'CT3=',CT3,
* 'CLS1=',CLS1,'CT1=',CT1
```

```
DO 91 ICA=1,6
IF (ICA.LE.3) THEN
  AMASS1=AMASSC1
  AMASS2=AMASSC2
  CAPPAC=CAPPAC
  ENER=ENEC
  Q=Q1
ELSE
  AMASS1=AMASSB1
  AMASS2=AMASSB2
  CAPPAC=CAPPAB
  ENER=ENEB
  Q=Q2
```

```
ENDIF
PRINT*,'-----'
WRITE(2,*) 'MASA 1 =',AMASS1
WRITE(2,*) 'MASA 2 =',AMASS2
PRINT*,'MASA 1 =',AMASS1
PRINT*,'MASA 2 =',AMASS2
TENLSI=TENLS(ICA)
JOTAI= JOTA(ICA)
```

```
WRITE(2,*) 'TENLS(' ,ICA,')=' ,TENLSI
WRITE(2,*) ' JOTA(' ,ICA,')=' ,JOTAI
```

```

PRINT*, '-----'
CALL HMTX(PI,NMX,L,MS,JOTAI,TENLSI,ALFA,NP,C,
* TRAR,TRMA,TRCE,TRCI,TRCU,TRID,TRR4,HMT,LB,
* ECIN,ECIR,VCEN,VLS,VTEN,VSS,STOH,
* AMASS1,AMASS2,AMU,AMU2,CAPPA,BAG,BAG2,
* CLS3,CLS1,CT3,CT1,
* AMASS12,DARW,SPIN,S1S2,
* H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7)

```

```
CALL HQRII1 (NMX,1,NMX,IORD,HMT,E,NMX,V1,ILL)
```

```

PRINT*, 'ILL=' , ILL
DO J=1,IE
EN(J)= (E(J)+AMASS1+AMASS2)*1000+ENER
PRINT*, '-----'
PRINT*, 'ENERGIA(' , J, ')=' , EN(J), ' MeV'
PRINT*, '-----'
WRITE(2,*) 'ENERGIA(' , J, ')=' , EN(J)
END DO

```

```

PRINT*, 'ESCOGE UN ESTADO '
READ(5,*)NEX
WRITE(2,*) 'NO. DE EXCITACION = ' , NEX
AH(ICA)=EN(NEX)

```

```

CALL MEDIUM (NMX,NEM1,LB,C,PSI,V1,B1,DN,PI,FSC,
* CAPPA,NEX,L,BAG2,AMASS1,AMASS2,AMASS12,AMU,AMU2,Q,ENER,
* TRID,ECIN,TRCU,TRAR,VLS,VSS,VTEN,ECIR,SPIN,S1S2,
* DARW,TRCE,TRCI,STOH,E,
* P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,INF)

```

```

PRINT*, '
PRINT*, 'CONTINUO ? OPRIME UN NUMERO Y RETURN'
PRINT*, '-----'
READ(5,*) CONT

```

```

IF (ICA.GT.1.AND.ICA.LE.4) THEN
EDIF=(AH(ICA)-AH(ICA-1))
PRINT*, '*****'
PRINT*, 'DIFERENCIA DE ENERGIA=' , EDIF, ' MeV'
PRINT*, '*****'
WRITE(2,*) '*****'
WRITE(2,*) 'DIFERENCIA DE ENERGIA=' , EDIF, ' MeV'
WRITE(2,*) '*****'
ENDIF

```

```

IF(NEX.GT.NV1) THEN
PRINT*, 'EL EIGENVECTOR ' , J, ' NO FUE CALCULADO'
GO TO 92
END IF

```

```

91 CONTINUE
92 CONTINUE
   PRINT*,
   PRINT*,
   PRINT*,-----
   PRINT*, CONTINUA LA OPTIMIZACION CON LA MISMA BASE.
   PRINT*,
   PRINT*,
   GO TO 95

```

END

```

SUBROUTINE ORBITAL(AOPT,BOPT,NMX,INM,NM,NP,ALFA,C,LB)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PARAMETER (NDIM=50,NDIM2=NDIM*NDIM,CERO=0.D0,UNO=1.D0)
DIMENSION NM(NDIM),NP(NDIM),ALFA(NDIM),C(NDIM2),LB(NDIM),
*          NE(NDIM)

```

```

NMSUM=1
NMRRES=0
DO 21 J=1,INM
NMRRES=NMRRES+NM(J)
IF(J.GT.1)NMSUM=NMSUM+NM(J-1)
DO 21 I=NMSUM,NMRRES
  NP(I)=J
  NE(I)=I-NMSUM+1
  ALFA(I)=AOPT*(BOPT**NE(I))

```

21 CONTINUE

```

DO 20 J=1,NMX
DO 20 I=1,NMX
  IJ=I+LB(J)
  IF (I.EQ.J) THEN
    C(IJ)=UNO
  ELSE
    C(IJ)=CERO
  ENDIF

```

20 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE SCHMIDT(NMX,C,TRID,LB,INF)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PARAMETER (NDIM=50,NDIM2=NDIM*NDIM,CERO=0.D0,UNO=1.D0)
DIMENSION TRID(NMX,*),C(NMX,*),LB(NDIM),
*          ORCOR(NDIM2),ORCORR(NDIM2)

```

C NORMALIZATION

```

HNRMI=CERO
DO 23 J1=1,NMX
HNRMI=HNRMI+(C(J1,1)**2)*TRID(J1,J1)
DO 23 J2=1,J1-1
  JB=J2+J1FAC
  HNRMI=HNRMI+2.D0*C(J1,1)*C(J2,1)*TRID(J2,J1)
23 CONTINUE

