

00382  
3  
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS

**Contribución al Estudio  
de la Aplicación Standard**

**T e s i s**

Que para obtener el título de

**Doctor en Ciencias (Física)**

Presenta

**Arturo Olvera Chávez**

**México, D. F. 1988**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Introducción.

De los grandes problemas de la mecánica clásica está el determinar la estabilidad de los sistemas físicos que están descritos por las ecuaciones de Newton. Debemos distinguir dos tipos de estabilidad: estabilidad de Lyapunov y estabilidad estructural. La primera tiene que ver con la topología de las órbitas en el espacio fase, dos órbitas que tienen condiciones iniciales próximas pueden alejarse en el tiempo o bien mantenerse cercanas para todo tiempo. La segunda estabilidad está relacionada con los cambios en la topología del espacio fase de un sistema mecánico cuando a este se le agrega una pequeña perturbación. Es muy importante estudiar la estabilidad estructural de un problema físico, pues implícitamente permite conocer las propiedades de estabilidad de Lyapunov del conjunto de órbitas en el espacio fase. En este trabajo nos interesa estudiar las propiedades de estabilidad estructural en sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad.

Los sistemas hamiltonianos integrables son aquellos que su espacio fase está foliado casi completamente: un sistema con  $N$  grados de libertad tiene un espacio fase de dimensión  $2N$  es cual está foliado por variedades suaves de dimensión  $N$ , toda órbita está contenida en alguna de estas variedades (excepto separatrices y puntos fijos). Cada hoja de la foliación está etiquetada por  $N$  parámetros que representan los valores de las  $N$  integrales de movimiento. Consideremos los sistemas hamiltonianos integrables que están foliados por variedades compactas, cada hoja es topológicamente equivalente a un toro invariante de dimensión  $N$  y cuya dinámica es conjugada a rotaciones en el toro  $N$  dimensional. Por desgracia, los sistemas hamiltonianos integrables no son estructuralmente estables, para casi toda perturbación la foliación por toros invariantes se pierde. Sin embargo no todos los toros desaparecen, algunos persisten ante pequeñas perturbaciones. La robustez de un toro invariante depende principalmente de sus propiedades dinámicas y de la forma del hamiltoniano en ausencia de perturbaciones.

Los sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad tienen una diferencia fundamental respecto a los sistemas de más grados de libertad: Todo toro invariante separan el espacio fase en su nivel de energía. Esta propiedad topológica significa que en un espacio fase de 4 dimensiones, los toros invariantes que tienen la misma energía están contenidos en un espacio de dimensión 3, por lo tanto estos toros 2-dimensionales pueden separar el espacio en dos. Como consecuencia dinámica tenemos que el espacio que está contenido dentro de cada toro es invariante, ninguna órbita puede escapar. Por ello, la persistencia de algunos toros invariantes en sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad implica que existen conjuntos abiertos de órbitas que están confinados entre dos toros invariantes. Para el caso de más grados de libertad, los toros invariantes no pueden

separar el espacio de energía constante, por lo cual las órbitas no están confinadas entre toros. Arnold planteó la siguiente conjetura: Para casi toda perturbación de un sistema integrable de más de dos grados de libertad y cualesquiera dos toros invariantes que comparten el mismo nivel de energía, todo entorno del primer toro está conectado con cualquier otro entorno del segundo toro por medio de una órbita. Este fenómeno se conoce con el nombre de difusión de Arnold.

A lo largo de este trabajo consideraremos solamente los sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad<sup>1</sup>. Partimos de un sistema completamente integrable al que agregamos una pequeña perturbación, la cual depende de un parámetro. Nos interesa investigar la existencia de los toros invariantes, pues ello determina la estabilidad estructural del sistema. La desaparición de estos toros da origen a la difusión de las órbitas por la variedad isoenergética. Al desaparecer el último toro, el sistema tiene comportamiento caótico. En los sistemas de más grados de libertad, los toros no evitan la difusión, la desaparición de los toros aparentemente permite una mayor difusión, pero éste es un tema que aún no está bien entendido.

Consideremos un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad completamente integrable, agregamos una perturbación que mantenga la estructura hamiltoniana del sistema, la cual depende de un parámetro. Nos interesa estudiar el mecanismo de destrucción de los toros invariantes: ¿Para qué valores del parámetro de perturbación ocurre el rompimiento de cierto toro? ¿Cómo se relaciona este fenómeno con la dinámica en el entorno del toro? Debemos elegir una formulación matemática del problema que nos permita determinar la existencia o desaparición de toros invariantes. Optamos por estudiar la aplicación generada por las órbitas del flujo hamiltoniano al atravesar transversalmente una variedad de codimensión uno en la variedad isoenergética. Esta técnica la introdujo Poincaré en el problema de tres cuerpos, la cual se conoce como sección de Poincaré. Las propiedades dinámicas del flujo son heredada por la aplicación obtenida en la sección de Poincaré. Para los sistemas hamiltonianos que hemos considerado, podemos tomar como sección a una variedad topológicamente equivalente a un cilindro donde el flujo sea transversal a ésta: Al seguir las órbitas que cruzan al cilindro hasta el punto donde retornan a él, obtenemos un difeomorfismo definido sobre el cilindro, el cual conserva medida. Este procedimiento lo podemos repetir para cada valor del parámetro de perturbación, con lo cual obtenemos una familia uniparamétrica de difeomorfismos conservativos en el cilindro. Cada toro invariante corta a la sección de Poincaré como un círculo alrededor del cilindro, el cual es invariante ante el difeomorfismo. Estos círculos invariantes (que llamaremos IRC) separan al cilindro en dos partes invariantes.

Hemos trasladado nuestro problema original al problema de determinar la existencia de IRC en difeomorfismos conservativos en el cilindro. Ahora debemos definir las propiedades de los difeomorfismos con los que vamos a trabajar. Los sistemas completamente integrables pueden ser escritos en coordenadas de ángulo y acción cuyo hamiltoniano depende exclusivamente de las coordenadas de acción. Cada toro invariante tiene definido un conjunto de frecuencias, las cuales se obtienen derivando el hamiltoniano respecto a las coordenadas de acción y asignando el valor de estas coordenadas correspondientes a dicho toro. Se puede demostrar que si estas frecuencias no cumplen una relación diofantina, toda órbita que pertenece a dicho toro es densa. Para que los toros invariantes puedan subsistir antes pequeñas perturbaciones es necesario pedir que las frecuencias de oscilación, del hamiltoniano integrable, dependan explícitamente de todas las coordenadas de acción: Tales sistemas hamiltonianos son los que nos interesa. Para el caso de dos grados de libertad, los sistemas hamiltonianos que poseen esta propiedad, generan difeomorfismos en el cilindro con la propiedad de twist, es decir, el cambio de la coordenada angular en el cilindro

---

<sup>1</sup>También incluimos los sistemas hamiltonianos de un grado y medio de libertad, es decir, aquellos sistemas de un grado de libertad que dependen explícitamente del tiempo

crece respecto a la coordenada radial:

$$f : (\theta, r) \rightarrow (\bar{\theta}, \bar{r}) \quad , \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} > 0 \quad .$$

Podemos introducir entonces el concepto de número de rotación: Es el ángulo  $(\bar{\theta} - \theta)$  que en promedio avanza un punto de una órbita a cada paso de la aplicación. Las órbitas periódicas en el cilindro tienen un número de rotación racional  $\frac{p}{n}$ , donde el período de la órbita es  $n$  y da  $p$  vueltas alrededor del cilindro antes de retornar al punto inicial. Los IRC tienen un número de rotación irracional y significa que toda órbita sobre el IRC lo llena densamente. En las aplicaciones tipo twist, el número de rotación crece respecto a la altura en el cilindro. Debemos hacer notar que en los sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad, para casi toda sección de Poincaré de forma cilíndrica podemos definir localmente un difeomorfismo tipo twist sobre una banda alrededor del cilindro.

Cuando estudiamos el entorno de una resonancia en los sistemas hamiltonianos considerados, la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r + K \sin(\theta) \quad , \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{r} \quad , \end{aligned}$$

modela adecuadamente la dinámica cercana a la resonancia en el cilindro, esta aplicación se conoce con el nombre de aplicación standard. Muchos problemas físicos con dos grados de libertad pueden ser representados (localmente) por esta aplicación, la cual depende del parámetro  $K$ . Un ejemplo lo tenemos en la dinámica en el entorno de las separatrices del péndulo plano perturbado. Por esta razón seleccionamos a la aplicación standard como nuestro *banco de pruebas* en el estudio de la desaparición de los IRC en el cilindro.

Las aplicaciones en el cilindro tipo twist que conservan medida han sido estudiadas desde finales del siglo pasado. Poincaré comensó a estudiarlas como parte del problema de tres cuerpos y conjeturó que en estas aplicaciones existen al menos dos órbitas periódicas para cualquier número de rotación racional (definido sobre cierto intervalo). Birkhoff probó años más tarde que esta conjetura era cierta, además demostró para estas aplicaciones que todo IRC alrededor del cilindro coincide con la gráfica de una función tipo Lipschitz, lo cual quiere decir que los IRC se proyectan biyectivamente sobre un círculo alrededor del cilindro.

Para demostrar la existencia de IRC en las aplicaciones conservativas tipo twist en el cilindro se tuvo que esperar a la formulación del teorema KAM. Moser demostró en su famoso teorema del twist, que para pequeñas perturbaciones en una aplicación tipo twist integrable, los IRC con número de rotación mal aproximables por racionales pueden existir, siempre y cuando la aplicación cumpla con ciertas condiciones de regularidad. Herman, Russmann y otros han profundizado aún más sobre la teoría KAM en estas aplicaciones.

Para conocer más sobre la estructura geométrica de las órbitas periódicas y los IRC, debemos recurrir a los trabajos de Aubry y Mather. Ellos introdujeron un formalismo variacional con el cual mostraron que todo IRC se puede aproximar por una sucesión de órbitas periódicas cuyos número de rotación converge al del IRC considerado. Además mostraron que si dicho IRC desaparece, éste se convierte en un conjunto minimal cantoriano (un círculo con un número infinito de agujeros).

Tomando el problema de determinar el valor del parámetro para el cual un IRC se rompe, podemos recurrir al teorema KAM. Desgraciadamente KAM es una teoría orientada a demostrar la existencia de círculos invariantes, la información cuantitativa que obtenemos de ella para estimar el valor del parámetro de rompimiento está muy alejado de los valores reales. Existen métodos numéricos, como el método de Greene, para estimar en forma precisa el valor del parámetro de

rompimiento, pero éstos son métodos heurísticos. Existen otros métodos para estimar este valor del parámetro, los cuales recurren a la teoría de Matier sobre la existencia de órbitas periódicas monótonas ( donde la coordenada angular de la órbita sigue el mismo orden de una rotación en el círculo ) que esta próxima al IRC. Tal es el caso de los trabajos de Hall y Boyland, MacKay y Mather sobre este tema. Sin embargo, aunque dichos métodos son formales, las estimaciones del parámetro no son muy precisas. En algunos casos debemos realizar un número infinito de pasos para estimar el valor del parámetro, además la dinámica y la geometría del rompimiento de IRC es poco clara.

Existe otro punto de vista para atacar este problema: el esquema de autosimilaridad y renormalización. Bajo sucesivas composiciones de la aplicación y transformaciones de rescalamiento se puede llevar la aplicación original a una aplicación de tipo universal en un espacio de funciones adecuado. Conociendo las propiedades de la aplicación universal y las transformaciones de rescalamiento puede ser posible estimar el parámetro de rompimiento de un IRC particular. Sin embargo las propiedades de convergencia a esta aplicación de tipo universal no son claras. MacKay y Escande son aquellos que más han contribuido en este campo.

Tomando en cuenta los antecedentes sobre el estudio del rompimiento de IRC, decidimos desarrollar en este trabajo un criterio de no existencia de IRC en aplicaciones conservativas en el cilindro tipo twist. Este criterio debe cumplir las siguiente propiedades:

- i. Que el algoritmo fuera concluyente formalmente sobre la existencia de IRC en un número finito de pasos.
- ii. Que dicho algoritmo fuera capaz de estimar el valor del parámetro de rompimiento (parámetro crítico) para cualquier número de rotación y con una precisión arbitraria.
- iii. Que dinámica y geoméricamente el criterio fuera claro.

El interés de desarrollar este criterio no es simplemente cuantitativo, deseamos conocer con mayor objetividad y precisión la dinámica en el entorno de un IRC y el mecanismo de rompimiento de éste.

El fundamento de nuestro criterio es el siguiente: Cuando las órbitas periódicas hiperbólicas en el entorno de un IRC comparten puntos heteroclinicos, implica la no existencia de IRCs, cuyos números de rotación están incluidos en el intervalo definido por los números de rotación de los puntos hiperbólicos (intervalo de rotación). Más concretamente, cuando las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos periódicos tienen puntos de intersección, dichas variedades obstruyen a los IRCs, perdiendo de esta manera su continuidad.

Nuestro criterio, que llamamos de la obstrucción, expresa claramente el mecanismo de rompimiento de los IRCs. Para ver que este criterio es formal, debemos mostrar que la aparición de puntos heteroclinicos implica la no existencia de IRCs. En primer lugar, debemos conocer la forma geométrica que tienen las variedades invariantes para cualquier punto hiperbólico periódico. De esta forma podemos asegurar que las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos con número de rotación distintos confinan en una banda alrededor del cilindro a los IRCs cuyo número de rotación están incluidos en el intervalo de rotación. A esta parte del trabajo la nombramos como el estudio de la estructura de las resonancias en las aplicaciones tipo twist en el cilindro. A partir del conocimiento de las resonancias es claro ver que la aparición de puntos heteroclinicos obstruyen a los IRCs.

El algoritmo para determinar el parámetro crítico de un IRC particular es el siguiente: Buscamos una sucesión alternada de números racionales que convergen al número de rotación que nos interesa. Para cada pareja de términos consecutivos de la sucesión buscamos puntos hiperbólicos que tengan como número de rotación dichos valores de la sucesión. Variando el valor del parámetro,

podemos determinar el valor para el cual las variedades invariantes de estos puntos hiperbólicos tienen un punto de tangencia (heteroclinica). Repitiendo este procedimiento para todos los elementos de la sucesión obtenemos entonces una sucesión de valores del parámetro. Esta sucesión es decreciente y converge a un valor que llamamos el parámetro crítico del IRC. Debemos notar que para cada paso del algoritmo aseguramos formalmente la no existencia del IRC. El número de pasos que debemos realizar depende del grado de precisión con que deseamos obtener el parámetro crítico.

Para estudiar la geometría de las resonancias en las aplicaciones de tipo twist que conservan medida, introducimos un método de formas normales. Para estudiar una resonancia particular, definida por un número de rotación racional, buscamos una transformación que nos amplifique la dinámica de la aplicación alrededor de una banda que contenga la resonancia elegida (la órbita periódica hiperbólica con el número de rotación de la resonancia). Si la dinámica, a primera aproximación, es similar a un "flujo laminar", buscamos otra transformación que amplifique la dinámica de una banda que contenga a la "línea de flujo" que nos interesa. Este procedimiento lo repetimos tantas veces sea posible hasta descubrir la estructura de la resonancia, lo cual es similar a descubrir la estructura de "vorticidad" de una "línea de flujo" (aparentemente "laminar").

Las técnicas de teoría de perturbaciones son utilizadas para encontrar las transformaciones que amplifican la dinámica de cierta banda alrededor del cilindro. Partiendo de la composición  $n$ -ésima de la aplicación (donde  $n$  es el período de la resonancia), buscamos las transformaciones que permitan eliminar los términos en la aplicación de orden más bajo respecto al parámetro de perturbación. Cuando no es posible encontrar una transformación que mate los términos de orden más bajo (respecto al parámetro) significa que hemos hallado la estructura de la resonancia. A la aplicación resultante le llamamos la forma normal cuasiresonante.

Como mencionamos previamente, la aplicación standard es nuestro "banco de pruebas", con ella podemos probar la eficiencia del método de la obstrucción. Previamente debemos determinar su estructura resonante para asegurar la aplicabilidad del método de la obstrucción. Tomando una resonancia arbitraria,  $\frac{p}{n}$ , comensamos escribiendo en forma explícita la composición  $n$ -ésima de la aplicación, donde utilizamos las propiedades de las funciones de Bessel. Esta composición queda expresada como una serie de potencia respecto al parámetro de perturbación. Tomando el valor del parámetro como  $\epsilon$  y reescalando la composición en el entorno de la resonancia, mostramos que podemos eliminar términos hasta de orden  $O(\epsilon^m)$  ( con  $m = \frac{n}{2}$  si  $n$  es par y  $m = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar). La aplicación resultante, que es la forma normal cuasiresonante, es comparable a un flujo hamiltoniano de una cadena de  $n$  péndulos. La amplitud de la resonancia es de orden  $O(\epsilon^{n/2})$ . Este resultado es similar al que Zehnder obtiene para las aplicaciones tipo twist en el entorno de un punto elíptico, utilizando las formas normales de Birkhoff. En ese caso, el estudio de las formas normales es local, en cambio para nuestro caso el estudio es global: Nuestras formas normales las desarrollamos en el entorno de una curva y no en el entorno de un punto.

Como la aplicación standard tiene una estructura resonante adecuada, nos permite utilizar el método de la obstrucción en ella. Implementamos numéricamente este criterio para determinar el valor del parámetro crítico para IRC con cualquier número de rotación. Verificamos que este criterio es arbitrariamente preciso, comparable a métodos heurísticos como el de Greene. De los resultados que obtenemos podemos descubrir un fenómeno de autosimilaridad, que está gobernado por los elementos de la expansión en fracciones continuas del número de rotación del IRC. Este método admite, por lo tanto, un esquema de renormalización de forma natural.

Al examinar los métodos formales que permiten determinar la existencia de IRC, observamos que éstos tienen como denominador común el hecho de que los IRCs coinciden con gráficas de funciones tipo Lipschitz. A consecuencia de esto, las órbitas periódicas cercanas al IRC deben

ser monótonas. Boyland y Hall mostraron que la existencia de órbitas periódicas no monótonas implica que no pueden existir IRCs con número de rotación próximas al de estas órbitas periódicas.

Para determinar cual es el origen de las órbitas periódicas no monótonas y, a la vez, mostrar la equivalencia del método de la obstrucción y el método de Hall y Boyland, demostramos que en el entorno de la tangencia heteroclinica (que da origen a la obstrucción de las IRCs por las variedades invariantes) se crean órbitas periódicas no monótonas. La técnica que utilizamos para esta demostración es la construcción de bandas estrechas en el entorno de la tangencia, las cuales se aplican sobre ellas mismas. Utilizando las técnicas de dinámica simbólica, similares a las que utiliza Moser para el estudio de las intersecciones homoclinicas, podemos demostrar que la dinámica en el entorno de la tangencia heteroclinica es conjugada a la dinámica de un shift de Bernoulli. De esta manera podemos asegurar la existencia de órbitas de cualquier período (mayores a cierto número que depende del período de las órbitas hiperbólicas cuyas variedades tienen la tangencia heteroclinica). Finalmente, utilizando la dinámica de las bandas previamente construidas, podemos mostrar que las órbitas periódicas creadas por la tangencia heteroclinica no son órbitas monótonas. Esta demostración es general para cualquier aplicación tipo twist en el cilindro, permitiendo así dar una fundamentación dinámica y geométrica a los criterios formales sobre la existencia de IRCs basados en las propiedades de monotonia del las órbitas periódicas próximas. Así obtenemos una unificación de los criterios formales.

Concluimos que el método de las obstrucciones permite comprender en forma clara el mecanismo de destrucción de los IRCs y también la dinámica en el entorno de éstos antes y después del rompimiento. La estructura resonante de las aplicaciones tipo twist junto con el método de la obstrucción los podemos considerar como una formalización del método del solape de resonancias introducido por Chirikov en flujos, pero en nuestro caso para difeomorfismos en el cilindro.

El contenido del trabajo de tesis es el siguiente:

- **Capítulo I:** Mostramos como en algunos fenómenos físicos se puede reducir el estudio del flujo, debido a las ecuaciones diferenciales, a un difeomorfismo conservativo en el cilindro. En particular, mostramos como la aplicación standard es un buen modelo para el estudio de las resonancias de muchos fenómenos físicos no lineales.
- **Capítulo II:** Hacemos una recapitulación de los resultados más importantes sobre difeomorfismos en el cilindro, haciendo énfasis en la teoría de Aubry-Mather y en el teorema del twist de Moser.
- **Capítulo III:** Introducimos las formas normales no locales sobre el cilindro. Estas nos permiten descubrir la estructura resonante de la aplicación standard para cualquier número de rotación. Verificamos que las formas normales cuasiresonantes de la aplicación standard son equivalentes a una cadena de péndulos alrededor del cilindro. La amplitud de resonancia así obtenida es comparada con evaluaciones numéricas.
- **Capítulo IV:** Está dedicado a los métodos de detección de rompimiento de IRC. En la primera parte revisamos los diferentes criterios que se encuentran en la literatura. Después introducimos el método de la obstrucción, donde lo justificamos formalmente. Tomando a la aplicación standard como ejemplo, implementamos este criterio numéricamente y discutimos los resultados obtenidos.
- **Capítulo V:** Estudiamos en este capítulo el entorno de las tangencias heteroclinicas con el fin de mostrar la creación de órbitas periódicas no monótonas. Para simplificar el estudio, primero lo hacemos en el entorno de una tangencia homoclinica de un punto hiperbólico. Así

mostramos que en el entorno de la tangencia la dinámica es conjugada a un shift de Bernoulli. Luego trasladamos estos resultados al entorno de una tangencia heteroclínica debida a las variedades invariantes de dos puntos periódicos hiperbólicos. Al final, mostramos que las órbitas periódicas creadas por la tangencia no son monótonas. Mostramos así la equivalencia del método de la obstrucción con el criterio del Hall y Boylund.

És el meu desitg expressar el meu agraïment i admiració al Dr. Carles Simó; en primer lloc, per haver-me acollit com a membre del Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi ( antic Departament d'Equacions Funcionals); en segon lloc, per dirigir i aconsellar-me en el desenvolupament d'aquesta Tesi Doctoral; i finalment, per oferir-me la seva amistat en els tres anys d'estada a Barcelona.

També vull agrair a tothom qui m'ha recolzat en la tasca que m'ha portat a Barcelona, volent destacar a Joaquim Font, Joan Carles Tatjer, Miquel Bosch, Jaume Timoneda, Susana Romano, Arnadeu Delshams, Antoni Benseny, Juan E. Martínez Legas i a tants d'altres que és impossible anomenar-los aquí. A tots ells dic: Gràcies!

Este trabajo de tesis fue posible gracias a la beca concedida por CONACYT en los años académicos 1984-1986, y la beca concedida por PSPA-UNAM durante el año académico 1986-1987.

Barcelona, 5 de febrero de 1988.

# Indice

<b>I</b>	<b>Fenómenos No Lineales en la Física.</b>	<b>1</b>
I.1	Ejemplos físicos.	2
I.1.1	El péndulo forzado.	2
I.1.2	Movimiento de partículas cargadas en una botella magnética.	3
I.1.3	Escape y captura en el Problema Restringido de Tres Cuerpos.	4
I.1.4	El modelo discreto de Frenkel-Kontorova.	5
I.1.5	El modelo de la doble hélice auto-organizada.	6
I.2	Sección de Poincaré.	6
I.3	El modelo del Péndulo.	7
I.4	Aplicaciones en el plano y el cilindro.	9
I.5	Familias de Aplicaciones.	10
<b>II</b>	<b>Aplicaciones conservativas en el plano tipo Twist.</b>	<b>11</b>
II.1	Introducción.	11
II.2	Aplicaciones tipo twist.	12
II.3	Propiedades de simetría.	14
II.4	Acción y órbitas.	14
II.5	Conjuntos monótonos.	15
II.6	Algunos teoremas de Birkhoff.	16
II.7	Órbitas minimales.	17
II.8	Órbitas minimales con $\rho$ racional.	17
II.9	Órbitas minimales con $\rho$ irracional.	20
II.10	Teorema de KAM.	20
II.11	Teorema del Twist.	21
II.12	Las estimaciones del teorema de KAM.	24
<b>III</b>	<b>Formas normales en la aplicación standard.</b>	<b>27</b>
III.1	Introducción.	27
III.2	Formas normales locales.	28
III.3	Formas normales no locales.	29
III.4	Cálculo de $f^n$ en la aplicación standard.	32
III.5	Formas normales en la aplicación standard.	38
III.6	Cálculos explícitos de resonancias de orden bajo.	52

III.7 Composición de transformaciones. . . . .	53
III.8 Conclusiones. . . . .	56
<b>IV Rompimiento de Curvas Invariantes Rotacionales.</b>	<b>57</b>
IV.1 Introducción. . . . .	57
IV.2 Métodos de evaluación del parámetro crítico. . . . .	58
IV.2.1 Teoría KAM: Cotas inferiores. . . . .	59
IV.2.2 Criterio del residuo. . . . .	59
IV.2.3 Criterio del cruce del cono. . . . .	60
IV.2.4 Métodos formales. . . . .	62
IV.2.5 Solape de resonancia. . . . .	62
IV.2.6 Esquemas de renormalización. . . . .	63
IV.3 Método de la obstrucción. . . . .	65
IV.4 Método numérico. . . . .	70
IV.4.1 Puntos periódicos monótonos e hiperbólicos. . . . .	70
IV.4.2 Variedades invariantes. . . . .	71
IV.4.3 Continuación de las variedades. . . . .	71
IV.4.4 Distancia entre las variedades. . . . .	71
IV.4.5 Ciclo. . . . .	72
IV.4.6 Secuencia. . . . .	72
IV.5 Resultados numéricos para la aplicación standard. . . . .	72
IV.5.1 IRC con número de rotación igual a la razón áurea. . . . .	71
IV.5.2 IRC nobles. . . . .	73
IV.5.3 IRC no nobles. . . . .	73
IV.5.4 IRC con CFE periódicos . . . . .	74
IV.6 Conclusiones. . . . .	77
IV.6.1 Visión geométrica. . . . .	77
IV.6.2 Visión de autosimilaridad. . . . .	77
IV.6.3 Visión variacional. . . . .	77
IV.6.4 Métodos formales. . . . .	78
IV.6.5 Métodos locales. . . . .	78
IV.6.6 Zona de inestabilidad de Birkhoff. . . . .	78
IV.7 Apéndice 1 . . . . .	78
IV.8 Apéndice 2 . . . . .	79
<b>V Dinámica en el entorno de los cantorianos.</b>	<b>82</b>
V.1 Introducción. . . . .	82
V.2 Tangencia homoclíptica. . . . .	83
V.3 Tangencias heteroclípticas. . . . .	86
V.3.1 Construcción de bandas. . . . .	88
V.3.2 Matriz de transición. . . . .	92
V.4 Orbitas periódicas mal ordenadas. . . . .	94
V.5 Pérdida de orden. . . . .	96

## Capítulo I

# Fenómenos No Lineales en la Física.

En las últimas décadas se ha dado gran importancia a los fenómenos físicos que no admiten una formulación e interpretación matemáticas que sean "lineales". Esto significa que localmente la variación de algún parámetro del sistema físico no induce un cambio lineal en la evolución del mismo. Tradicionalmente, en cualquier desarrollo asintótico de las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema, se consideraban los términos lineales como los que tenían la mayor información física. Sin embargo ahora sabemos que muchos fenómenos no pueden ser entendidos solamente con dicha información. En particular, los fenómenos de bifurcación son un ejemplo típico de esta situación.

Los sistemas mecánicos conservativos centran nuestra atención en este trabajo, principalmente los de 2 grados y grado y medio de libertad. Es fácil mostrar que la mayoría de sistemas de este tipo poseen fenómenos no lineales, pudiendo destacar, por ejemplo, las oscilaciones no lineales. Para este conjunto de sistemas físicos mostramos que una buena representación matemática de dichos fenómenos es la ecuación del péndulo. Esta ecuación nos servirá como herramienta para modelizar el comportamiento, estable o caótico, del entorno de algún punto del espacio fase. Curiosamente, la estabilidad local puede ser explicada por el modelo del péndulo, mientras que la inestabilidad local fuerte puede ser explicada usando como modelo el oscilador armónico.

En este capítulo damos una motivación física para el estudio de las aplicaciones conservativas del plano, las cuales están fuertemente relacionadas con la ecuación del péndulo. Por medio de ejemplos en diferentes áreas de la física, mostramos cómo se puede reducir el problema, de resolver una ecuación diferencial ordinaria (EDO), a estudiar una aplicación en el plano. A partir de esta aplicación podemos examinar el comportamiento del modelo a tiempos muy largos, obteniendo información sobre la estabilidad de dicho sistema. De esta manera podemos tener una visión global de la evolución de los sistemas físicos (esta información usualmente no es posible obtenerla a partir de una solución particular de la EDO).

A continuación exponemos algunos ejemplos relacionados con diferentes áreas en física (mecánica, electrodinámica, mecánica celeste, estado sólido y física molecular), en los cuales es conveniente estudiarlos via una aplicación para obtener una visión global de su evolución en el tiempo.

## I.1 Ejemplos físicos.

### I.1.1 El péndulo forzado.

Tomemos un péndulo, el cual oscila en un plano bajo la acción de la gravedad. Escribimos su hamiltoniano como  $H_0 = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos \phi$ . El espacio fase del péndulo es un cilindro, con un punto hiperbólico y otro elíptico. Las separatrices (órbitas que separan los regímenes de circulación y libración) se describen en el tiempo por la órbita  $\phi_{sep}(t) = 4 \arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi$ . Cuando perturbamos este sistema, variando en forma periódica la longitud del péndulo, debemos agregar al hamiltoniano original el término:

$$\epsilon V(\phi, \tau) = \epsilon \omega_0^2 \cos(\phi) \cos(\tau) = \epsilon \omega_0^2 (\cos(\phi + \tau) + \cos(\phi - \tau)) ,$$

donde  $\tau = \Omega t + t_0$ . Para pequeñas oscilaciones  $|\phi| \ll 1$  y  $\Omega/\omega_0 \simeq 2$  obtenemos oscilaciones paramétricas [2] y para  $\Omega \gg \omega_0$  solo tenemos pequeñas modulaciones de la energía ( que se estudian vía el método de Lindstedt-Poincaré [3] ).

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento de las órbitas cercanas a las separatrices; en particular, el cambio de la energía al cabo de medio periodo. Como  $\frac{d}{dt}H = \epsilon \frac{d}{dt}V$ , podemos integrar  $H$  cerca de la solución no perturbada,  $\phi_{sep}(t)$ , obteniendo el cambio de energía (recordando que  $\Omega \gg \omega_0$ ):

$$\Delta H = \int dH = - \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \frac{1}{2} \omega_0^2 \Omega \sin(4 \arctan(e^{\omega_0 t}) - \tau) dt ,$$

lo cual podemos escribir como  $\Delta H = -\frac{1}{2} \epsilon \omega_0 \Omega A_2(\Omega/\omega_0) \sin \tau_0$ .  $A_2$  es la integral de Arnold-Melnikov [36], la cual puede ser aproximada por  $A_2(\Omega/\omega_0) \approx \frac{2\pi\Omega}{\omega_0} e^{-\pi\Omega/2\omega_0}$ . Como nos interesa la acumulación de cambio de energía  $\Delta H$ , debemos ignorar las contribuciones periódicas. Si  $\dot{\phi}(t) > 0$ , la perturbación  $\cos(\phi - \tau)$  es imperceptible ya que  $\Omega \gg \omega_0$ , sin embargo  $\cos(\phi + \tau)$  contribuye acumulativamente al cambio de energía (vease [36], p.302). Examinemos éste cambio para  $\phi = 0$ : El cambio de la fase  $\tau$  en  $\phi = 0$ , cada medio periodo, está dado por  $\tau_0 = \tau_0 + \pi\Omega/\omega(\nu)$ , donde  $\omega(\nu) = \pi\omega_0/\ln(32/|\nu|)$  [36] y la  $\nu$  es la energía relativa de oscilación respecto a la separatriz, siendo  $\omega(\nu)$  la frecuencia asociada a  $\nu$ .

Como que  $\Omega \gg \omega_0$  entonces la constante  $\lambda = \Omega/\omega_0 \gg 1$ . Para poder calcular  $\nu$  en  $\phi = 0$  en el siguiente medio ciclo, utilizamos la variación de la energía  $\Delta$  además de  $\nu = (\frac{H_0 - \Delta H_0}{\omega_0^2}) - 1$ . Obtenemos así la siguiente expresión para  $\nu$ :

$$\nu = \frac{\Delta H_0}{\omega_0} + \nu + W \sin \tau_0 ,$$

donde  $W = -4\pi\epsilon\lambda^2 e^{-\pi\lambda/2}$ . De esta manera obtenemos la aplicación  $\nu = \nu + W \sin \tau_0$  y  $\tau_0 = \tau_0 + \lambda \ln(32/\nu)$  llamada whisker map y que describe el cambio de energía y fase cada medio ciclo; esta aplicación es canónica. La aplicación tiene resonancias. Definimos que  $\nu_r$  es resonante si  $\lambda \ln(32/\nu_r) = 2\pi n$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Entonces, al linealizar dicha aplicación en el entorno de la resonancia  $\nu_r$ , considerando  $\lambda \gg 1$  y  $|\nu| \gg 1$  además de hacer un cambio de variable  $I = -\frac{\Delta}{\nu_r}(\nu - \nu_r)$  y  $\theta = \tau_0$ , obtenemos la aplicación standard [36,4,5]:

$$I = I + K \sin \theta , \quad \bar{\theta} = I + \theta ,$$

$$K = -\frac{\lambda W}{\nu_r} = \frac{4\pi\epsilon\lambda^3}{\nu_r} e^{-\pi\lambda/2} .$$

Esta aplicación es muy importante puesto que aparece en numerosos ejemplos físicos y es un buen modelo para estudiar los fenómenos de estabilidad y difusión. Particularmente, si en este caso la variable  $I$  esta acotada, significa que el cambio de energía también lo esta, manteniéndose indefinidamente en ese régimen de circulación o libración. En cambio, si  $I$  no esta acotada, el cambio de energía puede ser muy grande y caótico. De aquí surge, de forma natural, la siguiente pregunta: ¿Cuándo la energía tiene una variación acotada?, y para este ejemplo, ¿Para que valores de  $K$  la variable  $I$  esta acotada? Así deben existir en el espacio fase que es un cilindro, fronteras que no permiten la difusión de la variable  $I$  y que están alrededor del cilindro (ver figura 1). Estas fronteras deben ser invariantes ante el flujo hamiltoniano (ó en la aplicación canónica), esto quiere decir que el conjunto de puntos del espacio fase que pertenece a dichas fronteras se aplica sobre él mismo. A estas fronteras les llamamos curvas invariantes [6,7]; en el capítulo II estudiamos algunas propiedades de estas curvas y en el capítulo IV mostramos diferentes métodos para detectar la existencia de estas fronteras.

La aplicación standard es un modelo que encontramos en muchos fenómenos físicos [36,5] y también se utiliza para modelar los fenómenos de autosimilaridad y renormalización en hamiltonianos de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad [8] (via la ecuación de péndulo forzado), así como en aplicaciones conservativas del plano [9]. Esta aplicación es la base del estudio de los capítulos siguientes.

### 1.1.2 Movimiento de partículas cargadas en una botella magnética.

En esta sección describimos el movimiento de partículas cargadas girando alrededor de las líneas de campo magnético  $B$ . El momento magnético orbital  $\mu = v_{\perp}^2/2B$  (donde  $v_{\perp}$  es la componente de la velocidad ortogonal a  $B$ ) cambia con el tiempo si  $B$  no es homogéneo. Esto lo expresamos con la ecuación:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\rho v_{\perp}}{B} (v^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2}) \sin \Phi - \frac{v_{\parallel} v_{\perp}^2}{2B^2} \frac{\partial B}{\partial s} \cos(2\Phi),$$

donde  $\Phi$  es la curvatura de las líneas de campo  $B$ ,  $s$  es la coordenada a lo largo de estas líneas (con  $\dot{s} = v_{\parallel}$ ) y  $\Phi$  es la fase de la perturbación. Suponiendo un campo  $B = B_0(1 + b^2 x^2)$  y  $x = a \sin(\Omega t)$ , la curvatura queda definida como  $\rho = -rb^2(1 - 2b^2 x^2)/(1 + b^2 x^2)^2$ . La fase  $\Phi$  está relacionada con la fase de la rotación de Lamour,  $\theta$ , por  $r \sin \Phi = -rc \sin \theta$ , siendo  $r$  la distancia al eje de simetría  $x$  y  $rc$  el radio de giro alrededor de la línea de campo. Esto permite expresar el cambio de  $\mu$  aproximadamente como:

$$\frac{d\mu}{dt} \approx \frac{rc v_{\perp} b^2 (1 - 2b^2 x^2) (v^2 - \mu B)}{B_0 (1 + b^2 x^2)^3} \sin \theta.$$

Para evaluar el cambio acumulado de  $\mu$  examinamos los sucesivos valores de  $\mu$  y  $\theta$  en  $x = 0$ . El cambio de  $\theta$  está dado aproximadamente como  $\bar{\theta} = \theta + D(\bar{\mu})$  con:

$$D(\bar{\mu}) \approx \pi \frac{\langle \omega \rangle}{\Omega} = \frac{\pi \omega_0}{2b\sqrt{2}B_0} \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{\mu}}} + \frac{v^2}{2B_0 \bar{\mu}^{3/2}} \right)$$

y  $\omega = \frac{dB(x)}{dx}$  la frecuencia de Lamour ( $\omega_0 = \frac{c}{2} B_0$ ). El cambio del momento  $\Delta\mu = \bar{\mu} - \mu$  se obtiene integrando  $\frac{d\mu}{dt}$  en un ciclo. Así finalmente obtenemos una expresión aproximada para  $\Delta\mu$  dada por:

$$\Delta\mu = \kappa(\mu) \sin(\theta) \quad \text{con} \quad \kappa(\mu) \approx -\frac{3\pi rc v^2}{4caB_0} e^{-2/3\epsilon},$$

$$\text{y } \epsilon = ab \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

La aplicación que define el cambio en  $\mu$  y  $\theta$  es entonces  $\bar{\mu} = \mu + \kappa(\mu) \sin \theta$  y  $\bar{\theta} = \theta + D(\bar{\mu})$ . Si dicha aplicación la desarrollamos alrededor de un término resonante  $\mu_r$  (definido como  $D(\mu_r) = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) e introduciendo una nueva variable  $I$  (definida como  $D(\mu) \approx D(\mu_r) + D\mu'(\mu_r)(\mu - \mu_r) = 2\pi n + I$ ), obtenemos una aplicación mas simple:

$$I = I + K \sin \theta, \quad \bar{\theta} = I + \theta,$$

$$K = \frac{3\pi^2}{8} \frac{r_c}{\delta R_1^2} \left(\frac{v}{v_{II}}\right)^2 \left(1 + \frac{3v^2}{v_1^2}\right) e^{-2/3\epsilon}$$

y  $R_1$  el radio de Lamour.

La aplicación obtenida es de nuevo la aplicación standard. Este ejemplo nos permite determinar la estabilidad del movimiento de la partículas cargadas; si  $\mu$  se mantiene acotada al cabo de infinitas iteraciones significa que no se alejarán de las líneas de campo, obteniendose un confinamiento de las partículas. ¿Qué valores debe tener el parámetro  $K$  para mantener confinadas a las partículas cargadas?

### I.1.3 Escape y captura en el Problema Restringido de Tres Cuerpos.

Exponemos ahora un problema en mecánica celeste [10,11]: Consideremos dos cuerpos de masa  $\mu$  y  $1 - \mu$  moviendose en trayectorias circulares alrededor del centro de masas y sobre un mismo plano; entre las masas se ejerce la fuerza gravitacional. Tomemos una tercera partícula de masa suficientemente pequeña para que no perturbe el movimiento de las otras dos y que se mueve en el mismo plano. Si  $\mu = 0$  entonces la partícula se mueve en órbita elíptica, hiperbólica o parabólica y tenemos así el problema de Kepler. En particular, las órbitas parabólicas tienen un significado especial; al hacer un cambio de variable donde el infinito lo transformamos en el origen y tal que los ejes giren con la misma velocidad angular que los cuerpos de masa  $\mu$  y  $1 - \mu$ , obtenemos una órbita periódica en  $q = 0$  ( $q = \sqrt{2/r}$ ). La estabilidad de este punto es del tipo hiperbólico débil [12]. Sus variedades invariantes (órbitas asintóticas a  $q = 0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ) son las órbitas parabólicas. Para este caso ambas variedades coinciden y cortan el plano  $\Pi_C$  (definido como  $p_r = 0$ ,  $\dot{p}_r > 0$ ) en un círculo de radio  $q = 4/C$ , siendo  $C$  la constante de Jacobi definida (para  $\mu = 0$ ) como  $C = 2(K - E)$  donde  $E$  es la energía y  $K$  el momento angular (ambos en el sistema no rotante).

Consideremos ahora el caso  $0 \neq \mu \ll 1$ . La perturbación del segundo cuerpo (de masa  $\mu$ ) hace que las variedades invariantes no coincida idénticamente. Ambas variedades cortan por primera vez el plano  $\Pi_C$  en círculos  $P_{+1}$  y  $P_{-1}$  los cuales tienen dos puntos de intersección. Tomando  $C \rightarrow \infty$ , es posible encontrar una expansión asintótica de las variedades  $P_{\pm 1}$  en  $\Pi_C$  utilizando series de Fourier sobre las ecuaciones variacionales [19];  $q(\theta)$  sobre  $P_{\pm 1}$  queda escrito como:

$$q_{\pm 1}(\theta) = \frac{4}{C} + m \left\{ \frac{32}{C^3} + \frac{9 \cdot 2^{12}}{C^{11}} \cos(2\theta) \pm \frac{\pi}{8C} e^{-C^3/24} \sin(\theta) + \dots \right\}$$

Con esta expresión se puede demostrar que  $P_{+1}$  y  $P_{-1}$  tienen intersección transversal en  $\Pi_C$ .

Utilizando la expresión anterior de  $q_{\pm 1}$  se puede escribir una aplicación que represente las sucesivas iteraciones de los puntos cercanos a  $P_{\pm 1}$  y que retornan al plano  $\Pi_C$  cerca de  $P_{\pm 1}$ . Esta aplicación es [10]:

$$\bar{\theta} = \theta + 2\pi(B/8)^{3/2}, \quad \bar{t} = t + \sin(\theta),$$

donde  $\rho = \epsilon t$  significa la distancia radial de los puntos de retorno a  $P_{\pm 1}$ ,  $\theta$  es la coordenada angular,  $B = C/8\epsilon$  y  $\epsilon = \frac{\mu}{4C} e^{-C^3/24}$ .

Esta aplicación puede ser simplificada al expandir  $t$  en algún valor resonante (i.e.  $2\pi(B/t_r)^{3/2} = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). Reemplazando a  $t$  por  $I = 3\pi \frac{B^{2/3}}{t_r^{5/3}}(t - t_r)$  obtenemos:

$$\bar{\theta} = \theta + I \quad \bar{I} = I + \sin(\bar{\theta}) ,$$

donde  $K = (3\pi B^{3/2}/t_r^{5/2})^{-1}$ . Esta es la aplicación inversa de la standard. Gracias a ella podemos conocer para que valores de  $C$  y  $\mu$  existen conjuntos invariantes, los cuales representan órbitas cercanas a parabólicas (tipo cometa). Estas órbitas representan a cometas que pasan muy lejos de los cuerpos primarios (Sol y Júpiter) y son de tipo periódico ó cuasiperiódico.

#### I.1.4 El modelo discreto de Frenkel-Kontorova .

Este modelo describe la posición estacionaria de una cadena bi-infinita unidimensional de partículas, las cuales tienen un acoplamiento con las partículas vecinas mediante un potencial cuadrático [13]. Si llamamos  $y_i$  la posición de la  $i$ -ésima partícula entonces la fuerza ejercida entre las partículas  $i$  y  $i+1$  es  $C(y_{i+1} - y_i)$ .

Consideremos una fuerza de tipo periódico que actúa sobre todas las partículas  $F(\xi) = F(\xi + 1)$ . Nos interesa conocer la posición de equilibrio de las partículas sometidas a esta fuerza periódica; entonces debemos pedir que la fuerza total que afecta a la partícula  $i$ -ésima sea cero:

$$-C(y_i - y_{i-1}) + C(y_{i+1} - y_i) + F(y_i) = 0 .$$

Si llamamos  $x_i = y_i - y_{i-1}$  podemos reescribir la condición anterior como las siguientes relaciones donde  $x_{i+1}$  y  $y_{i+1}$  dependen de  $x_i$  y  $y_i$ :

$$x_{i+1} = x_i - C^{-1}F(y_i) , \quad y_{i+1} = y_i + x_{i+1} .$$

Tomemos como fuerza periódica  $F(\xi) = \sin(\xi)$  y el parámetro  $K = C^{-1}$ , así obtenemos la aplicación standard.

Las configuraciones posibles en la cadena bi-infinita pueden ser estudiadas con esta aplicación. Configuraciones periódicas son representadas por órbitas periódicas identificadas por las posiciones iniciales  $y_i$  e  $y_{i+1}$  y la constante  $C$ . Para una configuración  $n$ -periódica, la energía queda definida como:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} C (y_{i+1} - y_i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} V(y_i) = E ,$$

donde  $V(\xi) = \int_0^\xi F(\eta) d\eta$  y  $l \in \mathbb{Z}$ . Si las posiciones de las partículas ( $y_i$ ) corresponden a una órbita  $n$ -periódica de la aplicación anterior, se demuestra que la energía es un mínimo.

La distancia media entre las partículas se calcula obteniendo el límite

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} (y_i - y_{-i}) .$$

A cada configuración le corresponde un valor diferente de  $\alpha$ . También debemos destacar que usando la aplicación anterior se pueden encontrar configuraciones caóticas posibles.

### I.1.5 El modelo de la doble hélice auto-organizada .

En el estudio de la estructura de macromoléculas que tienen una organización compleja se puede destacar aquellas que tienen una doble hélice, como es el caso del DNA. Para determinar configuraciones posibles debemos considerar a la doble hélice como una doble sucesión de eslabones que forman una cadena. [14]. El potencial entre los eslabones de cada cadena (o hélice) que interacciona con la otra hélice lo escribimos como:

$$V = -\alpha \sum_n \cos(v_{n+1} - v_n - \delta_1) - \beta \sum_n \cos(v'_{n+1} - v'_n - \delta_2) - \gamma \sum_n \cos(v_n - v'_n) ,$$

donde  $v_n$  y  $v'_n$  son ángulos que determinan la orientación del spín del eslabón de la primera y segunda hélice, los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  son constantes de la interacción y  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son ángulos de torsión de las hélices si éstas no interaccionan ( $\gamma = 0$ ).

Tomemos  $\alpha = \beta$  y  $\delta_1 = \delta_2$  si ambas hélices son iguales. Nos interesan los estados ó configuraciones de equilibrio. Esto significa que para toda  $n$  se debe cumplir  $\frac{\partial V}{\partial v_n} = 0$  y  $\frac{\partial V}{\partial v'_n} = 0$ . Por tanto, insertando las nuevas variables  $I_n = \alpha \sin(v_n - v_{n+1} - \delta_1)$  y  $J_n = \alpha \sin(v'_n - v'_{n+1} - \delta_2)$ , la condición de equilibrio nos determina una relación entre el eslabón  $n$  y  $n + 1$ :

$$I_{n+1} = I_n + \sin(v_n - v'_n) , \quad v_{n+1} = v_n + \delta_1 + \arcsin(I_{n+1}/\alpha) ,$$

$$J_{n+1} = J_n - \sin(v_n - v'_n) , \quad v'_{n+1} = v'_n + \delta_2 + \arcsin(J_{n+1}/\beta) .$$

Introduciendo una fase  $\phi_n = v_n - v'_n$  y considerando que  $I_n + J_n = \delta = \text{cte.}$ , reducimos las relaciones anteriores a:

$$I_{n+1} = I_n + \gamma \sin(\phi_n) , \quad \phi_{n+1} = \phi + D(I_n) ,$$

$$D(I_n) = \delta_1 - \delta_2 + \arcsin(I_n/\alpha) + \arcsin((I_{n+1} - \delta)/\beta) .$$

Desarrollando la aplicación (que define el estado de  $I_{n+1}$  y  $\phi_{n+1}$  dado  $I_n$  y  $\phi_n$ ) en un valor resonante de  $I = I_r$  tal que  $D(I_r) = 2\pi n$  e incluyendo el cambio de variables  $I_n = I_n - I_r$  obtenemos la aplicación standard si  $K = \gamma \frac{\partial D}{\partial I} |_{I=I_r}$ .

Esta aplicación permite definir configuraciones periódicas, cuasiperiódicas ó caóticas en las dobles hélices.

## I.2 Sección de Poincaré.

Los sistemas hamiltonianos son aquellos que tienen una estructura simpléctica [17,18]: Las ecuaciones de movimiento son  $\dot{X} = J \nabla H$ , siendo  $X$  un vector en el espacio fase y  $J$  la matriz simpléctica:

$$X = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix} .$$

La función hamiltoniana  $H$  está definida del espacio fase a los reales. El espacio de fases es localmente difeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ , y decimos que el sistema tiene  $n$  grados de libertad. Estos sistemas tienen  $n$  invariantes llamados 2-formas, que son aplicaciones bilineales del espacio cotangente del espacio fase a los reales. Estas formas no cambian en el tiempo y como consecuencia directa se tiene la conservación del volumen en el espacio fase.

Los sistemas hamiltonianos pueden depender explícitamente del tiempo. Entonces, si el espacio de configuración es de dimensión  $n$ , los llamamos sistemas de  $n + \frac{1}{2}$  grados de libertad.

Los sistemas hamiltonianos de  $n$  grados de libertad tienen una integral primera que se mantiene invariante: la energía del sistema. Utilizando la energía podemos reducir en una dimensión el espacio que contiene a una órbita. Por lo tanto los puntos del espacio fase que tienen asociada la misma energía tienen la dinámica restringida a una variedad de dimensión  $2n - 1$ .

Tomemos una variedad isoenergética (de dimensión  $2n - 1$ ), definimos una subvariedad de dimensión  $2n - 2$  que sea transversal a una órbita periódica (el vector tangente de la órbita no pertenece al hiperplano tangente a la subvariedad en el punto de cruce). Para los puntos sobre la subvariedad, que están en un entorno de la órbita periódica, podemos seguir su evolución en el tiempo (es decir, continuar la órbita a la que pertenecen). Utilizando la continuidad de las soluciones de las EDO ante variaciones de las condiciones iniciales, vemos que estas órbitas al retornar, cortan transversalmente la subvariedad. Esto nos define una aplicación de la subvariedad en sí misma, la cual es un homeomorfismo porque el hamiltoniano es invertible en el tiempo; también conserva medida (el volumen de dimensión  $2n - 2$ ); y además es un difeomorfismo porque las ecuaciones de movimiento provienen del hamiltoniano. Más concretamente, si  $H$  es de clase  $C^{r+1}$  y la subvariedad  $2n - 2$  dimensional es de clase  $C^r$  entonces el difeomorfismo es de clase  $C^r$ . Hay que notar que no todos los puntos en la subvariedad tardan el mismo tiempo en volver a cortar a la subvariedad (ver figura 2)

A esta subvariedad le llamamos sección de Poincaré. Para definir la sección no es necesario que exista una órbita periódica, solamente es necesario que el flujo sea transversal a la sección; si la variedad isoenergética es compacta, el flujo es recurrente.

En el caso de sistemas con 2 grados de libertad, la sección de Poincaré tiene dimensión 2 y puede ser definida como un plano, una esfera, un cilindro, un toro, etc.

Para los sistemas de grado y medio de libertad, la sección de Poincaré se define en forma diferente. Supongamos que el hamiltoniano depende periódicamente del tiempo (con periodo  $T_0$ ). Entonces tomemos el espacio fase 2-dimensional y prolongemos las órbitas del espacio fase por un tiempo igual a  $T_0$ . Esto define una aplicación que es un difeomorfismo (si la perturbación en el tiempo es diferenciable) y conserva el área ya que el hamiltoniano es igual para todas las secciones de Poincaré (debido a la periodicidad de la perturbación en el tiempo). La sección de Poincaré es igual al espacio fase, el cual puede ser un plano, un toro, un cilindro, etc.

### I.3 El modelo del Péndulo.

Para el estudio de la estabilidad de los sistemas mecánicos que conservan la energía, debemos examinar las variaciones de estos sistemas al agregar una pequeña perturbación. Los aspectos que nos interesa comparar entre el sistema original y el perturbado son las órbitas periódicas que poseen, la estabilidad de estas últimas y los conjuntos invariantes correspondientes a cada sistema.

Una propiedad importante en los sistemas hamiltonianos es la variación de la frecuencia de cada órbita al cambiar la energía. Gracias a esta propiedad dichos sistemas son estables bajo pequeñas perturbaciones. Por estabilidad entendemos que los espacios de fase de ambos sistemas son "similares" en un entorno adecuado; si una órbita está acotada en un cierto entorno, la órbita perturbada debe estar contenida en el mismo entorno si el sistema es estable.

