UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA
fundada en 1935

Guadalajara, Jal., 10 de septiembre de 1986

AL PASANTE DE MATEMATICO
SR. JORGE ALBERTO PEDROZA ANDRADE
P R E S E N T E

En contestación a su solicitud de fecha 18 de agosto del presente año, me es grato informarle que la H. Comisión de Tesis que me honro en presidir, aprobó como tema que usted deberá desarrollar para su examen de Matemático, el que a continuación transcribo:

"MODELOS TIPICOS DE SISTEMAS DE INVENTARIO"

CONTENIDO:

Ruego a usted tomar nota que la copia fotocopiada del presente oficio, deberá ser incluída en los preliminares de todo ejemplar de su Tesis.

A T E N T A M E N T E
"CIENCIA Y LIBERTAD"

ING. EDUARDO MANUEL OJEDA PEÑA
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE MATEMATICAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

C O N T E N I D O

P R O L O G O

La necesidad de desarrollar e investigar modelos matemáticos, para la solución de problemas que a menudo se presentan en las diferentes fases de la economía y la satisfacción de demostrar que las distancias entre los problemas económicos e industriales y las aplicaciones de las matemáticas son muy pequeñas, son unas de las causas por las que me he inclinado por desarrollar este tema, que aparte de presentar un buen reto desde el punto de vista matemático, es de suma utilidad para el comercio y para la industria que manejan o pretenden establecer sistemas de inventarios.

El objetivo de este trabajo, básicamente es plantear, desarrollar y analizar los modelos mas típicos del problema de inventario. No pretende, por lo tanto, proponer nuevas teorías en el campo de sistemas de inventarios, sino clarificar los aspectos tecnicos y los desarrollos matemáticos que conducen a la obtención de resultados óptimos.

En mi trabajo, trate de recopilar, de varios libros destacados en la materia, las situaciones y características más comunes que representan a los problemas de inventario, y así, he obtenido seis modelos que espero sean los mas característicos, aunque desde luego, no son los únicos.

Es mi deseo que este trabajo contribuya de alguna manera al interesante y relativamente joven tema del problema de inventario, y que me impulse a investigar y desarrollar más ampliamente lo que hasta aquí he logrado.

JORGE ALBERTO PEDROZA ANDRADE
JULIO DE 1986

CAPITULO I
INTRODUCCION

1.1 Algunas definiciones.-

Qué tan seguido se debe llevar a cabo una producción?, Qué cantidad de artículos se debe producir cada vez?, Cuándo hacer un pedido?, cuantos artículos se deben pedir en cada orden?, estas son unas de las cuestiones típicas que tienen respuesta en un problema de inventario.

El problema de inventario surge en estas situaciones cuando tanto el productor como el comprador desean controlar los costos que afectan a un sistema de inventarios. Un sistema de inventarios es aquel en el cuál solo las siguientes tres clases de costos son significativas, y en donde dos cualesquiera de las tres son controlables:

1) El costo de manejar inventarios que llamaremos COSTO DE ALMACENAJE. Este se puede resumir como aquellos costos tales como el costo de producir un artículo, el costo por almacenaje (instalaciones, personal, etc.), el costo de manejar artículos obsoletos, el costo por daños, el costo de impuestos y seguros, etc.
2) El costo de incurrir en faltantes, o simplemente COSTO POR FALTANTES. Este costo se presenta ya sea en la demora de satisfacer la demanda, o en la incapacidad de satisfacerla de cualquier forma.
3) El costo de resurtir las existencias o COSTO DE PREPARACION. Este es el costo de obtener bienes a traves de la compra o

producción.

Al definir sistemas de inventarios de esta manera, se implica que otra clase de costos, diferentes a estos, no son significativos en un sistema de inventarios. Si son significativos en algún sistema, no se llamará Sistema de Inventarios.

Un problema de inventario es un problema de hacer decisiones óptimas con respecto a un sistema de inventario. En otras palabras, un problema de inventario concierne con la toma de decisiones que minimizan el costo total de un sistema de inventarios. En resúmen, un problema de inventario es el problema de determinar cuándo y qu tanto producir u ordenar.

Además de las variables de costos, otras dos clases de variables intervienen en los problemas generales de inventario, que son: variables de DEMANDA y variables de PEDIDOS.

VARIABLES DE DEMANDA: la demanda puede ser conocida o desconocida, puede ser constante o variable. La cantidad de articulos requeridos pueden ser valores discretos (números de piezas de pan) o continuos (número de litros de aceite). Tambien se considera la extracción de artículos de las existencias, que puede ser continua o discontinua con respecto al tiempo, y la razón de extracción que puede ser constante o variable.

VARIABLES DE PEDIDO: el tiempo de ventaja en el pedido (esto es, el tiempo entre levantar el pedido y la adquisición de los bienes ordenados) puede ser casi instantáneo o de considerable duración. El tiempo de hacer los pedidos puede ser fijo o variable. Finalmente, las entregas pueden ser continuas o discontinuas y pueden ser a una razón constante o variable.

==

VARIABLES DE COSTOS

1.- COSTO DE ALMACENAJE
2.- COSTO POR FALTANTES → CONSTANTES O VARIABLES
3.- COSTO DE PREPARACION

VARIABLES DE DEMANDA

1.- DEMANDA { CONOCIDA — CONSTANTE O VARIABLE; DESCONOCIDA }

2.- CANTIDADES REQUERIDAS — DISCRETAS O CONTINUAS

3.- DISTRIBUCION DE EXTRACCIONES DE EXISTENCIAS CON RESPECTO AL TIEMPO { CONTINUAS; DISCONTINUAS } { RAZON CONSTANTE O VARIABLE }

VARIABLES DE PEDIDOS

1.- TIEMPO DE VENATJA EN EL PEDIDO { CONOCIDO; ESTIMADO } { CONSTANTE; VARIABLE }

2.- DISTRIBUCION DE ENTREGAS CON RESPECTO AL TIEMPO { CONTINUA; DISCONTINUA } { RAZON CONSTANTE O VARIABLE }

GRAFICA NO. 1
CLASIFICAION DE VARIABLES DE LOS PROBLEMAS DE INVENTARIO

==

1.2 Breve Historia: Ecuación económica de tamaño de lote.-

La teoría en sistemas de inventarios se remonta a 1915, cuando F.W. Harris desarrolló una ecuación, en la cual minimizó la suma de costos de preparación y almacenaje, donde la demanda era conocida y constante. Esta ecuación se le llama comunmente la ECUACION ECONOMICA DE TAMANO DE LOTE, y será discutida en el modelo I del siguiente capítulo. El sistema para el cuál la fórmula se cumple es uno con situaciones muy ideales. Aparte de la ya mencionada de la demanda, no se permitían faltantes, el tiempo de ventaja se suponía insignificante, y la razón de produccion se suponía infinitamente mayor a la razón de demanda.