```

```
FNOR=UNO/DSQRT(HNRMI)
DO 24 JN=1,NMX
  C(JN,1)=FNOR*C(JN,1)
```

```
24 CONTINUE
```

```
DO 31 N=2,NMX
  DO 90 M=1,N-1
    DO 90 L=1,NMX
      LM=L+LB(M)
90    ORCOR(LM) = CERO
      DO 91 M=1,N-1
        DO 91 K=1,NMX
          DO 91 L=1,NMX
            NM=N + LB(M)
            ORCOR(NM)=ORCOR(NM)+C(K,M)*TRID(K,L)*C(L,N)
91    CONTINUE
      DO 115 I=1,NMX*NMX
        ORCORR(I) = CERO
115    CONTINUE
      DO 120 I=1,NMX
        IN=I + LB(N)
        DO 120 M=1,N-1
          NM=N + LB(M)
          ORCORR(IN)=ORCORR(IN)+C(I,M)*ORCOR(NM)
120    CONTINUE
      DO 125 I=1,NMX
        IN=I+(N-1)*NMX
        C(I,N)=C(I,N)-ORCORR(IN)
125    CONTINUE

      HNRMI = CERO
      DO 30 J1=1,NMX
        HNRMI=HNRMI+(C(J1,N)**2)*TRID(J1,J1)
      DO 30 J2=1,J1-1
        HNRMI = HNRMI+2.D00*C(J1,N)*C(J2,N)*TRID(J1,J2)
30    CONTINUE
1000  FNOR=UNO/DSQRT(HNRMI)
      DO 33 J=1,NMX
        C(J,N)=C(J,N)*FNOR
```

```
33 CONTINUE
32 CONTINUE
31 CONTINUE
```

```
IF (INF.EQ.1) THEN
```

```
DO J=1,NMX
DO K=1,NMX
```

```
PRINT*, 'TRID(',J,K,')=',TRID(J,K)
END DO
END DO
ELSE
CONTINUE
END IF
```

```
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE INTEGR(NP,NMX,ALFA,TRAR,TRMA,TRCE,TRCI,  
* TRCU,TRID,TRR4,DN)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H ,O-Z)  
PARAMETER(NDIM=50,NDIM2=NDIM*NDIM,NDIM3=28,UNO=1.D00)  
DIMENSION TRAR(NDIM2),TRMA(NDIM2),TRCE(NDIM2),  
* TRCI(NDIM2),TRCU(NDIM2),TRID(NDIM2),  
* PAR(NDIM2),FACT(0:28),  
* NP(NDIM),DN(NDIM),ALFA(NDIM),TRR4(NDIM2)
```

```
FACT(-2)=0.DO  
FACT(-1)=0.DO  
FACT(0)=UNO
```

```
DO 1 J=1,25  
FACT(J)=DFLOAT(J)*FACT(J-1)  
1 CONTINUE
```

```
DO 4 I=1,NMX  
N=NP(I)+NP(I)+1  
EXP=(ALFA(I)+ALFA(I))**N  
DN(I)=DSQRT(EXP/FACT(NP(I)+NP(I)))  
4 CONTINUE
```

```
DO 2 J=1,NMX  
DNJ=DN(J)  
DO 2 I=1,NMX  
DNI=DN(I)
```

```
IJ=I+(J-1)*NMX  
PAR(IJ)=ALFA(I)+ALFA(J)  
TRAR(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J)+1)/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)+2))  
TRR4(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J)-4)/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)-3))  
TRMA(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J)-3)/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)-2))  
TRCU(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J)-1)/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)))  
TRCE(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J)-2)/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)-1))  
TRID(IJ)=DNI*DNJ*FACT(NP(I)+NP(J))/(PAR(IJ)**(NP(I)+NP(J)+1))
```

```
2 CONTINUE
```

```
RETURN  
END
```

```
SUBROUTINE HMTX(PI,NMX,L,MS,JOTAI,TENLSI,ALFA,NP,C,  
* TRAR,TRMA,TRCE,TRCI,TRCU,TRID,TRR4,HMT,LB,  
* ECIN,ECIR,VCEN,VLS,VLEN,VSS,STOH,  
* AMASS1,AMASS2,AMU,AMU2,CAPPA,BAG,BAG2,  
* CLS3,CLS1,CT3,CT1,  
* AMASS12,DARW,SPIN,S1S2,  
* H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7)
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
```

```
PARAMETER(NDIM=50,NDIM2=NDIM*NDIM,CERO=0.D0,  
* NDIMA=(NDIM*NDIM+NDIM)/2)
```

```

DIMENSION C(NDIM2),STOH(NDIM2),HMTX1(NDIM2),
* ALFA(NDIM),NP(NDIM),PL(NDIM),TRID(NDIM2),
* TRAR(NDIM2),TRMA(NDIM2),TRCE(NDIM2),LB(NDIM),
* TRCI(NDIM2),TRCU(NDIM2),TRR4(NDIM2),HMT(NDIM),
* CIUNO(NDIM2),CIDOS(NDIM2),CITRE(NDIM2),
* TRP4(NDIM2),TRP3(NDIM2),TRP2(NDIM2),TRP1(NDIM2),
* TRP0(NDIM2),ECIN(NDIM2),ECIR(NDIM2),VCEN(NDIM2),
* VLS(NDIM2),VSS(NDIM2),VTEN(NDIM2),
* CTUNO(NDIM2),CTDOS(NDIM2),CTTRE(NDIM2),DARW(NDIM2)