Como ejemplo, analicemos un oscilador armónico; para toda energía la frecuencia de oscilación es la misma. Cualquier pequeña perturbación periódica con frecuencia igual a la del oscilador ocasiona que todas las órbitas dejen de ser acotadas en la energía, ya que la perturbación cede energía al oscilador en cada periodo. Por lo tanto, el sistema no es estable (a este fenómeno se le denomina phase-locking [15]). En cambio, tomemos como sistema a un péndulo; al agregar

cualquier pequeña perturbación solo modifica ligeramente la órbita original: la órbita perturbada está contenida en un entorno al que también pertenece la órbita original. La razón de que el péndulo sea estable a pequeñas perturbaciones se debe a la propiedad de variar la frecuencia de oscilación al cambiar la energía.

En general, para los sistemas hamiltonianos, podemos decir que éstos pueden ser estables ante pequeñas perturbaciones si al escribirlos en término de las variables de ángulo ( $\theta_i$ ) y acción ( $I_i$ ), las frecuencias asociadas al sistema dependen de las variables de acción: si  $\theta = \partial H / \partial I$  entonces  $\partial^2 H / \partial I^2 \neq 0$  (condición sobre el determinante Hessiano). Así podemos generalizar que la frecuencias de oscilación deben depender de las coordenadas de acción como requisito necesario para que el sistema sea estable. En particular, los sistemas hamiltonianos de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad deben poseer la propiedad antes citada para que sean estables.

Tomemos el caso de una órbita periódica de un sistema integrable. Supongamos además que dicha órbita es estable (esto significa que toda órbita próxima a ésta, en un tiempo  $t_0$ , seguirá estando próxima para todo tiempo, con  $t \rightarrow \pm\infty$ ). La sección de Poincaré de la órbita estable y su entorno está formada por círculos concéntricos invariantes (la imagen de un círculo es él mismo) y cuyo centro es un punto fijo. Decimos entonces, que la sección de Poincaré está foliada por círculos invariantes.

Cuando al sistema integrable le agregamos una pequeña perturbación, la foliación de círculos invariantes en la sección de Poincaré desaparece. Birkhoff mostró, para el caso no integrable y de manera genérica la estructura de la sección de Poincaré, que es próxima a la mostrada en la figura 1.4 [6].

Observamos en la figura, que el punto fijo está rodeado por órbitas periódicas, elípticas e hiperbólicas dispuestas en forma alternada. Las separatrices de los puntos hiperbólicos conectan con las separatrices de los puntos vecinos (en primera aproximación [16]). El aspecto que ofrece esta estructura es similar a diversas cadenas de péndulos que rodean al punto fijo.

Por otro lado, Moser demostró que algunos círculos invariantes subsisten al perturbar el sistema (sección II.6, [26]). Dichos círculos separan el plano en dos regiones invariantes. Un punto situado en el interior de un círculo invariante cumple que su imagen permanece dentro de dicho círculo. Por lo tanto, los puntos que pertenecen a una corona limitada por dos círculos invariantes forman un conjunto invariante.

La estructura mostrada en la figura 1.3 es aún más compleja: cada órbita periódica elíptica está rodeada por círculos invariantes y órbitas periódicas que forman cadenas de péndulos, emulando en una escala más pequeña la estructura del entorno del punto fijo. La estructura anterior es recursiva ya que el entorno de cada punto periódico elíptico es similar al original. Así nos encontramos con una estructura tipo péndulo que se repite a escala más pequeña infinitas veces. Esta estructura es genérica [16] en los sistemas de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad. Por eso podemos afirmar que el modelo del péndulo es genérico y no así una estructura tipo oscilador armónico (por genérico entendemos que, dentro de la clase de sistemas considerados, los que tienen la estructura descrita forman un conjunto que es intersección numerable de abiertos densos).

Chirikov muestra que en los sistemas de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad y donde el espacio fase es acotado, esta estructura de péndulo se repite en el entorno de un cilindro [36]. Haciendo cambios de variables adecuados y utilizando el hecho que las órbitas periódicas al perturbarlas se convierten en cuasiperiódicas, cuya frecuencia oscila alrededor de la frecuencia original, construye ecuaciones de movimiento que en primera aproximación son ecuaciones tipo péndulo. Al igual que Birkhoff, muestra que esta estructura se repite recursivamente.

Otro aspecto importante que destaca Chirikov es la estrecha relación entre resonancias y la ecuación del péndulo. En este caso define una resonancia como aquella perturbación del sistema

hamiltoniano integrable (i.e. el hamiltoniano solo depende de las variables de acción) que da como consecuencia que una de las variables de acción oscile en el tiempo alrededor de su valor original. Esta oscilación permite que la frecuencia asociada a su variable conjugada también cambie en el tiempo. Por tanto, en el espacio de frecuencia y acción obtenemos un péndulo como descripción de la resonancia.

El aspecto de recurrencia en la estructura descrita por Birkhoff y especialmente la de Chirikov, es estudiada por Escande el cual utiliza las técnicas de renormalización [8]. Por medio de un operador de renormalización, el cual reescala un entorno del espacio fásico conjuntamente con un reescalado en el tiempo, transforma el hamiltoniano original en otro que describe una pequeña estructura, que es similar a la original; este operador se puede aplicar una y otra vez para explorar las infinitas estructuras autosimilares. Para lograr ésto, utiliza la ecuación de péndulo perturbado (similar a la sección 1.1) donde los parámetros que se refieren a la frecuencia del péndulo, amplitud de la perturbación y periodo de la perturbación son reescalados. De esta forma obtiene una nueva ecuación de péndulo perturbado con nuevos parámetros.

Resulta entonces plausible utilizar, para los fenómenos de oscilaciones no lineales, el modelo del péndulo. Principalmente, la estructuras autosimilares de las resonancias en los sistemas de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad, son representados correctamente en primera aproximación por la ecuación del péndulo (ver capítulo III).

## I.4 Aplicaciones en el plano y el cilindro.

Hemos definido en las secciones anteriores como podemos obtener una sección de Poincaré dos dimensional y una aplicación (definida sobre esta sección) a partir de un hamiltoniano de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad. La sección de Poincaré puede ser un plano, anillo, cilindro, toro, etc. La forma de esta sección depende del tipo de coordenadas definidas en el hamiltoniano original. Si tomamos variables de ángulo y acción, podemos escoger una sección que sea igual a un cilindro o a un anillo, ya que las variables conjugadas están definidas sobre  $S^1$ .

Consideremos un sistema hamiltoniano no degenerado y seleccionemos como sección de Poincaré un anillo. Así obtenemos una aplicación sobre este anillo de tipo twist. La característica de estas aplicaciones es, que la frecuencia de giro alrededor del anillo es una función que crece (resp. decrece) monótonamente con respecto a la coordenada radial. Esto significa que una línea radial sobre el anillo se aplica en una línea convexa (ver figura 4). La propiedad de twist está estrechamente ligada a la variación de la frecuencia al cambio de la energía (u otra integral primera). El número promedio de vueltas que realiza un punto en el anillo, al iterar la aplicación, lo llamamos número de rotación y su valor varía con el radio.

Las aplicaciones tipo twist son comunes en los sistemas hamiltonianos no degenerados (vía una sección de Poincaré) de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad. En ellas es factible estudiar las condiciones de estabilidad del flujo, o el comportamiento caótico del mismo.

Para determinar la estabilidad en las aplicaciones twist, debemos estudiar los valores de los parámetros asociados a la aplicación para los cuales existen conjuntos invariantes. Estos conjuntos deben ser conexos y tales que rodeen el anillo, de tal forma que separen el anillo en dos partes anulares, o si se prefiere, que el índice del centro del anillo respecto a dicha curva valga 1. Estos conjuntos son curvas cerradas que rodean el anillo, tal que la imagen de dichas curvas al iterarla son ellas mismas. A estas curvas, que no son homótopas a un punto, las llamamos curvas invariantes rotacionales (ó mas brevemente, IRC).

Para determinar la estabilidad de una región, debemos encontrar valores de los parámetros del

sistema para los cuales existen IRC. Por otro lado, podemos encontrar valores de dichos parámetros para los cuales no existen ninguna IRC, lo cual implica que existen órbitas que conectan regiones distantes en la dirección radial. Esto determina el comienzo de un proceso de difusión e inicio de la inestabilidad global en el sistema. Por ello, el determinar los valores de los parámetros para los cuales desaparece la última IRC es esencial, puesto que determina el inicio del caos global en el sistema.

Al no existir IRC, las órbitas del sistema hamiltoniano pueden desplazarse por toda la variedad isoenergética. Como consecuencia tenemos que órbitas que están próximas para  $t = t_0$  se alejan rápidamente. Esto significa que dicho sistema es sensible a las condiciones iniciales. Este aspecto también se refleja en la aplicación en el anillo: La mayoría de puntos periódicos estables desaparecen, dando origen a puntos periódicos inestable (fenómeno de bifurcación); así órbitas vecinas que antes se mantenían próximas, ahora se alejan de manera exponencial.

## I.5 Familias de Aplicaciones.

Para poder estudiar de manera sistemática la estabilidad (ó el inicio del caos) en un sistema de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad, definimos una sección de Poincaré. Esta región la podemos elegir como un anillo, siempre y cuando consideremos que el espacio fase, restringido a una energía constante, es compacto. Esto implica la existencia de variables angulares.

Sobre el anillo definimos un tipo de aplicación que depende de la intensidad de la perturbación del sistema integrable. Definimos como parámetro la intensidad de perturbación. Así, obtenemos una familia de aplicaciones uniparamétricas.

Para valores pequeños de la energía ( y del parámetro) esperamos obtener IRC en la aplicación: el teorema KAM asegura la existencia de toros 2-dimensionales en el espacio fase [15], cuya intersección con la sección de Poincaré dan origen a las IRC. Las regiones estables, contenidas entre dos IRC, representan una estructura similar a la descrita en la sección 3 : las resonancias en dicha región presentan una forma geométrica similar a la ecuación de péndulo, la cual se repite a escala más pequeña para las resonancias de orden mayor.

Existe un valor del parámetro de perturbación para el cual la aplicación correspondiente no tiene curvas invariantes. El determinar este valor del parámetro permite definir un valor crítico que indica el inicio del caos en la familia uniparamétrica de aplicaciones, y en el sistema físico.

Basándonos en los ejemplos expuestos en la sección 1, y por la discusión hecha en la sección 3 sobre el modelo del péndulo, resulta adecuado seleccionar a la aplicación standard como una buena familia uniparamétrica. Esta familia es una buena base para estudiar el entorno de cualquier resonancia en todas las aplicaciones tipo twist. Así podemos afirmar que toda aplicación tipo twist se puede aproximar como la unión de varias (o infinitas) aplicaciones standard con diferentes valores del parámetro.

A partir de ahora, nuestro interés se centra en esta familia de aplicaciones. En el capítulo II mostramos propiedades generales de esta familia. En el capítulo III examinamos su estructura resonante para valores pequeños del parámetro, donde introducimos el concepto de forma normal. En el cuarto capítulo hacemos una revisión de diferentes métodos para detectar el rompimiento de la última IRC, donde discutimos el método de la obstrucción desarrollado por nosotros. El capítulo V está dedicado a estudiar la dinámica y la estructura de los residuos de las IRC después del rompimiento.

## Capítulo II

# Aplicaciones conservativas en el plano tipo Twist.

### II.1 Introducción.

Las aplicaciones en el plano son una herramienta común para el estudio de sistemas físicos de pocos grados de libertad. En el capítulo I hemos mostrado que los sistemas hamiltonianos de  $1\frac{1}{2}$  y 2 grados de libertad pueden ser descritos, dinámicamente, por aplicaciones conservativas en el plano. Los ejemplos anteriores muestran que algunas propiedades dinámicas de los flujos hamiltonianos se reflejan en propiedades geométricas de las aplicaciones: tal es el caso de la propiedad de twist respecto a la estabilidad del sistema.

En este capítulo presentamos diversas propiedades relacionadas con las aplicaciones conservativas de tipo twist. Algunos resultados relativos a este tema fueron presentados por Poincaré, Birkhoff y Morse a finales del siglo pasado y principios de éste. Sin embargo, en los últimos 30 años, se ha dado un gran impulso al estudio de estas aplicaciones, principalmente bajo el punto de vista de estabilidad (KAM) y de existencia y unicidad de órbitas periódicas y recurrentes (utilizando técnicas variacionales). Otro esquema que actualmente interesa a muchos investigadores es el fenómeno de autosimilaridad y técnicas de renormalización, las cuales también pueden ser aplicadas al estudio de éste problema, lo cual es analizado en el capítulo IV.

Dos puntos de vista son la gafa de este capítulo:

- Las propiedades de las órbitas monótonas, que permiten asegurar la existencia de órbitas periódicas y cuasiperiódicas. De aquí obtenemos también propiedades geométricas que son útiles para determinar estabilidad e inicio de difusión. Finalmente es posible dar una buena clasificación de las órbitas monótonas.
- Existencia de curvas invariantes debida a la existencia de transformaciones que conjugan la aplicación original con una rotación tipo twist (KAM).

Los resultados de este capítulo son utilizados en los tres siguientes. Mientras que en el tercero construimos formas normales para estudiar las resonancias siguiendo técnicas de transformaciones,

en el cuarto y quinto utilizamos resultados de monotonía para determinar destrucción de curvas invariantes y localización de conjuntos cantorianos.

La organización de este capítulo es la siguiente:

- Definición y propiedades generales de las aplicaciones twist.
- Propiedades geométricas y descomposición vía simetrías.
- Introducción de métodos variacionales.
- Existencia de órbitas monótonas.
- Teoremas de Birkhoff sobre existencia de puntos periódicos y forma de los IRC.
- Órbitas minimales periódicas y cuasiperiódicas.
- Clasificación de órbitas minimales con número de rotación racional y irracional.
- Estabilidad, teorema de KAM.
- Teorema del twist de Moser.
- Estimaciones tipo KAM para aplicaciones en el plano.

## II.2 Aplicaciones tipo twist.

Consideremos el cilindro definido como  $A = S^1 \times \mathbb{R} = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$  cuyas coordenadas son  $x = (\theta, r)$  con  $\theta \in [0, 1)$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Definimos la aplicación  $f : A \rightarrow A$  como un difeomorfismo que conserva la orientación y el área  $|Df| = 1$ .

Sea la aplicación  $f$ , definida como:

$$\theta' = \Pi_1 f(\theta, r), \quad r' = \Pi_2 f(\theta, r),$$

donde  $\Pi_i$  es la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada. Decimos que la aplicación  $f$  es de tipo twist si se cumple la desigualdad:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial r} \geq k_1 > 0 \quad \forall x \in A \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Sea la aplicación  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un difeomorfismo que preserve el área y la orientación:

$$x' = \Pi_1 F(x, y), \quad y' = \Pi_2 F(x, y),$$

decimos que  $F$  es el lift de  $f$  si ambas aplicaciones conjugan con la aplicación de cobertura  $P(x, y) = (x \pmod{1}, y)$ , así:

$$f \circ P = P \circ F.$$

Si  $F$  es el lift de la aplicación  $f$  tipo twist, entonces  $F$  también es twist. De la misma manera, si  $f$  es twist,  $f^{-1}$  también lo es. Sin embargo  $f^2 = f \circ f$  no necesariamente lo es [20].

Tomemos un difeomorfismo twist  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $F \in C^r$  con  $r > 2$ , que conserva el área. Entonces existe una función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que si  $(x', y') = F(x, y)$ , se tiene:

$$y = -h_1(x, x') = \frac{\partial h(x, x')}{\partial x}, \quad y' = -h_2(x, x') = \frac{\partial h(x, x')}{\partial x'}.$$

y

$$\frac{\partial^2 h(x, x')}{\partial x \partial x'} = h_{12}(x, x') \leq C_n < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad C_n \in \mathbb{R}.$$

A esta función le llamamos función generatriz [20].

Introducimos el concepto de órbita:

- *Órbita de F* :  $O(x, y) = \{F^i(x, y) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . Utilizando la función generatriz, la órbita queda definida como:

$$O(x) = \{x_i \mid (x_{i+1}, h_2(x_i, x_{i+1})) = F(x_i, h_1(x_i, x_{i+1}))\}, i \in \mathbb{Z}.$$

- *Órbita extendida de F* :  $\widehat{O}(x, y) = \{R_i^j \circ F^i(x, y) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $R_i(x, y) = (x - l, y)$ .
- *Segmento de órbita de F* :  $\widehat{O}(x_{mn}) = \{x_i \mid x_i \in O(x) \ m \leq i \leq n\}$ .

El número de rotación es una función que va del espacio de las órbitas a los reales, la cual está definida, si existe, como:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x_{n+i} - x_i}{n} \quad x_{i+n}, x_i \in O(x) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Esta función  $\rho(x)$ , si existe el límite, es independiente de  $i$ . Cuando tomamos  $\rho(x) \pmod{1}$ , éste es el número de rotación de  $f(x)$  independientemente del lift que se haya escogido.

Una órbita de  $F$  la llamamos periódica si para la  $\widehat{O}(x, y)$ , existe  $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ , tales que la aplicación  $R_p^q \circ F^q : \widehat{O}(x, y) \rightarrow \widehat{O}(x, y)$  es la identidad. Esta órbita periódica tiene un número de rotación  $\rho(x) = \frac{p}{q}$  si  $x \in \widehat{O}(x, y)$ .

Sea  $x_0$  un punto periódico hiperbólico de  $f$  de periodo  $n$ . Definimos la variedad invariante estable de  $x$  como:

$$W^s x_0 = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) \rightarrow x_0\},$$

y la variedad inestable se define como:

$$W^u x_0 = \{x \in S^1 \times \mathbb{R} \mid \lim_{i \rightarrow -\infty} f^{-in}(x) \rightarrow x_0\}.$$

Llamamos punto homoclínico,  $x_{\text{hom}}$ , a los puntos que pertenecen a la variedad estable e inestable de una órbita periódica hiperbólica:

$$x_{\text{hom}} \in W^s(f^i(x_0)) \cap W^u x_0, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Sea  $x_1$  un punto periódico hiperbólico de periodo  $m$  (con  $m \neq n$ ) que no pertenece a la órbita de  $x_0$ . Llamamos punto heteroclínico,  $x_{\text{het}}$ , a los puntos que pertenecen a la variedad estable de la órbita hiperbólica dada por  $x_0$  y la variedad inestable de la órbita hiperbólica dada por  $x_1$ :

$$x_{\text{het}} \in W^s(f^i(x_0)) \cap W^u(f^j(x_1)), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

### II.3. Propiedades de simetría.

En esta sección estudiamos algunas propiedades de las aplicaciones  $f: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  que conservan el área, la orientación y que tienen líneas de simetría.

Supongamos que  $f$  se puede expresar como la composición de dos involuciones  $f = I_1 \circ I_0$ , tal que  $I_0^2 = \text{Id}$  y  $I_1^2 = \text{Id}$ . Observamos que  $f_{-1} = I_0 \circ f \circ I_0$ . Si  $F$  se puede factorizar de la manera anterior entonces definimos las aplicaciones  $I_j$  con  $j \in \mathbb{Z}$  como  $I_j^2 = f^j \circ I_0$ , las cuales también son involuciones,  $I_j^2 = \text{Id}$ . Tomemos el conjunto de todas las transformaciones  $f^k$ ,  $I_j$  con  $k, j \in \mathbb{Z}$ . Estas forman un grupo discreto infinito cuyos elementos cumplen:

$$f_j \circ I_k = I_{j+k}, \quad I_j \circ I_k = f^{j-k}, \quad I_j \circ f_k = I_{j-k}.$$

Definimos *órbita periódica de  $f$* : Sea  $F$  el lift de  $f$  y  $O(x)$  una órbita periódica de  $F$  con  $\rho(x) = \frac{p}{q}$ ; por lo tanto  $P(O(x))$  es una órbita periódica de  $f$  y hereda el número de rotación  $\rho(x)$ ,  $O(x) = P(O(x))$  con  $\rho(x) = \frac{p}{q}$ . Definimos la línea de simetría  $\Gamma_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , como el conjunto de puntos fijos de la involución  $I_j$ .

Se demuestra [21] que la intersección de las líneas de simetría  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_j$ ,  $i \neq j$  es un punto periódico de  $f$ . Su periodo  $q$  divide  $|j - i|$ . Las líneas de simetría  $\Gamma_i$  se aplican en otras líneas:

$$f^q \Gamma_k = \Gamma_{2q+k} \quad \text{y} \quad I_q \Gamma_k = \Gamma_{2q-k}.$$

Las órbitas periódicas de  $f$  pertenecen a alguna línea de simetría [4,22].

Las aplicaciones  $f$  conservativas y tipo twist, que son una perturbación de un twist de la forma:

$$f: \quad \theta' = \theta + r', \quad r' = r + g(\theta),$$

con  $g \in C^r$ ,  $r > 2$  periódica y  $g(-\theta) = -g(\theta)$ , se pueden descomponer en dos involuciones:

$$I_1: \quad \theta' = -\theta + r, \quad r' = r,$$

$$I_0: \quad \theta' = -\theta, \quad r' = r + g(\theta).$$

En particular, si  $g(\theta) = -\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta)$  obtenemos la aplicación standard.

### II.4 Acción y órbitas.

Con la función generatriz  $h$  es posible definir un principio variacional para las aplicaciones  $F$  tipo twist, donde las órbitas están relacionadas con extremales de cierto funcional. Por medio de dicho funcional podemos mostrar la existencia de órbitas con cualquier número de rotación.

Definimos un *estado  $x$*  como una sucesión bi-infinita  $\{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . El *segmento  $x_{mn}$*  está definido como  $\{x_i \in \mathbb{R} \mid m \leq i \leq n; m, n, i \in \mathbb{Z}\}$ . Entonces, dada la función generatriz  $h$  de  $F$ , definimos la funcional de *acción*  $W_{mn}$  sobre el segmento  $x_{mn}$  como:

$$W_{mn}(x_{mn}) = \sum_{i=m}^{n-1} h(x_i, x_{i+1}).$$

Decimos que el segmento  $x_{mn}$  tiene una *acción estacionaria* si  $W_{mn}$  tiene un valor estacionario en  $x_{mn}$  para toda variación del segmento  $x_{mn}$ , manteniendo fijos  $x_m$  y  $x_n$ :

$$\frac{\partial W_{mn}}{\partial x_i}(x_{mn}) = 0 \quad \forall m < i < n.$$

Así, un estado  $x$  es estacionario si todas sus subsecuencias son segmentos estacionarios.

Sea  $O(x)$  una órbita de  $F$ . Entonces el segmento  $x_{mn} = \{x_i \mid x_i \in O(x), m \leq i \leq n\}$  tiene acción estacionaria. De igual manera, si el segmento  $x_{mn}$  tiene acción estacionaria, entonces pertenece a una órbita: segmento  $x_{mn} \in O(x)$  [20].

Definimos un conjunto de *estados periódicos*,  $X_{p,q}$ , como el conjunto de estados que cumplen las siguientes condiciones de periodicidad:  $X_{p,q} = \{x \mid x_{n+q} = x_n + p, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ . Para  $x \in X_{p,q}$ ,  $x \rightarrow x_{0,q-1}$  identifica  $X_{p,q}$  con  $\mathbb{R}^q$ . Además, el funcional  $W_{p/q}(x_0, \dots, x_{q-1}) = \sum_{n=0}^{q-1} h(x_n, x_{n+1})$  es una función de  $X_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}$ . A  $x_0$  lo podemos elegir entre  $0 \leq x_0 \leq 1$  (dado que  $F$  conmuta con  $P$ ). Por lo tanto, estados estacionarios de  $W_{p/q}$  corresponden a órbitas periódicas de  $F$  con número de rotación  $\rho(x) = \frac{p}{q}$ .

Ahora introducimos definiciones de estados no periódicos. Un estado estacionario  $u$  es recurrente si para todo  $\epsilon > 0$  y  $k \in \mathbb{Z}$  existe  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$  tal que:

$$|(u_{k+n} + m) - u_k| < \epsilon \quad \text{y} \quad |(u_{k+n+1} + m) - u_{k+1}| < \epsilon.$$

Decimos que una órbita es cuasiperiódica si pertenece a un estado estacionario recurrente y tiene como número de rotación un valor irracional. Como ejemplo de órbita cuasiperiódica podemos citar a toda órbita que pertenece a un IRC con número de rotación irracional.

## II.5 Conjuntos monótonos.

Dentro del conjunto de estados estacionarios de  $F$  destacamos los conjuntos monótonos. Las órbitas en el cilindro, que provienen (de la proyección) de un conjunto monótono, se aplican bajo  $f$  de forma similar a una rotación: las sucesivas imágenes de un punto de la órbita aparecen en el mismo orden que una rotación, cuyo ángulo de desplazamiento es igual al número de rotación de la órbita.

Sea un homeomorfismo  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de tipo twist, el cual es el lift de  $f: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ . Decimos que el conjunto  $M$ , invariante ante  $F$  y  $R_1$ , es *monótono* si la proyección  $\Pi_1|_M$  es inyectiva y  $\forall x, x' \in M \subset \mathbb{R}^2$  tenemos  $\Pi_1(x) < \Pi_1(x') \Rightarrow \Pi_1(F(x)) < \Pi_1(F(x'))$  [23,24]. Por lo tanto, si  $M$  es monótono,  $\forall x, x', n \in \mathbb{Z}$ ,  $\Pi_1(x) < \Pi_1(x') \Rightarrow \Pi_1(F^n(x)) < \Pi_1(F^n(x'))$ .

Un estado estacionario  $u$  es *monótono* si  $\forall r, s, p, q \in \mathbb{Z}$  se cumplen las siguientes condiciones:

$$u_s + r = u_q + p \Rightarrow u_{s+1} + r = u_{q+1} + p,$$

$$u_s + r < u_q + p \Rightarrow u_{s+1} + r < u_{q+1} + p.$$

La clausura de un conjunto monótono  $M$  del difeomorfismo  $F$  (tipo twist) es un conjunto monótono [20]. Para todo conjunto monótono  $f$  y considerando la aplicación  $h: \Pi_1(M) \rightarrow \Pi_1(M)$  (con  $h \equiv \Pi_1 \circ F \circ \Pi_1^{-1}$ ), existe un homeomorfismo  $g: S^1 \rightarrow S^1$  tal que si  $x \in \Pi_1(M)$  entonces  $g^n(x)$  coincide con  $h^n(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  [24].

Sea  $u(n)$  una sucesión de conjuntos monótonos, con  $n \in M$ . El límite de esta sucesión de conjuntos monótonos  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) = u$  es también un conjunto monótono.

A continuación mostramos que todo conjunto monótono tiene asociado un número de rotación. Este número coincide con el número de rotación del homeomorfismo  $g: S^1 \rightarrow S^1$  definido en el párrafo anterior.

El estado  $u$  es un conjunto monótono  $\Leftrightarrow \exists$  un número  $\rho$  tal que:

- Para  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  y para todo  $m, n$  y  $k \in \mathbb{Z}$  se cumple:

$$n\rho < m \Rightarrow u_{n+k} - u_k < m,$$

$$n\rho > m \Rightarrow u_{n+k} - u_k > m.$$

- Para  $\rho \in \mathbb{Q}$  y para todo  $k \in \mathbb{Z}$  se cumple una de estas tres proposiciones:

$$\circ \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n\rho = m, u_{n+k} - u_k = m,$$

$$\circ \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n\rho = m, u_{n+k} - u_k > m,$$

$$\circ \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n\rho = m, u_{n+k} - u_k < m.$$

A  $\rho = \rho(u)$  le llamamos número de rotación, y coincide con la anterior definición [20]. Los estados monótonos están acotados por dos rectas: si  $x_i \in M$  y  $M$  es conjunto monótono, entonces  $\exists \rho$  tal que  $[n\rho] < x_n - x_0 < [n\rho] + 1$  (donde  $[ \ ]$  es la parte entera de un real) para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . La figura 1 muestra como  $M$  está acotado por dos rectas.

Sabemos que el límite de estados monótonos es monótono. Entonces, sobre el límite de sus números de rotación tenemos estos resultados: Si  $u(n)$  es una sucesión de estados estacionarios monótonos, tal que  $u(n) \rightarrow u$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u(n))$  existe y es igual a  $\rho(u)$ . Por otro lado, si  $u(n)$  es una sucesión de estados monótonos tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u(n)) \rightarrow \rho'$ , entonces existe un estado monótono  $u$  tal que  $\rho(u) = \rho'$  [20].

Con estos resultados podemos asegurar la existencia de estados monótonos con número de rotación irracional si existe una secuencia de estados monótonos cuyo número de rotación converge a este número irracional (o racional). Por tal motivo es importante estudiar la estructura de las órbitas periódicas en las aplicaciones en el cilindro. Esto lo hacemos en la siguiente sección.

## II.6 Algunos teoremas de Birkhoff.

En la sección anterior indicamos que es necesario conocer la estructura de las órbitas periódicas monótonas para poder demostrar la existencia de las órbitas recurrentes. Sobre la existencia y distribución de órbitas periódicas, Poincaré conjeturó que las aplicaciones tipo twist tienen todas las órbitas periódicas cuyo número de rotación racional pertenece a un intervalo de rotación. Birkhoff demostró este teorema en 1913 y se conoce como el teorema geométrico [25]:

**Teorema 1 (Geométrico)** Sea  $f$  una aplicación que conserva el área en el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  y es tipo twist. Entonces para todo  $p/q \in \mathbb{Q}$  ( $p$  y  $q$  coprimos)  $f$  tiene, genéricamente, al menos dos órbitas periódicas del tipo  $(p, q)$ , una hiperbólica y otra elíptica.

Este teorema también es válido si  $f$  está definido sobre un anillo que determina un intervalo de rotación [26]. Por lo tanto, en una aplicación  $F$  tipo twist conservativa, si tenemos dos órbitas periódicas monótonas con número de rotación  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , existen órbitas periódicas elípticas e hiperbólicas con número de rotación  $\forall \rho \in [\rho_1, \rho_2] \cap \mathbb{Q}$  (genéricamente). Sin embargo, esto no asegura que dichas órbitas sean monótonas. Sobre la existencia de órbitas monótonas y periódicas tratamos en las siguientes secciones.

Otro teorema importante de Birkhoff está dedicado a la forma de las IRC. Las IRC son conjuntos monótonos. Birkhoff prueba que las curvas invariantes son gráficas de funciones tipo Lipschitz [6,27]:

**Teorema 2** Sea  $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  un difeomorfismo  $C^1$ . Supongamos que  $f$  preserva el área, orientación, aplica los bordes del cilindro en sí mismos y es un twist. Sea  $U \subset S^1 \times \mathbb{R}$  un abierto tal que  $f(U) = U$ ,  $U$  es homeomórfico a  $S^1 \times \mathbb{R}$  y  $S^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset S^1 \times (-\infty, b)$  para algún  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces la frontera de  $U$  en  $S^1 \times \mathbb{R}$  es la gráfica de una función tipo Lipschitz  $\mu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , ésto es  $\bar{U} - U = \{(x, \mu(x)) \mid x \in S^1\}$ .

Por lo tanto, toda IRC es la gráfica de una función tipo Lipschitz. Este resultado también se aplica a cualquier conjunto monótono  $M$ : si  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1) \in M$  entonces  $\exists L \in \mathbb{R}$  finito tal que  $|y_0 - y_1| \leq L|x_0 - x_1|$  [20].

Hemos visto resultados que demuestran la existencia de órbitas periódicas de cualquier número de rotación dentro de cierto intervalo. Sin embargo, falta mostrar que dichas órbitas también son monótonas, para así poder encontrar sucesiones de órbitas periódicas monótonas tales que su número de rotación converja a cualquier irracional. Así aseguramos la existencia de éstas órbitas cuasiperiódicas.

## II.7 Órbitas minimales.

Con los teoremas de Birkhoff expuestos en la sección anterior, mostramos que existen al menos dos órbitas  $u$  y  $v$  tal que  $u, v \in X_{p/q}$ . Para asegurar que existen sucesiones de órbitas periódicas que convergen a órbitas recurrentes, debemos mostrar que dicha sucesión está compuesta por órbitas minimales y monótonas, puesto que las órbitas recurrentes e invariantes lo son.

Dedicamos esta sección a mostrar la conexión que existe entre estados minimales y monotonía, para cualquier número de rotación. Partiendo de un segmento con extremos fijos (que por construcción pertenece a un  $X_p$ ) mostramos que existen segmentos minimales.

Para todo  $b, c \in \mathbb{R}$  y  $m, n \in \mathbb{Z}$  con  $m < n - 1$ , existe un segmento minimal  $x = \{x_i \mid m \leq i \leq n\}$  tal que los extremos son fijos.  $x_m = b$  y  $x_n = c$ . Podemos asegurar la existencia de  $x$  minimal ya que al fijar los extremos del segmento, el conjunto de segmentos  $x$ , donde  $W_{p/q} \leq a$  con  $a \in \mathbb{R}$ , es compacto (la acción está acotada inferiormente por  $h(x, x') \geq \text{Cte.} + |x - x'|$  [20]). Debemos notar que tales segmentos minimales no son necesariamente únicos.

Supongamos que tenemos dos segmentos  $u_{mn}$  y  $v_{mn}$  que minimizan a  $W_{mn}$  (con  $m < n - 1$ ) y que no coinciden en ambos extremos  $u_m \neq v_m$  o  $u_n \neq v_n$  (o ambos); entonces  $u_{mn}$  y  $v_{mn}$  sólo se pueden cruzar una vez. Por lo tanto concluimos que dos estados minimales  $u$  y  $v$  solamente se pueden cruzar una vez [20]. Esta propiedad es utilizada para asegurar la monotonía de los estados.

## II.8 Órbitas minimales con $\rho$ racional.

Consideremos el caso racional, donde  $\rho \in \mathbb{Q}$ . A continuación mostramos que existen, para todo  $\rho \in \mathbb{Q}$ , estados minimales y monótonos. Estas órbitas son de tres tipos: periódicas, asíntóticas heteroclinicas y asíntóticas homoclinicas.

Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  el lift de una aplicación conservativa en el cilindro. Entonces, para todo  $\rho \in \mathbb{Q}$  (con  $p$  y  $q$  no necesariamente coprimos), existe un estado  $u \in X_{p/q}$  el cual es un mínimo global de  $W_{p/q}$  en  $X_{p/q}$ .

Los estados minimales son monótonos por la siguiente proposición: Si  $u \in X_{p/q}$  es un estado que minimiza a  $W_{p/q}$ , entonces  $u$  es un estado monótono. Esta proposición es cierta porque los estados minimales sólo se pueden cruzar una vez [20]. Podemos concluir entonces, usando los resultados anteriores, que si  $u$  minimiza a  $W_{p/q}$  entonces es un estado minimal, es decir, cada

segmento de  $u$  minimiza a  $W_{p/q}$ . Debemos notar que estos estados minimales corresponden a las órbitas hiperbólicas a que hace mención el teorema geométrico de Poincaré ( las órbitas elípticas corresponden a los estados *minimax*: extremales que son puntos silla de  $W_{p/q}$  ).

Para dar una clasificación de las órbitas minimales con  $\rho \in \mathbb{Q}$ , definimos los siguientes conjuntos:

- $\text{Min}_{p/q} = \{ \text{estados minimales con } \rho \in \frac{p}{q} \}$ ,
- $M_{p/q} = \{ \text{estados minimales periódicos (ó recurrentes) con } \rho \in \frac{p}{q} \}$ ,
- $M_{p/q}^+ = \{ \text{estados minimales avanzados con } \rho \in \frac{p}{q} \}$ ,
- $M_{p/q}^- = \{ \text{estados minimales retardados con } \rho \in \frac{p}{q} \}$ ,

donde avanzado quiere decir que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $u \in \text{Min}_{p/q}$ , entonces  $u_{n+q} - p - u_n > 0$  (retardado se define en forma similar, pero con  $u_{n+q} - p - u_n < 0$ ).

Estados adyacentes son aquellos estados  $v^-$ ,  $v^+ \in M_{p/q}$  tales que  $v_n^- < v_n^+$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  y no existe ningún otro estado  $v \in M_{p/q}$  tal que  $v_n^- < v_n < v_n^+$ .

Entonces, se puede mostrar que todo estado minimal  $u$  con  $\rho = \frac{p}{q}$  es: periódico o asintótico (a otros estados minimales periódicos diferentes si  $n \rightarrow \pm\infty$ ). De esta manera podemos hacer la siguiente clasificación sobre los estados minimales [24]:

- i. Estados  $1_{p/q}$ , estados minimales  $u \in M_{p/q}$  periódicos.
- ii. Estados  $2_{p/q}$ , estados minimales  $u \in M_{p/q}^+$  y  $u \in M_{p/q}^-$ , asintóticos a un estado minimal periódico con  $\rho = \frac{p}{q}$ . Corresponden a órbitas que pertenecen a la variedad estable y inestable de un punto periódico en el cilindro (puntos homoclínicos).
- iii. Estados  $3_{p/q}$ , estados minimales  $u \in M_{p/q}^+$  y  $u \in M_{p/q}^-$ . Son doblemente asintóticos a los estados minimales periódicos con  $\rho' = \frac{p'}{q}$  y  $\rho = \frac{p}{q}$ . Si  $\rho = \rho'$ , entonces son órbitas homoclínicas de la órbita periódica, en caso contrario, corresponden a órbitas que pertenecen a la variedad invariante estable e inestable de dos puntos periódicos diferentes en el cilindro (puntos heteroclínicos).

Así tenemos el siguiente resultado [24]: Sea  $f: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  una aplicación que conserva la medida y es de tipo twist. Para todo  $\rho = p/q$  en el intervalo de rotación, existe al menos dos estados monótonos  $u \in M_{p/q}$  y  $v \in M_{p/q}^*$  (siendo  $M_{p/q}^*$  los estados *minimax* de  $W_{p/q}$ ) tal que son invariantes ante  $f$  y forman un conjunto cerrado. Además, siempre hay una órbita del tipo  $2_{p/q}$  o una órbita del tipo  $3_{p/q}$  o todo un círculo consistente de órbitas del tipo  $1_{p/q}$ . Este resultado lo podemos considerar como una extensión del teorema geométrico, porque asegura la existencia de órbitas periódicas monótonas.

Cabe destacar también que si tenemos dos estados  $v^-$ ,  $v^+ \in M_{p/q}$  y además existe un estado  $u \in \text{Min}_{p/q}$  tal que  $v_n^- < u_n < v_n^+$  con  $n \in \mathbb{Z}$  y  $u$  asintótico a  $v^+$  si  $n \rightarrow \infty$  y a  $v^-$  si  $n \rightarrow -\infty$  (o viceversa), entonces los estados  $v^-$  y  $v^+$  son adyacentes [13].

## II.9 Órbitas minimales con $\rho$ irracional.

Ahora nos ocuparemos de las órbitas cuyo número de rotación es irracional, mostramos su existencia y clasificación. Para lograr este objetivo debemos tomar en cuenta que todo racional tiene

asociado al menos dos órbitas monótonas recurrentes, dando la posibilidad de encontrar sucesiones de estados minimales monótonos con  $\rho$  racional que converja a un  $\rho$  irracional.

Sobre estas sucesiones tenemos el siguiente resultado: Para todo  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existe un estado minimal y monótono con número de rotación  $\rho$ . Para demostrar lo anterior, utilizamos una sucesión de estados minimales monótonos  $u(n)$  con  $\rho_n = p_n/q_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n \rightarrow \rho$ . Como esta sucesión converge, entonces existe un monótono y minimal con número de rotación  $\rho$ .

Mather obtiene el siguiente resultado sobre estos estados  $u$ : Para todo  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existe un conjunto monótono  $M_\rho$  de estados recurrentes y monótonos con número de rotación  $\rho$  cuya imagen en el cilindro,  $M_\rho^+$  es, o un IRC o un conjunto de Cantor. Más aún, toda órbita en  $M_\rho^+$  es densa en  $M_\rho^+$ . El conjunto  $M_\rho^+$  es minimal (conjunto invariante que no contiene subconjuntos invariantes). Entonces existe una aplicación débilmente ordenada  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$  y que:

$$F(\phi(t), \eta(t)) = (\phi(t + \rho), \eta(t + \rho)) \quad ,$$

donde  $\eta(t) = -h_1(\phi(t), \phi(t + \rho))$ . La aplicación  $\phi(t)$  no tiene por que ser continua.

Si  $M_\rho^+$  es un conjunto minimal, recurrente y monótono del tipo cantoriano, entonces tiene discontinuidades, las cuales forman agujeros (o gaps). Para analizar estos agujeros, tomemos un estado  $u(\beta)_n = u_{n+q} - p$  monótono con  $\beta = q\rho - p$ . Usando este estado  $f^+(\theta) = \inf_{\beta > 0} u(\beta)_0$  y  $f^-(\theta) = \sup_{\beta > 0} u(\beta)_0$ . Definimos:

$$M_\rho^\pm = \{f^\pm(n\rho + \alpha) \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}\} \quad ,$$

que es un conjunto de estados monótonos. Es posible mostrar que  $M_\rho^+ = M_\rho^{+} \cup M_\rho^{-}$  es un conjunto cerrado, monótono e invariante de estados minimales; cada órbita en  $M_\rho^+$  es recurrente y densa en  $M_\rho^+$ . El conjunto  $M_\rho^+$  puede ser un IRC o un cantoriano.

Las funciones  $f^\pm(\theta): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son estrictamente crecientes;  $f^+$  (resp.  $f^-$ ) es continua por la izquierda (resp. derecha) y  $f^-(\theta) < f^+(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $f^\pm$  tiene un número numerable de discontinuidades, donde  $f^- < f^+$ . Estas discontinuidades definen los agujeros del cantoriano.

Existen también estados monótonos minimales  $u$  que no pertenecen a  $M_\rho^+$ . Esto es debido a que dichos estados no son recurrentes. De hecho,  $u$  está dentro de los agujeros del cantoriano:

$$f^-(n\rho + \alpha) < u_{n+q-p} < f^+(n\rho + \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ y } \alpha \in \mathbb{R} \quad .$$

Estos estados son asintóticos a los extremos de los agujeros.

Los estados monótonos minimales con  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  los clasificamos de la siguiente forma [24]:

- i.  $1_\rho$ ; son órbitas cuya proyección en  $S^1$  es densa (la proyección  $\phi$  es biyectiva). La clausura de esta órbita es un IRC con órbitas densas.
- ii.  $2_\rho$ ; son órbitas recurrentes cuya clausura  $M_\rho$  es un conjunto de Cantor que se proyecta en  $S^1$  como un conjunto de Denjoy (conjunto minimal, donde la proyección no es exhaustiva [7]). Toda órbita en  $M_\rho$  es densa.
- iii.  $3_\rho$ ; son órbitas errantes donde su  $\alpha$ -límite y su  $\omega$ -límite son la clausura de órbitas del tipo  $2_\rho$  (extremos de los agujeros de los cantorianos). La proyección de estas órbitas en  $S^1$  pertenecen a los intervalos complementarios de los conjuntos de Denjoy.

Sobre la existencia de este tipo de órbitas, damos el siguiente resultado de Katok [24]: Para todo  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  contenido en el intervalo de rotación, existe, o un IRC con número de rotación  $\rho$  (el cual está lleno densamente por órbitas del tipo  $1_\rho$  o por órbitas  $2_\rho$  y  $3_\rho$ ), o un conjunto minimal de

Cantor el cual está lleno de órbitas  $2_p$ , más, al menos, una órbita del tipo  $3_p$ , donde la unión de ambos conjuntos es monótono.

Finalmente, podemos mostrar que dos estados minimales distintos no pueden cruzarse más de una sola vez, y tampoco pueden ser asintóticos en  $\pm\infty$  (si se han cruzado alguna vez). Este se conoce como el lema fundamental de Aubry [29], el cual está fuertemente conectado con el modelo físico de Frenkel-Kontorova (sección 1.1.4).

## II.10 Teorema de KAM .

En las secciones anteriores hemos hablado de las aplicaciones que conservan medida y que dependen de un parámetro, el cual representa la intensidad de perturbación del sistema integrable (en este caso un twist). El estudio de sistemas hamiltonianos integrables sometidos a pequeñas perturbaciones ha motivado el buscar órbitas del sistema perturbado de tipo cuasiperiódico. Estas órbitas, si existen, son aquellas que subsisten del sistema original. El espacio fase del sistema integrable está densamente lleno de órbitas cuasiperiódicas formando una estructura ordenada de toros invariantes. La cuestión es saber que parte de esta estructura permanece al perturbar. Una respuesta a dicha pregunta la obtenemos del teorema KAM, el cual se aplica a flujos hamiltonianos y también a aplicaciones conservativas. Como consecuencia de este teorema para aplicaciones del tipo twist se tiene la existencia de IRC para pequeñas perturbaciones (valores pequeños del parámetro).

Los sistemas hamiltonianos integrables tienen la propiedad de que todas sus órbitas acotadas (en el espacio fase  $M \subset \mathbb{R}^{2N}$ ) son periódicas, cuasiperiódicas o asintóticas (separatrices). Están contenidas en variedades de dimensión igual a  $N$  topológicamente equivalentes a un toro  $T^N$  bajo cierta hipótesis de compacidad y excluyendo separatrices [15]. Para este caso el hamiltoniano  $H_0$  sólo depende dinámicamente de  $N$  coordenadas (las  $2N$  variables no son independientes, ya que dependen funcionalmente por la restricción de moverse en  $T^N$ ). Entonces existe una transformación canónica que permite escribir al hamiltoniano en términos de  $N$  variables (variables de acción),  $H_0(I)$ . De esta forma las ecuaciones de movimiento se expresan como:

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(I) = \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad i = 1, \dots, N,$$

donde  $I \in \mathbb{R}^N$ ,  $\theta \in T^N$ . Cada toro invariante queda representado por el vector de frecuencias  $\omega(I) \in \mathbb{R}^N$  y cada órbita es densa en el toro (salvo cuando son resonantes:  $\omega(I) \cdot k = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ ). Cada entorno de este toro está densamente lleno de toros invariantes cuyas órbitas son densas en los toros. Supongamos que la frecuencia asociada a los toros no es una función constante, es decir,  $|\partial\omega(I)/\partial I| \neq 0$ . Como  $\dot{I} = 0$ , tenemos  $N$  integrales primeras y como las frecuencias no son constantes al variar  $I$ , tiene como resultado que el espacio fase está foliado por toros  $N$ -dimensionales. Por lo tanto, en los sistemas integrables existen variedades  $2N - 1$  dimensionales (de energía constante), que separan el espacio fase en dos partes invariantes, las cuales están estratificadas por toros  $N$ -dimensionales.

Cuando el sistema integrable es perturbado:  $H = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta)$  con  $\epsilon$  pequeño y  $H_1(I, \theta)$  periódico en cada una de las variables  $\theta_i$ , entonces la acción deja de ser constante ( $\dot{I}_i = -\partial H_1 / \partial \theta_i$ ) y las frecuencias se ven perturbadas:  $\dot{\theta}_i = \omega_i(I) + \partial H_1 / \partial I_i$ . Como consecuencia, la estructura de foliación cambia. La desaparición de estos toros conlleva la desaparición de las órbitas cuasiperiódicas.

Kolmogorov [15] provó que para casi todas las condiciones iniciales, el movimiento se mantiene cuasiperiódico. Supongamos que el sistema hamiltoniano integrable es analítico en un dominio

complejo del espacio fase  $M$  (donde las variables  $I$  y  $\theta$  las extendemos a una banda en los complejos que contiene a los reales), y además que es no degenerado ( $|\partial\omega/\partial I| \neq 0$ ). Sea  $\omega^*$  un vector de frecuencias donde  $\omega^* \cdot \lambda \geq C/|\lambda|^\eta$  con  $\lambda \in \mathbb{Z}^N$ ,  $C > 0$  y  $\eta > 0$ , tal que  $\omega^* = \partial H_0/\partial I^*$ ; entonces para todo  $k > 0$  existen  $\epsilon > 0$  y una aplicación  $I = I(\Theta)$  y  $\theta = \theta(\Theta)$  que va del toro abstracto  $T^N = \{\Theta \pmod{2\pi}\}$  a  $M$ , de tal forma que las frecuencias en este toro abstracto son las mismas del no perturbado  $\dot{\Theta} = \omega^*$ , y el toro perturbado está suficientemente cercano al toro original  $|I(\Theta) - I^*| < k$  y  $|\theta(\Theta) - \theta| < k$  siempre y cuando  $|H_1(I, \theta)| < \epsilon$  sobre el toro. La medida de los toros  $T(\omega^*)$  que subsisten a la perturbación es positiva, la medida del complemento tiende a cero si  $|\epsilon H_1| \rightarrow 0$ .

Se demuestra la existencia de los toros invariantes buscando transformaciones superconvergentes. Expresamos a  $H_1$  en serie de Fourier:

$$\epsilon H_1(I, \theta) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^N} V_\lambda e^{i\lambda \cdot \theta}.$$

Tomemos una transformación tal que el nuevo hamiltoniano no tenga términos de orden  $\epsilon$ , para lo cual se escoge la función generatriz de la transformación de la forma:

$$F(I^{(r)}, \theta) = \theta \cdot I^{(r)} + \epsilon \Phi_\lambda(I^{(r)}) e^{i\lambda \cdot \theta},$$

con  $\lambda \in \mathbb{Z}^N$ . Estas transformaciones convergen de igual forma que el método de Newton [36] siempre y cuando se tenga un control de los pequeños denominadores:

$$\Phi_\lambda = \frac{iV_\lambda}{\lambda \cdot \omega(I^{(r)})}.$$

Como  $I^{(r)}$  cambia por cada transformación, es imposible saber si  $\lambda \cdot \omega(I^{(r)})$  es pequeño para todas las transformaciones, y así saber si converge.

Para evitar los pequeños denominadores, Kolmogorov propone fijar  $\omega = \omega^*$  e ir variando la condición inicial  $I$  en cada transformación. Esto solamente es posible si el hamiltoniano en no degenerado. En caso contrario, cuando se tiene una condición de resonancia  $\omega \cdot \lambda = 0$ , el sistema podría no salir de la resonancia, provocando cambios significativos en  $I$  (este fenómeno de alta inestabilidad se conoce como phase locking). El segundo paso es acotar los denominadores pequeños determinando las zonas "peligrosas" de resonancias para asegurar la convergencia. Finalmente se debe cuantificar el volumen de las regiones no peligrosas, la cual depende de la amplitud de oscilación de las resonancias.

El movimiento fuera de los toros invariantes no está acotado por dichos toros para  $N > 2$ , puesto que  $T^N$  no tiene codimensión 1 en  $\mathbb{R}^{2N-1}$  ( $N > 2$ ). Estas órbitas pueden difundirse por las variedades isoenergéticas. Pueden existir órbitas que pasen arbitrariamente cerca de dos toros distintos. Esta difusión de órbitas se conoce como difusión de Arnold [15,30] pero generalmente es muy lenta cuando la perturbación es pequeña.

## II.11 Teorema del Twist.

En el campo de los difeomorfismos del cilindro que conservan área, es posible definir un teorema tipo KAM, el cual nos asegura la existencia de IRC. Moser [26] mostró que una aplicación twist sometida a una pequeña perturbación conserva parte de la estructura original, es decir, existen IRC que provienen de la foliación inicial del cilindro por círculos cuyo número de rotación depende

de la coordenada radial. Los IRC con número de rotación racional desaparecen para casi toda perturbación del twist. En cambio, aquellos con número de rotación irracional que es mal aproximable por racionales, subsisten como curvas cerradas invariantes ante pequeñas perturbaciones.

Para asegurar la existencia de IRC, se debe pedir que la perturbación cumpla ciertas propiedades de regularidad. Por ejemplo, si la perturbación no es diferenciable en algún punto del cilindro, no pueden existir IRC [55]. Takens dio un contraejemplo en el caso  $C^1$  [54] y posteriormente Herman para el caso  $C^{3-\eta}$ ,  $\eta > 0$  [7].

Moser en 1962 presentó una primera demostración del teorema KAM referido a aplicaciones del cilindro tipo twist [31].

Tomemos un anillo sobre el cilindro definido por las cotas sobre la dirección radial  $0 < a < r < b$  y definamos una aplicación twist en ese anillo:

$$\bar{\theta} = \theta + \alpha(r), \quad \bar{r} = r, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial r} > 0.$$

El anillo está foliado por círculos invariantes con número de rotación  $\alpha(r)$ . Ahora tomemos una perturbación sobre el twist  $f(\theta, r)$  y  $g(\theta, r)$ ; donde la aplicación queda escrita como:

$$\bar{\theta} = \theta + \alpha(r) + f(\theta, r), \quad \bar{r} = r + g(\theta, r),$$

con  $f$  y  $g$  periódicas en  $\theta$  y suponemos que todo círculo cercano a  $r = \text{Cte.}$  y que coincide con la gráfica de una función  $r = \zeta(\theta) = \zeta(\theta + 2\pi)$  (con  $\zeta'(\theta)$  pequeño) cumple que su imagen interseca a la curva original. Esto cumple obviamente si se toman  $f$  y  $g$  tales que la aplicación sea conservativa.

Introducimos la norma sobre la  $s$ -ésima derivada; si  $h(\theta, r)$  es una función con derivadas continuas hasta orden  $s$ , definimos:

$$|h|_s = \sup \left| \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^{\sigma_1} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^{\sigma_2} h(\theta, r) \right|,$$

con  $\sigma_1 + \sigma_2 \leq s$  y para todo  $(\theta, r)$  definido sobre el dominio.