Benjamin Cooper en 1926, analizó un sistema de inventarios en el cual se consideraba la razón de producción, y en 1928 Thornton Fry estudió un sistema en el cual la demanda no se conocía precisamente.

El primer intento de analizar una variedad de sistemas fue hecho por Fairfreld Raymond en su "Quantity and Economy in Manufacture" publicado en 1931. En 1957, en una nueva edición de "The Theory of Inventory Management" de Within (publicada por primera vez en 1953) incluyó 223 citas bibliograficas, lo que cubre las publicaciones en el campo de Sistemas de Inventarios, desde 1923 hasta 1957. Desde entonces, muchas publicaciones han sido dedicadas a los sistemas de inventarios. Los trabajos de Hieller y Lieberman (1980), Hax y Candea (1984), Johnson y Montgomery (1974), Arrow, Kartin y Scarf (1958), y Ackoff y Sasieni (1968) han ampliado el tema y los conocimientos de los problemas de inventario.

C A P I T U L O I I

P L A N T E A M I E N T O Y D E S A R R O L L O

En este capítulo discutiremos 6 modelos típicos de sistemas de inventarios, que varían en cuanto a las suposiciones y consideraciones hechas sobre las variables. Los símbolos se irán introduciendo a medida que se vayan necesitando.

II.1 MODELO I.-

Considere un fabricante que tiene que suministrar N unidades a una razón constante a sus clientes durante el tiempo T. Por lo tanto, la demanda es fija y conocida. No se permiten faltantes, esto es, el costo por faltantes por unidad de tiempo, C_2 , es infinito ($C_2 = \infty$). Los costos variables asociados con el proceso de manufactura son:

C_1 = Costo de almacenaje por unidad de tiempo.

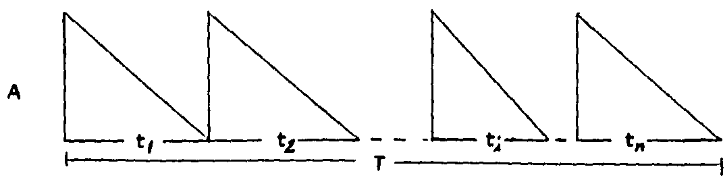
C_3 = Costo de preparación por tiraje de producción.

El problema del fabricante es determinar:

1.- Cuando hacer un tiraje de producción.

2.- Cuantas unidades debe hacer por tiraje.

Desarrollo y Solución Analítica.-



GRAFICA NO. 2
SITUACION DESCRITA POR EL MODELO I

Sea A = No. de articulos por tiraje

t_i = el i-esimo intervalo de tiempo entre tirajes

N = número total de unidades para el periodo total de T

Entonces: N/A es el número de tirajes durante T

Así: $$t_i = T/(N/A) = TA/N$$

Si el intervalo t_i empieza con A unidades y termina con cero, (ver gráfica No. 2), entonces $A/2$ son las existencias promedio durante t_i.

El costo relevante esperado por tiraje, k, consistirá entonces en estos costos de almacenaje mas el costo de preparación:

$$k = (A/2)(C_1 t_i) + C_3$$

Finalmente, el costo relevante esperado total, K, es el costo por tiraje, k, multiplicado por el número de tirajes durante T:

$$K = [(A/2)(C_1 t_i) + C_3](N/A)$$

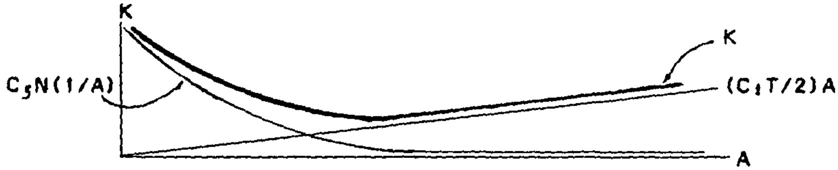
$$= \frac{NC_1 t_i}{2} + \frac{C_3 N}{A}$$

Sustituyendo el valor de t_i, obtenemos:

$$K = \frac{NC_1 (TA/N)}{2} + \frac{C_3 N}{A}$$

$$= \frac{C_1 TA}{2} + \frac{C_3 N}{A} \qquad (1)$$

Se puede apreciar, fácilmente, que los dos terminos obtenidos en el lado derecho de la ecuación (1) son los costos totales de almacenaje y preparación, respectivamente. Hasta ahora, por razones obvias todas las variables usadas han sido positivas; con esto observamos que el primer termino crece a medida que A crece, mientras que el segundo termino decrece. La solución a este problema de inventario consiste entonces, en encontrar el valor de A, digamos A_0, para el cual la suma de estos costos es mínima (ver la siguiente gráfica).



GRAFICA NO. 3
ECUACION DE K, ACOTADA POR LOS COSTOS DE ALMACENAJE Y PREPARACION

Con el uso del cálculo diferencial, obtendremos el A_0 deseado, que minimiza el valor de K. Derivaremos (1) con respecto a A; de hecho K depende de una sola variable, A, ya que las demás son conocidas; por lo tanto

$$dK/dA = (1/2)C_1T - (C_3N)/A^2$$

Por lo que al igualar esta ecuación a cero, obtenemos

$$(1/2)C_1T - (C_3N)/A^2 = 0$$

de donde obtenemos A_0 :

$$(1/2)C_1T = (C_3N)/A^2$$

$$A^2 = \frac{C_3N}{(1/2)C_1T}$$

$$A = \sqrt{\frac{2C_3N}{C_1T}} \qquad (*)$$

Más aún, debido a que

$$d^2K/dA^2 = (2C_3N)/A^3 \geq 0$$

se concluye que el valor de K es mínimo cuando A satisface (*), por lo tanto, sustituyendo A_0 de vuelta en K, obtenemos

$$K = \frac{C_1 T}{2}\sqrt{\frac{2C_3 N}{C_1 T}} + \frac{C_3 N}{\sqrt{\frac{2C_3 N}{C_1 T}}}$$

$$= \sqrt{\frac{C_1 T C_3 N}{2}} \quad \sqrt{\frac{(C_3 N)^2 C_1 T}{2C_3 N}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{C_1 T C_3 N}{2}} = \sqrt{2C_1 T C_3 N} \qquad (1a)$$

Nota: Otro resultado importante es el valor de t óptimo, esto es

$$t_{i_0} = (TA_0)/N = \sqrt{(2C_3 T)/C_1 N} \qquad (1b)$$

(*) Esta es la ecuación clásica económica de tamaño de lote, desarrollada por Harris.

Ejemplo.-

Cierto artículo tiene una demanda de 5 toneladas mensuales, y cada vez que se hace un pedido, existe un costo de preparación de $1000.00. El costo de almacenaje es de $235 por mes. Cuál es la cantidad óptima por pedido, y cuántos pedidos deben hacerse en un año?