```

C Factores numericos del hamiltoniano

```

AMASS11=1.DO/(AMASS1*AMASS1)
AMASS22=1.DO/(AMASS2*AMASS2)
AMASS12=1.DO/(AMASS1*AMASS2)
AMASS31=1.DO/(AMASS1*AMASS1*AMASS1)
AMASS32=1.DO/(AMASS2*AMASS2*AMASS2)
AMU=(AMASS1+AMASS2)/(2.DO*AMASS1*AMASS2)
AMU2=(AMASS11+AMASS22)/8.DO
AMU3=(AMASS31+AMASS32)/8.DO
AMLSJ=(AMASS11+AMASS22+4.DO*AMASS12)/4.DO
BAG2=1.DO/(BAG*BAG)
SPIN=DFLOAT(MS*MS+MS)
ORBI=DFLOAT(L*L+L)
ALSJ=(DFLOAT(JOTAI*JOTAI+JOTAI)-ORBI-SPIN)/2.DO
S1S2=(SPIN-1.5DO)/2.DO

```

C Arreglos para calculo de energia cinetica

```

DO 4 I=1,NMX
N=NP(I)+NP(I)+1
EXP=(ALFA(I)+ALFA(I))*N
4 PL(I)=DFLOAT(NP(I)*NP(I)-NP(I))
CONTINUE

```

```

DO 3 I=1,NMX
PLI=PL(I)
DNPI=DFLOAT(NP(I))
ALFAI=ALFA(I)

```

```

DO 3 J=1,NMX
PLJ=PL(J)
DNPJ=DFLOAT(NP(J))
ALFAJ=ALFA(J)

```

IJ=I+LB(J)

C Energia cinetica no relativista

```

CIUNO(IJ)=(DNPJ*(DNPJ-1)+DNPI*(DNPI-1))*TRCE(IJ)/2.DO
CIDOS(IJ)=- (DNPI*ALFAI+DNPJ*ALFAJ)*TRCU(IJ)
CITRE(IJ)=(ALFAJ*ALFAJ+ALFAI*ALFAI)*TRID(IJ)/2.DO
TRCI(IJ)=CIUNO(IJ)+CIDOS(IJ)+CITRE(IJ)

```

C ENERGIA CINETICA RELATIVISTA:

TRP4(IJ)=((ORBI-PLI)*(ORBI-PLJ))*TRR4(IJ)

```

TRP3(IJ) = 2.D0*((ORBI-PLI)*ALFAJ*DNPJ
*          +(ORBI-PLJ)*ALFAI*DNPI)*TRMA(IJ)

TRP2(IJ) = (4.D0*ALFAI*ALFAJ*DNPI*DNPJ
*          -ALFAI*ALFAI*(ORBI-PLJ)
*          -ALFAJ*ALFAJ*(ORBI-PLI))*TRCE(IJ)

TRP1(IJ) = -2.D0*(ALFAJ*ALFAJ*ALFAI*DNPI
*          +ALFAI*ALFAI*ALFAJ*DNPJ)*TRCU(IJ)

TRP0(IJ) = -ALFAI*ALFAI*ALFAJ*ALFAJ*TRID(IJ)

ECIR(IJ) = TRP4(IJ) + TRP3(IJ) + TRP2(IJ) + TRP1(IJ) + TRP0(IJ)

```

C Potencial de Darwin

```

CTUNO(IJ) = (DNPJ*(DNPJ-1) + DNPI*(DNPI-1))*TRMA(IJ) / 2.D0
CTDOS(IJ) = -(DNPI*ALFAI + DNPJ*ALFAJ)*TRCE(IJ)
CTTRE(IJ) = (ALFAJ*ALFAJ + ALFAI*ALFAI)*TRCU(IJ) / 2.D0

DARW(IJ) = -0.5D0*AMASS12*CAPPA*
*          (-2.D0*(CTUNO(IJ) + CTDOS(IJ) + CTTRE(IJ))
*          + ORBI*TRMA(IJ))

```

C TERMINOS DEL HAMILTONIANO:

```

ECIN(IJ) = -AMU*(TRCI(IJ) - ORBI*TRCE(IJ))

VCEN(IJ) = -H1*CAPPA*TRCU(IJ) + H2*BAG2*TRAR(IJ)

VLS(IJ) = ALSJ*AMLSJ*(H1*CAPPA*CLS3*TRMA(IJ)
*          + H2*BAG2*CLS1*TRCU(IJ))

VTEN(IJ) = TENLSI*AMASS12*(3.D0*H1*CAPPA*CT3*TRMA(IJ)
*          + H2*BAG2*CT1*TRCU(IJ)) / 12.D0

VSS(IJ) = H2*BAG2*4.D0*AMASS12*S1S2*TRCU(IJ) / 3.D0

ECIR(IJ) = -AMU3*ECIR(IJ)

```

C HAMILTONIANO:

```

STOH(IJ) = ECIN(IJ) + VCEN(IJ) +
*          + H3*VLS(IJ) + H4*VSS(IJ) + H5*VTEN(IJ)
*          + H6*DARW(IJ) + H7*ECIR(IJ)

```

3 CONTINUE

C Calculo del hamiltoniano en base ortonormal

```

NNMX = NMX*NMX
DO 15 N=1, NNMX
HMIX1(N) = CERO

```

15

```

DO 20 J=1,NMX
DO 20 I=1,NMX
  IJ=I+LB(J)
DO 21 M=1,NMX
  MI = M + LB(I)
  MJ = M + LB(J)
  HMTX1(IJ) = HMTX1(IJ) + C(MI)*STOH(MJ)
21 CONTINUE
20 CONTINUE

