01168
2ej. 1

"CONJUNTOS BORROSOS, TEORIA BASICA Y APLICACION AL ANALISIS DE DECISIONES"

CARLOS HUMBERTO ARIAS MARTÍNEZ

TESIS
Presentada a la División de Estudios de
Posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
como requisito para obtener
el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

CIUDAD UNIVERSITARIA
Mayo, 1988

RESUMEN

Esta tesis presenta la aplicación de los conjuntos borrosos al análisis de decisiones. Se exponen los antecedentes del análisis de decisiones según el punto de vista de la Psicología, la Investigación de Operaciones y la Teoría de la Utilidad, examinándose brevemente sus beneficios y limitaciones, proponiéndose como alternativa el uso de la matemática borrosa como técnica de decisión adecuada al entorno nacional. Se presentan las definiciones y operaciones básicas de los conjuntos borrosos y los conceptos elementales del análisis de decisión borroso basado en estas operaciones, resolución de algunos casos y perspectivas de esta técnica.

I N D I C E

80 p.

I. INTRODUCCION

1.1. ANTECEDENTES

En el ejercicio del paradigma sistémico o método de los sistemas tiene gran importancia la teoría de decisiones que analiza las elecciones racionales dentro de organizaciones humanas, basada en el examen de situaciones dadas y sus posibles consecuencias [5]; el proceso de decisión ha sido examinado desde diferentes puntos de vista, algunos de los cuales revisaremos brevemente:

El punto de vista psicológico

Los psicólogos han estudiado la realización de las decisiones por más de 30 años. Durante este tiempo han predominado dos estrategias de investigación: la primera es llamada prescriptiva y básicamente implica el traslado de modelos formales y normativos del campo de la estadística y la economía al campo de la experimentación psicológica; los sujetos investigados son interrogados sobre cómo realizan sus trabajos y decisiones y su conducta es comparada con la conducta óptima prescrita por el modelo. Las grandes fallas de este enfoque llevaron a desarrollar la estrategia descriptiva centrada en el proceso de la información o enfoque cognoscitivo. El resultado típico de estas investigaciones es una explicación en términos psicológicos de porqué la conducta humana se orienta al óptimo. Muchas de las explicaciones están basadas en la suposición de acotamientos o cortes con que se ayuda la gente para tratar problemas de una complejidad que excedan su capacidad para procesar información.

Puede resumirse el punto de vista psicológico como la explicación del proceso que realiza el humano en la práctica subjetiva de decidir, en describir cómo combina el conocimiento, memoria, sentimientos, razón, etc., y busca una decisión cuando se encara con un problema que requiere solución o en general cuando recibe un estímulo que requiere una respuesta en forma de acción. Un modelo de este proceso es mostrado en el siguiente diagrama [33]:

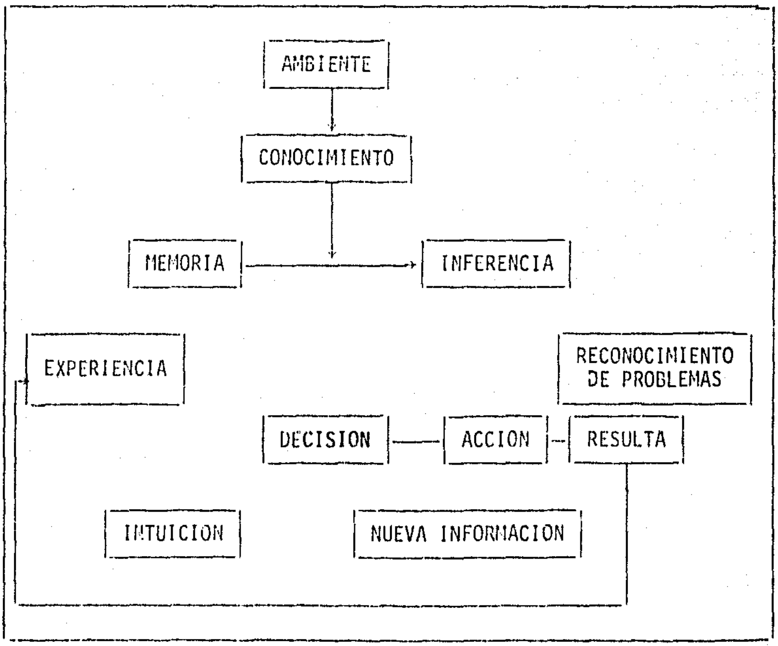


Figura 1.1. EL PROCESO HUMANO DE DECIDIR

El punto de vista de la Investigación de Operaciones

En esta disciplina, las decisiones son consideradas como la solución a un problema, definiéndose como problema a una situación en donde - existe:

- Un decisor o persona que afronta el problema
- Un objetivo
- Por lo menos dos cursos de acción
- Una medida de consecución del objetivo.

Según la metodología de Ackoff [14] y Churchman [13], este problema puede ser representado por la ecuación:

$$V = f(x_i \ , \ y_j) \tag{1.1}$$

en donde:

V = Es la medida de consecución del objetivo o rendimiento de una acción dada.

x_i = Son las variables de decisión, selección o control, o sea los aspectos de la situación que pueden ser controlados.

y_j = Son los aspectos del entorno o ambiente del problema sobre los cuales no se tiene control pero determinan cualitativa y cuantitativamente la solución.

Una decisión será una solución al problema y consiste en la solución de los valores de x_i expresados como una función de $g(y_j)$, el cual - maximiza o minimiza a V.

El punto de vista de la Teoría de Utilidades:

El análisis de decisiones utilizando la teoría del valor fue desarrollada por H. Raiffa al inicio de loa ños sesenta [40], [41], [42], - continuada por R. Schlaifer [45], R. Keeney [28], [30]. El procedimiento para este análisis puede resumirse como [1]:

- Estructuración del problema con la presentación de todas las al-- ternativas y consecuencias, en forma de árbol o simplemente enumerándolas.

- Cuantificación de impactos e incertidumbres.

- Establecimiento del criterio de decisión.

- Encuentro de la solución.

- Análisis de sensibilidad.

Se ve que este proceso es básicamente la selección de una alternativa particular, de un conjunto de alternativas posibles, de modo que sea la que mejor satisfaga las metas u objetivos en un ambiente dado que impone ciertas restricciones, al tratar problemas complicados - por su extensión o número de elementos que intervienen se estructura la solución dividiendo el problema inicial en pequeños subproblemas menos complicados en los cuales se desglosan las alternativas considerando los diversos atributos u objetivos, se separan los atributos para evaluarse independientemente y la utilidad total de una alternativa es obtenida por algún proceso de agregación. Esta utilidad -- agregada es usada como base para la selección de una alternativa particular.

Este problema puede representarse conceptualmente con el modelo siguiente [15]:

$$\max_{L} \; E \; [U^{L}(\overline{X})] = \int_{R_n} U(\overline{X}) f_{X}^{L} (\overline{x}) \, d\overline{x} \qquad (1.2)$$

cuya solución corresponde a la alternativa seleccionada entre el grupo L analizado y que maximiza el valor esperado de la función de utilidad del decisor, U(.), en un espacio euclidiano de n dimensiones.

Cuando los objetivos estén especificados se definen n atributos X_1, X_2, ..., X_n, los cuales permitirán medir el nivel que se lograría de cada uno de los objetivos con las alternativas de solución.

Si x_i es un nivel particular del atributo X_i y la función de utilidades del j-ésimo decisor definida sobre dicho atributo, $u_{ji}(x_i)$, se construye de acuerdo con ciertas reglas, se tiene que esta función puede emplearse como criterio para comparar, ordenar y seleccionar las alternativas de manera consistente.

También se tiene en el problema la función f_X^L, que representa la función de densidad de probabilidad conjunta de las consecuencias generadas por la alternativa L; por lo que el problema decisional implica la definición de dos funciones en n dimensiones, una sobre las estructuras de preferencia de los decisores y otra sobre el comportamiento de los impactos de las alternativas.

En este problema se tienen varias etapas o componentes que se necesitan describir y representar adecuadamente, lo que significa un problema o limitación en cada etapa.

Respecto a los objetivos y atributos se tiene que para analizar un - problema se necesita hacer explícito lo que se pretende lograr con - la implantación de alguna de las alternativas así como los atributos que servirán para medir el grado con que se lograrán dichos objeti-- vos y expresar esto cuantitativamente; para la estructuración y agre gación de preferencias se tienen procedimientos efectivos en el caso unidimensional, lo que permite establecer funciones marginales en el caso n-dimensional [29], pero sólo se han tenido resultados genera-- les en el caso de independencia mutua y preferencial [15], los mode- los empleados para esta agregación de preferencias son:

Utilidades mutuamente independientes:

$$k\,u(x) + 1 = \prod_{i=1}^{n} [k\,k_i\,u_i\,(x_i) + 1] \tag{1.3}$$

Utilidades mutua y preferencialmente independiente:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i\,u_i\,(x_i) \tag{1.4}$$

Las aplicaciones desarrolladas a la fecha en el análisis de decisio- nes están basadas en la hipótesis de independencia.

Por otro lado, también existen dificultades en el tratamiento de la incertidumbre que obliga a tener una función de probabilidad para al ternativa y este análisis se basa, nuevamente, en la independencia - de cada función.

Se tienen como principales desventajas las siguientes observaciones [19]:

- Interdependencia de las variables representativas y no ortogonalidad de los objetivos, la utilidad de una variable de rendimiento o desempeño es dependiente de los niveles de cada una de las otras - variables de este tipo, de modo que la utilidad final es una función conjunta de todas las variables de rendimiento.

- Inadecuada y complicada agregación final de la utilidad; la función de utilidad agregada es en general más complicada que la que se puede obtener prácticamente por combinación de utilidades parciales.

- La necesidad de tratar lo subjetivo en términos numéricos y financieros, lo cual es inconveniente para grupos y problemas sociales y además prescindible en el proceso de decisión humano en donde - las decisiones no se hacen de acuerdo con cantidades absolutas y - precisas de los atributos, sino de acuerdo con una estimación subjetiva y global del valor de los niveles de las variables de rendimiento.

1.2. PROBLEMATICA

Las aplicaciones exitosas de estos métodos han sido numerosas pero estando limitados por las hipótesis básicas de su análisis, esto es, la independencia de los atributos y el tratamiento cuantitativo - exacto así como no poder incluir las valoraciones de varios decisores, ha llevado a concluir en algunos casos que esta técnica no siempre es suficiente y adecuada [15]. Por otro lado, en el estudio de casos de algunas materias y seminarios de la sección de Investigación de Operaciones de la DEPFI se encuentra muy frecuentemente que los métodos que involucran modelos cuantitativos rígidos no son aplicables en México y cuando pudieron aplicarse los resultados fueron porbles o hubo dificultad en alguna fase del problema y casi siempre se menciona la falta de

- Interdependencia de las variables representativas y no ortogonalidad de los objetivos, la utilidad de una variable de rendimiento o desempeño es dependiente de los niveles de cada una de las otras variables de este tipo, de modo que la utilidad final es una función conjunta de todas las variables de rendimiento.

- Inadecuada y complicada agregación final de la utilidad; la función de utilidad agregada es en general más complicada que la que se puede obtener prácticamente por combinación de utilidades parciales.

- La necesidad de tratar lo subjetivo en términos numéricos y financieros, lo cual es inconveniente para grupos y problemas sociales y además prescindible en el proceso de decisión humano en donde las decisiones no se hacen de acuerdo con cantidades absolutas y precisas de los atributos, sino de acuerdo con una estimación subjetiva y global del valor de los niveles de las variables de rendimiento.

1.2. PROBLEMATICA

Las aplicaciones exitosas de estos métodos han sido numerosas pero estando limitados por las hipótesis básicas de su análisis, esto es, la independencia de los atributos y el tratamiento cuantitativo exacto así como no poder incluir las valoraciones de varios decisores, ha llevado a concluir en algunos casos que esta técnica no siempre es suficiente y adecuada [15]. Por otro lado, en el estudio de casos de algunas materias y seminarios de la sección de Investigación de Operaciones de la DEPFI se encuentra muy frecuentemente que los métodos que involucran modelos cuantitativos rígidos no son aplicables en México y cuando pudieron aplicarse los resultados fueron porbles o hubo dificultad en alguna fase del problema y casi siempre se menciona la falta de información estadística; se puede inferir que la generalidad de los modelos cuantitativos con que se pretende trabajar en México fueron elaborados en otros países con muy diferentes características de conducta de los sistemas [38] y de disponibilidad de información por lo que su rendimiento no será alto en las condiciones locales. En este ambiente, debe buscarse un nuevo cuerpo de conceptos y técnicas en el cual lo impreciso y lo indeterminado de la realidad esté aceptado como una propiedad de lo existente.

1.3. OBJETIVOS

El presente trabajo tiene como objetivo el recopilar y exponer los principios y la teoría básica de los conjuntos borrosos que presentan un camino alterno para tratar lo impreciso en forma sistemática en el marco de las matemáticas clásicas, examinar su aplicación al análisis de decisiones y su viabilidad en algunos casos.

1.4. CONTENIDO

Después de esta introducción, en el segundo capítulo se presentarán los conceptos y definiciones básicas de los conjuntos borrosos así como las operaciones elementales entre ellos y principios de convexidad.

En el tercero, los principios del análisis de decisiones con conjuntos borrosos, se expone la técnica de decisión para problemas en un sistema de estados y utilidades borrosas y se refieren otras variantes de la técnica.

En el cuarto capítulo se muestra la aplicación de las técnicas para resolver algunos casos de decisión.

Por último, se dan conclusiones y perspectivas de estas técnicas.