Solución:

Aunque el modelo se planteó desde el punto de vista del productor, los resultados se pueden aplicar fácilmente al comprador, considerando los tirajes como pedidos y el número de artículos por tiraje como el número de artículos por pedido.

Sea: T = 12 meses

N = 60 toneladas

C_1 = 235

$$C_3 = 1000$$

Asi:

$$A = \sqrt{\frac{2(1000)(60)}{(235)(12)}} = 6.52 \text{ ton. por pedido}$$

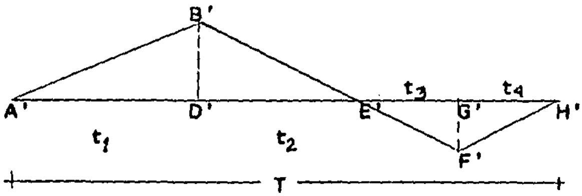
Además, ya se habia mencionado que N/A es el número de tirajes durante T, en este caso son pedidos, por lo tanto

$$N/A = 60/6.52 = 9.2 \text{ pedidos por año.}$$

II.2 MODELO II.-

Este problema es similar al del Modelo I, solo que ahora se agregarán dos nuevas suposiciones: Supóngase que se pueden permitir los faltantes, esto es, C_2 , no es infinito; y supongase tambien que la razón de producción es mayor que la razón de demanda.

Desarrollo y Solución Analitica.-



GRAFICA NO. 4
UN CICLO DE INVENTARIO CONSIDERANDO LOS FALTANTES

La situación que vamos a considerar se muestra en la gráfica No. 4; por simplicidad vamos a dividir el tiempo T en cuatro tiempos: t_1 , t_2, t_3, t_4, que representan un ciclo de inventario, que se puede estar repitiendo continuamente. Por lo que

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

Al igual que el modelo I, supongamos que deseamos suministrar N unidades por un periodo T, a una razón uniforme de demanda r= N/T la producción se efectua a una razón uniforme $k(>r)$.

Al analizar la gráfica No. 4, vemos que las existencias empiezan en cero y se incrementan por un período t_1, y luego se reducen por un período t_2 hasta llegar otra vez a cero. A partir de t_3 empiezan a aumentar los faltantes y finalmente por un período t_4 los faltantes decrecen hasta llegar a cero de vuelta, de donde empieza un nuevo ciclo.

El costo de almacenaje esta dado por C_1 veces el área del triángulo A'B'E'; la altura, B'D', es el máximo nivel de inventario, que será denotado por S. Por lo que el costo de almacenaje es

$$\frac{C_1 S(t_1 + t_2)}{2}$$

El costo por faltantes es C_2 veces el area del triángulo E'F'H'; la altura, G'H', es el mínimo nivel de inventario que será denotado por s, por lo que el costo por faltante es

$$\frac{C_2 s(t_3 + t_4)}{2}$$

Cuando agregamos los costos por faltantes, más los costos de almacenaje al costo de preparación lo dividimos por el tiempo del ciclo, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ obtenemos el costo promedio por unidad de tiempo, que llamaremos K:

$$K = \frac{(1/2)[C_1 S(t_1 + t_2) + C_2 s(t_3 + t_4)] + C_3}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \qquad (2)$$

El problema del fabricante sigue siendo el mismo que en el modelo I, o sea, el quiere determinar cuando empezar la producción y cuántos artículos producir, cifra que denotaremos con A. La primera cuestión se responde cuando se conoce s, específicamente el valor s que minimiza a s. Esto significa que es conveniente reducir lo más que se pueda las variables de la función K y ponerlas en relación directa con s y A. Primeramente,

$$S = t_1(k - r) \qquad (3)$$

ya que durante t_1 se produce una cantidad t_1k y se ordena una cantidad $t_1 r$, por lo que el incremento neto en inventario es $t_1 k - t_1 r$. Durante t_2 no hay producción, pero se ordena una cantidad t_2r, por lo tanto

$$S = t_2 r \qquad (4)$$

ahora, de (3) y de (4) vemos que

$$t_1 = \frac{S}{k - r} = \frac{t_2 r}{k - r} \qquad (5)$$

Durante t_3 los faltantes se acumulan a una razon r, por lo tanto

$$s = t_3 r \qquad (6)$$

Similarmente al periodo t_1, durante t_4 hay producción y demanda, por lo que

$$s = t_4(k - r) \qquad (7)$$

y de (6) y de (7) se concluye que

$$t_4 = \frac{s}{k - r} = \frac{t_3 r}{k - r} \qquad (8)$$

Finalmente debido a que el ciclo total y la producción es apenas suficiente para satisfacer la demanda, tenemos que

$$A = r(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \qquad (9)$$

Sustituyendo (5) y (8) en (9), obtenemos

$$A = r\left[\frac{t_2 r}{k - r} + t_2 + t_3 + \frac{t_3 r}{k - r}\right]$$

$$= r\left[\frac{t_2 r + t_2(k - r) + t_3(k - r) + t_3 r}{k - r}\right]$$

$$= r\left[\frac{t_2 r + t_2 k - t_2 r + t_3 k - t_3 r + t_3 r}{k - r}\right]$$

$$= \frac{r(t_2 k + t_3 k)}{k - r}$$

$$\therefore \qquad A = \frac{rk(t_2 + t_3)}{k - r} \tag{10}$$

Ahora, sustituyendo (4), (5), (6) y (8) en (2), obtenemos

$$K = \frac{1/2[C_1(t_2 r)(t_1 + t_2) + C_2(t_3 r)(t_3 + t_4)] + C_3}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[C_1(t_2 r)\left(\frac{t_2 r}{k - r} + t_2\right) + C_2(t_3 r)\left(t_3 + \frac{t_3 r}{k - r}\right)\right] + C_3}{\frac{t_2 r}{k - r} + t_2 + t_3 + \frac{t_3 r}{k - r}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[C_1 t_2 r\left(\frac{t_2 r + t_2(k - r)}{k - r}\right) + C_2 t_3 r\left(\frac{t_3(k - r) + t_3 r}{k - r}\right)\right] + C_3}{\frac{t_2 r + t_2(k - r) + t_3(k - r) + t_3 r}{k - r}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[C_1 t_2 r\left(\frac{t_2 k}{k - r}\right) + C_2 t_3 r\left(\frac{t_3 k}{k - r}\right)\right] + C_3}{\frac{K(t_2 + t_3)}{k - r}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k - r}\right)(C_1 krt_2^2 + C_2 krt_3^2) + C_3}{\frac{1}{k - r}k(t_2 + t_3)}$$

que multiplicando por $(k - r)/(k - r)$, obtenemos

$$K = \frac{(1/2)kr(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(k - r)}{k(t_2 + t_3)}$$

$$= \frac{(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(1 - r/k)}{t_2 + t_3} \qquad (11)$$