```

```

DO 30 J=1,NMX
DO 30 I=1,J
  IJ=I+(J*J-J)/2
  HMT(IJ) = CERO
DO 30 M=1,NMX
  IM = I + LB(M)
  MJ = M + LB(J)
  ILJ=I+(J*J-J)/2
  HMT(ILJ)=HMT(ILJ)+HMTX1(IM)*C(MJ)
30 CONTINUE

```

```

RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MEDIUM (NMX,NEM1,LB,C,PSI,V1,B1,DN,PI,FSC,
* CAPPA,NEX,L,BAG2,AMASS1,AMASS2,AMASS12,AMU,AMU2,Q,ENER,
* TRID,ECIN,TRCU,TRAR,VLS,VSS,VTEN,ECIR,SPIN,S1S2,
* DARW,TRCE,TRCI,STOH,E,
* P1,P2,P3,P4,P5,P6,P7,P8,P9,P10,INF)

```

```

  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
  PARAMETER (NDIM=50,NDIM2=NDIM*NDIM,CERO=0.D0,UNO=1.D0)

```

```

  DIMENSION LB(NDIM),C(NDIM2),PSI(NDIM),V1(NDIM2),B1(NDIM),
* DN(NDIM),TRID(NDIM2),ECIN(NDIM2),TRCU(NDIM2),TRAR(NDIM2),
* VLS(NDIM2),VSS(NDIM2),VTEN(NDIM2),
* ECIR(NDIM2),DARW(NDIM2),TRCE(NDIM2),TRCI(NDIM2),
* E(NDIM),STOH(NDIM2)

```

```

C -----
C CALCULO DE LA FUNCION DE ONDA EN EL ORIGEN
C -----

```

```

DO K=1,NMX
  PSI(K)=CERO
END DO

```

```

DO 90 M=1,NMX
DO 90 J=1,NEM1

```

```

  JNE=J+LB(NEX)
  MNJ=M+LB(J)

```

```

  PSI(NEX)=PSI(NEX)+(C(MNJ)*V1(JNE))/DN(M)

```

```

  IF (INF.EQ.1) THEN

```

```

PRINT*, 'V(' , J , NEX , ') = ' , V1 ( JNE )
ELSE
CONTINUE
END IF
90 CONTINUE

```

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```

PSI2=PSI(NEX)*PSI(NEX)

69 DO 69 K=1,NMX
    B1(K)=CERO

DO 70 M=1,NMX
DO 70 K=1,NMX
    MN=M+LB(NEX)
    KM=K+LB(M)
    B1(K)=C(KM)*V1(MN)+B1(K)
70 CONTINUE

```

C CALCULO DE VALORES MEDIOS DE LAS OBSERVABLES

C

C Inicializacion

```

UNIT=CERO ! UNIDAD
CINE=CERO ! ENERGIA CINETICA
COUL=CERO ! POTENCIAL COULOMBIANO
ALIN=CERO ! POTENCIAL CONFINANTE
CIRE=CERO ! ENERGIA CINETICA RELATIVISTA
TREL=CERO ! TERMINO DE DARWIN
AVLS=CERO ! INTERACCION ESPIN-ORBITA
AVSS=CERO ! " ESPIN-ESPIN DISTANCIAS GRANDES
AVTE=CERO ! " TENSORIAL
ORIG=CERO ! FUNCION DE ONDA EN EL ORIGEN
EMED=CERO ! ENERGIA MEDIA

```

C Evaluacion de observables segun sus eigenvectores

```

DO 11 K=1,NMX
DO 11 M=1,NMX
    KM=K+LB(M)

UNIT=UNIT+B1(K)*TRID(KM)*B1(M)
CINE=CINE+B1(K)*ECIN(KM)*B1(M)
COUL=COUL+B1(K)*TRCU(KM)*B1(M)
ALIN=ALIN+B1(K)*TRAR(KM)*B1(M)
AVLS=AVLS+B1(K)*VLS(KM)*B1(M)
AVSS=AVSS+B1(K)*VSS(KM)*B1(M)
AVTE=AVTE+B1(K)*VTEN(KM)*B1(M)
CIRE=CIRE+B1(K)*ECIR(KM)*B1(M)
TREL=TREL+B1(K)*DARW(KM)*B1(M)

```

C Valor medio de la funcion de onda segun Schwinger