**Teorema 3 (del Twist)** Para  $\epsilon > 0$  y un entero  $s \geq 1$ , la aplicación twist, perturbada por  $f$  y  $g$ , tiene una curva invariante cerrada  $\theta = \theta^0 + p(\theta^0)$ ,  $r = r_0 + q(\theta^0)$  donde  $p$  y  $q$  son funciones periódicas y que satisfacen  $|p|_s + |q|_s < \epsilon$ , donde hacemos las siguientes suposiciones:

- i. Toda curva cerrada cercana a un círculo se autointersecta.
- ii.  $b - a \geq 1$  y  $c_0^{-1} \leq \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} \leq c_0$  con  $c_0 > 1$ .
- iii. Se construye un real positivo  $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, s, c_0)$  y un entero  $l = l(s)$  que determinan el número de derivadas continuas de  $f$  y  $g$  y también su norma:

$$|f|_0 + |g|_0 < \delta_0 \quad |f|_l + |g|_l + |\alpha|_l < c_0.$$

La aplicación inducida sobre la curva invariante es  $\bar{\theta}^0 = \theta^0 + \alpha(r_0)$ .

De ese teorema debemos hacer los siguientes comentarios: Existe un gran número de círculos invariantes, identificados por el número de rotación  $\alpha(r_0) = \rho$ , para cualquier  $\rho$  definida en  $\alpha(a) + \epsilon < \rho < \alpha(b) - \epsilon$  y mal aproximable por racionales:  $|n\rho - m| \geq \epsilon \eta^{-3/2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos  $\alpha(r) = r$  y  $s = 1$ . La idea de la demostración se basa en tratar de aproximar la aplicación perturbada a la de un twist por medio de transformaciones de coordenadas. Estas

transformaciones están definidas sobre un anillo más estrecho que el original y en donde la aplicación transformada  $\mathcal{F}_1$  se aproxima más al twist  $\mathcal{F}_\infty$  sobre este nuevo anillo de lo que lo estaba la aplicación original  $\mathcal{F}_0$ : Si  $|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0$  entonces  $|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_\infty| < \delta_0^k = \delta_1$  donde  $\mathcal{F}_1 = U_1^{-1} \mathcal{F}_0 U_1$  con  $U_1$  la transformación y  $k > 1$ ,  $\delta < 1$ . También el número de rotación de la nueva aplicación  $\mathcal{F}_1$  está definido en un intervalo más estrecho que contiene a  $\rho$  (número de rotación de la curva invariante para la que tratamos de demostrar la existencia).

El procedimiento anterior se puede repetir, de tal manera que si  $\mathcal{F}_n$  es la  $n$ -ésima aplicación transformada, tenemos que:  $\mathcal{F}_n = U_n^{-1} \mathcal{F}_{n-1} U_n$ ,  $|\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_\infty| < \delta_n$  con  $\delta_n = \delta_{n-1}^k$ ;  $|U_n - \text{Id}| < 1/N_n$  con  $N_n \in \mathbb{R}^+$  y  $N_n = N_{n-1}^k$ ; el anillo así definido es más estrecho;  $\theta^{(n)}$  es la nueva coordenada y  $|r^{(n)} - \rho| < 1/M_n$ , con  $M_n = M_{n-1}^k$ .

En el límite, el anillo transformado se colapsa en la curva invariante cuyo número de rotación es  $\rho$ . Es decir, si  $\mathcal{F}_n = B_n^{-1} \mathcal{F}_{n-1} B_n$ , con  $B_n = U_1 U_2 \dots U_n$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^{(n)} - \rho| \rightarrow 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n - \text{Id}| \rightarrow 0$ . Así, la transformación  $B_n$ , escrita como:

$$\theta = \theta^{(n)} + p_n(\theta^{(n)}, r^{(n)}) \quad r = r^{(n)} + q_n(\theta^{(n)}, r^{(n)}),$$

converge a una transformación  $\theta = \theta^{(\infty)} + p_\infty(\theta^{(\infty)})$ ,  $r = r^{(\infty)} + q_\infty(\theta^{(\infty)})$ , que es la que define la gráfica de la curva invariante con  $r^{(\infty)} = \rho$ . Las funciones  $p_n$ ,  $q_n$  están acotadas por la relación  $|p_n| + |q_n| < \sum_{\nu=1}^n 1/N_\nu$ , así que para un  $N_0$  suficientemente grande  $|p_\infty| + |q_\infty| < \epsilon$ . Para probar la existencia de las transformaciones anteriores y su propiedades, Moser introduce un segundo teorema:

**Teorema 4** Sea la aplicación sobre el anillo:

$$\bar{\theta} = \theta + r + f(\theta, r), \quad r = r + g(\theta, r), \quad a \leq r \leq b, \quad (\text{II.1})$$

que autointersecta curvas cerradas cercanas a  $r = \text{cte.}$ , y que tiene las siguientes propiedades:

i.  $|f| + |g| < \delta_-$  en  $|r - \rho| < \frac{1}{M_-}$ .

ii.  $|N_- f|_t + |M_- g|_t \leq N_-^{\sigma_1+1} + M_-^{\sigma_2}$ , con  $\sigma_1 + \sigma_2 = l$  donde  $M_-$ ,  $N_-$  y  $\delta_-$  se refieren a los parámetros de la  $(n-1)$ -ésima transformación, y  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{N}$ .

Entonces para una  $\delta_0$  suficientemente pequeña existe una transformación de coordenadas:

$$\theta = \theta^{(1)} + p_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}), \quad r = r^{(1)} + q_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}),$$

en  $|r^{(1)} - \rho| < \frac{1}{M_-} - \frac{1}{M} > \frac{1}{M}$  y que satisface  $|p_1|_1 + |q_1|_1 < \frac{1}{N}$  en el anillo definido por  $|r^{(1)} - \rho| < \frac{1}{M}$ . Así la aplicación (I) se transforma en

$$\bar{\theta}^{(1)} = \theta^{(1)} + r^{(1)} + f_{(1)}(\theta^{(1)}, r^{(1)}), \quad r^{(1)} = r^{(1)} + g_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}), \quad (\text{II.2})$$

donde cumple con las propiedades siguientes:

i.  $|f_1| + |g_1| < \delta < \delta_-^k$  en  $|r - \rho| < \frac{1}{M}$ .

ii.  $|N f_1|_t + |M g_1|_t \leq N^{\sigma_1+1} + M^{\sigma_2}$ ,

En la demostración del teorema anterior, el problema de encontrar la transformación se reduce a resolver un sistema de ecuaciones en diferencias, las cuales implícitamente tienen definida la dinámica de la curva invariante. Este sistema se puede expresar como un sistema de ecuaciones homológicas:

$$p_1(\theta^{(1)} + \rho, r^{(1)}) - p_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}) = q_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}) + f(\theta^{(1)}, r^{(1)}),$$

$$q_1(\theta^{(1)} + \rho, r^{(1)}) - q_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}) = g(\theta^{(1)}, r^{(1)}) .$$

La segunda ecuación tiene solución siempre y cuando la función  $g$  tenga promedio nulo  $[g] = 0$ . Entonces, si expresamos en serie de Fourier a  $g$  y a  $q_1$ , obtenemos una solución de la forma:

$$q_1(\theta^{(1)}, r^{(1)}) = \sum_{k \neq 0} \frac{h_k}{e^{ik\rho} - 1} e^{ik\theta^{(1)}} .$$

donde  $h_k$  son los coeficientes de la serie de Fourier de  $g$  y depende de  $r^{(1)}$ . De esta relación podemos concluir que, genéricamente,  $\rho$  debe ser irracional mal aproximable. De otra forma la serie en  $q_1$  no converge por la aparición de denominadores pequeños.

Para asegurar la existencia de la solución en el sistema de ecuaciones homológicas y que sean suficientemente diferenciables,  $f$  y  $g$  deben ser funciones suaves. Entonces aproximamos  $f$  y  $g$  con funciones suaves (vía un operador). Así es posible tener una solución adecuada para  $q_1$  y  $p_1$ .

De esta manera, se prueba que existen las transformaciones  $q_1$  y  $p_1$  suficientemente diferenciables, permitiendo así obtener la nueva aplicación (2). Las funciones  $f_1, g_1$  resultan ser acotadas en la norma  $\|\cdot\|_1$  y se muestra que las cotas nuevas provienen de un rescalamiento de las anteriores.

Con este teorema aseguramos la convergencia de las aplicaciones  $\mathcal{F}_n$  hacia el twist  $\mathcal{F}_\infty$  ya que el anillo se estrecha en el límite a la curva invariante. Así se demuestra la existencia de curvas invariantes.

El teorema del twist se diferencia del teorema de KAM propuesto por Kolmogorov en el sentido que no es necesario suponer que la aplicación es analítica en  $r$  y  $\theta$ ; de hecho solo es necesario que  $f$  y  $g$  sean de clase  $C^l$ . Al pedir que la curva invariante sea la gráfica de una función de clase  $C^l$  ( $s = 1$ ), conduce a estimar el valor de  $l$  en  $l = 333$ .

Demostraciones posteriores del teorema del twist han permitido dar una mejor estimación del valor de  $l$ . Rüssmann mejoró la estimación de  $l$  a  $l = 5$ . Herman obtuvo una cota mejor que la anterior al proponer que  $l > 3 + \epsilon$  (si  $l = m + \epsilon$  con  $m$  entero y  $0 \leq \epsilon < 1$ , entonces, una función  $f \in C^{m+\epsilon}$  tiene  $m$ -ésima derivada Hölder continua con el exponente de Hölder es  $\epsilon$ ). Por otro lado, en el caso  $l = 1$ , Takens probó la no existencia de curvas invariantes, y posteriormente Herman hizo lo mismo para el caso  $C^{3-\epsilon}$  [7].

## II.12 Las estimaciones del teorema de KAM.

A partir del teorema de KAM y más explícitamente del teorema del twist, es posible estimar las condiciones para las cuales un twist perturbado tiene IRC. Herman mostró que la perturbación debe cumplir algunas propiedades de regularidad, en particular debe ser de clase  $C^{3+\epsilon}$ . Por otro lado, Rüssmann obtuvo algunos resultados sobre la magnitud de la perturbación para la cual existen curvas invariantes (fijando las condiciones de regularidad de la función) [32]. A continuación mostramos los resultados de Rüssmann respecto a las estimaciones de la magnitud de perturbación.

Consideremos la aplicación sobre una banda  $S$  en  $\mathbb{R}^2$  definida como:

$$F: \bar{\theta} = \theta + r, \quad r = r + g(\theta, r),$$

y  $g$  periódica,  $g(\theta, r) = g(\theta, r + 1) = g(\theta + 1, r)$ . Además, esta función  $g$  es tal que la aplicación  $F$  tiene la propiedad de autointersección, lo cual se cumple si  $\int_0^1 g(\theta) d\theta = 0$ .

El resultado principal de Rüssmann lo expresamos en el siguiente teorema [32]:

**Teorema 5** Sea  $F$  una aplicación de clase  $C^p$  con  $p > 2r + 1$  y definida de la misma forma que arriba. Tomemos un número  $\rho$  que satisfice la siguiente propiedad:  $|k\rho - l| \geq \gamma/k^r$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 1$  y  $0 < \gamma < \frac{1}{2} \min(1, 12^3 \Delta s)$  con  $\Delta s$  el ancho del anillo. Para todo número  $\rho$  existe una curva continua  $K: \mathbb{R} \rightarrow S$  que es inyectiva y periódica tal que la aplicación  $F$  conmuta con una rotación cuyo ángulo es  $\rho: F \cdot K = K \cdot R_\rho$ , con  $R_\rho: (\theta, r) \rightarrow (\theta + \rho, r)$ , donde:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^2} |g(z)| \leq \frac{q}{300C_0} \left(\frac{1}{72}\right)^r \left(\frac{\gamma}{\Gamma(r+1)}\right)^2$$

$$\sup_{\substack{|k_1|+|k_2|=p \\ z \in \mathbb{R}^2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k_2} g(z) \right| \leq \frac{q(1-q)}{3600(3C_1+C_2)} \left(\frac{1}{288}\right)^r \left(\frac{\gamma}{\Gamma(r+1)}\right)^2,$$

siendo  $\Gamma$  la función gamma y  $q$ ,  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  números que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$0 < q < \min\left(\frac{p-2r-1}{p+1} \log 2, 10^{-2} 4^{-r}\right)$$

$$0 < C_0 \leq 11, \quad 0 < C_1 \leq 17 \text{ y } 0 < C_2 \leq 125.$$

Podemos observar de este resultado, que la existencia de la curva invariante  $K$ , con número de rotación  $\rho$ , está en función de la magnitud y regularidad de la función  $g$  y de las propiedades diofánticas del número  $\rho$ .

Para mostrar este resultado, se utiliza una sucesión de funciones holomorfas  $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  que están próximas a  $g$  en los reales:

$$\sup_{z \in \mathbb{R}^2} |g - g_0| \leq C_1 \sup_{\substack{|k_1|+|k_2|=p \\ z \in \mathbb{R}^2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k_2} g(z) \right| \cdot \delta^p,$$

$$\sup_{z \in E} |g_0| \leq C_0 \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |g| \text{ y}$$

$$\sup_{z \in E} |g_0 - g_0'| \leq C_2 \sup_{\substack{|k_1|+|k_2|=p \\ z \in \mathbb{R}^2}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k_2} g(z) \right| \cdot \delta^p,$$

y  $E = \{(\theta, r) \mid \theta, r \in \mathbb{C} \text{ y } \text{Im}(\theta) < \delta, \text{Im}(r) < \delta\}$ .

Con esta familia de funciones se construye una sucesión de aplicaciones de  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ :

$$A_k: z = \rho + x + \epsilon_0, \quad y = y + \epsilon_0^{-1} g(x, \omega + \epsilon y),$$

con  $x, y \in \mathbb{C}$  y  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma)$ . Cada elemento de la familia está identificado por una  $\delta_k = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .  $A_{\delta_k}$  está definido sobre un entorno de  $\mathbb{C}^2$ :

$$D_k = \{(r_k, s_k) \mid r_k, s_k \in \mathbb{C}, \text{Im}(r_k) < 2^{-k}, \text{Im}(s_k) \leq 2^{-k} \delta_0\}.$$

La idea consiste en encontrar aplicaciones holomorfas  $H_k: D_k \rightarrow D'_k$  cercanas a un twist y que conmuten con  $A_k$  via el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & Z_k |_{D_k} & \\ & \longrightarrow & \\ H_k & \downarrow & E_k \\ & D_k & \downarrow \\ & D'_k & \mathbb{C}^2 \\ & & \downarrow \\ & & Z_k \\ & & A_k \end{array}$$

donde :

$$\Omega_k : \begin{cases} z = \rho + x + \epsilon_k y \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

y

$$\sup_{z \in D_k} |H_k(z) - \Omega_k| \leq 2^{-k(\tau+1)} (3^{-1} q \epsilon_0 \delta_0) .$$

Además se encuentra una función  $W_k : D_{k+1} \rightarrow D_k$  holomorfa que transforma  $W_k : H_{k+1} \rightarrow H_k$ ,  $W_k : Z_{k+1} \rightarrow Z_k$  y  $W_k : A_{k+1} \rightarrow A_k$ .

Entonces si  $k \rightarrow \infty$ , la familia de transformaciones  $W_k$  forman una composición de funciones holomorfas que permiten conmutar  $A_k$  con una rotación con ángulo  $\rho$ , y además  $A_{k+1} (\equiv A_k)$  está suficientemente cercana a la aplicación  $F$  en  $\mathbb{R}^2$  sobre una banda estrecha. En dicha banda  $F$  conmuta con una rotación de ángulo  $\rho$ , es decir  $F \circ Z_\infty(\zeta) = Z_\infty(\rho + \zeta)$  con  $\zeta$  el parámetro sobre la curva invariante.

Para determinar la existencia del diagrama de conmutación, Rüssmann utiliza un método inductivo. Suponiendo que para un valor de  $k$  existe dicho diagrama, entonces se construye el de  $k+1$ . Para lograr este propósito,  $Z_{k+1}$  debe ser una transformación que conjugue  $A_{k+1}$  con  $H_{k+1}$ . Recordando que esta última aplicación está cercana a una rotación, entonces se obtiene las condiciones para construir  $Z_{k+1}$ . Estas condiciones son un sistema de dos ecuaciones homológicas

$$u(\rho + x, y) - u(x, y) = \epsilon v(x, y) + f(x, \theta y)$$

$$v(\rho + x, y) - v(x, y) = g(x, \theta y) - \int_0^1 g(x, \theta y) dx ,$$

con  $\theta$  y  $H_{k+1} - \Omega_{k+1} = (f, g)$ .

Para que la segunda ecuación tenga solución única, se debe cumplir que  $\rho$  tenga la siguiente propiedad:  $|k\rho - l| \geq \gamma k^{-\tau}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , y  $0 < \gamma < 1/2$ ,  $\tau > 1$ .

Esta condición sobre el número de rotación  $\rho$  evita la aparición de denominadores pequeños en la serie que es solución de la ecuación homológica.

## Capítulo III

# Formas normales en la aplicación standard.

### III.1 Introducción.

En los capítulos I y II hemos estudiado la estructura del entorno de un punto fijo elíptico. Esta estructura sufre una metamorfosis al cambiar de un sistema integrable a uno perturbado. La estructura de foliación de círculos concéntricos se transforma en algo en apariencia complicado. Como vimos en la sección I.3 esta estructura se repite infinitas veces a escalas más pequeñas. Es lo que llamabamos cadenas de péndulos que circundan los infinitos puntos elípticos.

Si esta estructura recurrente es bastante complicada, aún podemos agregar mayor complejidad al fenómeno: las separatrices de los puntos hiperbólicos no tienen porqué coincidir. Sin embargo deben tener puntos de intersección (por conservación de área). Genéricamente las separatrices se cortan transversalmente (los vectores tangentes a las separatrices forman un ángulo diferente a cero en el punto de intersección). Además, si existe un punto de intersección transversal, han de existir infinitos de estos puntos, los cuales llamamos homoclinicos ( si pertenecen a la variedad estable e inestable del mismo punto o, en general, de la misma órbita) o heteroclinicos ( si las variedades pertenecen a distintos puntos) [15,26,16] . Esto da como consecuencia que las separatrices (o variedades invariantes) sean curvas en el plano de longitud infinita que se van plegando sobre ellas mismas, formando una trama complicada [33] . Todos los puntos periódicos hiperbólicos monótonos que pertenecen a una región de inestabilidad de Birkhoff (región conexas que no contiene ninguna IRC [7] ) satisfacen que la variedad estable de uno de estos puntos tiene intersección transversal ( genéricamente [16] ) con todas las variedades inestables de los demás puntos [7] ; lo simétrico sucede con la inestable.

Es sorprendente la metamorfosis del sistema integrable al ser perturbado, porque para casi cualquier amplitud de perturbación, diferente de cero, se obtiene la estructura antes mencionada. Dicha estructura es, a primera vista, completamente diferente a la foliación de círculos invariantes. Este cambio , "brusco" en apariencia, lo podemos entender como un cambio continuo y "suave". La forma de hacerlo es comparar a diferentes escalas las diferencias entre la aplicación perturbada y la integrable. El método utilizado se conoce como *formas normales* , el cual fué introducido

por Birkhoff [6]. La idea del método de las formas normales es buscar transformaciones que modifiquen la aplicación perturbada en otra que sea similar de la aplicación integrable (hasta cierto orden). Utilizando el parámetro de perturbación  $\epsilon$  y eligiendo un entorno adecuado del dominio, transformamos la aplicación en otra que difiera de la integrable en orden  $\epsilon$  (usando una norma adecuada y dentro del dominio escogido); con la siguiente transformación, difiere a orden  $\epsilon^2$ ; así sucesivamente hasta que la aplicación transformada sea igual a la integrable en el dominio seleccionado. No siempre existen estas transformaciones. Cuando éstas no pueden hallarse, decimos que existe una resonancia asociada a la  $n$ -ésima transformación que intentamos realizar. En general dichas transformaciones no existen pero sí es útil obtener la forma normal hasta cierto orden.

Los métodos de formas normales los abordamos en este capítulo:

- Primero, revisamos la teoría de formas normales alrededor de un punto elíptico. Dicha teoría la llamamos *local* puesto que se aplica solo en el entorno de un punto fijo.
- En la segunda parte, desarrollamos una teoría de formas normales *no locales* para entender la estructura de un entorno del cilindro. Este entorno es difeomorfo a un anillo alrededor del cilindro. Decimos que es una teoría *no local* porque la variable angular está definida en todo  $S^1$  a través de todas las transformaciones. Con esta formulación podemos entender la estructura de las resonancias en la aplicación standard, en la sección 4 y 5 desarrollamos las formas normales para esta aplicación. Como indicamos en la sección 1.3, el modelo del péndulo es apropiado para entender y modelizar los fenómenos no lineales. Tanto en el caso de la teoría local como la global, las cadenas de péndulos en el entorno de un punto elíptico (o del cilindro), modelizan las resonancias en primera de aproximación.
- En la sección 6 calculamos explícitamente las transformaciones de las formas normales para resonancias de orden bajo, comparando los resultados con cálculos numéricos.
- En la sección 7 examinamos la composición de transformaciones cuando el número de rotación de la resonancia converge a un número de rotación irracional.

### III.2 Formas normales locales.

Tomemos las aplicaciones que son difeomorfismos del plano en el plano y que conservan el área. Los puntos fijos de estas aplicaciones pueden ser elípticos o hiperbólicos (y en casos no genéricos, parabólicos). En el caso elíptico, los valores propios  $\lambda$  son complejos no reales, por lo tanto la parte lineal de la aplicación en el entorno del punto elíptico es equivalente a una rotación y el ángulo de la rotación es igual al argumento de  $\lambda$ .

Birkhoff estudió la estabilidad de los puntos elípticos cuando se incluye la parte no lineal de la aplicación [6]. Por medio de transformaciones adecuadas, cambia la aplicación original en otra que es igual a un twist trivial más un residuo. Sea la aplicación  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Introducimos las variables complejas  $z = x + iy$  y  $\bar{z} = x - iy$ . De esta manera, la aplicación queda escrita, en el entorno del punto elíptico, como la parte lineal más una parte no lineal:

$$z' = \lambda z + g(z, \bar{z}),$$

donde  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y no tiene parte lineal ni constante. Así Birkhoff introduce el siguiente teorema [26]:

**Teorema III.1** Sea  $x' = \lambda x + g(x, \bar{x})$  una aplicación que conserva el área, de clase  $C^l$  y  $l \geq 4$ . Si para algún entero  $q$  en el intervalo  $3 \leq q \leq l + 1$  tenemos que  $\lambda^k \neq 1$  para  $1 \leq k \leq q$ , entonces existe una transformación canónica real de  $(x, y)$  a  $(\xi, \eta)$  tal que la nueva transformación queda escrita como:

$$\zeta' = \lambda \xi e^{i a_q(\zeta, \bar{\zeta})} + h(\zeta, \bar{\zeta}),$$

donde  $\zeta = \xi + i\eta$  y  $a_q(\zeta, \bar{\zeta})$  es un polinomio real en  $|\zeta|^2$  de grado  $s$ :

$$a_q(\zeta, \bar{\zeta}) = a_1 |\zeta|^2 + \dots + a_s |\zeta|^{2s},$$

con  $s = [q/2] - 1$  (siendo  $[\alpha]$  la parte entera de  $\alpha$ ) y  $h(\zeta, \bar{\zeta})$  una función tal que son nulas sus  $q - 1$  derivadas para  $\zeta = \bar{\zeta} = 0$ , donde el punto elíptico está en las coordenadas  $(0, 0)$ .

Si suponemos que  $|\zeta| < \epsilon$ , entonces la aplicación que se obtiene es igual a un twist hasta orden  $\epsilon^{q-1}$ . Llamamos a la aplicación  $\zeta' = \lambda \zeta e^{i a_q(\zeta, \bar{\zeta})}$  la forma normal de orden  $q$ .

Sobre la estabilidad del punto elíptico, Moser propone el siguiente teorema [26]:

**Teorema III.2** Considerando las hipótesis del teorema anterior y si el polinomio  $a_q(\zeta, \bar{\zeta})$  no es idénticamente cero, entonces el punto elíptico es estable.

La demostración se reduce a mostrar que la forma normal es un twist perturbado por la función  $h(\zeta, \bar{\zeta})$ . Entonces utilizando el teorema del twist (sección II.11) se demuestra la existencia de curvas invariantes alrededor del anillo definido por  $\epsilon < |\zeta| < 2\epsilon < 1$ .

La estructura en el entorno del punto elíptico ha sido estudiada en detalle por Zehnder [16]. Utilizando la formas normales locales, determina la forma de la aplicación  $F^q$  con  $q \in \mathbb{N}$ . De acuerdo al teorema geométrico (sección II.6),  $F^q$  tiene  $2q$  puntos fijos, donde  $q$  son hiperbólicos y  $q$  elípticos. La aplicación  $F^q$  puede ser transformada a un twist perturbado, donde la forma de las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos son iguales a una cadena de separatrices de  $q$  péndulos (en primera aproximación). Zehnder demuestra que el conjunto de difeomorfismos que dan origen a puntos homoclinicos entre las variedades invariantes es residual (i.e. intersección numerable de conjuntos abiertos y densos).

El resultado obtenido por Zehnder, puede ser aplicado a los puntos elípticos que se obtienen de las resonancias en las formas normales. En forma genérica, podemos decir: Cada resonancia puede modelizarse como una cadena de péndulos; cada péndulo tiene intersección transversal entre las separatrices; en el interior de las separatrices, cerca de los puntos elípticos, se repite a escala menor el esquema anterior.

### III.3 Formas normales no locales.

En esta sección introducimos la noción de las formas normales no locales. La característica principal de estas formas normales es que se calculan en el entorno a una curva homotópicamente no trivial a un punto, a diferencia de las formas locales que se calculan en el entorno de un punto.

Primero analizamos un twist integrable en el cilindro, donde buscamos transformaciones tales que localmente (en un anillo alrededor del cilindro) la aplicación difiera poco de la identidad. Posteriormente aplicamos estas ideas a un twist perturbado. En este caso no es posible aproximar la aplicación a la identidad tanto como se quiera. La existencia de resonancias impide encontrar un número arbitrario de transformaciones. De esta manera obtenemos formas normales que llamamos quasiresonantes.

Consideremos el cilindro  $A = S^1 \times \mathbb{R}$  y el difeomorfismo  $f : A \rightarrow A$  conservativo y que es un twist trivial. Sabemos que el cilindro está foliado por círculos invariantes, cada uno caracterizado por un número de rotación (sección II.10). Nuestro objetivo es comparar la dinámica de la aplicación en un anillo (o banda alrededor del cilindro) respecto a una rotación.

Tomemos el anillo definido por  $A_0 = S^1 \times [\alpha_1, \alpha_2]$  donde  $A_0 \subset A$  y  $\alpha_1 < \alpha_2$  son reales. El twist  $f$  lo escribimos como:

$$\bar{\theta} = \theta + r, \quad F = r.$$

Sean  $\rho = \frac{p}{n}$  un número de rotación, con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $(p, n) = 1$ . Definimos el anillo  $A_0 = S^1 \times [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$ . Tomemos la aplicación  $n$ -ésima del twist,  $f^n$ , y hagamos la siguiente transformación  $\Phi_1 : r = \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1$ . El difeomorfismo que obtenemos es  $f_1^n$ :

$$\bar{\theta} = \theta + n\epsilon \xi_1, \quad \bar{\xi}_1 = \xi_1,$$

donde  $\xi_1 \in [-1, 1]$ . Vemos que  $f_1^n$  está definida en  $A_1 = S^1 \times [-1, 1]$ . Comparando  $f_1^n$  con la identidad  $\text{Id}$  en  $A_1$  utilizando la norma  $\| \cdot \|_{A_1}$  (donde  $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |\Pi_1(f(x))| + |\Pi_2(f(x))|$ ), tenemos la siguiente cota:  $\|f_1^n - \text{Id}\|_{A_1} \leq n\epsilon$ . Esta transformación  $\Phi_1$  no es canónica porque hemos escalado la variable radial, aunque  $f_1^n$  continua conservando el área. En el anillo  $A_1$ ,  $f_1^n$  difiere de la identidad por  $O(\epsilon)$ , por lo tanto  $f_1$  difiere de una rotación  $R_{p/n}$  por  $O(\epsilon)$ .

La siguiente transformación  $\Phi_2 : \xi_1 = \epsilon \xi_2$ , reescala la banda  $S^1 \times [-\epsilon, \epsilon] \subset A_1$  en el anillo  $A_2 = S^1 \times [-1, 1]$  donde  $\xi_2 \in [-1, 1]$ . La transformación  $f_1^n$  queda transformada como  $f_2^n$ :

$$\bar{\theta} = \theta + \epsilon^2 n \xi_2, \quad \bar{\xi}_2 = \xi_2.$$

De esta manera  $\|f_2^n - \text{Id}\|_{A_2} \leq n\epsilon^2$ , por lo tanto  $\|f_2 - R_{p/n}\|_{A_2} \sim O(\epsilon^2)$ .

Continuando con este proceso de reescalamiento, tenemos que después de  $m-1$  transformaciones, la aplicación obtenida  $f_{m-1}^n$ , definida sobre  $A_{m-1}$ , puede ser rescalada a  $f_m^n$  sobre el anillo  $A_m$ . Así  $\|f_m^n - \text{Id}\|_{A_m} \leq n\epsilon^m$  con  $m \in \mathbb{N}$ . Estas transformaciones de reescalamiento las podemos interpretar como aquellas transformaciones que conjugan la aplicación  $f_m^n$  con la identidad hasta orden  $\epsilon^{m+1}$ :

$$\|f_m^n \circ \Phi_{m+1} - \Phi_{m+1} \circ \text{Id}\|_{A_{m+1}} \sim O(\epsilon^{m+1}).$$

De forma análoga tenemos que  $f_m$  es conjugada a una rotación  $R_{p/n}$  en el anillo  $A_{m+1}$  hasta orden  $\epsilon^{m+1}$ :

$$\|f_m \circ \Phi_{m+1} - \Phi_{m+1} \circ R_{p/n}\|_{A_{m+1}} \sim O(\epsilon^{m+1}).$$

La composición de  $m$  transformaciones  $\phi_m = \Phi_m \circ \Phi_{m-1} \circ \dots \circ \Phi_1$  es un difeomorfismo que conjugua a  $f$  en una banda de ancho  $\epsilon^m$  centrada en  $r = \frac{p}{n}$  con una rotación  $R_{p/n}$  hasta orden  $O(\epsilon^m)$ . Si  $p, n \rightarrow \infty$  y  $\frac{p}{n} \rightarrow \rho \in \mathbb{R}$  entonces el ancho de la banda converge a cero. Así el círculo invariante con número de rotación  $\rho$  es conjugado con la rotación  $R_\rho$ .

El método que utilizamos es similar al método para demostrar el teorema del twist. En ambos casos, se busca conjuguar la aplicación con una rotación en bandas alrededor del cilindro cuyo ancho converge a cero.

Llamamos *forma normal* de orden  $m$  de  $f^n$ , a la aplicación  $f_m^n$ , que es conjugada a una rotación  $R_{p/n}$  hasta orden  $O(\epsilon^m)$ .

A continuación, definimos la formas normales para aplicaciones en el cilindro que son un twist perturbado. Sea  $f : A \rightarrow A$  una aplicación twist más una perturbación de amplitud  $\epsilon$ :

$$\bar{\theta} = \theta + r, \quad F = r + \epsilon g(\theta),$$

donde  $g(\theta)$  es una función analítica y periódica. Como  $g$  es analítica, podemos representar a  $f^n$  como serie de potencias de  $\epsilon$ :

$$f^n(x) = \text{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i S_i(x) \quad \text{con } x \in A \text{ y } S_i: A \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Tomemos una transformación  $\Phi_1$  en una banda que contenga a  $r = \frac{\epsilon}{n}$  y que sea de ancho  $2\epsilon$  y cuya imagen bajo  $\Phi_1$  es  $A_1 = S^1 \times [-1, 1]$ . Buscamos que la transformación  $\Phi_1: r = h_1(\theta) + \epsilon \xi_1$  sea tal que elimine los términos de orden  $\epsilon$  de la aplicación  $f_1^n = \Phi_1^{-1} \circ f^n \circ \Phi_1$ . Así  $f_1^n$  lo representamos como:

$$f_1^n(x) = \text{Id} + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i S_i'(x) \quad \text{con } x \in A_1 \text{ y } S_i': A_1 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Podemos ver que  $f_1^n$  difiere de la identidad hasta orden  $\epsilon^2$ ,  $\|f_1^n - \text{Id}\|_{A_1} \sim O(\epsilon^2)$ . Así obtenemos la transformación  $\Phi_1$  que conjuga a  $f^n$  con la identidad hasta orden  $\epsilon^2$ :

$$\|f^n \circ \Phi_1^{-1} - \Phi_1^{-1} \circ \text{Id}\|_{A_1} \sim O(\epsilon^2).$$

De igual forma  $\Phi_1$  conjuga a  $f$  con una rotación  $R_{p/n}$  hasta orden  $\epsilon^2$ :

$$\|f \circ \Phi_1^{-1} - \Phi_1^{-1} \circ R_{p/n}\|_{A_1} \sim O(\epsilon^2).$$

Si siguiendo este procedimiento podemos intentar encontrar una transformación  $\Phi_m: \xi_{m-1} = h_m + \epsilon \xi_m$  tal que elimine los términos de orden  $\epsilon^{m-1}$  de  $f_{m-1}^n$ , dando como resultado que  $f_m^n$  es conjugada a la identidad hasta orden  $\epsilon^m$  en una banda  $A_m$ . Si  $f_m^n = \Phi_m^{-1} \circ f_{m-1}^n \circ \Phi_m$  y  $\|f_m^n - \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ , entonces  $\|f_{m-1}^n \circ \Phi_m^{-1} - \Phi_m^{-1} \circ \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ . Por lo tanto,  $f_{m-1}$  es conjugada a la rotación  $R_{p/n}$  hasta orden  $\epsilon^m$  y  $\|f_{m-1} \circ \Phi_m^{-1} - \Phi_m^{-1} \circ R_{p/n}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ .

Definamos  $\phi_m = \Phi_m \circ \Phi_{m-1} \circ \dots \circ \Phi_1$ ; entonces  $f^n$  es conjugada con la identidad hasta orden  $\epsilon^m$  en  $A_m$  por medio de la transformación  $\phi_m: \|f^n \circ \phi_m^{-1} - \phi_m^{-1} \circ \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ , y por lo tanto  $f$  es conjugada a  $R_{p/n}$  hasta orden  $\epsilon^m$  en  $A_m: \|f \circ \phi_m^{-1} - \phi_m^{-1} \circ R_{p/n}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ . Llamamos a  $f_m^n$  la forma normal de orden  $m$ .

Este procedimiento no lo podemos continuar para toda  $m \rightarrow \infty$ . Por ejemplo, para la aplicación standard con  $g(\theta) = \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi\theta)$ , existe un valor de  $m = [\frac{n}{2}]$  (con  $[\alpha]$  la parte entera de  $\alpha$ ) para el cual no está definida la transformación  $\Phi_m$  (sección 5). Esto significa que la dinámica en el anillo  $A_m$  no es conjugada a una rotación a orden  $\epsilon^m$ . La razón de que no exista la transformación  $\Phi_m$  es debida a la presencia de resonancias cuya amplitud en la dirección radial es precisamente de orden  $\epsilon^m$ . Como hemos apuntado antes, la dinámica de una resonancia es similar a la de un péndulo por lo cual no puede ser conjugada a una rotación. A la aplicación  $f_m^n$  le llamamos forma normal cuasiresonante, la cual tiene términos de orden  $\epsilon^m$  que NO es posible eliminar. Debemos mencionar que  $f_m^n$  es conjugada a una rotación sólo para un número discreto de puntos. Dichos puntos corresponden a órbitas monótonas con número de rotación  $\frac{p}{n}$ , y según la clasificación de Katok (sección 11.8), las órbitas pertenecen al tipo  $1_{p/n}$ . Dichas órbitas corresponden a  $n$  puntos periódicos de tipo elíptico, y  $n$  de tipo hiperbólico (genéricamente).

El método de formas normales y formas normales cuasiresonantes es similar a la teoría de las formas normales en el entorno de una curva elíptica [34]. Este procedimiento consiste en buscar transformaciones que identifiquen en forma adecuada las fronteras de bandas o anillos en el entorno de un cilindro. Si esta identificación es posible, se puede definir una aplicación que en las fronteras se comporte como un twist. Entonces la banda está foliada por curvas invariantes. Cuando no es posible lograr esta identificación, significa que no es posible expresar a la curva invariante como

la gráfica de una función que depende del ángulo en esta banda; se deben tomar  $2n$  copias de la banda, identificadas de forma adecuada, para poder expresar la curva invariante como la gráfica de una función. Esta curva invariante corresponde a las separatrices de los puntos hiperbólicos.

Con la ayuda de las formas normales no locales podemos comprender la dinámica del entorno de un anillo de una manera clara. Las formas resonantes destacan la dinámica importante del entorno de un número de rotación racional. Estas formas nos amplifican a la escala adecuada dicha dinámica, la cual es similar a una cadena de péndulos (sección 5).

En las siguientes secciones de este capítulo mostraremos cómo se construyen las formas normales no locales en la aplicación standard. Primero construiremos la aplicación  $f^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  de forma explícita. A continuación, mostramos que es posible encontrar las transformaciones  $\Phi_m$  hasta  $m = [n/2]$ . Estudiamos la forma resonante que resulta de la última transformación; más concretamente, calculamos las separatrices asociadas y los valores propios de los puntos hiperbólicos. Con ejemplos explícitos, comparamos los resultados obtenidos con cálculos numéricos. Por último, discutimos la convergencia de la composición de transformaciones  $\phi_m$ .

### III.4 Cálculo de $f^n$ en la aplicación standard.

En esta sección construimos la  $n$ -ésima composición de la aplicación standard. La razón de calcular explícitamente  $f^n$  es el estudiar las transformaciones que cambian  $f^n$  a su forma normal cuasiresonante (para un número de rotación dado).

La forma de construir  $f^n$  es inductiva, para cualquier valor de  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizamos el lift de  $f$  para hacer esta construcción, teniendo en cuenta que si  $F$  es el lift de  $f$ , entonces  $f^n \circ P = P \circ F^n$  (siendo  $P$  la proyección sobre el cilindro, sección II.2).

**Definición III.1** El lift de la aplicación standard está definido como  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F$ :

$$\begin{aligned} \bar{y} &= y + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x) \quad , \\ \bar{x} &= x + \bar{y} \quad , \end{aligned}$$

siendo  $K \in \mathbb{R}^+$  un parámetro. Esta aplicación la podemos escribir como una ecuación en diferencias finitas de segundo orden:

$$x_{m+2} = x_{m+1} - x_m - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_{m+1}) \quad .$$

Para simplificar los desarrollos posteriores, omitiremos escribir el  $2\pi$  en la aplicación standard, de tal forma que lo denotaremos como:

$$x_{m+2} = x_{m+1} - x_m - K \sin(x_{m+1}) \quad .$$

**Proposición III.2** Sea  $F$  el lift de la aplicación standard. Entonces la composición  $n$ -ésima de la aplicación queda expresada de la siguiente forma:

$$x_{n+m} = nx_{m+1} - (n-1)x_m - K \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (n-i-1) F_i(x_m, x_{m+1}) \quad (\text{III.1})$$

donde

$$F_i(x_m, x_{m+1}) = \sum_{l_1, \dots, l_i \in \mathbb{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^i J_{l_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} l_{r-t} K \right) \right) \right\} \times$$

$$\times \sin \left[ \left( \sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} t l_{i-t} \right) x_m + \left( \sum_{i=1}^{i+1} (-1)^i t l_{i-t} \right) x_{m+1} \right],$$

siendo  $J_\nu()$  las funciones de Bessel de orden entero,  $\nu \in \mathbb{Z}$ .

**Lema III.3** Si  $a, b, \phi \in \mathbb{R}$  y  $l \in \mathbb{Z}$  entonces:

$$\sin(a + b \sin(\phi)) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(b) \sin(a + l \phi).$$

**Demostración lema 3:** De las relaciones de las funciones de Bessel de orden entero,  $J_\nu()$  [35], tenemos que:

$$\cos(b \sin(\phi)) = J_0(b) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(b) \cos(2k \phi),$$

$$\sin(b \sin(\phi)) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(b) \sin((2k+1)\phi).$$

Utilizando la siguiente propiedad:  $J_{-n}(b) = (-1)^n J_n(b)$ , tenemos que:

$$\cos(b \sin(\phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(b) \cos(2k \phi), \quad \sin(b \sin(\phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k+1}(b) \sin((2k+1)\phi).$$

Sumando  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k+1}(b) \cos((2k+1)\phi) \equiv 0$  a  $\cos(b \sin(\phi))$  y  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(b) \sin(2k \phi) \equiv 0$  a  $\sin(b \sin(\phi))$ , podemos reescribir las relaciones anteriores como:

$$\cos(b \sin(\phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b) \cos(k \phi), \quad \sin(b \sin(\phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b) \sin(k \phi).$$

Por lo tanto:

$$\sin(a + b \sin(\phi)) = \sin(a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b) \cos(k \phi) + \cos(a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b) \sin(k \phi),$$

$$\sin(a + b \sin(\phi)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b) \sin(a + k \phi).$$

**Demostración proposición 2:** Hacemos la demostración por inducción. Para  $n = 2$  es cierto, ya que es la aplicación standard (por definición,  $F_0 = \sin(x_{m+1})$ ). Supongamos que la proposición es cierta para  $n$ , y mostraremos que es cierta también para  $n + 1$ .

Por la aplicación standard, tenemos que

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} - K \sin(x_n).$$

Al substituir  $x_{n+1}$  en (1), obtenemos que  $x_{n+m}$  se escribe como:

$$x_{n+m} = 2nx_m - (n)x_{n-1} - nK \sin(x_m) - K \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (n-i+1) F_i(x_m, 2x_m - x_{m-1} - K \sin(x_m)),$$

es decir

$$x_{n+m} = (n+1)x_m - (n)x_{m-1} - K \left\{ n \sin(x_m) + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (n-i+1) F_i(x_m, 2x_m - x_{m-1} - K \sin(x_m)) \right\}. \quad (\text{III.2})$$

Examinando cada término  $F_i$  tenemos:

$$\begin{aligned} F_i(x_m, 2x_m - x_{m-1} - k \sin(x_m)) &= \sum_{l_1, \dots, l_i \in \mathbf{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^i J_{l_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t l_{r-t} \right) K \right) \right\} \times \\ &\times \sin \left[ \left( \sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} t l_{i-t} \right) x_m + \left( \sum_{i=1}^{i+1} (-1)^t t l_{i-t} \right) (2x_m - x_{m-1} - K \sin(x_m)) \right], \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_i \in \mathbf{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^i J_{l_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t l_{r-t} \right) K \right) \right\} \times \\ &\times \sin \left[ \left( \sum_{i=1}^i (-1)^{i+1} (t+1) l_{i-t} \right) x_m - \left( \sum_{i=1}^{i+1} (-1)^t t l_{i-t} \right) (x_{m-1} + K \sin(x_m)) \right], \end{aligned}$$

Utilizando el lema 3, la expresión anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned} &F_i(x_m, 2x_m - x_{m-1} - k \sin(x_m)) = \\ &= \sum_{l_1, \dots, l_i \in \mathbf{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^i J_{l_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t l_{r-t} \right) K \right) \right\} \left\{ \sum_{l_{i+1} \in \mathbf{Z}} -J_{l_{i+1}} \left( \left( \sum_{s=1}^{i+1} (-1)^{s+1} s l_{i+1-s} \right) K \right) \right\} \times \\ &\times \sin \left[ \left( \sum_{i=1}^{i+1} (-1)^{i+1} (t) l_{i+1-t} \right) x_{m-1} + \left( \sum_{i=1}^{i+2} (-1)^t t l_{i+2-t} \right) x_m \right], \\ &= - \sum_{l_1, \dots, l_{i+1} \in \mathbf{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^{i+1} J_{l_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t l_{r-t} \right) K \right) \right\} \times \\ &\times \sin \left[ \left( \sum_{i=1}^{i+1} (-1)^{i+1} t l_{i-t} \right) x_{m-1} + \left( \sum_{i=1}^{i+2} (-1)^t t l_{i-t} \right) x_m \right], \\ &= -F_{i+1}(x_{m-1}, x_m) \end{aligned}$$

Como  $F_i(x_m, 2x_m - x_{m-1} - k \sin(x_m)) = -F_{i+1}(x_{m-1}, x_m)$ , la ecuación (2) queda escrita de la siguiente forma:

$$x_{n+m} = (n+1)x_m - (n)x_{m-1} - K \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i+1) F_i(x_{m-1}, x_m) \right\}. \quad (\text{III.3})$$

Haciendo un cambio de índices en (3),  $m \rightarrow m' + 1$ , obtenemos

$$x_{n+1+m'} = (n+1)x_{m'+1} - (n)x_{m'} - K \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i+1) F_i(x_{m'}, x_{m'+1}) \right\}.$$

Con lo cual, probamos que el caso  $n+1$  es cierto. □

**Proposición III.4** Si definimos  $a$  y como  $y_{m+1} = x_{m+1} - x_m$  entonces:

$$y_{n+m} = y_m - K \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G_s(x_m, y_m, K),$$

$$x_{n+m} = x_m + n y_m - K \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) G_s(x_m, y_m, K),$$

donde  $G_s(x_m, y_m, K) = F_s(x_m - y_m, x_m)$ .

**Demostración Proposición 4:** De la proposición 2 tenemos que:

$$x_{n+m} = n x_{m+1} - (n-1) x_m - K \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s-1} (n-s) F_{s-1}(x_m, x_{m+1}).$$

Cambiando  $x_m$  por  $x_{m+1} - y_{m+1}$  obtenemos:

$$x_{n+m} = n x_{m+1} - (n-1)(x_{m+1} - y_{m+1}) - K \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s-1} (n-s) F_{s-1}(x_{m+1} - y_{m+1}, x_{m+1}) \quad (III.4)$$

Como sabemos que  $y_{n+m} = x_{n+m} - x_{n+m-1}$ , substituimos (4) para el caso  $n$  y  $n-1$  en  $y_{n+m}$ , así que obtenemos:

$$\begin{aligned} y_{n+m} &= n x_{m+1} - (n-1) x_m - K \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s-1} (n-s) F_{s-1}(x_{m+1} - y_{m+1}, x_{m+1}) \\ &\quad - (n-1) x_{m+1} - (n-2) x_m - K \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s-1} (n-s) F_{s-1}(x_{m+1} - y_{m+1}, x_{m+1}), \\ y_{n+m} &= x_{m+1} - x_m - K \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s-1} F_{s-1}(x_{m+1} - y_{m+1}, x_{m+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si cambiamos los índices  $m+1 \rightarrow m'$  y  $n-1 \rightarrow n'$ , obtenemos la siguiente aplicación:

$$y_{n'+m'} = y_{m'} - K \sum_{s=0}^{n'-1} (-1)^s G_s(x_{m'}, y_{m'}, K),$$

$$x_{n'+m'} = x_{m'} + n' y_{m'} - K \sum_{s=0}^{n'-1} (-1)^s (n'-s) G_s(x_{m'}, y_{m'}, K),$$

donde

$$\begin{aligned} G_s(x_{m'}, y_{m'}, K) &= \sum_{i_1, \dots, i_s \in \mathbb{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^s J_{i_r} \left( \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t i_{r-t} \right) K \right) \right\} \times \\ &\quad \times \sin \left[ - \left( \sum_{t=1}^s (-1)^{t+1} t i_{s-t} \right) y_{m'} + \left( \sum_{t=1}^s (-1)^t i_{s-t} \right) x_{m'} \right] \end{aligned}$$

$$= F_a(x_{m'} - y_{m'}, x_{m'}) ,$$

donde  $l_0 \equiv 1$  .

El siguiente paso es escribir la aplicación  $F^n$  como serie de potencias de  $K$  y serie de Fourier en  $x_m$  y  $y_m$  . Por lo tanto, los productos de funciones de Bessel debemos escribirlos como series de potencia de  $K$  .

**Proposición III.5** Para  $l_i \in \mathbb{Z}$  y  $i = 1, 2, \dots, n$  se cumple:

$$\prod_{r=1}^n J_{l_r} \left( \sum_{t=1}^r (-1)^{t+1} t l_{r-t} K \right) = \left( \frac{1}{2} K \right)^{\sum_{i=1}^n |l_i|} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{K^2}{4} \right)^k \times \\ \times \sum_{a_1=0}^k \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \dots \sum_{a_{n-1}=0}^{a_{n-2}} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{|s_j|^{2(a_{j-1}-a_j)+|l_j|} \cdot \zeta^{l_j}(s_j)}{(a_{j-1}-a_j)! \Gamma(|l_j|+a_{j-1}-a_j+1)} \right\} ,$$

donde  $s_j = \sum_{t=1}^j ((-1)^{t+1} l_{j-t})$  ,  $a_0 \equiv k$  ,  $s_0 \equiv 1$  y la función  $\zeta$  está definida como:

$$\zeta^l(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 0, l > 0 \text{ y } l \text{ impar,} \\ -1 & \text{si } r > 0, l < 0 \text{ y } l \text{ impar,} \\ 1 & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

**Lema III.6** El producto de  $n$  series de potencias de  $x$  lo podemos expresar como una serie:

$$\prod_{i=1}^n \left( \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_i^{(r)} x^r \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i ,$$

donde

$$\beta_i = \sum_{a_1=0}^i \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \dots \sum_{a_{n-1}=0}^{a_{n-2}} \prod_{t=1}^n \alpha_{a_{t-1}-a_t}^{(i-t+1)} ,$$

con  $a_0 = i$  ,  $a_n = 0$  .

**Demostración lema 6:** Usando el resultado del producto de dos series [35] , se demuestra por inducción el caso  $n$ -ésimo .

**Lema III.7** Si  $l \in \mathbb{Z}$  y  $a \in \mathbb{R}$  entonces :

$$J_l(a) = \zeta^l(a) J_{|l|}(|a|) ,$$

con  $\zeta$  definida en la proposición 5.

**Demostración lema 7:** Por las propiedades de las funciones de Bessel de orden entero [35] , si  $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tenemos las siguientes relaciones:

$$J_{-i}(a) = (-1)^i J_i(a) ,$$

$$J_{2i}(-a) = J_{2i}(a) ,$$

$$J_{2i+1}(-a) = -J_{2i+1}(a)$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$J_l(a) = \zeta^l(a) J_{|l|}(|a|)$$

**Demostración proposición 5:** Por las propiedades de las funciones de Bessel de orden entero [35], tenemos que para todo  $x \in \mathbb{C}$ , la serie:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}x^2)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

es convergente, puesto que las funciones de Bessel son enteras. Por lo tanto, si  $l_i \in \mathbb{Z}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  obtenemos:

$$J_{l_i}(s_{i-1}K) = \left(\frac{1}{2}s_{i-1}K\right)^{l_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}(s_{i-1}K)^2)^k}{k! \Gamma(l_i + k + 1)},$$

Por el lema 7, esta expresión la reescribimos como:

$$J_{l_i}(s_{i-1}K) = \left(\frac{1}{2}K\right)^{|l_i|} |s_{i-1}|^{|l_i|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{4}K^2)^k |s_{i-1}|^{2k} \zeta^{l_i}(s_{i-1})}{k! \Gamma(|l_i| + k + 1)},$$

Ahora, el producto de funciones de Bessel  $\prod_{i=1}^n J_{l_i}(s_{i-1}K)$  lo expresamos, con la ayuda del lema 6, de la siguiente forma:

$$\prod_{i=1}^n J_{l_i}(s_{i-1}K) = \left(\frac{1}{2}K\right)^{\sum_{i=1}^n |l_i|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{K^2}{4}\right)^k \times \quad (III.5)$$

$$\times \sum_{a_1=0}^k \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \dots \sum_{a_{n-1}=0}^{a_{n-2}} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{|s_j|^{2(a_{j-1}-a_j)+|l_j|} \cdot \zeta^{l_j}(s_j)}{(a_{j-1}-a_j)! \Gamma(|l_j| + a_{j-1} - a_j + 1)} \right\}$$

La serie en (5) existe porque proviene del producto finito de funciones enteras. □

**Proposición III.8** La aplicación  $F^n$  puede escribirse como una serie de potencias de  $K$ .

**Demostración Proposición 8:** Por la proposición 4, la aplicación  $F^n$  se puede escribir como:

$$y_{n+m} = y_m - K \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G_s(x_m, y_m, K), \quad (III.6)$$

$$x_{n+m} = x_m + n y_m - K \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) G_s(x_m, y_m, K)$$

La función  $G_s$  está definida como:

$$G_s(x_m, y_m, K) = \sum_{l_1, \dots, l_s \in \mathbb{Z}} \left\{ \prod_{r=1}^s J_{l_r} \left( \left( \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} l_{r-i} \right) K \right) \right\} \sin(-s y_m + s x_m),$$

donde  $l_0 \equiv 1$ ,  $s_r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} l_{r-i}$  y  $\bar{s}_r = \sum_{i=1}^r (-1)^i l_{r-i}$ .