Para encontrar los mejores valores t_{2_0} y t_{3_0} de t_2 y t_3, que minimiza a K, derivamos K con respecto a t_2 y a t_3 e igualamos los resultados a cero. Esto es:

$$\frac{\partial K}{\partial t_2} = \frac{rC_1 t_2(t_2 + t_3) - [(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(1 - r/k)]}{(t_2 + t_3)^2} \qquad (12)$$

$$\frac{\partial K}{\partial t_3} = \frac{rC_2 t_3(t_2 + t_3) - [(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(1 - r/k)]}{(t_2 + t_3)^2} \qquad (13)$$

De donde obtenemos, siempre y cuando $(t_2 + t_3) \neq 0$:

$$rC_1 t_2(t_2 + t_3) - [(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(1 - r/k)] = 0 \qquad (14)$$

$$rC_2 t_3(t_2 + t_3) - [(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3(1 - r/k)] = 0 \qquad (15)$$

y restando (15) de (14), obtenemos:

$$r\, C_1 t_2(t_2 + t_3) - rC_2 t_3(t_2 + t_3) = 0$$

$$r\, C_1 t_2(t_2 + t_3) = rC_2 t_3(t_2 + t_3)$$

y por lo tanto:

$$t_2 = (C_2/C_1)t_3$$

sustituyendo el valor de t_2 en (14), tenemos que

$$rC_1\left(\frac{C_2}{C_1}t_3\right)\left(\frac{C_2}{C_1}t_3 + t_3\right) - \left(\frac{1}{2}r\left(C_1\left(\frac{C_2}{C_1}t_3\right)^2 + C_2 t_3^2\right) + C_3(1 - r/k)\right) = 0$$

$$t_3^2\left(rC_2\left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right)\right) - (1/2)rt_3^2\, C_2\left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right) - C_3(1 - r/k) = 0$$

$$(1/2)rC_2 t_3^2\, ((C_2/C_1) + 1) - C_3(1 - r/k) = 0$$

$$(1/2)rC_2 t_3^2\, ((C_2/C_1) + 1) = C_3(1 - r/k)$$

$$t_3^2 = \frac{C_3(1 - r/k)}{(1/2)rC_2[(C_2 + C_1)/C_1\ ]}$$

$$= \frac{2C_1C_3(1 - r/k)}{rC_2(C_1 + C_2)}$$

por lo tanto

$$t_{3_0} = \sqrt{\frac{2C_1C_3(1 - r/k)}{rC_2(C_1 + C_2)}} \qquad (16)$$

de manera similar se obtiene

$$t_{2_0} = \sqrt{\frac{2C_2C_3(1 - r/k)}{rC_1(C_1 + C_2)}} \qquad (17)$$

y sustituyendo estos valores en (6) y (10), obtenemos los valores óptimos, A_0 y s_0, de A y s:

$$A = \frac{rk\left(\sqrt{\frac{2C_2C_3(1 - r/k)}{rC_1(C_1 + C_2)}} + \sqrt{\frac{2C_1C_3(1 - r/k)}{rC_2(C_1 + C_2)}}\right)}{k - r}$$

$$= \frac{rk\left(\sqrt{\frac{2C_3(1 - r/k)}{r\ (C_1 + C_2)}}\left(+ \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\right)\right)}{k - r}$$

$$= \frac{rk\left(\sqrt{\frac{2C_3(1 - r/k)}{r\ (C_1 + C_2)}}\right)\left(+ \frac{C_2 + C_1}{\sqrt{C_1C_2}}\right)}{k(1 - r/k)}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2 2C_3(1 - r/k)(C_2 + C_1\ )^2}{r(C_1 + C_2\ )C_1C_2(1 - r/k)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2C_3r(C_1 + C_2\ )}{C_1C_2(1 - r/k)}} \qquad (18)$$

y

$$s_o = \sqrt{\frac{2C_1C_3(1 - r/k)}{rC_2(C_1 + C_2)}} * r$$

$$= \sqrt{\frac{2C_1C_3(1 - r/k)r}{C_2(C_1 + C_2)}} \qquad (19)$$

Finalmente, con los resultados de (16), (17) y (18) en (11), obtenemos el valor mínimo de K:

Sea $M = \sqrt{\frac{2C_3(1 - r/k)(C_1 + C_2)}{rC_1C_2}}$

entonces

$$K = \frac{\frac{1}{2}r\left(C_1\left(\frac{2C_2C_3(1 - r/k)}{rC_1(C_1 + C_2)}\right) + C_2\left(\frac{2C_1C_3(1 - r/k)}{rC_2(C_1 + C_2)}\right)\right) + C_3(1 - r/k)}{M}$$

$$= \frac{\frac{C_2C_3(1 - r/k)}{C_1 + C_2} + \frac{C_1C_3(1 - r/k)}{C_1 + C_2} + C_3(1 - r/k)}{M}$$

$$= \frac{\frac{C_3(1 - r/k)(C_1 + C_2) + C_3(1 - r/k)(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2}}{M}$$

$$= \frac{2C_3(1 - r/k)}{M}$$

usando de vuelta el valor de M obtenemos

$$K = \sqrt{\frac{4C_3^2(1 - r/k)^2 r\, C_1C_2}{2C_3(1 - r/k)(C_1 + C_2)}}$$

$$K = \sqrt{\frac{2C_3(1 - r/k)r\, C_1C_2}{C_1 + C_2}} \qquad (20)$$

Ejemplo.-

Consideremos el ejemplo del modelo I, suponiendo ahora que

C = $1,500.00 y la razon de produccion es k = 10.

Solucion :

La razon de demanda es r = N/T = 60/12 = 5 , y utilizando la ecuacion (18), tenemos

$$A = \sqrt{\frac{2(1000)(5)(235 + 1500)}{(235)(1500)(1 - 5/10)}} = 9.92 \text{ toneladas por pedido}$$

y además, N/A = 60/9.92 = 6.05 pedidos al año.

II.3 MODELO III.-

El problema presentado aqui introduce, ademas de un costo por faltantes finito, los siguientes conceptos:

Demanda estimada variable

Unidades discretas

Tiempo entre pedidos, conocido y constante.

Se describirá una situación típica donde se dan este tipo de características y luego se procederá a su solución analítica. Es importante hacer notar que este planteamiento se puede aplicar en otras situaciones con características similares.