```

* ORIG=ORIG+AMASS1*(B1(K)*(CAPPA*TRCE(KM)
+ BAG2*TRID(KM))*B1(M))

```

C Energia media

EMED=EMED+B1(K)*STOH(KM)*B1(M)

11 CONTINUE

C Funcion de onda normalizada
ORUG=DFLOAT((L-1)*(L-2))*0.5D0*ORIG/(4.D0*PI)

C Terminos de energia proporcionales a la funcion de onda
* DELTA = 4.D0*PI*CAPPA*(P9*AMU2+2.D0*P8*AMASS12*S1S2/3.D0
+P10*SPIN*AMASS12/4.D0)* ORUG

C Energia media mas correcciones relativistas
* EPER=P1*EMED+P2*CIRE+P3*AVLS+P4*AVSS+P5*AVTEN+
P6*TREL+P7*DELTA

C Calculo de amplitud de aniquilacion leptonica
* GAMMA=(16.D0*PI*FSC*FSC*Q*Q)*(1.D0-4.D0*CAPPA/PI)
/(E(NEX)*E(NEX))

C Calculo de velocidad cuadratica media
VEL= CINE/(CINE+.25D0/AMU)

PRINT*, < 1 > =', UNIT
PRINT*, < T > =', CINE*1000
PRINT*, < -k/r > =', -CAPPA*COUL*1000
PRINT*, < r/a > =', BAG2*ALIN*1000
PRINT*, < V1s > =', AVLS*1000
PRINT*, < Vss > =', AVSS*1000
PRINT*, < Delta > =', DELTA*1000
PRINT*, < Vten > =', AVTE*1000
PRINT*, < F4 > =', CIRE*1000
PRINT*, < Darw > =', TREL*1000
PRINT*, < v*v > =', VEL
PRINT*,
PRINT*, < E > =', (EMED+AMASS1+AMASS2)*1000+ENER
PRINT*, < Eper > =', (EPER+AMASS1+AMASS2)*1000+ENER
PRINT*,
PRINT*,
PRINT*, PS12 =', PS12
PRINT*, < PS12 > =', ORUG
PRINT*, < GAMA > =', ORUG*GAMMA*1000000.D0

RETURN
END

C SUBROUTINE HQRII1 (N,IV,LV,IORD,AL,E,NVX,V,IER)

Title: module HQR111 to diagonalize dense real-symmetric matrices.

Abstract: An input real-symmetric matrix A is tridiagonalized by Householder's method. The eigenvalues of the tridiagonal matrix T are found by the QR method with origin shift. Optionally, the first NV eigenvectors of matrix T are determined by inverse iteration. The eigenvectors of matrix A are found by left-multiplying the eigenvectors of matrix T times the orthogonal matrix which brings A to tridiagonal form.

Environment: Standard Fortran 77.

Copyright by Yoshitaka Beppu, Ichizo Ninomiya, Zdenko A. Tomasic, Carlos F. Bunge and Annik Vivier Bunge, 1986.

Reference: A.V.Bunge and C.F.Bunge, Comput. Chem. 10, (1986).

Machine dependent parameter:

MACHEP is the smallest number which makes $1. + \text{MACHEP}$ greater than 1. For a VAX computer MACHEP=1.D-16.

Parameter dependent on user allocated central memory size:

NX=256 is the order of the largest matrix which can be handled.

Parameter values:

CERO,P5,UNO are trivial constants.
BOUNDR=1.D-6 is a small number involved in deciding whether two eigenvalues are close enough to be considered degenerate while computing eigenvectors.
GOLDRT GOLDRT=0.5D0*(SQRT(5.D0)-1.D0) is a golden random number between 0 and 1.

Argument values:

N order of the matrix to be diagonalized in a given run.
IV order of first wanted eigenvector. Default is IV=1.
LV order of last wanted eigenvector. If LV .LT. IV, no eigenvectors are calculated.
IORD controls the order of eigenvalues. IORD .GE. 0 will cause eigenvalues to be given in non-increasing order. IORD .LT. 0 specifies non-decreasing order.
AL real symmetric matrix of dimension at least $N1=(N*N+N)/2$ given in rowwise lower triangular form, viz., $AL(IJ)=AA(I,J)$ where $IJ=J+(I*I-1)/2$ and AA is the usual square symmetric form.
E array of dimension at least N holding the eigenvalues in the order determined by variable IORD.
NVX column dimension of array V in calling program. If V is a one dimensional array in the calling program, most likely NVX=N.
V array of dimension NVX*N which contains the J-th eigenvector in positions V(IJ) starting at $IJ=(J-1)*NVX+1$.
IER is a condition indicator.

Working arrays (for efficiency, working arrays must be local ones):

AU real symmetric matrix of dimension $NX1=(NX*NX+NX)/2$ given in rowwise upper triangular form, viz., $AL(IJ)=AA(I,J)$ where

IJ=IU(I)+J as explained below and AA is the usual square symmetric form.
 IL is a working array of dimension NX defined by $IL(I)=(I+I-1)/2$ so that the lower triangle matrix AL is indexed by $IJ=IL(I)+J$.
 IU is a working array of dimension NX defined by $IU(1)=0$ and $IU(I)=IU(I-1)+N-I+1$ for $I.GT.1$ so that the upper triangle matrix AU is indexed by $IJ=IU(I)+J$.
 W1-W5 are five working vectors each of dimension NX.

Accuracy:

for the largest (in absolute value) eigenvalues $E(I)$ which are not highly degenerate, machine accuracy for $MR(I)$,
 $MR(I) = MODR(I)/E(I)$
 where MODR is the modulus of the residual vector $R(I)$,
 $R(I) = (A*V)(I) - E(I)*V(I)$,
 and $V(I)$ denotes the I-th eigenvector. Up to M figures may be lost for the smallest eigenvalues (and eigenvectors), where $M = \text{ALOG10}(\text{LARGEST}/\text{SMALLEST})$ with LARGEST and SMALLEST being the largest and smallest (in absolute value) eigenvalues, respectively.

Completion status:

IER=0 normal successful completion.
 IER=33 means that AL is exactly a null matrix.
 IER=129 indicates a fatal error due to N, LV or NVX being outside permissible bounds.

Caveat: matrices formed exclusively by very small or very large matrix elements will give an arithmetic overflow.

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
 DOUBLE PRECISION MACHEP

PARAMETER (NX=256, NX1=(NX*NX+NX)/2, NX2=NX*NX,
 * CERO=0.D0, P5=0.5D0, UNO=1.D0, BOUNDR=1.D-6,
 * MACHEP=1.D-16, GOLDRT=0.618033988749894D0)
 * DIMENSION AL(*),E(*),V(NX2),AU(NX1),IL(NX),IU(NX),
 * W1(NX),W2(NX),W3(NX),W4(NX),W5(NX)

NL = N
 IVL = IV
 LVL = LV
 NVXL = NVX
 IORDL= IORD
 IF (IVL .LE. 0) IVL = 1

IF (NL .LT. 1 .OR. NL .GT. NX .OR. LVL .GT. NVXL
 * .OR. LVL .GT. NL) THEN
 PRINT *, ' N OR LV OR NVX OUTSIDE PERMISSIBLE BOUNDS'

IER = 129
 RETURN

END IF
 IF (NL .EQ. 1) THEN
 E(1) = AL(1)
 V(1) = UNO
 RETURN

END IF
 ITIME = 0
 IF (.NOT. LIB\$INIT_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR INIT'

IL(1) = 0
 IU(1) = 0