Utilizando la proposición 5, podemos substituir (5) en la ecuación anterior, de tal manera que  $G_r$  lo reescribimos como:

$$G_r(x_m, y_m) = \sum_{l_1, \dots, l_r \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2}K\right)^{\sum_{i=1}^r |l_i|} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{K^2}{4}\right)^k \times \\ \times \sum_{a_1=0}^k \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \dots \sum_{a_{r-1}=0}^{a_{r-2}} \prod_{j=1}^r \left\{ \frac{|\bar{s}_j|^{2(a_{j-1}-a_j)+|l_j|} \cdot \zeta^{l_j}(\bar{s}_j)}{(a_{j-1}-a_j)! \Gamma(|l_j|+a_{j-1}-a_j+1)} \right\} \sin(-s_r y_m + \bar{s}_r x_m).$$

Reagrupando las potencias de  $K$ , podemos expresar a  $G_r$  de la siguiente manera:

$$G_r(x_m, y_m, K) = \sum_{r=0}^{\infty} K^r G_r^{(r)}(x_m, y_m),$$

donde

$$G_r^{(r)}(x, y) = \sum_{A_{s,k,r}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^r |l_i|} g_s(k, l) \sin(-s_r y_m + \bar{s}_r x_m),$$

el conjunto de índices  $A_{s,k,r}$  está definido como:

$$A_{s,k,r} \equiv \left\{ \{l_i\}_{i=1}^r, k \mid l_1 \dots l_r \in \mathbf{Z}, k \geq 0, \sum_{i=1}^r |l_i| + 2k = r \right\}$$

y la función  $g_s(k, l)$  la definimos de esta forma:

$$g_s(k, l) = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \sum_{a_1=0}^k \sum_{a_2=0}^{a_1} \sum_{a_3=0}^{a_2} \dots \sum_{a_{r-1}=0}^{a_{r-2}} \prod_{j=1}^r \left\{ \frac{|\bar{s}_j|^{2(a_{j-1}-a_j)+|l_j|} \cdot \zeta^{l_j}(\bar{s}_j)}{(a_{j-1}-a_j)! \Gamma(|l_j|+a_{j-1}-a_j+1)} \right\},$$

el símbolo  $l$  en  $g$  indica que esta función depende de los índices  $l_1, l_2, \dots, l_r$ . Debemos notar que  $g_s(k, l) \in \mathbf{Q}$  y no depende de  $x_m, y_m$  y  $K$ .

Finalmente, (6) lo reescribimos como:

$$y_{n+m} = y_m - \sum_{r=0}^{\infty} K^{r+1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G_r^{(s)}(x_m, y_m), \quad (III.7)$$

$$x_{n+m} = x_m + n y_m - \sum_{r=0}^{\infty} K^{r+1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) G_r^{(s)}(x_m, y_m).$$

□

### III.5 Formas normales en la aplicación standard.

Esta sección la dedicamos a construir las formas normales de la aplicación standard. A partir de la aplicación  $f^n$ , cuando el valor del parámetro es pequeño,  $K \equiv \epsilon \ll 1$ , buscamos transformaciones que eliminen los términos de orden más bajo en  $\epsilon$ .

Como indicamos en la sección III.2, las formas normales se construyen en el entorno de anillos que rodean el cilindro. Cuando  $\epsilon \ll 1$ , un anillo está definido por un intervalo de rotación, es decir un entorno de un número de rotación  $[\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$ . Con las sucesivas transformaciones, el intervalo de rotación donde está definida la nueva aplicación se estrecha. La aparición de resonancias determina un ancho mínimo del anillo en función de  $\epsilon$ .

Tomemos la aplicación  $F^n$  definida en (6). Fijemos el valor del parámetro como  $K \equiv \epsilon \ll 1$  y un número de rotación  $\frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$ . Definimos el anillo  $A_0 = S^1 \times [\rho_1, \rho_2]$  donde  $\frac{p}{n} \in [\rho_1, \rho_2]$  y  $\frac{p}{n} = \min_q \{ \frac{r}{q} \mid r \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \frac{r}{q} \in [\rho_1, \rho_2] \}$ , es decir, el racional con denominador más pequeño que contiene el intervalo  $[\rho_1, \rho_2]$  es  $\frac{p}{n}$ .

El valor de  $\epsilon$  está acotado por el intervalo  $[\rho_1, \rho_2]$  al pedir que  $\frac{p}{n} \pm \epsilon \in [\rho_1, \rho_2]$ . De esta manera podemos definir una transformación de  $A_0$  a  $A_1$  donde  $A_1 = S^1 \times [-1, 1]$ . Dicha transformación está definida como un escalamiento en la variable radial:  $y \rightarrow \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1$ , donde  $\xi_1 \in [-1, 1]$ . Nos interesa conocer las propiedades de la aplicación transformada, principalmente el conocer el armónico mayor de cada término de la nueva aplicación (por armónico nos referimos a una de las frecuencias involucradas en el desarrollo de Fourier de una función periódica).

Para simplificar la notación, omitiremos el subíndice  $m$  en las coordenadas, de tal forma que denotaremos a  $x_m$  y  $y_m$  como  $x$  e  $y$  respectivamente, y  $x_{n+m}$  e  $y_{n+m}$  como  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  respectivamente.

**Proposición III.9** Sea la aplicación  $F^n(x, y)$  descrita en (7), la cual está definida en el anillo  $A_0$ . Sea la transformación  $\Phi_1 : y = \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1$  con  $\xi_1 \in [-1, 1]$ . La aplicación  $\Phi_1^{-1} \circ F^n \circ \Phi_1 : A_1 \rightarrow A_1$  se puede escribir como suma de términos  $\epsilon^l \xi_1^t g_l(x)$ , donde  $g_l(x)$  es una función periódica cuyo máximo armónico,  $l$ , cumple que  $u + l < t$  con  $s, l, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Demostración proposición 9:** Sea la aplicación  $F^n$  definida en (7). La nueva aplicación  $\Phi_1^{-1} \circ F^n \circ \Phi_1$  queda escrita como:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\epsilon} (\bar{y} - \frac{p}{n}) = \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1 - \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon^{r+1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s G_s^{(r)}(x, \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1) - \frac{p}{n} \right\}, \quad (III.8)$$

$$\bar{x} = x + n \left( \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1 \right) - \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon^{r+1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) G_s^{(r)}(x, \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1).$$

donde  $\xi_1 \in [-1, 1]$ . Los términos  $G_s^{(r)}(x, \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1)$  los desarrollamos como series de potencias en  $\xi_1$  en el entorno de  $\xi_1 = 0$ . De esta manera tenemos:

$$G_s^{(r)}(x, \frac{p}{n} + \epsilon \xi_1) = \sum_{A_{s,k,r}} \left( \frac{1}{2} \right)^{\sum_{i=1}^r |k_i|} g_s(k, l) \sin(-s_x (\frac{p}{n} + \epsilon \xi_1) + s_x x), \quad (III.9)$$

donde el conjunto de índices  $A_{s,k,r}$  se define como en la proposición 8. Teniendo en cuenta que:

$$\sin(-\alpha (\frac{p}{n} + \epsilon \xi_1) + \beta x) = \sin(-\alpha \frac{p}{n} + \beta x) \cos(-\alpha \epsilon \xi_1) + \cos(-\alpha \frac{p}{n} + \beta x) \sin(-\alpha \epsilon \xi_1),$$

podemos desarrollar  $\cos(-\alpha \epsilon \xi_1)$  y  $\sin(-\alpha \epsilon \xi_1)$  alrededor de  $\xi_1 = 0$ , con lo cual obtenemos:

$$\sin(-\alpha (\frac{p}{n} + \epsilon \xi_1) + \beta x) = \sin(-\alpha \frac{p}{n} + \beta x) \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \frac{(\alpha \epsilon \xi_1)^{2l}}{(2l)!} - \cos(-\alpha \frac{p}{n} + \beta x) \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{l+1} \frac{(\alpha \epsilon \xi_1)^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

donde las funciones periódicas  $h_{t,u}(x)$  y  $g_{t,u}(x)$  están definidas como:

$$h_{t,u}(x) = \sum_{v=-(t-u+1)}^{t-u+1} (a_{t,u,v} \sin(vx) + b_{t,u,v} \cos(vx)) \quad , \quad (III.12)$$

$$g_{t,u}(x) = \sum_{v=-(t-u+1)}^{t-u+1} (c_{t,u,v} \sin(vx) + d_{t,u,v} \cos(vx)) \quad ,$$

los coeficientes  $a_{t,u,v}$  ,  $b_{t,u,v}$  ,  $c_{t,u,v}$  y  $d_{t,u,v}$  son constantes reales que se obtienen en (10) al reescribir:

$$\sin\left(-s, \frac{p}{n} + \bar{s}, x\right) = -\sin\left(s, \frac{p}{n}\right) \cos(\bar{s}, x) + \cos\left(s, \frac{p}{n}\right) \sin(\bar{s}, x) \quad ,$$

y análogamente para el coseno.

**Proposición III.11** La  $m$ -ésima transformación  $\Phi_m : \xi_{m-1} = \zeta_m(x) + \epsilon \xi_m$  definida de  $A_{m-1} \rightarrow A_m$  para eliminar los términos de orden  $O(\epsilon^m)$  en la expresión de  $\bar{x}(x, \xi_{m-1})$  y donde  $(x, \xi_{m-1}) \in A_{m-1}$  y  $(x, \xi_m) \in A_m$ ; transforma de la aplicación  $F_{m-1}^m$  a  $F_m^m = \Phi_m^{-1} \circ F_{m-1}^m \circ \Phi_m$ , la cual podemos escribir como:

$$\bar{\xi}_m = p + \xi_m - \sum_{t=-m}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t+m}{2} \rfloor} \xi_m^s \Omega_{t+m, (m+1)s}^m(x) \quad , \quad (III.13)$$

$$\bar{x} = x - \epsilon^{m+1} \left( n \xi_m + \sum_{t=m}^{\infty} \epsilon^{t-m} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t+m}{2} \rfloor} \xi_m^l \Theta_{t, (m+1)l}^m(x) \right) \quad ,$$

donde  $\Omega_{t+m, (m+1)s}^m(x)$  y  $\Theta_{t, (m+1)l}^m(x)$  son funciones periódicas definidas como (12) en el corolario 10 cuyo máximo armónico es  $t+m-(m+1)l+1$  y  $t-(m+1)l+1$  respectivamente, y  $[\alpha]$  representa la parte entera de  $\alpha$ .

**Demostración proposición 11:** Esta demostración la hacemos por inducción.

**Caso  $m = 1$  :**

Buscamos la transformación  $\Phi_2 : A_1 \rightarrow A_2$  tal que elimine los términos de orden  $O(\epsilon^2)$  en la ecuación (11). Proponemos que  $\Phi_2 : \xi_1 = \zeta_2(x) + \epsilon \xi_2$ . Entonces, por medio de la transformación  $\Phi_2$  hacemos la siguiente conjugación  $F_2^2 = \Phi_2^{-1} \circ F_1^2 \circ \Phi_2$  donde  $F_1^2$  es la aplicación (11). Así  $F_2^2$  se expresa de la forma siguiente:

$$\epsilon \bar{\xi}_2 = -\zeta_2(x) + \bar{\xi}_1 = \zeta_2(x) + \epsilon \xi_2 - \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{u=0}^t (\zeta_2(x) + \epsilon \xi_2)^u h_{t,u}(x) - \zeta_2(x) \quad , \quad (III.14)$$

$$\bar{x} = p + x - \epsilon^2 \left( n(\zeta_2(x) + \epsilon \xi_2) + \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{u=0}^t (\zeta_2(x) + \epsilon \xi_2)^u g_{t,u}(x) \right) \quad ,$$

Para eliminar los términos de orden  $O(\epsilon^2)$  en  $\bar{x}$ , la función  $\zeta_2(x)$  debe ser igual a  $\frac{1}{n} g_{0,0}(x)$ . Al hacer esta substitución,  $\bar{x}$  la reescribimos así:

$$\bar{x} = px - \epsilon^2 \left( n \epsilon \xi_2 + \sum_{t=1}^{\infty} \epsilon^t \sum_{u=0}^t g_{t,u}(x) \sum_{l=0}^u \alpha_l^t \epsilon^l \xi_2^l (g_{0,0}(x))^{u-l} \right) \quad ,$$

donde

$$\sigma_l = \begin{cases} 1 & \text{si } l \pmod{4} = 0, \\ -1 & \text{si } l \pmod{4} = 1, \\ -1 & \text{si } l \pmod{4} = 2, \\ 1 & \text{si } l \pmod{4} = 3. \end{cases}$$

De esta forma (8) lo podemos reescribir como:

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sum_{\beta_{s,k,r,t}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta_s} \mathcal{G}_s(k,l) \times \xi_1^{2r} \sin\left(-s, \frac{p}{n} + \bar{s}, x\right) \sigma_{r+s} \frac{(-s_s)^{2r}}{(2r)!} \quad (\text{III.10})$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sum_{\beta'_{s,k,r,t}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta'_s} \mathcal{G}_s(k,l) \xi_1^{2r+1} \cos\left(-s, \frac{p}{n} + \bar{s}, x\right) \sigma_r \frac{(-s_s)^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

$$z = x + p + \epsilon n \xi_1 - \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) \sum_{\beta_{s,k,r,t}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta_s} \mathcal{G}_s(k,l) \xi_1^{2r} \sin\left(-s, \frac{p}{n} + \bar{s}, x\right) \sigma_{r+s} \frac{(-s_s)^{2r}}{(2r)!}$$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s (n-s) \sum_{\beta'_{s,k,r,t}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta'_s} \mathcal{G}_s(k,l) \xi_1^{2r+1} \cos\left(-s, \frac{p}{n} + \bar{s}, x\right) \sigma_r \frac{(-s_s)^{2r+1}}{(2r+1)!},$$

donde  $\Sigma_s = \sum_{\nu=1}^s |l_\nu|$ . Los conjuntos de índices  $\beta_{s,k,r,t}$  y  $\beta'_{s,k,r,t}$  están definidos como:

$$\beta_{s,k,r,t} \equiv \left\{ \{l_i\}_{i=1}^s, k, r \mid l_1 \dots l_s \in \mathbf{Z}, k \geq 0, r \geq 0, \sum_{\nu=1}^s |l_\nu| + 2k + 2r = t \right\}$$

$$\beta'_{s,k,r,t} \equiv \left\{ \{l_i\}_{i=1}^s, k, r \mid l_1 \dots l_s \in \mathbf{Z}, k \geq 0, r \geq 0, \sum_{\nu=1}^s |l_\nu| + 2k + 2r + 1 = t \right\}$$

En (10), podemos observar que  $\tilde{\xi}_1$  y  $z$  quedan escritos como una doble serie de potencias en  $\xi_1$  y  $\epsilon$  junto con funciones periódicas en  $x$ .

Examinando los términos que contienen  $\epsilon^t \xi_1^u$  con  $t, u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , vemos que el armónico máximo de la función periódica involucrada en cada término es  $t - u$ . Esto resulta de la acotación de índices que encontramos en los sumatorios:  $\Sigma_s + 2k + u = t$  donde  $u = 2r$  o  $2r + 1$ . El máximo valor de la suma  $\Sigma_s$  es  $t - u$  si  $k = 0$ . La frecuencia de las funciones periódicas son  $\bar{s}_s = l_s - l_{s-1} + l_{s-2} - \dots + (-1)^s$  por lo tanto el máximo valor de  $\bar{s}_s$  es  $t - u + 1$  para todos los términos en (10) y se alcanza cuando  $k = 0$ . □

**Corolario III.10** La aplicación  $F_1^n = \Phi_1^{-1} \circ F^n \circ \Phi_1$  donde  $F^n : A_1 \rightarrow A_1$  la podemos expresar como:

$$\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{u=0}^t \xi_1^u h_{t,u}(x), \quad (\text{III.11})$$

$$z = p + x - \epsilon^2 \left( n \xi_1 + \sum_{t=0}^{\infty} \epsilon^t \sum_{u=0}^t \xi_1^u g_{t,u}(x) \right),$$

donde  $\alpha_i^* = \frac{1}{n} \binom{u}{i}$ . Si reordenamos los sumatorios obtenemos:

$$z = p + x - \epsilon^2 \left( n\xi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{i-1} \alpha_i^*(g_{0,0}(x))^{u-l} g_{i-l,u}(x) \right). \quad (\text{III.15})$$

Ahora podemos substituir  $\xi_2$  de la ecuación (14), el término  $\zeta_2(x)$  utilizando (15). Para esto, debemos expandir en series de potencias a  $\zeta_2(x) = \frac{1}{n} g_{0,0}(x)$  en el entorno de  $x$ :

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{\epsilon n} g_{0,0}(x) + \xi_2 - \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \sum_{u=0}^i h_{i,u}(x) \sum_{l=0}^n \alpha_l^*(g_{0,0}(x))^{u-l} \epsilon^l \xi_2^l \\ &- \frac{1}{\epsilon} \sum_{s=0}^{\infty} g_{0,0}^{(s)}(x) \epsilon^{2s} \left( n\xi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{i-1} \alpha_i^*(g_{0,0}(x))^{u-l} g_{i-l,u}(x) \right)^2, \end{aligned}$$

donde  $g_{0,0}^{(u)} \equiv \frac{1}{u! n} \frac{\partial^u}{\partial x^u} g_{0,0}(x) |_{x=x}$ . Reordenando los sumatorios:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{\epsilon n} g_{0,0}(x) + \xi_2 - \sum_{v=-1}^{\infty} \epsilon^v \sum_{u=l}^{\lfloor \frac{v+1}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{v+1-l} \alpha_l^*(g_{0,0}(x))^{u-l} \\ &- \frac{1}{\epsilon} g_{0,0}^{(0)}(x) + \epsilon \left( g_{0,0}^{(1)}(x) n \xi_2 - g_{0,0}^{(1)}(x) \alpha_0^* g_{1,0}(x) \right) \\ &- \epsilon g_{0,0}^{(1)}(x) \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{i-1} \alpha_i^*(g_{0,0}(x))^{u-l} g_{i-l,u}(x) \\ &+ \sum_{s=2}^{\infty} g_{0,0}^{(s)}(x) \epsilon^{2s-1} \left( n\xi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{i-1} \alpha_i^*(g_{0,0}(x))^{u-l} g_{i-l,u}(x) \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Analizando la ecuación obtenida en (15), vemos que el término  $\sum_{u=l}^{i-1} \alpha_i^*(g_{0,0}(x))^{u-l} g_{i-l,u}(x)$  es una función periódica cuyo máximo armónico<sup>1</sup> es  $u-l+i-l-u+1 = i+1-2l$  (notemos que el m.a. es independiente del índice  $u$ ). Así podemos substituir la expresión anterior por una función periódica  $\Theta_{i,2l}(x)$  cuyo m.a. es  $i-2l+1$ . Por lo tanto,  $z$  queda escrito como:

$$z = x - \epsilon^2 \left( n\xi_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^{i-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \xi_2^l \Theta_{i,2l}^n(x) \right), \quad (\text{III.17})$$

Para analizar la expresión (16), debemos notar que  $\frac{1}{\epsilon n} g_{0,0}(x) - \frac{1}{\epsilon} g_{0,0}^{(0)}(x) = 0$ . Del primer grupo de sumatorios de (16), vemos que  $\sum_{u=l}^{v+1-l} h_{v+1-l,u}(x) (g_{0,0}(x))^{u-l}$  lo podemos substituir por una

<sup>1</sup>m.a., o frecuencia mayor: el m.a. de la función  $h_{i,j}$  es  $i-j+1$  con  $i \geq j$ , donde  $h_{i,j}$  está definida como en (13).

función periódica  $\Omega_{v+1,2l}^2(x)$  ya que el sumatorio anterior tiene un m.a. independiente del índice  $u$  y que es igual a  $v+1-2l+1$ . Entonces este primer grupo queda escrito como:

$$\sum_{v=-1}^{\infty} \epsilon^v \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{v+1}{2} \rfloor} \xi_2^l \Omega_{v+1,2l}^2(x) . \quad (\text{III.18})$$

Los otros términos de (16) del tipo  $\epsilon^a \xi_2^b f_c(x)$  (donde  $f_c(x)$  es una función periódica con m.a. igual a  $c+1$ ), verifican la siguiente relación  $b \leq \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor$  y  $a-2b+1 \geq c$ . Para esto, notamos que el término:  $\epsilon(g_{0,0}^{(1)}(x)n\xi_2 - g_{0,0}^{(1)}(x)\alpha_0^2 g_{1,0}(x))$  lo podemos incluir en (18) para  $v=1$ . El término:

$$\begin{aligned} & -\epsilon \left( g_{0,0}^{(1)}(x) \sum_{t=2}^{\infty} \epsilon^{t-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \xi_2^l \sum_{u=l}^{t-l} \alpha_l^u (g_{0,0}(x))^{u-l} g_{t-l,u}(x) \right) \\ & = \sum_{v=2}^{\infty} \epsilon^v \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{v+1}{2} \rfloor} \xi_2^l \bar{\Omega}_{v+1,2l}^m(x) , \end{aligned}$$

verifica la condición anterior, así que dicha expresión la podemos incluir en (18); el último grupo de sumatorios  $\sum_{s=2}^{\infty}(\dots)$ , cumple igualmente la desigualdad anterior, por lo cual podemos incluir este último grupo en (18).

La aplicación  $F_2^n$  queda escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 &= p + \xi_2 - \sum_{t=-1}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} \xi_2^s \Omega_{t+1,2s}^2(x) , \\ \bar{x} &= x - \epsilon^3 \left( n\xi_2 + \sum_{t=1}^{\infty} \epsilon^{t-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} \xi_2^l \Theta_{t,2l}^2(x) \right) . \end{aligned}$$

Así verificamos el caso  $m=1$ .

**Caso  $m$ :**

Seguiremos los mismos pasos que en el caso  $m=1$ . Tomemos la aplicación  $F_m^n$  expresada en (13). Buscamos entonces la transformación  $\Phi_{m+1}$ :  $\xi_m = s_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1}$  con  $\Phi_{m+1}: \Lambda_m \rightarrow \Lambda_{m+1}$  y  $\xi_{m+1} \in [-1, 1]$  tal que elimine los términos de orden  $O(\epsilon^{m+1})$  de  $\bar{x}(x, \xi_m)$ . La nueva aplicación que obtenemos es  $F_{m+1}^n = \Phi_{m+1}^{-1} \circ F_m^n \circ \Phi_{m+1}$ , la cual la expresamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \epsilon \bar{\xi}_{m+1} &= -s_{m+1}(x) + \bar{\xi}_m = s_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1} \\ & - \sum_{t=-m}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t+m}{2} \rfloor} (s_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1})^s \Omega_{t+m, (m+1)s}^m(x) - s_{m+1}(x) , \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\bar{x} = p + x - \epsilon^{m+1} \left( n(s_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1}) + \sum_{t=m}^{\infty} \epsilon^{t-m} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} (s_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1})^l \Theta_{t, (m+1)l}^m(x) \right) .$$

Para eliminar los términos de orden  $\epsilon^{m+1}$  de  $\bar{x}$  en (19), debemos pedir que  $s_{m+1}(x) = \frac{1}{n} \Theta_{m,0}^m(x)$ . Por lo tanto, la forma de  $\bar{x}$  es:

$$\bar{x} = p + x - \epsilon^{m+1} \left( n\epsilon \xi_{m+1} + \sum_{t=m+1}^{\infty} \epsilon^{t-m} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor} \Theta_{t, (m+1)l}^m(x) \sum_{r=0}^l \alpha_l^r \epsilon^r \xi_{m+1}^r (\Theta_{m,0}^m(x))^{l-r} \right) ,$$

con  $\alpha'_r$  definidos como en el caso  $m = 1$ . Haciendo una reordenación de términos se tiene:

$$z = p + x - \epsilon^{m+2} \left( n\xi_{m+1} - \sum_{v=m+1}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^r \sum_{l=r}^{\lfloor \frac{v-m+1}{2} \rfloor} \alpha'_l (\Theta_{m,0}^m(x))^{l-r} \Theta_{v-r, (m+1)}^m(x) \right).$$

Podemos observar que el m.a. de  $(\Theta_{m,0}^m(x))^{l-r} \Theta_{v-r, (m+1)}^m(x)$  es  $v - r(m+2) + 1$  y no depende de  $l$ , por lo cual sustituimos estos términos por una función periódica con el mismo m.a.:

$$z = x - \epsilon^{m+2} \left( n\xi_{m+1} + \sum_{v=m+1}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^r \Theta_{v, (m+2)}^{m+1}(x) \right). \quad (\text{III.20})$$

Examinaremos la expresión de  $\xi_{m+1}$ . El término  $\xi_{m+1}(x)$  lo debemos expandir en serie de potencias de  $x$ , por lo cual obtenemos:

$$\xi_{m+1} = \frac{1}{\epsilon n} \Theta_{m,0}^m(x) + \xi_{m+1} - \frac{1}{\epsilon} \sum_{t=-m}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t+m+1}{2} \rfloor} \Omega_{t+m, (m+1), s}^m(x) \sum_{l=0}^s \alpha'_l (\Theta_{m,0}^m(x))^{s-l} \epsilon^l \xi_{m+1}^l \quad (\text{III.21})$$

$$- \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_{m,0}^{(k)}(x) \epsilon^{(m+2)k} \left( n\xi_{m+1} - \sum_{v=m+1}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^r \Theta_{v, (m+2)}^{m+1}(x) \right)^k,$$

donde  $\Theta_{m,0}^{(k)}(x) \equiv \frac{1}{n! k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \Theta_{m,0}^m(x) |_{x=z}$ .

El primer grupo de sumatorios los podemos reducir a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon} \sum_{t=-m}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t+m+1}{2} \rfloor} \Omega_{t+m, (m+1), s}^m(x) \sum_{l=0}^s \alpha'_l (\Theta_{m,0}^m(x))^{s-l} \epsilon^l \xi_{m+1}^l \\ &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{r=-m}^{\infty} \epsilon^r \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r+m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^l \sum_{s=l}^{\lfloor \frac{r-l+m+1}{2} \rfloor} \Omega_{r-l+m, (m+1), s}^m(x) (\Theta_{m,0}^m(x))^{s-l} \\ &= \sum_{v=-m-1}^{\infty} \epsilon^v \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{v+m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^l \sum_{s=l}^{\lfloor \frac{v-l+m+1}{2} \rfloor} \Omega_{v-l+m+1, (m+1), s}^m(x) (\Theta_{m,0}^m(x))^{s-l} \\ &= \sum_{v=-m-1}^{\infty} \epsilon^v \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{v+m+1}{2} \rfloor} \xi_{m+1}^l \Omega_{v+1, (m+1), (m+2), s}^{m+1}(x), \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

donde hemos substituido a:

$$\sum_{s=l}^{\lfloor \frac{v-l+m+1}{2} \rfloor} \Omega_{v-l+m+1, (m+1), s}^m(x) (\Theta_{m,0}^m(x))^{s-l},$$

cuyo m.a. es  $v + (m+1) - l(m+2) + 1$ , por la función  $\Omega_{v+1, (m+1), (m+2), s}^{m+1}(x)$  que tiene el mismo m.a. En (22) observamos que para todo término de la forma  $\epsilon^a \xi_{m+1}^b \Omega_{c+1}^{m+1}(x)$  se cumple la siguiente desigualdad:  $b \leq \lfloor \frac{a-m+1}{m+2} \rfloor$  y  $c \leq a + (m+1) - (m+2)b$ , siendo  $c+1$  el m.a. de  $\Omega_c^{m+1}(x)$ .

Del segundo grupo de sumatorios de  $\xi_{m+1}$  tenemos: para  $k = 0$ ,  $\frac{1}{\epsilon} \Theta_{m,0}^{(0)}(x)$ , que sumado al primer término de  $\xi_{m+1}$  da cero. Para  $k = 1$  obtenemos los siguientes términos:

$$\epsilon^{m+1} \left( -\Theta_{m,0}^{(1)}(x) \Theta_{m+1,0}^{m+1}(x) + n \xi_{m+1} \Theta_{m,0}^{(1)}(x) \right) \\ - \epsilon^{m+1} \left( \sum_{v=m+2}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m-1}{m+2} \rfloor} \xi_{m+1} \Theta_{v,(m+2),r}^{m+1}(x) \right) \Theta_{m,0}^{(1)}(x).$$

El primer término lo podemos incluir en (22) en  $\xi_{m+1} \Omega_{v+(m+1),(m+1),r}^{m+1}(x)$  si  $v = m+1$  ya que coinciden en el m.a. . El sumatorio del segundo término puede ser escrito como:

$$\left( \sum_{v=m+2}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m-1}{m+2} \rfloor} \xi_{m+1} \Theta_{v,(m+2),r}^{m+1}(x) \right) \Theta_{m,0}^{(1)}(x) \\ = \sum_{s=1}^{\infty} \epsilon^{s+m+1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{s+m+1}{m+2} \rfloor} \xi_{m+1} \Theta_{s+(m+1),(m+2),r}^{m+1}(x) \Theta_{m,0}^{(1)}(x).$$

Este término lo podemos insertar en (22) ya que tienen la misma forma si  $v \geq m+2$  (para un mismo orden en  $\xi_{m+1}$  y  $\epsilon$ , coinciden en el m.a. de la función periódica correspondiente). Los términos con  $k \geq 2$  de (21), tienen la forma:

$$-\frac{1}{\epsilon} \sum_{k=2}^{\infty} \Theta_{m,0}^{(k)}(x) \epsilon^{(m+2)k-1} \left( n \xi_{m+1} - \sum_{v=m+1}^{\infty} \epsilon^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m-1}{m+2} \rfloor} \xi_{m+1} \Theta_{v,(m+2),r}^{m+1}(x) \right)^k.$$

En esta expresión, el sumatorio que está incluido en los paréntesis tiene términos de la forma  $\epsilon^a \xi_{m+1}^b f_c(x)$  con  $b \leq \lfloor \frac{a}{m+2} \rfloor$  y  $a - b(m+2) \geq c$  (con  $c+1$  el m.a. de la función periódica  $f_c(x)$ ). Estas relaciones se conservan si elevamos a una potencia de  $k$  el término anterior. Así mismo, el multiplicar por  $\Theta_{m,0}^{(k)}(x) \epsilon^{(m+2)k-1}$  no modifica esta relación de exponentes con el m.a. correspondiente. Por lo tanto, los términos de este último sumatorio pueden ser incluidos en (22) ya que son compatibles sus relaciones de exponentes de  $\epsilon$  y  $\xi_{m+1}$  con respecto al m.a. de la función periódica que los multiplica.

Finalmente,  $F_{m+1}^n$  lo podemos escribir, a partir de (20) y (22), haciendo el cambio de índices  $m+1 \rightarrow m'$ , como:

$$\xi_{m'} = p + \xi_{m'} - \sum_{v=-m'}^{\infty} \epsilon^v \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{v+m'}{m'+1} \rfloor} \xi_{m'} \Omega_{v+m',(m'+1),l}^{m'}(x), \\ z = p + x - \epsilon^{m'+1} \left( n \xi_{m'} + \sum_{v=m'}^{\infty} \epsilon^{v-m'} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v-m'}{m'+1} \rfloor} \xi_{m'} \Theta_{v,(m'+1),r}^{m'}(x) \right).$$

Con lo cual verificamos que el caso  $m+1$  es cierto. □

### Comentario a la proposición 11

Cuando obtenemos la aplicación  $F_m^n$  por medio de la transformación  $\Phi_m \circ \Phi_{m-1} \circ \dots \circ \Phi_1$ , la coordenada radial en (13) contiene términos cuyo orden en  $\epsilon$  va de  $\epsilon^{-m}$  a  $\epsilon^0$  y que no dependen de

. Finalmente mostramos que  $\Omega_{i^t+m,0}^m(x) \equiv 0$  para  $1 \leq t < m-1$ . En el primer y tercer paso utilizamos el hecho que la aplicación original es una twist y por lo tanto las órbitas periódicas monótonas están bien ordenadas. En el segundo paso, utilizamos el hecho que  $F$  es una aplicación conservativa.

**Primer paso:**

Supongamos que para  $t' \leq 0$  las funciones periódicas  $\Omega_{i^{t'}+m,0}^m(x) \equiv 0$  si  $-m \leq t \leq t'$ , y que  $\Omega_{i^m+m,0}^m(x)$  no es idénticamente nulo. La aplicación (13) la podemos escribir hasta orden  $\epsilon^{t'}$  en  $x$  como:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon^{t'} \Omega_{i^{t'}+m,0}^m(x) + O(\epsilon^{t'+1}) \quad , \\ \bar{x} &= x + p + \epsilon^{m+1} (nx - \Theta_{m,0}^m(x)) + O(\epsilon^{m+2}) \quad . \end{aligned} \quad (III.24)$$

Ahora debemos analizar los puntos fijos de la aplicación (24). Imponiendo que  $\bar{x} = x$  y  $\bar{x} = x$ , la aplicación (24) queda reducida a un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Omega_{i^t+m,0}^m(x) + O(\epsilon) &= 0 \quad , \\ nx - \Theta_{m,0}^m(x) + O(\epsilon) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (III.25)$$

donde hemos dividido por  $\epsilon^{t'}$  la primera ecuación y por  $\epsilon^{m+1}$  la segunda.

Los ceros de la ecuación (25), cuando  $\epsilon = 0$ , están determinados por el conjunto de puntos  $\{x_i, z_i\}$  tal que  $\Omega_{i^t+m,0}^m(x_i) = 0$  y  $z_i - \Theta_{m,0}^m(x_i)/n = 0$ , con  $i = 1, \dots, k$ . El valor de  $k$  es menor o igual a dos veces el m.a. de  $\Omega_{i^t+m,0}^m(x)$ , es decir  $k \leq 2(t' + m + 1)$ .

Cuando los ceros de la ecuación (25), con  $\epsilon = 0$ , son simples, entonces por el teorema de la función implícita podemos asegurar que el sistema de ecuaciones de (25) tiene  $k$  ceros si  $0 \leq \epsilon \ll 1$ .

Los ceros de (25) son simples, siempre y cuando el determinante del jacobiano de (25), para  $\epsilon = 0$  y coordenadas  $(x_i, z_i)$  es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \Omega_{i^t+m,0}^m(x) \\ n & \frac{\partial}{\partial x} \Theta_{m,0}^m(x) \end{vmatrix} \Big|_{(x,z)=(x_i,z_i)} = -n \frac{\partial}{\partial x} \Omega_{i^t+m,0}^m(x) \Big|_{x=x_i} \neq 0$$

Tomemos el caso de tener un cero de multiplicidad  $s \leq k$  en la ecuación (25) para  $\epsilon = 0$ . Podemos mostrar que el número de ceros en (25), para  $0 < \epsilon \ll 1$  es  $k$ . En efecto, supongamos que  $x_i$  es un cero de multiplicidad  $s$  de la primera ecuación. Hacemos el cambio de variable  $\gamma = x - x_i$  y  $\delta = z - \Theta_{m,0}^m(x_i)/n$  en (25). Expandiendo en series de potencias de  $\gamma$ ,  $\epsilon$  y  $\delta$  en (25), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_s \gamma^s + a_{s+1} \gamma^{s+1} + \dots + \epsilon(b_{0,0} + b_{1,0} \delta + b_{0,1} \gamma + \dots) + O(\epsilon^2) = 0 \quad , \quad (III.26)$$

$$n\delta + c_{0,1} \gamma + \dots + \epsilon(d_{0,0} + d_{1,0} \delta + d_{0,1} \gamma + \dots) + O(\epsilon^2) = 0 \quad . \quad (III.27)$$

donde  $a_i, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{R}$ .

En la ecuación (26) observamos que  $\gamma$  comienza con la potencia  $s$  puesto que  $(x_i, z_i)$  tienen  $s$  ceros múltiples, por lo cual:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} \Omega_{i^t+m,0}^m(x) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, s-1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \Omega_{i^t+m,0}^m(x) \Big|_{x=x_i} \neq 0 \quad .$$

la variable radial  $\xi_m$ . Estos términos podrían ser idénticamente nulos así como todos los demás hasta orden  $\epsilon^m$ . De esta forma  $\xi_m$  sólo dependería de términos de orden igual o mayor que  $\epsilon^{m+1}$ . Si lo anterior es posible, entonces la diferencia entre  $F_m^n - R_p$  y la identidad es de orden  $O(\epsilon^{m+1})$  en  $A_m$ :

$$\|(F_m^n - R_p) - \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^{m+1})$$

Por lo tanto nos interesa determinar el número máximo de transformaciones  $\{\Phi_i\}_{i=1}^{m-1}$  tales que  $F_m^n$  difiera de la identidad del orden  $O(\epsilon^{m+1})$ . Esto significa que si  $\|(F_m^n - R_p) - \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^{m+1})$  entonces  $\|(\Phi_{m+1}^{-1} \circ F_m^n \circ \Phi_{m+1} - R_m) - \text{Id}\|_{A_m} \sim O(\epsilon^m)$ . De esta manera verificaríamos que  $F_m^n$  es una forma cuasiresonante.

La proposición siguiente nos indica el valor de  $m$  para el cual obtenemos la forma normal cuasiresonante de  $F^n$ . La demostración de esta proposición está basada en que  $F$  es una aplicación tipo twist y por lo tanto debe cumplir todas las propiedades descritas en el capítulo II.

Finalmente debemos notar que  $F_m^n$  es un twist en  $A_m$ , ya que por (13) tenemos:

$$\frac{\partial x_m}{\partial \xi_m} = \epsilon^{m+1} n + O(\epsilon^{m+2}) > 0 \quad \text{si } (x, \xi_m) \in A_m,$$

para  $\epsilon$  suficientemente pequeño.

**Proposición III.12** La aplicación  $F^n$  es conjugada a la forma normal cuasiresonante  $F_m^n$ :

$$\text{Si } n \text{ es par: } \begin{cases} x = x + \epsilon^{\frac{n}{2}-1} \Omega_{n-1,0}(x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}}) \\ z = x + p + \epsilon^{\frac{n}{2}+1} (nz - \Theta_{\frac{n}{2}-1,0}(x)) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+2}) \end{cases}, \quad (\text{III.23})$$

$$\text{Si } n \text{ es impar: } \begin{cases} x = x + \epsilon^{\frac{n-1}{2}} \Omega_{n-1,0}(x) + O(\epsilon^{\frac{n+1}{2}}) \\ z = x + p + \epsilon^{\frac{n+1}{2}} (nz - \Theta_{\frac{n-1}{2},0}(x)) + O(\epsilon^{\frac{n+3}{2}}) \end{cases},$$

donde  $\xi_m \equiv x$ ,  $m = \frac{n}{2}$  si  $n$  es par y  $m = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar. Además hemos definido  $\Omega_{n-1,0}(x) \equiv \Omega_{n-1,0}^m(x)$  y  $\Theta_{m,0}(x) \equiv \Theta_{m,0}^m(x)$ . El término periódico  $\Omega_{n-1,0}(x)$  no puede ser eliminado por alguna transformación del tipo  $\Phi_m: \xi_m = \frac{1}{n} \Theta_{m,0}^m(x) + \epsilon \xi_{m+1}$ .

**Demostración proposición 12:** Nuestro objetivo es mostrar que después de  $m$  transformaciones, con  $m < n$ , la aplicación (13) con  $m = m$  se reduce a la aplicación (23). La aplicación (13) la podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} x &= \xi_m - \sum_{t=-m}^0 \epsilon^t \Omega_{t+m,0}^m(x) + - \sum_{t=1}^m \epsilon^t x \Omega_{t+m,(m+1)}^m(x) + - \sum_{t=1}^m \epsilon^t \Omega_{t+m,0}^m(x) + \\ &\quad + \sum_{t=m+1}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t-m}{2} \rfloor} x^s \Omega_{t+m,(m+1),s}^m(x), \\ x &= p + x - \epsilon^{m+1} \left( nx + \sum_{t=m}^{\infty} \epsilon^{t-m} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} x^i \Theta_{t,(m+1),i}^m(x) \right), \end{aligned}$$

así, demostraremos que los primeros tres sumatorios de  $x$  son idénticamente nulos y que  $\Omega_{n-1,0}^m(x) \equiv \Omega_{t+m,0}^m(x)$  no es nulo.

La demostración la hacemos en tres pasos. En la primera parte mostramos que  $\Omega_{t+m,0}^m(x) \equiv 0$  si  $-m \leq t \leq 0$ . En la segunda parte, comprobamos que  $\Omega_{t+m,(m+1)}^m(x) \equiv 0$  para  $1 \leq t < m$

Tanto (26) como (27) son ecuaciones analíticas en  $\gamma$ ,  $\epsilon$  y  $\delta$ . Aplicando el teorema de la función implícita en (27), vemos que localmente existe una bola en el espacio  $(\gamma, \epsilon)$  tal que  $\delta = \delta(\gamma, \epsilon)$ , donde  $\delta(\gamma, \epsilon)$  es una función analítica en  $\delta$  y  $\epsilon$ .

Como  $\delta(\gamma, \epsilon)$  es analítica, la podemos expandir en series de potencias de  $\gamma$  y  $\epsilon$ , tal que:

$$\delta(\gamma, \epsilon) = \epsilon_{0,1}\gamma + \epsilon_{1,0}\epsilon + \dots$$

Por otro lado, en la ecuación (26) vemos que  $\gamma$  debe ser del orden  $O(\epsilon^{1/s})$  para que se anulen todos los términos.

Supongamos ahora que el sistema (26), (27) tiene más de  $s$  ceros reales para algún  $\epsilon \neq 0$ . Esto significa que la derivada de orden  $s$  de (26) se debe anular para un  $\gamma$  intermedio, lo cual es un absurdo porque la derivada de orden  $s$  de (26) es  $s!a_k + O(\gamma, \epsilon)$ . Por lo tanto, el sistema (26) y (27) tiene a lo más  $k$  ceros. Así concluimos que (25) tiene a lo más  $k$  ceros para  $\epsilon \neq 0$ .

Del razonamiento anterior podemos concluir que la aplicación (24) tiene  $k$  puntos fijos en el anillo  $A_m$ . Considerando que la aplicación (24) es conjugada a  $F^n$  en una banda estrecha contenida en  $A_0$ , significa que  $F^n$  tiene en  $A_0$   $k$  puntos fijos, los cuales corresponden a una o varias órbitas periódicas de período igual o menor que  $n$  del tipo monótono.

Como  $k < 2\bar{m} < 2n$ , entonces la órbita periódica debe tener período menor a  $n$ , de otra manera deberían existir al menos  $2n$  puntos periódicos de período  $n$ . Considerando que el período es menor que  $n$  y que es órbita monótona periódica, llegamos a una contradicción, ya que por hipótesis, en el anillo  $A_0$ , toda órbita periódica monótona tiene al menos período  $n$  (por ser  $F$  un twist y por lo tanto las órbitas periódicas monótonas están bien ordenadas, sección II.5).

Finalmente, si  $\bar{m} < n$ , concluimos que  $\Omega_{i+m,0}^m(x) \equiv 0$  para  $-\bar{m} \leq t \leq 0$ , en caso contrario caemos en la contradicción antes mencionada.

Segundo paso:

Dado que  $\bar{m} < n$ , verificamos que las funciones periódicas  $\Omega_{i+m,0}^m(x)$  son idénticamente nulas si  $t \leq 0$ . Por lo tanto, la aplicación (13) la reducimos a:

$$z = z - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{i+\bar{m}}{n} \rfloor} z^s \Omega_{i+m,(m+1),s}^m(x), \quad (\text{III.28})$$

$$z = p + z - \epsilon^{m+1} \left( n z + \sum_{i=m}^{\infty} \epsilon^{i-m} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i+1}{n} \rfloor} z^l \Theta_{i,(m+1),l}^m(x) \right),$$

La aplicación (28) debe ser conservativa, puesto que  $F$  lo es (las transformaciones  $\Phi_m$  solamente reescalan la medida). Por lo tanto, el determinante del jacobiano de la aplicación (28) debe ser 1. Calculando el jacobiano:

$$\left| \begin{array}{cc} 1 - \sum_{i=1}^m \epsilon^i \Omega_{i+m,(m+1)}^m(x) + O(\epsilon^{m+1}) & \epsilon \frac{\partial}{\partial z} (z \Omega_{m+1+m,(m+1)}^m(x) + \Omega_{m+1+m,0}^m(x)) + O(\epsilon^2) \\ n \epsilon^{m+1} + O(\epsilon^{m+2}) & 1 - \epsilon^{m+1} \frac{\partial}{\partial z} \Theta_{m,0}^m(x) + O(\epsilon^{m+2}) \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^m \epsilon^i \Omega_{i+m,(m+1)}^m(x) + O(\epsilon^{m+1})$$

Como el jacobiano debe ser igual a 1 para todo valor de  $x$  y  $\epsilon$ , significa que  $\Omega_{t+m, (m+1)}^m(x) \equiv 0$  para  $t = 1, \dots, \bar{m}$ .

Tercer paso

La aplicación (13) la hemos reducido a:

$$z_m = z - \sum_{t=1}^{\bar{m}} \epsilon^t \Omega_{t+m, 0}^m(x) + \sum_{t=m+1}^{\infty} \epsilon^t \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{t-m}{2} \rfloor} z^s \Omega_{t+m, (m+1), s}^m(x), \quad (\text{III.29})$$

$$z = p + z - \epsilon^{m+1} \left( n z + \sum_{t=m}^{\infty} \epsilon^{t-m} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{t-m}{2} \rfloor} z^l \Theta_{t, (m+1), l}^m(x) \right).$$

Los argumentos del primer paso los podemos repetir en la aplicación (29). Así podemos mostrar que las funciones  $\Omega_{t+m, 0}^m(x)$  son idénticamente nulas para todo valor de  $t$  tal que  $t + \bar{m} + 1 < n$ .

Como la primera función periódica no nula la tenemos para  $t + \bar{m} + 1 = n$ , donde  $\bar{m} < n$  y  $t < \bar{m} + 1$  (para que a orden  $\epsilon^t$  no tengamos términos de  $z$ ), el valor de  $\bar{m}$  queda determinado por  $n - 2 < 2\bar{m}$ . El valor mínimo de  $\bar{m}$  es  $\bar{m} = \frac{n}{2}$  si  $n$  es par y  $\bar{m} = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar. El valor de  $t$  es por lo tanto  $t = \frac{n}{2}$  si  $n$  par y  $t = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  impar.

Finalmente, podemos escribir a (13), con  $m = \bar{m} < n$ , como la aplicación (23), donde  $\Omega_{n-1, 0}(x)$  es una función que no es idénticamente nula. □

**Nota III.13** En la aplicación (23), los términos de orden  $O(\epsilon^{\frac{n}{2}-1})$  si  $n$  es par (respectivamente  $O(\epsilon^{\frac{n-1}{2}})$  si  $n$  es impar) en  $z$  no dependen de  $x$ . Por lo tanto, no existe transformación de la forma  $\xi_m = \zeta_{m+1}(x) + \epsilon \xi_{m+1}$  (donde  $\xi_m = z$ ) que elimine los términos de dicho orden. Esto significa que la aplicación (23) es una forma normal cuasiresonante de  $F^n$ .

Una vez que hemos obtenido la aplicación (23), nos interesa mostrar que la función periódica  $\Omega_{n-1, 0}(x)$  posee un solo armónico. Este armónico es precisamente el m.a., es decir  $n$ . Para demostrar lo anterior tenemos el siguiente lema:

**Lema III.14** La aplicación (23) la podemos expresar como:

$$z_n = z_n + \epsilon^{\frac{n}{2}} \Omega_{n-1, 0}(x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) \quad (\text{III.30})$$

$$z = p + z + \epsilon^{\frac{n}{2}} n z_n + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1})$$

**Demostración lema 14:** Proponemos las siguientes transformaciones:

$$z = \frac{1}{n} \Theta_{m, 0}^m(x) + \frac{1}{\epsilon} z_n \quad \text{si } n \text{ es par,}$$

$$z = \frac{1}{n} \Theta_{m, 0}^m(x) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} z_n \quad \text{si } n \text{ es impar,}$$

donde  $\bar{m}$  está definida en el final de la demostración de la proposición 12.

Entonces, al substituir la transformación anterior en la ecuación (23),  $z$  se escribe de la siguiente forma:

$$z = p + z + \epsilon^{\frac{n}{2}} n z_n + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1})$$

Ahora, para  $n$  par,  $x_n$  lo expresamos en términos de  $x_0$ , donde obtenemos:

$$x_n = \frac{1}{\epsilon} x_0 + \frac{1}{n} \Theta_{n,0}^n(x) = \frac{1}{\epsilon} x_0 + \frac{1}{n} \Theta_{n,0}^n(x) + \epsilon^{\frac{n}{2}-1} \Omega_{n-1,0}(x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) .$$

Desarrollando  $\frac{1}{n} \Theta_{n,0}^n(x)$  en serie de potencias de  $x$  obtenemos que  $\frac{1}{n} \Theta_{n,0}^n(x) = \frac{1}{n} \Theta_{n,0}^n(x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}})$ , con lo cual,  $x_n$  lo reescribimos de la siguiente forma:

$$x_n = x_0 + \epsilon^{\frac{n}{2}} \Omega_{n-1,0}(x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) .$$

El caso de  $n$  impar se obtiene de forma análoga. □

**Proposición III.15** La aplicación (30) es de la forma:

$$x_n = x_0 + \epsilon^{\frac{n}{2}} \delta \sin(2\pi n x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) \tag{III.31}$$

$$z = p + x + \epsilon^{\frac{n}{2}} n x_0 + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1})$$

**Demostración proposición 15:** Busquemos los puntos fijos de la aplicación (30) proyectados sobre el cilindro. Buscamos el conjunto de puntos  $\{(x, z)\}$  que cumplan que  $z = x$  y  $z - p = x$ . Dividiendo a (30) por  $\epsilon^{\frac{n}{2}}$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Omega_{n-1,0}(x) + O(\epsilon) = 0 \quad , \quad n x + O(\epsilon) = 0 . \tag{III.32}$$

Seguindo el mismo razonamiento de la proposición 12, el sistema (32) debe tener  $2n$  ceros, puesto que el sistema (30) debe poseer  $2n$  puntos fijos.

Supongamos que  $\Omega_{n-1,0}(x)$  tiene una expansión en serie de Fourier de la forma:

$$\Omega_{n-1,0}(x) = \sum_{l=0}^n a_l \sin(2\pi l(x - \delta_l)) ,$$

donde  $\delta_l$  es una fase y  $a_l \in \mathbb{R}$  que no depende de  $\epsilon$ . Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $F$  es muy próximo a un twist integrable, de tal forma que en la banda  $A_n$ ,  $F^n$  debe tener  $2n$  puntos fijos  $(x_i, z_i)$  equiespaciados entre  $0$  y  $2\pi$  (es decir,  $x_i \rightarrow x \frac{i}{n}$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  con  $i = 1, \dots, 2n$ ). Por lo tanto, haciendo un corrimiento en  $x$  ( $x \rightarrow x + \delta_n$ ) obtenemos que el m.a. de  $\Omega_{n-1,0}(x)$  tiende a cero cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\forall i = 1, \dots, 2n \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sin(2\pi n x_i) \rightarrow 0 .$$

Por lo tanto, si  $(x_i, z_i)$  son puntos fijos de (30), la suma de los restantes armónicos de  $\Omega_{n-1,0}$  debe anularse en dichos puntos cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\forall i = 1, \dots, 2n \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{n-1} a_l \sin(2\pi l(x - \delta_l + \delta_n)) \rightarrow 0 ,$$

lo cual es un absurdo porque una función con m.a.  $(n-1)$  no puede tener  $2n$  ceros. De aquí concluimos que  $a_l \equiv 0$  para  $l = 1, \dots, n-1$ . Finalmente, renombrando  $a_n \equiv \delta$ , obtenemos la aplicación (31). □

**Proposición III.16** En el anillo  $A_m = S^1 \times [-1, 1]$  y  $(x, z) \in A_m$ , las órbitas de la aplicación (31) están contenidas, hasta orden  $O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1})$ , dentro de la gráfica de las órbitas de la ecuación diferencial  $\ddot{x} = -\hat{a} \sin(2\pi n x)$ , donde  $x \in S^1$  y  $\hat{a} \in \mathbb{R}$ .

De esta forma, la aplicación (31) se puede interpretar como la aplicación a tiempo  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  del flujo hamiltoniano:

$$H = \frac{n}{2} z^2 - \frac{\hat{a}}{2\pi n} \cos(2\pi n x),$$

donde  $x$  es el momento canónico.

**Demostración proposición 16:** Tomemos la aplicación (31) proyectada sobre el cilindro:

$$z_0 = z_0 + \epsilon^{\frac{1}{2}} \hat{a} \sin(2\pi n x) + O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1}), \quad (\text{III.33})$$

$$x = x + \epsilon^{\frac{1}{2}} n z_0 + O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1}).$$

Consideremos el flujo tiempo  $t = \epsilon^{\frac{1}{2}}$  del hamiltoniano  $H$ , el cual escribimos como:

$$z(t = \epsilon^{\frac{1}{2}}) = z(t = 0) + \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} + O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1}), \quad (\text{III.34})$$

$$x(t = \epsilon^{\frac{1}{2}}) = x(t = 0) + \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} + O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1}).$$

Si identificamos  $\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} \equiv \hat{a} \sin(2\pi n x)$  y  $\frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \equiv n z$ , obtenemos una aplicación similar, hasta orden  $O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1})$ , a la aplicación (33). Si (34) lo consideramos un flujo hamiltoniano:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial x} = n z, \quad \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial z} = \hat{a} \sin(2\pi n x)$$

obtenemos entonces el hamiltoniano  $H$ , cuya ecuación de movimiento es:

$$\ddot{z} = -n \hat{a} \sin(2\pi n x). \quad (\text{III.35})$$

□

**Nota III.17** La ecuación diferencial (35) tiene un retrato fase igual a  $n$  péndulos sobre la banda  $A_0$ , tal como se muestra en la figura 1. La amplitud máxima de las separatrices es:

$$\Delta = \frac{2}{n} \sqrt{\hat{a}}.$$

**Corolario III.18** Respecto al anillo original  $A_0$ , con coordenadas  $(x, y)$ , la amplitud de la resonancia de la forma normal cuasiresonante (31) es:

$$\Delta_{\pm} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n\pi} \sqrt{\hat{a}}.$$

**Demostración corolario 18:** Sabemos que  $F^n$  se ha transformado en (23) por medio de  $\tilde{m} = \frac{n}{2}$  (resp.  $\tilde{m} = \frac{n-1}{2}$ ) transformaciones si  $n$  es par (resp. impar), las cuales reescalán la variable radial en un factor de  $\epsilon$  cada una.