II. CONCEPTOS Y OPERACIONES BASICAS DE LOS CONJUNTOS BORROSOS

2.0. CONCEPTOS BASICOS

La ciencia moderna desde sus orígenes ha sostenido que el entendimiento de un fenómeno sólo puede ser claro si puede expresarse en términos cuantitativos. Esta posición ha tenido éxito en el tratamiento de los sistemas naturales principalmente en los últimos tiempos con el advenimiento de las computadoras: estos resultados espectaculares motivaron a tratar con estas técnicas los sistemas humanísticos o culturales como son los sistemas económicos, sociales, urbanos y otros tipos en los cuales la parte humana tiene el papel determinante y se tiene actualmente que muchas de las técnicas empleadas en el estudio de los sistemas sociotécnicos son adaptaciones de métodos desarrollados para tratar sistemas regidos por leyes naturales [38].

Los resultados de este enfoque no fueron los esperados, por lo que hubo de cuestionarse la línea de pensamiento científico que sostiene que el entendimiento de un sistema es igual a la posibilidad de analizarlo en términos cuantitativos y exactos, esto más aún tratándose de sistemas sociotécnicos.

Esencialmente, la nueva posición sostiene que las técnicas cuantitativas convencionales de análisis de sistemas son intrínsecamente inadecuadas para tratar sistemas humanísticos o sistemas de complejidad comparable a éstos.

La generalización de estas observaciones llevó a formular el "principio de incompatibilidad" [58], que expresado informalmente es: la alta precisión es incompatible con la alta complejidad, o bien, la complejidad de un sistema y la precisión con que puede ser analizado están en relación inversa una a la otra y nuestra habilidad para hacer juicios y enunciados precisos y significativos acerca de su conducta disminuye hasta pasar de un límite debajo del cual la precisión y la -

relevancia comienzan a ser características mutuamente excluyentes.

En este sentido, se tiene que un análisis cuantitativo y preciso de la conducta de los sistemas no implica conocimiento de lo relevante del mundo real en sistemas sociotécnicos que involucra a humanos en forma agrupada o individual.

El enfoque alternativo está basado en la observación de que el elemento clave del pensamiento humano no son números sino identificaciones o etiquetas de situaciones o grupos difusos, es decir, clases con límites indeterminados en los que la transición de pertenencia a no pertenencia a esas clases o conjuntos no es en forma abrupta o de dos valores, ser o no ser, sino que es una transición gradual.

El poder razonar en términos borrosos, imprecisos y no cuantitativos es lo que permite construcciones lingüísticas como "A es varios centímetros más alto que B", "X es mucho mayor que Y" y otras que incluyen adjetivos como: grande, pequeño, significativo, importante, aproximado, etc., en donde la extensión o valor del adjetivo es interpretado de modo flexible. Esta forma de pensar es lo que posibilita distinguir una escritura mal estructurada, comprender oraciones con doble sentido, seleccionar la información para una decisión; se puede llegar a afirmar que la conducta humana es determinada por una lógica de verdades borrosas.

La teoría de los conjuntos borrosos es un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la imprecisión del mundo real al que se ha intentado ajustar a modelos matemáticos que no permiten lo borroso, obteniéndose resultados indeseables.

relevancia comienzan a ser características mutuamente excluyentes.

En este sentido, se tiene que un análisis cuantitativo y preciso de la conducta de los sistemas no implica conocimiento de lo relevante del mundo real en sistemas sociotécnicos que involucra a humanos en forma agrupada o individual.

El enfoque alternativo está basado en la observación de que el elemento clave del pensamiento humano no son números sino identificaciones o etiquetas de situaciones o grupos difusos, es decir, clases con límites indeterminados en los que la transición de pertenencia a no pertenencia a esas clases o conjuntos no es en forma abrupta o de dos valores, ser o no ser, sino que es una transición gradual.

El poder razonar en términos borrosos, imprecisos y no cuantitativos es lo que permite construcciones lingüísticas como "A es varios centímetros más alto que B", "X es mucho mayor que Y" y otras que incluyen adjetivos como: grande, pequeño, significativo, importante, aproximado, etc., en donde la extensión o valor del adjetivo es interpretado de modo flexible. Esta forma de pensar es lo que posibilita distinguir una escritura mal estructurada, comprender oraciones con doble sentido, seleccionar la información para una decisión; se puede llegar a afirmar que la conducta humana es determinada por una lógica de verdades borrosas.

La teoría de los conjuntos borrosos es un acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la imprecisión del mundo real al que se ha intentado ajustar a modelos matemáticos que no permiten lo borroso, obteniéndose resultados indeseables.

2.1. DEFINICIONES ELEMENTALES [52], [27]

2.1.1. Definición de subconjunto borroso:

Sea E un conjunto o universo de discurso que puede ser numerable o no, y x un elemento de E; entonces un "subconjunto borroso" A de E es el conjunto de pares ordenados:

$$\{ (x/\mu_A(x)) \}, \quad \forall \quad x \in E \qquad (2.1)$$

donde $\mu_A(x)$ es el "grado de membresía" de x en A.

Si $\mu_A(x)$ toma sus valores en un conjunto M, totalmente ordenado, llamado "conjunto de membresía", se puede decir que x toma sus valores en M mediante la función $\mu_A(X)$, esto es:

$$x \xrightarrow[U_A(X)]{} M \qquad (2.2)$$

y a esta función se llama la "función de membresía".

Si el conjunto M, totalmente ordenado, en el que $\mu_A(x)$ toma sus valores, es el intervalo cerrado [0, 1], y la "membresía" y la "no membresía" se denotan respectivamente por $\in$ y $\notin$, podemos escribir debajo de esta membresía el grado de pertenencia:

$x \in_1 A$, significa $x \in A$, es decir, x pertenece a A.

$x \in_0 A$, significa $x \notin A$, es decir, x no pertenece a A.

$x \in_{0.8} A$, significa x pertenece a A con grado 0.8

$x \in_{0.6} A$, significa x pertenece a A con grado 0.6; etc.

de esta forma, los conjuntos ordinarios no borrosos son un subconjunto de los borrosos con $\mu = (0, 1)$, únicamente con valores cero y uno y las funciones $\mu_A(x)$ son entonces las funciones binarias booleanas.

Ejemplo: Sea un conjunto finito:

$$E = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

y el conjunto finito ordenado:

$$M = \{ 0, \tfrac{1}{2}, 1 \}$$

entonces:

$$A = \{ (a/0), (b/1), (c/\tfrac{1}{2}), (d/0), (e/\tfrac{1}{2}), (f/0) \}$$

es un subconjunto borroso de E y se escribirá:

$$a \underset{0}{\in} A, \quad b \underset{1}{\in} A, \quad c \underset{\frac{1}{2}}{\in} A, \quad d \underset{0}{\in} A, \quad \text{etcétera}$$

Ejemplo: Sea el conjunto de los números naturales,

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

y el conjunto borroso A de los números enteros pequeños:

$$A = \{ (0/1), (1/0.8), (2/0.6), (3/0.4), (4/0.2), (5/0), (6/0) \ldots \}$$

donde la función $\mu_A(x)$ está dada subjetivamente.

En muchas situaciones la función de membresía, μ_A, será estimada de información parcial e incompleta sobre ella, como puede ser una serie finita de puntos x_1, x_2, ... x_i; cuando A está definido en forma incompleta o aproximada se dice que está definido por ejemplificación. El problema de estimar μ_A partiendo de un conjunto incompleto de pares $(x_1, u_A(x_1))$, ..., $(x_n, u_A(x_n))$ es un problema de abstracción en el reconocimiento de patrones [53].

2.1.2. Definición de conjunto vacío

Un conjunto A es vacío si y sólo si su función de membresía es idéntica a cero en E, esto es,

$$u_A(x) = 0 \quad \forall x \in A \tag{2.3}$$

2.1.3. Definición de soporte:

El soporte de un conjunto borroso A es un conjunto S(A) tal que:

$$x \in S(A) \iff \mu_A(x) > 0 \tag{2.4}$$

Si $\mu_A(x)$ = cte. sobre S(A), entonces A es no borroso.

2.1.4. Definición de normalización

Un conjunto borroso A es normal si y sólo si:

$$\mathrm{Sup}_x \; \mu_A(x) = 1 \tag{2.5}$$

esto es, el supremo de $\mu_A(x)$ sobre E es la unidad. Un conjunto borroso es subnormal si no es normal.

Un conjunto subnormal puede ser normalizado dividiendo cada $\mu_A(x)$ por el factor $\mathrm{Sup}_x \ \mu_A(x)$.

2.2. OPERACIONES SIMPLES DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS [52[, [27]

2.2.1. Inclusión

Sea E un conjunto o universo de discurso, M su conjunto de - membresía asociado y A y B dos subconjuntos borrosos de E, se dice que A está contenido en B, o que A es un subconjunto de B, o que A es más pequeño o igual a B, si y sólo si, $\mu_A \leq u_B$, o sea:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq u_B(x) \quad \forall x \in E \tag{2.6}$$

Por ejemplo: Sean

$A = \{(x_1/0.4), (x_2/0.2), (x_3/0), (x_4/1)\}$

$B = \{(x_1/0.3), (x_1/0), (x_3/0), (x_4/0)\}$

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $\qquad M = [0, 1]$

se tiene entonces que:

$$B \subset A$$

pues: $0.3 < 0.4$; $0 < 0.2$; $0 = 0$; $0 < 1$

Ejemplo: Sean $A \subset E$ y $B \subset E$ $\qquad M = [0, 1]$

si $\forall x \in E$ se tiene $u_A^2(x) = u_B(x)$

entonces: $B \subset A$.

2.2.2. Igualdad

Sea E un conjunto y M su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se dirá que A y B son iguales si y solamente si:

$$\forall\ x \in E \text{ se tiene } \mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad (2.7\_$$

y esto se representa por:

$$A = B$$

si al menos un x de E es tal que la igualdad (2.7) no se cumple, se dirá que A y B no son iguales y esto se representará por:

$$A \neq B$$

2.2.3. Complementación

Sean E un conjunto y M = [0, 1] su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E, se dirá que A y B son complementarios si:

$$\forall\ x \in E \text{ se tiene } \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x) \qquad (2.8)$$

y esto se representará por:

$$B = \overline{A} \qquad \text{ó} \qquad \overline{A} = B$$

y también se tiene que:

$$(\overline{\overline{A}}) = A$$

Por ejemplo: Sean:

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $\qquad M = [0, 1]$

$A = \{(x_1/.13), (x_2/.61), (x_3/0), (x_4/0), (x_5/1), (x_6/0.3)\}$

si: $\overline{A} = B$ se tiene que:

$B = \{(x_1/.87), (x_2/.39), (x_3/1), (x_4/1), (x_5/0), (x_6/.97)\}$

2.2.4. Intersección

Sea E un conjunto y M [0, 1] su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se define la intersección:

$$A \cap B$$

como el subconjunto más grande contenido en A y en B, es decir:

$$\forall \; x \in E : \mu_{A \cap B}(x) = \text{Min}\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) \qquad (2.9)$$

donde Min (a, b) = a si a < b y Min (a, b) = b si a > b; usando el símbolo $\wedge$ el lugar de Min podrá escribirse:

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B \qquad (2.10)$$

Por ejemplo: Sean:

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\qquad M = [0, 1]$

$A = \{(x_1/.2), (x_2/.7), (x_3/1), (x_4/0), (x_5/.5)\}$

$B = \{(x_1/.5), (x_2/.3), (x_3/1), (x_4/.1), (x_5/.5)\}$

entonces:

$A \cap B = \{(x_1/.2), (x_2/.3), (x_3/1), (x_4/0), (x_5/.5)\}$

La definición (2.9) también puede escribirse:

$$\forall\ x \in E\ ,\quad x \in A \quad y \quad x \in B \Rightarrow x \underset{\mu}{\in}{}_{(A \cap B)}\ A \cap B \tag{2.11}$$

lo que permite introducir un "y" borroso, y así se dirá por ejemplo, - si A es el subconjunto borroso de los números muy cercanos a 5, y B es el subconjunto borroso de los números muy cercanos a 10, entonces $A \cap B$ es el subconjunto de los números muy cercanos a 5 y 10.

2.2.5. Unión

Sea E un conjunto y M = [0, 1] su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se definirá la unión o - reunión:

$$A \cup B$$

como el subconjunto borroso más pequeño que contine tanto a A como a B, y la función de membresía de $A \cup B$ está dada por:

$$\forall\ x \in E\ ;\ \mu_{(A \cup B)}(x) = \text{Max}\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)) \tag{2.12}$$

donde Max (a, b) = a si a > b y Max (a, b) = b si a < b, utilizando el símbolo $\vee$ en lugar de Max podemos escribir (2.10) como:

$$\mu_{A \cup B} = \mu_a \vee \mu_B \tag{2.13}$$

Por ejemplo: Sean:

$E = \{A, B, C, D, F, G\}$ $\qquad M = [0, 1]$

$A = \{(A/0), (B/.3), (C/.7), (D/1), (E/0), (F/.2), (G/.6)\}$

$B = \{(A/.3), (B/1), (C/.5), (D/.8), (E/1), (F/.5), (G/.6)\}$

entonces:

$A \cup B = \{(A/.3), (/1), (C/.7), (D/1), (E/1), (F/.5), (G/.6)\}$

La definición (2.12) también puede escribirse como:

$$\forall x \in E, \; x \in A \text{ y/o } x \in B \Rightarrow x \in_{\mu(A \cup B)} A \cup B \qquad (2.14)$$

lo que permite introducir un "y/o" borroso y así se dirá por ejemplo: si A es el subconjunto borroso de los números reales muy cercanos a 5, y B es el subconjunto borroso de los números reales muy cercanos a 10, entonces $A \cup B$ es el subconjunto de los números reales muy cercanos a 5 y/o 10.