```
DO 5 J=2,NL
  IL(J) = IL(J-1) + J - 1
  IU(J) = IU(J-1) - J + 1 + NL
```

```
IER = 0
NM1 = NL - 1
NVF = (LVL-1)*NVXL
```

```
IF (NL .GT. 2) THEN
```

C Householder transformation.

```
  NM2 = NL - 2
  DO 70 K=1,NM2
    KP1 = K + 1
    W2(K) = AL(K+IL(K))
    SCALE = CERO
    DO 8 J=KP1,NL
      SCALE = ABS (AL(IL(J)+K)) + SCALE
      W1(K) = AL(IL(KP1)+K)
      IF (SCALE .GT. CERO) THEN
        SCALEI = UNO/SCALE
        SUM = CERO
        DO 10 J=KP1,NL
          W2(J) = AL(IL(J)+K)*SCALEI
          SUM = W2(J)**2 + SUM
          S = SIGN (SQRT (SUM),W2(KP1))
          W1(K) = -S*SCALE
          W2(KP1) = W2(KP1) + S
          AL(IL(KP1)+K) = W2(KP1)*SCALE
          H = W2(KP1)*S
          HUNS = (H*SCALE)*SCALE
          HI = UNO/H
          SUMM = CERO
          DO 50 I=KP1,NL
            SUM = CERO
            ILO = IL(I)
            NREST = MOD(I-KP1+1,6)
            DO 15 J=KP1,KP1+NREST-1
              SUM = AL(ILO+J)*W2(J) + SUM
            DO 20 J=KP1+NREST,I,6
              SUM = AL(ILO+J)*W2(J) + AL(ILO+J+1)*W2(J+1)
              * + AL(ILO+J+2)*W2(J+2) + AL(ILO+J+3)*W2(J+3)
              * + AL(ILO+J+4)*W2(J+4) + AL(ILO+J+5)*W2(J+5)
              * + SUM
            IF (I .LT. NL) THEN
              IP1 = I + 1
              NREST = MOD(NL-IP1+1,6)
              DO 25 J=IP1,IP1+NREST-1
                SUM = AL(IL(J)+I)*W2(J) + SUM
              DO 30 J=IP1+NREST,NL,6
                SUM = AL(IL(J)+I)*W2(J)
                * + AL(IL(J+1)+I)*W2(J+1)
                * + AL(IL(J+2)+I)*W2(J+2)
                * + AL(IL(J+3)+I)*W2(J+3)
                * + AL(IL(J+4)+I)*W2(J+4)
                * + AL(IL(J+5)+I)*W2(J+5) + SUM
            END IF
            W1(I) = SUM*HI
            SUMM = W1(I)*W2(I) + SUMM
          U = P5*SUMM*HI
          DO 60 J=KP1,NL
```

```

        JLO      = IL(J)
        W1(J)   = W2(J)*U - W1(J)
        WJ1    = W1(J)
        WJ2    = W2(J)
        NREST  = MOD(J-KP1+1,6)
55      DO 55 I=KP1,KP1+NREST-1
            AL(JLO+I) = WJ2*W1(I) + WJ1*W2(I) + AL(JLO+I)
        DO 60 I=KP1+NREST,J,6
            AL(JLO+I) = WJ2*W1(I) + WJ1*W2(I) + AL(JLO+I)
            AL(JLO+I+1) = WJ2*W1(I+1) + WJ1*W2(I+1) + AL(JLO+I+1)
            AL(JLO+I+2) = WJ2*W1(I+2) + WJ1*W2(I+2) + AL(JLO+I+2)
            AL(JLO+I+3) = WJ2*W1(I+3) + WJ1*W2(I+3) + AL(JLO+I+3)
60      AL(JLO+I+4) = WJ2*W1(I+4) + WJ1*W2(I+4) + AL(JLO+I+4)
            AL(JLO+I+5) = WJ2*W1(I+5) + WJ1*W2(I+5) + AL(JLO+I+5)
        ELSE
            HUNS = CERO
        END IF
70      AL(IL(K)+K) = HUNS
    END IF
C      IF (.NOT. LIB$SHOW_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR SHOW'
    ITIME = 0
C      IF (.NOT. LIB$INIT_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR INIT'

    NM1NM1 = IL(NM1) + NM1
    NM1N   = IL(NL) + NM1
    NN     = NM1N + 1
    W2(NM1) = AL(NM1NM1)
    W2(NL)  = AL(NN)
    W1(NM1) = AL(NM1N)
    W1(NL)  = CERO
    GERSCH = ABS(W2(1)) + ABS(W1(1))
90      DO 90 I=1,NM1
            GERSCH = MAX(ABS(W2(I+1)) + ABS(W1(I)) + ABS(W1(I+1)), GERSCH)
C      Trap null matrix before it is too late.