Identifiquemos la amplitud de resonancia de (31) con la máxima amplitud de las separatrices de la EDO (35). Por lo tanto, la amplitud de resonancia de la forma normal cuasiresonante (31) respecto al anillo  $A_0$  es:

$$\Delta_{\pm} = \epsilon^{\tilde{m}} \epsilon^{-\frac{1}{2}} \Delta = \epsilon^{\tilde{m}} \frac{2}{n} \epsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\hat{a}},$$

donde  $r = 1$  (resp.  $r = 2$ ) si  $n$  es par (resp. impar). Como:

$$\bar{m} - \frac{r}{2} = \begin{cases} \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(2) = \frac{n}{2} - 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2}(1) = \frac{n}{2} - 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente,  $F^n$  se transforma en  $F_1^n$  bajo un escalado en la coordenada radial de orden  $\epsilon$ , como  $2\pi y = \frac{x}{n} + \epsilon \xi_1$ . Obtenemos así la amplitud de resonancia como:

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n\pi} \sqrt{\tilde{a}}.$$

□

### III.6 Cálculos explícitos de resonancias de orden bajo.

En esta sección mostramos algunos resultados relativos a la máxima amplitud de resonancia con número de rotación  $\frac{p}{n}$  en la aplicación standard. Utilizando la teoría desarrollada en la sección anterior, podemos estimar dichas amplitudes para valores de  $n$  relativamente pequeños, como por ejemplo 3, 4 y 6. Estos resultados los comparamos con cálculos seminuméricos, para los cuales determinamos la máxima separación de las variedades estable e inestable de un punto periódico hiperbólico. Los resultados coinciden con la precisión esperada.

Para estimar  $\Delta_{\frac{1}{2}}$  con  $\frac{p}{n} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$ , calculamos primeramente la expresión de  $F^n$  hasta un orden del parámetro  $K \equiv \epsilon$  igual a  $O(\epsilon^n)$  en ambas coordenadas. Esto implica calcular explícitamente los coeficientes  $g_s(k, l)$  (definidos en la sección 3) para luego determinar las funciones  $G_s^{(r)}(x, y)$  hasta orden  $r \leq n$  y  $s \leq n$ .

A continuación, calculamos las transformaciones que llevan de  $F^n$  a la forma cuasiresonante  $F_{\bar{m}}^n$  (con  $\bar{m} = \frac{n}{2}$  si  $n$  es par y  $\bar{m} = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar). Esta última aplicación tiene la forma expresada en (23), con lo cual podemos calcular directamente el coeficiente de  $\tilde{a}$ . Siguiendo el corolario 18, podemos determinar la amplitud de resonancia  $\Delta_{\frac{1}{2}}$ .

Para verificar las estimaciones obtenidas de  $\Delta_{\frac{1}{2}}$  a partir de la forma cuasiresonante, calculamos la máxima distancia entre los primeros segmentos de la variedades invariantes del punto periódico hiperbólico con número de rotación  $\frac{p}{n}$ , a esta amplitud la denotamos como  $\hat{\Delta}_{\frac{1}{2}}$  (ver figura 2).

El procedimiento para calcular  $\hat{\Delta}_{\frac{1}{2}}$  es el siguiente:

- i. Calcular la órbita periódica monótona del tipo hiperbólico, cuyo número de rotación es  $\frac{p}{n}$ , para un valor del parámetro  $\epsilon$ . Al menos dos de los puntos de la órbita pertenecen a una línea de simetría principal (ver sección II.3).
- ii. Determinar el primer segmento de la variedad invariante. Esto significa que debemos encontrar alguna función  $\nu(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cuya gráfica coincida con la variedad invariante  $y = \nu(x)$ . Esta función coincide con la primera lengua de la variedad invariante (ver definición en sección IV.3). Para determinar  $\nu(x)$ , utilizamos el método descrito en la sección IV.4, con el cual se puede calcular  $\nu(x)$  como un polinomio de  $x$ .
- iii. En el entorno del punto elíptico, calculamos la diferencia de  $\nu(x)$  de la variedad estable e inestable con lo cual podemos estimar  $\hat{\Delta}_{\frac{1}{2}} = \max_x |\nu_{\text{estable}}(x) - \nu_{\text{inestable}}(x)|$ .

Para un número de rotación  $\frac{p}{n}$ , calculamos  $\hat{\Delta}_{\frac{p}{n}}$  para varios valores de  $\epsilon \in (0, \frac{1}{2}]$  distribuidos logarítmicamente en el intervalo. Al conjunto de puntos  $(\epsilon_i, (\hat{\Delta}_{\frac{p}{n}})_i)$  le ajustamos una curva de tipo  $a\epsilon^b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  los parámetros de ajuste.

Expandiendo  $\nu(x)$  como un polinomio de grado 10, calculamos  $\hat{\Delta}_{\frac{p}{n}}(\epsilon)$  para números de rotación  $\frac{p}{n} = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$ . La función ajustada de  $\hat{\Delta}_{\frac{p}{n}}(\epsilon)$  la comparamos con  $\Delta_{\frac{p}{n}}(\epsilon)$ , el resultado lo mostramos en la siguiente tabla:

$\frac{p}{n}$	$\hat{\Delta}_{\frac{p}{n}}$	$\Delta_{\frac{p}{n}}$ forma cuasiresonante	$\Delta_{\frac{p}{n}}$ numérico
1/3	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{12\pi} \epsilon^{3/2} \approx 0.0375132 \epsilon^{3/2}$	$0.037538 \epsilon^{1.5009}$
1/4	$\frac{5}{48}$	$\frac{\sqrt{15}}{48\pi} \epsilon^2 \approx 0.0256835 \epsilon^2$	$0.025684 \epsilon^{1.9999}$
1/6	$\frac{297}{1280}$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{93}{1280}} \epsilon^3 \approx 0.0255548 \epsilon^3$	$0.02549 \epsilon^{2.996}$

### III.7 Composición de transformaciones.

En la sección 4 mostramos como se obtiene la transformación  $\Phi_m : A_{m-1} \rightarrow A_m$  a partir de la aplicación  $F_m^n$ . Con la transformación  $\phi_m = \Phi_m \circ \Phi_{m-1} \circ \dots \circ \Phi_1$  obtenemos la forma normal cuasiresonante a partir de la aplicación (13).

Con la transformación  $\phi_m$  podemos definir una función tal, que sobre la gráfica de dicha función están los puntos periódicos con número de rotación  $\frac{p}{n}$  hasta orden  $O(\epsilon^{m+1})$ . Como  $\phi_i$  no modifica la coordenada angular  $x$ , entonces la función antes citada la definimos como:

$$y = \phi_m(x)$$

Quando  $n$  es suficientemente grande, la gráfica de la función  $y = \phi_m(x)$  se aproxima a la gráfica de la curva invariante (si es que existe) cuyo número de rotación es cercano a  $\frac{p}{n}$ . Esto sucede porque el límite de estados monótonos  $\{x\}$ , cuyo número de rotación converge a  $\rho$ , es un estado monótono (sección II.9).

Es plausible esperar que el límite de  $\phi_m$ , con  $n \rightarrow \infty$ ,  $\frac{p}{n} \rightarrow \rho$ , sea una serie convergente en  $\epsilon$  siempre y cuando exista la IRC con número de rotación  $\rho$ . En cambio, si el límite es un conjunto minimal tipo cantoriano, la serie  $\phi_m$  debe diverger si  $n \rightarrow \infty$ . Si suponemos que el cantoriano debe estar contenido en la gráfica de la función  $\phi_m$  con  $n \rightarrow \infty$ , entonces es natural pensar que dicha gráfica tenga infinitas discontinuidades, las cuales deben coincidir con los extremos de los agujeros del cantoriano.

Por esta razón resulta interesante estudiar la transformación  $\phi_i$  y determinar la forma explícita que tiene a partir de los términos de la aplicación inicial  $F_1^n$ .

**Proposición III.19** La transformación  $\phi_m$ , que conjuga a la aplicación  $F^n$  con la forma normal

cuasiresonante  $F_m^n$  (con  $m$  definido en la proposición 12) es de la forma:

$$\phi_m : \xi_1 = \sum_{r=0}^{m-1} e^r \zeta_{r+1}(x) + e^m x,$$

donde  $\zeta_r$  está definido como:

$$\zeta_r = \sum_{s=1}^r -\left(-\frac{1}{n}\right)^s \left[ \sum_{D_{s,r}} \prod_{i=1}^s g_{a_i, b_i}(x) \right],$$

donde el conjunto de índices  $D_{s,r}$  se define como:

$$D_{s,r} = \left\{ \{a_i, b_i\}_{i=1}^s \mid (r-1) \geq a_i \geq b_i \geq 0, \sum_{i=1}^s (a_i + b_i) = r \right\},$$

y además, las funciones  $g_{a_i, b_i}$  están definidas en el corolario 10.

**Demostración proposición 19:** Escribimos  $\Pi_1 F_{m+1}^n$  como en (20):

$$z = z + e^{m+2} (n \xi_m - \sum_{v=m+1}^{\infty} e^{v-m-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{v+1}{n} \rfloor} \sum_{l=r}^{\lfloor \frac{v+1}{n} \rfloor} \alpha_r^l (\Theta_{m,0}^m(x))^{l-r} \Theta_{v-r, (m+1)l}^m(x)).$$

Definimos  $\Lambda_{v,r}^{m+1}(x)$  como:

$$\Lambda_{v,r}^{m+1}(x) = \sum_{l=r}^{\lfloor \frac{v+1}{n} \rfloor} \alpha_r^l (\Theta_{m,0}^m(x))^{l-r} \Theta_{v-r, (m+1)l}^m(x) \quad (\text{III.36})$$

La transformación que elimina los términos de orden  $O(e^{m+2})$  es generada por la función:

$$\Lambda_{m+1,0}^{m+1}(x) = \sum_{l=0}^1 \alpha_0^l (\Theta_{m,0}^m(x))^l \Theta_{m+1, (m+1)l}^m(x) \quad (\text{III.37})$$

La función  $\Lambda_{v,r}^{m+1}(x)$  la definimos para la forma normal  $\Pi_1 F_{m+1}^n$ , y está compuesta por funciones periódicas que pertenecen a  $\Pi_1 F_m^n$ . De la misma forma, podemos escribir  $\Lambda_{v,r}^{m+1}(x)$  en términos de las funciones periódicas que pertenecen a  $\Pi_1 F_{m-1}^n$ . Para esto, podemos utilizar (30) como una relación de recurrencia entre los términos de las funciones periódicas de  $\Pi_1 F_m^n$ , y las de  $\Pi_1 F_{m-1}^n$ .

Siguiendo con la recurrencia y renombrando las funciones periódicas de  $\Pi_1 F_m^n$  como  $\Theta_{a,b}^{m'}$ , obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Theta_{m+1,0}^{m+2}(x) &= \sum_{l=0}^1 \alpha_0^l \left( \sum_{s=0}^1 \alpha_s^l (\Theta_{m-1,0}^s(x))^s \Theta_{m,m_s}^m(x) \right)^l \times \\ &\times \sum_{k=l}^{\lfloor \frac{m+1+l}{n} \rfloor} \alpha_l^k (\Theta_{m-1,0}^m(x))^{k-l} \Theta_{m-l, mk}^m(x) \end{aligned}$$

Rearreglando los términos:

$$\Theta_{m+1,0}^{m+2}(x) = \sum_{k=0}^1 \alpha_0^k (\Theta_{m-1,0}^m(x))^k \Theta_{m,mk}^m(x) +$$

$$\alpha_0^1 \sum_{s=0}^1 \alpha_1^s \alpha_0^s (\Theta_{m-1,0}^m(x))^s \Theta_{m,m,s}^m(x) \Theta_{m-1,m}^m(x),$$

Siguiendo con la recurrencia:

$$\Theta_{m+1,0}^{m+2}(x) = \sum_{l=0}^1 \alpha_0^l (\Theta_{m-2,0}^{m-1}(x))^l \Theta_{m,(m-1)l}^{m-1}(x) +$$

$$\sum_{\substack{l+l'=2 \\ l' \geq 0}} \alpha_1^{l'} \alpha_0^l (\Theta_{m-2,0}^{m-1}(x))^l \Theta_{m-1,(m-1)l'}^{m-1}(x) (\Theta_{m-2,0}^{m-1}(x))^{l'-1} \Theta_{m-1,(m-1)l'}^{m-1}(x) +$$

$$\alpha_0^1 \alpha_1^1 \alpha_0^0 \sum_{\substack{l+l'=2 \\ l' > 0}} \alpha_1^l \alpha_1^{l'} \Theta_{m-2,0}^{m-1}(x) \Theta_{m,(m-1)l}^{m-1}(x) \Theta_{m-2,(m-1)l'}^{m-1}(x) +$$

$$\alpha_0^1 \alpha_1^1 \alpha_0^0 \sum_{l+l'+l''=2} (\alpha_0^l (\Theta_{m-2,0}^{m-1}(x))^l \Theta_{m-1,m-1}^{m-1}(x)) \times$$

$$\times (\alpha_1^{l'} \Theta_{m-2,0}^{m-1}(x) \Theta_{m-1,(m-1)l'}^{m-1}(x)) (\alpha_1^{l''} (\Theta_{m-2,0}^{m-1}(x))^{l''-1} \Theta_{m-2,(m-1)l''}^{m-1}(x)).$$

Continuando con esta recurrencia hasta orden  $m+2$ , obtenemos así la función  $\Theta_{m+1,0}^{m+2}(x)$  escrita en términos de las funciones periódicas de  $\Pi_1 F^m$ , las cuales denotamos como  $g_{i,j}(x)$ . La forma que obtenemos de  $\Theta_{m+1,0}^{m+2}(x)$  es entonces:

$$\Theta_{m+1,0}^{m+2}(x) = \sum_{s=0}^{m+1} \left(-\frac{1}{n}\right)^s \left[ \sum_{\rho,r} \prod_{i=1}^s g_{a_i, b_i}(x) \right], \quad (\text{III.38})$$

Por lo tanto  $\zeta_{m+2}(x) = \frac{1}{n} \Theta_{m+1,0}^{m+2}(x)$ . Cada transformación  $\Phi_{i+1}$  la podemos escribir como  $\xi_i = \zeta_{i+1}(x) + \epsilon \xi_{i+1}$ . Tomemos la composición de funciones  $\phi_m$ , esta transformación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^m \epsilon^{i-1} \zeta_i(x) + \epsilon^m \xi_m.$$

Así, al substituir las funciones  $\zeta_i(x)$  por (38) (con  $m+2 = i$ ) obtenemos la forma de  $\phi_m(x)$  propuesta. □

**Nota III.20** Consideremos la forma cuasiresonante  $F_m^n$ , la cual es conjugada a  $F^n$  via la transformación  $\phi_m$  tal que:

$$F^n \circ \phi_m = \phi_m \circ F_m^n.$$

Los puntos periódicos, con número de rotación  $\frac{p}{n}$ ; están contenidos en la gráfica de la función  $x(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \epsilon^r s_{r+1}(x)$  hasta orden  $O(\epsilon^m)$ . Esta función puede calcularse explícitamente a partir de la proposición 24 y de la ecuación (10):

$$g_{i,j} = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sum_{k,l,\dots} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} g_s(k,l) \begin{cases} \sin(-s \cdot \frac{p}{n} + s_0 x_m) \sigma_{r+3} \frac{(-s_0)^{2r}}{(2r)!} & j \text{ par} \\ \cos(-s \cdot \frac{p}{n} + s_0 x_m) \sigma_r \frac{(-s_0)^{2r+1}}{(2r+1)!} & j \text{ impar} \end{cases}$$

### III.8 Conclusiones.

Las formas normales no locales nos permiten estudiar la aplicación standard de forma sistemática. Como la forma cuasiresonante está asociada a un reescalado diferente, podemos determinar las interacciones entre las resonancias de orden distinto.

La amplitud de las resonancias está determinado por la magnitud del parámetro y el número de rotación asociado a la resonancia. La dependencia de  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  en la amplitud es un resultado típico de teoría de perturbaciones. En el caso de resonancias en el entorno de un punto elíptico se obtiene el mismo resultado [16].

Mackay estudió en forma numérica la amplitud de las resonancias en la aplicación standard [37]. El método utilizado es computar la diferencia de la funcional de acción  $W_{\frac{p}{n}+}$  y  $W_{\frac{p}{n}-}$ , donde  $\frac{p}{n}+$  y  $\frac{p}{n}-$  son estados monótonos minimales del tipo  $2\frac{p}{n}$ , los cuales corresponden a puntos homoclinicos de la variedad estable e inestable de los puntos periódicos hiperbólicos con número de rotación igual a  $\frac{p}{n}$  (sección II.8). Las órbitas homoclinicas son aproximadas por dos sucesiones de órbitas periódicas monótonas cuyo número de rotación es decreciente (resp. creciente) y tiene como límite la órbita monótona  $\frac{p}{n}$ . Estas órbitas son computadas numéricamente. Sus resultados muestran que para resonancias de orden menores a 100, la amplitud de la resonancia crece como  $\epsilon^{\frac{1}{2}}$  hasta valores del parámetro  $K \equiv \epsilon$  menores a  $3/2$ . La conjetura que formula Mackay es que el máximo de la amplitud de la resonancia se tiene cuando el residuo del punto hiperbólico periódico es  $\text{Res} = -2$ . Si  $-2 < \text{Res} < 0$ , la amplitud crece según la teoría de perturbaciones.

En nuestros resultados, el valor propio asociado a la resonancia es:

$$\lambda_{\frac{p}{n}} = 1 + n\epsilon \frac{n}{2} \sqrt{2\pi \bar{a}} + O(\epsilon^{\frac{3}{2}+1}),$$

y el residuo asociado es:

$$\text{Res}_{\frac{p}{n}} = \frac{2 - \lambda - \lambda^{-1}}{4} = -n^2 \frac{\pi \bar{a}}{2} \epsilon^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^{\frac{3}{2}+1}).$$

Aplicando la conjetura de Mackay, la forma normal cuasiresonante es válida hasta el valor del parámetro:

$$\epsilon \equiv K < \left( \frac{4}{\pi \bar{a} n^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## Capítulo IV

# Rompimiento de Curvas Invariantes Rotacionales.

### IV.1 Introducción.

A lo largo de los capítulos II y III, hemos discutido la transición de un sistema hamiltoniano cuando es perturbado. Esta perturbación la consideramos suficientemente pequeña para que el sistema conserve la mayor parte de su estructura original, esto es, que gran parte de las curvas invariantes subsistan.

Cuando la amplitud de la perturbación va incrementándose, las curvas invariantes desaparecen dando origen a estructuras cantorianas (transición de órbitas  $1_p$  a  $2_p$  según clasificación de Katok, sección II.8). Una razón de el rompimiento de las IRC es el aumento de amplitud de las resonancias próximas al número de rotación de esta curva. Continuando con las ideas de KAM, el área ocupada por las resonancias aumenta y puede superar el área total del anillo que las contiene, así da origen al solapamiento de las resonancias. En estas circunstancias, las IRC no pueden sobrevivir como gráficas de funciones Lipschitz, así que se fragmentan en un número infinito (numerable) de partes. A pesar del rompimiento, las órbitas de estos estados persisten como conjuntos monótonos (sección II.5).

Es natural pensar que las IRC más robustas son aquellas que su número de rotación  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es mal aproximable por racionales. Esto significa que las resonancias asociadas a su entorno están más alejadas a medida que  $\rho$  es más irracional. El teorema del twist incluye en sus hipótesis la mala aproximación de  $\rho$  por racionales, puesto que asegura la convergencia de las series que definen la IRC (asegura la solución de las ecuaciones homológicas, evitando la aparición de denominadores peligrosamente pequeños).

Tomemos una familia uniparamétrica de aplicaciones definidas en el cilindro y con parámetro  $K$ . Al seguir la evolución del sistema cuando el valor del parámetro aumenta, pueden desaparecer todas las IRC. Podemos interpretar este fenómeno como el solape de todas las resonancias con sus vecinas. Desde el punto de vista de teoría de perturbaciones, significa que los pequeños denominadores son inevitables, así que toda serie diverge. Al valor del parámetro para el cual desaparece la última IRC le llamamos valor crítico.

El significado del valor crítico del parámetro  $K_C$ , desde un punto de vista dinámico, es que la zona de inestabilidad de Birkhoff es global si  $K > K_C$ . Desde un punto de vista físico, es importante este valor porque determina el inicio de la difusión de órbitas a través de todo el espacio fase (en este caso, el cilindro). Debemos notar que lo anterior no significa *caos global* o hiperbolicidad del sistema, puesto que subsisten infinitos conjuntos invariantes que están acotados por curvas invariantes homotópicas a un punto. Más bien, para  $K > K_C$ , existen órbitas cuya coordenada radial no está acotada si se itera infinitamente.

Algunos sistemas dinámicos presentan un fenómeno de reestabilización: algunas IRC pueden reaparecer al aumentar el valor del parámetro. En el espacio de parámetros, existen ventanas donde el sistema es estable [7].

Centrando nuestra atención en la aplicación standard, sabemos que para valores muy pequeños del parámetro existen IRC, lo cual se demuestra utilizando teoría KAM [32,50,51,57]. En contraste al caso anterior, si tomamos valores del parámetro suficientemente grande,  $K > 10$ , el sistema adquiere una estructura hiperbólica en el entorno de las órbitas monótonas [38]. Al mismo tiempo surgen los denominados modos (o islas) de aceleración que dan origen a cambios notables en la coordenada radial [36].

Analizando los argumentos anteriores, concluimos que existe un valor crítico del parámetro para el cual han desaparecido todas las IRC. Es, por lo tanto, muy importante poder estimar el valor crítico de  $K$ . Si consideramos un anillo sobre el cilindro, también es importante determinar la existencia de IRC para cierto valor del parámetro. Como un anillo define un intervalo de rotación, a medida que tomemos una banda más estrecha, el intervalo de rotación se reduce. Podemos entonces buscar los valores críticos del parámetro para el cual no existe IRC en dicha banda. De esta manera podemos determinar la existencia de IRC con un número de rotación específico, que está contenido en una banda arbitrariamente estrecha.

Actualmente existen gran variedad de métodos que permiten estimar el valor crítico de  $K$ . Estos criterios pueden ser globales o locales, formales o heurísticos. La mayoría de estos métodos se basan en las propiedades de las IRC de las aplicaciones tipo twist.

En este capítulo analizamos los métodos de detección de rompimiento de las IRC. En particular, estudiamos el método de la obstrucción desarrollado por nosotros. Este método es formal y permite estimar con precisión arbitraria límites superiores de la  $K$  crítica para un número de rotación específico.

La primera parte de este capítulo está dedicada a revisar diferentes métodos y criterios de detección de rompimiento de las IRC. A continuación definimos el método de la obstrucción de manera formal. La implementación de dicho método, para estudiar la aplicación standard, es presentada en la siguiente sección. Luego mostramos los resultados obtenidos numéricamente y ciertas propiedades de reescalamiento son discutidas aquí. Finalmente comparamos los otros métodos respecto al método de la obstrucción.

## IV.2 Métodos de evaluación del parámetro crítico.

Antes de introducir el método de la obstrucción hacemos una revisión de los criterios que actualmente existen para evaluar el valor crítico del parámetro. Estos métodos los podemos clasificar genéricamente en formales o heurísticos, globales o locales. Por método heurístico entendemos aquel criterio que indica, de manera no rigurosa, la existencia o desaparición de un IRC, en cambio, los métodos formales son rigurosos. Un método global indica la existencia de IRC en un intervalo de rotación amplio, el local permite estudiar una región en un intervalo arbitrariamente

estrecho.

Debemos añadir un comentario antes de pasar a analizar los diferentes métodos. Cuando nos referimos al parámetro crítico de la aplicación, no tiene porqué estar asociado a un IRC con número de rotación específico, podría corresponder a la desaparición simultánea de un número finito o infinito de curvas. Sin embargo, las experiencias numéricas muestran que existe una última IRC cuyo número de rotación es la razón áurea  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ . Este número irracional tiene la propiedad de ser el más mal aproximable por racionales. Esta conjetura es plausible respecto a la teoría KAM ( la convergencia de las transformaciones se asegura para un valor del parámetro mayor a otros casos debido a que se evitan los denominadores pequeños). En la teoría de formas normales no locales, las formas normales cuasiresonantes cuyo número de rotación converge a la razón áurea, se tiene que las resonancias están más alejadas entre ellas que para otro número de rotación. La separación entre las resonancias permite que su amplitud aumente un poco más (respecto a otros números de rotación), antes de que esta se solapen o interaccionen. Por último, la teoría de renormalización coincide en señalar que al razón áurea corresponde al IRC más robusto. Aún más, para cualquier intervalo de rotación, el último IRC corresponde a aquellos con número de rotación tipo noble ( es decir, en la expansión en fracciones continuas sus elementos son 1 a partir de un cierto lugar).

#### IV.2.1 Teoría KAM: Cotas inferiores.

Se puede recurrir a la teoría KAM para determinar el valor del parámetro  $K$  para el cual existen IRC. Utilizando el trabajo de Rüssman (sección II.12) sobre la aplicación standard, podemos obtener una estimación de  $K$ , para el cual existe IRC, del orden de  $K \sim 10^{-11}$ . Empíricamente sabemos que la  $K_C$  (parámetro crítico) es cercana a la unidad. Por otro lado, afinando las acotaciones sobre la aplicación standard en la teoría KAM, se pueden obtener mejores resultados. Herman utiliza el teorema de la curva desplazada en esta aplicación y obtiene un valor crítico igual a  $K \geq \frac{1}{34}$  sobre el IRC con número de rotación igual a la razón áurea [50]. Celletti y Chierchia construyen en forma explícita las IRC a partir de la teoría KAM, donde las estimaciones de las cotas son determinadas con ayuda del ordenador. En el caso de la IRC con número de rotación igual a la razón áurea, el parámetro crítico lo determinan para  $K \geq 0.65$  [51].

#### IV.2.2 Criterio del residuo.

En una aplicación del plano en el plano,  $F$ , tipo twist, toda sucesión de órbitas monótonas minimales del tipo  $1_2$ , cuyo número de rotación converge a  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  tiene como límite una órbita cuasiperiódica monótona con número de rotación  $\rho$ . Analizamos la estabilidad local de la sucesión de órbitas calculando el residuo correspondiente a cada una:

$$\text{Res}_{\frac{p_i}{q_i}} = \frac{(2 - \text{Traza}(DF^{n_i}))}{4},$$

siendo  $DF^{n_i}$  el jacobiano de  $F^{n_i}$  calculado en un punto de la órbita periódica con número de rotación  $\frac{p_i}{q_i}$ . Supongamos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} \rightarrow \rho$ . La conjetura de Greene es [4]:

- Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Res}_i \rightarrow 0$  existe IRC con número de rotación  $\rho$ .
- Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Res}_i \rightarrow \pm\infty$  No existe IRC con número de rotación  $\rho$ .
- Si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Res}_i \rightarrow \text{Cte.} \neq 0$  define el valor crítico del parámetro para el IRC con número de rotación  $\rho$ .

Es habitual tomar como sucesión de números de rotación  $\frac{p_i}{n_i}$  que convergen a  $\rho$  la sucesión obtenida del desarrollo en fracciones continuas de  $\rho$ : esto es, si  $\rho$  lo escribimos como:

$$\rho = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

con  $a_i \in \mathbb{N}^+$ , entonces definimos a  $\frac{p_i}{n_i}$  como:

$$\frac{p_i}{n_i} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_i}}}}$$

Por comodidad, la expansión en fracciones continuas la denotamos como:  $\rho = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  y  $\frac{p_i}{n_i} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$ . Esta expansión tiene las siguientes propiedades [40]:

- i.  $(\frac{p_i}{n_i} - \rho)(\frac{p_{i+1}}{n_{i+1}} - \rho) < 0$ .
- ii.  $|p_i n_{i+1} - p_{i+1} n_i| = 1$ .

El método de Greene para determinar el parámetro crítico  $K_C$  respecto a un número de rotación, consiste en fijar el valor del residuo en  $\text{Res} \frac{p_i}{n_i} = \frac{1}{4}$  y determinar el valor del parámetro  $K$  para el cual la órbita periódica  $\frac{p_i}{n_i}$  tiene este residuo (órbita de tipo elíptico). Para la aplicación standard y  $\rho$  igual a la razón áurea, este criterio da un valor de  $K_C \approx 0.971635406$ . El método de los residuos es heurístico y local.

Mackay extiende este criterio al caso de intervalos de rotación [39]. Tomemos dos órbitas periódicas con número de rotación igual a  $\frac{p}{n}$  y  $\frac{p'}{n'}$  con  $|pn' - p'n| = 1$ . Si  $|\text{Res}| \gg \frac{1}{4}$  o  $|\text{Res}'| \gg \frac{1}{4}$  entonces "probablemente" no existe IRC en el intervalo de rotación  $[\frac{p}{n}, \frac{p'}{n'}]$ . Este proceso puede iterarse al tomar los siguientes subintervalos,  $[\frac{p}{n}, \frac{p+p'}{n+n'}]$  y  $[\frac{p+p'}{n+n'}, \frac{p'}{n'}]$ , y a estos subintervalos les aplicamos el mismo criterio. El proceso se repite en cada subintervalo mientras  $\text{Res} \sim \frac{1}{4}$ . Este método de subdividir los intervalos define un árbol binario conocido como árbol de Farey.

#### IV.2.3 Criterio del cruce del cono.

Este método está fundamentado en la teoría de Aubry-Mather. El criterio se basa en que dos estados minimales distintos sólo se pueden cruzar una vez (según el lema fundamental de Aubry, sección II.9).

La idea consiste en tomar dos estados diferentes,  $x$  y  $x'$ . Si los estados son minimales, deben cumplir la siguiente relación:

$$\text{Si } x_m - x'_m \leq 0 \text{ y } x_{m+1} - x'_{m+1} > 0 \Rightarrow x_{m+l} - x'_{m+l} > 0 \quad \forall l > 1.$$

Utilizando esta idea, Mackay y Percival establecen el siguiente criterio [41]: Si  $x_m - x'_m \leq 0$ ,  $x_{m+1} - x'_{m+1} > 0$  y  $x_{m+l} - x'_{m+l} \leq 0$  para algún  $l > 1$ , entonces  $x$  o  $x'$  no pertenecen a ningún IRC. Para este criterio tomamos  $|x_m - x'_m|$  y  $|x_{m+1} - x'_{m+1}|$  suficientemente pequeños.

Este criterio puede expresarse de otra manera: Sea

$$D_+^0 = \min_{(x, x')} \frac{x_{m+1} - x'_{m+1}}{x_m - x'_m}$$

<sup>1</sup>Salvo  $a_0 \in \mathbb{Z}$ .

entonces, si

$$\frac{x_{m+l+1} - x'_{m+l+1}}{x_{m+l} - x'_{m+l}} < D_+^0,$$

para algún  $l > 1$ , implica que  $x$  y  $x'$  no son órbitas que pertenezcan a un IRC.

La razón de llamarle "método del cruce de cono" estriba en que  $x'_m$  define direcciones de los vectores del espacio tangente de  $x_m$ ; el segmento  $x_m x'_m$  corresponde a la proyección de un vector del espacio tangente de  $x_m$  sobre el cilindro. Dos de estos vectores definen un cono (ver figura 1). Si un vector dentro del cono superior se aplica sobre el cono inferior del espacio tangente del punto  $x_{m+l}$  con  $l > 1$ , entonces  $x$  no corresponde a un IRC.

Mather utilizó este criterio para la aplicación standard [27], analizando el valor del parámetro para el cual el criterio indica la no existencia de IRC con  $l = 2$ : si el parámetro  $K$  es mayor que un  $K'$ , entonces se cumple que  $x_m - x'_m \leq 0$  y  $x_{m+1} - x'_{m+1} > 0$  implica que  $x_{m+2} - x'_{m+2} \leq 0$  para todas las órbitas  $x$  y  $x'$ . El valor que estima Mather para  $K'$  es  $K' = \frac{1}{3}$ .

Mackay y Percival [41] implementaron un algoritmo formal para determinar el valor de  $K'$  con  $l > 2$ . Estudian el comportamiento de los vectores del espacio tangente de conjuntos de órbitas. Las órbitas están contenidas en un paralelepípedo que se aplican en el interior de otro mayor. Estiman un cono dentro de cada paralelepípedo  $(x_m, x_{m+1})$  fijando  $\delta x_m = x'_m - x_m = 0$ :

$$D^{+/-} = (\min / \max) 2\delta x_{m+1} + \frac{\partial f(x_{m+1})}{\partial x_{m+1}} \delta x_{m+1}.$$

Para la aplicación standard,  $f(x) = \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x)$  (ver figura 2). Al iterar el paralelepípedo se examina el comportamiento del cono iterado:

$$D_{i+1}^{+/-} = (\min / \max) 2\delta x_{m+i} + \frac{\partial f(x_{m+i})}{\partial x_{m+i}} \delta x_{m+i} + \frac{1}{D_i^{+/-}},$$

siendo  $D_i^{+/-}$  la máxima (resp. mínima) pendiente de los extremos del cono en el paralelepípedo  $l$ -ésimo  $(x_{m+i}, x_{m+i+1})$ . Si el cono  $l$ -ésimo queda invertido respecto al cono original, entonces no existe IRC dentro del paralelepípedo original. Mackay muestra que para  $K > \frac{63}{64}$  no existen IRC en la aplicación standard. Las iteraciones las realiza numéricamente.

Utilizando la forma de  $F^n$  descrita en la sección III.5, podemos aplicar directamente este criterio. Sea  $F^n$  como se describe en la proposición III.9, entonces tenemos que:

$$\delta x_{n+m} = n\epsilon - \sum_{t=0}^{\infty} K^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sum_{A_s, k, l} \left(\frac{1}{2}\right)^{\Sigma} G_s(k, l) \times \\ \times \left\{ \sin(s_s \rho + (s_s - s_{s-1}) x_m) \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r+s} \frac{(s_s \epsilon)^{2r}}{(2r)!} + \cos(s_s \rho + (s_s + s_{s+1}) x_m) \sum_{r=0}^{\infty} \sigma_r \frac{(s_s \epsilon)^{2r+1}}{(2r+1)!} \right\},$$

donde  $A_s, k, l$ ,  $s_s$  y  $G_s(k, l)$  están definidos en la proposición III.9, y  $x_{m+1} = x_m + \rho$ . Examinando los términos de orden  $\epsilon$ , con  $\epsilon \ll 1$ , obtenemos que:

$$T_\epsilon(n, k) = \left( n - \sum_{t=0}^{\infty} K^t \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sum_{A_s, k, l} \left(\frac{1}{2}\right)^{\Sigma - 2k} G_s(k, l) \cos(s_s \rho + (s_s - s_{s-1}) x_m) \right).$$

Entonces, si  $T_\epsilon(n, k) < 0$  para  $n = n'$  y  $K = K'$  no existe IRC para la clausura del conjunto de órbitas determinado por  $(x_m, x_{m+1} = \rho + x_m \epsilon)$ .

#### IV.2.4 Métodos formales.

Si guiendo con la teoría de órbita minimales de las aplicaciones tipo twist en el plano, Mather introduce la diferencia de la acción  $\Delta W_\rho$  que corresponde a la diferencia entre el estado minimax monótono con número de rotación  $\rho$  y el estado minimal monótono con el mismo número de rotación. Mather provó que  $\Delta W_\rho$  es una función continua sobre los irracionales ( $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) [28]. Si la diferencia de la acción  $\Delta W_\rho$  vale cero, Mather demuestra que existe IRC con el número de rotación  $\rho$ . En cambio, si  $\Delta W_\rho \neq 0$  implica que la órbita minimal es un cantoriano [42]. Si para un número de rotación  $\rho_0$  irracional con  $\Delta W_{\rho_0} = \epsilon > 0$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\rho \in (\rho_0 - \delta, \rho_0 + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  no existe IRC con ese número de rotación  $\rho$ . Esto resulta de la continuidad de  $\Delta W_\rho$  con  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Para determinar  $\Delta W_\rho$  con  $\rho$  irracional, se puede calcular  $\Delta W_{p/q}$  con  $\lim_{p_i/q_i \rightarrow \rho}$  (diferencia de acción entre órbitas periódicas hiperbólicas y elípticas). Sin embargo, aún no se conoce si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta W_{p_i/q_i}$  converge a  $\Delta W_\rho$  (módulo de continuidad).

En la aplicación standard no existen ventanas en el espacio de parámetros para el cual existen IRC excepto el comprendido entre  $(-K_C, K_C)$  con  $K_C$  calculada por Greene. Goroff mostró que para  $K > 2\sqrt{1 + \pi^2}$ , el conjunto de órbitas minimales tienen una estructura uniforme hiperbólica [38]. Esto significa que en cada punto de las órbitas minimales periódicas de periodo  $m \in \mathbb{N}$ , el espacio tangente es dividido por un cono, donde  $f^m$  aplica direcciones expansivas en expansivas y lo mismo para las contractivas.

Boyland y Hall utilizan la monotonía de las órbitas para dar un criterio de existencia de IRC [43]. La existencia de órbitas no monótonas en un intervalo de rotación implica la no existencia de IRC. Una órbita no monótona  $\{x\}$  suficientemente cercana una órbita con número de rotación irracional  $\{x'\}$  la debe cruzar más de una vez: si  $x_m < x'_m$  y  $x_{m+1} > x'_{m+1}$  entonces  $x_{m+1} < x'_{m+1}$ , lo cual implica que alguna de ellas necesariamente es no monótona. De igual manera, muestra que la existencia de órbitas minimales cantorianas (tipo  $2_\rho$  con  $\rho$  irracional) implica la existencia de órbitas no monótonas con número de rotación  $\frac{p}{q}$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{q_i} \rightarrow \rho$ . Esto determina la existencia de una zona de inestabilidad de Birkhoff.

#### IV.2.5 Solape de resonancia.

Este método está enfocado a flujos hamiltonianos de dos grados de libertad (o grado y medio) y fue desarrollado por Chirikov [36]. Sin embargo, puede ser utilizado para difeomorfismos por medio de una sección de Poincaré.

Sea un hamiltoniano  $H(I, \theta, t) = H_0(I) + H_1(I, \theta, t)$  con  $H_1$  periódico en  $\theta$  y  $t$ , el cual expresamos como una doble serie de Fourier:

$$H_1(I, \theta, t) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} V_{m, n} e^{i(m\theta - nt)}$$

El cambio de la acción  $I$  y del ángulo  $\theta$  respecto al tiempo es:

$$\dot{I} = - \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} i m V_{m, n} e^{i(m\theta - nt)}, \quad \dot{\theta} = \omega_0(I) - \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\partial V_{m, n}}{\partial I} \right) e^{i(m\theta - nt)}$$

donde  $\omega_0(I) = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}$ . Consideremos la resonancia  $q\omega_0(I_r) - p = 0$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$ : si solo incluimos dicha resonancia en la perturbación, en un entorno de  $I \sim I_r$  obtenemos:

$$H = H_0(I) + V_{p, q}(I_r) e^{i(q\theta - pt)}$$

Haciendo el cambio canónico  $q\theta - pt = \phi$ , cuya función generatriz es  $F(I, \phi) = -(I - I_r)(\frac{\phi + p\phi}{q})$ , obtenemos el hamiltoniano  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = H_0\left(\frac{I - I_r}{q}\right) - \frac{p}{q}(I - I_r) + V_{p,q}e^{i\phi}.$$

Si lo desarrollamos en torno a  $I_r$ , con  $\omega' = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}$  obtenemos:

$$\hat{H}' = H_0(I_r) + \frac{\omega'_0}{2}(I - I_r)^2 + V_{p,q}(I_r)e^{i\phi}.$$

La parte real de la ecuación anterior define la ecuación de un péndulo, cuya máxima amplitud (en dirección de la acción) es  $\Delta I_{p/q} = \frac{2}{\omega'_0} \sqrt{V_{p,q}(I_r)}$ .

Supongamos dos resonancias próximas  $I_{p/q}$  y  $I_{p'/q'}$  tales que  $|I_{p/q} - I_{p'/q'}| < \frac{1}{2}(\Delta I_{p/q} + \Delta I_{p'/q'})$ . Esto implica que ambas resonancias se solapan. Chirikov conjetura que no puede existir toros invariantes entre ambas resonancias.

En el caso de la aplicación standard, se le puede suspender formalmente un flujo hamiltoniano:

$$H(I, \theta, t) = \frac{1}{2}I^2 - \frac{K}{4\pi^2} \cos(2\pi\theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n),$$

donde  $\delta()$  es la delta de Dirac. Como cada  $V_{p,1} \equiv (\frac{K}{4\pi^2})$ , entonces el solape entre dos resonancias principales vecinas (principal porque  $q=1$ ) tiene lugar cuando  $|I_p - I_{p'}| = 1 \leq \frac{1}{2}(\Delta I_p + \Delta I_{p'})$ , el valor del parámetro para el cual ocurre el solape es  $K \geq \pi^2/4 \approx 2.5$ . Por lo tanto, no deben existir IRC en la aplicación standard. Lichtenberg mejora este método al considerar el solape de resonancias de orden mayor (dos y tres) [5].

#### IV.2.6 Esquemas de renormalización.

Mackay introduce un criterio para determinar la existencia de IRC por medio de operadores de renormalización aplicados a una familia uniparamétrica de aplicaciones  $(U, T)$  definidas de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ . El operador de renormalización lo define como:

$$N_m = \begin{cases} U' = BTB^{-1} \\ T' = BT^mUB^{-1} \end{cases}$$

La transformación  $B$  es un cambio de coordenadas (escalamiento). Tomando a  $U$  como el lift de una aplicación twist  $F$ , y a  $T$  como una traslación  $R(x, y) = (x - 1, y)$ , observamos que:

$$N_{a_n} N_{a_{n-1}} \dots N_{a_0} = (B_n F^{q_n-1} R^{p_n-1} B_n^{-1}, B_n F^{q_n} R^{p_n} B_n^{-1}),$$

siendo  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$  y  $B_n$  es la composición de los sucesivos cambios de coordenadas. Esta renormalización se puede interpretar como la imagen de una pequeña región al aplicar varias veces  $F$ , la cual se escala adecuadamente. Existe una relación entre las transformaciones  $B$  y el número de rotación: si  $[a_0; a_1, \dots] = \rho$  entonces  $B_i$  con  $i \rightarrow \infty$  reescala como dominio un entorno de la órbita con número de rotación  $\rho$ .

Para estudiar el operador de renormalización, define una base en el espacio funcional dada por monomios  $x^i y^j$  y un orden sobre dichos monomios. Encuentra un punto fijo trivial de  $N_1$ , que corresponde a un twist trivial  $(T)$  y  $(U)$ , y  $B$  un reescalado por  $-\gamma$  en  $x$  y  $-\gamma^2$  en  $y$ , donde  $\gamma$  es

la razón áurea. Para estudiar la estabilidad de este punto fijo respecto a  $N_1$ , calcula la derivada funcional:

$$DN_1 = \begin{cases} \delta U' = B \delta T B^{-1} , \\ \delta T' = B \delta T U B^{-1} + B D T_{U B^{-1}} \cdot \delta U B^{-1} . \end{cases}$$

Sobre la base elegida, interpreta los vectores propios, los cuales generan a las aplicaciones de los siguientes tipos:

- i. Aplicaciones que conmutan.
- ii. Aplicaciones que conservan area.
- iii. (i)+(ii) más la propiedad de autointersección.
- iv. Aplicaciones simétricas que conmutan.
- v. Transformaciones de coordenadas.
- vi. Combinaciones de todas las anteriores.

Los valores propios asociados indican que este punto fijo es estable, y además  $DN_1$  es un operador compacto en ese punto fijo.

Númericamente encuentra otro punto crítico del tipo hiperbólico. Los valores propios asociados indican que tiene una variedad inestable de dimensión 1 y corresponde al subespacio de reescalamientos. Mackay conjetura que si tenemos una familia uniparamétrica de aplicaciones  $F_K$ , al aplicar los operadores  $(N_1)^i N_{a_{n-1}} N_{a_{n-2}} \dots N_{a_0}$  sobre  $F_K$  y  $R$  con  $i \rightarrow \infty$ , la familia  $F_K$  (de dimension 1 en el espacio funcional) se aproxima a la variedad invariante inestable del punto crítico (ver figura 3). En el límite, se converge a la variedad invariante. Esto significa que todo entorno de una órbita cuyo número de rotación es  $\rho = [a_0; a_1, \dots, a_n, (1)^\infty]$  es idéntico al generado por la variedad inestable vista como una aplicación uniparamétrica.

Mackay conjetura que un IRC con número de rotación  $\rho$  con  $\rho = [a_0; a_1, \dots, a_n, (1)^\infty]$  existe si el parámetro  $K$  es tal que la aplicación  $F_K$  converge al segmento de la variedad inestable que conecta el punto crítico y el punto fijo estable.

Para argumentar esta conjetura, aplica el esquema de renormalización en la acción de la aplicación standard. Verifica que si  $K$  es tal que la  $F_K$  converge hacia el punto fijo estable (por la variedad inestable), la diferencia de la acción  $\Delta W_\rho$  converge a cero.

Otro esquema de renormalización fué estudiado por Escande [8]. En este caso, la renormalización se aplica a un flujo hamiltoniano de un grado y medio de libertad. El modelo que Escande elige es el sistema de una partícula sometida a un potencial debido a una onda longitudinal con velocidad de fase 1 y número de onda  $k$ . El hamiltoniano asociado es:

$$H(v, x, t) = \frac{1}{2} v^2 - M \cos(x) - P \cos(k(x - t)) .$$

Escande afirma que este hamiltoniano es no integrable debido a las múltiples resonancias asociadas a él.

Para determinar la existencia de toros invariantes, Escande propone reescalar el entorno de una resonancia específica con el fin de obtener un retrato fase del entorno escalado similar al del sistema inicial. Esto significa que tanto la posición, el momento y el tiempo deben reescalarse por medio de una transformación canónica, via la función generatriz  $F(I, x) = Ix + \frac{m \sin(x)}{k}$ .

Utilizando técnicas similares a Chirikov sobre la ecuación universal de fase [36], obtiene un nuevo hamiltoniano, similar al primero pero con las constantes reescaladas:

$$H'(v', x', t') = \frac{1}{2}(v')^2 - M' \cos(x') - P' \cos(k'(x' - t')) \quad ,$$

donde  $M'$  y  $P'$  son funciones de  $M$  y  $P$  y el elemento  $a_i$  de la expansión en fracciones continuas del número de rotación del toro investigado. También  $k'$  se transforma en función de  $a_i$ .

Este método de reescalamiento elige dos resonancias del conjunto infinito de éstas asociadas al sistema, ignorando todas las demás. Sobre esta resonancias (coeficientes de Fourier elegidos) se construye el nuevo hamiltoniano. En cada paso de renormalización se considera el siguiente elemento de la expansión en fracciones continuas del número de rotación investigado.

La conjetura de Escande se refiere a la convergencia de las constantes  $M'$  y  $N'$ . Si una de estas constantes converge a 0, entonces el sistema reescalado converge a un sistema integrable. Esto significa que el entorno de la resonancia estudiada puede conjugarse con un sistema integrable y por lo tanto existen toros invariantes en dicha resonancia.

La conexión con aplicaciones en el plano puede lograrse via una aplicación de Poincaré. Al igual que Mackay, Escande conjetura la existencia de un punto hiperbólico respecto al operador de renormalización en el espacio funcional de hamiltonianos. Existe un punto fijo estable, el cual representa un sistema integrable (péndulo). El hamiltoniano original, visto como una familia uniparamétrica con parámetro  $\epsilon$ , se toma como  $H_\epsilon = H_0(I) + \epsilon H_1(I, \theta, t)$ . Al reescalar esta familia en el entorno del toro cuyo número de rotación es la razón áurea, se aproxima a la variedad invariante inestable del punto hiperbólico. Los elementos de la familia que tienen un toro invariante, son aquellos que reescalán cerca del segmento de variedad invariante que une los dos puntos fijos.

### IV.3 Método de la obstrucción.

En la sección anterior mostramos los criterios más conocidos sobre la destrucción de IRC en las aplicaciones tipo twist en el plano. Los métodos que permiten estimar con mayor precisión el valor del parámetro crítico son heurísticos y pueden llevar a contradicciones si éstos se utilizan sobre otro tipo de aplicaciones (por ejemplo, determinar la última curva invariante en el entorno de un punto fijo elíptico en la aplicación de Hénon conservativa [52]). Por otro lado los métodos formales son difíciles de implementar en forma algorítmica y algunas veces se tiene que recurrir a métodos heurísticos para logra su funcionamiento. (por ejemplo, para los métodos de renormalización o minimización, no se conocen las propiedades de convergencia). Además, estos métodos no son claros desde un punto de vista topológico o geométrico, principalmente porque la mayoría de dichos criterios se aplican en el límite, esto quiere decir que con un número finito de pasos no podemos decidir sobre la existencia de un IRC.

Por las razones anteriores, decidimos desarrollar un criterio de no existencia de IRC que tuviera las siguientes propiedades:

- i. Que fuera concluyente para un número finito de iteraciones.
- ii. Que fuera dinámicamente claro.
- iii. Que fuera capaz de estimar el valor del parámetro crítico con una precisión arbitraria y para cualquier número de rotación.

El método de la obstrucción está fundamentado en la no coexistencia de IRC y puntos heteroclinicos que pertenecen a las resonancias vecinas en el entorno del IRC. Dicho de otra manera, los puntos heteroclinicos obstruyen la continuidad de la IRC. A continuación describimos formalmente este método de la obstrucción [44].

Sea  $f_K$  una familia de aplicaciones tipo twist conservativa sobre el cilindro, donde  $K$  es el parámetro. Denotemos por  $F_K$  el lift de esta familia de aplicaciones, la cual podemos escribir como:

$$z = x + y + g_K(x) \quad , \quad y = y + g_K(x) \quad ,$$

donde  $g_K(x)$  es una función 1-periódica de promedio nulo. Para simplificar, consideremos que  $g_K(x)$  es una función analítica. Es claro que  $F_K$  es un twist, puesto que  $\frac{\partial}{\partial y} \Pi_1 F_K(x, y) > 0$ , con  $\Pi_i$  la proyección sobre la  $i$ -ésima coordenada.

Por el teorema de Birkhoff sabemos que una IRC es la gráfica de una función continua Lipschitz (sección II.6), a la que llamamos  $\phi(x)$ . Por lo tanto  $y = \phi(x)$  define la IRC. El número de rotación asociado a este IRC es  $\rho$ :

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\Pi_1 F_K^n(x, \phi(x)) - x}{n}$$

Como todo estado monótono minimal con  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es el límite de estados monótonos minimales con  $\rho_i = \frac{r_i}{s_i}$  y  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i \rightarrow \rho$ . Podemos escoger dos estados monótonos con número de rotación  $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}$  tal que  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$  (estos estados existen por el teorema geométrico). Genéricamente, los estados con número de rotación  $\rho_1$  y  $\rho_2$  corresponden a órbitas periódicas de tipo elíptico e hiperbólico.

**Lema IV.1 (de conectividad)** *Sea  $F$  el lift de la aplicación standard. Entonces para toda órbita periódica monótona e hiperbólica existe una curva continua formada por segmentos de las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos. Dicha curva rodea al cilindro y corresponde a la gráfica de una función continua.*

**Demostración lema 1 :**

Tomemos como número de rotación de la órbita periódica a  $\rho = \frac{r}{n}$ . Consideremos el anillo  $A_0$  definido por  $A_0 = S^1 \times [\rho_1, \rho_2]$  donde el intervalo  $[\rho_1, \rho_2]$  está definido de manera que  $\frac{r}{n}$  sea igual a  $\min_{i \in \mathbb{N}} \{ \frac{r}{i} \mid r \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}, \frac{r}{i} \in [\rho_1, \rho_2] \}$ .

Utilizando la proposición III.8, podemos determinar  $F^n(x, y)$  definida sobre  $A_0$ . Por la proposición III.19 existe una transformación  $\phi_n$  tal que conjuaga a  $F^n$  con el difeomorfismo definido sobre  $A_n$ :

$$z_n = z_n + \epsilon^{\frac{n}{2}} \hat{\alpha} \sin(2\pi n x) + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) \quad , \quad (IV.1)$$

$$z = p + x + \epsilon^{\frac{n}{2}} n z_n + O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1}) \quad ,$$

donde  $\tilde{m} = \frac{n}{2}$  si  $n$  es par y  $\tilde{m} = \frac{n-1}{2}$  si  $n$  es impar. Por lo tanto, siguiendo la proposición III.20, las órbitas del difeomorfismo (1) están contenidas en la gráfica de las órbitas de la ecuación diferencial  $\tilde{z} = -n\hat{\alpha} \sin(2\pi x)$  a orden  $O(\epsilon^{\frac{n}{2}+1})$ . Por lo tanto, a dicho orden, las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos periódicos tienen conexión homoclinica.

Consideremos la ecuación (1). Entonces, solamente puede ocurrir una de estas dos situaciones:

- i. Existe conexión homoclinica entre las variedades invariantes.
- ii. Existen puntos homoclinicos .