Considere una compañía electrica que desea adquirir un nuevo generador para su planta. Vamos a suponer que una parte especial de esta máquina esta sujeta a fallas. Si la compañía ordena repuestos de esta parte junto con el generador, estos tendrán un costo reducido, C_1. Si por el contrario, se produce una falla de esta parte y la compañía no dispone de repuestos, tendran que mandar ordenar uno especialmente a un costo más alto, C_2. La compañía desea saber cuantos repuestos ordenar en el pedido de cada generador. En este caso no se considerará el costo por repuestos sobrantes, es decir aquellos que se ordenan y nunca son utilizados. Como ya se había señalado, la demanda es estimada y variable, esto es, se dispone de una distribución probabilística de la demanda, sea esta (ver siguiente gráfica) :

No. de Repuestos Necesitados	Probabilidad Estimada en Base a las Fallas
0	P_0
1	P_1
...	...
N	P_N

Donde N es el nivel máximo de demanda y $\sum_{i=0}^{N} P_i = 1$

GRAFICA NO. 5
DISTRIBUCION PROBABILISTICA DE LA DEMANDA

Desarrollo y Solución Analítica.-

La ecuación de costo para este problema puede ser desarrollada de la siguiente manera. Para cualquier cantidad S en existencia, supóngase que r unidades son utilizadas. Entonces por un periodo específico de tiempo, el costo esperado asociado a un valor particular de r es :

$$(S - r)P_r C_1 \quad \text{si} \quad r < S$$

$$(r - S)P_r C_2 \quad \text{si} \quad r > S$$

(si r = S, entonces el costo esperado es cero)

Para obtener el costo esperado total debemos sumar los costos asociados con cada valor posible de r. Así, el costo esperado total de K es :

$$K(S) = C \sum_{r=0}^{S} (S - r)P_r + C \sum_{r=S+1}^{N} (r - S)P_r \qquad (21)$$

De esta ecuación queremos conocer el valor S_0 que la minimiza. Si este valor produce el costo esperado total mas pequeño, se deduce en particular que los valores adyacentes $S_0 - 1$ y $S_0 + 1$ poseen costos totales, $K(S_0 - 1)$ y $K(S_0 + 1)$, mayores que $K(S_0)$. El costo esperado para $S_0 + 1$ es :

$$K(S_0 + 1) = C_1 \sum_{r=0}^{S_0+1} (S_0 + 1 - r)P_r + C_2 \sum_{r=S_0+2}^{N} (r - S_0 - 1)P_r$$

$$= C_1 \sum_{r=0}^{S_0} (S_0 + 1 - r)P_r + C_1((S_0 + 1) - (S_0 + 1))P_{S_0+1} +$$

$$C_2 \sum_{r=S_0+1}^{N} (r - S_0 - 1)P_r - C_2((S_0 + 1) - (S_0 + 1))P_{S_0+1}$$

$$= C_1 \sum_{r=0}^{S_0} (S_0 - r)P_r + C_1 \sum_{r=0}^{S_0} P_r + C_2 \sum_{r=S_0+1}^{N} (r - S_0)P_r - C_2 \sum_{r=S_0+1}^{N} P_r$$

$$= K(S_0) + C_1 \sum_{r=0}^{S_0} P_r - C_2 \sum_{r=S_0+1}^{N} P_r$$

ahora, como $\sum_{r=0}^{N} P_r = 1$, entonces $\sum_{r=S_0+1}^{N} P_r = 1 - \sum_{r=0}^{S_0} P_r$

ademas, $\sum_{r=0}^{S_0} P = P(r \leq S_0)$. Por lo tanto, tenemos

$$K(S_0 + 1) = K(S_0) + C_1 \sum_{r=0}^{S_0} P - C_2(1 - \sum_{r=0}^{S_0} P_r)$$

$$= K(S_0) + C_1 \sum_{r=0}^{S_0} P_r - C_2 + C_2 \sum_{r=0}^{S_0} P_r$$

$$= K(S_0) + (C_1 + C_2) \sum_{r=0}^{S_0} P_r - C_2$$

$$= K(S_0) + (C_1 + C_2)P(r \leq S_0) - C_2 \tag{22}$$

Similarmente se obtiene

$$K(S_0 - 1) = K(S_0) - (C_1 + C_2)P(r \leq S_0 - 1) + C_2 \tag{23}$$

debido a que $K(S_o + 1) > K(S_o)$ y $K(S_o - 1) > K(S_o)$, entonces :

$K(S_o + 1) - K(S_o) = (C_1 + C_2)P(r \leq S_o) - C_2 > 0$

:. $(C_1 + C_2)P(r \leq S_o) > C_2$

:. $C_2/(C_1 + C_2) < P(r \leq S_o)$

además,

$K(S_o + 1) - K(S_o) = -(C_1 + C_2)P(r \leq S_o - 1) + C_2 > 0$

:. $-(C_1 + C_2)P(r \leq S_o - 1) > -C_2$

:. $(C_1 + C_2)P(r \leq S_o - 1) < C_2$

:. $C_2/(C_1 + C_2) > P(r \leq S_o - 1)$

por lo tanto :

$$P(r \leq S_o - 1) < C_2/(C_1 + C_2) < P(r \leq S_o) \qquad (24)$$

Es decir, cuando esta desigualdad se cumple para un valor S, hemos encontrado el valor que minimiza el costo esperado total, K.

Ejemplo.-

Considere la situación descrita en este modelo, de la compañía electrica. Supongase que C_1 = \$100 y C_2 = \$1000 y que tenemos la siguiente distribución probabilística :

FALLAS	PROBABILIDAD
0	0.30
1	0.40
2	0.20
3	0.10

Queremos encontrar el número de repuestos óptimo que deben de incluirse en la compra de cada generador.

Solución :

Primeramente, es conveniente ordenar nuestros datos con la información que necesitamos :

r	P(r)	P(r≤S)	S
0	0.30	0.30	0
1	0.40	0.70	1
2	0.20	0.90	2
3	0.10	1.00	3

Ahora, calcularemos $C_2/(C_1 + C_2)$ que en este caso es :

$$1000/(1000 + 100) = .909$$

tenemos que encontrar el valor de S que cumple con (24), esto es

$$P(r \leq S - 1) < .909 < P(r \leq S)$$

y como

$$P(r \leq 2) = .90 < .909 < 1.00 = P(r \leq 3)$$

entonces se concluye que se deben incluir S = 3 repuestos por generador.

II.4 MODELO IV.-

Este problema es similar al del modelo III, excepto por el hecho de que ahora las unidades son continuas, en lugar de discretas, (esto es, ahora se almacenan galones de aceite, kilos de azúcar, etc.). Por lo tanto, la probabilidad de una orden en el intervalo de r_1 a r_2 es expresada por la integral $\int_{r_1}^{r_2} f(r)dr$, y la probabilidad de que una orden sea menor o igual a S es $\int_0^S f(r)dr = F(S)$ (debido a que no se consideran las ordenes negativas).