    IF (GERSCH.EQ. CERO) THEN
        PRINT *, 'NULL MATRIX IN SUBROUTINE HQRII1'
        IER = 33
        RETURN
    END IF

    SUMD = CERO
    SUMCOD = CERO
    DO 100 I=1,NL
        SUMCOD = ABS(W1(I)) + SUMCOD
100     SUMD = ABS(W2(I)) + SUMD
    SCALE = SUMD + SUMCOD
    SCALEI = UNO/SCALE
    DO 105 I=1,NL
        W1(I) = W1(I)*SCALEI
        W2(I) = W2(I)*SCALEI
        W3(I) = W1(I)
        E(I) = W2(I)
105     V(I+NVF) = E(I)
    EPS = SORT(MACHEP)
    GERSCH = GERSCH*SCALEI
    DEL = GERSCH*EPS
    DELWS = GERSCH*MACHEP

    IF (SUMD/SUMCOD.GT. DEL) THEN

```

```

C      QR method with origin-shift.

DO 160 K=NL,2,-1
110   L = K
120   IF (ABS (W3(L-1)) .GT. DEL) THEN
      L = L - 1
      IF (L .GT. 1) GO TO 120
    END IF
    IF (L .NE. K) THEN
      WW = (E(K-1)+E(K))*P5
      R = E(K)-WW
      Z = WW - SIGN (SQRT (W3(K-1)**2 + R*R),WW)
      EE = E(L) - Z
      E(L) = EE
      FF = W3(L)
      R = SQRT (EE*EE + FF*FF)
      RI = UNO/R
      C = E(L)*RI
      S = W3(L)*RI
      WW = E(L+1) - Z
      E(L) = (FF*C + WW*S)*S + EE + Z
      E(L+1) = C*WW - S*FF
      DO 150 J=L+1,K-1
        R = SQRT (E(J)**2 + W3(J)**2)
        RI = UNO/R
        W3(J-1) = S*R
        EE = E(J)*C
        FF = W3(J)*C
        C = E(J)*RI
        S = W3(J)*RI
        WW = E(J+1) - Z
        E(J) = (FF*C + WW*S)*S + EE + Z
        E(J+1) = C*WW - S*FF
150      CONTINUE
        W3(K-1) = E(K)*S
        E(K) = E(K)*C + Z
        GO TO 110
      END IF
    CONTINUE
C 160  IF (.NOT. LIB$SHOW_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR SHOW'
      ITIME = 0
C      IF (.NOT. LIB$INIT_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR INIT'

C      Straight selection sort of eigenvalues.

      SORTER = UNO
      IF (IORDL .LT. 0) SORTER = -UNO
170   J = NL
      L = 1
      II = 1
      LL = 1
      DO 190 I=2,J
        IF ((E(I)-E(L))*SORTER .LE. CERO) THEN
          L = I
        ELSE
          II = I
          LL = L
        END IF
      CONTINUE
190   IF (II .NE. LL) THEN
        WW = E(LL)
        E(LL) = E(II)

```

```

      E(II) = WW
      END IF
      J = II - 1
      IF (J .GT. 1) GO TO 170
C     END IF
      IF (.NOT. LIB$SHOW_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR SHOW'
C     ITIME = 0
      IF (.NOT. LIB$INIT_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR INIT'

      IF (LVL .GE. IVL) THEN

C     Inverse-iteration for eigenvectors.

      FN = FLOAT (NL)
      EPS1 = SQRT (FN)*EPS
      SEPS = SQRT (EPS)
      EPS2 = (GERSCH*BOUNDR)/(FN*SEPS)
      RN = CERO
      RA = EPS*GOLDRT
      IF = (IVL-2)*NVXL
      DO 310 I=IVL,LVL
        IF = IF + NVXL
        DO 220 J=1,NL
          W3(J) = CERO
          W4(J) = W1(J)
          W5(J) = V(J+NVF) - E(I)
          RN = RN + RA
          IF (RN .GE. EPS) RN = RN - EPS
          V(J+IF) = RN
        DO 250 J=1,NM1
          IF (ABS (W5(J)) .LE. ABS (W1(J))) THEN
            W2(J) = -W5(J)/W1(J)
            W5(J) = W1(J)
            T = W5(J+1)
            W5(J+1) = W4(J)
            W4(J) = T
            W3(J) = W4(J+1)
            IF (W3(J) .EQ. CERO) W3(J) = DEL
            W4(J+1) = CERO
          ELSE
            IF (W5(J) .EQ. CERO) W5(J) = DEL
            W2(J) = -W1(J)/W5(J)
          END IF
          W4(J+1) = W3(J)*W2(J) + W4(J+1)
          W5(J+1) = W4(J)*W2(J) + W5(J+1)
          IF (W5(NL) .EQ. CERO) W5(NL) = DELW5
          WNM151 = UNO/W5(NM1)
          WNS1 = UNO/W5(NL)
        DO 310 ITERS=1,2
          IF (ITERS .NE. 1) THEN
            DO 260 J=1,NM1
              IF (W5(J) .EQ. W1(J)) THEN
                T = V(J +IF)
                V(J +IF) = V(J+1+IF)
                V(J+1+IF) = T
              END IF
              V(J+1+IF) = V(J+IF)*W2(J) + V(J+1+IF)
            END IF
            V(NL +IF) = V(NL +IF)*WNS1
            V(NM1+IF) = (V(NM1+IF)-V(NL+IF)*W4(NM1))*WNM151
            VN = MAX (ABS (V(NL+IF)), ABS (V(NM1+IF)))
            DO 280 K=NM2,1,-1

```