2.2.6. Suma Disyuntiva o Diferencia Simétrica

La suma disyuntiva de dos subconjuntos borrosos se define en términos de la unión y la intersección en la forma:

$$A \oplus \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \qquad (2.15)$$

2.2.7. Diferencia

La diferencia de dos subconjuntos borrosos se define con la relación:

$$A - B = A \cap \overline{B} \qquad (2.16)$$

Representación Visual de las Operaciones Simples [27]

Se puede hacer una extensión de los diagramas de Venn a los subconjuntos borrosos colocando en la ordenada de un rectángulo los valores de $\mu_A(x)$ y en la absisa los valores de E.

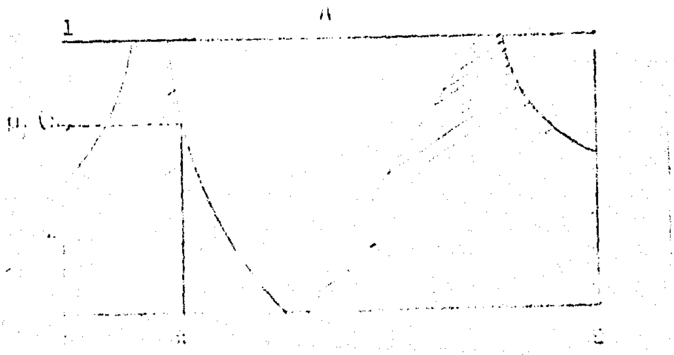


Figura 2.1. REPRESENTACION DE UN SUBCONJUNTO BORROSO [27]

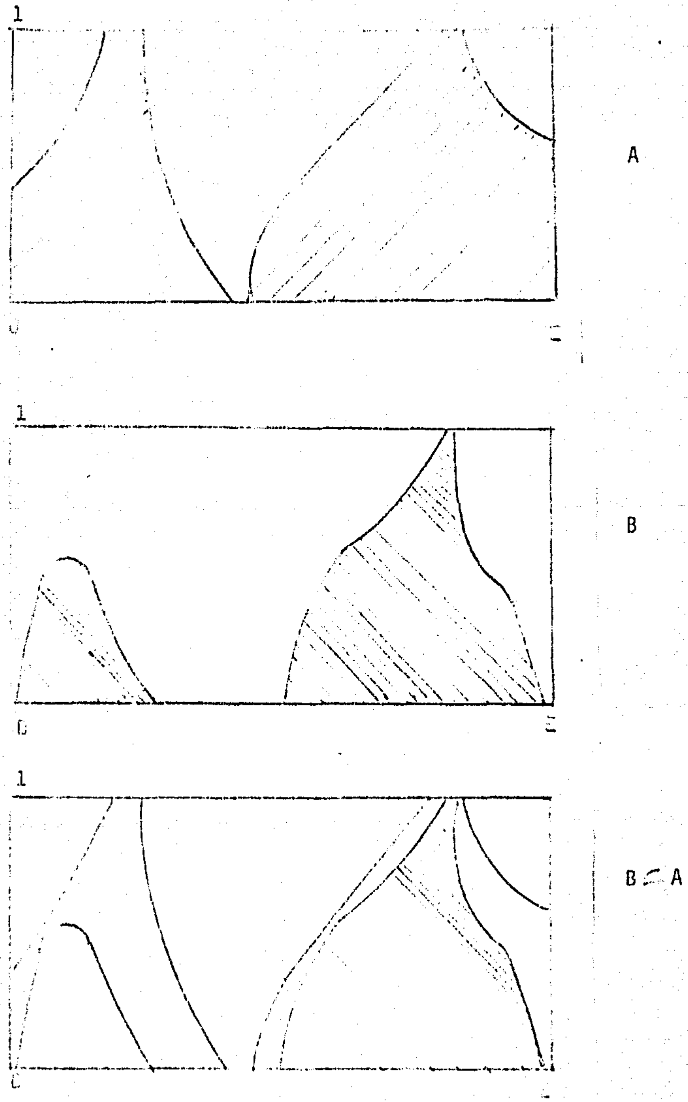


Figura 2.2. REPRESENTACION DE LA INCLUSION DE DOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

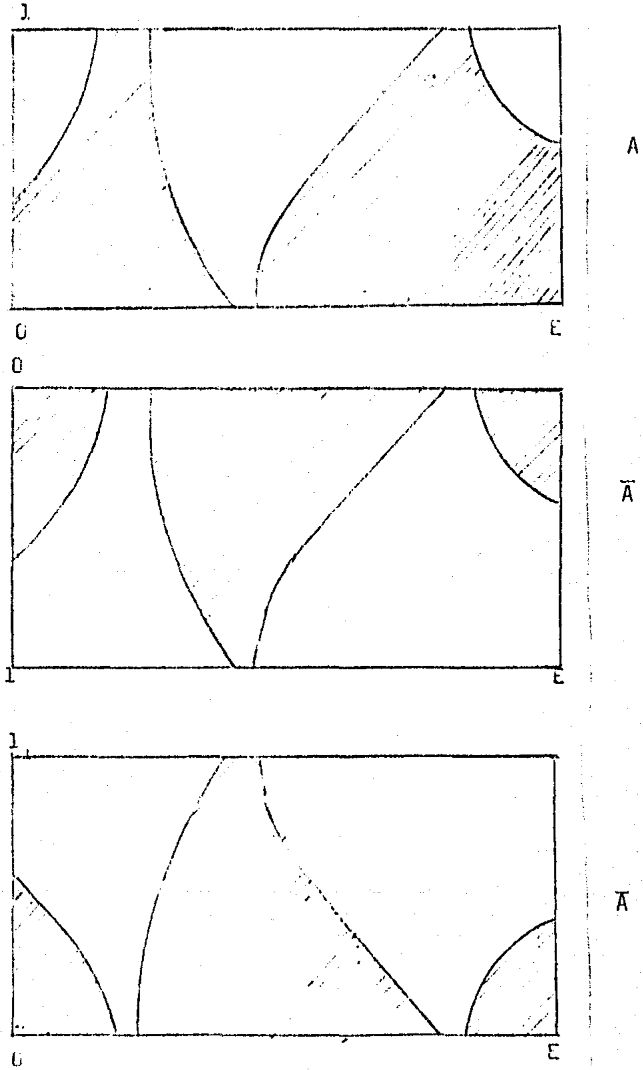


Figura 2.3. REPRESENTACION DE LA COMPLEMENTACION DE UN SUBCONJUNTO BORROSO

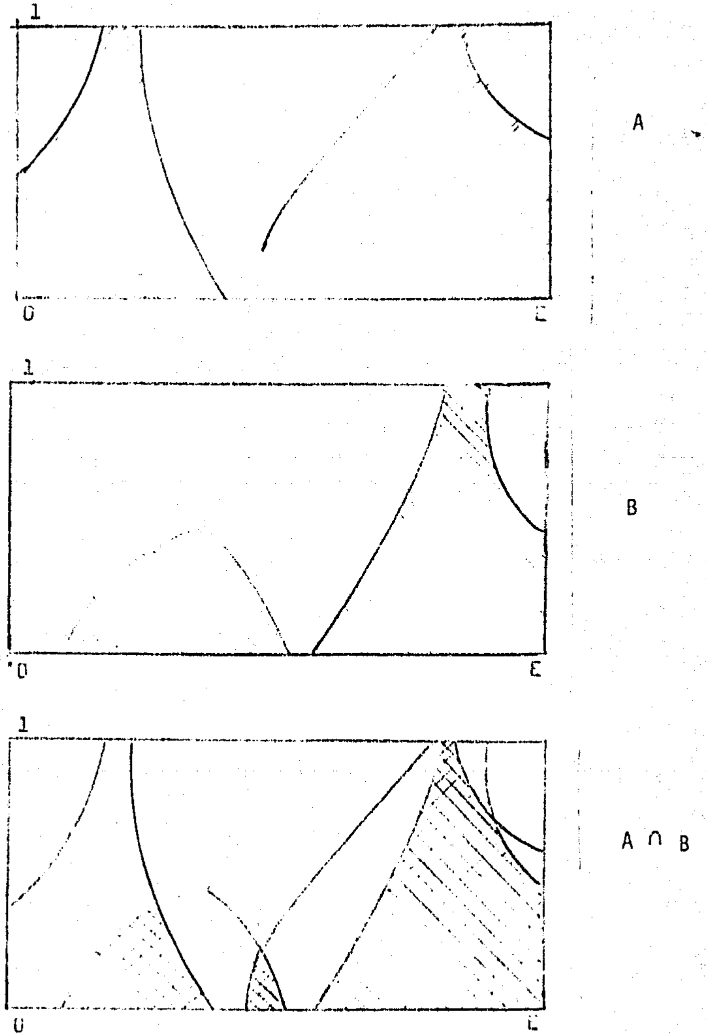


Figura 2.4. REPRESENTACION DE LA INTERSECCION DE DOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

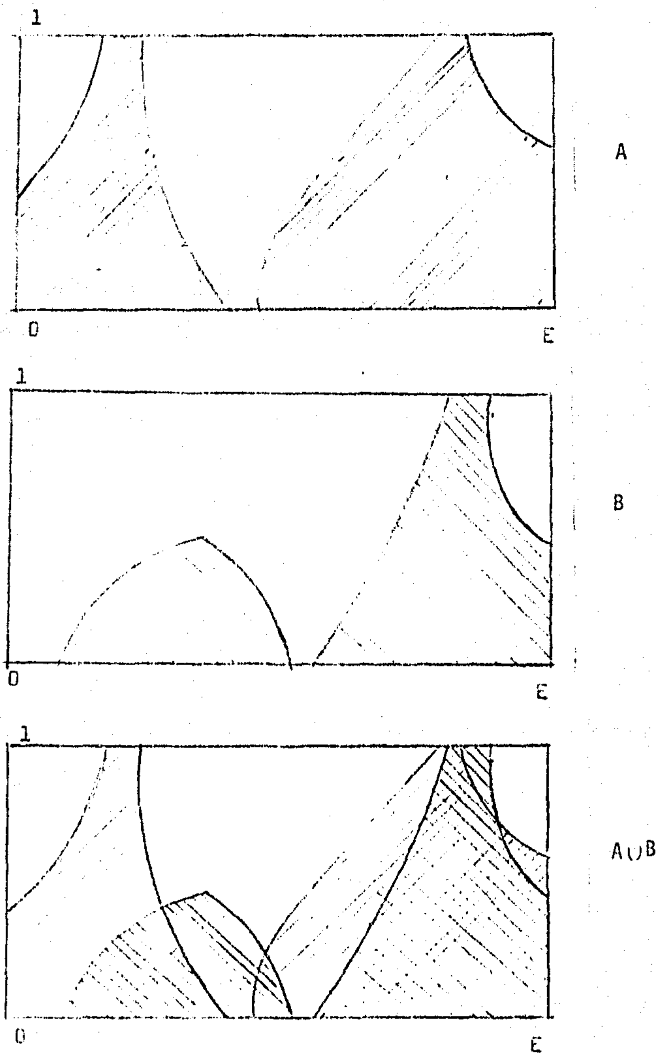


Figura 2.5. REPRESENTACION DE LA UNION DE DOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

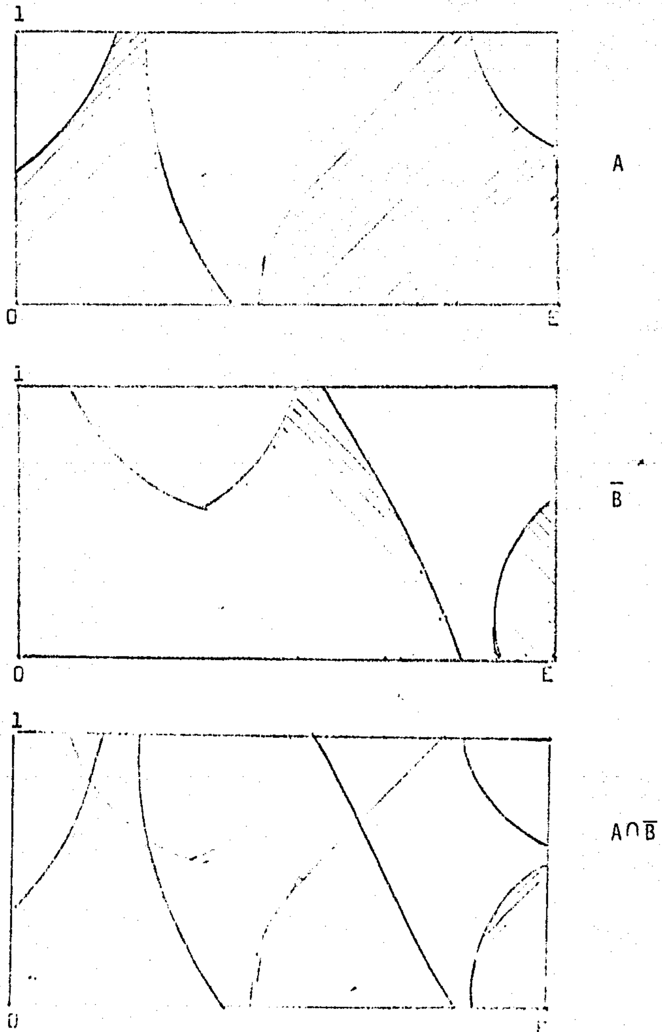


Figura 2.6. REPRESENTACION DE LA DIFERENCIA DE DOS SUBCONJUNTOS BORROSOS $A - B = A \cap \overline{B}$

2.2.8. Propiedades de las Operaciones Unión, Intersección, y Complementación de los subconjuntos borrosos

Si A, B, C son subconjuntos borrosos de un conjunto E, se tiene:

$A \cap B = B \cap A$	Conmutatividad	(2.17)
$A \cup B = B \cup A$		(2.18)
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Asociatividad	(2.19)
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$		(2.20)
$A \cap A = A$	Idempotencia	(2.21)
$A \cup A = A$		(2.22)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributividad	(2.23)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		(2.24)
$A \cap \emptyset = \emptyset$		(2.25)
$A \cup \emptyset = A$		(2.26)
$A \cap E = A$		(2.27)
$A \cup E = E$		(2.28)
$\overline{\overline{A}} = A$	Involución	(2.29)
$\overline{A \cap B} = A \cup B$	Teorema de Morgan	(2.30)
$\overline{A \cup B} = A \cap B$		

o sea que se cumplen todas las propiedades de los subconjuntos ordinarios, exceptuando las de complementación que serán $A \cap \overline{A} = 0$ y $A \cup \overline{A} = E$; por lo que el conjunto de subconjuntos borrosos es un retículo vectorial no complementado [27].