Si alguna de estas dos condiciones no sucediera, entonces se violaría la hipótesis de conservación del área. En efecto, supongamos que para un valor de  $K \equiv \epsilon$  existe algún IRC. Entonces se considera el área  $A$  bajo los segmentos de variedad invariantes estables hasta el punto  $b$  e inestable hasta el punto  $a$ , más el segmento  $ab$  (esto para las  $n$  variedades estables e inestables), y acotada por abajo por la IRC (ver figura 4). Por conservación de área  $m(F(A)) = m(A)$  (donde  $m(E)$  es la medida del conjunto  $E$  en el cilindro). Pero por la dinámica en las variedades, la medida de  $F(A)$  disminuye (o aumenta) respecto a  $A$  si el punto  $b \rightarrow b'$  y  $a \rightarrow a'$ , ya que por la IRC no puede cruzar ninguna órbita. Esto es contradictorio, por lo tanto las variedades deben tener conexión homoclínica o intersección transversal entre ellas (es decir, existencia de puntos homoclínicos) (ver figura 5).

En el caso de conexión homoclínica, escogemos como curva continua la unión de las separatrices superiores. Para el caso de las intersecciones transversales, tomamos los segmentos de las variedades invariantes estable e inestable superiores desde el punto hiperbólico hasta el primer cruce entre ellas (ver figura 6). En ambos casos obtenemos una curva cerrada continua que corresponde a la gráfica de una función continua  $\phi(x) = y$  (es una gráfica porque a orden  $O(\epsilon^{\frac{1}{2}+1})$  la separatrices del péndulo lo son).

Esta construcción de  $\phi(x) = y$  que hemos hecho para un  $K$  particular, la podemos extender a un entorno de valores del parámetro, aún más allá del valor del parámetro crítico. Aquí debemos considerar que las variedades invariantes cambian de forma continua y diferenciable respecto al parámetro  $K$  debido a que el difeomorfismo es analítico [33]  $\square$

**Conjetura IV.2** *La demostración del lema 1 se ha realizado bajo la suposición de que  $F$  es la aplicación standard, sin embargo para cualquier aplicación analítica tipo twist conservativa debe cumplirse el lema.*

**Lema IV.3** (de la obstrucción.) *Sean  $x_0$  y  $x_1$  puntos periódicos hiperbólicos que pertenecen a un estado monótono de un difeomorfismo conservativo  $F_K$  tipo twist que depende de un parámetro. El número de rotación de  $x_0$  es  $\rho_0 = \frac{E_0}{n_0}$  y el de  $x_1$  es  $\rho_1 = \frac{E_1}{n_1}$  con  $p_0, p_1, n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ . Si la variedad invariante inestable de  $x_0$  ( $\mathcal{W}^u x_0$ ) y la variedad invariante estable de  $x_1$  ( $\mathcal{W}^s x_1$ ) tienen interacción no vacía (es decir, existen puntos heteroclínicos), entonces NO existe IRC con número de rotación  $\rho \in [\rho_0, \rho_1]$ .*

**Demostración lema 3 :** Supongamos que existe IRC con número de rotación  $\rho_c \in [\rho_0, \rho_1]$  y que es gráfica de la función  $\phi_c(x) = y$ . La gráfica de cualquier función continua Lipschitz  $\phi(x) = y$  la denotamos como  $G\phi$ .

Consideremos un camino continuo  $\overline{x_0 s x_1}$  que une al punto  $x_0$  y  $x_1$  con el punto heteroclínico  $s$ , el cual está formado por la unión de un segmento de  $\mathcal{W}^u x_0$  y un segmento de  $\mathcal{W}^s x_1$ . Por el lema 1 y utilizando la conjetura 2 (si no se trata de la aplicación standard), existe una función continua  $\phi_0$ , cuya gráfica coincide con segmentos de  $\mathcal{W}^s F_K^i(x_0)$  y  $\mathcal{W}^u F_K^j(x_1)$  con  $i = 1, 2, \dots, n_0 - 1$  (ver figura 6). De igual forma, existe  $\phi_1$  cuya gráfica coincide con segmentos de  $\mathcal{W}^u F_K^i(x_1)$  y  $\mathcal{W}^s F_K^j(x_1)$  con  $j = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ . Por lo tanto  $G\phi_0$  y  $G\phi_1$  son curvas continuas (tipo Lipschitz) que rodean al cilindro.

Es claro que  $G\phi_c \cap \overline{x_0 s x_1} = \emptyset$ ,  $G\phi_c \cap G\phi_0 = \emptyset$  y  $G\phi_c \cap G\phi_1 = \emptyset$ . Esto implica que tanto  $\phi_c(x) - \phi_0(x)$  como  $\phi_c(x) - \phi_1(x)$  no cambian de signo. Como  $\rho_1 > \rho_c$  tenemos que:

$$\Pi_1 F_K(x, \phi_1(x)) - \Pi_1 F_K(x, \phi_c(x)) = \phi_1(x) - \phi_c(x) > 0,$$

para todo  $x \in S^1$ . De igual forma, si  $\rho_c > \rho_1$  obtenemos que  $\phi_c(x) - \phi_0(x) > 0$ . Por lo tanto  $\overline{x_0 s x_1}$  debe tener intersección no vacía con  $G\phi_c$ , lo cual es un absurdo.  $\square$

**Lema IV.4** Con los mismas hipótesis de lema 3, sean  $x_2$  y  $x_3$  otros puntos periódicos hiperbólicos, que pertenecen a órbitas monótonas, y cuyo número de rotación es respectivamente  $\rho_2$  y  $\rho_3$ , con la condición de estar contenidos en el intervalo de rotación  $(\rho_0, \rho_1)$ , es decir  $\rho_0 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_1$ . Si  $W^u x_0$  y  $W^s x_1$  tienen puntos heteroclinicos para el valor del parámetro  $K_0$ , entonces  $W^u x_2$  y  $W^s x_3$  también tienen puntos heteroclinicos para el mismo valor del parámetro.

**Demostración lema 4 :** Sean  $G\phi_0$  y  $G\phi_1$  definidas como en el lema 3, las cuales definen un dominio de inestabilidad de Birkhoff (i.e. no existe IRC entre ambas curvas [7]). Haciendo la misma construcción del lema 3, obtenemos las curvas continuas  $\phi_2$  y  $\phi_3$  (a partir de las variedades invariantes de las imágenes de  $x_2$  y  $x_3$ ). Como  $\frac{\rho_0}{n_0} < \frac{\rho_2}{n_2} < \frac{\rho_3}{n_3} < \frac{\rho_1}{n_1}$  tenemos que para toda  $x \in S^1$  se cumple que:

$$\phi_0(x) < \phi_2(x) < \phi_3(x) < \phi_1(x)$$

Entonces  $G\phi_2$  y  $G\phi_3$  definen un dominio de inestabilidad. Sea  $U_\epsilon$  un disco de radio  $\epsilon > 0$  centrado en  $x_2$ ; entonces para todo  $\epsilon > 0$ :

$$W^u x_2 \cap U_\epsilon \neq \emptyset$$

Sea  $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F_{K_0}^i(U_\epsilon)$ . Usando la nota 5.9.3 de [7], tenemos que  $G\phi_3 \cap V \neq \emptyset$ . Como esto es cierto para todo  $\epsilon > 0$ , obtenemos que  $G\phi_3 \cap W^u x_2 \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $W^u x_2 \cap W^s x_3 \neq \emptyset$ , es decir,  $W^u x_2$  y  $W^s x_3$  tienen puntos heteroclinicos.  $\square$

**Nota IV.5** Utilizando los mismos argumentos del lema 4, se puede demostrar que:

$$W^u x_0 \cap W^s x_2 \neq \emptyset, \quad W^u x_2 \cap W^s x_1 \neq \emptyset$$

Lo mismo podemos decir para  $x_3$ .

**Lema IV.6** Sea  $\rho_i$  una sucesión de números racionales tal que:

- i.  $\rho_i = \frac{p_i}{q_i}$ , con  $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ .
- ii.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i = \rho$  con  $\rho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
- iii.  $|\rho - \rho_{i+1}| < |\rho - \rho_i|$ .
- iv.  $(\rho - \rho_{i+1})(\rho - \rho_i) < 0$ .

Tomemos un  $i \in \mathbb{N}$  y sean  $x_i$  y  $x_{i+1}$  puntos periódicos hiperbólicos, que pertenecen a órbitas monótonas, y cuyos números de rotación son  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  (respectivamente). Sea  $K_i$  un valor tal que para  $K < K_i$  estos puntos no tienen puntos heteroclinicos y que para  $K > K_i$  los hay. Entonces, para todo  $j > i$  tenemos que  $K_j \leq K_i$ .

**Demostración lema 6 :** Para todo  $j > i$  tenemos que  $\rho_j, \rho_{j+1} \in (\rho_i, \rho_{i+1})$ . Si  $x_i$  y  $x_{i+1}$  tienen puntos heteroclinicos para  $K > K_i$ , entonces por el lema 4 tenemos que  $x_j$  y  $x_{j+1}$  también los tienen. Entonces es claro que  $K_j \leq K_i$ .  $\square$

**Corolario IV.7** La sucesión de valores del parámetro  $\{K_i\}$  es decreciente:

$$K_1 \geq K_2 \geq K_3 \geq \dots \geq K_i \geq \dots > 0$$

**Demostración corolario 7 :** Aplicamos el lema 6 para todo  $i \in \mathbb{N}$ . □

Para determinar el valor del parámetro crítico  $K_C$  para el cual no existe IRC con número de rotación  $\rho$ , podemos escoger la sucesión  $\rho_i$  como la expansión en fracciones continuas de  $\rho$ . Así:

$$\rho = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \quad \text{y} \quad \rho_i = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i].$$

Entonces, para cada  $i$  debemos encontrar el valor del parámetro  $K_i$  para el cual  $x_i$  y  $x_{i+1}$ , con número de rotación  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  (respectivamente), tienen la primera tangencia heteroclínica (es decir,  $x_i$  y  $x_{i+1}$  tienen una tangencia heteroclínica para  $K = K_i$  y no comparten heteroclínicos para  $0 \leq K \leq K_i$ ).

**Definición IV.8 (Criterio de la obstrucción.)** Sea  $\rho_i$  la expansión en fracciones continuas de  $\rho$ , tal que  $K_i$  es el valor del parámetro para el cual los puntos periódicos hiperbólicos monótonos con número de rotación  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  tienen la primera tangencia heteroclínica. Por el lema 6 y el corolario 7, la sucesión  $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$  es decreciente. Entonces para  $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K_{\infty} > 0$  no existe IRC con número de rotación  $\rho$ , y para  $0 < K < K_{\infty}$  la hay.

Obviamente, es imposible detectar la primera tangencia de dos puntos periódicos hiperbólicos monótonos (HMPP) porque debemos extender infinitamente las variedades. Por lo tanto debemos introducir una tangencia particular que determine un valor único del parámetro.

Sea  $x_0$  y  $x_1$  HMPP y  $W^u x_0$  y  $W^s x_1$  sus respectivas variedades invariantes, las cuales expresamos en términos de un parámetro:

$$W^u x_0 = (\xi_0(s), \eta_0(s)) \quad , \quad W^s x_1 = (\xi_1(t), \eta_1(t)) \quad ,$$

con  $s, t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  y :

$$(\xi_0(0), \eta_0(0)) = x_0 \quad , \quad (\xi_1(0), \eta_1(0)) = x_1 \quad .$$

Las funciones  $\xi_j$  y  $\eta_j$  (con  $j = 0, 1$ ) son funciones analíticas si  $F_K$  es un difeomorfismo analítico [33].

**Definición IV.9 (Tangencia de la primera lengua.)** Llamamos tangencia heteroclínica de la primera lengua a la tangencia que pasa para valores de  $t = t_0$  y  $s = s_0$  tal que:

- i.  $(\xi_0(s_0), \eta_0(s_0)) = (\xi_1(t_0), \eta_1(t_0))$ .
- ii.  $(\frac{d}{ds} \xi_0(s_0), \frac{d}{ds} \eta_0(s_0)) \cdot (-\frac{d}{dt} \eta_1(t_0), \frac{d}{dt} \xi_1(t_0)) = 0$  (donde  $\cdot$  es el producto escalar).
- iii. La curvatura de  $W^u x_0$  (resp. de  $W^s x_1$ ) para  $0 < t \leq t_0$  (resp.  $0 < s \leq s_0$ ) tiene el mismo signo <sup>2</sup>.
- iv. Tomamos a  $K_i$  como el valor mínimo de  $K$  para el cual se suceden las tres condiciones anteriores.

En la figura 7 (a) mostramos la tangencia heteroclínica en la primera lengua para la aplicación standard y los HMPP con número de rotación  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{8}{15}$ . En cambio, la figura 7 (b) muestra una tangencia en otra lengua.

<sup>2</sup>Esta condición no tiene porqué cumplirse ni es esencial pero en los cálculos efectuados con la aplicación standard se ha visto que sirve para definir la tangencia de la primera lengua de forma unívoca.

**Nota IV.10** Genéricamente, si  $x_0$  y  $x_1$  son HMPP y estos puntos tienen tangencia heteroclínica en la primera lengua para el valor del parámetro  $K_0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $W^{u_{x_0}} \cap W^{s_{x_1}} \neq \emptyset$  para valores del parámetro  $|K - K_0| > \delta$  (con  $\cap$  denotamos la intersección transversal). Aún más, como  $x_0$  y  $x_1$  tienen puntos heteroclínicos, entonces las lenguas de orden superior interseccionan cada entorno del punto de tangencia de la primera lengua de  $W^{u_{x_0}}$  y  $W^{s_{x_1}}$ .

**Conjetura IV.11** Sea  $K_i$  el valor del parámetro para el cual los HMPP con número de rotación  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  tienen tangencia heteroclínica en la primera lengua. Entonces conjeturamos que la sucesión  $\{K_i\}$  es estrictamente decreciente.

**Nota IV.12** Debemos notar que aunque  $\{K_i\}$  no sea una sucesión estrictamente decreciente, entonces  $\inf K_i \leq \inf \hat{K}_i$ . Por ejemplo, la figura 8 muestra la tangencia en la primera lengua para HPMM con números de rotación  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{2}{5}$ . Los HPMM con número de rotación  $\frac{13}{21}$  y  $\frac{21}{34}$  han tenido tangencia heteroclínica para un valor del parámetro menor. Los resultados numéricos verifican esta conjetura para diferentes IRC.

**Nota IV.13** Sea la sucesión  $\{K_i\}$ . Para cada valor de  $K = \hat{K}_i$  no existe IRC con número de rotación  $\rho$ . El límite de la sucesión  $K_\infty$  es una cota superior de  $K_C$ .

## IV.4 Método numérico.

En esta sección describimos como implementar el criterio de la obstrucción en forma numérica. Para calcular  $K_\infty$  para un IRC particular debemos seguir los siguientes pasos:

- i. Localización de los HMPP con número de rotación  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$ .
- ii. Expansión de las variedades invariantes locales.
- iii. Continuación numérica de las variedades invariantes.
- iv. Determinación de la distancia entre las variedades de los HMPP para poder decidir si están en tangencia.
- v. Los pasos anteriores se repiten para otros HMPP con números de rotación iguales a las aproximaciones de  $\rho$ .

De esta forma obtenemos la sucesión  $\{K_i\}$ .

### IV.4.1 Puntos periódicos monótonos e hiperbólicos.

En primer lugar debemos encontrar los HMPP con número de rotación  $\rho_i = \frac{p_i}{q_i}$  para un valor de  $K$ . La forma más simple de hacerlo es utilizar la descomposición de la aplicación en dos convoluciones  $F = I_1 \circ I_0$  (sección II.3). Al menos un punto de la órbita periódica está contenida en las líneas de simetría definidas por  $I_0$  e  $I_1$ . Por lo tanto, la búsqueda de los HMPP se reduce a un problema de una dimensión. Para el caso de la aplicación standard, las líneas de simetría son  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \frac{2}{3}$  y  $x = \frac{2+1}{3}$ . Para determinar el punto periódico sobre estas líneas se puede utilizar una norma adecuada y encontrar el cero de la función  $(F^q(x) - x)$  sobre la línea de simetría (via el método de la secante), o bien minimizar la acción imponiendo como restricción el punto inicial y final (sobre la línea de simetría). Las experiencias numéricas muestran que el método de

la secante es más estable que el de minimización de la acción, en particular para valores propios muy grandes de los HMPP. Métodos tipo Newton también pueden ser utilizados para localizar HMPP altamente inestables [56].

#### IV.4.2 Variedades invariantes.

Para el caso de los HMPP con período alto se requiere un tiempo de cómputo muy largo si intentamos extender las variedades invariantes a partir de su aproximación lineal (por medio del vector propio). Debemos por lo tanto aproximar las variedades invariantes por gráficas de una función  $y = \phi_m(x)$  descrita como un polinomio de orden  $m$  en  $x$ :

$$y = \phi_m(x) = y_0 + \sum_{i=0}^m a_i (x - x_0)^i,$$

donde  $(x_0, y_0)$  es el HMPP. Para obtener la función  $\phi(x)$  utilizamos la definición de variedad invariante:

$$\Pi_2 f^n(x, \phi_m(x)) = \phi_m(\Pi_1 F^n(x, \phi_m(x))), \quad (IV.2)$$

donde  $n$  es el período del HMPP.

El lift de la aplicación  $f^n$  (o sea  $F^n$ ) lo podemos representar en el entorno del HMPP por su serie de Taylor hasta orden  $m$ :

$$\Pi_r F_m^n(x, y) = \sum_{i+j \leq m} \frac{1}{i!j!} \left( \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \Pi_r F^n(x_0, y_0) \right) (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \quad (IV.3)$$

con  $r = 1, 2$ . Las derivadas parciales se pueden obtener en forma recursiva a partir de las derivadas parciales de  $F$  calculadas en los puntos  $F^i(x_0, y_0)$  con  $i = 0, \dots, n-1$ . En el apéndice 1 de este capítulo mostramos la forma que obtener dichas derivadas.

Ahora, reemplazando en (2) la aplicación  $F_m^n$  definida en (3), podemos determinar de manera recurrente los coeficientes  $a_i$  de la expansión de  $\phi_m(x)$ . En el apéndice 2 de este capítulo están especificadas las relaciones de recursividad, donde  $a_i$  se determina a partir de  $F^n$  en (3) y de los coeficientes  $a_j$  con  $j = 1, \dots, i-1$  en la expresión (2).

#### IV.4.3 Continuación de las variedades.

Tomemos un punto sobre la variedad invariante local, definido en el intervalo en  $x$ :

$$[\Pi_1 F^{\pm n}(x_0 + \epsilon, \phi_m(x_0 + \epsilon)), x_0 + \epsilon],$$

donde tomamos  $+n$  para la variedad invariante estable y  $-n$  para la inestable. Esto define un intervalo fundamental sobre la variedad. Iterando el intervalo fundamental, podemos extender la variedad hasta completar la primera lengua (es decir, cuando la curvatura de la variedad cambia de signo). Finalmente interpolamos los puntos sobre la variedad con splines cúbicos para obtener una curva suave.

#### IV.4.4 Distancia entre las variedades.

Una vez que tenemos calculada la primera lengua de  $W^s x_i$  y  $W^u x_{i+1}$ , podemos determinar la distancia entre las lenguas. Utilizando la interpolación de los spline cúbicos calculamos la diferencia entre los dos polinómios. La distancia la definimos como el valor mínimo de esta diferencia. Si dichas lenguas se cruzan, la distancia mínima será negativa.

#### IV.4.5 Ciclo.

Para cada valor de  $K$  obtenemos un valor de la distancia. Esta determina una función continua del valor del parámetro  $K \in \mathbb{R}^+$  a los reales (la función es continua porque las variedades invariantes cambian continua y diferenciablemente respecto al parámetro debido a que  $F_K$  es analítica respecto a las coordenadas y al parámetro [33], además la interpolación por splines cúbicos es de clase  $C^2$ ). Buscando el cero de esta función obtenemos la tangencia de la primera lengua. Con el método de la secante [45] podemos determinar  $\hat{K}_i$  hasta la precisión deseada.

#### IV.4.6 Secuencia.

Repetimos los pasos 1) al 5) para los HMPP con número de rotación  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Esto nos permite determinar la sucesión  $\{\hat{K}_i\}$ .

### IV.5 Resultados numéricos para la aplicación standard.

Para probar la ventajas del método de la obstrucción, seleccionamos la aplicación standard. Varios IRC fueron estudiados con este criterio, en particular el IRC con número de rotación igual a la razón áurea. Los resultados numéricos anteriores permiten conjeturar que es la última IRC en desaparecer.

Los resultados numéricos obtenidos con este método muestran propiedades de reescalamiento en la convergencia del parámetro crítico, como también propiedades geométricas relativas al valor propio de los HMPP.

Los IRC investigados los podemos dividir en tres categorías:

- IRC nobles, es decir, aquellos cuya expansión en fracciones continuas (CFE) esta compuesta por 1 a partir del elemento  $i$ -ésimo. En particular la razón áurea pertenece a este grupo de números.
- IRC con número de rotación que tienen una CFE compuesta por un mismo elemento (en particular, 2 y 3).
- IRC que tienen una CFE periódica.

En todos los casos, utilizamos aritmética de cuádruple precisión, con un error máximo en la posición de las HMPP de  $10^{-27}$  y un error similar para determinar el intervalo fundamental en las variedades. Minimizando el tiempo de cómputo, encontramos que el grado de la expansión de las variedades invariantes óptimo es  $m = 4$ , y el error máximo en la interpolación por spline de  $10^{-16}$ .

#### IV.5.1 IRC con número de rotación igual a la razón áurea.

Tomamos la CFE de la razón áurea cuya expansión está compuesta exclusivamente por 1. La sucesión  $\rho_i$  está determinada por el truncamiento de orden  $i$  de la CFE de  $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Estos valores de  $\rho_i$  coinciden con cocientes de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Desde  $i = 2$  hasta  $i = 15$  obtuvimos los valores del parámetro  $\hat{K}_i$ . Estos valores los podemos ver en la tabla 1. La sucesión  $\hat{K}_i$  converge aparentemente en forma geométrica. Evaluamos la

razón de convergencia  $\delta_i$ , definida como:

$$\delta_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{K_i - K_{i-1}}$$

La razón  $\delta_i$  converge a un valor constante (ver tabla 1). Si fijamos el valor de la razón  $\delta_i = \delta_{15}$  para  $i > 15$  y extrapolamos, podemos estimar el valor de  $K_\infty$  como  $K_\infty \approx 0.971636$ . Este valor es aproximadamente igual al obtenido por Greene (sección 2).

También podemos ver que  $\delta_{15}$  es muy cercano a  $\gamma$ ,  $\delta_{15}/\gamma \approx 0.99448$ . Evaluamos también el residuo de los HPMM en la tangencia heteroclínica. Para  $K = K_i$  y  $\rho_i$ , denotamos al residuo de este punto como  $Res_{i,i}$ , y para el de  $\rho_{i+1}$  con el mismo valor del parámetro  $Res_{i,i+1}$ . Observando la tabla 1, verificamos que  $Res_{i,i}$  y  $Res_{i,i+1}$  tienden a un valor constante cuando  $i$  crece. El cociente  $S_i = Res_{i,i}/Res_{i,i+1}$  parece converger a un valor constante si  $i \rightarrow \infty$ , en este caso,  $S_i \rightarrow 0.549\dots$  si  $i \rightarrow \infty$ . Podemos verificar que  $S_i$  converge geoméricamente.

El resultado anterior parece indicar que para la tangencia heteroclínica en la primera lengua para diferentes  $i$ , la geometría de la tangencia se repite a escala más pequeña. Esto indica que este método presenta un fenómeno de autosimilaridad.

Debemos remarcar que la tabla 1 y posteriores sólo mostramos las seis primeras cifras significativas de los valores obtenidos.

#### IV.5.2 IRC nobles.

Para analizar cómo domina en este criterio la cola de la CFE en los diferentes parámetros, como  $\delta_i$ ,  $Res_{i,i}$ , etc., estudiamos IRC con número de rotación tipo noble. Los números utilizados son de la forma:

$$\rho_{\gamma,q} = [0; q, 1, 1, 1, \dots] = [0; q, (1)^\infty]$$

Estudiamos las IRC con número de rotación  $\rho_{\gamma,3}$ ,  $\rho_{\gamma,5}$  y  $\rho_{\gamma,7}$ . Al igual que el caso anterior, evaluamos para cada IRC las sucesiones  $\{K_i\}$ ,  $\{S_i\}$ ,  $\{Res_{i,i}\}$  y  $\{Res_{i,i+1}\}$ . En las figuras 9, 10 y 11 mostramos la convergencia de  $\delta_i$ ,  $Res_{i,i}$  y  $Res_{i,i+1}$  cuando  $i$  crece.

Para estas IRC, a partir de un valor de  $i$  grande, el fenómeno de autosimilaridad y reescalamiento es igual al del caso de la razón áurea.

#### IV.5.3 IRC no nobles.

Los números de rotación que tomamos en consideración son aquellos que tienen una CFE cuyos elementos son todos iguales (i.e.  $\rho_\alpha = [0; (\alpha)^\infty]$ , con  $\alpha > 1$ ). Deseamos investigar sus propiedades de convergencia respecto al método de la obstrucción.

En particular, analizamos el caso de las IRC con números de rotación:

- $\rho_2 = [0; (2)^\infty] = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142\dots$
- $\rho_3 = [0; (3)^\infty] = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \approx 0.3027\dots$

En cada caso, calculamos las sucesiones de valores del parámetro  $\{K_i\}$  y los residuos  $\{Res_{i,i}\}$  y  $\{Res_{i,i+1}\}$ . Esto datos los podemos observar en las tablas 2 y 3. Es natural que el número de elementos calculados sea menor que en el caso de la razón áurea. La razón es que la CFE converge más rápidamente en el caso de números no nobles y así en pocos pasos obtenemos números de rotación con períodos muy altos.

En ambos casos obtenemos una razón de convergencia de  $\{K_i\}$  próxima al número de rotación:

• Para  $\rho_2$  :  $\delta_i \simeq 0.4787$  si  $i \rightarrow \infty$  .

• Para  $\rho_3$  :  $\delta_i \simeq 0.291$  si  $i \rightarrow \infty$  .

Esto indica que ambas sucesiones convergen geométricamente.

Para estimar el valor del parámetro crítico, fijamos el último valor de  $\delta_i$  e iteramos hasta obtener el valor límite:

• Para  $\rho_2$  se obtiene  $\hat{K}_\infty \simeq 0.957447$  .

• Para  $\rho_3$  se obtiene  $\hat{K}_\infty \simeq 0.882257$  .

El comportamiento de los residuos es similar al caso aureo. Los residuos  $\text{Res}_{i,i}$  y  $\text{Res}_{i,i+1}$  convergen rápidamente a un valor constante en forma geométrica (ver tablas 2 y 3). La razón de convergencia es cada caso es:

• Para  $\rho_2$  ,  $S_i \simeq 0.347820$  cuando  $i \rightarrow \infty$  .

• Para  $\rho_3$  ,  $S_i \simeq 0.251971$  cuando  $i \rightarrow \infty$  .

Para estos casos confirmamos el fenómeno de autosimilaridad y reescalamiento. Por los ejemplos mostrados anteriormente, todo parece indicar que la "cola" de la CFE es la parte que gobierna la convergencia y reescalamiento de las resonancias hacia el IRC.

#### IV.5.4 IRC con CFE periódicos

Finalmente estudiamos IRC cuyos números de rotación tienen una CFE periódica. Estos números los representamos como  $\rho = [0; (a_1, a_2, \dots, a_m)^\infty]$ , lo cual significa que la secuencia  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$  se repite indefinidamente.

Los períodos seleccionados son  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$  y  $(2, 1, 1)$ . Esperamos observar en estos ejemplos un comportamiento que combine los casos anteriores. Los resultados están expuestos en las tablas 4, 5, 6 y 7.

En todos los casos observamos que la razón de convergencia  $\delta_i$  tiene tantos puntos de acumulación como longitud de período de la CFE. Es natural definir la razón de convergencia de esta otra forma:

$$\delta_i^m = \frac{\hat{K}_{m+i} - \hat{K}_i}{\hat{K}_i - \hat{K}_{i-m}}$$

donde  $m$  es la longitud del período. En todos los casos,  $\delta_i^m$  parece converger a un valor constante. Tomando un número de rotación, cuya CFE es periódica  $(a_1, \dots, a_m)$ , entonces el límite de  $\delta_i^m$  es próximo al producto  $\prod_{i=1}^m \rho_{a_i}$ , donde  $\rho_{a_i} = [0; (a_i)^\infty]$ . En el caso de los IRC estudiados en esta sección tenemos estos resultados:

i. Período  $(2, 1)$  :  $\delta_i^2 \simeq 0.262670 \sim \rho_2 \rho_1 \simeq 0.2560$  .

ii. Período  $(3, 1)$  :  $\delta_i^3 \simeq 0.205749 \sim \rho_3 \rho_1 \simeq 0.1871$  .

iii. Período  $(3, 2)$  :  $\delta_i^3 \simeq 0.119685 \sim \rho_3 \rho_2 \simeq 0.1254$  .

iv. Período  $(2, 1, 1)$  :  $\delta_i^3 \simeq 0.155556 \sim \rho_2 (\rho_1)^2 \simeq 0.1582$  .

Sobre el comportamiento de los residuos  $\text{Res}_{i,i}$  y  $\text{Res}_{i,i+1}$  debemos notar que convergen a tantos puntos de acumulación como elementos tiene el período de la CFE.

Tabla IV.1: Sucesión 1,1,1,...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$\hat{K}_n$	$\delta_n$	$\text{Res}_{n,n}$	$\text{Res}_{n,n+1}$
2	2/3	3/5	1.326626		-0.694465	-1.266627
3	3/5	5/8	1.165048		-0.635144	-1.208576
4	5/8	8/13	1.085169	0.494391	-0.658421	-1.160677
5	8/13	13/21	1.040234	0.562529	-0.641524	-1.194757
6	13/21	21/34	1.013046	0.605046	-0.653180	-1.172093
7	21/34	34/55	0.996923	0.593061	-0.645622	-1.186590
8	34/55	55/89	0.987076	0.612808	-0.650782	-1.178554
9	55/89	89/144	0.981093	0.606031	-0.647420	-1.183125
10	89/144	144/233	0.977430	0.613199	-0.649274	-1.179617
11	144/233	233/377	0.975192	0.611134	-0.648131	-1.181773
12	233/377	377/610	0.973818	0.613869	-0.648833	-1.180450
13	377/610	610/987	0.972975	0.613086	-0.648403	-1.181260
14	610/987	987/1597	0.972458	0.614116	-0.648666	-1.180764
15	987/1597	1597/2584	0.972140	0.613818	-0.648505	-1.181067

Tabla IV.2: Sucesión 2,2,2,2,...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$\hat{K}_n$	$\delta_n$	$\text{Res}_{n,n}$	$\text{Res}_{n,n+1}$
2	2/5	5/12	1.100089		-0.470191	-1.375662
3	5/12	12/29	1.011318		-0.475989	-1.354572
4	12/29	29/70	0.979939	0.353459	-0.472700	-1.365228
5	29/70	70/169	0.966585	0.425556	-0.474226	-1.360535
6	70/169	169/408	0.961179	0.404785	-0.473580	-1.362493
7	169/408	408/985	0.958972	0.408260	-0.473846	-1.361690
8	408/985	985/2378	0.958070	0.408770	-0.473737	-1.362014

Tabla IV.3: Sucesión 3,3,3,3,...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$\hat{K}_n$	$\delta_n$	$\text{Res}_{n,n}$	$\text{Res}_{n,n+1}$
1	1/3	3/10	1.073727		-0.360927	-1.456069
2	3/10	10/33	0.941849		-0.365146	-1.446520
3	10/33	33/109	0.905810	0.273281	-0.364994	-1.446497
4	33/109	109/360	0.895306	0.291782	-0.364953	-1.446715
5	109/360	360/1189	0.892190	0.295135	-0.365161	-1.449215

Tabla IV.4: Sucesión 2, 1, 2, 1, ...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$K_n$	$\delta_n$	$Res_{n,n}$	$Res_{n,n+1}$
3	3/8	4/11	1.080201		-0.633317	-1.236220
4	4/11	11/30	0.996771		-0.468494	-1.230738
5	11/30	15/41	0.975805		-0.617239	-1.271063
6	15/41	41/112	0.954894		-0.495081	-1.213848
7	41/112	56/153	0.949580	0.251215	-0.612207	-1.280731
8	56/153	153/418	0.944127	0.257130	-0.496996	-1.209315
9	153/418	209/571	0.942737	0.260919	-0.611170	-1.284093
10	209/571	571/1560	0.941298	0.262670	-0.497501	-1.208159

Tabla IV.5: Sucesión 3, 2, 3, 2, ...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$K_n$	$\delta_n$	$Res_{n,n}$	$Res_{n,n+1}$
2	2/7	7/24	0.968055		-0.380360	-1.360852
3	7/24	16/55	0.927112		-0.450009	-1.464424
4	16/55	55/189	0.906459		-0.383909	-1.350152
5	55/189	128/433	0.901619		-0.448459	-1.472233
6	128/433	433/1488	0.899087	0.122763	-0.384232	-1.345957
7	433/1488	992/3409	0.898489	0.119685	-0.448036	-1.471389

Tabla IV.6: Sucesión 3, 1, 3, 1, ...

$n$	$\rho_n$	$\rho_{n+1}$	$K_n$	$\delta_n$	$Res_{n,n}$	$Res_{n,n+1}$
1	1/3	1/4	1.289159		-0.635263	-1.221281
2	1/4	4/15	0.971240		-0.383228	-1.276322
3	4/15	5/19	0.925345		-0.597572	-1.293614
4	5/19	19/72	0.870134		-0.394593	-1.236420
5	19/72	24/91	0.861546	0.175362	-0.586974	-1.317640
6	24/91	91/345	0.850432	0.194869	-0.397675	-1.228016
7	91/345	115/436	0.848680	0.201664	-0.584905	-1.323665
8	115/436	436/1653	0.846378	0.205749	-0.398300	-1.226453

## IV.6 Conclusiones.

El método de la obstrucción lo clasificamos como un método formal. Para cada valor de  $K$ , podemos asegurar la no existencia de IRC en el intervalo de rotación considerado. También es un método local, porque podemos estudiar cada IRC individualmente.

Podemos analizar el método de la obstrucción desde diferentes puntos de vista. A continuación mostramos algunas conclusiones al comparar este criterio con otros (expuestos en la sección 2) desde un punto de vista particular.

### IV.6.1 Visión geométrica.

El método de la obstrucción puede considerarse como un criterio similar al utilizado por Chirikov. La tangencia en la primera lengua de las variedades es en cierto modo equivalente al umbral del solape de resonancias, con la diferencia que en nuestro caso lo aplicamos a difeomorfismos en vez de flujos. Sin embargo, flujos y difeomorfismos están relacionados por una sección de Poincaré.

Si ambos métodos son equivalentes, entonces el método de solape de resonancias puede ser arbitrariamente preciso al considerar resonancias de orden superior.

### IV.6.2 Visión de autosimilaridad.

Los resultados numéricos expuestos en la sección 5, muestran un comportamiento de autosimilaridad al reescalar en forma adecuada el entorno de la tangencia heteroclínica. Para el caso 1, 2 y 3 de la sección 5 observamos que, en la tangencia heteroclínica, la razón de los residuos converge rápidamente a un valor constante.

De forma similar, la razón entre el logaritmo de los valores propios converge a un valor constante (puesto que el residuo converge). Ahora, para  $F_{K_i}^{b_i}$  (donde  $b_i$  es el mínimo común múltiplo de los períodos de los HMPP) tenemos tangencia heteroclínica, donde los valores propios de las variedades invariantes son  $\lambda_i$  y  $\lambda_{i+1}$ , y para  $F_{K_j}^{b_j}$  tenemos también tangencia heteroclínica donde los valores propios son  $\lambda_j$  y  $\lambda_{j+1}$ . Si se cumple que:

$$\frac{\log(\lambda_i)}{\log(\lambda_{i+1})} = \frac{\log(\lambda_j)}{\log(\lambda_{j+1})}$$

entonces puede existir una conjugación topológica local a la órbita de la tangencia de ambos difeomorfismos:  $F_{K_i}^{b_i} \circ \Phi_{i,j} = \Phi_{i,j} \circ F_{K_j}^{b_j}$  ( la demostración de este teorema está en [46] ). La conjugación  $\Phi_{i,j}$  la podemos interpretar como un operador de renormalización en el entorno de la tangencia.

Podemos concluir que el criterio de la obstrucción permite, de una forma natural, una interpretación de renormalización. El esquema de renormalización que proponemos es diferente al de Mackay [9], porque el valor del parámetro del difeomorfismo cambia a cada paso de la renormalización. La función que realiza el operador  $\Phi_{i,j}$  sobre un elemento de la familia del difeomorfismo  $F_K$ , en el espacio funcional, es llevarlo hacia el punto fijo hiperbólico del operador.

### IV.6.3 Visión variacional.

El significado de la tangencia heteroclínica lo podemos encontrar en la teoría de las órbitas monótonas, ya que pertenece a la unión de dos segmentos de variedades invariantes que se pueden

representar como la gráfica de una función . Esta tangencia pertenece a un estado monótono minimal. Tiene asociados dos números de rotación, el de HMPP  $\rho_i$  (si utilizamos el difeomorfismo  $F_{\hat{K}_i}^{-1}$ ) y el del HMPP  $\rho_{i+1}$  (ver figura 12). Esto significa que dicho estado es del tipo  $3_2$  según la clasificación de Katok (sección II.8).

#### IV.6.4 Métodos formales.

En la sección 2 describimos algunos métodos de detección de desaparición de IRC. Definimos los métodos formales como aquellos que aseguran la no existencia de IRC tras un número finito de pasos. El criterio de la obstrucción es formal porque para cada valor del parámetro  $\hat{K}_i$ , aseguramos la no existencia de IRC (de hecho, la existencia de heteroclinicos en un entorno de la tangencia y la continuidad de las variedades ante variaciones del parámetro, implica que no existe IRC para un entorno de  $\hat{K}_i$ ). Por lo tanto, el límite de  $\hat{K}_i$ , es una cota superior del parámetro crítico  $K_C < \hat{K}_\infty$

#### IV.6.5 Métodos locales.

Los métodos locales son aquellos que permiten detectar existencia de IRC en un intervalo de rotación arbitrariamente pequeño. El método de la obstrucción pertenece a esta clasificación. Respecto a la precisión con la que podemos determinar la cota superior del parámetro crítico es similar a la de los métodos heurísticos más precisos (en particular, el método de los residuos). En principio, la precisión es arbitraria. Sin embargo no sabemos si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{K}_i - K_C \rightarrow 0$ . Esto es difícil de determinar porque no tenemos buenas cotas inferiores para las cuales  $K_C > K_{inf}$  y que exista IRC cuando  $K < K_{inf}$ .

#### IV.6.6 Zona de inestabilidad de Birkhoff.

Una zona de inestabilidad de Birkhoff es un conjunto conexo en el cilindro, el cual está limitado por dos IRC y no existe en su interior ninguna otra IRC [7]. Como vimos en el lema 3, la tangencia heteroclinica de dos HMPP con número de rotación  $\frac{p_1}{n_1}$  y  $\frac{p_2}{n_2}$  define una zona de inestabilidad. Este dominio debe estar contenido en otro mayor necesariamente. Según Boyland y Hall [43], en una aplicación tipo twist en el anillo si no existe IRC con número de rotación  $\rho$  entonces existen órbitas no monótonas (no Birkhoff ordenadas) con número de rotación  $\frac{p}{n}$  suficientemente cercano a  $\rho$ .

Debemos esperar que el entorno de una tangencia heteroclinica de dos HMPP con número de rotación  $\frac{p_1}{n_1}$  y  $\frac{p_2}{n_2}$  existirán órbitas periódicas no monótonas (o sea, Birkhoff no ordenadas) cuyo número de rotación está contenido en el intervalo de rotación  $\rho \in (\frac{p_1}{n_1}, \frac{p_2}{n_2})$ . Esta propiedad de la tangencia la demostramos en el capítulo V, el cual está dedicado a la dinámica en el entorno de las tangencias heteroclinicas.

### IV.7 Apéndice 1

En este apéndice indicamos como se calculan las derivadas de orden superior de una composición de funciones.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones suficientemente diferenciables de  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}^N$ , con  $x \in \mathbb{R}^N$ . Queremos calcular la derivadas parciales de la composición  $f(g(x))$  suponiendo que conocemos

las derivadas de  $f(x)$  y las de  $g(x)$ . Llamamos  $\Pi_i$  a la proyección de la  $i$ -ésima coordenada, y definimos  $f_i(x) = \Pi_i f(x)$ ,  $x_i = \Pi_i x$  y  $g_i(x) = \Pi_i g(x)$ , con  $i = 1, \dots, N$ .

Definimos:

$$f_{i;\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = \frac{\partial^m}{\partial y_{\alpha_1} \dots \partial y_{\alpha_m}} f_i(y)|_{y=g(x_0)},$$

$$g_{i;\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = \frac{\partial^m}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_m}} g_i(x)|_{x=x_0},$$

$$f_{i;\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} = \frac{\partial^m}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_m}} f_i \circ g(x)|_{x=x_0},$$

con  $\alpha_1 = 1, \dots, N$  y  $\alpha_i = 1, \dots, N$ .

Por lo tanto, las derivadas de la composición de funciones son:

$$f_{i;\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} = \sum_{m=0}^n \left( f_{i;\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} \prod_{l=1}^m g_{\alpha_l; \{s(\alpha_l, n)\}} \right),$$

donde índices repetidos implica suma. El conjunto de índices  $\{s, \alpha_l\}$  está definido como:

i.  $\bigcup_{l=1}^m \{s(\alpha_l, n)\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ .

ii.  $\{s(\alpha_i, n)\} \cap \{s(\alpha_j, n)\} = \emptyset$  si  $l \neq i$ .

iii.  $\{s(\alpha_l, n)\}$  representa la manera de particionar  $n$  objetos diferentes (o sea, el conjunto de índices  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ) en  $m$  subconjuntos  $\alpha_k$ , donde cada  $\alpha_k$  es el número de subconjuntos que contiene  $k$  objetos, cumpliendo la restricción siguiente:

$$n = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + m\alpha_m.$$

Esta fórmula es una extensión de la fórmula de Faà di Bruno para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  [35].

## IV.8 Apéndice 2

En este apéndice mostramos la forma de calcular los coeficientes de la variedad invariante escrita como la gráfica de la función  $y = \phi(x)$ , donde  $\phi(x)$  es un polinomio de  $x$ . Sea  $f^n$  la aplicación  $n$ -ésima escrita como una serie de potencias de  $x$  y  $y$ . Definimos:

$$\Pi_1 f_m^n(x, y) = \sum_{i+j \leq m} \alpha_{i,j} x^i y^j, \quad (IV.4)$$

$$\Pi_2 f_m^n(x, y) = \sum_{i+j \leq m} \beta_{i,j} x^i y^j, \quad (IV.5)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad (IV.6)$$

donde el punto periódico lo hemos trasladado al origen. Substituyendo (4), (5) y (6) en (2) obtenemos la siguiente relación:

$$\sum_{i+j \leq m} \alpha_{i,j} \left[ \sum_{t=0}^m b_t x^t \right]^i x^j - \sum_{i=0}^m b_i \left[ \sum_{j+t \leq m} \beta_{j,t} \left\{ \sum_{n=0}^m b_n x^n \right\}^j x^t \right]^i = 0. \quad (IV.7)$$

Utilizando las relaciones de productos de series [35] podemos agrupar (7) por potencias de  $x$ , con lo cual obtenemos una serie de potencias de  $x$ :

$$\sum_{n=0}^m \left[ \sum_{\substack{i,j,t \geq 0 \\ i+j=n \\ t \geq i}} \frac{i!}{j!} \alpha_{i,j} \mathcal{E}\{b\}_{t,i} - \sum_{t \leq n} \frac{i!}{n!} b_i \mathcal{E}\{\mathcal{L}\}_{n,i} \right] = 0. \quad (\text{IV.8})$$

Si tenemos el conjunto  $\{p\} = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ , entonces el conjunto  $\mathcal{E}\{p\}$  lo definimos como:

$$\mathcal{E}\{p\}_{t,j} = \sum_{r_1, \dots, r_s \geq 0} t! \prod_{i=1}^s \frac{p_i^{r_i}}{i^{r_i} r_i!},$$

tal que

$$\sum_{i=1}^s r_i i = t \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^s r_i = j.$$

Por último,  $\{\mathcal{L}\}$  es el conjunto definido como:

$$\mathcal{L}_k = \sum_{\substack{j,r \geq 0 \\ s+r=k \\ s \geq j}} \beta_{j,r} \frac{j! k}{m!} \mathcal{E}\{b\}_{s,j}.$$

Todos los coeficientes de las potencias de  $x$  en (8) deben ser idénticamente nulos. Esto nos da  $m+1$  relaciones para determinar los  $m+1$  coeficientes  $b$ . Debemos notar que para  $n' = n > 1$  en (8), el coeficiente  $b_{n'}$  aparece en forma lineal y depende de  $b_{n''}$  con  $0 \leq n'' < n'$ . De esta manera podemos calcular uno a uno los coeficientes  $b$ . Para el caso de  $n' = 1$ , tenemos que  $b_1$  cumple una ecuación de segundo grado. Las dos raíces reales están asociadas, respectivamente, a la variedad estable e inestable del HMPP. Si las raíces son complejas conjugadas, el punto periódico es de tipo elíptico, y entonces  $\phi(x) = y$  representa la gráfica de una sección de curva invariante homótopa a un punto.

Debemos señalar que la serie de potencias que representa la gráfica de la función  $y = \phi(x)$  tiene un radio de convergencia  $r_c \approx \frac{1}{2n}$ , donde  $n$  es el período del punto hiperbólico. Este radio lo calculamos de forma heurística. Al expandir las variedades invariantes de diferentes puntos hiperbólicos, verificamos a partir de la serie de potencias en  $x$  obtenida, que su radio de convergencia no excedía la distancia del punto elíptico (del mismo período) más próximo, es decir  $\frac{1}{2n}$ .

Tabla IV.7: Sucesión 2, 1, 1, 2, 1, 1, ...

$n$	$p_n$	$p_{n+1}$	$K_n$	$\delta_n$	$Res_{n,n}$	$Res_{n,n+1}$
2	1/3	2/5	1.302717		-0.656262	-1.148995
3	2/5	5/13	1.096353		-0.461895	-1.342430
4	5/13	7/18	1.041419		-0.651754	-1.202505
5	7/18	12/31	1.009960		-0.667858	-1.117147
6	12/31	31/80	0.983275		-0.454372	-1.371805
7	31/80	43/111	0.975183		-0.659711	-1.186312
8	43/111	74/191	0.970501		-0.662477	-1.126748
9	74/191	191/493	0.966364		-0.456155	-1.366039
10	191/493	265/684	0.965101	0.149548	-0.658234	-1.189030
11	265/684	456/1177	0.964362	0.155556	-0.663407	-1.125146

## Capítulo V

# Dinámica en el entorno de los cantorianos.

### V.1 Introducción.

En los capítulos II y IV hemos estudiado algunas propiedades de los conjuntos invariantes (de tipo minimal) cuyo número de rotación es irracional. Estos conjuntos sólo pueden ser de dos tipos, IRC o un conjunto cantoriano. En ambos casos, cualquier órbita contenida en el conjunto es densa en éste.

La dinámica en el entorno de un conjunto cantoriano es el tema que nos interesa en este capítulo. En la transición del IRC a un cantoriano está involucrado el comportamiento de las variedades invariantes de los puntos hiperbólicos del entorno. El método de la obstrucción permite entender como se crean los agujeros en los cantorianos, permitiendo la difusión de las órbitas a través de dichos agujeros. Mackay, Meiss y Percival [47] estudiaron el transporte de órbitas a través de los agujeros analizando la dinámica de las variedades invariantes: La diferencia de la acción  $\Delta W$  debida a las órbitas tipo  $2\pi$ , las cuales se localizan en las variedades estables e inestables de los HMPP con número de rotación  $\frac{p}{q}$ , coincide con el transporte de órbitas a través de dichas variedades. Esta técnica permite cuantificar la difusión a través de cantorianos. Chirikov evalua los coeficientes de difusión a partir del inicio del caos (es decir, de la desaparición de la última IRC) utilizando las técnicas de teoría de perturbaciones en flujos [36,48].

Los métodos anteriores están basados en teorías que no permiten examinar en forma clara la dinámica en el entorno de un cantoriano. Por otro lado, el método de la obstrucción nos conduce a pensar que esta dinámica está gobernada por las variedades invariantes de los HMPP cerca del cantoriano.

El existir una tangencia heteroclínica, implica que existe un número infinito de puntos heteroclínicos. Es bien conocido en difeomorfismos, que en el entorno de los puntos homoclínicos transversales, hay dinámica conjugada a un shift de Bernoulli [15,26,53]. Por lo tanto, nos interesa mostrar que también para las tangencias heteroclínicas es posible encontrar un conjunto en el que la dinámica sea conjugada a un shift. De esta forma podemos asegurar que en el entorno de las variedades invariantes tenemos caos local. Este hecho concuerda con el carácter hiperbólico de

los cantorianos [7]: Supongamos que tenemos dos HMPP con número de rotación  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y que comparten puntos heteroclínicos. Entonces todos los HMPP cuyos números de rotación pertenezcan al intervalo  $(\rho_1, \rho_2)$  deben compartir puntos heteroclínicos entre ellos. Así, toda sucesión de HMPP cuyo número de rotación converge a  $\rho \in (\rho_1, \rho_2) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  comparten heteroclínicos. Por lo tanto, en el entorno de estos puntos hay conjuntos en los que la dinámica es conjugada a la de un shift. En el límite, estos conjuntos "cubrirán" todo entorno del cantoriano con número de rotación  $\rho$ .

El trabajo de Boyland y Hall referente al rompimiento de IRC [43], demuestra que existen órbitas no ordenadas cuyo número de rotación es próximo al del cantoriano. Nos interesa relacionar la aparición de estas órbitas con la aparición de tangencias heteroclínicas. De esta forma podemos entender la naturaleza y la dinámica de las órbitas mal ordenadas. Estas órbitas no existen cuando el sistema es integrable. Van apareciendo a medida que las IRC desaparecen.

Este capítulo lo dividimos en cuatro partes:

- i. En la primera parte consideramos un HMPP que tiene una tangencia homoclínica. En el entorno de ésta mostramos que hay conjugación con un shift (utilizando dinámica simbólica).
- ii. La siguiente utiliza los resultados de la anterior para aplicarlos al caso de una tangencia heteroclínica entre dos HMPP.
- iii. La tercera parte muestra que casi toda órbita periódica que pertenece al entorno de una tangencia heteroclínica está mal ordenada.
- iv. En la cuarta discutimos cuestiones adicionales sobre ordenación de órbitas para  $K > K_0$ .

## V.2 Tangencia homoclínica.

En esta sección describimos la dinámica del entorno de un HMPP conjuntamente con el entorno de una tangencia homoclínica cuadrática debida a las variedades estable e inestable del punto. Mostramos que existen conjuntos en el entorno del HMPP que se aplican sobre ellos mismos formando bandas verticales y horizontales. Utilizando técnicas de dinámica simbólica podemos mostrar la existencia de un número infinito de órbitas periódicas contenidas en un conjunto cantoriano. Esta dinámica es conjugada a un shift de Bernoulli.

Sea  $F_K$  una familia uniparamétrica de difeomorfismos definidos sobre el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  y donde  $K$  es el parámetro. Cada  $F_K$  es un difeomorfismo que conserva el área y es de tipo twist. En particular  $F_0$  es un twist trivial, es decir, es integrable. Definimos las coordenadas sobre el cilindro como  $(\theta, r) \in S^1 \times \mathbb{R}$ .

Sea  $p$  un punto periódico hiperbólico de  $F_K$  con número de rotación  $\frac{p}{q}$  (así  $F_K^q(p) = p$ ). Llamamos  $\mathcal{W}^u(p)$  y  $\mathcal{W}^s(p)$  las variedades invariantes de  $p$  (locales). Suponemos que éstas tienen, para un valor del parámetro  $K$ , una tangencia homoclínica que llamaremos  $s$  con la posición relativa mostrada en la figura 1. Este tipo de posición relativa es el que se da en el caso heteroclínico. Otros casos homoclínicos pueden ser considerados con un ligero esfuerzo adicional.

Si los valores propios de  $DF_K(p)$ ,  $\lambda$  y  $\lambda^{-1}$ , son reales diferentes de 1, existe un cambio de coordenadas local en un entorno de  $p$ ,  $(\theta, r) \rightarrow (\xi, \zeta)$  tal que, en un entorno de radio  $\epsilon(p)_K$  de  $p$  ( $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ ),  $\mathcal{W}^u(p)$  coincide con el eje  $\xi$  y  $\mathcal{W}^s(p)$  coincide con el eje  $\zeta$  (teorema de la variedad estable [33]), tal como muestra la figura 1. Igualmente, en un entorno del punto de la tangencia cuadrática de radio  $\epsilon(s)_K$  ( $\mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K)$ ), existe un cambio de coordenadas local  $(\theta, r) \rightarrow (\eta, \nu)$  donde las variedades invariantes  $\mathcal{W}^u(p)$  y  $\mathcal{W}^s(p)$  se representan como gráficas de

funciones cuadráticas (parábolas), como se indica en la figura 2. Definimos dos sectores  $T_1$  y  $T_2$  en el entorno de  $s$  tal que  $T_1, T_2 \subset B(s, \epsilon(s)_K)$ . Los conjuntos  $T_i$ , con  $i = 1, 2$ , están definidos por el área acotada por  $W^u(p)$ ,  $W^s(p)$  y un segmento de recta  $t_i$  que es ortogonal al eje  $\nu$  y que corta a las variedades ( ver figura 3).