```

280      V(K+IF) = (V(K+IF) - V(K+1+IF)*W4(K) - V(K+2+IF)*W3(K))/W5(K)
          VN = MAX (ABS (V(K+IF)), VN)
      S = EPS1/VN
      NREST = MOD(NL,6)
295      DO 295 J=1,NREST
          V(J +IF) = V(J +IF)*S
      DO 300 J=1+NREST,NL,6
          V(J +IF) = V(J +IF)*S
          V(J+1+IF) = V(J+1+IF)*S
          V(J+2+IF) = V(J+2+IF)*S
          V(J+3+IF) = V(J+3+IF)*S
          V(J+4+IF) = V(J+4+IF)*S
          V(J+5+IF) = V(J+5+IF)*S
300      CONTINUE
310      IF (.NOT. LIB$SHOW_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR SHOW'
          ITIME = 0
      C      IF (.NOT. LIB$INIT_TIMER(ITIME)) STOP 'ERROR INIT'
      C      Use sequential row notation for upper triangular matrix.
          DO 320 J=1,N
          DO 320 I=1,J
320          AU(IU(I)+J) = AL(IL(J)+I)
      C      Transformation of eigenvectors.
          IG = 1
          IF = (IVL-2)*NVXL
          DO 430 I=IVL,LVL
              IF = IF + NVXL
              IM1 = I - 1
              IF (N .GT. 2) THEN
                  DO 350 J=1,NM2
                      K = NL - J - 1
                      KO = IU(K)
                      IF (AU(KO+K) .NE. CERO) THEN
                          KP1 = K + 1
                          SUM = CERO
                          NREST = MOD(NL-KP1+1,6)
                          DO 325 KK=KP1,KP1+NREST-1
325          SUM = AU(KO+KK) *V(KK+IF) + SUM
                          DO 330 KK=KP1+NREST,NL,6
330          SUM = AU(KO+KK) *V(KK+IF)
          *          + AU(KO+KK+1) *V(KK+IF+1)
          *          + AU(KO+KK+2) *V(KK+IF+2)
          *          + AU(KO+KK+3) *V(KK+IF+3)
          *          + AU(KO+KK+4) *V(KK+IF+4)
          *          + AU(KO+KK+5) *V(KK+IF+5) + SUM
                          S = -SUM/AU(KO+K)
                          DO 335 KK=KP1,KP1+NREST-1
335          V(KK+IF) = AU(KO+KK) *S + V(KK+IF)
                          DO 340 KK=KP1+NREST,NL,6
340          V(KK+IF) = AU(KO+KK) *S + V(KK+IF)
          V(KK+IF+1) = AU(KO+KK+1) *S + V(KK+IF+1)
          V(KK+IF+2) = AU(KO+KK+2) *S + V(KK+IF+2)
          V(KK+IF+3) = AU(KO+KK+3) *S + V(KK+IF+3)
          V(KK+IF+4) = AU(KO+KK+4) *S + V(KK+IF+4)
          V(KK+IF+5) = AU(KO+KK+5) *S + V(KK+IF+5)
          END IF
350      CONTINUE
          END IF

```

```

DO 370 J=IG,I
JJ = J
IF (ABS(E(J)-E(I)) .LT. EPS2) GO TO 380
370
380 IG = JJ
NREST = MOD(NL,6)

```

```
IF (IG .NE. I) THEN
```

C Degenerate eigenvalues. First, orthogonalize.

```

KF = (IG-2)*NVXL
DO 400 K=IG,IM1
KF = KF + NVXL
SUM = CERO
DO 394 J=1,NREST
394 SUM = V(J +KF)*V(J +IF) + SUM
DO 395 J=1+NREST,NL,6
395 SUM = V(J +KF)*V(J +IF) + V(J+1+KF)*V(J+1+IF)
* + V(J+2+KF)*V(J+2+IF) + V(J+3+KF)*V(J+3+IF)
* + V(J+4+KF)*V(J+4+IF) + V(J+5+KF)*V(J+5+IF)
* + SUM
S = -SUM
DO 398 J=1,NREST
398 V(J +IF) = V(J +KF)*S + V(J +IF)
DO 399 J=1+NREST,NL,6
V(J +IF) = V(J +KF)*S + V(J +IF)
V(J+1+IF) = V(J+1+KF)*S + V(J+1+IF)
V(J+2+IF) = V(J+2+KF)*S + V(J+2+IF)
V(J+3+IF) = V(J+3+KF)*S + V(J+3+IF)
V(J+4+IF) = V(J+4+KF)*S + V(J+4+IF)
399 V(J+5+IF) = V(J+5+KF)*S + V(J+5+IF)
400 CONTINUE
END IF

```

C Normalization.

```

SUM = CERO
DO 405 J=1,NREST
405 SUM = V(J +IF)**2 + SUM
DO 410 J=1+NREST,NL,6
410 SUM = V(J +IF)**2 + V(J+1+IF)**2 + V(J+2+IF)**2
* + V(J+3+IF)**2 + V(J+4+IF)**2 + V(J+5+IF)**2 + SUM
S = UNO/SQRT (SUM)
DO 415 J=1,NREST
415 V(J +IF) = V(J +IF)*S
DO 420 J=1+NREST,NL,6
420 V(J +IF) = V(J +IF)*S
V(J+1+IF) = V(J+1+IF)*S
V(J+2+IF) = V(J+2+IF)*S
V(J+3+IF) = V(J+3+IF)*S
V(J+4+IF) = V(J+4+IF)*S
420 V(J+5+IF) = V(J+5+IF)*S
430 CONTINUE
END IF

```

```

DO 450 I=1,NL
450 E(I) = E(I)*SCALE
C IF (.NOT. LIB$SHOW_TIMER (ITIME)) STOP 'ERROR SHOW'

```

```

RETURN
END

```