2.3. OPERACIONES ALGEBRAICAS DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

2.3.1. Producto Algebraico

Sea E un conjunto y $M = [0, 1]$ su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se define el producto algebraico de A y B como:

$$A \cdot B$$

tal que:

$$\mu_{A.B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \qquad (2.32)$$

Por ejemplo:

$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ $\qquad M = [0, 1]$

$A = \{(x_1/.2), (x_2/.7), (x_3/1), (x_4/0), (x_5/.5)\}$

$B = \{(x_1/.5), (x_2/.3), (x_3/1), (x_4/.1), (x_5/.5)\}$

entonces:

$A \cdot B = \{(x_1/.10), (x_2/.21), (x_3/1), (x_4/0), (x_5/.25)\}$

2.3.2. Suma Algebraica

Sea E un conjunto y $M = [0,1]$ su conjunto de membresía asociado, A y B dos subconjuntos borrosos de E; se define la suma alebraica de A y B como:

$$A \hat{+} B$$

tal que:

$$\forall x \in E : \mu_{A\hat{+}B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \qquad (2.33)$$

2.3.3. Propiedades de las Operaciones Algebraicas de los Subconjuntos Borrosos

$A \cdot B = B \cdot A$ (2.34)

Conmutatividad

$A \hat{+} B = B \hat{+} A$ (2.35)

$$(A \;.\; B) \;.\; C = A \;.\; (B \;.\; C) \qquad (2.36)$$

Asociatividad

$$(A \hat{+} B) \hat{+} C = A \hat{+} (B \hat{+} C) \qquad (2.37)$$

$$A \;.\; 0 = 0 \qquad (2.38)$$

$$A \hat{+} 0 = A \qquad (2.39)$$

$$A \;.\; E = A \qquad (2.40)$$

$$A \hat{+} E = E \qquad (2.41)$$

$$(\bar{\bar{A}}) = A \qquad \text{Involución} \qquad (2.42)$$

$$A \;.\; B = A \quad B \qquad (2.43)$$

Teorema de Morgan

$$\overline{A \hat{+} B} = \bar{A} \;.\; \bar{B} \qquad (2.44)$$

2.4. CONVEXIDAD [52]

2.4.1. Combinación Convexa

Generalmente se entiende por combinación convexa de dos vectores f y g a la combinación lineal de la forma:

$$\lambda f + (1 - \lambda)\, g \qquad (2.45)$$

en donde $0 \leq \lambda \leq 1$

esta forma de combinación se extiende a los subconjuntos borrosos de la siguiente manera:

Sean E un conjunto y M su conjunto de membresía asociado, A, B, Λ, subconjuntos borrosos de E; la combinación convexa de A, B, Λ, - está definida por la relación:

$$(A,\, B;\, \Lambda) = \Lambda A + \Lambda' B \qquad (2.46)$$

donde Λ' es el complemento de Λ, en términos de las funciones de membresía será:

$$\mu_{(A,B:\Lambda)}(x) = \mu_{\Lambda}\, \mu_A(x) + (1 - \mu_{\Lambda}(x))\, \mu_B(x) \qquad (2.47)$$

2.4.2. Una Propiedad de la Combinación Convexa de los Subconjuntos Borrosos es:

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B \tag{2.48}$$

para toda Λ

esta propiedad es una consecuencia inmediata de la desigualdad:

$$\text{Min}\ (\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq \lambda_A(x) + (1 - \lambda)\mu_B(x) \leq \text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{2.49}$$

con $x \in E$ y $\lambda \in [0, 1]$

2.4.3. También se Tiene que Dado Cualquier Conjunto C que satisface:

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B \tag{2.50}$$

siempre se puede encontrar un subconjunto borroso Λ tal que:

$$C = (A, B; \Lambda) \tag{2.51}$$

y la función de membresía de este subconjunto será:

$$\mu_\Lambda (x) = \frac{\mu_C(x) - \mu_B(x)}{\mu_A(x) - \mu_\Lambda(x)} \quad . \tag{2.52}$$

para $x \in E$.

2.4.4. Conjunto Convexo

Un subconjunto borroso A es convexo, si y sólo si los conjuntos $\Gamma\alpha$ definidos por:

$$\Gamma\alpha = \{ x/\mu_A(x) \geq \alpha \} \tag{2.53}$$

son convexos para toda α en el intervalo [0, 1]

2.4.2. Una Propiedad de la Combinación Convexa de los Subconjuntos Borrosos es:

$$A \cap B \subset (A, B; \Lambda) \subset A \cup B \tag{2.48}$$

para toda Λ

esta propiedad es una consecuencia inmediata de la desigualdad:

$$\text{Min}\,(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq \lambda_A(x) + (1 - \lambda)\mu_B(x) \leq \text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{2.49}$$

con $x \in E$ y $\lambda \in [0, 1]$

2.4.3. También se Tiene que Dado Cualquier Conjunto C que satisface:

$$A \cap B \subset C \subset A \cup B \tag{2.50}$$

siempre se puede encontrar un subconjunto borroso Λ tal que:

$$C = (A, B; \Lambda) \tag{2.51}$$

y la función de membresía de este subconjunto será:

$$\mu_\Lambda\ (x) = \frac{\mu_C(x) - \mu_B(x)}{\mu_A(x) - \mu_\Lambda(x)} \tag{2.52}$$

para $x \in E$.

2.4.4. Conjunto Convexo

Un subconjunto borroso A es convexo, si y sólo si los conjuntos $\Gamma\alpha$ definidos por:

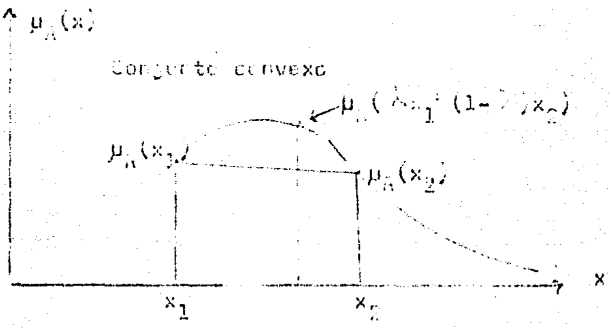
$$\Gamma\alpha = \{ x / \mu_A(x) \geq \alpha \} \tag{2.53}$$

son convexos para toda α en el intervalo [0, 1]

También puede definirse así: un subconjunto borroso A es convexo, si y sólo si:

$$\mu_A(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)x_2) \gtrsim \mathrm{Min}(\mu_a(x_1),\ \mu_A(x_2)) \qquad (2.54)$$

para toda x_1, x_2 en E, y toda λ en [0, 1]



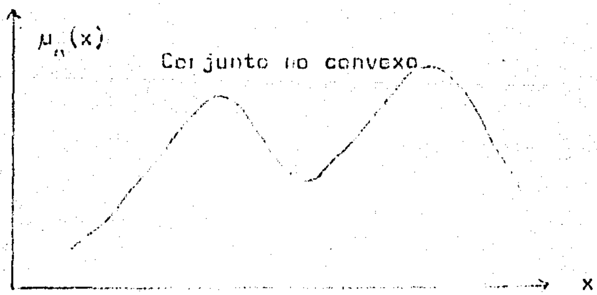


Figura 2.7. [52] CONJUNTOS BORROSOS, CONVEXO Y NO CONVEXO EN R^1

Algunas propiedades importantes sobre la convexidad de los conjuntos borrosos son:

2.4.5. Si A y B son subconjuntos borrosos convexos, entonces también su intersección $A \cap B$ es convexa.

2.4.6. Un subconjunto borroso A es acotado, si y sólo si, los conjuntos $\Gamma\alpha = \{ x/\mu_A(x) \geq \alpha \}$ están acotados para toda $\alpha > 0$; esto es, para toda $\alpha > 0$ existe un número finito R (α) tal que $||x|| \leq R(\alpha)$ para toda $x \in \Gamma\alpha$

2.4.7. Sea A un subconjunto borroso acotado y sea $M = \text{Sup}_x \ \mu_A(x)$ o sea que M es el máximo grado en A; entonces hay al menos un punto x_o al cual M está fijo en tal forma que para cada $\xi > 0$, cada vencindad esférica de x_o contiene puntos en el conjunto:

$$Q(\xi) = \{ x/\mu_A(x) \geq M - \xi \} \tag{2.55}$$

2.4.8. Un subconjunto borroso A es estrictamente convexo si los conjuntos $\Gamma\alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, son estrictamente convexos, esto es, si cualquier punto de la recta que une dos puntos cualquiera en $\Gamma\alpha$ está en el interior de $\Gamma\alpha$.

2.4.9. Un subconjunto borroso A es fuertemente convexo si para dos puntos distintos cualesquiera x_1 y x_2, y para cualquier λ en el intervalo abierto (0, 1) se cumple que:

$$\mu_A (\lambda x_1 \ (1 - \lambda)x_2) > \text{Min} \ (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \tag{2.56}$$

2.4.10. Si A es un conjunto borroso convexo, entonces su núcleo también es un conjunto convexo.

2.4.11. Si $x \in R'$ y A es fuertemente convexo, entonces el punto en el cual M está fijo es único.

2.4.12. Definición de Sombra de un Conjunto Borroso

Sea A un subconjunto borroso en R^n con función de membresía - $\mu_A(x) = \mu_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; la sombra o proyección de A en un hiperplano, por ejemplo, el hiperplano $H = \{x/x_1 = 0\}$, está definida como el subconjunto borroso $S_H(A)$ en R^{n-1} con $\mu_{SH}(A)(X)$ dada por:

$$\mu_{SH}(x) = \mu_{SH}(A)(x_2, \ldots, x_n) = \operatorname{Sup}_{x_1} \mu_A(x_1, \ldots, x_n) \qquad (2.57)$$

Se tienen las siguientes propiedades para la sombra de un subconjunto borroso:

2.4.13. Si A es un subconjunto borroso entonces su sombra en - cualquier hiperplano es también un subconjunto borroso.

2.4.14. Si para todo hiperplano H se tiene que:

$$S_H(A) = S_H(B) \Longrightarrow A = B \qquad (2.58)$$

2.4.15. Separación de Subconjuntos Borrosos Convexos.

Grado de separación: Sean A y B dos subconjuntos borrosos - convexos y sea H una hipersuperficie en R^n definida por la ecuación - $h(x) = 0$, teniendo los puntos para los cuales $h(x) \geq 0$ en un lado de H y los puntos para los cuales $h(x) \leq 0$ en el otro lado. Sea K_H un número dependiente de H tal que $\mu_A(x) \leq K_H$ en un lado de H y $\mu_B(x) \leq K_H$ en el otro lado y sea $M_H = \operatorname{Inf} K_H$; entonces el grado de separación de A y B será:

$$D_H = 1 - M_H \qquad (2.59)$$

2.4.16. Una Propiedad Importante de la Separación es la Siguiente:

Sea A y B dos subconjuntos borrosos acotados en R^n, con máximos grados de membresía M_A y M_B respectivamente, esto es, $M_A = \text{Sup}\, \mu_A(x)$, $M_B = \text{Sup}\, \mu_B(x)$; sea M el máximo grado de la intersección $A \cap B$, esto es, $M = \sup_x \{\text{Min}(\mu_A(x), \mu_B(x))$, entonces:

$$D = 1 - M \tag{2.60}$$

o sea que el máximo grado de separación de dos subconjuntos borrosos convexos que puede ser alcanzado por un hiperplano en R^n es uno menos el máximo grado de la intersección $A \cap B$.

2.5. CONSTRUCCION DE LAS FUNCIONES DE MEMBRESIA

El problema de una estimación práctica de las funciones de membresía no ha sido estudiado sistemáticamente [17]; sin embargo, algunos autores han presentado varios métodos independientes:

Ejemplificación [4]

Sea U un universo de objetos y A un conjunto borroso en U, μ_A puede ser estimada de información parcial acerca de el conjunto A, tales como los valores que μ_A toma en un número finito de puntos en U y hacer abstracción de las cualidades de interés; este procedimiento es utilizado en el reconocimiento de patrones [53].

Por ejemplo: Para construir la función de membresía de H = alto, preguntamos a varias personas si la altura h es "alto"; las respuestas estarán dadas en valores lingüísticos como: cierto, más o menos cierto, indeciso, más o menos falso, falso; trasladando estos niveles lingüísticos a números tendremos: 1, 0.75, 0.5. 0.25, 0, respectivamente y la representación de la función es obtenida repitiendo para varias alturas.

Prototipos Deformables [6]

Sea P un prototipo que puede ser deformado por manipulación de los parámetros $p_1, p_2, \ldots, p_n$; dado un objeto x se observan las deformaciones del prototipo, comparándose con las características del objeto, hasta que se obtiene la máxima similitud, la diferencia o disimilitud entre el objeto x y el prototipo es función de la mínima "distancia" entre ellos y una ponderación de la deformación, formalmente:

$$D(x) = \min_{p_1 \cdot\cdot p_n} (m(x; p_1, \ldots, p_n) + \omega\delta(p_1, .., p_n)) \qquad (2.61)$$

donde m es una función de la diferencia entre x y el prototipo y δ es una función de distorsión ponderada por ω. La función de membresía μ_p puede ser definida por:

$$\mu_p(x) = 1 - (D(x)/ \sup D) \qquad (2.62)$$

Definición Analítica [32]

Se supone que la función de membresía es continua y diferenciable, como los conjuntos borrosos en R; considérese por ejemplo el adjetivo A = largo, el incremento marginal de la afirmación de una persona en el sentido de que "x está en A' se supone proporcional a la afirmación de que "x está en A' y a la negativa "x no está en A", esto es:

$$\frac{d\,\mu_A(x)}{dx} = k\,\mu_A(x)\,(1 - \mu_a(x)) \qquad (2.63)$$

cuya solución es:

$$\mu_A(x) = 1/(1 + e^{a-bx}) \qquad (2.64)$$

los parámetros a y b son estimados de datos estadísticos; este método es más la justificación de un perfil de conducta que un procedimiento cuantitativo de estimación.

Uso de Estadísticas [17]

Las funciones de membresía pueden ser estimadas a través de encuestas y $\mu_A(x)$ será la proporción de respuestas positivas a la pregunta de inclusión en el conjunto universo, ¿x está en A?; la suposición implícita es que la probabilidad de una respuesta positiva de la persona entrevistada incrementa con el valor de $\mu_A(x)$, específicamente, la probabilidad de una respuesta positiva es proporcional a $\mu_A(x)$.

Método de Preferencias Relativas [43]

Sea A un subconjunto borroso de un universo U; los valores de membresía $\mu_A(x_i) = \omega_i$ de x_i U son calculados de un conjunto de datos que representan los valores relativos de membresía t_{ij} de un elemento x_i en A con respecto a la membresía de un elemento x_j en A; se utiliza una escala de 1 a 9 y sus recíprocos 1, ½, ..., 1/9 donde cada nivel tiene un significado semántico.

Comparación de Subconjuntos [20]

Supóngase que A es un subconjunto borroso de U con función de membresía μ_A, se induce un subconjunto borroso $\hat{A}$ de A en P(U), suponiendo que U es finito con la fórmula:

$$\mu_A((x_1, \ldots, x_k)) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_A(x_i) \qquad (2.65)$$

esta definición tiene el significado intuitivo de membresía promedio de $(x_1, \ldots, x_k)$ en A; se define una relación de preferencia en p(u) denotada por $\gtrsim$ tal que:

$$\forall\, S_1, S_2 \in p(u),\ S_1 \gtrsim S_2 \text{ si } \mu_{\hat{A}}(S_1) \geq \mu_{\hat{A}}(S_2)$$

la interpretación de S_1 S_2 es que S_1 se acopla mejor a A que S_2. Los datos forman un conjunto de preferencias entre los subconjuntos de U -- que pueden ser transformados en un sistema de desigualdades que relacione los valores de las membresías, utilizando la definición de μ_A, y determinarán la función $\mu_A(x_i)$; la aplicabilidad del método está limitada por el tamaño de P(U).

Función de Filtrado [34]

Una función de filtrado es caracterizada por dos parámetros, la localización del punto neutro NP tal que: F (NP) = 1/2 y la anchura 2ω de la transición entre membresía y no membresía, esto es:

$$F(x;\, NP,\, \omega) = \left|\begin{array}{lll} 0 & \text{si } x & (-\infty\,, NP - \omega) \\ (\tfrac{1}{2}\,\omega)(x - NP\ \omega) & \text{si } x & (NP - \omega,\, NP + \omega) \\ 1 & \text{si } x & (NP + \omega,\, +\infty) \end{array}\right.$$

se descarta por desusual un perfil de transición complicado debido a la imprecisión. Si se tiene por ejemplo el concepto "alto" para una población dada y se tiene que es descrita con una función de probabilidad - normal con parámetros $\overline{x}$ y σ, entonces se dice que "una persona es alta" y la altura estará modelada por la función de membresía:

$\mu(x) = F\,(x;\, \overline{x} + \alpha\sigma,\, \beta\sigma)$ donde x es la altura y α y β - son determinados experimentalmente y el calificativo "bajo" estará modelado por $1 - F\,(x;\, \overline{x} - \alpha\sigma,\, \beta\sigma)$.

III. APLICACION AL ANALISIS DE DECISIONES

3.1. CONSIDERACIONES

Generalmente las decisiones se hacen sin tener un conocimiento preciso de las metas, condiciones, estados del sistema efector y las consecuencias de las posibles acciones, para tratar cuantitativamente - esta imprecisión; usualmente se emplean los conceptos y técnicas de la teoría de la probabilidad aceptando implícitamente que imprecisión es - igual a aleatoriedad, desde el punto de vista de la matemática borrosa. Esto no es igual y debe diferenciarse aleatoriedad de imprecisión; el origen de la imprecisión es la indeterminación de las fronteras del conjunto al cual pertenece el objeto tratado y la aleatoriedad se origina en la incertidumbre de pertenecer o no pertenecer a un conjunto de fronteras bien definidas; para mostrar esta diferencia se tiene la siguiente afirmación borrosa: "La corporación x tiene un rendimiento satisfactorio", y la afirmación probabilística "La probabilidad de que la corporación x esté operando con ganancia es 0.8". Considerando esta distinción, las técnicas matemáticas para tratar la borrosidad son muy diferentes a las de la teoría de la probabilidad.

En este capítulo se presentarán algunos conceptos básicos y - técnicas del análisis de decisión borroso; primero, se expondrá la definición de decisión en términos borrosos; después se analizarán casos en orden de complejidad creciente, con borrosidad en metas y restricciones, estado de sistema, utilidad asociada y otros.

Las consideraciones anteriores y las características de los - subconjuntos borrosos cuyo desarrollo teórico ha estado ligado al método sistémico desde su origen como técnica de selección y análisis [53], [56], hizo factible aplicar esta teoría al desarrollo de un método de - decisión "borroso", que comprendiera objetivos, restricciones y estados del sistema o alternativas borrosas o imprecisas, que incluyera los aspectos de interdependencia de la utilidad y la representación de medi--

das subjetivas en un lenguaje natural, de tal modo que este método pudiera ser un enfoque alternativo.

3.2. ANALISIS DE DECISIONES BORROSO

En el análisis de decisiones convencional los principales elementos son:

- Un conjunto de alternativas
- Un conjunto de restricciones para la selección de alternativas
- Una función de rendimiento asociada con la ganancia o pérdida de cada alternativa.

Cuando el proceso de decisión es abordado en un ambiente borroso, se tiene un marco conceptual diferente; el más importante aspecto de este marco es su simetría con respecto a metas y restricciones, una simetría que borra la diferencia entre ellas y hace posible relacionar en una forma simple el concepto de decisión con las metas y las restricciones [4].

Específicamente, sea $X = x$ un conjunto dado de alternativas, entonces una meta u objetivo borroso, o simplemente un objetivo, G, en X puede ser identificado como un conjunto borroso dada G en X.

Por ejemplo, si $X = R^1$ (la recta real), un objetivo borroso expresado en palabras podrá ser: "x será sustancialmente mayor que 10" y puede ser representado como un conjunto borroso en R^1 con su función de membresía en forma analítica; similarmente puede ser la meta "x deberá estar en la vencindad de 15".

En el enfoque usual la función de rendimiento asociada al proceso de decisión sirve para definir un ordenamiento en el conjunto de alternativas, en el caso borroso la función de membresía normalizada sirve para el mismo propósito.

De manera similar, una restricción borrosa, o simplemente una restricción C, en X, es definida como un conjunto borroso en X; por -- ejemplo, en R^1, la restricción "x estará aproximadamente entre 2 y 10" la cual podrá ser representada con una función de membresía de la forma adecuada.

Una ventaja importante que se tiene al definir los objetivos y restricciones como conjuntos borrosos y tratarse idénticamente en la formulación de una decisión, es que no se necesita la función de rendimiento que se aplica del espacio de alternativas al espacio de utilidades [19].

Como ilustración, supóngase que se tiene una meta borrosa G y una restricción borrosa C, expresadas como sigue:

G: x será sustancialmente mayor que 10, con función de membresía dada por:

$$\begin{aligned} \mu_G(x) &= 0 \text{ para } x < 10 \\ &= (1 + (x-10)^{-2})^{-1} \text{ para } x \geq 10 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Y

C: x estará en la vecindad de 15, con función de membresía dada por:

$$\mu_C(x) = (1 + (x - 15)^4)^{-1} \tag{3.3}$$

Nótese que G y C están conectádos por el conectivo "Y", y según se vió en2.2.4., "Y" corresponde a la intersección de conjuntos borrosos, esto implica que los efectos combinados de objetivos y restricciones borrosas del ejemplo pueden ser representados por la intersección $G \cap C$; y la función de membresía de la intersección está dada por:

$$\mu_{G \cap C}(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x) \tag{3.4}$$

o más explícitamente:

$$\mu_{G \cap C}(x) = \mathrm{Min}((1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 15)^{4})^{-1})$$

$$\text{para } x \geq 10$$

$$= 0 \qquad \text{para } x < 10$$

y siendo (3.2) y (3.3) conjuntos convexos borrosos, también lo será su intersección.

Revisando el concepto de decisión, observamos que una decisión es básicamente una selección extraída de un conjunto de alternativas disponibles, del ejemplo anterior se puede inferir que una decisión borrosa puede ser definida como el conjunto borroso de alternativas resultantes de la intersección de metas y restricciones.

Definición de decisión borrosa: Supóngase que se tiene un objetivo borroso G y una restricción borrosa C en un espacio de alternativas X; entonces, G y C se combinan para formar una decisión D, la cual es un conjunto borroso resultante de la intersección de G y C, o sea:

$$D = G \cap C \tag{3.5}$$

y su función de membresía:

$$\mu_D = \mu_G \wedge \mu_C \tag{3.6}$$

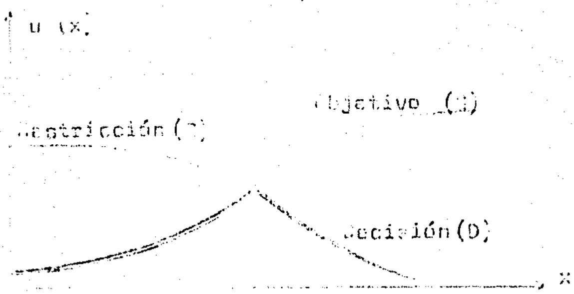


Figura 3.1. [4] RELACION ENTRE G, C Y D

Generalizando esta relación, supóngase que tenemos n objetivos, G_1, ..., G_n y m restricciones C_1, ..., C_m; entonces la decisión resultante es la intersección de los objetivos dados G_1, ..., G_n y las restricciones dadas C_1, ..., C_m esto es:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap .. \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap .. \cap C_m \tag{3.7}$$

y su correspondiente función de membresía:

$$\mu_D = \mu_{G_1} \wedge \mu_{G_2} \wedge .. \wedge \mu_{G_n} \wedge \mu_{C_1} \wedge \mu_{C_2} \wedge .. \wedge \mu_{C_m} \tag{3.8}$$

En la definición anterior los objetivos y las restricciones entran en la expresión para D de idéntica manera; esta es la base para el argumento de simetría o de igualdad en la formulación de decisiones en ambiente borroso. Visto en términos borrosos podemos decir que es la confluencia de objetivos y restricciones.

Decisión = Confluencia de objetivos y restricciones.

Para ilustrar esta definición, consideremos, por ejemplo, - $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ y G_1, G_2, C_1, C_2 definidas por:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_{G_1}	0	.1	.4	.8	1	.7	.4	.2	0	0
μ_{G_2}	.1	.6	1	.9	.8	.6	.5	.3	0	0
μ_{C_1}	.3	.6	.9	1	.8	.7	.5	.3	.2	.1
μ_{C_2}	.2	.4	.6	.7	.9	1	.8	.6	.4	.2

Formando la conjunción de μ_{G_1}, μ_{G_2}, μ_{C_1}, μ_{C_2} tenemos los valores siguientes para $\mu_D(x)$:

x	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
μ_D	0	.1	.4	.7	.8	.6	.4	.2	0	0

Entonces la decisión en este caso es el conjunto borroso:

$$D = (2/.1), (3/.4), (4/.7), (5/.8), (6/.6), (7/.4), (8/.2)$$

Esta decisión de tipo borroso puede ser vista como una instrucción cuya borrosidad es consecuencia de la imprecisión de los objetivos y restricciones dadas, en este ejemplo G_1, G_2, C_1, C_2 puede ser expresadas en palabras respectivamente como: "x será cercano a 5", - "x será cercano a 3", "x será cercano a 4", "x será cercano a 6". La decisión será entonces escoger x cercano a 5; en cada caso el significado de cercano está dado por los valores de la función de membresía - correspondiente, se ve que de los valores de $\mu_D(x)$ no hay x en X con - valor de membresía unitario, esto refleja el que los objetivos y restricciones son conflictivos entre sí y no existe alternativa que satisfaga a todos ellos.

Definición de decisión óptima: Sea D una decisión borrosa - representada por la función de membresía μ_D, sea K el conjunto de puntos en un universo de discurso X en los cuales μ_D toma su máximo, si - éste existe; entonces, el subconjunto no borroso pero generalmente subnormal, D^M de D definido por:

$$\mu_{D^M}(x) = \text{Max}\ \mu_D(x) \qquad \text{para} \quad x \quad \text{en } K \tag{3.9}$$

$$= 0 \qquad \text{en otro lugar}$$

será llamado la decisión óptima para cualquier x en el soporte de D^M y también será llamada la decisión maximizante.

Se tiene entonces que una decisión maximizante es simplemente cualquier alternativa en X que maximice $\mu_D(x)$ en el ejemplo anterior esta decisión será x = 5 con grado de membresía 0.8 que es mayor a los otros grados.

La condición suficiente de unicidad de la decisión máxima u óptima cuando se está en R^n es que D sea un conjunto borroso fuertemente convexo, es decir, que D tenga una función de membresía unimodal.

Objetivos y metas ponderados: En la definición de decisión borrosa D, como la intersección o confluencia de objetivos y restricciones se asume que todos ellos son de igual importancia; sin embargo, en algunas situaciones algunos objetivos o restricciones son de mayor importancia que otros. En tales casos D puede ser expresada como una combinación convexa de tales objetivos y restricciones con los coeficientes de ponderación reflejando la importancia relativa entre ellos. Esto puede expresarse como:

$$\mu_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\, \mu_{G_i}(x) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x)\, \mu_{C_j}(x) \tag{3,10}$$

donde α_i y β_i son funciones de membresía tales que:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(x) = 1 \qquad (3.11)$$

Con los elementos y definiciones vistas hasta aquí se puede resolver algún tipo de problemas, como se hará en el cuarto capítulo, y se tiene que la definición de decisión es válida en toda circunstancia y sólo cambia la enumeración o forma de presentar los objetivos y restricciones; esta definición se extiende al análisis de un sistema definido en su estructura y sus estados [31], desarrollándose la técnica apropiada para los casos de un sistema con estados y con utilidades borrosas [25].

Formulación del Problema:

El sistema considerado puede tener n estados representados por:

$$X = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \} \qquad (3.12)$$

y m alternativas o estados controlados representados por:

$$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \} \qquad (3.13)$$

con una matriz de impactos m X n:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} \cdots u_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{mi} \cdots u_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

si el estado del sistema es conocido, $x_j \in X$, entonces el problema de seleccionar la mejor alternativa se reduce a encontrar la alternativa que tenga la máxima utilidad para ese estado:

$$u_o = \bigvee_{i=1}^{m} u_{ij} \tag{3.15}$$

donde $\bigvee$ es el operador "máximo".

Pero si el conocimiento que se tiene del estado del sistema y de las utilidades o impactos es impreciso, tendrá que aplicarse otro procedimiento para encontrar un conjunto impreciso de alternativas, borroso, que contenga las alternativas óptimas:

$$A_o^f = \{ \mu_{Ao} \ (a_i), \ a_i \} \tag{3.16}$$

y estará formado por las alternativas y el mérito de cada una, es decir el orden de preferencia, está reflejado en el grado de membresía con que pertenece a este conjunto.

El caso de conocimiento impreciso del estado del sistema.- Si el estado del sistema se conoce sólo en forma borrosa, representado por:

$$X^f = \{ \mu_X \ (x_k), \ x_k \} \tag{3.17}$$

no podrá determinarse en forma exacta la utilidad asociada; sin embargo, la información disponible puede ser utilizada para determinar en forma borrosa la utilidad asociada con cada alternativa $a_i \in A$; esta utilidad está dada por:

$$U_i^f = \{ \mu_{U_i} \ (x_k), \ x_k \} \tag{3.18}$$

donde:

$$u_k = u_{ik} \tag{3.19}$$

y:

$$\mu_{U_i}(x_k) = \mu_X(x_k) \tag{3.20}$$

El problema es ahora seleccionar la alternativa óptima sobre la base de utilidades borrosas de cada estrategia, considerando los extremos una decisión podría ser escoger la alternativa con máxima utilidad o escoger la de máxima membresía, el balancear la cantidad entre estos criterios será el que determine la selección.

La forma de encontrar este punto es utilizando el concepto de conjuntos maximizantes. El conjunto maximizante M (f) para una función f en Y es un subconjunto borroso de Y tal que, el grado de membresía de un punto, y, en M (f) representa el grado en el cual f (y) se aproxima al sup f, [54]; el primer paso será entonces formar el conjunto Y con todos los valores las utilidades resultantes de los estados borrosos dados, el conjunto será:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{m} S(U_i) \tag{3.21}$$

Se determina el conjunto maximizante para la alternativa $a_i \in A$, el cual es el conjunto borroso que representa la membresía de $S(U_i)$ en Y, y es denotado por:

$$U_{im}^{f} = \{\mu_{U_{im}}(u_k),\ u_k\} \tag{3.22}$$

donde:

$$\mu_{U_{im}}(u_k) = [u_k/u_{max}]^n \tag{3.23}$$

y:

$$u_{max} = \sup Y \tag{3.24}$$

con n entero dependiendo de su aplicación.

Ahora se forma un conjunto borroso U_{io}^{f} combinando la información disponible sobre los conjuntos U_{im}^{f} y U_{i}^{f}, es decir, la confluencia del valor de las utilidades y el rendimiento o membresía en el conjunto total de utilidades, este conjunto estará formado por la intersección borrosa de U_{im}^{f} y U_{i}^{f}, y estará caracterizado por la función de membresía:

$$\mu_{U_{io}}(u_k) = \mu_{U_{im}}(u_k) \wedge \mu_{U_i}(u_k) \tag{3.25}$$

se tiene entonces que al formar el conjunto U_{iO}^{f} se ha considerado la información del estado del sistema al asignar el grado de membresía de cada valor de la utilidad u_k y al mismo tiempo se incluye el valor relativo de cada utilidad, este conjunto U_{io}^{f}, o sea:

$$\mu_{A_o}(a_i) = \bigvee_k \mu_{U_{io}}(u_k) \tag{3.26}$$

y:

$$A_o^f = \{ \mu_{A_o}(a_i), a_i \} \tag{3.27}$$

este conjunto A_o muestra los méritos u optimalidad de cada alternativa a_i, en el valor de su membresía en A_o.

Formalmente, la alternativa óptima a_o será la de mayor membresía en A_o, o sea:

$$\mu_{A_o}(a_o) = \bigvee_i \mu_{A_o}(a_i) \tag{3.28}$$

El caso de utilidades imprecisas: Se considera que la utilidad U_{ij} asociada con la alternativa a_i y el estado x_j es borrosa y estará dada por:

$$u_{ij}^{f} = \{ \mu_{ij}(u_k), u_k \} \tag{3.29}$$

y la matriz de utilidades será en este caso:

$$U = \begin{bmatrix} U^f_{11} & \cdot\cdot & U^f_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ U^f_{m1} & \cdot\cdot & U_{mn} \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

Si se conoce que el estado del sistema es x_j X, entonces - el procedimiento para seleccionar la alternativa óptima es similar al - caso de conocimiento borroso del estado del sistema, pero en esta oca-- sión deberá tomarse:

$$U^f_i = U^f_{ij} \qquad (3.31)$$

y continuando el proceso se obtendrá el conjunto borroso de alternati-- vas óptimas A^f_o .

La aplicación de los conjuntos borrosos al análisis de decisiones ha evolucionado también utilizando otros conceptos, destacándose principalmente las variables lingüísticas presentadas por Zadeh en 1973 [58] y 1975 [60]; con el empleo de las variables lingüísticas se ha estimado la incertidumbre en las decisiones [49] y en algunos casos se logró hacer el análisis en forma de árbol [10], y para decisiones sobre - pronósticos se tienen reportes [26].

IV. PROBLEMAS DE DECISION

4.1. APLICACION DE LAS OPERACIONES SIMPLES

Un problema de decisión [7]

i. La Situación

El problema es una situación hipotética en la que el comandante de una fuerza naval tiene que decidir en el siguiente caso:

La misión de la fuerza es conquistar una isla que se encuentra en poder del enemigo. La fuerza está compuesta por dos fragatas, cuatro corvetas, ambos con misiles superficie a superficie y superficie a aire, nueve botes patrulleros de combate y tres transportes de tropa con 2500 marinos. Se sabe que el enemigo tiene dos submarinos, diez botes patrulleros, dos escuadrones de 15 aviones cada uno y misiles de superficie a superficie estacionados en tierra alrededor de la ciudad capital de la isla; se conoce que esos misiles son capaces de hundir toda la flota. Afortunadamente, su rango es de sólo 120 millas náuticas. Es de esperarse que después del desembarque la gente de la isla apoye a las tropas desembarcadas. Además, hay una reserva de tropas que pueden ser transportadas en un segundo viaje de los transportes, suponiendo que no fueran hundidos en el primer viaje. Las fuerzas de tierra enemigas incluyen aproximadamente 9000 gentes de tropa y un batallón de tanques ligeros que están concentrados principalmente en los alrededores de la capital. La isla tiene un perfil rectangular con 700 millas náuticas de este a oeste y 200 millas de norte a sur; la ciudad capital está localizada en la parte media de la costa norte. La parte más cercana para desembarcar es la costa oeste de la isla.

Los objetivos X_i y las restricciones Y_i del comandante de la fuerza naval son:

X_1 = Conquistar la ciudad capital de la isla tan pronto como sea posible.

X_2 = Mantener al mínimo la pérdida de barcos y personal.

Y_1 = Falta de información sobre la localización de las fuerzas navales enemigas

Y_2 = Desconocimiento de cuánta gente se unirá a las tropas, pero se suponen proporcionales al territorio conquistado.

Y_3 = Como la fuerza naval no tiene aviones y no puede recibir ayuda de su país, depende de los misiles superficie a aire y de la artillería para defenderse de la aviación enemiga.

Los cursos de acción que pueden ser considerados son:

A = Desembarcar en la costa oeste, en cuyo caso es creíble que la fuerza naval no encuentre oposición pero dada la distancia a la capital, el enemigo presentará fuerte resistencia a los marinos y la operación entera puede ser retrasada. Sin embargo, será posible transportar a la isla las tropas de reserva.

B = Desembarcar en la costa sur, en cuyo caso es probable que sea atacada la fuerza naval por la aviación enemiga. Si no son descubiertos prematuramente, los marinos desembarcarán libremente sin mayor oposición y su objetivo estará a una distancia de 200 millas náuticas.

C = Desembarcar en la costa norte, justo fuera del alcance de los misiles de superficie a superficie (120 mi llas náuticas), en cuyo caso las fuerzas navales y de tierra estarán sujetas a un fuerte ataque.

ii. La Solución

La decisión se hará utilizando las operaciones elementales de los conjuntos borrosos.

Lo primero es expresar las funciones de membresía de los objetivos y restricciones borrosos en el espacio de alternativas, se supone que son como sigue:

	A	B	C
X_1	.5	.7	.6
X_2	.7	.6	.4
Y_1	.6	.5	.3
Y_2	.8	.7	.7
Y_3	.8	.7	.6

(4.1)

El significado de estos valores es, por ejemplo, X_1 considerando la alternativa A, será más o menos obtenible, si se escoge la alternativa B será más realizable que con A, si se escoge C entonces X_1 será una posibilidad intermedia. Para las restricciones Y_i estos valores significan lo limitante o restrictivo de cada concepto representado por Y_i.

En esta etapa pueden jerarquizarse los objetivos por orden de importancia, de acuerdo con una relación del tipo de (3.10) o por algún método como el propuesto por Saaty [44], o como se hace aquí, sin jerarquizar y en caso de igualdad de la decisión optar por alguna con base en consideraciones heurísticas [19].

La decisión, que es un conjunto borroso de alternativas definido en (3.7) y (3.8) es la intersección:

$$D = X_1 \cap X_2 \cap Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \{.5\ A,\ .5\ B,\ .3\ C\} \quad (4.2)$$

y es la confluencia de objetivos y restricciones tratados simétricamente y que definen un espacio factible de alternativas. La alternativa óptima o maximante definida en (3.9) será un empate entre A y B ambas con .5 de membresía, pero si toma como objetivo principal conquistar la isla, X_1, la decisión óptima será B por ser más eficiente esta alternativa para lograr X_1, como lo muestra el coeficiente X_1B en (4.1).

4.2. UN PROBLEMA DE DECISION DONDE EL ESTADO DEL SISTEMA ES BORROSO [25]

i. La Situación

Se tiene que tomar la decisión sobre un sistema del cual no está bien determinado el estado. Los estados que puede tener el sistema son:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\} \quad (4.3)$$

y las alternativas posibles son:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\} \quad (4.4)$$

la matriz de consecuencias es:

$$U = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 2 & 2 & 3 & 1 & 7 & 8 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

el estado borroso del sistema es:

$$X^f = \{(0, x_1), (0, x_2), (.4, x_3), (.8, x_4), (1, x_5), (.7, x_6), ,(.3, x_7), (0, x_8), (0, x_9), (0, x_{10})\} \quad (4.6)$$

ii. La Solución

Para determinar el conjunto de alternativas óptimas lo primero es especificar las utilidades, borrosas como consecuencia del estado borroso, asociadas a cada alternativa y definidas en (3.18) y tomando en cuenta que si una utilidad U_p aparece k veces con grados de membresía $\mu_1, \mu_2, \ldots, {}_k$ entonces el grado de membresía de U_k será:

$$\mu = \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \ldots \oplus \mu_k \quad (4.7)$$

o sea la suma algebráica definida en (2.33) y es:

$$\mu_1 \oplus \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2 \quad (4.8)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} U_1^f &= \{(0.4, 2), (0.8, 2), (1.0, 3), (0.7, 1), (0.3, 7)\} \\ &= \{(.88, 2), (1.0, 3), (0.7, 1), (0.3, 7)\} \\ U_2^f &= \{(0.4, 7), (0.8, 8), (1.0, 1), (0.7, 7), (0.3, 6)\} \\ &= \{(.82, 7), (0.8, 8), (1.0, 1), (0.3, 6)\} \\ U_3^f &= \{(0.4, 3), (0.8, 4), (1.0, 5), (0.7, 6), (0.3, 8)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

el conjunto Y definido en (3.21) será:

$$\begin{aligned} Y &= S(U_1) \cup S(U_2) \cup S(U_3) \quad (4.10) \\ &= \{2, 3, 1, 7\} \cup \{7, 8, 1, 6\} \cup \{3, 8, 4, 6, 5\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

de donde el $\sup(Y) = 8$

se determinan los conjuntos maximizantes para cada alternativa, según (3.22), con $n = 1$ en (3.23):

$$U^f_{1m} = \{(.25,\ 2),\ (.375,\ 3),\ (.125,\ 1),\ (.875,\ 7)\}$$

$$U^f_{2m} = \{(.875,\ 7),\ (1.0,\ 8),\ (.125,\ 1),\ (.75,\ 6)\}$$

$$U^f_{3m} = \{(.375,\ 3),\ (.5,\ 4),\ (.625,\ 5),\ (.75,\ 6),\ (1.0,\ 8)\} \qquad (4.11)$$

de acuerdo con (3.25) se obtienen los siguientes conjuntos:

$$U^f_{10} = \{(.25,\ 2),\ (.375,\ 3),\ (.125,\ 1),\ (.3,\ 7)\}$$

$$U^f_{20} = \{(.82,\ 7),\ (.8,\ 8),\ (.125,\ 1),\ (.3,\ 6)\}$$

$$U^f_{30} = \{(.375,\ 3),\ (.5,\ 8),\ (.625,\ 5),\ (.7,\ 6),\ (.3,\ 8)\} \qquad (4.12)$$

y con (3.26) se obtienen:

$$\mu_{Ao}(a_1) = \vee\ (.25,\ .375,\ .125,\ .3) = 0.375$$

$$\mu_{Ao}(a_2) = \vee\ (.82,\ .8,\ .125,\ .3) = 0.82$$

$$\mu_{Ao}(a_3) = \vee\ (.375,\ .5,\ .625,\ .7,\ .3) = 0.7 \qquad (4.13)$$

y de (3.27) se tiene que el conjunto de alternativas óptimas es:

$$A^f_0 = \{(0.375),\ a_1),\ (0.82,\ a_2),\ (0.7,\ a_3)\} \qquad (4.14)$$

y por (3.28) la alternativa óptima será:

$$A_0 = a_2$$

siguiéndole en orden a_3 y a_2 sucesivamente.

4.3. UN PROBLEMA DE DECISION EN LA QUE SE CONOCE EL ESTADO DEL SISTEMA PERO LA UTILIDAD ES BORROSA [25]

i. La Situación

Se debe decidir cuál alternativa es óptima en un sistema en el cual se conoce el estado en que se encuentra pero las utilidades asociadas a cada alternativa no están bien definidas y que se cuantifican lingüísticamente.

Los estados posibles del sistema son:

$$X = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \qquad (4.15)$$

en este caso el estado particular del sistema es x_9.

Las alternativas que se consideran son:

$$A = a_1, a_2, a_3 \qquad (4.16)$$

La matriz de utilidades es:

$$U = \begin{bmatrix} MA & A & B & B & M & MB & A & MA & MA & M \\ B & MB & A & MB & MB & A & A & M & M & MA \\ A & M & B & M & M & A & MA & M & B & B \end{bmatrix} \qquad (4.17)$$

donde B, M, A, MA, MB significan bajo, medio, alto, muy alto, muy bajo respectivamente.

ii. La Solución

Se inicia con la asignación de valores a las variables lingüísticas que son:

$$
\begin{aligned}
\text{bajo} &= \{(0.4,\ 1),\ (1.0,\ 2),\ (0.5,\ 3)\}\\
\text{muy bajo} &= \{(1.0,\ 1),\ (0.4,\ 2)\}\\
\text{medio} &= \{(0.4,\ 3),\ (0.7,\ 4),\ (1.0,\ 5),\ (0.7,\ 6),\ (0.4,\ 7)\}\\
\text{alto} &= \{(0.5,\ 7),\ (1.0,\ 8),\ (0.5,\ 9)\}\\
\text{muy alto} &= \{(0.5,\ 9),\ (1.0,\ 10)\} \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Se determinan de acuerdo con (3.31) los conjuntos que representan las utilidades que corresponden al estado x_9 que son:

$$
\begin{aligned}
U_1^f &= \text{muy alto} = \{(0.5,\ 9),\ (1.0,\ 10)\}\\
U_2^f &= \text{medio} = \{(.4,\ 3),\ (.7,\ 4),\ (1.0,\ 5),\ (.7,\ 6),\ (.4,\ 7)\}\\
U_3^f &= \text{bajo} = \{(0.4,\ 1),\ (1.0,\ 2),\ (0.5,\ 3)\} \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Para este problema es obvio que la mejor alternativa es a_1 - que tiene utilidad muy alta, pero continuando con el procedimiento se - determina el conjunto Y definido en (3.21):

$$
\begin{aligned}
Y &= S(U_1) \cup S(U_2) \cup S(U_3) \qquad (4.20)\\
&= (9,\ 10) \cup (3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,) \cup (1,\ 2,\ 3)\\
&= \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}
\end{aligned}
$$

de donde sup (y) = 10

Se determinan los conjuntos maximizantes para las diversas - alternativas, según (3.22) con n = 1 en (3.23)

$$
\begin{aligned}
U_{1m}^f &= \{(0.9,\ 9),\ (1.0,\ 10)\}\\
U_{2m}^f &= \{(.3,\ 3),\ (.4,\ 4),\ (.5,\ 5),\ (.6,\ 6),\ (.7,\ 7)\}\\
U_{3m}^f &= \{(.1,\ 1),\ (.2,\ 2),\ (.3,\ 3)\} \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

de acuerdo con (3.25) se obtienen los siguientes conjuntos:

$$U_{10}^{f} = (.5,\ 9),\ (1.0,\ 10)$$

$$U_{20}^{f} = (.3,\ 3),\ (.4,\ 4),\ (.5,\ 5),\ (.6,\ 6),\ (.4,\ 7)$$

$$U_{30}^{f} = (.1,\ 1),\ (.2,\ 2),\ (.3,\ 3) \qquad (4.22)$$

y con (3.26) se determinan:

$$\mu_{Ao}(a_1) = \vee\ (.5,\ 1.0) = 1.0$$

$$\mu_{Ao}(a_2) = \vee\ (.3,\ .4,\ .5,\ .6,\ .4) = .6$$

$$\mu_{Ao}(a_3) = \vee\ (.1,\ .2,\ .3) = .3 \qquad (4.23)$$

y de (3.27) se tiene que el conjunto óptimo de alternativas es:

$$A_o = \{ 1.0\ a_1,\ .6\ a_2,\ .3\ a_3 \} \qquad (4.24)$$

y de (.328) la alternativa óptima es:

$$A_o = a_1 \qquad (4.25)$$

siguiéndole en orden a_2 y a_3 respectivamente.

EL CASO DEL AEROPUERTO DE LA CIUDAD DE MEXICO

i. La Situación

Al finalizar la década de los años 60, el gobierno mexicano inició un estudio para determinar la estrategia más efectiva para aumentar las instalaciones aeroportuarias de la ciudad de México, de modo que se garantizara la calidad del servicio aéreo en lo que resta del siglo. Dos alternativas básicas fueron consideradas:

1. Expandir las instalaciones del aeropuerto de Texcoco.
2. Construir un nuevo aeropuerto en Zumpango, 40 km al norte de la ciudad y no ampliar el existente.

ii. El Proceso de Decisión

En 1971, Keeney [30] propuso una solución basada en el método de curvas de utilidad para multiobjetivos, atendiéndose dos aspectos: el de efectividad y el político. Para el primero, se analizaron seis objetivos:

1. Minimizar la totalidad de costos de construcción y mantenimiento.
2. Tener capacidad adecuada a la demanda del tráfico aéreo.
3. Minimizar el tiempo de acceso al aeropuerto
4. Maximizar la seguridad del sistema
5. Minimizar los trastornos sociales por las obras.
6. Minimizar la contaminación por ruido del tráfico aéreo.

Se clasificó a los usuarios del aeropuerto en internacionales (I), domésticos (D), generales (G) y militares (M). Esta clasificación genera el conjunto de alternativas que son todas las posibles combinaciones de la clasificación de los usuarios en los dos sitios posibles y se analizan en tres etapas sucesivas. Las combinaciones dan 4096 alternativas, de las cuales se descartaron las no factibles o más inconvenientes, quedando aproximadamente 100, las cuales se estudiaron como describe el reporte y se presentan las 10 mejores [30, pág. 462].

El otro aspecto tratado es el llamado "análisis dinámico" que tiene también como objetivo decidir qué acciones se deben tomar en 1971 para garantizar la calidad del tráfico aéreo pero incluye la posibilidad de una segunda etapa o decisión en 1976 e introduce como objetivos los efectos políticos en la Presidencia de la República, Secretaría de Obras Públicas y Secretaria de Comunicaciones y Transportes, la flexibilidad de una segunda etapa de decisión en 1976 y las externalidades debidas a prestigio, desarrollo regional, balance o distribución del presupuesto federal entre las diferentes regiones y el gasto en carreteras de acceso.

iii. Alternativas

Las alternativas se generaron considerando cuatro grados o niveles de acometimiento en los dos sitios: mínimo, bajo, moderado y alto, que son:

Para Texcoco:

Mínimo: Unicamente mantenimiento e introducción de equipo de seguridad.

Bajo: Extender pistas, mejorar los servicios de terminal, mantenimiento y nuevo equipo de seguridad.

Moderado: Agregar a lo hecho en el plan "bajo", comprar y preparar - terreno para construir una pista nueva e incrementar los - servicios a pasajeros.

Alto: En el corto plazo, construir una pista nueva y terminal, - construir la totalidad de un aeropuerto nuevo.

Para Zumpango:

Mínimo: Por lo menos comprar terreno en Zumpango.

Bajo: Comprar terreno, construir una pista y una terminal modesta.

Moderado: Comprar terreno, construir la primera pista y planear -- otras, construir una terminal mayor y la carretera a México.

Alto: Construir varias pistas, terminal grande y carretera en acceso, esto es, construir un gran aeropuerto en Zumpango.

La eficacia de cada alternativa puede modificarse según - las circunstancias y debe considerarse:

1. Eventos críticos en el período 197-1976 que cambien la selección de la mejor estrategia
2. La verosimilitud de su ocurrencia
3. La reacción a estos eventos
4. Cambios en las posibles consecuencias de cada alternativa

Los eventos que puede cambiar el escenario serían tales - como: factores de seguridad, accidentes aéreos, cambios en el perfil de demanda, innovaciones tecnológicas, actitud pública hacia el ruido y cambios en las prioridades del gasto.

Estas alternativas se exhiben en la tabla 4.26:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">NIVEL DE ACOMETIMIENTO EN ZUMPANGO</th><th colspan="4">NIVEL DE ACOMETIMIENTO EN TEXCOCO</th></tr>
<tr><th>Mínimo</th><th>Bajo</th><th>Moderado</th><th>Alto</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>Mínim.</td><td colspan="2" rowspan="2">Acometimientos menores</td><td colspan="2">Solamente iniciar en Texcoco</td></tr>
<tr><td>Bajo</td><td colspan="2">Mayor en Texcoco con Zumpango detrás</td></tr>
<tr><td>Moder.</td><td rowspan="2">Sólo Zumpango</td><td rowspan="2">Mayor en Zumpango con Texcoco detrás</td><td colspan="2" rowspan="2">Construcción de dos aeropuertos</td></tr>
<tr><td>Alto</td></tr>
</table>

TABLA 4.26 [30]

iv. Evaluación de Alternativas

Las 16 alternativas fueron evaluadas en una serie de discusiones de las partes interesadas, en un primer examen fueron descartadas siete de ellas. Posteriormente, en un análisis realizado por miembros de la SOP, se jerarquizaron las alternativas restantes, de acuerdo con los atributos de flexibilidad, efectos políticos, externalidades y efectividad. La jerarquización fue realizada por discusión y representa el juicio consensual.

Los resultados son mostrados en la tabla 4.27, donde los números más pequeños representan las mejores alternativas.

A T R I B U T O S

Alternativa	Flexibilidad	EFECTOS POLITICOS EN: Presidencia	SOP	SCT	Total	EXTERNALIDADES DEBIDAS A: Prestigio	Des. Reg.	Balance Presup.	Carreteras	Total	Efectividad
2	1	1	8	2	3	4	4	1	1	3	7
4	7	4	5	1	4	1	4	6	3	7	8
5	2	3	6	4	3	3	3	2	1	1	3
6	3	2	7	3	2	3	3	3	1	3	1
9	4	6	3	6	5	2	2	4	2	2	4
10	5	5	4	5	1	2	2	5	2	4	5
13	6	8	1	8	7	1	1	6	4	5	2
14	8	7	2	7	6	1	1	7	4	6	6

TABLA 4.27 [39]

De esto, se tomaron como dominantes las alternativas 2, 5, 6 y 10, considerando los totales de los cuatro atributos.

Para afinar el análisis fue necesario definir en forma más precisa las alternativas restantes y jerarquizarlas nuevamente con el mismo método [30, p. 469], recomendándose como la mejor la número seis.

El Análisis Borroso

Se toma la información de la tabla 4.28, suponiendo que refleja un ordenamiento en la preferencia del decisor y en la eficiencia hacia los atributos tratados. Tomando los totales de estos atributos se normalizan para encontrar los conjuntos maximizantes que se muestran en la tabla.

A T R I B U T O S

ALTERNATIVA	FLEXIBILIDAD	EFECTOS POLITICOS	EXTERNALIDADES	EFECTIVIDAD
2	1 .125	3 .43	3 .43	7 .875
4	7 .875	4 .57	7 1.0	8 1.0
5	2 .250	3 .43	1 .14	3 .375
6	3 .375	2 .29	3 .43	1 .125
9	4 .500	5 .71	2 .29	4 .50
10	5 .625	1 .14	4 .57	5 .625
13	6 .750	7 1.0	5 .71	2 .250
14	8 1.0	6 .86	6 .86	6 .758

TABLA 4.28

Totales de la Jerarquización por Atributos, Tomada de la Tabla 4.27 y sus valores Normalizados

Calculando los respectivos complementos borrosos para invertir el sentido numérico, o sea, que los valores mayores representan una preferencia mayor y encontrando la intersección de estos conjuntos que es la aplicación del operador min, nos queda la tabla 4.29:

A T R I B U T O S

ALTERNATIVA	FLEXIBILIDAD	EFECTOS POLITICOS	EXTERNALIDADES	EFECTIVIDAD	MIN	MAX
2	.875	.57	.57	.125	.125	
4	.125	.43	0.0	0.0	0.0	
5	.750	.57	.86	.625	.57	.57
6	.625	.71	.57	.875	.57	.57
9	.500	.29	.71	.50	.29	
10	.375	.80	.43	.375	.375	
13	.250	0.0	.29	.750	0.0	
14	0.0	.14	.14	.250	0.0	

TABLA 4.29

Intersección de los Atributos Representados como Conjuntos Borrosos

El conjunto encontrado es la decisión borrosa al problema, de acuerdo con la definición (3.5), del que tomamos la decisión maximizante, el operador max-min, dándonos como máximo las alternativas 6 y 5 con iguales méritos.

V. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVA

5.1. CONCLUSIONES

Lo expuesto en este trabajo muestra que la matemática borrosa es una alternativa viable a los métodos acostumbrados de análisis de decisiones lográndose superar las limitaciones que imponen las hipótesis de cosntrucción de estos procedimientos, tales como la independencia de atributos y la transitividad de las utilidades. También se encuentra la ventaja de poder expresar los valores de la incertidumbre y la utilidad de las consecuencias en forma de lenguaje usual sin tener que valorarlas numéricamente, lográndose mayor fluidez en la comunicación entre el analista y el decisor, lo que es un aspecto crítico para la toma e implantación de las decisiones.

5.2. PERSPÉCTIVA

El obstáculo inmediato que se presenta para la aceptación de la matemática borrosa es el apego a enfocar los sistemas humanos en forma causal mecanicista [38], con la consecuencia de exigir precisión donde es infundado el tenerla. Zadeh dice [58]: "... para tratar sistemas humanos en forma realista, necesitamos no hacer un fetiche de la precisión, el rigor y el formalismo matemático y en su lugar emplear un marco metodológico en el cual se tolere la imprecisión y las verdades parciales, ... la teoría de los conjuntos borrosos es un paso -no necesariamente un paso definitivo- en esta dirección...".

La advertencia epistemológica para trabajar con los órdenes de magnitud adecuados también la hace Bachelard [2]: "Pero los obstáculos epistemológicos van por parejas, en el reino mismo de la cantidad vemos oponerse a la atracción de un matematismo demasiado vago, la atracción de un matematismo demasiado preciso... la precisión de una medida debe referirse constantemente a la sensibilidad del método de medida y tener en cuenta las condiciones de permanencia del objeto medio. Medir 'exactamente' un objeto fugaz e indeterminado, medir 'exac tamente' un objeto fijo y bien determinado con un instrumento grosero - son dos tipos de ocupación vana... si la precisión en un resultado va - más allá de la precisión de los datos experimentales, es exactamente la determinación de la nada."

El desarrollo teórico de los conjuntos borrosos tiene esen-- cialmente dos ramas, la matemática que principalmente investiga el uso de funciones de membresía generalizadas, no restringidas al conjunto - [0, 1]. Esta rama se inició con el trabajo de Goguen [21], al introdu-- cir funciones que toman valores en conjuntos reticulares [8]; en la rama conceptual se desarrolla el llamado "razonamiento aproximado" [60] y la lógica borrosa necesaria para estas inferencias.

Respecto a las aplicaciones lo reportado es muy extenso y - hay trabajos de recopilación [16], [23], [35], y se ensayan en campos - muy conocidos como la programación lineal [46].

Con base en lo publicado en estos artículos se hace recomendable la adaptación o ampliación de esta teoría a la problemática nacional.

REFERENCIAS

[1] ACOSTA FLORES, J. Teoría de Decisiones. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. México, D.F., 1975

[2] BACHELARD, G La Formación del Espíritu Científico. Siglo XXI - Editores, S.A., 9a. ed. México, 1981

[3] BACHELARD, G. El Nuevo Espíritu Científico. Editorial Nueva Imagen, S.A. México, 1981

[4] BELLMAN, R., ZADEH, L. Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Science, Vol. 17, págs. B141-B164. Dic. 1970

[5] BERTALANFFY, L. VON Teoría General de los Sistemas. Fondo de - Cultura Económica. México, 1976

[6] BREMERMAN, H. Pattern Recognition in System Theory in Social - Sciences. Birkhaeuser, Basel, 1976 págs. 116-159. Referido en [17]

[7] CASTRO ROSAS, A. Some Applications of Fuzzy Sets and the Analytical Hierarchy Process to Decision Making. Master Thesis. Naval Posgraduate School. Monterey, Cal. 1984

[8] CHANG, C. Fuzzy Topological Spaces. Journ. Math. Anal. and Appl. Vol. 24, 1968 págs. 182-190

[9] CHANG, SHELDON Fuzzy Mathematics, Man and his Environment. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. Vol. SMC, Jan. 1972 págs. 92-93

[10] CHANG, R., PAVLIDIS, T. Fuzzy Decision Tree Algorithm. IEEE - Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-7, No. 1, Jan. 1977 págs. 28-35

[11] CHANG, SHELDON Fuzzy Algorithm. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-8, No. 1, Jan. 1978 págs. 31-32

[12] CHECKLAND, PETER Systems Thinking, Systems Practice. Wiley, 1981

[13] CHURCHMAN, W. El Enfoque de Sistemas, Diana, México

[14] CHURCHMAN, W., ACKOFF, R. Introduction to Operation Research

[15] DIAZ PADILLA, J. Toma de Decisiones bajo Múltiples Objetivos: - Una Crítica del Estado del Arte. En: Evaluación Económica y Social de Proyectos. D.E.C., Fac. Ingeniería, UNAM, 1984

[16] DUBOIS, D., PRADE, H. Outline of Fuzzy Set Theory. En: Advances in Fuzzy Set Theory an Applications. Gupta, M. ed. North-Holland, 1979. págs. 27-48

[17] DUBOIS, DIDIER J. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications New York Academic, 1980. 393 pp.

[18] DUKE UNIVERSITY Symposium on Policy Analysis on Information - Sciences. 1980

[19] EFSTATHIOU, J., RAJKOVIC, V. Multiatributive Decision Making - Using a Fuzzy Heuristic Approach. IEEE Transactions on - Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-9, No. 6 Jun. -- 1979, págs. 326-333

[20] FUNG, L.W., FU, K.S. The k-th Optimal Policy Algorithm for Decision Making in Fuzzy Enrivonments. En: Identification - and System Parameter Estimation. North-Holland, Publ. Amsterdam, 1974, págs. 1052-1059 Referido en [17]

[21] GOGUEN, J. L-Fuzzy Sets. Jour. Math. Anal. and Appl. Vol. 18, April 1967, págs. 145-174

[22] GRAYSON, C.J. Management Science and Business Practice. Harvard Business Rev., Vol. 51, 1973 págs. 41-48

[23] GUPTA, MADAR (ed.) Advances in Fuzzy Set Theory and Applications North-Holland, 1979

[24] GUPTA, N. Fuzzy Automata and Decision Process. North-Holland, 1977

[25] JAIN, J. Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables. - IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Vol. - SMC-6, No. Oct., 1976, págs. 698-703

[26] KANDEL, A. Fuzzy Statistics and Forecast Evaluation. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-8, No. 5, May. 1978, págs. 396-401

[27] KAUFMANN, A. Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. CECSA, México, 1982

[28] KEENEY, R. Utility Functions for Multi-atributed Consecuenses. Management Science, Jan. 1972, págs. 276-287

[29] KEENEY, R. Multiplicative Utility Functions. Operation Research, Vol. 22, 1974 págs. 22-34

[20] FUNG, L.W., FU, K.S. The k-th Optimal Policy Algorithm for Decision Making in Fuzzy Enrivonments. En: Identification - and System Parameter Estimation. North-Holland, Publ. Amsterdam, 1974, págs. 1052-1059 Referido en [17]

[21] GOGUEN, J. L-Fuzzy Sets. Jour. Math. Anal. and Appl. Vol. 18, April 1967, págs. 145-174

[22] GRAYSON, C.J. Management Science and Business Practice. Harvard Business Rev., Vol. 51, 1973 págs. 41-48

[23] GUPTA, MADAR (ed.) Advances in Fuzzy Set Theory and Applications North-Holland, 1979

[24] GUPTA, N. Fuzzy Automata and Decision Process. North-Holland, 1977

[25] JAIN, J. Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables. - IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, Vol. - SMC-6, No. Oct., 1976, págs. 698-703

[26] KANDEL, A. Fuzzy Statistics and Forecast Evaluation. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-8, No. 5, May. 1978, págs. 396-401

[27] KAUFMANN, A. Introducción a la Teoría de los Subconjuntos Borrosos. CECSA, México, 1982

[28] KEENEY, R. Utility Functions for Multi-atributed Consecuenses. Management Science, Jan. 1972, págs. 276-287

[29] KEENEY, R. Multiplicative Utility Functions. Operation Research, Vol. 22, 1974 págs. 22-34

[30] KEENEY, R. RAIFFA, H. Decision with Multiple Objectives. Wiley, New York, 1976

[31] KLIR, G. An Approach to General System Theory.

[32] KOCHEN, M., BADRE, A.N. On the Precision of Adjectives wich Denote Fuzzy Sets. J. Cybern. Vol. 4, No. 1, 1976, págs. - 49-59. Referido en [17]

[33] KOKAWA, M., NAKAMURA, K., ODA, M. Experimental Approach to Fuzzy Simulation of Memorizing, Forgetting and Inference Process. En: Fuzzy Sets and Their Application to Cognocitive and Decision Processes. págs. 410-

[34] MACVICAR, WHELAN Fuzzy Sets, the Concept of Height, and the -- Hedge Very. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. 8, No. 6, June 1978, págs. 507-511

[35] MAIERS, J. SHERIF, Y.S. Applications of Fuzzy Set Theory. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-15, No. 1, Ja/Fe 1985. págs. 175-189

[36] MASAHIKO, H., KLIR, J. Identification of Fuzzy Relation Systems. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-14, No. 2, Ma/Ap. 1984. págs. 349-355

[37] NEGOITA, CONSTANTIN. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birkhausen, Verlag. 1975

[38] OCHOA ROSSO, F. Método de los Sistemas. DEP., Fac. Ingeniería, UNAM, 2a. ed. 1983

[39] PEDRYCZ, WITOLD. Identification in Fuzzy Systems. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-14, No. 2, Ma/Ap 1984 págs. 361-366

[40] RAIFFA, H., PRATT, J.W., SCHLAIFER, R. The Fundations of Decisions Under Uncertainty: an Elementary Exposition. American - Statistical Association Journal. June 1964, págs. 353-375

[41] RAIFFA, H., PRATT, J.W., SCHLAIFER, R. Introduction to Estatistical Decision Theory. Mc Graw-Hill, N.Y., 1965

[42] RAIFFA, H. Decision Analysis. Addison-Wesley, 1968

[43] SAATY, T. Measuring the Fuzzyness of Sets. J. Cybern. Vol. 4, - No. 4, 1974, págs. 53-61

[44] SAATY, T. A Scaling Method for Priorities in Hierarquical Structures. Journal of Mathematical Phychology. Vol. 15, No. 2, Jun. 1977, págs. 234-281

[45] SCHLAIFER, R. Analysis of Decisions Under Uncertainty. McGraw-Hill

[46] TANAKA, H. Fuzzy Solutions in Fuzzy Linear Programming Problems. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. - SMC-14, No. 2, Ma/Ap 1984. págs. 325-328

[47] TONG, RICHARD A Linguitic Approach to Decision-Making with Fuzzy Sets. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-10, No. 11, Nov. 1980

[48] TURKSEN, I. Representation of Conectives in Fuzzy Pasoning: The View Thowgh, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-14, No. 1, Feb. 1984, págs. 146-151

[49] WATSON, STEPHEN Fuzzy Decision Analysis. IEEE Transactions on - Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-9, No. 1, Jan. 1979 págs. 1-9

[50] YACOV, Y. HAIMES Multiple-Criteria Decision Making: A Retrospective Analysis. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-15, No. 3, May/Jun 1985, págs. 313-315

[51] YAGER, R. On the Selection of Objects Having Imprecise Qualities IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. - SMC-14, No. 5, Sep/Oct. 1984, págs. 755-761

[52] ZADEH, L. Fuzzy Sets. Information and Control. Vol. 8, 1965, - págs. 338-353

[53] ZADEH, L., KABALA, R. Abstraction and Pattern Classification. - Jour. Math. Anal. and Appl. Vol. 13, Jan. 1966 págs. 1-7

[54] ZADEH, L. Fuzzy Algorithms. Information and Control. Vol. 12, - Feb. 1968, págs. 99-102

[55] ZADEH, L. Probability Measures of Fuzzy Events. Jour. Math. - Anal. and Appl. Vol. 10, August, 1968. págs. 421-427

[56] ZADEH, L. Calculus of Fuzzy Restrictions. En: Fuzzy Sets and - their Applications to Cognocitive and Decision Processes. Academic Press, 1975

[57] ZADEH, L., SHELDOM, S.L. On Fuzzy Mapping and Control. IEEE -- Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Vol. SMC-2, No. 1, Jan. 1972, págs. 30-34

[58] ZADEH, L. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex - Systems and Decision Processes. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-3, No. 1, Jan. 1973, págs. 28-44

[59] ZADEH, L., FU, K., TANAKA, K. (eds.) Fuzzy Sets and their Applications to Cognocitive and Decision Processes. Academic - Press, N.Y., 1975

[60] ZADEH, L. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Aproximate Reasoning. Infomation Science. Parte 1, Vol. 8, págs. 199-249; Parte 2, Vol. 11, págs. 301-357; Parte 3, Vol. 11, págs. 43-80,; 1975