**Lema V.1** Existen enteros  $n$  y  $m$  tal que las imágenes de  $T = T_1 \cap T_2$  obtenidas por  $F_K^m(T)$  y  $F_K^n(T)$ , tienen intersección no nula en  $B(p, \epsilon(p)_K)$  y en el interior de esta intersección existen dos bandas horizontales  $H_1$  y  $H_2$  (paralelas al eje  $\xi$ ), y dos bandas verticales  $V_1$  y  $V_2$  (paralelas al eje  $\zeta$ ) que cumplen con las siguientes condiciones:

- i.  $H_i \cap H_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .
- ii.  $V_i \cap V_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .
- iii.  $H_i \cap V_j \neq \emptyset$  para  $i, j = 1, 2$ .
- iv.  $F_K^{n+m}(H_i) \subset V_i$  para  $i = 1, 2$ .
- v.  $F_K^{n-m}(V_i) \subset H_i$  para  $i = 1, 2$ .
- vi. Las fronteras verticales de  $H_i$  (resp.  $V_i$ ) se aplican en las fronteras verticales de  $V_i$  (resp.  $H_i$ ), para  $i = 1, 2$ .
- vii. Las fronteras horizontales de  $H_i$  (resp.  $V_i$ ) se aplican en las fronteras verticales de  $V_i$  (resp.  $H_i$ ), para  $i = 1, 2$ .

**Demostración lema 1 :** Tomemos el conjunto  $T$  y examinemos su imagen  $F_K^i(T)$  para  $i > 0$ . Como  $s$  pertenece a  $T$  y  $s$  es un punto homoclínico, podemos encontrar un valor  $q, j = n \in \mathbb{N}$  tal que  $F_K^q(s)$  esté contenido en  $B(p, \epsilon(p)_K)$  y tal que la imagen de  $W^u(p)$ , que es frontera de  $T$ , es suficientemente paralela al eje  $\xi$  y es tangente al eje  $\zeta$  (por  $F_K^q(s)$ ). El  $\lambda$ -lema nos asegura que existe este entero  $n$  para el cual la imagen de  $W^u(p)$  (en el entorno de  $s$ ) es suficientemente paralela al eje  $\xi$  [33]. Igualmente, los tramos de rectas  $t_1$  y  $t_2$ , al ser iterados por  $F_K^n$ , son suficientemente paralelos al eje  $\xi$ , ver figura 4.

Así  $F_K^n(T)$  contiene dos bandas alargadas paralelas al eje  $\xi$  que se unen en un punto (concretamente en  $F_K^n(s)$ ). Debemos considerar que la elección de las rectas  $t_1$  y  $t_2$  está en función de  $n$  ya que necesitamos que  $F_K^n(T) \cap B(p, \epsilon(p)_K)$  contenga solamente a las dos bandas antes descritas.

De forma similar, existe un  $m = jq \in \mathbb{N}$  tal que la imagen de  $F_K^m(T)$  son dos bandas suficientemente paralelas al eje  $\zeta$  y que se unen en un solo punto ( $F_K^m(s)$ ). Asimismo, la elección de los tramos rectos  $t_1$  y  $t_2$  está en función de  $m$  para que  $F_K^m(T) \cap B(p, \epsilon(p)_K)$  contenga solamente estas dos bandas.

Las bandas obtenidas se intersectan en cuatro pequeños rectángulos. Tomemos un rectángulo mayor que contenga a estos cuatro cuadrados en su interior al cual llamaremos  $\mathcal{R}$  ( ver figura 5). Sobre  $\mathcal{R}$ , las fronteras verticales de las bandas verticales son gráficas de una función,  $\xi = \varphi(\zeta)$ . Las fronteras horizontales de las bandas horizontales también son gráficas de una función  $\zeta = \phi(\xi)$ .

Lo que resta probar es que existen dentro de cada banda vertical una banda cuya imagen por  $F_K^{m-n}$  está contenida en una banda horizontal en  $\mathcal{R}$  (tal que sus fronteras horizontales se aplican en las fronteras horizontales de la banda horizontal, y las verticales en verticales).

Tomemos la imagen de  $\mathcal{R}$  por  $F_K^n$  y  $F_K^m$ . Estas imágenes tienen intersección no nula en el entorno de  $s$ . Escojamos dos rombos  $\hat{T}_1$  y  $\hat{T}_2$  tales que:

$$\hat{T}_i \subset F_K^{-n}(\mathcal{R}) \cap F_K^m(\mathcal{R}) \quad i = 1, 2$$

Cada  $\hat{T}_i$  tiene cuatro lados paralelos a los lados de  $F_K^{-m}(\mathcal{R}) \cap F_K^n(\mathcal{R})$  y el tramo de recta  $t_i$  interseca a  $\hat{T}_i$  solamente en un vértice ( ver figura 6).

Por estar  $\hat{T}_i \subset T_i$ ,  $F_K^n(\hat{T}_i)$  está contenido en una de las bandas horizontales y  $F_K^{-m}(\hat{T}_i)$  en una de las bandas verticales y sus fronteras son suficientemente paralelas al eje  $\zeta$  y al eje  $\xi$ . Debemos escoger  $\hat{T}_i$  tal que  $F_K^n(\hat{T}_i)$  interseque ambas bandas verticales y también que  $F_K^{-m}(\hat{T}_i)$  interseque ambas bandas horizontales (ver figura 7). Los lados horizontales de  $F_K^n(\hat{T}_i)$  se aplican en los lados horizontales de  $F_K^{-m}(\hat{T}_i)$  por la aplicación  $F_K^{-n-m}$ , y lo mismo sucede con los lados verticales.

Es importante notar que la selección de  $\hat{T}_i$  puede implicar una nueva elección de rectas  $t_1$  y  $t_2$  y también  $n$  y  $m$ , tal que la arista de  $\hat{T}_i$  que interseca a  $t_i$  cumpla con lo siguiente. Si  $r_i = \hat{T}_i \cap t_i$  con  $i = 1, 2$  entonces:

$$\Pi_\xi(F_K^n(r_2)) > \Pi_\xi(F_K^{-m}(r_2)) \quad ,$$

$$\Pi_\zeta(F_K^n(r_2)) < \Pi_\zeta(F_K^{-m}(r_2)) \quad ,$$

donde  $\Pi_\xi$  y  $\Pi_\zeta$  son las proyecciones sobre los ejes  $\xi$  y  $\zeta$  respectivamente. Renombrando a las bandas así obtenidas como:

$$H_i \equiv F_K^n(\hat{T}_i) \quad \text{y} \quad V_i \equiv F_K^{-m}(\hat{T}_i) \quad ,$$

para  $i = 1, 2$ , verificamos que:

$$H_i = F_K^{-n-m}(V_i) \quad \text{y} \quad V_i = F_K^{n+m}(H_i) \quad ,$$

donde los lados horizontales (resp. verticales) de  $H_i$  se aplican en los lados horizontales (resp. verticales) de  $V_i$ . □

**Definición V.2** Sea una banda horizontal  $h$  (resp. vertical  $v$ ) tal que  $h \subset H_i$  (resp.  $v \subset V_i$ ) para algún  $i = 1, 2$ . Suponemos que las fronteras de  $h$  (resp.  $v$ ) son gráficas de funciones lipshitzianas de  $\zeta$  para los lados verticales y de  $\xi$  para los lados horizontales. El diámetro de una banda horizontal  $h$  (resp. vertical  $v$ ) lo definimos como:

• Banda horizontal:

$$d(h) = \max_{\xi \in [\xi_0, \xi_1]} \{ |\phi_{\text{sup}}(\xi) - \phi_{\text{inf}}(\xi)| \} \quad ,$$

siendo  $\phi_{\text{sup}}$  y  $\phi_{\text{inf}}$  las funciones cuyas gráficas coinciden con las fronteras horizontales de la banda  $h$  en el intervalo  $[\xi_0, \xi_1]$ .

• Banda vertical:

$$d(v) = \max_{\zeta \in [\zeta_0, \zeta_1]} \{ |\varphi_{\text{isq}}(\zeta) - \varphi_{\text{der}}(\zeta)| \} \quad ,$$

siendo  $\varphi_{\text{isq}}$  y  $\varphi_{\text{der}}$  las funciones cuyas gráficas coinciden con las fronteras verticales de la banda  $v$  en el intervalo  $[\zeta_0, \zeta_1]$ .

**Lema V.3** Consideremos las hipótesis del lema 1. Sea una banda  $h \subset H_i$  para algún  $i = 1, 2$  y cuyo diámetro es  $d(h) > 0$ . El diámetro de la banda  $\hat{h}_i = F_K^{n+m}(h) \cap H_i$  es  $d(\hat{h}_i) = \nu d(h)$  con  $0 < \nu < 1$ .

**Demostración lema 3 :** En el entorno  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  del punto periódico hiperbólico  $p$ , la dinámica es conjugada a la de un punto hiperbólico de período  $q$ . Las variedades invariantes coinciden con los ejes ortogonales centrados en  $p$  (por el teorema de la variedad estable [33]), a los cuales les llamamos  $\xi$  y  $\zeta$  como en el lema anterior. Sea  $\lambda > 1$  y  $0 < \lambda^{-1} < 1$  los valores propios asociados a  $p$ . Consideremos la banda  $h$  con diámetro  $d(h)$ . Al aplicar  $F_K^q$  a la banda  $h$  tenemos que:

$$F_K^q(h) \subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K) ,$$

y, por el comportamiento hiperbólico local, las direcciones verticales se contraen con una relación  $0 < \lambda^{-1} < 1$  y las horizontales se expanden con una relación  $1 < \lambda$ , ver figura 8. Así, el diámetro de la imagen de  $h$  se reduce como:

$$d(F_K^q(h)) \simeq \lambda^{-1}d(h) .$$

Sea  $l$  el entero máximo tal que:

i. Para  $1 < j \leq l$  tenemos  $F_K^{jq}(h) \subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ .

ii. Para  $j > l$  tenemos  $F_K^{jq}(h) \not\subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ .

El diámetro de  $h$  se reduce como  $d(F_K^{iq}(h)) \simeq \lambda^{-l}d(h)$ . Para  $i \in [(l+1)q, m]$ , la imagen de  $h$  se transporta a lo largo de un entorno de la variedad  $\mathcal{W}^u(p)$  hasta el entorno del punto de tangencia  $s$ . El diámetro de la imagen de  $h$  cuando se transporta a los largo de  $\mathcal{W}^u(p)$  (desde fuera del entorno de  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  hasta el entorno  $\mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K)$ ) se puede expandir por un factor  $\gamma > 1$ , el cual está acotado, el número de iteraciones que se realizan desde fuera de  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  hasta  $\mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K)$  es fijo (i.e.  $m - q(l-1)$  fijo).

Escogiendo un  $m$  suficientemente grande, obtenemos un  $lq$  suficientemente grande tal que  $\lambda^{-l} \cdot \gamma < 1$ . Esto quiere decir que el diámetro de la banda se ha reducido un factor  $\lambda^{-l} \cdot \gamma < 1$  (ver figura 9).

Tomemos  $\hat{T}_i \cap F_K^m(h)$  en el entorno  $\mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K)$  y transportemos esta sección de banda hacia  $H_i$  cerca de la variedad estable  $\mathcal{W}^s(p)$ . Sea  $l'q < n$  tal que:

i.  $F_K^{l'q}(\hat{T}_i \cap F_K^m(h)) \not\subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ ,

ii.  $F_K^{(l'+1)q}(\hat{T}_i \cap F_K^m(h)) \subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ ,

donde  $F_K^{(l'+1)q}(\hat{T}_i \cap F_K^m(h))$  es una banda horizontal en  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ .

El diámetro de la sección de banda  $\hat{T}_i \cap F_K^m(h)$  puede incrementarse un factor  $\gamma'$  y este factor está acotado, el número de interacciones desde  $\mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K)$  a la frontera del entorno  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  es fijo (i.e.  $l'q$  fijo a lo largo de la variedad  $\mathcal{W}^s(p)$ ). Por otro lado, dentro del entorno de  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ , el diámetro de la banda horizontal se reduce un factor  $\lambda^{-1}$  por cada iteración de  $F_K^q$ . Por lo tanto, si se necesitan  $n - l'q$  iteraciones para transportar el segmento de banda desde la frontera de  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  hasta la banda  $H_i$ , podemos encontrar un  $n$  tal que  $\lambda^{-(n-l'q)} \cdot \gamma' < 1$ .

Por el lema 1,  $F_K^{n+m}(h) \cap H_i$  es una banda horizontal contenida en  $H_i$  (los lados horizontales se aplican en lados horizontales de las bandas). Además tenemos que el diámetro de esta banda se estrecha con un factor:

$$\nu = \lambda^{-l} \cdot \gamma \cdot \lambda^{-(n-l'q)} \cdot \gamma' < 1 .$$

Concluimos entonces, si  $h \subset H_i$  banda horizontal, con diámetro  $d(h)$ , que  $F_K^{n+m}(h) \cap H_i$  es una banda horizontal con diámetro:

$$d(F_K^{n+m}(h) \cap H_i) = \nu d(h) \quad \text{con } 0 < \nu < 1 .$$

El caso para las bandas verticales,  $v \subset V_i$  con diámetro  $d(v)$ , se demuestra que  $F_K^{-n-m}(v) \cap V_i$  es una banda vertical con diámetro:

$$d(F_K^{-n-m}(v) \cap V_i) = \nu' d(v) \quad \text{con } 0 < \nu' < 1.$$

La demostración es análoga al caso de las bandas horizontales. □

**Teorema V.4** Considerando las hipótesis del lema 1 y 3, para el difeomorfismo  $F_K^{-n-m}$ , restringido a  $F_K^{-n-m} : \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K) \rightarrow \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ , se cumplen las siguientes afirmaciones:

i. Las bandas verticales  $V_i$ , con  $i = 1, 2$ , se aplican sobre bandas horizontales:

$$F_K^{-n-m}(V_i) = H_i.$$

Las fronteras verticales (resp. horizontales) de  $V_i$  se aplican en fronteras verticales (resp. horizontales) de  $H_i$ .

ii. Sea  $v$  una banda vertical, tal que  $v \subset V_i$  para un  $i = 1, 2$ . Entonces, para cada  $i = 1, 2$  tenemos que:

$$F_K^{-(n-m)}(v) \cap V_i = \hat{v},$$

donde  $\hat{v}$  es una banda vertical no vacía, y existe un  $\nu$  constante,  $0 < \nu < 1$ , tal que:

$$d(\hat{v}) \leq \nu d(v).$$

iii. Sea  $h$  una banda horizontal, tal que  $h \subset H_i$  para un  $i = 1, 2$ . Entonces, para cada  $i = 1, 2$  tenemos que:

$$F_K^{-(n-m)}(h) \cap H_i = \hat{h},$$

donde  $\hat{h}$  es una banda horizontal no vacía, y existe un  $\nu'$  constante,  $0 < \nu' < 1$ , tal que:

$$d(\hat{h}) \leq \nu' d(h).$$

iv.  $F_K^{-(n-m)}$  restringido a  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  posee un shift  $\sigma$  con alfabeto  $\{0, 1\}$  como subsistema. Así  $F_K^{-(n-m)}$  es conjugado a  $\sigma$  via un homeomorfismo  $r$  del espacio de sucesiones  $S$  a un subconjunto de  $\mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$ :

$$F_K^{-(n-m)} \circ r = r \circ \sigma.$$

**Demostración teorema 4 :** La parte (i) se demuestra aplicando el lema 1.

La parte (ii) y (iii) se demuestra aplicando el lema 3.

La parte (iv) se demuestra aplicando el teorema 3.1 de Moser [26], puesto que (i), (ii) y (iii) verifican las hipótesis del teorema. □

**Nota V.5** El número de elementos del alfabeto es finito ( $\{0, 1\}$ ), por lo tanto  $r(S)$  es un conjunto de Cantor. Esto significa que en  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(p, \epsilon(p)_K)$  existe un conjunto numerable de órbitas periódicas con período base  $m+n$  (i.e. existen órbitas periódicas en  $\mathcal{R}$  para todo  $l \in \mathbb{N}$  con período  $l \cdot (m+n)$ ).

**Nota V.6** Cuando el valor del parámetro  $K$  del difeomorfismo  $F_K$  (para el cual se tiene tangencia homoclinica) aumenta en una cantidad  $\epsilon$ , se tiene intersección transversal en este sector de las variedades (ver figura 10). La construcción de las bandas horizontales y verticales podemos conservarla ya que la región  $R$  no incluye las imágenes del punto de tangencia  $a$ . Para este caso tenemos entonces dos puntos homoclinicos  $a_1$  y  $a_2$  (figura 10). En los entornos  $B(a_1, \epsilon(a_1)_K)$  y  $B(a_2, \epsilon(a_2)_K)$  que incluyen a  $a_1$  y a  $a_2$  respectivamente, existen cambios de coordenadas tales que  $W^u(p)$  y  $W^s(p)$  son gráficas de polinómios cuadráticos. Así los sectores  $T_1$  y  $T_2$  se eligen de manera similar al caso de la tangencia, limitándolos por secciones de rectas  $t_1$  y  $t_2$  (ver figura 11). En el entorno  $B(p, \epsilon(p)_K)$  las imágenes de los sectores  $T_1$  y  $T_2$  se aplican de manera similar al caso tangente. Seleccionamos el rectángulo  $R$  tal que incluya la intersecciones de las imágenes de los sectores  $T_1$  y  $T_2$ . A partir de aquí se puede continuar la demostración del lema 1, lema 2 y teorema 4 de forma análoga al caso tangente (ver figura 12).

De estas observaciones concluimos que, para un intervalo del parámetro  $K \in [K_T, K_T + \epsilon]$ , con  $K_T$  el valor del parámetro para el cual tenemos la tangencia y  $\epsilon > 0$ , la existencia de un conjunto de Cantor en el entorno del punto periódico hiperbólico,  $p$ , es genérica.

### V.3 Tangencias heteroclinicas.

En esta sección estudiamos el entorno de una tangencia heteroclinica, la cual pertenece a las variedades invariantes de dos HMPP de número de rotación distintos.

Al igual que en la sección 2, tomamos la familia uniparamétrica de difeomorfismos,  $F_K$ , que está definida sobre el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Pedimos que  $F_K$  sea una aplicación conservativa y tipo twist. Las coordenadas sobre el cilindro son  $(\theta, r) \in S^1 \times \mathbb{R}$ .

Tomemos dos HMPP con números de rotación  $\rho_1 = \frac{p_1}{q_1}$  y  $\rho_2 = \frac{p_2}{q_2}$  respectivamente (con  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$  y  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ ) y supongamos que  $|\rho_1 - \rho_2| < \delta < 1$ . Supongamos, además, que existe un intervalo del parámetro  $[K_1, K_2]$  tal que para  $K_1$  existe una IRC con  $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ , y que para  $K_2$  los dos HMPP pertenecen a una zona de inestabilidad de Birkhoff, la cual es conexa. Por lo tanto, debe existir un valor del parámetro  $K \in (K_1, K_2)$  para el cual las variedades invariantes de los HMPP tienen tangencia heteroclinica en la primera lengua (sección IV.3).

Seleccionamos un punto HMPP de la órbita con número de rotación  $\rho_1$ , al cual llamaremos  $p_1$ . Escogemos de la órbita de los HMPP con número de rotación  $\rho_2$  aquel HMPP que esté más cercano a  $p_1$  en la dirección angular. Este segundo punto lo llamamos  $p_2$ .

Sea  $K$  el valor del parámetro para el cual la variedad invariante inestable de  $p_1$  ( $W^u(p_1)$ ) tiene tangencia heteroclinica en la primera lengua con la variedad estable de  $p_2$  ( $W^s(p_2)$ ). Debemos recordar que el segmento de  $W^u(p_1)$  que va de  $p_1$  al punto de tangencia coincide con la gráfica de una función suave. Lo mismo podemos decir de  $W^s(p_2)$ , ya que suponemos que  $F_K$  es una aplicación analítica.

#### V.3.1 Construcción de bandas.

El propósito de este apartado es construir, en los entornos de los puntos periódicos hiperbólicos  $p_1$  y  $p_2$ , bandas horizontales que se apliquen en bandas verticales (y viceversa), via sucesivas aplicaciones del difeomorfismo  $F_K$ . La dinámica en ciertos conjuntos de dichos entornos es conjugada a un shift. Así mostraremos la existencia de órbitas periódicas de cualquier periodo (múltiplo de un periodo base), las cuales son próximas a  $p_1$ ,  $p_2$  y a la tangencia. En el caso homoclinico, la variedad estable e inestable pertenecen a un mismo punto. Ahora debemos considerar cuatro

variedades invariantes, la estable e inestable de cada punto  $p_i$  (con  $i = 1, 2$ ). La unión de estas cuatro variedades locales forma un circuito cerrado, por donde se transportan las bandas. Esto significa que en el entorno de ambos puntos  $p_i$  tenemos bandas horizontales y verticales.

Tomemos  $p_1$  y  $p_2$  como se ha descrito antes. Sea  $s$  el punto de tangencia heteroclinico dado por las variedades  $\mathcal{W}^s(p_1)$  y  $\mathcal{W}^u(p_2)$ . Las otras variedades,  $\mathcal{W}^u(p_1)$  y  $\mathcal{W}^s(p_2)$ , genéricamente no tienen tangencia heteroclinica en la primera lengua para este valor de parámetro. Sin embargo, tienen intersección transversal para otras lenguas (de forma genérica)<sup>1</sup>. Tomemos las dos primeras intersecciones transversales en las lenguas de orden menor. A estos puntos les llamamos  $r_1$  y  $r_2$  (ver figura 13). Consideremos  $F_K^Q$ , donde  $Q$  es el mínimo común múltiplo de  $q_1$  y  $q_2$ . Por lo tanto,  $p_1$  y  $p_2$  son puntos fijos para  $F_K^Q$ .

Sean  $B(p_1, \epsilon(p_1)_K)$  y  $B(p_2, \epsilon(p_2)_K)$  entornos de  $p_1$  y  $p_2$ . Existen cambios de coordenadas en estos entornos tales que las variedades invariantes locales coinciden con los ejes ortogonales y la dinámica es topológicamente conjugada a la de un punto hiperbólico con un difeomorfismo lineal [33]. También en un entorno de  $s$ ,  $B(s, \epsilon(s)_K)$ , hay un cambio de coordenadas tal que las variedades invariantes locales coinciden con gráficas de funciones cuadráticas. Por último, en los entornos de las intersecciones transversales  $r_1$  y  $r_2$ ,  $B(r_1, \epsilon(r_1)_K)$  y  $B(r_2, \epsilon(r_2)_K)$ , respectivamente, existen cambios de coordenadas tales que las variedades invariantes coinciden con la gráfica de funciones cuadráticas (ver figura 14).

En el entorno  $B(s, \epsilon(s)_K)$  los sectores  $T_1^s$  y  $T_2^s$  está determinados por:

- i. Segmentos de las variedades invariantes locales por el punto de tangencia.
- ii. Por dos segmentos rectos  $t_1^s$  y  $t_2^s$  paralelos al eje  $\eta_s$ , los cuales cortan a ambos lados del punto  $s$  a las variedades, ver figura 15.

De manera similar determinamos los sectores  $T_1^r$  y  $T_2^r$  en los entornos  $B(r_1, \epsilon(r_1)_K)$  y  $B(r_2, \epsilon(r_2)_K)$  por medio de dos segmentos rectos  $t_1^r$  y  $t_2^r$  paralelos a los ejes  $\nu_{r_1}$  y  $\nu_{r_2}$ , los cuales cortan a los ejes  $\eta_{r_1}$  y  $\eta_{r_2}$  (ver figura 16).

**Lema V.7** Existen enteros positivos  $n, m, l, d$  tales que las imágenes del conjunto  $T^s = T_1^s \cup T_2^s$  y del conjunto  $T^r = T_1^r \cup T_2^r$  tienen intersección no nula en el entorno de  $B(p_1, \epsilon(p_1)_K)$ , tal que:

$$(B(p_1, \epsilon(p_1)_K) \cap F_K^{-m}(T^s)) \cap (B(p_1, \epsilon(p_1)_K) \cap F_K^l(T^r)) \neq \emptyset$$

De igual forma, tienen intersección no nula en un entorno de  $B(p_2, \epsilon(p_2)_K)$ , esto es:

$$(B(p_2, \epsilon(p_2)_K) \cap F_K^n(T^s)) \cap (B(p_2, \epsilon(p_2)_K) \cap F_K^{-d}(T^r)) \neq \emptyset$$

En estas intersecciones existen cuatro bandas horizontales, dos de ellas  $H_1^{P_1}$ ,  $H_2^{P_1}$  paralelas al eje  $\xi_1$  (en el entorno de  $B(p_1, \epsilon(p_1)_K)$ ) y las otras dos  $H_1^{P_2}$ ,  $H_2^{P_2}$  paralelas al eje  $\xi_2$  (en el entorno  $B(p_2, \epsilon(p_2)_K)$ ). También hay cuatro bandas verticales,  $V_1^{P_1}$ ,  $V_2^{P_1}$ , paralelas al eje  $\xi_1$  (en el entorno  $B(p_1, \epsilon(p_1)_K)$ ) y  $V_1^{P_2}$ ,  $V_2^{P_2}$ , paralelas al eje  $\xi_2$  (en el entorno  $B(p_2, \epsilon(p_2)_K)$ ). Estas bandas cumplen con las siguientes propiedades:

- i.  $H_i^{P_1} \cap H_j^{P_1} = \emptyset$ ,  $H_i^{P_2} \cap H_j^{P_2} = \emptyset$  para  $i \neq j$ .
- ii.  $V_i^{P_1} \cap V_j^{P_1} = \emptyset$ ,  $V_i^{P_2} \cap V_j^{P_2} = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

<sup>1</sup> Piénsese en las variedades correspondientes a los puntos de las órbitas  $p_1$  y  $p_2$  y en las imágenes de  $B$  que se encuentran sobre los mismos.

- iii.  $H_i^{P_1} \cap V_j^{P_1} \neq \emptyset$ ,  $H_i^{P_2} \cap V_j^{P_2} \neq \emptyset$  para  $i, j = 1, 2$ .
- iv.  $F_K^{n+n}(H_i^{P_1}) = V_i^{P_2}$ ,  $F_K^{m-n}(V_i^{P_2}) = H_i^{P_1}$  para  $i = 1, 2$ .
- v.  $F_K^{l+l}(H_i^{P_2}) = V_i^{P_1}$ ,  $F_K^{d-l}(V_i^{P_1}) = H_i^{P_2}$  para  $i = 1, 2$ .

Las fronteras horizontales de  $H_i^{P_2}$  (resp.  $H_i^{P_1}$ ) se aplican en las fronteras horizontales de  $V_i^{P_2}$  (resp.  $V_i^{P_1}$ ). Lo mismo sucede para las fronteras verticales, ver figura 17.

**Demostración lema 7 :** La demostración es similar a la del lema 1, añadiendo la nota 6 para el caso de intersección transversal.

Por el  $\lambda$ -lema [33], existen números enteros  $n = Qn'$ ,  $m = Qm'$ ,  $l = Ql'$  y  $d = Qd'$  (con  $n', m', l', d' \in \mathbb{N}$ ) tal que:

- i.  $F_K^{-m}(\mathcal{W}^u(p_1) \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  es un segmento del eje  $\xi_1$  y  $F_K^{-m}(\mathcal{W}^s(p_2) \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  es una parábola tangente al eje  $\xi_1$  y suficientemente paralela al eje  $\xi_1$ .
- ii.  $F_K^n(\mathcal{W}^s(p_2) \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  es un segmento del eje  $\xi_2$  y  $F_K^n(\mathcal{W}^u(p_1) \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  es una parábola tangente al eje  $\xi_2$  y suficientemente paralela al eje  $\xi_2$ .
- iii.  $F_K^i(\mathcal{W}^s(p_1) \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$ ,  $i = 1, 2$ , son segmentos del eje  $\xi_1$  y  $F_K^i(\mathcal{W}^u(p_2) \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$  son segmentos de parábola que cortan al eje  $\xi_1$  y son suficientemente paralelos al eje  $\xi_1$ , para  $i = 1, 2$ .
- iv.  $F_K^{-d}(\mathcal{W}^u(p_2) \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$ ,  $i = 1, 2$ , son segmentos del eje  $\xi_2$  y  $F_K^{-d}(\mathcal{W}^s(p_1) \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$  son segmentos de parábola que cortan al eje  $\xi_2$  y suficientemente paralelos al eje  $\xi_2$ , para  $i = 1, 2$ .
- v.  $F_K^{-m}(t_i^s \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  son suficientemente paralelos al eje  $\xi_1$ , para  $i = 1, 2$ .
- vi.  $F_K^n(t_i^u \cap \mathcal{B}(s, \epsilon(s)_K))$  son suficientemente paralelos al eje  $\xi_2$ , para  $i = 1, 2$ .
- vii.  $F_K^i(t_i^s \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$  son suficientemente paralelos al eje  $\xi_1$ , para  $i = 1, 2$ .
- viii.  $F_K^{-d}(t_i^u \cap \mathcal{B}(r_i, \epsilon(r_i)_K))$  son suficientemente paralelos al eje  $\xi_2$ , para  $i = 1, 2$ .

La figura 17 muestra las imágenes de (i) al (viii).

Debemos escoger  $n, m$  (resp.  $l, d$ ) tales que la imagen de  $T^s$  por  $F_K^{-m}$  (resp.  $T^u$  por  $F_K^{-d}$ ) sean dos bandas paralelas al eje  $\xi_1$  (resp.  $\xi_2$ ) disjuntas en el entorno de  $\mathcal{B}(p_1, \epsilon(p_1)_K)$  (resp.  $\mathcal{B}(p_2, \epsilon(p_2)_K)$ ), y que la imagen de  $T^s$  por  $F_K^n$  (resp.  $T^u$  por  $F_K^l$ ) sean dos bandas paralelas al eje  $\xi_2$  (resp.  $\xi_1$ ) disjuntas en el entorno de  $\mathcal{B}(p_2, \epsilon(p_2)_K)$  (resp.  $\mathcal{B}(p_1, \epsilon(p_1)_K)$ ).

Fijemos dos rectángulos  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  tales que :

$$(F_K^l(T^u) \cap F_K^{-m}(T^s)) \subset \mathcal{R}_1 \quad \text{y} \quad (F_K^{-d}(T^u) \cap F_K^n(T^s)) \subset \mathcal{R}_2,$$

y cumpliendo  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{B}(p_1, \epsilon(p_1)_K)$  y  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{B}(p_2, \epsilon(p_2)_K)$ . Sobre  $\mathcal{R}_i$ , con  $i = 1, 2$ , las fronteras de las bandas paralelas al eje  $\xi_i$  coinciden con gráficas de funciones de  $\xi_i$  y las bandas paralelas al eje  $\xi_i$  coinciden con gráficas de funciones de  $\xi_i$  (ver figura 18).

En la intersección de las imágenes de  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  en el entorno de  $s$  :

$$(F_K^m(\mathcal{R}_1) \cap F_K^{-n}(\mathcal{R}_2)) \cap T^s,$$

definimos dos *rombos*  $\hat{T}_1^i$  y  $\hat{T}_2^i$  donde cada uno de sus lados es *paralelo* a la frontera de  $F_K^m(\mathcal{R}_1) \cap F_K^{-n}(\mathcal{R}_2)$  y donde una de los vértices intersecta en un punto a las rectas  $t_1^i$  y  $t_2^i$  (ver figura 19).

Como  $\hat{T}_i^i \subset T^i$  y  $\hat{T}_i^i \subset F_K^m(\mathcal{R}_1)$ , con  $i = 1, 2$ , entonces  $F_K^{-m}(\hat{T}_i^i) \subset \mathcal{R}_1$  y está contenida en una de las bandas paralelas al eje  $\xi_1$ . Como  $\hat{T}_i^i \subset F_K^{-n}(\mathcal{R}_2)$ , también tenemos que  $F_K^n(\hat{T}_i^i) \subset \mathcal{R}_2$  y está contenida en una de las bandas paralelas al eje  $\xi_2$  (ver figura 20).

Llamemos  $H_i^{P_1} \equiv F_K^{-m}(\hat{T}_i^i)$  y  $V_i^{P_2} \equiv F_K^n(\hat{T}_i^i)$ . Entonces observamos que :

$$H_i^{P_1} \cap H_j^{P_1} = \emptyset \quad , \quad V_i^{P_2} \cap V_j^{P_2} = \emptyset \quad ,$$

con  $i \neq j$ . También tenemos que:

$$F_K^{m+n}(H_i^{P_1}) = V_i^{P_2} \quad , \quad F_K^{-m-n}(V_i^{P_2}) = H_i^{P_1} \quad ,$$

con  $i = 1, 2$ . Las fronteras horizontales de  $H_i^{P_1}$  (paralelas al eje  $\xi_1$ ) se aplican en las fronteras horizontales de  $V_i^{P_2}$  (paralelas al eje  $\xi_2$ ) y las fronteras verticales de  $H_i^{P_1}$  (paralelas al eje  $\xi_1$ ) se aplican en las fronteras verticales de  $V_i^{P_2}$  (paralelas al eje  $\xi_2$ ), por construcción de  $T_i^i$ .

Una construcción similar podemos obtener en la intersección de las imágenes de  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  en el entorno de  $r_1$  y  $r_2$  :

$$(F_K^{-l}(\mathcal{R}_1) \cap F_K^d(\mathcal{R}_2)) \cap T_i^i \quad ,$$

con  $i = 1, 2$ . Definimos los *rombos*  $\hat{T}_1^i$  y  $\hat{T}_2^i$  de forma análoga a caso anterior pero en el entorno de  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente. Ambos rombos tienen lados paralelos a la frontera de  $F_K^{-l}(\mathcal{R}_1) \cap F_K^d(\mathcal{R}_2)$  y una de las aristas de de  $\hat{T}_i^i$  intersecta el segmento de recta  $t_i^i$ , con  $i = 1, 2$ . Como  $\hat{T}_i^i \subset T_i^i$  y  $\hat{T}_i^i \subset F_K^{-l}(\mathcal{R}_1)$ , entonces  $F_K^l(\hat{T}_i^i) \subset \mathcal{R}_1$  y está contenido en una de las bandas paralelas al eje  $\xi_1$ . Igualmente, para  $\hat{T}_i^i \subset F_K^d(\mathcal{R}_2)$ , tenemos que  $F_K^{-d}(\hat{T}_i^i) \subset \mathcal{R}_2$  y está contenido en una de las bandas paralelas al eje  $\xi_2$  (ver figura 21).

Llamemos  $H_i^{P_1} \equiv F_K^{-d}(\hat{T}_i^i)$  y  $V_i^{P_2} \equiv F_K^l(\hat{T}_i^i)$ . Estas bandas cumplen con las siguientes propiedades:

$$H_i^{P_1} \cap H_j^{P_1} = \emptyset \quad , \quad V_i^{P_2} \cap V_j^{P_2} = \emptyset \quad ,$$

con  $i \neq j$ . También cumplen con:

$$F_K^{d+l}(H_i^{P_1}) = V_i^{P_2} \quad , \quad F_K^{-d-l}(V_i^{P_2}) = H_i^{P_1} \quad ,$$

para  $i = 1, 2$ . Las fronteras horizontales de  $H_i^{P_1}$  (paralelas al eje  $\xi_2$ ) se aplican en las fronteras horizontales de  $V_i^{P_2}$  (paralelas al eje  $\xi_1$ ), y las fronteras verticales de  $H_i^{P_1}$  (paralelas al eje  $\xi_2$ ) se aplican en la frontera vertical de  $V_i^{P_2}$  (paralelas al eje  $\xi_1$ ).

Por último, falta probar que las bandas verticales y horizontales en  $\mathcal{R}_1$  tienen intersección nula (y lo mismo para el caso de  $\mathcal{R}_2$ ). Pedimos que la imagen del punto de intersección de  $\hat{T}_2^i$  con el segmento de la recta  $t_2^i$  y la imagen del punto de intersección de  $\hat{T}_2^i$  con el segmento  $t_2^i$  cumplan las siguientes desigualdades en  $\mathcal{R}_1$  :

$$\left| \Pi_{\xi_1} (F_K^l(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| < \left| \Pi_{\xi_1} (F_K^{-m}(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| \quad ,$$

$$\left| \Pi_{\xi_1} (F_K^l(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| > \left| \Pi_{\xi_1} (F_K^{-m}(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| \quad ,$$

Respecto a la imagen de estos puntos en  $\mathcal{R}_2$ , pedimos que:

$$\left| \Pi_{\xi_2} (F_K^{-d}(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| > \left| \Pi_{\xi_2} (F_K^n(\hat{T}_2^i \cap t_2^i)) \right| \quad ,$$

$$\left| \Pi_{r_2} \left( F_K^{-d}(\hat{T}_2 \cap \hat{E}_2) \right) \right| < \left| \Pi_{r_1} \left( F_K^n(\hat{T}_2 \cap \hat{E}_2) \right) \right| ,$$

donde  $\Pi_\alpha$  es la proyección en el eje  $\alpha$  ( ver figura 22). Estas condiciones se pueden lograr escogiendo valores de los enteros  $m, n, l, d$  suficientemente grandes y variando la distancia del segmento de recta  $\hat{E}_2$  a  $s$  y de  $\hat{E}_2$  a  $r_2$ .

De esta forma obtenemos que:

$$H_i^{P_1} \cap V_j^{P_1} \neq \emptyset , \quad H_i^{P_2} \cap V_j^{P_2} \neq \emptyset .$$

□

**Lema V.8** Consideremos las mismas hipótesis del lema 7 y la definición 2.

Sea una banda horizontal  $h_j^{P_1} \subset H_j^{P_1}$  con diámetro  $d(h_j^{P_1}) > 0$  y una banda vertical  $v_j^{P_1} \subset V_j^{P_1}$  con diámetro  $d(v_j^{P_1}) > 0$ , donde  $i, j = 1, 2$ . Entonces:

- i.  $d(F_K^{-d-l}(h_j^{P_1}) \cap H_j^{P_2}) \leq \nu_1 d(h_j^{P_1})$ , con  $j = 1, 2$  y  $0 < \nu_1 < 1$ .
- ii.  $d(F_K^{n-m}(h_j^{P_2}) \cap H_j^{P_1}) \leq \nu_2 d(h_j^{P_2})$ , con  $j = 1, 2$  y  $0 < \nu_2 < 1$ .
- iii.  $d(F_K^{n+m}(v_j^{P_1}) \cap V_j^{P_2}) \leq \nu_3 d(v_j^{P_1})$ , con  $j = 1, 2$  y  $0 < \nu_3 < 1$ .
- iv.  $d(F_K^{l+d}(v_j^{P_2}) \cap V_j^{P_1}) \leq \nu_4 d(v_j^{P_2})$ , con  $j = 1, 2$  y  $0 < \nu_4 < 1$ .

**Demostración lema 8 :** Para demostrar cada apartado, solamente hemos de adecuar las hipótesis y aplicar el lema 3 del caso homoclínico. Así que para cada apartado,  $h_j^{P_1}$  o  $v_j^{P_1}$ , lo llamamos  $h$  y a su imagen correspondiente  $\hat{h}$ . A  $\nu_i$  la renombramos  $\nu$ . De esta manera aplicamos el lema 3 a cada caso. Aunque en el lema 3, la banda horizontal  $H_i$  es la misma y para este otro caso es diferente ( $H_i^{P_1}$  y  $H_i^{P_2}$ ), el lema se aplica de igual forma, ya que el carácter hiperbólico de los entornos de  $p_1$  y  $p_2$  es semejante (por el T. de la variedad estable [33]). □

### V.3.2 Matriz de transición.

Para hacer la conjugación de la dinámica en el entorno de los puntos hiperbólicos  $p_1$  y  $p_2$  con la dinámica de un shift, debemos incluir una matriz de transición. Esta matriz indica cuales son las transiciones posibles y cuales las prohibidas cuando aplicamos bandas horizontales sobre bandas verticales y viceversa.

**Definición V.9** Renombramos las bandas horizontales y verticales como:

- $h_1 \equiv H_1^{P_1}$  y  $v_1 \equiv V_1^{P_1}$ ,
- $h_2 \equiv H_2^{P_1}$  y  $v_2 \equiv V_2^{P_1}$ ,
- $h_3 \equiv H_1^{P_2}$  y  $v_3 \equiv V_1^{P_2}$ ,
- $h_4 \equiv H_2^{P_2}$  y  $v_4 \equiv V_2^{P_2}$ .

También definimos a  $M_i \in \mathbb{Z}$  como:

- $M_1 = -l - d$ ,

- $M_2 = -l - d$ ,
- $M_3 = -m - n$ ,
- $M_4 = -m - n$ .

**Definición V.10** Sea la matriz de transición  $A$  (matriz de  $4 \times 4$ ), definida como  $A = A(\alpha_{i,j})$ , donde:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } F_K^{M_i}(h_i) \cap v_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } F_K^{M_i}(h_i) \cap v_j = \emptyset \end{cases}.$$

Por el lema 7, vemos que la matriz  $A$  queda definida como:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El significado de esta matriz es que la imagen de las bandas horizontales no pueden intersectar a las bandas verticales del mismo punto hiperbólico. Por lo tanto, el conjunto de sucesiones posibles estará determinado por la matriz  $A$  de la siguiente forma:

**Definición V.11** Sea  $S$  el conjunto de sucesiones bi-infinitas:

$$(\dots, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \dots)$$

con el alfabeto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  tal que  $a_i \in A$ . Sea  $\sigma$  el shift definido sobre  $s \in S$ .

Tomemos el subconjunto  $\hat{S} \subset S$ , el cual está definido via la matriz de transición  $A(\alpha_{i,j})$  de la siguiente forma:

Dada una sucesión  $\hat{s} \in \hat{S}$ , tal que:

$$\hat{s} = (\dots, \hat{a}_{-2}, \hat{a}_{-1}; \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots)$$

entonces para todo  $\hat{a}_i$  y  $\hat{a}_{i+1}$ , con  $i \in \mathbb{Z}$ , se debe cumplir que:

$$\alpha_{\hat{a}_i, \hat{a}_{i+1}} = 1$$

Al conjunto  $\hat{S}$  le denominaremos conjunto de sucesiones admisible.

**Teorema V.12** Consideremos las hipótesis del lema 7 y lema 8. Para los difeomorfismos  $F_K^{d+m}$  de  $B(p_1, \epsilon(p_1)K)$  a  $B(p_2, \epsilon(p_2)K)$  y  $F_K^{d+i}$  de  $B(p_2, \epsilon(p_2)K)$  a  $B(p_1, \epsilon(p_1)K)$ , se cumplen las siguientes afirmaciones:

- i. Las bandas horizontales se aplican en bandas verticales (y viceversa), aplicando las fronteras horizontales en fronteras horizontales y lo mismo para las fronteras verticales:

$$F_K^{d+m}(H_i^{P^1}) = V_i^{P^2} \quad , \quad F_K^{d+i}(H_i^{P^2}) = V_i^{P^1} \quad ,$$

para  $i = 1, 2$ .

ii. Sea una banda horizontal  $h_j^{P_1} \subset H_j^{P_1}$  con diámetro  $d(h_j^{P_1}) > 0$ , entonces:

$$d(F_K^{-l-d}(h_j^{P_1}) \cap H_j^{P_2}) \leq \nu_1 d(h_j^{P_1}) \quad j = 1, 2 \text{ y } 0 < \nu_1 < 1,$$

$$d(F_K^{-m-n}(h_j^{P_2}) \cap H_j^{P_1}) \leq \nu_2 d(h_j^{P_2}) \quad j = 1, 2 \text{ y } 0 < \nu_2 < 1,$$

iii. Sea una banda vertical  $v_j^{P_1} \subset V_j^{P_1}$  con diámetro  $d(v_j^{P_1}) > 0$ , entonces:

$$d(F_K^{m+n}(v_j^{P_1}) \cap V_j^{P_2}) \leq \nu_3 d(v_j^{P_1}) \quad j = 1, 2 \text{ y } 0 < \nu_3 < 1,$$

$$d(F_K^{i+d}(v_j^{P_2}) \cap V_j^{P_1}) \leq \nu_4 d(v_j^{P_2}) \quad j = 1, 2 \text{ y } 0 < \nu_4 < 1.$$

iv. Sea  $F_K^{m+n}$  restringido a  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{B}(p_1, \epsilon(p_1)K)$  y  $F_K^{i+d}$  restringido a  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{B}(p_2, \epsilon(p_2)K)$ . Estos difeomorfismos poseen a un shift  $\sigma$  como subsistema, con sucesiones de elementos  $\{1, 2, 3, 4\}$ , restringidos a las sucesiones admisibles  $\hat{s} \in \hat{S}$ . Así existen los homeomorfismos  $\tau_i$  del espacio de sucesiones  $\hat{S}$  a  $\mathcal{B}(p_i, \epsilon(p_i)K)$ , con  $i = 1, 2$ , tales que:

$$F_K^{m+n} \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \sigma, \quad F_K^{i+d} \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \sigma.$$

**Demostración teorema 12 :**

Para (i), se demuestra por el lema 7.

Para (ii) y (iii), se demuestra por el lema 8.

Para (iv), se demuestra por el teorema 5.1 de [49] tomando  $n=4$ . □

## V.4 Órbitas periódicas mal ordenadas.

El teorema 12 nos muestra la conjugación de la dinámica en ciertos subconjuntos de dos puntos hiperbólicos, que comparten puntos heteroclínicos, con un shift, cuyas sucesiones admisibles están gobernadas por una matriz de transición.

Por esta conjugación podemos asegurar la existencia de puntos periódicos contenidos en un cantoriano. El origen de este conjunto cantoriano está en la clausura de las infinitas intersecciones de bandas verticales y horizontales cuyos diámetros convergen a cero. Como hemos visto en los lemas 7 y 8, dichos conjuntos están en los entornos de los puntos  $p_1$  y  $p_2$ . el siguiente paso es mostrar que las órbitas periódicas contenidas en el cantoriano son mal ordenadas en el sentido de Birkhoff (es decir, órbitas no monótonas).

La manera de mostrar que estas órbitas son mal ordenadas es estudiando un entorno del cantoriano. Asignamos una orientación a las bandas para luego determinar como varía esta orientación en las sucesivas imágenes del conjunto, debidas a la aplicación  $F_K$ . Por estar este conjunto en el entorno de un punto hiperbólico, sus imágenes se desplazan en un entorno de la variedad invariante inestable hasta alcanzar un entorno de la variedad estable del otro punto periódico. A continuación, las siguientes imágenes se desplazan cerca de esta otra variedad. En el entorno de esta transición estudiaremos la pérdida de orientación, y por lo tanto la pérdida de orden.

**Definición V.13** Sea  $C$  el conjunto cantoriano contenido en la adherencia de las infinitas intersecciones de las imágenes de las bandas horizontales y verticales en el entorno de  $\mathcal{B}(p_1, \epsilon(p_1)K)$ :

$$C = \overline{\left( \bigcap_{k=1}^{\infty} F_K^{-k(n+m+l+d)}(H_1^{P_1} \cup H_2^{P_1}) \right) \cap \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} F_K^{k(n+m+l+d)}(V_1^{P_1} \cup V_2^{P_1}) \right)}.$$

**Definición V.14** Sea  $V_i^{P_1}$  una de las bandas verticales del entorno  $B(P_1, \epsilon(P_1); K)$ . Tomemos un segmento de curva  $\bar{v}$  que conecte las fronteras horizontales de  $V_i^{P_1}$  y que coincida con la gráfica de una función en  $\theta$ . Sean los puntos  $x_1$  y  $x_2$  tales que  $x_1 \neq x_2$ . Suponemos que estos puntos cumplen las siguientes condiciones:

- i.  $x_j \in (C \cap V_i^{P_1})$  y  $x_j \in \bar{v}$  para  $j = 1, 2$ ,
- ii.  $\Pi_\theta(x_1) < \Pi_\theta(x_2)$ .

Damos una orientación a  $\bar{v}$ , por ejemplo,  $\bar{v}$  tiene la dirección de  $x_1$  a  $x_2$ .

**Lema V.15** Existe un  $a \in \mathbb{Z}$  tal que para  $x_1 \in \bar{v}$  y  $x_2 \in \bar{v}$  se tiene la siguiente propiedad:

$$\text{Si } \Pi_\theta(F_K^a(x_1)) < \Pi_\theta(F_K^a(x_2)) ,$$

entonces

$$\Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_1)) > \Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_2)) .$$

**Demostración lema 15 :** Tomemos a  $V_i^{P_1}$  tal que  $\bar{v} \subset V_i^{P_1}$ . Por el lema 7 sabemos que  $F_K^{-d-l}(V_i^{P_1}) = H_i^{P_2}$  y que las fronteras horizontales de  $V_i^{P_1}$  se aplican en las fronteras horizontales de  $H_i^{P_2}$ . Así  $F_K^{-d-l}(\bar{v})$  es un segmento de curva, que conecta las fronteras horizontales de  $H_i^{P_2}$ .

Tomemos un  $\bar{v}$  tal que  $F_K^{-d-l}(\bar{v}) \subset V_i^{P_2}$ , aún más, que  $F_K^{-d-l}(\bar{v}) \subset \partial V_i^{P_2}$ , donde  $\partial V_i^{P_2}$  es la frontera de una banda vertical contenida en  $V_i^{P_2}$  y que  $F_K^{-d-l}(\bar{v})$  está contenida en la frontera vertical de  $V_i^{P_2}$  ( ver figura 23).

Continuando con el lema 7, tenemos que  $F_K^{-m-n}(V_i^{P_2}) = H_i^{P_1}$ . Entonces si  $v_i^{P_2} \in V_i^{P_2}$ , se tiene  $F_K^{-m-n}(v_i^{P_2}) = H_i^{P_1}$ .

Al aplicar las fronteras horizontales en horizontales, la imagen de  $\bar{v}$  al final del ciclo es:

$$F_K^{-d-l-m-n}(\bar{v}) \subset \eta_i^{P_1} ,$$

donde  $\eta_i^{P_1}$  es una curva que une las fronteras horizontales de  $H_i^{P_1}$  y es la gráfica de una función de  $\theta$  por ser la frontera de la imagen de una banda.

Examinando  $\bar{v}$  y  $F_K^{-d-l-m-n}(\bar{v})$  vemos que ambas están contenidas en curvas que conectan fronteras horizontales de bandas y que coinciden con la gráfica de una función en  $\theta$ . Sin embargo hemos de notar que la orientación de  $F_K^{-d-l-m-n}(\bar{v})$  se invierte, debido a la construcción geométrica del circuito ( el circuito es:  $p_1 \rightarrow r_1 \rightarrow p_2 \rightarrow s \rightarrow p_1$  ).

Entonces la orientación de  $F_K^{-d-l-m-n}(\bar{v})$  es contraria a la de  $\bar{v}$ . Como  $x_1 \in \bar{v}$  y  $x_2 \in \bar{v}$  por hipótesis:

$$\Pi_\theta(x_1) < \Pi_\theta(x_2) ,$$

entonces

$$\Pi_\theta(F_K^{-d-l-m-n}(x_1)) > \Pi_\theta(F_K^{-d-l-m-n}(x_2)) .$$

Por lo tanto, existe un  $a \in \mathbb{Z}$ , contenido en el intervalo  $a \in [-d-l-m-n, 0]$  con la siguiente propiedad:

$$\Pi_\theta(F_K^a(x_1)) < \Pi_\theta(F_K^a(x_2)) ,$$

implica que

$$\Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_1)) > \Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_2)) ,$$

□

**Lema V.16** Sea  $O(x)$  una órbita periódica perteneciente a  $C$ . Entonces  $O(x)$  es una órbita Birkhoff mal ordenada si al menos tiene dos símbolos iguales en cualquier subsucesión de período mínimo.

**Demostración lema 16 :** Sea  $O(x) \subset C$  y tomamos  $x_1 \in O(x)$  y  $x_2 \in O(x)$  tales que  $x_1 \in V_i^{P_1}$  y  $x_2 \in V_i^{P_1}$  siendo  $x_1 \neq x_2$  (existen al menos dos puntos distintos en  $V_i^{P_1}$  al haber dos símbolos iguales en el período). Estos puntos cumplen las siguientes condiciones:

i.  $\Pi_\theta(x_1) < \Pi_\theta(x_2)$  .

ii.  $x_1 \in \bar{v}$  y  $x_2 \in \bar{v}$  con  $\bar{v}$  dado como en la definición 14.

Así, por el lema 15 vemos que existe un  $a \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\Pi_\theta(F_K^a(x_1)) < \Pi_\theta(F_K^a(x_2)) \quad ,$$

y

$$\Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_1)) > \Pi_\theta(F_K^{a+1}(x_2)) \quad ,$$

Tomemos  $x'_1 = F_K^a(x_1)$  y  $x'_2 = F_K^a(x_2)$ , donde  $x'_1 = O(x)$  y  $x'_2 = O(x)$ . Entonces verificamos que si

$$\Pi_\theta(x'_1) < \Pi_\theta(x'_2) \quad ,$$

tenemos que

$$\Pi_\theta(F_K(x'_1)) > \Pi_\theta(F_K(x'_2)) \quad .$$

Así demostramos que  $O(x)$  es una órbita Birkhoff mal ordenada. □

## V.5 Pérdida de orden.

En esta última sección examinamos el comportamiento de algunas órbitas periódicas monótonas cuando el valor del parámetro es mayor que el valor crítico.