Desarrollo y Solución Analítica.-

La ecuación de costo esperado total K(S) es similar a la ecuación obtenida en el Modelo III, solo que en lugar de la función de probabilidad discreta usaremos la función de densidad F(S), por lo tanto:

$$K(S) = C_1 \int_0^S (S - r)f(r)dr + C_2 \int_S^N (r - S)f(r)dr \qquad (25)$$

de la misma forma, queremos obtener el valor S que minimiza a K(S). Como un resultado útil del calculo, tenemos :

si

$$g(x) = \int_{h(x)}^{k(x)} f(x,y)dy$$

entonces

$$g'(x) = \int_{h(x)}^{k(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy + f(x,k(x))\frac{dk(x)}{dx} - f(x,h(x))\frac{dh(x)}{dx}$$

tomando

$$g_1(S) = \int_{h_1(S)}^{k_1(S)} f_1(S,r)dr \qquad y \qquad g_2(S) = \int_{h_2(S)}^{k_2(S)} f_2(S,r)dr$$

donde

$f_1(S,r) = (S - r)f(r)$, $f_2(S,r) = (r - S)f(r)$, $k_1(S) = S$,

$h_1(S) = 0$, $k_2(S) = N$ y $h_2(S) = S$

tenemos que

$$\frac{\partial K(S)}{\partial S} = C_1 \left[\int_0^S \frac{\partial f_1(S,r)}{\partial S} dr + f_1(S,S)k_1'(S) - f_1(S,0)h_1'(S)\right]$$
$$+ C_2 \left[\int_S^N \frac{\partial f_2(S,r)}{\partial S} dr + f_2(S,N)k_2'(S) - f_2(S,S)h_2'(S)\right]$$

como

$$\frac{\partial f_1(S,r)}{\partial S} = f(r) \ , \quad \frac{\partial f_2(S,r)}{\partial S} = -f(r)$$

$f_1(S,S) = 0$, $f_1(S,0) = Sf(0)$

$f_2(S,N) = (N - S)f(N)$, $f_2(S,S) = 0$

$h_1'(S) = 0$ y $k_2'(S) = 0$

obtenemos

$$\frac{\partial K(S)}{\partial S} = C_1\int_0^S f(r)dr + C_2\int_S^N -f(r)dr$$

$$= C_1\int_0^S f(r)dr - C_2\int_S^N f(r)dr$$

$$= C_1 F(S) - C_2(1 - F(S))$$

$$= (C_1 + C_2)F(S) - C_2 \tag{26}$$

K(S) tendra un extremo relativo en S_o si $[\partial K(S)/\partial S] = 0$, y esto se cumple si :

$$(C_1 + C_2)F(S_0) - C_2 = 0$$

por lo tanto

$$F(S_0) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{27}$$

más aún

$$\frac{\partial^2 K(S)}{\partial S^2} = C_1 f(S) + C_2 f(S)$$

y

$$\frac{\partial^2 K(S_0)}{\partial S^2} = C_1 f(S_o) + C_2 f(S_o) \geq 0$$

ya que $f(s) \geq 0$, C_1 , $C_2 \geq 0$

Si la desigualdad se cumple, S_o da un mínimo. Si la igualdad se cumple, entonces $f(S_0) = 0$, ya que C_1 y C_2 son ambos diferentes de cero, pero $f(r)$ es una función continua y $f(r) \geq 0$.

Por lo tanto si $f(S_o) = 0$, entonces f(r) tiene un mínimo en S , específicamente cero. Se concluye entonces, que K(S) tiene un mínimo en $S = S_o$. Por lo tanto el valor de S_o que satisface a (27), tiene un mínimo en K(S).

Ejemplo.-

Una panadería vende uno de sus tipos de pasteles por peso. Si el producto no se vende el dia que se horneó, puede venderse posteriormente y únicamente con una perdida de 15 cts. por libra, esto es, C_1 = 15 cts. Por otro lado, la compañía obtiene una ganancia de 95 cts. en cada libra de pastel que se vende el mismo dia que se horneó, esto es, C_2 = 95 cts. Las ordenes diarias forman una distribución triangular, en este caso la función de densidad de probabilidad es $f(r) = 0.02 - 0.0002r$.
El problema es determinar cuantas libras de pastel debe hornear la panadería diariamente.

Solución :

En este caso

$$C_2/(C_1 + C_2) = 95/(15 + 95) = .8636$$

Tenemos que encontrar el valor S que satisface (27), esto es

$$F(S) = \int_0^S f(r)dr = 0.8636$$

como $f(r) = 0.02 - 0.0002r$, entonces

$$\int_0^S f(r)dr = \int_0^S (0.02 - 0.0002r)dr$$

$$= \int_0^S 0.02dr - \int_0^S 0.0002rdr$$

$$= \left(0.02r - \frac{0.0002r^2}{2}\right)\Bigg|_0^S = 0.8636$$

esto es $0.02S - 0.0001S = 0.8636$

por lo tanto $S = 100 \pm 36.93$

consecuentemente, tenemos dos posibles soluciones:

$S_1 = 136.93$ y $S_2 = 63.07$

como $f(r) \geq 0$, tenemos que $0.02 - 0.0002r \geq 0$, y esto implica que $r \leq 100$. $\therefore$ S_1 no es solución factible, por lo que S es la solución óptima.

II.5 MODELO V.-

Este problema es similar al anterior, con la importante excepción que el tiempo de ventaja, en este caso es significativo.

Supongamos que un comerciante hace sus pedidos que serán entregados k días despues (esto es, el tiempo de ventaja es de k días). Un cierto día, el comerciante tiene S en existencias.

Más aún, en los k - 1 días previos, el ya ha ordenado la entrega de A_1 , A_2 , ... , A_{k-1} artículos, en ese orden , para los siguientes k - 1 dias. El problema es determinar la cantidad que se debera ordenar para el k-esimo dia, considerando que f(R') es la distribución de densidad de probabilidad de demanda sobre un periodo de k días (R').

Desarrollo y Solución Analitica.-

Sea k = número de ordenes en el tiempo de ventaja. (*)

S = nivel de inventario antes de iniciar el nuevo ciclo.

S_k = nivel de inventario para la k-esima orden.

r_i = cantidad demandada en el i-esimo día.

A_i = cantidad ordenada, en espera de ser entregada en el i-esimo dia.

Se construira la ecuación de costos cubriendo el tiempo de ventaja, ya que los costos esperados para el periodo de 1 a k - 1

ya han sido determinados, pues ya se ordenó $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$
El nivel de inventario para el k-esimo día es

$$S_K = S + \sum_{i=1}^{k-1} A_i + A_K - \sum_{i=1}^{k} r_i$$

Esto es, lo que ya tenemos, S, lo que ya se ordenó, $\sum_{i=1}^{k-1} A_i$, lo que se va a ordenar, A_K, y la demanda $\sum_{i=1}^{k} r_i$.

sea $S' = S + \sum_{i=1}^{k-1} A_i + A_K$ y $R' = \sum_{i=1}^{k} r_i$

sustituyendo S' por S y R' por r en (25) obtenemos

$$K(S') = C_1\int_0^{S'} (S' - R')f(R')dR' + C_2\int_{S'}^{N} (R' - S')f(R')dR' \quad (28)$$

Como la ecuación (28) es esencialmente la misma que la (25), con la excepción que S' depende de una variable, A_K, que es precisamente lo que queremos optimizar; obtenemos

$$K(A_K) = C_1\int_0^{S'} (S' - R')f(R')dR' + C_2\int_{S'}^{N} (R' - S')f(R')dR' \quad (29)$$

tomando la primera derivada, obtenemos que

$$\frac{dK(A_K)}{dA_K} = \frac{dK(A_K)}{dS'}\,\frac{dS'}{dA_K}$$

pero $dS'/dA_K = 1$, por lo tanto, de los resultados obtenidos a partir de (25) tenemos que el valor óptimo de S' es el que satisface $F(S') = C_2/(C_1 + C_2)$

esto implica que el valor óptimo de A_K es

$$A_{K_0} = S_0' - (S + \sum_{i=1}^{k-1} A_i)$$

(*) Nota.- No siempre coincide el tiempo de ventaja con el número de ordenes. Puede suceder, por ejemplo, que el tiempo de ventaja sea de 1 semana y las ordenes se deban hacer solo cada 15 dias.

Ejemplo.-

Una panaderia ordena pasteles diariamente, que seran entregados 7 días despues. Si actualmente tiene 10 libras en existencia y espera ordenes en los siguientes 6 días de 2, 4, 1, 10, 11 y 5 libras. Cuantas libras debera ordenar para el 7o. dia? Supóngase, al igual que el ejemplo del problema anterior, que

C_1 = 15 cts., C_2 = 95 cts. y $f(R') = 0.02 - 0.0002R'$

Solución :

El valor óptimo de S' se obtiene de

$F(S_o') = C_1/(C_1 + C_2) = 95/(15 + 95) = 0.8636$

como se estan usando los mismos datos que en el ejemplo del modelo anterior, tenemos que S_o' = 63.07 libras, y por lo tanto

$A_{7_0} = 63 - (10 + (2 + 4 + 1 + 10 + 11 + 5)) = 20$

que es la cantidad óptima a ordenar para el $7_{o.}$ día.

II.6 MODELO VI.-

En este modelo se van a analizar dos casos importantes por la frecuencia con que se presentan en la práctica. Uno de ellos son los costos de producción o de adquisición, esto es, el costo de producir o adquirir bienes puede depender de la cantidad a producir, o a adquirir.

El otro caso es el que se presenta cuando el inventario consiste en varios articulos, y los costos de almacenamiento o preparación, puede depender del tipo de articulo.

Para analizar estos casos, haremos unas simplificaciones de las ecuaciones del modelo II, con los supuestos de producción instantánea y faltantes intolerables, y usaremos estos resultados como base para nuestro planteamiento. Al suponer producción instantánea, se supone que la razon de producción k es mucho más grande que la razón de demanda, esto implica dos cosas : que k tiende a infinito y que $t_1 = t_4 = 0$. con esto la ecuación (11) se convierte en :

$$K = \frac{(1/2)r(C_1 t_2^2 + C_2 t_3^2) + C_3}{t_2 + t_3} \tag{30}$$

y las ecuaciones (18), (19) y (20) óptimas, son ahora

$$A_o = \sqrt{\frac{2C_3 r(C_1 + C_2)}{C_1 C_2}} \tag{31}$$

$$s_o = \sqrt{\frac{2rC_1 C_3}{C_2(C_1 + C_2)}} \tag{32}$$

$$K_o = \sqrt{\frac{2r\ C_1 C_2 C_3}{C_1 + C_2}} \tag{33}$$

Al suponer tambien que los faltantes no son permitidos, se esta suponiendo que el costo por faltante, $C_2 \dashrightarrow \infty$, y que el tiempo en el cual hay faltantes, t_3, por lo tanto, se hace cero. De esta manera (30), (31), (32) y (33) se reducen a

$$K = (1/2)rC_1 t_2 + (C_3/t_2) \tag{34}$$

$$A_o = \sqrt{2r(C_3/C_1)} \tag{35}$$

$$S_o = 0 \tag{36}$$

$$k_o = \sqrt{2rC_1 C_3} \tag{37}$$

con la eliminación de t_1, t_3, t_4, tenemos tambien que $A = rt_2$.

CASO 1. Costos Variables (producción ó adquisición).-

Sea r la razón de demanda y p el costo por unidad si ordenamos menos que A^*, y p' si ordenamos más o igual que A^*, (donde $p'<p$). De (34), sustituyendo el valor de $t_2 = (A/r)$, y agregando p y p', tenemos la siguiente ecuación de costos :

$$K(A) = \begin{cases} \dfrac{C_3 r}{A} + \dfrac{1}{2} C_1 A + pr & 0<A<A^* \\ \\ \dfrac{C_3 r}{A} + \dfrac{1}{2} C_1 A + p'r & A \geq A^* \end{cases} \tag{38}$$

K(A) tiene un punto de discontinuidad en $A = A^*$, por lo tanto, el mínimo valor de K ocurre ya sea donde $dK/dA = 0$, o en el punto de discontinuidad.

$$\frac{dK}{dA} = \frac{-C_3 r}{A^2} + \frac{1}{2} C_1 \quad \text{en todos los puntos,}$$

excepto en el punto $A = A^*$. Esto nos conduce a :

$$A = \sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1}} \tag{39}$$

y debemos considerar los casos en que $A_0 > A^*$ y $A_0 < A^*$

si $A^* < A_0$ el valor mínimo de K ocurre cuando $A = A_0$ y de (38) obtenemos K_0

$$K_0 = \frac{C_3 r}{\sqrt{\dfrac{2C_3 r}{C_1}}} + \frac{1}{2} C_1 \sqrt{\frac{2C_3 r}{C_1}} + p'r$$

$$= \sqrt{\frac{C_1 C_3 r}{2}} + \sqrt{\frac{C_1 C_3 r}{2}} + p'r$$

$$= 2\sqrt{\frac{C_1 C_3 r}{2}} + p'r$$

$$= \sqrt{2C_1 C_3 r} + p'r \tag{40}$$

similarmente si $A^{*} > A_0$

$$K = \sqrt{2C_1 C_3 r} + p'r$$

por otra parte, si ordenamos A^{*} unidades y obtenemos el costo mas bajo, este será :

$$\frac{C_3 r}{A^{*}} + \frac{1}{2} C_1 A^{*} + p'r$$

por lo tanto, $A_0 = A^{*}$ solo si :

$$\frac{C_3 r}{A^{*}} + \frac{1}{2} C_1 A^{*} + p'r \leq \sqrt{2C_1 C_3 r} + pr$$

$$\frac{C_3 r}{A^{*}} + \frac{1}{2} C_1 A^{*} - \sqrt{2C_1 C_3 r} \leq pr - p'r$$

$$p - p' \geq \frac{1}{r}\left(\frac{C_3 r}{A^{*}} + \frac{1}{2} C_1 A^{*} - \sqrt{2C_1 C_3 r}\right) \tag{42}$$

CASO 2. Ecuación para n artículos.-

Considere n artículos; para el i-esimo artículo, el costo de preparación es C_{3_i} y el costo de almacenaje es C_{1_i} y la razón de demanda es r_i y A_i la cantidad ordenada. La ecuación de costos para n artículos, por analogía con la ecuación (34) y sustituyendo de vuelta $t_{2_i} = A_i/r_i$ es

$$K = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} C_{1_i} A_i + \frac{C_{3_i} r_i}{A_i}\right) \tag{43}$$

tenemos que

$$\frac{\partial K}{\partial A_i} = \frac{1}{2} C_{1_i} - \frac{C_{3_i} r_i}{A_i^2} \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

por lo que los valores óptimos de A_i y de K son

$$A_{i_0} = \sqrt{\frac{2r_i C_{3_i}}{C_{1_i}}} \tag{44}$$

$$K_0 = \sqrt{2r_i C_{3i} C_{1i}} \qquad (45)$$

Una consideración interesante se presenta cuando existen limitaciones en los inventarios, que requieren que el número promedio de artículos no exceda a cierta cantidad H. Esto es, debemos minimizar K sujeto a la condición

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i \leq H$$

es presumible que se quiera alcanzar H (sin excederlo) para obtener la mejor ganancia. Sea

$$L = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2} C_{1i} A_i + \frac{C_{3i} r_i}{A_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} A_i - 2H\right)\right\}$$

(siempre que se cumpla la restricción, L sera igual a K)

ahora, $$\frac{\partial L}{\partial A_i} = \frac{1}{2} C_{1i} - \frac{C_{3i} r_i}{A_i^2} + \lambda = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

lo que nos lleva a

$$A_{i_0} = \sqrt{\frac{2C_{3i} r_i}{C_{1i} + \lambda}} \qquad (46)$$

y solo resta encontrar un λ tal que $\sum_{i=1}^{n} A_{i_0} = 2H$

Una manera efectiva de encontrarlo es por interpolación.

Ejemplo.-

Una compañía ha decidido tener un inventario que no exceda de 750 artículos de 3 productos diferentes, debido a limitación de capital. Con la siguiente información, cuáles deberan ser las cantidades óptimas a producir?

	PRODUCTO		
	1	2	3
C_1	.05	.02	.04
C_3	50	40	60
r	100	120	75

Solución :

Al querer encontrar un λ apropiado que cumpla con la condición, estamos trabajando con una función f, desconocida, que relaciona λ con la mitad de la suma de los A_λ 's, A. Si utilizamos $\lambda = 0$ en (46) obtenemos

$A_{1_0} = \sqrt{[2(100)(50)]/(.05)} = 447$

$A_{2_0} = \sqrt{[2(120)(40)]/(.02)} = 693$

$A_{3_0} = \sqrt{[2(75)(60)/(.04)} = 464$

pero A = (447 + 693 + 464)/2 = 802, que excede a los 750 permitidos. Si utilizamos $\lambda = 0.005$, tenemos ahora :

$A_{1_0} = 409$, $A_{2_0} = 566$, $A_{3_0} = 424$

y A = 700 , que no alcanza la cantidad deseada.

El objetivo ahora es buscar un tal que $f(\lambda) = 750$, dado que $f(0) = 802$ y $f(0.005) = 700$. Como f es desconocida podemos aproximar f por medio de una recta que pase por los puntos (0,802) y (0.005,700) y esta es, usando la ecuación de la recta para dos puntos :

$$(x_2 - x_1)(Y - y_1) = (y_2 - y_1)(X - x_1)$$

$$(.005 - 0)(Y - 802) = (700 - 802)(X - 0)$$

$$.005(Y - 802) = -102X$$

$$Y = -20400X + 802$$

por lo tanto

$$X = \frac{802 - Y}{20400}$$

entonces, si Y es igual a A y X es igual a λ, tenemos que cuando $A = 750$ entonces, $\lambda = .00255$

y finalmente, utilizando este valor de λ, obtenemos

$A_{1_0} = 436$, $A_{2_0} = 652$, $A_{3_0} = 460$

CONCLUSIONES

El planteamiento y desarrollo de ecuaciones de problemas de inventario puede ser amplio y variado; y aunque en este trabajo se estudiarion los casos más típicos, estos a su vez se pueden diversificar debido a los numerosos factores que pueden intervenir en un caso de inventario.

Es por eso que es necesario analizar cada caso por separado para poder plantear y desarrollar la ecuación que mejor se adapte a las condiciones del problema. Así, mientras que para una persona puede ser relevante la utilidad no obtenida por faltarle piezas suficientes para satisfacer la demanda total, para otras puede ser mas relevante la utilidad que obtienen invirtiendo en otros renglones, el monto o costo de las piezas no adquiridas, aunque no haya satisfecho la demanda total.

Aunque no hay una teoría sistemática sobre el problema de inventarios, si se pueden establecer patrones a seguir para identificar y plantear casos de inventario, como se discutió en I.1. Ademas, el gran uso de temas de Matemáticas, como la Estadística, el Cálculo, las Leyes de Sumatorias y el Algebra, hacen de la teoría de sistemas de inventarios un campo (dentro de la Investigacion de Operaciones) digno de investigarse y ampliarse.

Si bien es cierto que este tipo de ecuaciones se desarrollaron a raíz de poder resolver problemas relacionados con inventarios, sus resultados son aplicables a problemas de diferente contexto que varian desde problemas de producción y mantenimiento hasta problemas de inversiones y hasta de personal, aunque esencialmente similares. Hay que recordar que en un sistema de inventarios son significativos los costos de almacenaje, los costos por faltante y los costos de preparación. Siempre y cuando podamos identificar los costos de un problema cualquiera con los costos antes mencionados, tendremos un Sistema de Inventario que podremos desarrollar.

El trabajo aquí presentado, es tan solo un esbozo de los alcances que tiene el campo de la Investigación de Operaciones, en particular los Sistemas de Inventarios, y al igual que otros temas parecidos deben ser estudiados mas a fondo para su mejor comprensión y su mas amplia aplicación.

B I B L I O G R A F I A

PLOSSL, G. AND WIGHT, O.

PRODUCTION AND INVENTORY CONTROL

PRENTICE HALL

1967

NADOR, ELIEZER

INVENTORY SYSTEMS

JOHN WILEY AND SONS

1966

JOHNSON, L. AND MONTGOMERY, D.

OPERATIONS RESEARCH IN PRODUCTION

PLANNING, SCHEDULING AND INVENTORY CONTROL

JOHN WILEY AND SONS

1974

ACKOFF, R. AND SASIENI, M.

FUNDAMENTALS OF OPERATIONS RESEARCH

JOHN WILEY AND SONS

1968

STARR, M. Y MILLER, D.

CONTROL DE INVENTARIOS: TEORIA Y PRACTICA

EDITORIAL DIANA

1973