En el capítulo III hemos mostrado como es la estructura geométrica de las resonancias en la aplicación standard. Para un valor del parámetro pequeño,  $K \ll 1$ , los puntos periódicos asociados a la resonancia se equidistribuyen en la dirección angular. Estos puntos están posicionados sobre la gráfica de una función tipo Lipschitz (sección III.7). Esto es congruente con la existencia de órbitas periódicas monótonas (sección II.7).

A medida que incrementamos el valor del parámetro  $K$ , la distribución angular de los puntos periódicos, correspondientes a una órbita, se alejan de una equidistribución. Más aún, cuando  $K \rightarrow K_C$  estos puntos periódicos se aproximan en la dirección angular arbitrariamente.

Podría suceder que existiera un valor de  $K$  para el cual una órbita periódica monótona dejara de serlo (con la posible creación de otra órbita del mismo período pero monótona). Esto supondría la inexistencia de IRC en el entorno de dichos puntos periódicos (utilizando el criterio de Boyland y Hall [43]).

Estudiamos numéricamente el comportamiento de las órbitas periódicas en el entorno del valor del parámetro crítico. Nuestro interés es determinar la pérdida de monotonía.

Sea  $\{x_i\}$  los puntos periódicos que pertenecen a una órbita periódica monótona con número de rotación  $\frac{p}{n}$ . Introducimos la siguiente función de distancia:

$$d\left(\frac{p}{n}, K\right) = \min_{\substack{i, j \in \mathbb{Z} \\ i \neq j \\ x_i < x_j}} n (\Pi_1(F_K(x_i)) - \Pi_1(F_K(x_j))) ,$$

donde  $x_i, x_j \in O(x)$ . Debemos notar que  $d(\frac{p}{n}, K) < 0$  implica que la órbita  $O(x)$  no es monótona.

Utilizando las mismas técnicas descritas en la sección IV.4, para localizar órbitas periódicas, evaluamos la función  $d(\frac{p}{n}, K)$  para el caso de los aproximantes de la razón áurea y  $K > K_Q$ .

Estudiamos el comportamiento de las órbitas de tipo hiperbólico para valores del parámetro tal que el residuo es muy grande,  $|\text{Res}| < 3 \times 10^5$  [58]. Más allá de este valor es muy difícil calcular de forma precisa la órbita hiperbólica puesto que se convierte en altamente inestable.

Las figuras 24 y 25 muestran la gráfica del logaritmo de la función  $d$  para  $\frac{p}{n} = \frac{4181}{6765}$  y  $\frac{p}{n} = \frac{6765}{10946}$ . En ellas se puede apreciar que la distancia tiende a cero, aparentemente en forma exponencial. Sin embargo en ningún caso detectamos pérdida de monotonía.

Debemos mostrar que la función  $d(\frac{p}{n}, K)$  cambia notablemente cuando  $K$  es próximo al valor crítico y escalando adecuadamente ambas gráficas parecen coincidir.

Podemos concluir que las órbitas que surgen como órbitas periódicas monótonas lo siguen siendo para todo valor del parámetro. MacKay y Leage [59] construyen órbitas periódicas no monótonas a partir de tangencias de la imagen de las líneas de simetría. Estas órbitas no existen para valores pequeños del parámetro ( $K \ll 1$ ).

# Bibliografia

- [1] B. V. Chirikov, *Phys. Reports* **52** (1979) 262.
- [2] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mecánica* Vol. 1, Ed. Revertè, S.A. Barcelona 1978.
- [3] J. Guckenheimer, P. Holmes *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* Springer-Verlag, New York 1983 .
- [4] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1183.
- [5] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York 1983.
- [6] G. D. Birkhoff, *Surface Transformation and their Dynamical Application*, *Acta Mathematica* **43** (1920).
- [7] M. R. Herman, *Astérisque* 103-104 (1983).
- [8] D. F. Escande, *Phys. Reports* **121** (1985) 165.
- [9] R. S. MacKay *Renormalisation in Area Preserving Maps*, Thesis, Princenton 1982 (Univ. Microfilms Int. Ann Arbor MI).
- [10] A. Benseny, *Contribució a l'estudi del Problema Restringit de 3 Cossos per a Valors Petits del Paràmetre de Massa*. Thesis, Univ. de Barcelona (1984)
- [11] A. Benseny, A. Olvera, *Escape and capture in the RTBP*. en Long-Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems. NATO-ASI, Cortina d'Ampezzo (1987).
- [12] R. Mc Gehee, *J. Diff. Eq.* **14** (1973) 70.
- [13] V. Bangert, *Mather Sets for Twist Maps and Geodesics on Tori.*, Preprint (1987)
- [14] P. I. Belobrov, V.V. Beloshapkin, G. M. Zaslavskoe, A. G. Tret'Yakov, *Phys. Letters A* (**122**) (1987) 323.
- [15] V. I. Arnold, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. Benjamin, New York (1968).
- [16] E. Zehnder, *Comm. in Pure and Applied Math.* Vol. XXVI (1973) 131.

- [17] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York (1978).
- [18] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*. Second Ed., Benjamin, New York (1978).
- [19] J. Llibre, C. Simó, *Math. Ann.* **248** (1980) 153.
- [20] R. S. MacKay, J. Stark, *Lectures on Orbits of Minimal Action for Area Preserving Maps*. Math. Institute, Warwick (1985).
- [21] E. Piña, L. Jiménez Lara, *Physica* **28D** (1987) 369.
- [22] I. Leage, R. S. MacKay, *Phys. Letters A* **118** 274.
- [23] J. N. Mather, *Topology* **21** (1982) 457.
- [24] A. Katok, *Lecture Notes in Physics*, Ed. E. Garrido **179** 47.
- [25] G. D. Birkhoff, *Collected Works*, Vol. 1, AMS, New York (1950) 673.
- [26] J. Moser, *Stable and Random Motion in Dynamical Systems*. Princenton Univ. Press, (1973).
- [27] J. Mather, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 301.
- [28] J. Mather, *Comment. Math Helvetici* **60** (1985), 508.
- [29] S. Aubry, *Lecture Notes in Math*. Ed. Chudnovsky.
- [30] A. Delshams, *Por Que la Difusión de Arnold Aparece Genéricamente en los Sistemas Hamiltonianos con más de 2 Grados de Libertad*. Tesis, Univ. de Barcelona (1984).
- [31] J. Moser, *Nach. Akad. Wiss. Gottingen, Math-Phys. Kl., IIa N 1*, (1962) 1.
- [32] H. Rüssmann, *Lecture Notes in Math.* **1007** (1983).
- [33] J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York (1982).
- [34] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York (1983).
- [35] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York (1972).
- [36] A. Chenciner, *Bifurcations de Points Fixes Elliptiques III*. Paris VII, (1986).
- [37] R. S. MacKay, J. D. Meiss, I. C. Percival, *Resonances in Area Preserving Maps.*, U. Warwick (1986).
- [38] D. Goroff, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 337.
- [39] R. S. MacKay, *Transition to Chaos for Area Preserving Maps*. U. Warwick (1985).
- [40] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions.*, Noordhoff, Groningen (1963).

- [41] R. S. MacKay, I. C. Percival, *Converse KAM: Theory and Practice*. IHES/M/84/14 (1984).
- [42] J. Mather, *Proceedings of the NATO-ARW on Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics*. Reidel, Dordrecht (1987).
- [43] P. L. Boyland, G. R. Hall, *Invariant Circles and the Order Structure of Periodic Orbits in Monotone Twist Maps.*, Preprint
- [44] A. Olvera, C. Simó, *Physica* 26D (1987), 181.
- [45] G. Dahlquist, A. Björck, *Numerical Methods*. Prentice Hall, New York (1969).
- [46] J. Palis, *Differential Invariant of Topological Conjugacy*. Astérisque 51 (1978) 335.
- [47] R. S. Mackay, J. D. Meiss, I. C. Percival, *Physica* 13D (1984) 55.
- [48] B. V. Chirikov, *Lecture Notes in Physics*, Ed. E. Garrido 179 29.
- [49] R. Martínez, *Estudio Cualitativo del Flujo en el Problema Isóceles Plano de 3 Cuerpos*. Tesis, U.A.B., Barcelona (1983).
- [50] M. R. Herman, *Astérisque* 144 (1986).
- [51] A. Celletti, L. Chierchia, *Construction of analytic KAM surfaces an effective stability bounds* ETH-Zentrum, Zürich (1987) .
- [52] R. S. MacKay, J. Stark, J. M. Greene, *Boundary Circles for Area Preserving Maps*. *Physica-D* (en prensa).
- [53] K. Hockett, P. Holmes, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 6 (1986) 205.
- [54] F. Takens, *Indag. Math.* 33 (1971) 379.
- [55] M. Wojtkowki, *On the Ergodic Properties of Piecewise Linear Perturbations of the Twist Map*. Report 82/1 Univ. Namur, Bélgica (1982).
- [56] B. Mestel, I. Percival, *Physica* 24D (1987) 172.
- [57] D. Rana, *Proof of Accurate Upper and Lower Bounds to Stability in Small Denominator Problems*, Ph.D. Thesis, Princeton (1987)
- [58] A. Olvera, C. Simó, *The Obstruction Method and some Numerical Experiments related to the Standard Map* Proc. Periodic Solutions of Hamiltonian Systems and Related Topics, Ed. P.H. Rabinowitz et al., D. Reidel (1987) 235.
- [59] I. Leage, R. S. MacKay , *Phys. Letters A* 118 (1986) 274.

# Figuras del capítulo I

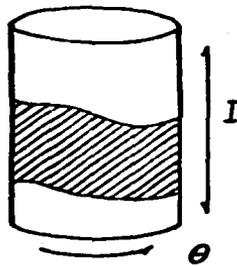


Figura I.1:

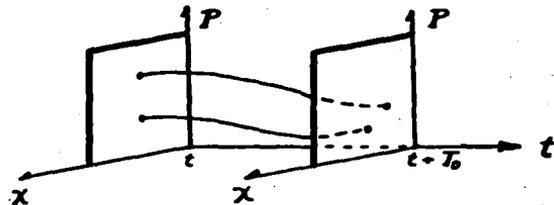
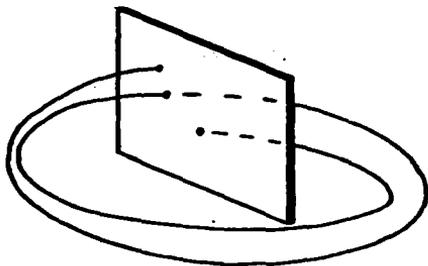


Figura I.2:

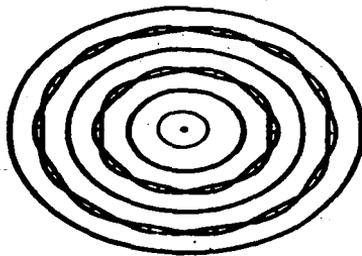
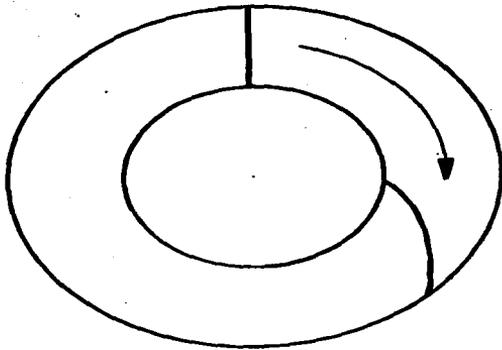


Figura I.3:



**Figure I.4:**

Figuras del capítulo II

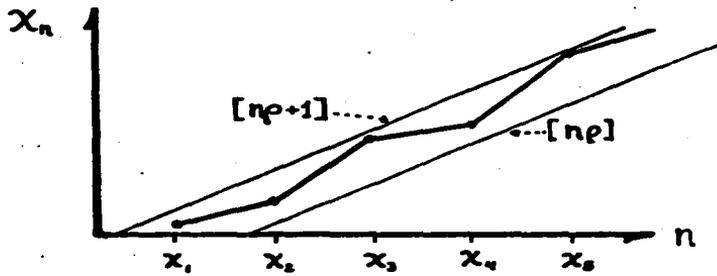


Figura II.1:

### Figuras del capítulo III

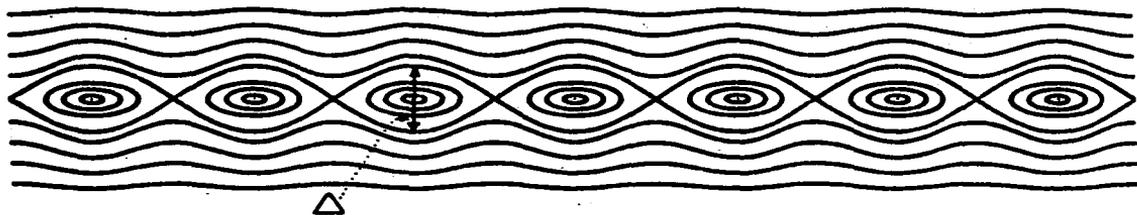


Figura III.1:

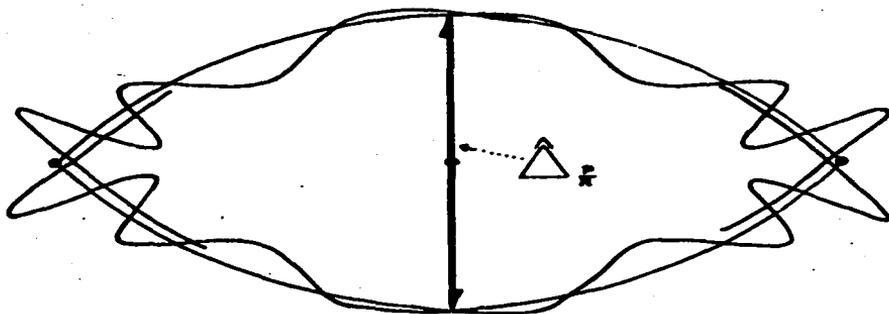


Figura III.2:

# Figuras del capítulo IV

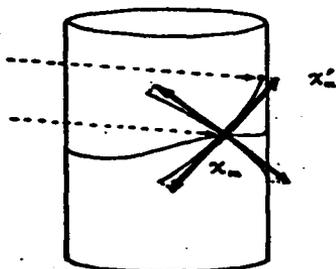


Figura IV.1:

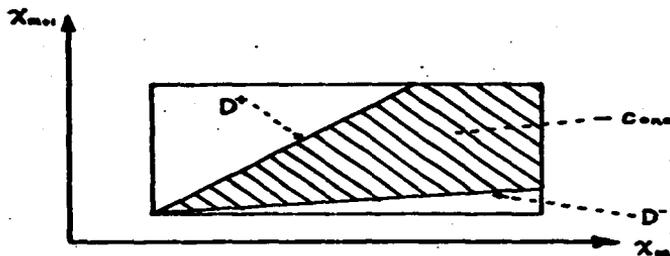


Figura IV.2:

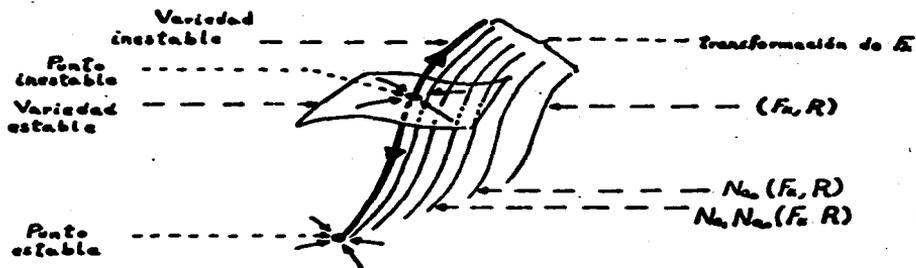


Figura IV.3:

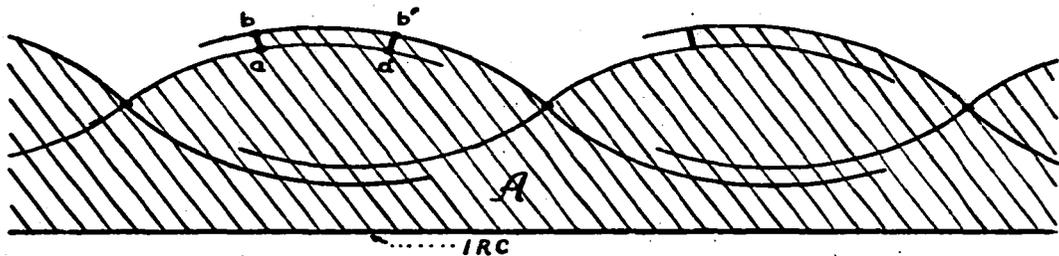


Figura IV.4:



Conexión homoclínica



Intersección transversal

Figura IV.5:

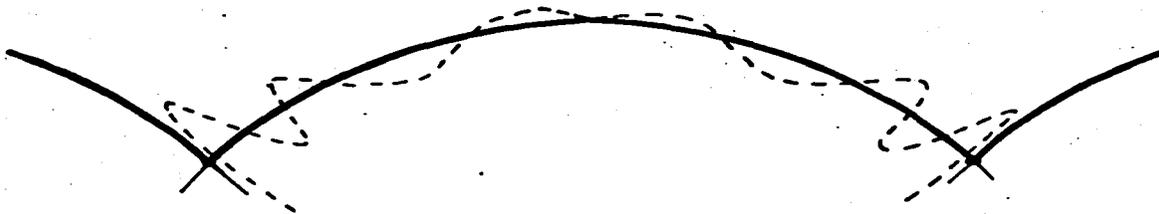
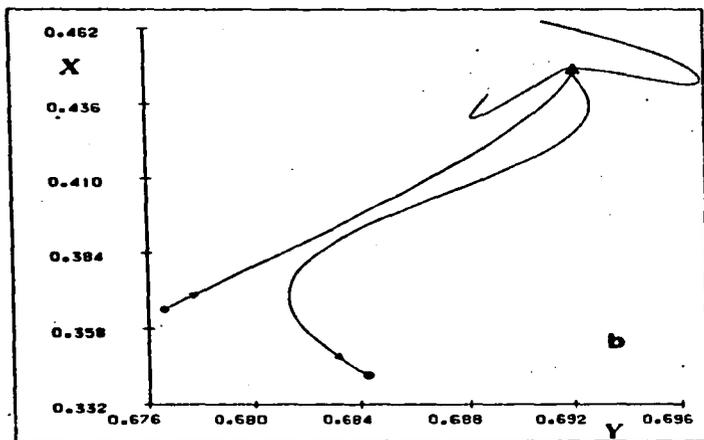
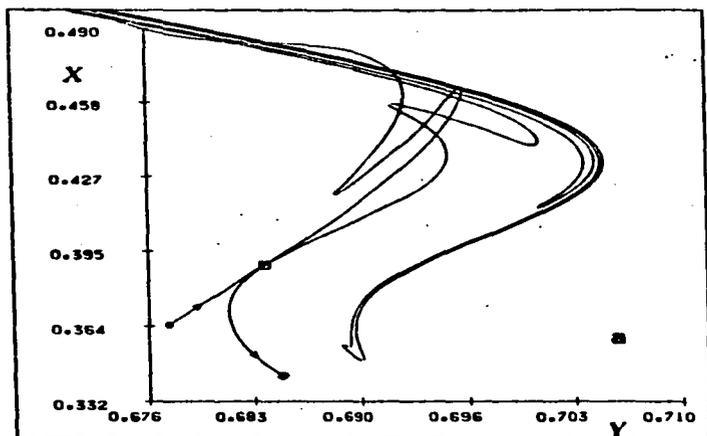
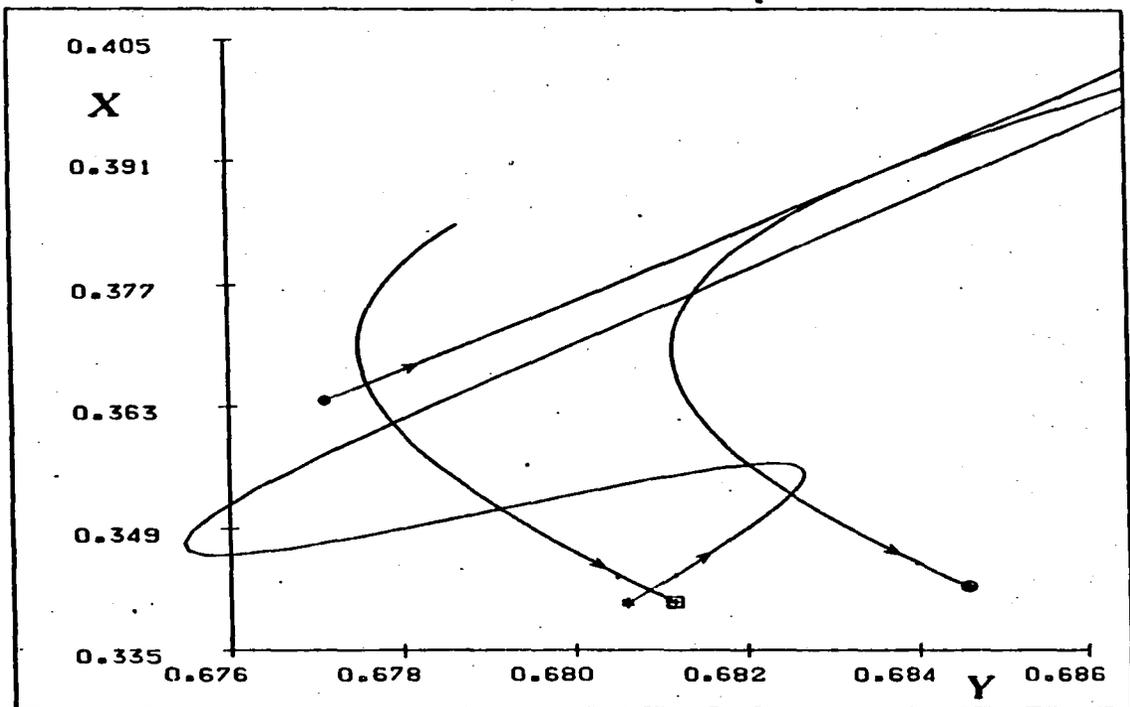


Figura IV.6:

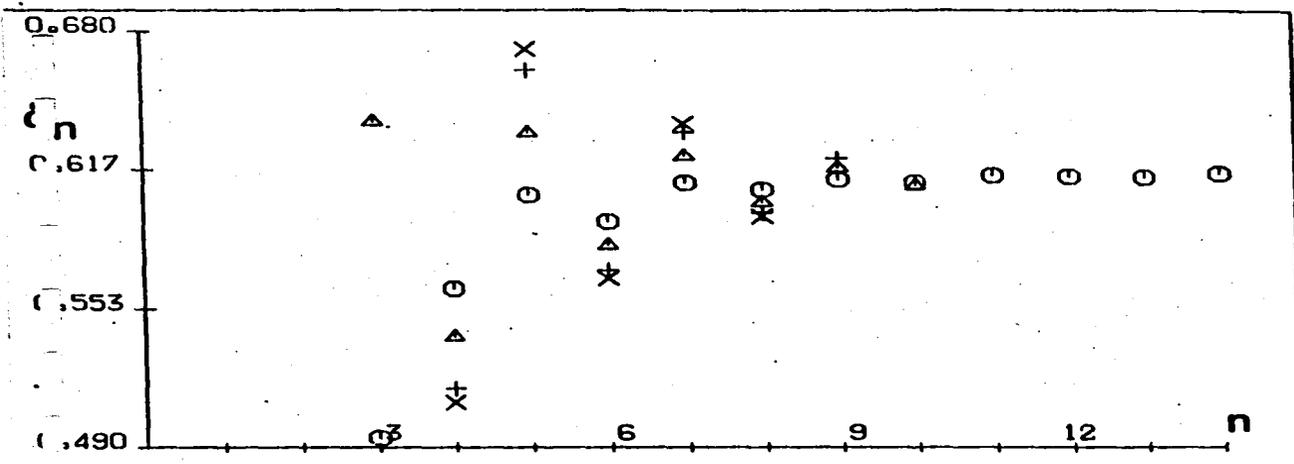


a) La variedad invariante estable del HMPP con  $\rho = \frac{5}{8}$  ( $\oplus$ ) tiene tangencia heteroclínica en la primera lengua ( $\square$ ) con la variedad inestable del HMPP con  $\rho = \frac{8}{13}$  ( $\odot$ ) para el valor del parámetro  $K = 1.085169$ . b) Los mismos puntos tienen tangencia heteroclínica ( $\triangle$ ) en la segunda lengua para  $K = 1.0547$ .



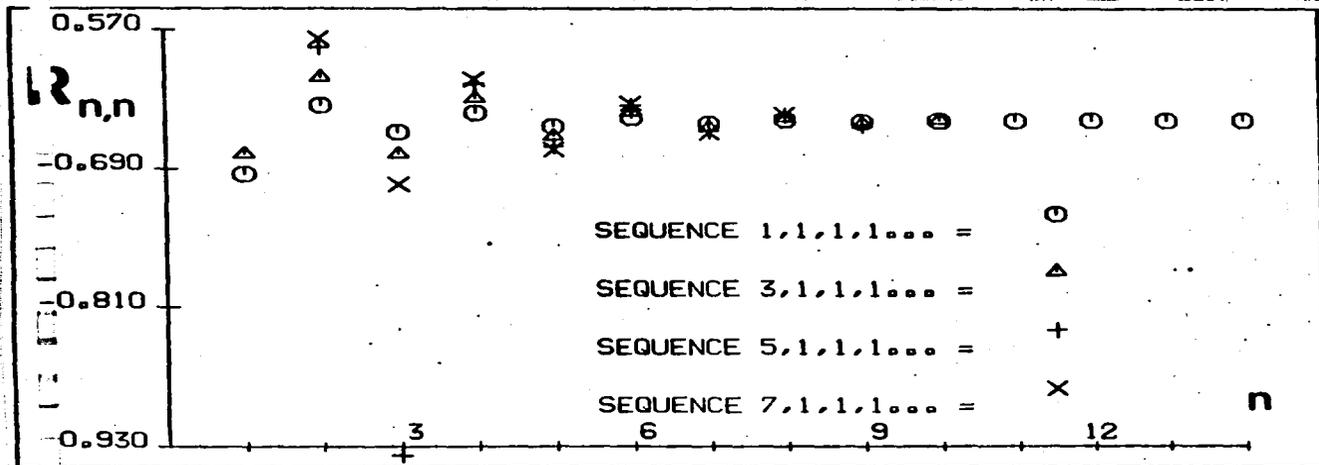
La variedad invariante estable del HMPP con  $\rho = \frac{5}{8}$  ( $\oplus$ ) y  $\rho = \frac{8}{13}$  ( $\odot$ ) tiene tangencia heteroclínica en la primera lengua para  $K = 1.085169$ . HMPP con número de rotación en el intervalo  $[\frac{5}{8}, \frac{8}{13}]$  tienen intersección transversal entre sus variedades invariantes (en la primera lengua), en este caso los HPMM con número de rotación  $\frac{13}{21}$  ( $\square$ ) y  $\frac{21}{34}$  ( $\ast$ ) lo tienen.

Figura IV.8:



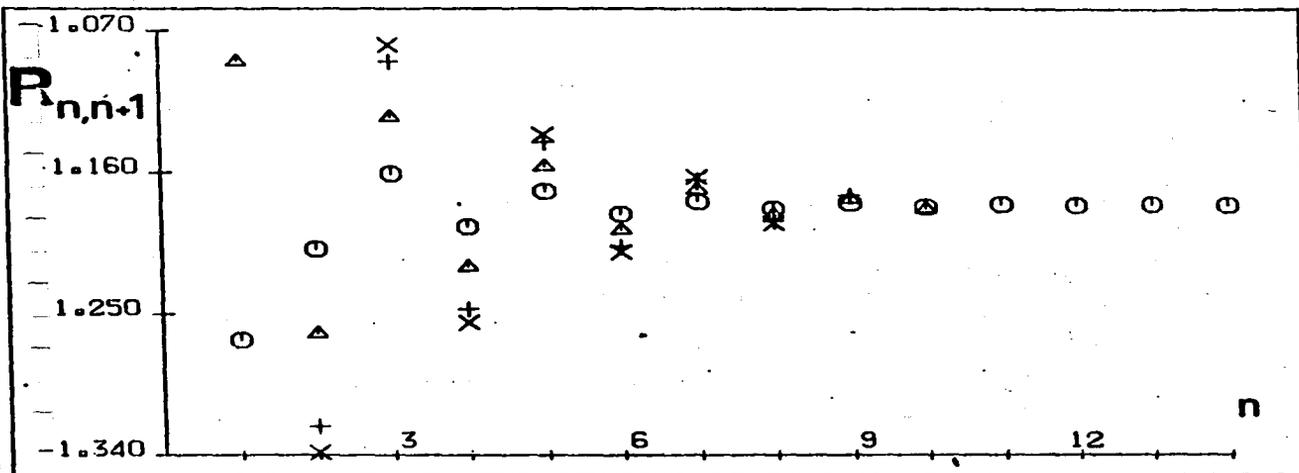
Gráfica del valor de  $\delta_n$  contra  $n$  para IRC nobles.

Figura IV.9:



Gráfica del valor de  $Res_{n,n}$  contra  $n$  para IRC nobles.

Figura IV.10:



Gráfica del valor de  $Res_{n,n+1}$  contra  $n$  para IRC nobles.

Figura IV.11:

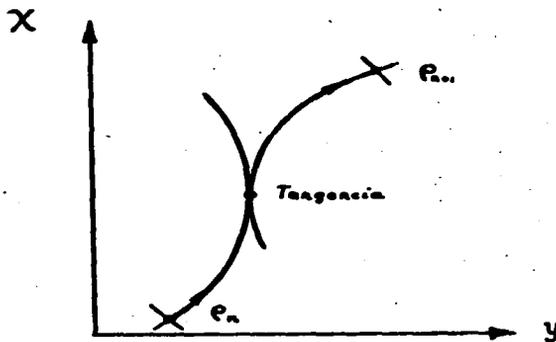


Figura IV.12:

# Figuras del capítulo V

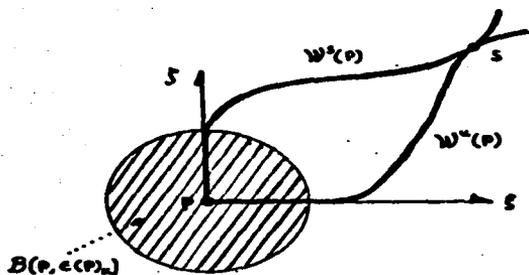


Figura V.1:

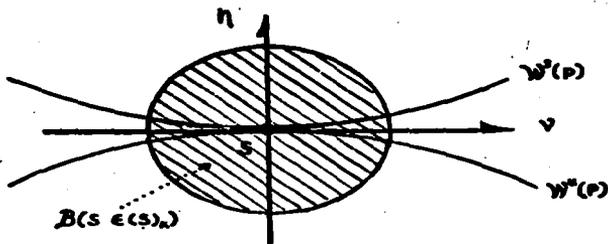


Figura V.2:

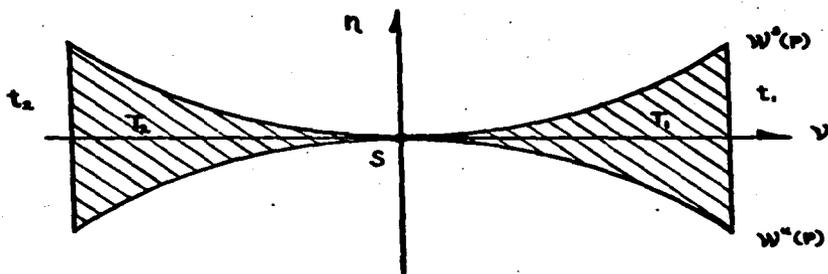


Figura V.3:

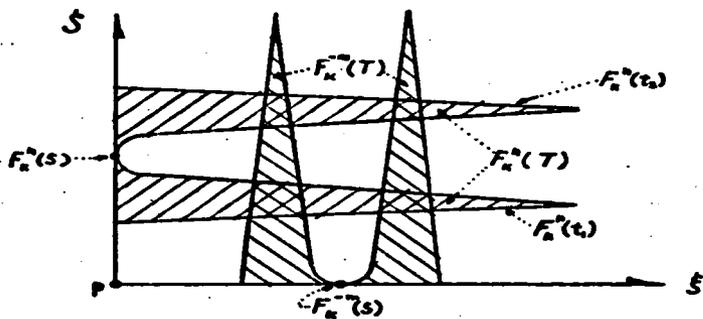


Figura V.4:

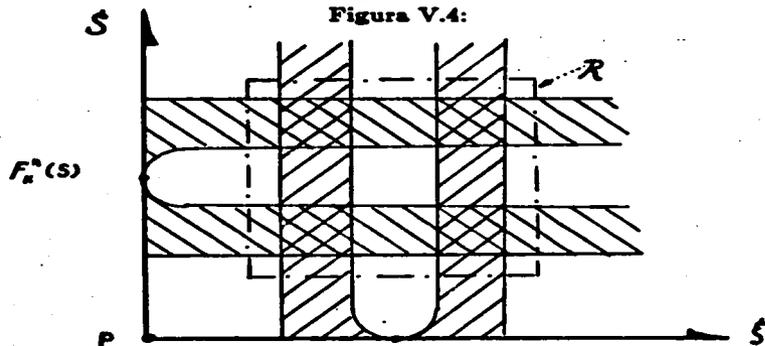


Figura V.5:

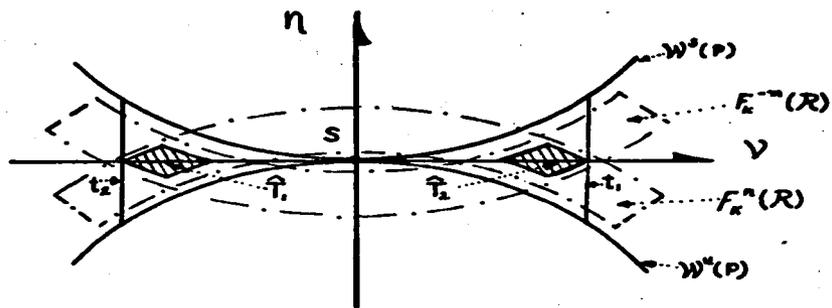


Figura V.6:

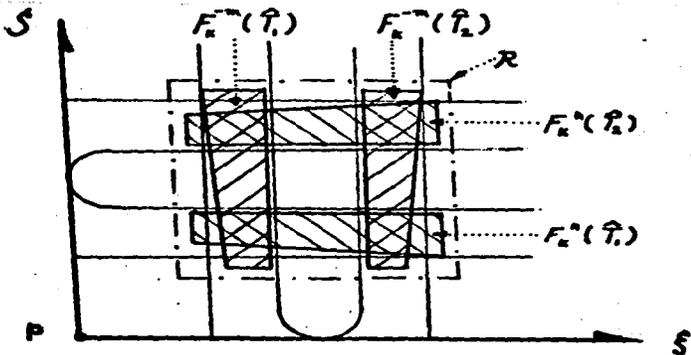


Figura V.7:

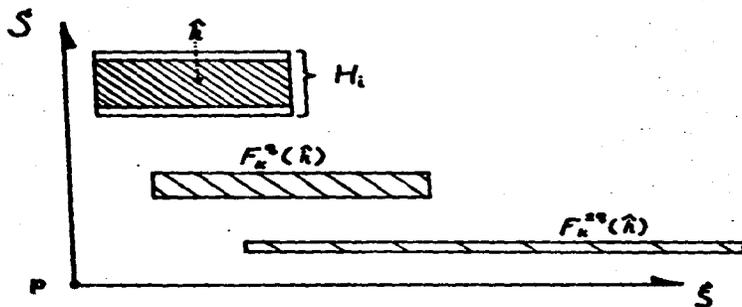


Figura V.8:

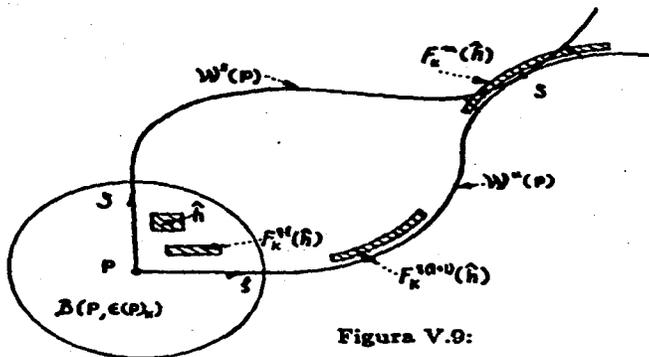


Figura V.9:

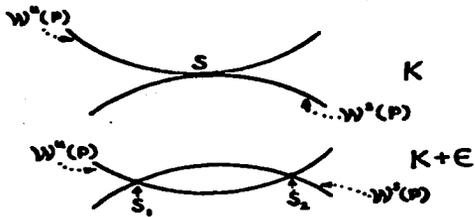


Figura V.10:

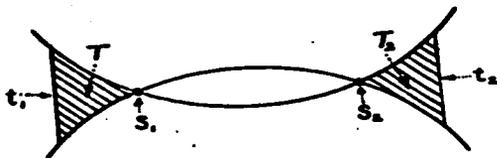


Figura V.11:

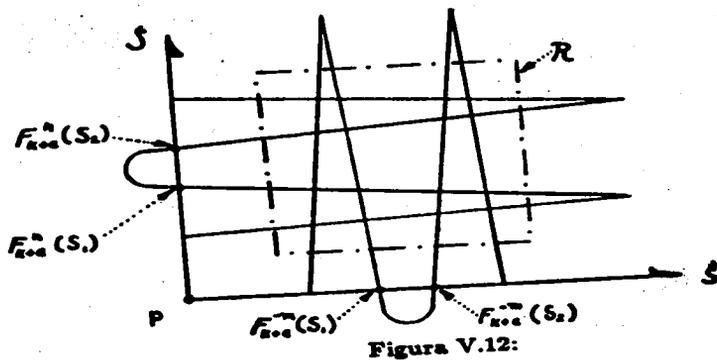


Figura V.12:

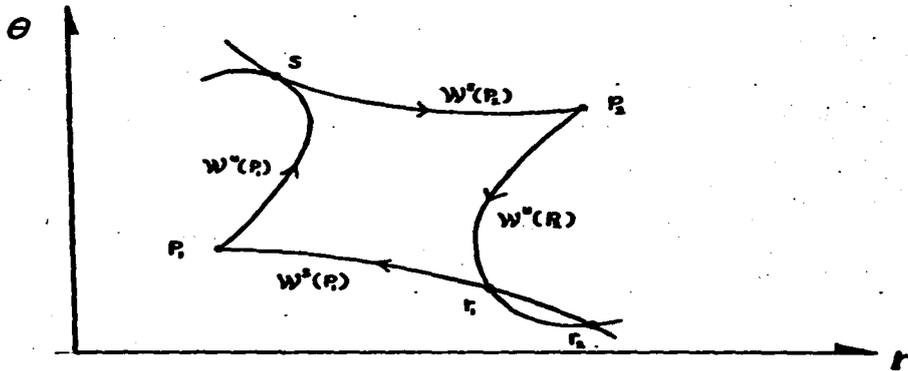


Figura V.13:

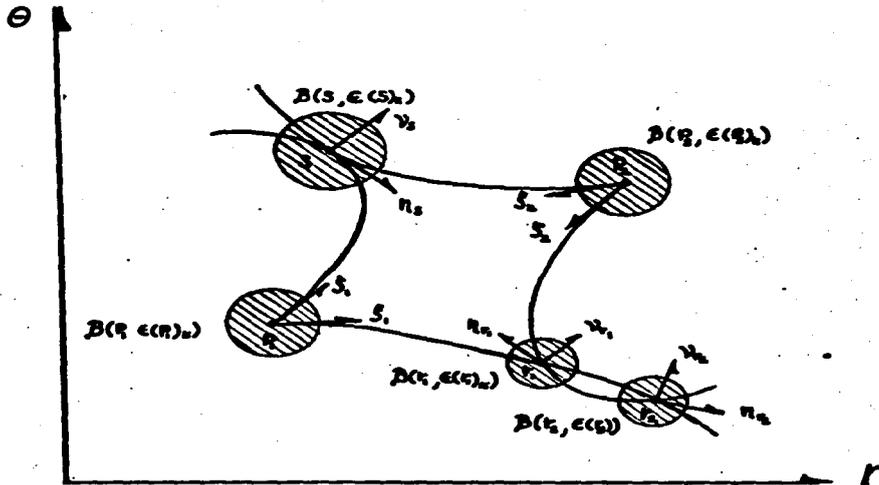


Figura V.14:

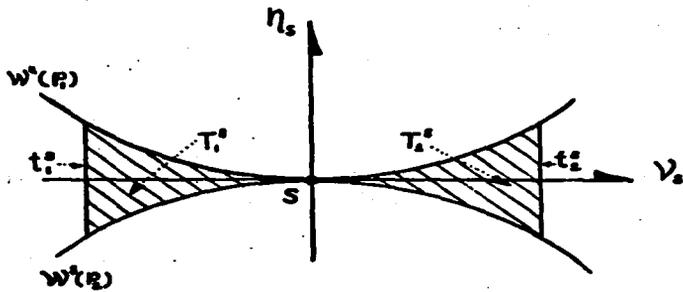


Figura V.15:

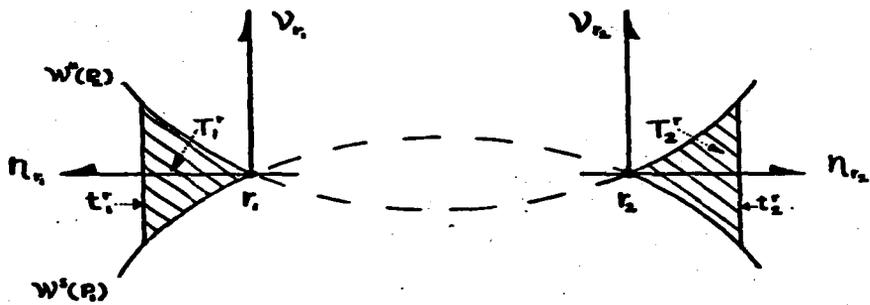


Figura V.16:

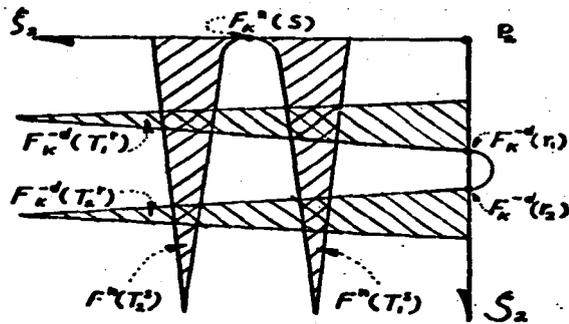
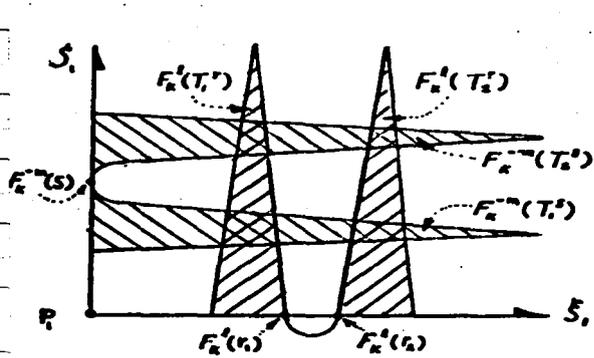


Figura V.17:

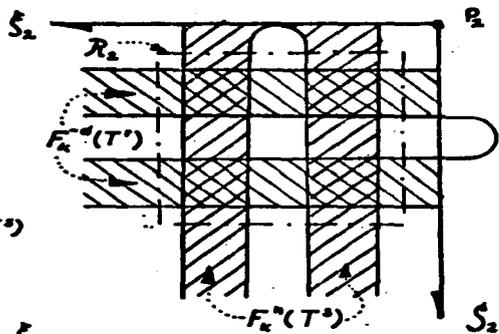
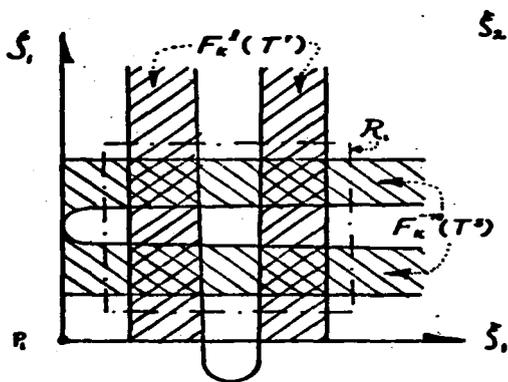


Figura V.18:

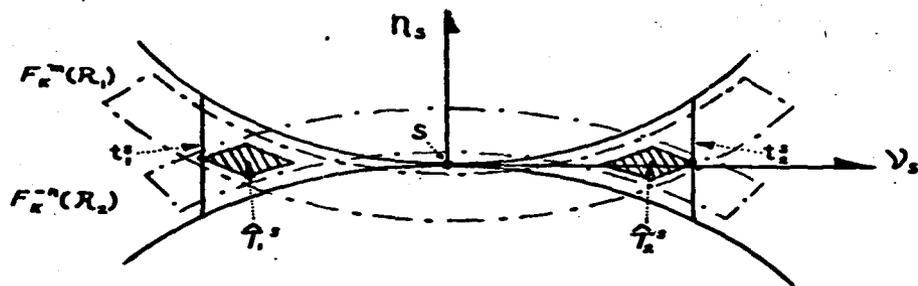


Figura V.19:

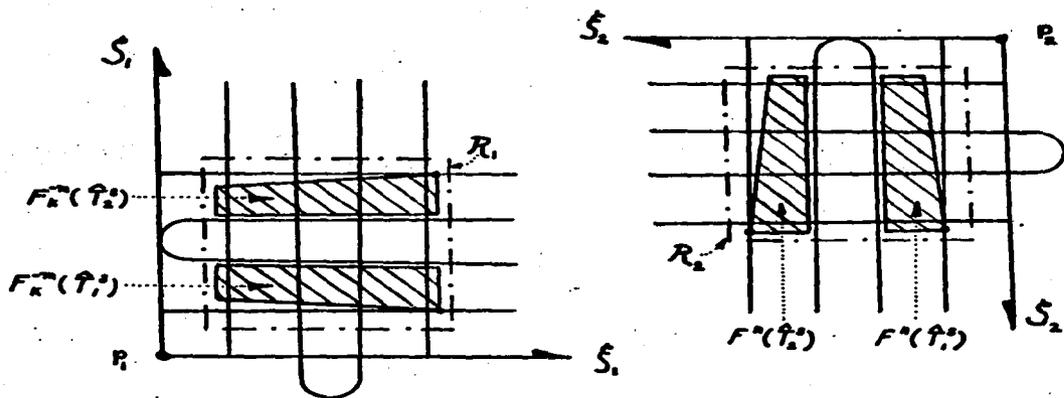


Figura V.20:

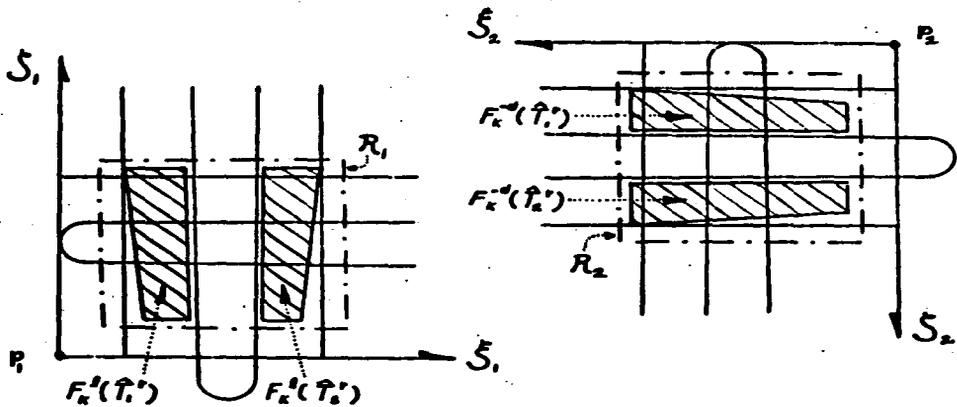


Figura V.21:

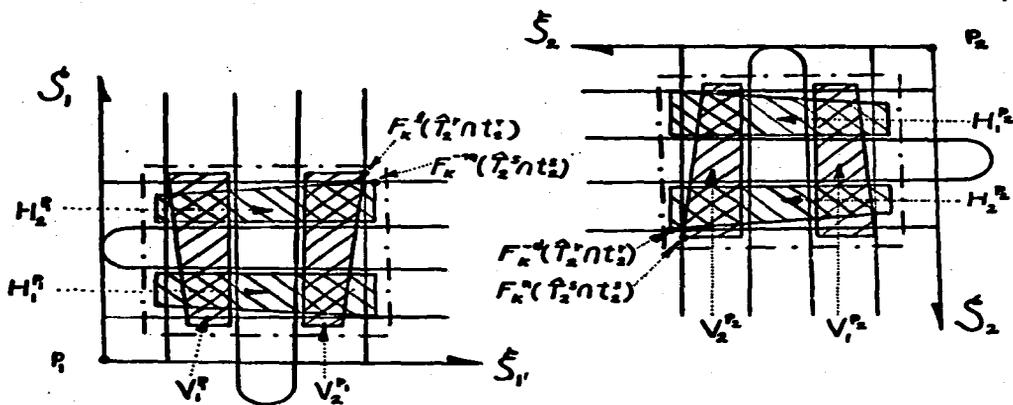


Figura V.22:

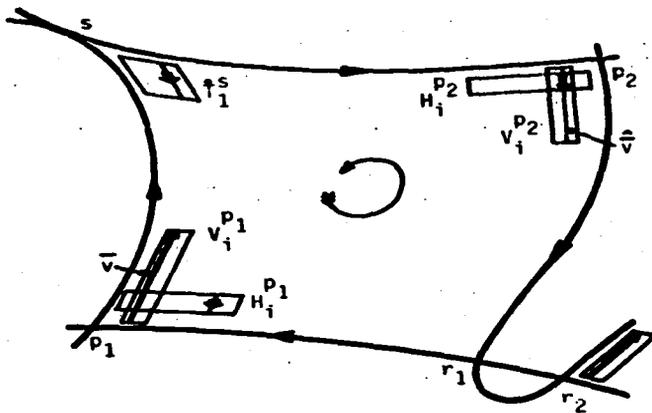


Figura V.23:

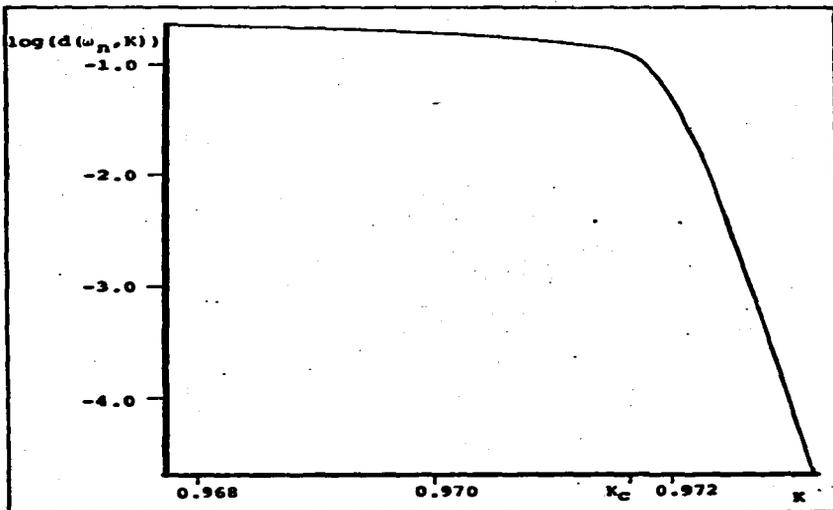


Figura V.24:

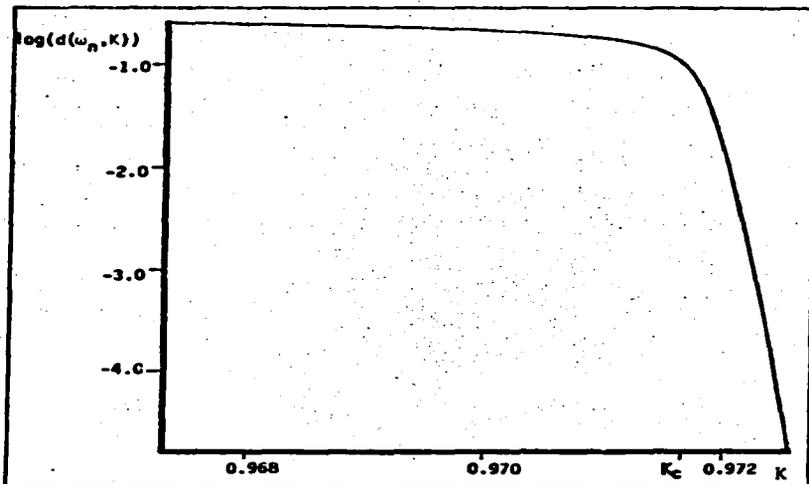


Figura V.25: