# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# Fundamentos de la teoria de representaciones de Bimódulos sobre categorias

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

( M A T E M A T I C A S )



P R E S E N T A

Luis Miranda Martínez



México, D.F. Abril 1988

# INDICE

# INTRODUCCION

En muchas cuestiones de la teoría de representaciones y en diferentes ramas de las matemáticas (vease [7] y [19]), encontramos problemas que pueden considerarse, en el lenguaje del álgebra lineal, como problemas sobre equivalencia de ciertos conjuntos de matrices con respecto a un conjunto de transformaciones permitidas. Se han ideado diversos procedimientos para resolver estos problemas, sobre todo en conexión con la segunda conjetura de Brauer-Thrall (vease [12]). Una transferencia del lenguaje de matrices al lenguaje de categorías puede realizarse algunas veces sin dificultad y los problemas matriciales toman una forma natural y simple. (vease [5]). Aunque en otras situaciones, la interpretación categórica de problemas de clasificación del álgebra lineal no es tan obvia.
En los trabajos [15] y [16], Kleiner y Roiter probaron que una clase amplia de "problemas matriciales" pueden interpretarse como problemas de representaciones de DGC y QDGC, pero las definiciones de estas representaciones ha sido incómoda y difícil de entender. Tomando en cuenta estas consideraciones, en 1979, Roiter presentó un trabajo en el ICRA II, donde introdujo el concepto de Bimódulo sobre una categoría con estructura de coálgebra (BOCS) así como de sus

representaciones (vease[17]), una construcción más natural, esencialmente equivalente a las representaciones de DGC o QDGC (vease[18]). Asimismo presentó una nueva formulación de un algoritmo, ya descrito en otros términos en [15] y en [16], que permite, cuando el problema inicial es de tipo finito, describir todas las representaciones inescindibles y los morfismos entre ellas; resolviendo así el problema del cual partimos.
En el presente trabajo se aclara y simplifica la teoría de Kleiner-Roiter (para BOCS's), dándose los fundamentos de una teoría que hasta ahora, debido a su obscura presentación, ha impedido su uso para matemáticos fuera de la escuela de Kiev.

Tratando de hacer autocontenido este trabajo, en el capítulo 1 damos una presentación de conceptos y propiedades bien conocidos, los cuales son importantes e indispensables para nuestro objetivo; al mismo tiempo se introduce notación que se utilizará a lo largo de todo el trabajo.

Para una mayor información de estos conceptos y propiedades puede verse a [18].

En el capítulo 2 introducimos los conceptos necesarios y fundamentales, y se prueban los resultados más generales.
Concretamente: en la sección 2.1, empezamos estudiando

cotriples, la categoría de Kleisli asociada a un cotriple y pares de funtores adjuntos. Se relaciona la categoría de Kleisli inducida por un par de funtores adjuntos $(T,S)$ y el codominio de la adjunción.

En la sección 2.2, se introduce el concepto de Bocs y se da el cotriple asociado a un Bocs. Se define la categoría de las V-representaciones de un Bocs y se prueba que en ciertos casos, la categoría de representaciones de un Bocs puede verse como una subcategoría plena de la categoría de Kleisli del cotriple asociado al Bocs dado.

En la sección 2.3, veremos que dado un Bocs particular, entonces el núcleo de este Bocs se le puede asociar una diferencial de grado 1. Analizaremos también la situación recíproca. Finalmente, estudiaremos la categoría de de representaciones del Bocs dado en términos de la diferencial asociada.

En la sección 2.4, veremos que dado un Bocs $\mathcal{E}$ sobre cierta categoría $\mathcal{A}$ y un funtor $\Phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, a $\mathcal{E}$ le podemos asociar un Bocs $\mathcal{E}^{\Phi}$ sobre $\mathcal{B}$. Veremos las relaciones entre las representaciones de ambos Bocs's.

En la sección 2.5, estudiaremos los Bocs's $\mathcal{E}^{\Phi}$ inducidos por el funtor canónico $\Phi: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/I$.

En la sección 2.6, estudiaremos los Bocs's libres. Se introducen también conceptos fundamentales para el estudio de representaciones de Bocs's.

En el capítulo 3 se estudiaron categorías dadas explícitamente por generadores y relaciones. Veremos que en ciertos casos, aplicando un procedimiento geométrico sencillo (derivación), dada una categoría $\mathcal{A}$ se puede construir otra categoría $\mathcal{A}_\Delta$ y una inmersión $\Phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_\Delta$, de tal forma que si $\mathcal{E}$ es un Bocs sobre $\mathcal{A}$, entonces obtenemos el Bocs $\mathcal{E}^\Phi$ sobre $\mathcal{A}_\Delta$ introducido en el capítulo 2. Veremos que en ciertos casos, es posible describir explícitamente esta clase de Bocs's.

En el capítulo 4 se estudiaron categorías y Bocs's dados explícitamente por generadores y relaciones.
Veremos que en ciertos casos, aplicando sucesivamente un procedimiento geométrico sencillo ideado por Kleiner-Roiter se puede construir la categoría de representaciones del Bocs a partir del Bocs original.

A continuación agregamos algunas observaciones, bajo el título "Algunos ejemplos elementales pero ilustrativos", con la intención de destacar algunas de las ideas básicas que llevaron al desarrollo de la teoría en esta dirección.

## ALGUNOS EJEMPLOS ELEMENTALES PERO ILUSTRATIVOS.

Comenzaremos con un examen detallado de algunos ejemplos simples.
Es bien conocido que una matriz arbitraria sobre un campo puede reducirse por transformaciones elementales en las filas y columnas a la forma

$$(*) \qquad \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde E es la matriz identidad. Ahora, consideremos una matriz dividida por una linea vertical.

$$M = \left(A \middle| B\right)$$

y formulamos los dos problemas siguientes:

(i) A que forma puede reducirse M, utilizando todas las operaciones elementales usuales en renglones, y en columnas solamente son permitidas dentro de cada faja.

(ii) El mismo problema si, además se permite la adición de columnas de la faja A a las columnas de B (pero no de B a A).

Estos problemas son completamente triviales, pero los usaremos para ilustrar las ideas que serán

presentadas. Para encontrar su solución lo cual hablando asperamente consiste en reducir primeramente una parte de la matriz M a la forma (*) y entonces examinar que se puede hacer con la parte restante, preservando la parte ya reducida.
Comencemos con el problema (ii). Reduciendo A a la forma (*) y eliminando los elementos distintos de cero en la matriz B que aparecen a la derecha de E, M puede reducirse a la forma

$$M = \left(\begin{array}{c:c|c} E & O & O \\ \hdashline O & O & S \end{array}\right)$$

Ahora, es claro que, en el bloque arbitrario S se permiten las transformaciones elementales y de aquí, reduciendo esta a la forma (*), completamos la solución del problema (ii).

Ahora, consideremos el problema (i). Otra vez, reduciendo A a la forma (*) obtenemos:

$$M = \left(\begin{array}{c:c|c} E & O & B_1 \\ \hdashline O & O & B_2 \end{array}\right)$$

Así, la matriz B está dividida en dos fajas horizontales. Veamos cuales transformaciones elementales en la matriz "dividida" B, preservan la forma de A.

Primero, es claro que se permiten las transformaciones arbitrarias en las columnas de B. Además, obviamente podemos realizar transformaciones arbitrarias con las filas de $B_2$ y sumar filas de $B_2$ a filas de $B_1$ (¡pero no a aquellas de $B_1$ a $B_2$!). Finalmente, aunque menos trivial, podemos utilizar transformaciones arbitrarias con las filas de $B_1$. En realidad, haciendo lo anterior, el bloque identidad de la matriz A será "destruido", pero realizando las transformaciones inversas con las columnas (en A), podemos recobrar la forma de A. Consecuentemente, aplicando el algoritmo al problema (i), obtenemos un problema del tipo (ii). Entonces aplicando nuestro algoritmo a este problema, podemos, como se ha mostrado antes, reducir la matriz M completamente.

Es claro que los problemas (i) y (ii) (y muchos similares a estos) pueden resolverse por medio de argumentos más elegantes.

De cualquier forma, el algoritmo de arriba (como veremos más adelante) es en cierto sentido universal, es decir, puede ser aplicado por igual de una manera sencilla y mecánica a una gran variedad de problemas, aún en la forma matricial indicada arriba.

Por tanto surge la siguiente idea: ya que hay un algoritmo suficientemente general, transformando en muchos casos un problema a uno más simple, entonces es natural tratar de sistematizar cada problema matricial por un símbolo de tal forma que el algoritmo pueda ser reformulado como una operación de estos símbolos y, en esta forma reducir "la teoría de problemas matriciales" a un cálculo formal. Intentos para avanzar en esta dirección constituyen el contenido de los trabajos [15], [16] y [17].

A continuación damos una definición de un problema matricial cubriendo, al menos, una clase de problemas cercanos al algoritmo anterior.

Retornemos a los problemas (i) y (ii). Primero es claro que "una matriz dividida en dos fajas verticales" representa dos transformaciones lineales actuando de dos espacios vectoriales diferentes en un espacio vectorial. Así en ambos casos (i) y (ii), tenemos tres espacios: $V_1$, $V_2$, $V_3$ y dos transformaciones lineales $A: V_2 \longrightarrow V_1$, $B: V_3 \longrightarrow V_1$, y "transformaciones admisibles", las cuales en el problema (i) corresponden a un cambio de bases en estos espacios; esto es, podemos interpretar el problema (i) como un problema de representaciones del carcaj.

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3 \quad \text{(vease [5])}.$$

Podemos todavía formular el problema (i) en otra forma:

Sea $mod_K$ la categoría de todos los espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathcal{K}$ la categoría que tiene tres objetos 1, 2, 3 y dos morfismos diferentes de la identidad

$$\alpha: 2 \longrightarrow 1 \; ; \; \beta: 3 \longrightarrow 1$$

Entonces cada objeto de la categoría $R(\mathcal{K}, mod_K)$ está dado por tres espacios vectoriales $V_1, V_2, V_3$ y dos morfismos

$A: V_2 \longrightarrow V_1$ ; $B: V_3 \longrightarrow V_1$ ; aún más, cada morfismo $U: (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3, \bar{A}, \bar{B}) \longrightarrow (V_1, V_2, V_3, A, B)$ es una terna de transformaciones lineales $U_1, U_2, U_3$, con $U_i : \bar{V}_i \longrightarrow V_i$ satisfaciendo las siguientes igualdades:

(i) $U_1 \bar{A} = A U_2$ ; $U_1 \bar{B} = B U_3$

Por tanto el problema (i) puede interpretarse en forma natural como un problema de clasificación de funtores de $\mathcal{K}$ en $mod_K$.

¿Cómo interpretar en términos similares el problema (ii)?

Es claro que las "matrices divididas" del problema (ii) inducen una categoría cuyos objetos son los mismos que en el caso (i), es decir los funtores de $\mathcal{K}$ en mod k. (con la misma $\mathcal{K}$). Aunque en comparación con (i), aparecen nuevos morfismos. A saber, se obtiene la categoría $\mathcal{R}(\mathcal{K}, \text{mod}\,k)$ en la cual cada morfismo de $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3, \overline{A}, \overline{B})$ a $(V_1, V_2, V_3, A, B)$ consiste de cuatro transformaciones lineales

$$u_1 : \overline{V}_1 \longrightarrow V_1 \, ; \; u_2 : \overline{V}_2 \longrightarrow V_2 \, ; \; u_3 : \overline{V}_3 \longrightarrow V_3 \quad \text{y}$$

$$x : \overline{V}_3 \longrightarrow V_2 \quad \text{tales que}$$

(ii) $u_1 \overline{A} = A u_2 \, ; \; u_1 \overline{B} = B u_3 + A x$ .

De esta forma, hay además de las transformaciones naturales de funtores algunas transformaciones admisibles adicionales.

En lo siguiente, estudiaremos esta clase de problemas que como veremos más adelante incluye los problemas de clasificación de módulos finitamente generados para álgebras de dimensión finita.

# CAPITULO I

## PRELIMINARES

En este primer capítulo damos una presentación rápida de resultados bien conocidos, los cuales son indispensables para poder desarrollar los demás capítulos de este trabajo; al mismo tiempo se introduce la notación que se utilizará a lo largo de todo el trabajo.

### § 1.1 Definiciones preliminares.

En este capítulo supondremos que las categorías que aparecen son esqueléticamente pequeñas, y $k$ denotará un anillo conmutativo con identidad.

Definición. Una categoría $\mathcal{K}$ es una $k$-categoría si: i) $\mathcal{K}(X,Y)$ es $k$-módulo para cada pareja de objetos $X, Y$ en $\mathcal{K}$.
ii) La composición en $\mathcal{K}$ es bilineal.

Dadas $\mathcal{K}, \mathcal{V}$ $k$-categorías, un funtor $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un $k$-funtor si $A: \mathcal{K}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{V}(A(X), A(Y))$ es morfismo de $k$-módulos, para cualesquier $X, Y$ en $\mathcal{K}$.

Notación: Si $\mathcal{K}, \mathcal{V}$ son categorías preaditivas,

$(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ denotará la categoría de funtores covariantes (aditivos) de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{V}$ (ver [3]); pero si $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ son k-categorías, denotará la k-categoría de k-funtores covariantes de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{V}$.

<u>Definición</u>. Sean $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ k-categorías.
<u>Un</u> $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ <u>Bimódulo</u> $\mathcal{E}$ (denotado por ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}_{\mathcal{K}_2}$) es un funtor $\mathcal{E}: \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ tal que cumple las propiedades:
1) $\mathcal{E}$ es aditivo en cada variable.
2) Si $(f, g)$ es un morfismo en $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1$ y $t \in k$, entonces $\mathcal{E}(f, tg) = \mathcal{E}(tf, g)$.
Si ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}_{\mathcal{K}_2}$, ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}'_{\mathcal{K}_2}$ son Bimódulos, un morfismo de $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulos es una transformación natural $\eta: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$.
Denotaremos por ${}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2}$ a la categoría de los $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulos.

1.1.1 <u>Observaciones</u>: 1) Si $A: \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1$, $B: \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_2$ son k-funtores y denotamos por ${}^{A}\mathcal{V}^{B}$ la composición $\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \xrightarrow{B \times A} \mathcal{L}_2^{op} \times \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\mathcal{V}} Ab$ donde $\mathcal{V}$ es $\mathcal{L}_1$-$\mathcal{L}_2$ Bimódulo, entonces es claro que ${}^{A}\mathcal{V}^{B}$ es $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_2$ Bimódulo.
2) Toda k-categoría $\mathcal{K}$ puede pensarse como un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ Bimódulo de la siguiente manera:

En objetos: si $(X,Y) \in |\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}|$, $\mathcal{K}(X,Y) = Hom_{\mathcal{K}}(X,Y)$

En morfismos: si $(Y,X) \xrightarrow{(f,g)} (Y',X')$ es un morfismo en $\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}$ y $h \in \mathcal{K}(Y,X) = Hom_{\mathcal{K}}(Y,X)$ entonces $\mathcal{K}(f,g)h = ghf$.

Evidentemente $\mathcal{K}$ así definido es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ Bimódulo.

Ahora si $A: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$ es un $k$-funtor, en vista de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(Y,X) & \xrightarrow{A} & \mathcal{V}(AY,AX) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{K}(f,g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{V}(Af,Ag)} \\ \mathcal{K}(Y',X') & \xrightarrow{A} & \mathcal{V}(AY',AX') \end{array}$$

conmuta para cada morfismo $(f,g):(Y,X) \longrightarrow (Y',X')$ en $\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}$, podemos pensar a $A$ como una transformación natural:

$$\hat{A}: (\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \xrightarrow{\mathcal{K}} Ab) \longrightarrow (\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \xrightarrow{A \times A} \mathcal{V}^{op} \times \mathcal{V} \xrightarrow{\mathcal{V}} Ab)$$

esto es, un morfismo de $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ Bimódulos

$${}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\hat{A}} {}_{\mathcal{K}}^{A}\mathcal{V}_{\mathcal{K}}^{A}.$$

<u>Definición</u>. Sean $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ $k$-categorías. Construimos una nueva $k$-categoría $\mathcal{K} \otimes_k \mathcal{K}'$, el <u>producto tensorial</u> de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$, como sigue:

$|\mathcal{K}\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}\times\mathcal{K}'|$.

$\mathcal{K}\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'[(x,x'),(y,y')] = \mathcal{K}(x,y)\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'(x',y')$ para cada $(x,x')$, $(y,y')$ en $\mathcal{K}\times\mathcal{K}'$, y la composición está dada por la siguiente regla:

$$\mathcal{K}\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'[(y,y'),(z,z')]\times\mathcal{K}\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'[(x,x'),(y,y')] \longrightarrow \mathcal{K}\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}'[(x,x'),(z,z')]$$

$$(f\otimes g,\ h\otimes t) \longmapsto fh\otimes gt$$

## §1.2 <u>producto tensorial</u>.

1.2.1 <u>observación</u> (Ver [3]) : Dada una categoría preaditiva $\mathcal{K}$, existe un único (hasta isomorfismo) funtor $-\underset{\mathcal{K}}{\otimes}? : (\mathcal{K}^{op},Ab)\times(\mathcal{K},Ab) \longrightarrow Ab$ llamado producto tensorial ($\pi$) con las siguientes propiedades:

Sean $A : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ funtores aditivos, denotemos por $A\underset{\mathcal{K}}{\otimes}B$ a $\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(A,B)$, entonces

(a) $\left\{\begin{array}{l} -\underset{\mathcal{K}}{\otimes}B : (\mathcal{K}^{op},Ab) \longrightarrow Ab \\ A\underset{\mathcal{K}}{\otimes}- : (\mathcal{K},Ab) \longrightarrow Ab \end{array}\right.$ son exactos derechos.

(b) $-\underset{\mathcal{K}}{\otimes}B$, $A\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-$ preservan somas arbitrarias.

$$(c) \quad \begin{cases} A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} (x,-) = A(x) \\ (-,x) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B = B(x) \end{cases} \quad \text{para cada } x \in |\mathcal{K}|$$

($\Uparrow$) Lo que aquí denotamos por $\underset{\mathcal{K}}{\otimes}$ corresponde a $\underset{\mathcal{K}^{op}}{\otimes}$ en [3]

---

A continuación daremos otra descripción de este producto tensorial en términos de sus generadores.

<u>Definición</u>. Sean $A: \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B: \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ funtores aditivos y $H$ un grupo abeliano. Una transformación $\mathcal{K}$-balanceada $\mathcal{V}: A \times B \longrightarrow H$ es una familia de de funciones

$$\left(\mathcal{V}_x : A(x) \times B(x) \longrightarrow H\right)_{x \in |\mathcal{K}|} \quad \text{que}$$

satisface las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{V}_x$ es aditiva en cada variable, para cada $x \in |\mathcal{K}|$.

(b) Si $f: x \longrightarrow x'$ es un morfismo en $\mathcal{K}$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A(x') \times B(x) & \xrightarrow{A(f) \times 1} & A(x) \times B(x) \\ {\scriptstyle 1 \times B(f)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathcal{V}_x} \\ A(x') \times B(x') & \xrightarrow{\mathcal{V}_{x'}} & H \end{array}$$

conmuta.

**1.2.2 TEOREMA.** (I) Si $A : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$, $B : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ son funtores aditivos, entonces podemos hallar $\varphi : A \times B \longrightarrow A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B$ $\mathcal{K}$-balanceada tal que si $\nu : A \times B \rightarrow H$ es cualquier transformación $\mathcal{K}$-balanceada, existe un único morfismo de grupos $\bar{\nu} : A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B \longrightarrow H$ con la propiedad de que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A(x) \times B(x) \arrow[r, "\nu_x"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & H \\ A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B \arrow[ur, dashed, "\bar{\nu}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $x \in |\mathcal{K}|$.

Tomando $a \underset{x}{\otimes} b = \varphi_x(a, b)$, se tiene que $\{a \underset{x}{\otimes} b \mid x \in |\mathcal{K}|, a \in A(x), b \in B(x)\}$ genera a $A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B$

(II) Si $A, A' : \mathcal{K}^{op} \longrightarrow Ab$; $B, B' : \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ son funtores aditivos, y $\mu : A \longrightarrow A'$, $\mu' : B \longrightarrow B'$ son transformaciones naturales, entonces $\mu \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mu'$ es el único morfismo de grupos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A(x) \times B(x) \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\mu_x \times \mu'_x"'] & A \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B \arrow[d, "\mu \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mu'"] \\ A'(x) \times B'(x) \arrow[r, "\varphi'_x"] & A' \underset{\mathcal{K}}{\otimes} B' \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $x \in |\mathcal{K}|$. Esto es, $(\mu \otimes \mu')(a \underset{x}{\otimes} b) = \mu_x(a) \underset{x}{\otimes} \mu'_x(b)$.

Demostración : Consultar [18].

1.2.3 DEFINICION - PROPOSICION. Dadas $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}, \mathcal{K}_2$ $k$-categorías, entonces podemos construir un funtor

$$ {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}} \times {}_{\mathcal{K}}Bim_{\mathcal{K}_2} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}_2} $$

aditivo en cada variable (el producto tensorial de Bimódulos), denotado también por $-\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-$. Este está definido como sigue:

Si ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}'_{\mathcal{K}_2}$ son Bimódulos, entonces $\mathcal{E}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}' : \mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1 \longrightarrow Ab$ está definido por las fórmulas:

$$ \mathcal{E}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}'(y,x) = \mathcal{E}(-,x)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}'(y,-) $$

$$ \mathcal{E}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}'(f,g) = \mathcal{E}(-,g)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}'(f,-). $$

Si ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\eta} {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$, ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}'_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\eta'} {}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}'_{\mathcal{K}_2}$ son morfismos de Bimódulos, para definir $\mathcal{E}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{E}' \xrightarrow{\eta \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta'} \mathcal{V}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{V}'$, observemos que para cada $(y,x) \in |\mathcal{K}_2^{op} \times \mathcal{K}_1|$,

$$ \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}(-,x) \xrightarrow{\eta_{(-,x)}} \mathcal{V}(-,x) \\ \mathcal{E}'(y,-) \xrightarrow{\eta'_{(y,-)}} \mathcal{V}'(y,-) \end{array} \right. \quad \text{son transformaciones naturales} $$

y entonces podemos definir $(\eta \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta')(Y,X) := \eta_{(-,X)} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta'_{(Y,-)}$

Demostración : Consultar [18].

Si $\mathcal{K}$ es una k-categoría, entonces es bien conocido el hecho que $(\mathcal{K}, Ab) \doteq (\mathcal{K}, Mod_k) := Mod(\mathcal{K})$.

Por $mod(\mathcal{K})$ denotamos a la subcategoría $(\mathcal{K}, mod_k)$ de $Mod(\mathcal{K})$.

1.2.4 DEFINICION-PROPOSICION. Dadas $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ k-categorías, tenemos funtores

$${}_{\mathcal{K}'}Bim_{\mathcal{K}} \times (\mathcal{K}; Mod_k) \longrightarrow (\mathcal{K}'; Mod_k) \quad y$$

$$(\mathcal{K}^{op}, Mod_k) \times {}_{\mathcal{K}}Bim_{\mathcal{K}'} \longrightarrow (\mathcal{K}'^{op}, Mod_k) \text{ , los}$$

cuales son aditivos en cada variable. Otra vez serán denotados por $-\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-$

Estos funtores están definidos como sigue :

si $\mathcal{C} \in {}_{\mathcal{K}'}Bim_{\mathcal{K}}$, $A \in (\mathcal{K}, Mod_k)$, entonces

$(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A)(X') = \mathcal{C}(-,X') \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A$ para cada $X' \in |\mathcal{K}'|$, y

$(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A)(f) = \mathcal{C}(-,f) \otimes 1 : \mathcal{C}(-,X') \otimes A \longrightarrow \mathcal{C}(-,\bar{X}') \otimes A$

para cada morfismo $f : X' \longrightarrow \bar{X}'$ en $\mathcal{K}'$.

Ahora si $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}'$ es un morfismo en ${}_{\mathcal{K}'}Bim_{\mathcal{K}}$ y

$A \xrightarrow{\eta} A'$ es un morfismo en $(\mathcal{K}, Mod_K)$, entonces

$\varphi \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta : \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow \mathcal{C}' \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A$ está definido como sigue :

$$[\varphi \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta]_{x'} = \varphi_{(-,x')} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \eta : \mathcal{C}(-,x') \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow \mathcal{C}'(-,x') \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A'.$$

En forma análoga está definido el segundo funtor.

Además, se cumplen las siguientes propiedades :

a) $(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}_1}{\otimes} \mathcal{C}') \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \xrightarrow[\cong]{\tau} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}_1}{\otimes} (\mathcal{C}' \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A)$ para cualesquier

$\mathcal{C} \in {}_{\mathcal{K}'}Bim_{\mathcal{K}_1}$ y $\mathcal{C}' \in {}_{\mathcal{K}_1}Bim_{\mathcal{K}}$.

b) $\mathcal{K} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \cong A$.

1.2.5 LEMA. Dado un Bimódulo ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$, hay isomorfismos naturales de Bimódulos :

$${}_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}_2}{\otimes} \mathcal{K}_2)_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\sigma} {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2} \quad \text{y}$$

$${}_{\mathcal{K}_1}(\mathcal{K}_1 \underset{\mathcal{K}_1}{\otimes} \mathcal{C})_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\bar{\sigma}} {}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{C}_{\mathcal{K}_2}$$ esto es, tales que si

$\mathcal{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}'$ es un morfismo de Bimódulos, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{C} \arrow[r, "\bar{\sigma}"] \arrow[d, "1 \otimes \eta"] & \mathcal{C} \arrow[d, "\eta"] & \mathcal{C} \otimes \mathcal{K}_2 \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\eta \otimes 1"] \\
\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{C}' \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & \mathcal{C}' & \mathcal{C}' \otimes \mathcal{K}_2 \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Además, en generadores se calculan por las siguientes fórmulas : (Suponiendo que $c \in \mathcal{C}(Y,X)$)

$$\Gamma(c \underset{Y}{\otimes} h) = \mathcal{C}(h,X)(c) \,,\ \Gamma^{-1}(c) = c \underset{Y}{\otimes} 1$$

$$\bar{\Gamma}(g \underset{X}{\otimes} c) = \mathcal{C}(Y,g)(c) \,,\ \bar{\Gamma}^{-1}(c) = 1 \underset{X}{\otimes} c$$

Demostración : Consultar [18].

1.2.6 LEMA. Si ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{C}_{\mathcal{X}_1}$, ${}_{\mathcal{X}_1}\mathcal{C}'_{\mathcal{X}_2}$, ${}_{\mathcal{X}_2}\mathcal{C}''_{\mathcal{H}}$ son Bimódulos; entonces hay un isomorfismo natural de Bimódulos

$\delta : (\mathcal{C} \underset{\mathcal{X}_1}{\otimes} \mathcal{C}') \underset{\mathcal{X}_2}{\otimes} \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathcal{C} \underset{\mathcal{X}_1}{\otimes} (\mathcal{C}' \underset{\mathcal{X}_2}{\otimes} \mathcal{C}'')$ esto es, tal que si ${}_{\mathcal{X}}\mathcal{C}_{\mathcal{X}_1} \xrightarrow{\eta} {}_{\mathcal{X}}\mathcal{V}_{\mathcal{X}_1}$, ${}_{\mathcal{X}_1}\mathcal{C}'_{\mathcal{X}_2} \xrightarrow{\eta'} {}_{\mathcal{X}_1}\mathcal{V}'_{\mathcal{X}_2}$, ${}_{\mathcal{X}_2}\mathcal{C}''_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\eta''} {}_{\mathcal{X}_2}\mathcal{V}''_{\mathcal{H}}$ son morfismos de Bimódulos, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \otimes (\mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'') \arrow[r, "\eta \otimes (\eta' \otimes \eta'')"] & \mathcal{V} \otimes (\mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}'') \\
(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}') \otimes \mathcal{C}'' \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "(\eta \otimes \eta') \otimes \eta''"] & (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}') \otimes \mathcal{V}'' \arrow[u, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración: Consultar [18].

1.2.7 DEFINICION-PROPOSICION. Sean $A:\mathcal{K}_1\longrightarrow\mathcal{V}$, $B:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{V}$, $C:\mathcal{K}_2\longrightarrow\mathcal{V}$ k-funtores. Entonces podemos definir un morfismo de Bimódulos

$${}^{A}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{V}^{B}_{\mathcal{K}} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} {}^{B}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}^{C}_{\mathcal{K}_2} \xrightarrow{\ \pi\ } {}^{A}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{V}^{C}_{\mathcal{K}_2}$$

llamado morfismo composición, porque en generadores se cálcula por medio de la fórmula:

$$\pi(h \underset{x}{\otimes} t) = ht$$

y tiene la propiedad de que si $D:\mathcal{K}_3\longrightarrow\mathcal{V}$ es cualquier otro k-funtor, entonces resulta conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes({}^{B}\mathcal{V}^{C}\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D}) \arrow[r, "1\otimes\pi"] & {}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{D} \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & & {}^{A}\mathcal{V}^{D} \\
({}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{C})\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D} \arrow[uu, "\delta", "\cong"'] \arrow[r, "\pi\otimes 1"] & {}^{A}\mathcal{V}^{C}\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D} \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

En vista de lo cual, denotaremos también por $\pi$ a la composición:

$${}^{A}\mathcal{V}^{B}\otimes{}^{B}\mathcal{V}^{C}\otimes{}^{C}\mathcal{V}^{D} \xrightarrow{\ \pi\ } {}^{A}\mathcal{V}^{D}.$$

Demostración: Consultar [18].

# CAPITULO 2

## BOCS'S y LA CATEGORIA DE KLEISLI

En este capítulo se introducen los conceptos necesarios y fundamentales, y se prueban los resultados más generales. La idea fundamental en los algoritmos de Kleiner-Roiter (ver [15] y [16]) y de Roiter (ver [17]) es cambiar una categoría $\mathcal{K}$ por otra $\mathcal{K}'$, y de esta forma si tenemos un problema categórico (o matricial), obtener un problema equivalente.

En términos generales consideraremos la categoría de funtores Mod($\mathcal{K}$) con $\mathcal{K}$ cierta $k$-categoría, pero al cambiar el problema a otro equivalente, nos vemos obligados a considerar también categorías Mod($\mathcal{K}$) pero con nuevos morfismos ("categorías enriquecidas"). Un procedimiento para obtener categorías enriquecidas es a través de cotriples.

### §2.1 Funtores adjuntos y cotriples.

Comencemos con las definiciones.

<u>Definición</u>. <u>Un cotriple</u> $\mathbb{C} = (F, \delta, \varepsilon)$ <u>sobre una categoría</u> $\mathcal{A}$ es una terna consistente de $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ un funtor y transformaciones naturales $\delta : F \longrightarrow F^2 = FF$, $\varepsilon : F \longrightarrow Id_{\mathcal{A}}$ tales que los diagramas

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, equal] & F^2 \arrow[d, "F\varepsilon"] \\ F^2 \arrow[r, "\varepsilon F"'] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & F^2 \arrow[d, "F\delta"] \\ F^2 \arrow[r, "\delta F"'] & F^3 \end{tikzcd} \qquad (2)$$

conmutan ($\delta$, $\varepsilon$ se llaman la <u>comultiplicación</u> y la <u>counidad</u> del cotriple, respectivamente).

2.1.1 <u>La categoría de Kleisli de un cotriple</u> ([11]).

Sea $\mathbb{C} = (F, \delta, \varepsilon)$ un cotriple sobre una $K$-categoría $\mathcal{A}$. Le asociaremos a $\mathcal{A}$ una nueva categoría $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ (la categoría Kleisli de $\mathbb{C}$) como sigue:

A) $|\mathcal{A}_{\mathbb{C}}| = |\mathcal{A}|$

B) Si $X, Y \in |\mathcal{A}|$, entonces $(X,Y)_{\mathbb{C}} = Hom_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{A}}(FX,Y)$

C) Si $f \in (X,Y)_{\mathbb{C}}$, $g \in (Y,Z)_{\mathbb{C}}$, es decir si

$$F(X) \xrightarrow{f} Y, \quad F(Y) \xrightarrow{g} Z \text{ son morfismos en } \mathcal{A}$$

$g \cdot f$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ se define como la composición

$F(X) \xrightarrow{\delta_X} F^2(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{g} Z$ en $\mathcal{A}$.

a) Si $x \in |\mathcal{A}_{\mathbb{C}}| = |\mathcal{A}|$ la identidad en $x$ en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ está dada por $\varepsilon_x \in (x,x)_{\mathbb{C}} = (F(x),x)$.

En efecto, si $f \in (x,y)_{\mathbb{C}}$, $f \circ \varepsilon_x$ está dada por:

$$F(x) \xrightarrow{\delta_x} F^2(x) \xrightarrow{F(\varepsilon_x)} F(x) \xrightarrow{f} y$$

pero por (1) $F(\varepsilon_x)\delta_x = id_{F(x)}$. Por lo tanto $f \circ \varepsilon_x = f$.

Análogamente se muestra que $\varepsilon_x \circ g = g$ para cada $g \in (y,x)_{\mathbb{C}}$.

b) Si $f \in (x,y)_{\mathbb{C}}$, $g \in (y,z)_{\mathbb{C}}$, $h \in (z,w)_{\mathbb{C}}$, se tiene:

i) $h \circ (g \circ f) = h \circ (gF(f)\delta_x) = hF(gF(f)\delta_x)\delta_x =$

$= hF(g)F^2(f)F(\delta_x)\delta_x$ y

ii) $(h \circ g) \circ f = (hF(g)\delta_y) \circ f = hF(g)\delta_y F(f)\delta_x$.

De la naturalidad de $\delta : F \longrightarrow F^2$ se sigue que $\delta_y F(f) = F^2(f)\delta_{F(x)}$

$\therefore$ $(h \circ g) \circ f = hF(g)\delta_y F(f)\delta_x = hF(g)F^2(f)\delta_{F(x)}\delta_x$

y de la conmutatividad del diagrama (2) se sigue $F(\delta_x)\delta_x = \delta_{F(x)}\delta_x$ y $h \circ (g \circ f) = hF(g)F^2(f)\delta_{F(x)}\delta_x$

$\therefore$ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

<u>Observación</u>: Si $(F,\delta,\varepsilon)$ y $(F',\delta',\varepsilon')$ son dos cotriples sobre la misma categoría $\mathcal{A}$ y si $\Phi: F \longrightarrow F'$ es una transformación natural; entonces se cumple la igualdad:

$$\Phi F' \circ F\Phi = F'\Phi \circ \Phi F := \varsigma(\Phi)$$

En efecto. Como $\Phi$ es natural tenemos el cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F^2(X) \arrow[r, "\Phi_{F(X)}"] \arrow[d, "F(\Phi_X)"'] & F'(F(X)) \arrow[d, "F'(\Phi_X)"] \\
F(F'(X)) \arrow[r, "\Phi_{F'(X)}"] & F'^2(X)
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue la igualdad deseada.

<u>Definición</u>. Decimos que la transformación natural

$\Phi: F \longrightarrow F'$ es un morfismo de $\mathbb{C}=(F,\delta,\varepsilon)$ en $\mathbb{C}'=(F',\delta',\varepsilon')$ si los diagramas

$$(3) \quad \begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & F' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
id_{\mathcal{A}} \arrow[r, equal] & id_{\mathcal{A}}
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta"'] & F' \arrow[d, "\delta'"] \\
F^2 \arrow[r, "\varsigma(\Phi)"'] & F'^2
\end{tikzcd} \quad (4)$$

conmutan.

3.1.2 Afirmación. Si $\Phi: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$ es un morfismo de cotriples sobre $\mathcal{A}$, entonces $\Phi$ induce un funtor

$$\Phi^*: \mathcal{A}_{\mathfrak{C}'} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathfrak{C}}$$

definido como sigue:

En objetos: $\Phi^*(X) = X$ para cada $X \in |\mathcal{A}_{\mathfrak{C}'}| = |\mathcal{A}_{\mathfrak{C}}| = |\mathcal{A}|$

En morfismos: $\Phi^*$ está dado por la aplicación

$$(X,Y)_{\mathfrak{C}'} = (F'(X), Y) \xrightarrow{(\Phi_X, Y)} (F(X), Y) = (X,Y)_{\mathfrak{C}}$$

Demostración:

Veamos que $\Phi^*$ aplica identidades en identidades:

Si $X \in |\mathcal{A}_{\mathfrak{C}'}|$

$$\Phi^*(\mathcal{E}'_X) = \mathcal{E}'_X \circ \Phi_X = \mathcal{E}_X \quad (\text{por el diagrama } (3)).$$

Ahora tenemos $f \in (X,Y)_{\mathfrak{C}'}$, $g \in (Y,Z)_{\mathfrak{C}'}$, entonces

$$\Phi^*(g \circ f) = \Phi^*(gF'(f)\delta'_X) = gF'(f)\delta'_X \Phi_X$$

Pero por el diagrama (4) obtenemos:

$$\Phi^*(g \circ f) = gF'(f)\delta'_X \Phi_X = gF'(f)P(\Phi)_X \delta_X =$$

$$= gF'(f)\Phi_{F'(X)} F(\Phi_X)\delta_X .$$

Por otro lado tenemos:

$$\Phi^*(g)\circ\Phi^*(f)=\Phi^*(g)F(\Phi^*(f))\delta_X=g\Phi_Y F(f\Phi_X)\delta_X=$$

$$=g\Phi_Y F(f)F(\Phi_X)\delta_X=gF'(f)\Phi_{F'(X)}F(\Phi_X)\delta_X$$ (por la naturalidad de $\Phi$)

Por tanto $\Phi^*(g\circ f)=\Phi^*(g)\circ\Phi^*(f)$. //

2.1.3 Un caso especial. Sea $\mathcal{A}$ una $k$-categoría. Fácilmente se ve que

$$\mathbb{I}=(id_{\mathcal{A}},\ id_{\mathcal{A}}\xrightarrow{id} id_{\mathcal{A}}^2,\ id_{\mathcal{A}}\xrightarrow{id} id_{\mathcal{A}})$$

es un cotriple sobre $\mathcal{A}$ y si $\mathbb{C}=(F,\delta,\varepsilon)$ es cualquier otro cotriple, entonces $\varepsilon:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{I}$ es un morfismo.

En efecto:

$\varepsilon: F\longrightarrow id_{\mathcal{A}}$ es una transformación natural y los diagramas

$$(5)\quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & id_{\mathcal{A}} \arrow[d, equal] \\ id_{\mathcal{A}} \arrow[r, equal] & id_{\mathcal{A}} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\delta"'] & id_{\mathcal{A}} \arrow[d, "id"] \\ F^2 \arrow[r, "\varsigma(\varepsilon)"'] & id_{\mathcal{A}}^2 \end{tikzcd} \quad (6)$$

conmutan.

La conmutatividad del diagrama (5) es evidente.

Ahora $\delta(\varepsilon)\delta = (\varepsilon\, id_{\mathcal{A}} \circ F\varepsilon)\circ\delta = \varepsilon\, id_{\mathcal{A}}(F\varepsilon\circ\delta) = \varepsilon\, id_{\mathcal{A}} = \varepsilon$ mostrándose la conmutatividad de (6). Luego, aplicando la afirmación 2.1.2 obtenemos un funtor $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{II} \xrightarrow{S_0 = \varepsilon^*} \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ dado por la identidad en objetos y tal que

$(X,Y) \xrightarrow{(\varepsilon_X, Y)} (F(X), Y) = (X,Y)_{\mathcal{C}}$ determina la acción sobre los morfismos.

Por otro lado definimos un funtor $T_0 : \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}_{II}$ como sigue:

En objetos: si $X \in |\mathcal{A}_{\mathcal{C}}|$, $T_0(X) = F(X)$

En morfismos: si $f \in (X,Y)_{\mathcal{C}} = (FX, Y)$ entonces $T_0(f)$ está dado por la composición:

$$F(X) \xrightarrow{\delta_X} F^2(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y).$$

$$T_0(id_{\mathcal{A}}^{X}) = T_0(\varepsilon_X) = F(\varepsilon_X)\delta_X = id_{\mathcal{A}}\, F(X).$$

Finalmente, si $f \in (X,Y)_{\mathcal{C}}$ y $g \in (Y,Z)_{\mathcal{C}}$ entonces por un lado tenemos:

$T_0(g\circ f) = F(g\circ f)\delta_X = F(g\,F(f)\delta_X)\delta_X = F(g)F^2(f)F(\delta_X)\delta_X =$

$= F(g)F^2(f)\delta_{F(X)}\delta_X$ (por el diagrama (2)).

Por otro lado se tiene:

$T_0(g)T_0(f) = F(g)\delta_Y F(f)\delta_X = F(g)F^2(f)\delta_{F(X)}\delta_X$ (por la naturalidad de $\delta : F \longrightarrow F^2$).

Por lo tanto $T_0(g)T_0(f) = T_0(g \cdot f)$.

Aún más, tenemos lo siguiente :

2.1.7 PROPOSICIÓN. Con la notación anterior hay isomorfismos naturales :

$$Hom_{\mathcal{A}}(T_0(X), Y) \underset{\varphi_{X,Y}}{\cong} Hom_{\mathcal{A}_e}(X, S_0(Y)),\ X \in |\mathcal{A}_e|,\ Y \in |\mathcal{A}|$$

Demostración :

$Hom_{\mathcal{A}}(T_0(X), Y) = Hom_{\mathcal{A}}(F(X), Y) = Hom_{\mathcal{A}_e}(X, Y) = Hom_{\mathcal{A}_e}(X, S_0(Y))$

Llamemos $\varphi_{X,Y}$ a la identidad.

Probemos que es natural :

1º) en $Y$.

Sea $g : Y \longrightarrow Y'$ un morfismo en $\mathcal{A}$, tenemos el diagrama

(7)
$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(T_0(X), Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_{\mathcal{A}_e}(X, S_0(Y)) = Hom_{\mathcal{A}}(F(X), Y) \arrow[d, "S_0(g)_*"] \\
Hom_{\mathcal{A}}(T_0(X), Y') \arrow[r, "\varphi_{X,Y'}"] & Hom_{\mathcal{A}_e}(X, S_0(Y')) = Hom_{\mathcal{A}}(F(X), Y')
\end{tikzcd}$$

Sea $h \in Hom_{\mathcal{A}}(T_\circ(X), Y)$

$\hat{h} = \varphi_{X,Y}(h) \in Hom_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}}}(X, S_\circ(Y))$

$S_\circ(g)_* \varphi_{X,Y}(h) = S_\circ(g)_* \hat{h} = S_\circ(g) \cdot \hat{h} = g \, \varepsilon_Y F(h) \delta_X$

De la naturalidad de $\varepsilon : F \longrightarrow id_{\mathcal{A}}$ se sigue que

$h \, \varepsilon_{F(X)} = \varepsilon_Y F(h)$

$\therefore \; S_\circ(g)_* \varphi_{X,Y}(h) = g h \, \varepsilon_{F(X)} \delta_X = \widehat{gh} = \varphi_{X,Y'}(g_*(h))$

2º) en X

la prueba es similar a la anterior. //

<u>Definición</u>. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías.

Un <u>par adjunto</u> de funtores consiste de dos funtores

$$\mathcal{A} \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$$

y un isomorfismo natural $\varphi_{-,?} : Hom_{\mathcal{A}}(T-, ?) \cong Hom_{\mathcal{B}}(-, S?)$

esto es, para cada par de objetos $A \in |\mathcal{A}|$ y $B \in |\mathcal{B}|$

$$\varphi_{B,A} : Hom_{\mathcal{A}}(T(B), A) \longrightarrow Hom_{\mathcal{B}}(B, S(A))$$

es un isomorfismo, natural en $B$ y en $A$.

Denotaremos a este par por $(T, S)$. El funtor $S$ se dice ser el adjunto de $T$ ó $T$ el coadjunto de $S$.

Observación: Supongamos que $(T,S)$ es un par adjunto y $\varphi_{S(X),X}: Hom_{\mathcal{A}}(TS(X),X) \xrightarrow{\simeq} Hom_{\mathcal{B}}(S(X),S(X))$, $X \in |\mathcal{A}|$

Entonces existe una única $\alpha_X: TS(X) \longrightarrow X$ tal que

$$\varphi_{S(X),X}(\alpha_X) = id_{S(X)}, \quad \alpha_X = \varphi^{-1}_{S(X),X}(id_{S(X)})$$

Dualmente, si $X \in |\mathcal{B}|$

$$\varphi_{X,TX}: Hom_{\mathcal{A}}(TX,TX) \cong Hom_{\mathcal{B}}(X, ST(X))$$

Consideremos el morfismo $\beta_X = \varphi_{X,TX}(id_{T(X)})$

$$\beta_X: X \longrightarrow ST(X)$$

Ahora tenemos lo siguiente:

2.1.5 PROPOSICION. Los morfismos $\alpha_X, \beta_X$ dan transformaciones naturales

$$\alpha: TS \longrightarrow id_{\mathcal{A}}, \quad \beta: id_{\mathcal{B}} \longrightarrow ST$$

que hacen conmutar los diagramas:

$$(8) \quad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\beta"] \arrow[dr, equal] & TST \arrow[d, "\alpha T"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} STS \arrow[d, "S\alpha"'] & S \arrow[l, "\beta S"'] \arrow[dl, equal] \\ S & \end{tikzcd} \quad (9)$$

Demostración:

1º) $\beta$ es natural

Si $f: TX \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, de la naturalidad de $\varphi$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(TX,TX) \arrow[r, "\varphi_{X,TX}", "\simeq"'] \arrow[d, "f_*"] & Hom_{\mathcal{B}}(X,ST(X)) \arrow[d, "S(f)_*"] \\
Hom_{\mathcal{A}}(TX,Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}", "\simeq"'] & Hom_{\mathcal{B}}(X,S(Y))
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto

$$S(f)\varphi_{X,TX}(id_{TX}) = \varphi_{X,Y}(f_*(id_{TX})) = \varphi_{X,Y}(f)$$

$$\therefore \quad S(f)\beta_X = \varphi_{X,Y}(f) \qquad (10)$$

Análogamente, si $\mu: X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}}(TY,TY) \arrow[r, "\varphi_{Y,TY}", "\simeq"'] \arrow[d, "T(\mu)^*"'] & Hom_{\mathcal{B}}(Y,ST(Y)) \arrow[d, "\mu^*"] \\
Hom_{\mathcal{A}}(TX,TY) \arrow[r, "\varphi_{X,TY}", "\simeq"'] & Hom_{\mathcal{B}}(X,ST(Y))
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\mu^*\varphi_{Y,TY} = \varphi_{X,TY}\,T(\mu)^*$.

Consecuentemente:

$$\mu^* \varphi_{Y,TY}(id_{TY}) = \varphi_{X,TY}\, T(\mu)^*(id_{TY})$$

$$\therefore \quad \beta_Y \mu = \varphi_{X,TY}(T(\mu)) \qquad (11)$$

Similarmente, si $f: Y \longrightarrow S(X)$, $X \in |\mathcal{A}|$ es un morfismo en $\mathcal{B}$ entonces tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{A}}(TS(X), X) \arrow[r, "\varphi_{SX,X}"] \arrow[d, "T(f)^*"'] & Hom_{\mathcal{B}}(S(X), S(X)) \arrow[d, "f^*"] \\ Hom_{\mathcal{A}}(TY, X) \arrow[r, "\varphi_{Y,X}"] & Hom_{\mathcal{B}}(Y, S(X)) \end{tikzcd}$$

Por tanto $f^* \varphi_{SX,X} = \varphi_{Y,X}\, T(f)^*$

Luego $\varphi_{Y,X}\, T(f)^*(\varphi^{-1}_{SX,X}(id_{S(X)})) = f^* \varphi_{SX,X}(\varphi^{-1}_{SX,X}(id_{SX})) =$

$= f^*(id_{SX}) = f$.

$$\therefore \quad \alpha_X T(f) = \varphi^{-1}_{Y,X}(f) \qquad (12)$$

$$\therefore \quad \varphi_{Y,X}(\alpha_X T(f)) = f \qquad (12')$$

Ahora estamos en condiciones de probar que

$$\beta: id_{\mathcal{B}} \longrightarrow ST \text{ es natural.}$$

Sea $f: X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{B}$, tenemos

$T(f): TX \longrightarrow TY$ un morfismo en $\mathcal{A}$

Aplicando (10) a $T(f)$ obtenemos:

$$ST(f)\beta_X = \varphi_{X,TY}(T(f))$$

y por (11) obtenemos:

$$\varphi_{X,TY}(T(f)) = \beta_Y f \, .$$

Por tanto

$$ST(f)\beta_X = \beta_Y f$$

$\therefore$ $\beta$ es natural.

La naturalidad de $\alpha$ se prueba en forma completamente análoga.

Finalmente veamos que el diagrama (8) conmuta (que (9) conmuta se hace de manera similar).

$$\alpha_{T(X)} T(\beta_X) = \varphi^{-1}_{X,TX}(\beta_X) \qquad \text{(por (12))}$$

Por tanto $\alpha_{TX} T(\beta_X) = \varphi^{-1}_{X,TX}(\varphi_{X,TX}(id_{TX})) = id_{TX}$ . //

Usando 2.1.5 estamos ahora en posibilidad de asociarle a un par de funtores adjuntos $(T,S)$, un cotriple $\mathbb{C}(T,S)$ sobre $\mathcal{A}$, usando $\alpha$ y $\beta$ como sigue:

$F := TS : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $\varepsilon := \alpha : F \longrightarrow id_{\mathcal{A}}$

y $\delta := T\beta S : F \longrightarrow F^2$

2.1.6 PROPOSICION. $\mathbb{C}(T,S) = (F,\delta,\varepsilon)$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$.

Demostración: Por definición se tiene que $F$ es un funtor, y $\delta$, $\varepsilon$ son transformaciones naturales.

Ahora probemos que los diagramas

$$(13)\quad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, equal] & F \arrow[d, "F\varepsilon"] \\ F^2 \arrow[r, "\varepsilon_F"'] & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & F^2 \arrow[d, "F\delta"] \\ F^2 \arrow[r, "\delta_F"'] & F^3 \end{tikzcd} \quad (14)$$

conmutan.

En efecto: $F(\varepsilon_x)\delta_x = F(\alpha_x)T(\beta_{S(x)}) = TS(\alpha_x)T(\beta_{S(x)}) =$

$= T(S(\alpha_x)\beta_{Sx}) = T(id_{Sx}) = id_{TS(x)}$ (por (9))

$\varepsilon_{Fx}\delta_x = \alpha_{Fx}T(\beta_{Sx}) = \alpha_{TS(x)}T(\beta_{Sx}) = id_{TS(x)}$ (por (8))

Para probar la conmutatividad de (14) se procede de manera análoga //.

2.1.7 PROPOSICION (vease [11]) Si $(T,S)$ es un par adjunto de funtores

$$\mathcal{A} \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$$

y $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(T,S)$ es el cotriple asociado, entonces existe un funtor $\mathcal{A}_{\mathfrak{C}} \xrightarrow{E} \mathcal{B}$ tal que los diagramas

$$\text{(15)} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A}_{\mathfrak{C}} \arrow[rr, "E"] & & \mathcal{B} \\ & \mathcal{A} \arrow[ul, "S_0"] \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A}_{\mathfrak{C}} \arrow[rr, "E"] \arrow[dr, "T_0"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "T"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd} \quad \text{(16)}$$

conmutan. El funtor $E$ es pleno y fiel. Aún más, $E$ induce una equivalencia si y solo si $S$ es denso.

Demostración:

Definimos $E: \mathcal{A}_{\mathfrak{C}} \longrightarrow \mathcal{B}$ como sigue:

En objetos: si $X \in |\mathcal{A}_{\mathfrak{C}}|$, $E(X) = S(X)$

En morfismos: sea $\varphi_{X,Y}: Hom_{\mathcal{A}}(TX,Y) \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{B}}(X,S(Y))$

la adjunción. Entonces si $f \in (X,Y)_{\mathfrak{C}} = (FX,Y) = (TS(X),Y)$

tomamos $E(f) = \varphi_{SX,Y}(f) \in Hom_{\mathcal{B}}(S(X),S(Y))$

Veamos que $E$ es efectivamente un funtor:

Supongamos que $f \in (X,Y)_{\mathfrak{C}} = Hom_{\mathcal{A}}(TS(X),Y)$, y

$g \in (Y,Z)_{\mathfrak{C}} = Hom_{\mathcal{A}}(TS(Y),Z)$, entonces tenemos:

$g\cdot f = gTS(f)T(\beta_{S(X)})$. Entonces

$$E(g\cdot f) = \varphi_{S(X),Z}\left(gTS(f)T(\beta_{S(X)})\right) =$$

$$= S(gTS(f)T(\beta_{S(X)}))\beta_{S(X)} = \qquad \text{por } (10)$$

$$= S(g)STS(f)ST(\beta_{S(X)})\beta_{S(X)} =$$

$$= S(g)STS(f)\beta_{STS(X)}\beta_{S(X)} \qquad \text{por la naturalidad de } \beta$$

$$= S(g)\beta_{S(Y)}S(f)\beta_{S(X)} \qquad \text{de nuevo por la naturalidad de } \beta$$

$$= \varphi_{S(Y),Z}(g)\varphi_{S(X),Y}(f) = E(g)E(f) \quad \text{por } (10).$$

Ahora veamos que $E$ manda identidades en identidades:

si $X \in |\mathcal{A}_{\mathbb{C}}|$, entonces $1d_{\mathcal{A}_{\mathbb{C}}}X = \varepsilon_X = \alpha_X \in (X,X)_{\mathbb{C}}$

$E(\varepsilon_X) = E(\alpha_X) = \varphi_{S(X),X}(\alpha_X)$

pero $\alpha_X = \varphi^{-1}_{S(X),X}(\mathrm{id}_{S(X)})$: por lo tanto

$E(\alpha_X) = \varphi_{S(X),X}\left(\varphi^{-1}_{S(X),X}(\mathrm{id}_{S(X)})\right) = \mathrm{id}_{S(X)}$

por tanto $E$ es un funtor covariante.

Probemos ahora la conmutatividad de los diagramas (15) y (16)

En objetos: si $X \in |\mathcal{A}|$, $ES_0(X) = E(X) = S(X)$

Ahora si $f: X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces

$ES_0(f) = E(f\varepsilon_X) = \varphi_{S(X),Y}(f\alpha_X) = S(f\alpha_X)\beta_{S(X)} =$

$= S(f)S(\alpha_X)\beta_{S(X)} = S(f)\varphi_{SX,X}(\alpha_X)$ (por (10))

$= S(f)\varphi_{SX,X}(\varphi^{-1}_{SX,X}(id_{S(X)})) = S(f)$

mostrándose la conmutatividad del diagrama (15).

La conmutatividad del diagrama (16) se prueba de manera análoga.

Por otro lado de la definición de $E$, es evidente que éste es fiel, y pleno.

Claramente $S$ es denso si y solo si $E$ es denso //.

2.1.8 <u>PROPOSICION</u>. <u>Sean $(F,\delta,\varepsilon)$ un cotriple sobre la categoría $\mathcal{A}$, y $F \xrightarrow{\Phi} G$ un isomorfismo de funtores. Entonces considerando los morfismos</u>

$\varepsilon' : G \xrightarrow{\Phi^{-1}} F \xrightarrow{\varepsilon} id_{\mathcal{A}}$, $\delta' : G \xrightarrow{\Phi^{-1}} F \xrightarrow{\delta} F^2 \xrightarrow{S(\Phi)} G^2$

$(G,\delta',\varepsilon')$ <u>es un cotriple sobre $\mathcal{A}$. Además $\Phi$ resulta un isomorfismo de cotriples.</u>

Demostración:

Probemos primero que $(G,\delta',\varepsilon')$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$.

Veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\delta'"'] \arrow[dr, equal] & G^2 \arrow[d, "G\varepsilon'"] \\ G^2 \arrow[r, "\varepsilon'_G"'] & G \end{tikzcd}$$

conmuta.

Sea $x \in |\mathcal{A}|$, entonces tenemos los morfismos:

$$G(X) \xrightarrow{\Phi_X^{-1}} F(X) \xrightarrow{\delta_X} F^2(X) \xrightarrow{F(\Phi_X)} F(G(X)) \xrightarrow{\Phi_{G(X)}} G^2(X)$$

cuya composición es $\delta'_X$, y los morfismos

$$G^2(X) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{G(X)}} F(G(X)) \xrightarrow{\varepsilon_{G(X)}} G(X)$$

cuya composición es $(\varepsilon'_G)_X$

Ahora $(\varepsilon'_G \delta')_X = \varepsilon_{G(X)} \Phi^{-1}_{G(X)} \Phi_{G(X)} F(\Phi_X) \delta_X \Phi_X^{-1} =$

$= \varepsilon_{G(X)} F(\Phi_X) \delta_X \Phi_X^{-1}$.

pero, por la naturalidad de $\varepsilon$ se tiene: $\varepsilon_{G(X)} F(\Phi_X) = \Phi_X \varepsilon_{F(X)}$

$\therefore (\varepsilon'_G \delta')_X = \Phi_X \varepsilon_{F(X)} \delta_X \Phi_X^{-1} = \Phi_X \Phi_X^{-1} = id_{G(X)}$ (por diagrama (1))

$\therefore \varepsilon'_G \delta' = id_G$. Similarmente se prueba que $G\varepsilon'\delta' = id_G$.

Análogas pruebas pueden hacerse para ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\delta'"'] & G^2 \arrow[d, "G\delta'"] \\ G^2 \arrow[r, "\delta'_G"'] & G^3 \end{tikzcd}$$

conmuta y que $F \xrightarrow{\Phi} G$ es un isomorfismo de cotriples.//

## §2.2 BOCS's y cotriples; Representaciones de BOCS's y categoría de Kleisli.

Fijemos $\mathcal{K}$ una $k$-categoría con $k$ un anillo conmutativo con identidad.

Sea $(F, \delta, \varepsilon)$ un cotriple sobre la categoría $\mathcal{U} = (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$, $F$ un funtor de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}$. En todo lo que sigue estudiaremos cotriples en los cuales $F$ está dado por un producto tensorial, esto es existe un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\mathcal{C}$ tal que si $M \in (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$ entonces $F(M) = \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} M$. Desde luego las propiedades de $F$ estarán dadas por propiedades sobre $\mathcal{C}$ llevandonos al concepto de un bimódulo sobre una categoría BOCS, introducido por A. V. Roiter en [17].

Empecemos recordando algunas definiciones y resultados acerca de BOCS's.

<u>Definición</u> (A.V. Roiter [17]). <u>Sea $\mathcal{K}$ una $k$-categoría. Un bimódulo ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ es un BOCS si existen morfismos de bimódulos</u>

$$ {}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\delta} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \qquad (\underline{\text{comultiplicación}}) $$

$$ {}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K} \qquad (\underline{\text{counidad}}) $$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
K\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[r, "\cong", "\bar{\sigma}"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C}\otimes K \arrow[l, "\cong"', "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[r, "1\otimes\delta"] & \mathcal{C}\otimes_{K}(\mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C}) \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \\
 & \mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[r, "\delta\otimes 1"] & (\mathcal{C}\otimes_{K}\mathcal{C})\otimes_{K}\mathcal{C} \arrow[uu, "\tau", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma$, $\bar{\sigma}$, $\tau$ son los isomorfismos naturales usuales. (ver cap. 1).

Ahora si ${}_{K}\mathcal{C}_{K}$ es un BOCS, $\mathcal{C}$ determina el endofuntor $\mathcal{C}\otimes_{K} - : \mathcal{A} = (K, \mathrm{Mod}_k) \longrightarrow \mathcal{A} = (K, \mathrm{Mod}_k)$, y transformaciones naturales:

$\bar{\varepsilon} : (\mathcal{C}\otimes_{K} -) \longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$ dada por la composición

$\bar{\varepsilon}_A : \mathcal{C}\otimes_{K} A \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} K\otimes_{K} A \xrightarrow[\cong]{\sigma} A$, $A \in |\mathcal{A}|$ y.

$\bar{\delta} : (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -) \longrightarrow (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^2$ dada por la composición

$$\bar{\delta}_A : \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \xrightarrow{\delta \otimes 1} (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C}) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \underset{\cong}{\xrightarrow{\tau}} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A)$$

2.2.1 __PROPOSICION__. $(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon})$ __es un cotriple sobre__ $\mathcal{C}\mathcal{A} = (\mathcal{K}, Mod_k)$.

Demostración: Veamos que los diagramas

$$(17) \qquad \begin{tikzcd}
(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -) \arrow[r, "\bar{\delta}"] \arrow[d, "\bar{\delta}"'] \arrow[dr, equal] & (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^2 \arrow[d, "(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)\bar{\varepsilon}"] \\
(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^2 \arrow[r, "\bar{\varepsilon}(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)"'] & (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} - \arrow[r, "\bar{\delta}"] \arrow[d, "\bar{\delta}"'] & (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^2 \arrow[d, "(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)\bar{\delta}"] \\
(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^2 \arrow[r, "\bar{\delta}(\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)"'] & (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -)^3
\end{tikzcd} \qquad (18)$$

conmutan.

En efecto, de la definición de BOCS se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon \otimes 1"'] & \mathcal{C} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[d, "1 \otimes \varepsilon"] \\
\mathcal{K} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[r, "\cong", "\Gamma"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K} \arrow[l, "\cong"', "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"'] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes A \arrow[l, "\tau"'] \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1\otimes 1"'] & \mathcal{E}\otimes A \arrow[l, "\delta\otimes 1"'] \arrow[r, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] & \mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[d, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] \\
\mathcal{K}\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[d, "\Gamma"'] & (\mathcal{K}\otimes\mathcal{E})\otimes A \arrow[l, "\tau"'] & \mathcal{E}\otimes A \arrow[l, "\Gamma'\otimes 1"'] \arrow[r, "\Gamma'\otimes 1"] \arrow[d, equal] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{K})\otimes A \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{E}\otimes(\mathcal{K}\otimes A) \arrow[d, "1\otimes\Gamma"] \\
\mathcal{E}\otimes A \arrow[rr, equal] & & \mathcal{E}\otimes A \arrow[rr, equal] & & \mathcal{E}\otimes A
\end{tikzcd}$$

Esto es porque cada uno de los rectángulos conmuta.

En forma análoga se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\otimes A \arrow[r, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, "\delta\otimes 1"'] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes A \arrow[r, "\tau"] & \mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[d, "1\otimes\delta\otimes 1"] \\
(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes A \arrow[d, "\tau"'] & & \mathcal{E}\otimes((\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes A) \arrow[d, "1\otimes\tau"] \\
\mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[r, "\delta\otimes 1"] & (\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})\otimes(\mathcal{E}\otimes A) \arrow[r, "\tau'"] & \mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes(\mathcal{E}\otimes A))
\end{tikzcd}$$

De donde se sigue la conmutatividad de los diagramas (17) y (18). Por tanto $\mathfrak{C} = (\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{K}} -, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon})$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$. //

Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría, la categoría de las $\mathcal{V}$-representaciones del Bocs ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, la cual denotaremos por $R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ tiene por objetos los k-funtores

$A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$. Si $A$ y $B$ son $k$-funtores, los morfismos de $A$ a $B$ están dados por:

$$R(A,B) = \{\eta \mid {}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\eta} {}^{B}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}^{A}_{\mathcal{K}} \text{ es un morfismo de bimódulos}\}$$

la composición
$$\begin{aligned} R(B,C)\times R(A,B) &\longrightarrow R(A,C) \\ (\eta',\eta) &\longmapsto \eta'\eta \end{aligned}$$

queda definida por la siguiente composición de morfismos de bimódulos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C} \arrow[r, "\eta'\otimes\eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{C} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\eta'\eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{A}
\end{tikzcd}$$

en donde $\pi$ es la transformación natural dada por la composición de morfismos en $\mathcal{V}$ (ver cap. 1).

Ahora siguiendo [4] probaremos que si $\mathcal{V}$ es una subcategoría plena de la categoría de $k$-espacios vectoriales, entonces la categoría de representaciones del BOCS $\mathcal{E}$ puede verse como una subcategoría plena de la categoría de Kleisli del cotriple asociado al BOCS $\mathcal{E}$.

Supongamos que $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ es un BOCS. Entonces este induce el cotriple $\mathbb{C} = (\mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon})$ sobre la categoría $\mathcal{C} = (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$.

Si $\mathcal{V}$ es una subcategoría plena de $\mathrm{Mod}_k$, se tiene los siguientes funtores:

$$(\mathcal{K}, \mathcal{V}) \xhookrightarrow{i} (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k) \xrightarrow{S} (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}_{\mathbb{C}}.$$

Consideremos la subcategoría plena $\mathcal{C}_{\mathbb{C},\mathcal{V}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ cuyos objetos son de la forma $\underset{\overset{\|}{X}}{Si(x)}$ con $x \in |(\mathcal{K}, \mathcal{V})|$.

2.2.2 <u>TEOREMA</u>. <u>Sea</u> $\mathcal{V}$ <u>una subcategoría plena de</u> $\mathrm{Mod}_k$. <u>Si</u> ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ <u>es un</u> BOCS <u>y</u> $\mathbb{C}$ <u>es el cotriple asociado</u>. <u>Entonces</u>

$$R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \cong (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)_{\mathbb{C},\mathcal{V}}.$$

Demostración: Necesitamos definir dos funtores:

$$R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{C},\mathcal{V}}.$$

Para esto primeramente definiremos transformaciones

$$\text{transf. nat.}(\mathcal{C}, {}^{B}\mathcal{V}^{A}) \underset{\Psi_{A,B}}{\overset{\Phi_{A,B}}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}\text{-transf}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}} A, B)$$

para cada pareja de funtores $A : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$, $B : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{V}$, tales que $\Psi_{A,B}\Phi_{A,B} = id.$, $\Phi_{A,B}\Psi_{A,B} = id.$

Sea $\eta : \mathcal{C} \longrightarrow {}^{B}\mathcal{V}^{A}$ una transformación natural

$$\eta_{y,x} : \mathcal{C}(y,x) \longrightarrow \mathcal{V}(A(y), B(x))$$

Consideremos la siguiente familia de funciones:

$\mathcal{L}^{y}_{x_0} : \mathcal{C}(y,x_0) \times A(y) \longrightarrow B(x_0)$ para $y \in |\mathcal{K}|$, donde cada $\mathcal{L}^{y}_{x_0}$ está dada por

$$\mathcal{L}^{y}_{x_0}(c,a) = \eta_{y,x_0}(c)(a)$$

No es difícil ver que esta familia es $\mathcal{K}$-balanceada, en consecuencia determina un morfismo de grupos:

$$\mathcal{D}_{x_0} : \mathcal{C}(-,x_0)\underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow B(x_0)$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(Y,x_0)\times A(Y) \arrow[r, "\mathcal{D}^Y_{x_0}"] \arrow[d, "\varphi_Y"'] & B(x_0) \\ \mathcal{C}(-,x_0)\underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \arrow[ur, "\mathcal{D}_{x_0}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para cada $Y \in |\mathcal{K}|$ (ver 1.2.2). Por tanto

$$\mathcal{D}_{x_0}\varphi_Y(c,a) = \mathcal{D}_{x_0}(c\otimes a) = \mathcal{D}^Y_{x_0}(c,a) = \eta_{Y,x_0}(c)(a).$$

La naturalidad de $\mathcal{D}_{x_0}$ en $x_0$ se sigue de la naturalidad de $\eta$.

Definimos $\Phi_{A,B}(\eta)$ como $\Phi_{A,B}(\eta)_x = \mathcal{D}_x$.

Ahora si

$\varphi : \mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow B$ es una transformación

natural de $\kappa$-funtores, entonces

$$\Psi_{A,B}(\varphi)_{x,y} : \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{V}(A(x),B(y))$$

está dada por la fórmula:

$\Psi_{A,B}(\varphi)_{x,y}(c)(a) = \varphi_y(c \otimes a)$, donde $c \in \mathcal{C}(x,y)$, $a \in A(x)$; y

$$\varphi_y : \mathcal{C}(-,y) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow B(y).$$

Ahora $\Psi_{A,B}(\varphi)$ es natural de la misma definición y de la naturalidad de $\varphi$. Además no es difícil convencerse que $\Psi_{A,B}\Phi_{A,B} = id$, y $\Phi_{A,B}\Psi_{A,B} = id$.

Ahora estamos en condiciones de definir los funtores $\Phi$, $\Psi$.

Primero $\Phi : R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{K}, Mod_K)_{\mathcal{C},\mathcal{V}}$.

En objetos: si $A \in |R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})|$, ponemos $\Phi(A) = A$.

En morfismos: si $\eta \in R(A,B)$, $\Phi(\eta) = \Phi_{A,B}(\eta) : \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} A \longrightarrow B$

Sean $\eta \in R(A,B)$, $\eta' \in R(B,C)$, esto es

$\mathcal{C} \xrightarrow{\eta} {}^{B}\mathcal{V}^{A}$ y $\mathcal{C} \xrightarrow{\eta'} {}^{C}\mathcal{V}^{B}$ transformaciones naturales.

Recuérdese que la composición $\eta'\eta$ está dada por la composición:

$$= \mathcal{F}(\eta')(\xi \otimes \mathcal{F}(\eta))I[\Sigma(x_i \otimes y_i)\otimes a] =$$

$$= \mathcal{F}(\eta')\,\xi \otimes \mathcal{F}(\eta)\,I\,\delta \otimes 1\,[\iota \otimes a] =$$

$$= \mathcal{F}(\eta')\,\mathcal{F}(\eta)\,[\iota \otimes a].$$

En consecuencia: $\mathcal{F}(\eta'\eta) = \mathcal{F}(\eta')\,\mathcal{F}(\eta)$.

Puesto que en $R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ la identidad en $A$, está dada por la composición:

$$I_A = \left(\mathcal{C} \xrightarrow{\;\mathcal{E}\;} \mathcal{K} \xrightarrow{\;\hat{A}\;} \mathcal{V}^A\right)$$

Entonces es inmediato ver que $\mathcal{F}(I_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.

Así pues $\mathcal{F}$ es un funtor.

Ahora el funtor $\Psi: (\mathcal{K}, Mod_{\mathcal{K}})_{\mathcal{C},\mathcal{V}} \longrightarrow R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$

lo definimos como la identidad en objetos, y en los morfismos por medio de las aplicaciones $\{\Psi_{A,B}\}$, entonces $\Psi$ es el inverso de $\mathcal{F}$, de donde se sigue que $\Psi$ es un funtor.

Por tanto $\mathcal{F}$ es un isomorfismo, mostrándose el teorema. //

2.2.3 <u>Observación</u>: Sea $\mathbb{C}=(F,\delta,\varepsilon)$ un cotriple sobre $\mathcal{A}=({}^{\mathcal{K}}\!,\mathrm{Mod}_k)$ y supongamos que $F$ es isomorfo al funtor $\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-$, para algún bimódulo ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$. Supongamos que

$$\Phi: F \longrightarrow \mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}- \text{ es un isomorfismo.}$$

Entonces por 2.1.8, $(\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-;\delta',\varepsilon')$ es un cotriple sobre $\mathcal{A}$, en donde $\delta',\varepsilon'$ son los morfismos:

$$\varepsilon':(\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-)\xrightarrow{\Phi^{-1}}F\xrightarrow{\varepsilon}\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \quad y \quad \delta':(\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-)\xrightarrow{\Phi^{-1}}F\xrightarrow{\delta}F^2\xrightarrow[\Phi(\Phi)]{}(\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}-)^2$$

Aún más, $\Phi$ es un isomorfismo de cotriples.

Tomando ahora valores en objetos de $\mathcal{A}$ de la forma $(x,-)$ con $x\in|\mathcal{K}|$, obtenemos transformaciones naturales:

$$\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)\xrightarrow{\varepsilon'(x,-)}(x,-) \quad y \quad \mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)\xrightarrow{\delta'(x,-)}\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-))$$

De aquí tomando valores en objetos de $\mathcal{K}$, obtenemos los morfismos:

$$\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)(y)=\mathcal{C}(-,y)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)=\mathcal{C}(x,y)\xrightarrow{\varepsilon'(x,-)_y}\mathcal{K}(x,y) \quad y$$

$$\mathcal{C}\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)(y)=\mathcal{C}(-,y)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}(x,-)=\mathcal{C}(x,y)\xrightarrow{\delta'(x,-)_y}\mathcal{C}\otimes(\mathcal{C}\otimes(x,-))(y)\cong$$

$$\cong (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C}) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} (x,-)(y) = (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C})(-,y) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} (x,-) = (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C})(x,y).$$

Si ponemos $\varepsilon''_{(x,y)} := \varepsilon'_{(x,-)y}$ y $\delta''_{(x,y)} :=$ la última composición de morfismos, entonces obtenemos morfismos de bimódulos ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\varepsilon''} \mathcal{K}$ y ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\delta''} \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{C}$ de tal forma que $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \delta'', \varepsilon'')$ es un BOCS.

Ahora si $\overline{\mathbb{C}} = (\mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -, \overline{\delta}'', \overline{\varepsilon}'')$ es el cotriple sobre $\mathcal{C}\mathcal{A}$ inducido por este BOCS (ver 2.2.1), no es difícil convencerse que $\phi : F \longrightarrow \mathcal{C} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} -$ es un isomorfismo de cotriples.

En particular, tenemos que las nociones de BOCS y cotriple dado por un producto tensorial con un bimódulo son los mismos, en el caso de que $\mathcal{C}\mathcal{A} = (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$.

Definición. Un morfismo de Bocs $\Phi : ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon) \longrightarrow ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}'_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ es un morfismo de bimódulos $\Phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ tal que los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathcal{E}' \arrow[d, "\varepsilon'"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, equal] & \mathcal{K} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{E}' \arrow[d, "\delta'"] \\ \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{E} \arrow[r, "\Phi \otimes \Phi"] & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{E}' \end{tikzcd}$$

conmutan.

Nota: Para una información más completa de la categoría de las V-representaciones de un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, ver [18] ó [17].

## §2.3 Diferenciales, BOCS's con la condición ($\mathfrak{H}$) y representaciones.

En esta sección veremos que dado un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ con la condición ($\mathfrak{H}$), entonces al núcleo de $\mathcal{C}$ se le puede asociar una diferencial de grado 1. También analizaremos la situación recíproca. Finalmente reinterpretaremos la categoría de representaciones de $\mathcal{C}$.

Definición. Sea ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$. El BOCS $\mathcal{C}$ se dice que cumple la condición ($\mathfrak{H}$) si la counidad $\mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K}$ satisface:

$$\varepsilon_{x,y} : \mathcal{C}(x,y) \longrightarrow \mathcal{K}(x,y) \text{ es epimorfismo}, \forall x,y \in |\mathcal{K}|$$

Obsérvese que si ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ es un BOCS con la condición ($\mathfrak{H}$), entonces tenemos epimorfismos

$$\mathcal{C}(-,x) \underset{\sigma_x}{\overset{\varepsilon_x}{\rightleftarrows}} \mathcal{K}(-,x) \longrightarrow 0 \qquad (19)$$

para cada $x \in |\mathcal{K}|$ y por ser $\mathcal{K}(-,x)$ proyectivo en $(\mathcal{K}, \text{Mod}_k)$, existe una transformación natural $\nabla_x : \mathcal{K}(-,x) \longrightarrow \mathcal{C}(-,x)$ (pero no necesariamente natural en $x$) tal que

$\varepsilon_x \nabla_x = id_{\mathcal{K}(-,x)}$.

Por el teorema de Yoneda $\nabla_x$ está completamente determinada por los elementos $M_x = \nabla_x(id_x) \in \mathcal{C}(x,x)$.

Consideremos el $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\mathcal{L}$ dado por $Ker\,\varepsilon$, en donde $\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}$ es la counidad de $\mathcal{C}$, esto es, el $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo definido como sigue: $\mathcal{L}(x,y) = Ker\,\varepsilon_{(x,y)}$ en objetos y $\mathcal{L}(f,g) = \mathcal{C}(f,g)/\mathcal{L}(x,y)$ con $(f,g) : (x,y) \longrightarrow (x',y')$ morfismo en $\mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K}$. Tenemos entonces una sucesión exacta de $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K} \longrightarrow 0 \qquad (20)$$

Ahora veamos que la sucesión exacta (20) determina una aplicación

$$\mathcal{L}_{x,y} : \mathcal{K}(x,y) \longrightarrow \mathcal{L}(x,y)$$ para cualesquier objetos $x, y$ en $\mathcal{K}$. Antes, daremos una notación que nos será de utilidad más adelante.

Si $h : y' \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{K}$ entonces tenemos el morfismo $\mathcal{C}(h, id_x) : \mathcal{C}(y,x) \longrightarrow \mathcal{C}(y',x)$

En este caso escribimos $\mathcal{E}(h, id_X)v = vh$, $v \in \mathcal{E}(Y,X)$.

Análogamente si $f: X \longrightarrow X'$ es un morfismo en $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{E}(id_Y, f): \mathcal{E}(Y,X) \longrightarrow \mathcal{E}(Y,X')$$

$$\mathcal{E}(id_Y, f)v = fv, \; v \in \mathcal{E}(Y,X).$$

Ahora bien, recordemos que $M_X = \overline{\nabla}_X(id_X)$. Sea $f \in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $fM_X - M_Y f \in \mathcal{L}(X,Y)$, en efecto:

$$\mathcal{E}(fM_X - M_Y f) = \mathcal{E}(fM_X) - \mathcal{E}(M_Y f) = f - f = 0.$$

Definamos $\mathcal{D}(f) = fM_X - M_Y f$.

Ahora vamos a definir una aplicación

$\mathcal{D}_{X,Y}: \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{L}(X,Y)$ para cualesquier objetos $X, Y$.

Primero consideremos la categoría tensorial $T(\mathcal{L})$ definida por el $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\mathcal{L}$:

$|T(\mathcal{L})| = |\mathcal{K}|$.

$$T(\mathcal{L}) = \mathcal{K} \oplus \mathcal{L} \oplus (\mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{L}) \oplus \dots \oplus (\underbrace{\mathcal{L} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}}_{n}) \oplus \dots$$

A los morfismos en $\underbrace{\mathcal{L}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}}_{n}$ les llamaremos homogéneos de grado $n$, a los morfismos de $\mathcal{K}$ homogéneos de grado $0$.

la composición $\circ$ : $\underset{T(\mathcal{L})}{Hom}(Y,Z) \times \underset{T(\mathcal{L})}{Hom}(X,Y) \longrightarrow \underset{T(\mathcal{L})}{Hom}(X,Z)$

$$(f,g) \longmapsto f\circ g$$

está dada por :

$$\begin{cases} fg \text{ si } \operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g = 0 \\ \underbrace{\mathcal{L}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}}_{n}(id_X, f)\, g \text{ si } \operatorname{grad} f = 0, \operatorname{grad} g = n > 0 \\ \underbrace{\mathcal{L}\otimes\ldots\otimes\mathcal{L}}_{n}(g, id_Z)\, f \text{ si } \operatorname{grad} g = 0, \operatorname{grad} f = n > 0 \\ f\otimes g \text{ si } \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g > 0 \end{cases}$$

Ahora bien, consideremos $-\delta(g) + g\otimes\mathbb{1}_X + \mathbb{1}_Y\otimes g = z$, donde $g\in\mathcal{L}(X,Y)$ y $\delta$ es la comultiplicación del BOCS $\mathcal{E}$.

Afirmación 1. En la categoría $T(\mathcal{E})$ tenemos que si $g\in\mathcal{E}(X,Y)$ y $\delta(g) = \sum_i a_i b_i = \sum_i a_i\otimes b_i$

$b_i\in\mathcal{E}(X,Z_i)$, $a_i\in\mathcal{E}(Z_i,Y)$, entonces

$\sum(a_i - \mathbb{1}_Y\varepsilon(a_i))(b_i - \varepsilon(b_i)\mathbb{1}_X) = \delta(g) - g\mathbb{1}_X - \mathbb{1}_Y g + \mathbb{1}_Y\varepsilon(g)\mathbb{1}_X$.

Demostración : Sabemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}\otimes\mathcal{C} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
\mathcal{K}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "\bar{\nabla}"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C}\otimes\mathcal{K} \arrow[l, "\nabla"]
\end{tikzcd}$$

Por tanto, $g = \nabla 1\otimes\varepsilon\,\delta(g) = \nabla 1\otimes\varepsilon(\sum_i a_i b_i) = \sum_i a_i\,\varepsilon(b_i)$.

Similarmente, $g = \sum \varepsilon(a_i) b_i$. Entonces

$\sum_i (a_i - U_Y\varepsilon(a_i))(b_i - \varepsilon(b_i)U_X) = \sum_i a_i(b_i - \varepsilon(b_i)U_X) -$

$- \sum_i U_Y\varepsilon(a_i)(b_i - \varepsilon(b_i)U_X) = \sum_i a_i b_i - \sum_i a_i\,\varepsilon(b_i)U_X -$

$- \sum_i U_Y\varepsilon(a_i)b_i + U_Y\varepsilon(\sum_i a_i\,\varepsilon(b_i))U_X = \delta(g) - gU_X - U_Y g +$

$+ U_Y\varepsilon(g)U_X$.

<u>Afirmación</u> 2. $z \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}(X,Y)$.

En efecto: como $g \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces $\varepsilon(g) = 0$.

Supongamos que $\delta(g) = \sum_i a_i b_i$, usando afirmación 1 tenemos:

$-\delta(g) + g\otimes U_X + U_Y\otimes g = -\sum_i (a_i - U_Y\varepsilon(a_i))\otimes(b_i - \varepsilon(b_i)U_X) \in$

$\in \mathcal{L}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{L}(X,Y)$.

De esta forma podemos definir

$\mathcal{L}(g) := -\delta(g) + g\otimes U_X + U_Y\otimes g \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}(X,Y)$.

En $T(\mathcal{L})$ una diferencial de grado $s \geq 1$ de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{K}$ es una aplicación $\mathcal{D}' : \mathrm{Mor}\, T(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Mor}\, T(\mathcal{L})$ tal que:

(i) $\mathcal{D}' : T_n(\mathcal{L})(x,y) \longrightarrow T_{n+s}(\mathcal{L})(x,y) \quad x,y \in |\mathcal{K}|, \; n \geq 0$

es $k$-lineal, en donde $T_n(x,y)$ denota el conjunto de morfismos homogéneos de grado $n$ en $T(\mathcal{L})(x,y)$.

(ii) $\mathcal{D}'(ab) = a\mathcal{D}'(b) + (-1)^{s\,\mathrm{grad}(b)}\mathcal{D}'(a)\,b$.

Finalmente si $\mathcal{D}'$ es una diferencial de grado $s \geq 1$, ésta se llama interna si para cualquier $x \in |\mathcal{K}|$, existe un morfismo $h_x$ de grado $s$ tal que

$\mathcal{D}'(f) = f h_x - (-1)^{s\,\mathrm{grad}(f)} h_y f$ para todo $f \in T_n(\mathcal{L})(x,y)$.

Podemos ahora extender $\mathcal{D}$ a todo $T(\mathcal{L})$ por linealidad, y usando la fórmula de Leibnitz:

$\mathcal{D}(ab) = a\mathcal{D}(b) + (-1)^{\mathrm{grad}(b)}\mathcal{D}(a)\,b$.

Así pues, $\mathcal{D}$ resulta una diferencial de grado 1 sobre $T(\mathcal{L})$.

Estudiemos ahora $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D} \circ \mathcal{D}$ y probemos el siguiente :

2.3.1 LEMA. Para cada $x \in |\mathcal{K}| = |T(\mathcal{L})|$, existe un morfismo $h_x$ homogéneo de grado 2 en $T(\mathcal{L})(x,x)$ tal que

(i) $\mathcal{D}^2(f) = f h_x - h_y f$, para cualquier $f \in T(\mathcal{L})(x,y)$

(ii) $\mathcal{D}(h_x) = 0$, para cualquier $x \in |\mathcal{K}| = |T(\mathcal{L})|$.

Demostración :

(i) Como $\mathcal{D}$ es una diferencial de grado 1, entonces $\mathcal{D}^2$ es una diferencial de grado 2.

Sea $f$ homogéneo de grado 0 en $T(\mathcal{L})$, $f \in \mathcal{K}(x,y)$, entonces :

$$\mathcal{D}^2(f) = \mathcal{D}(f M_x - M_y f) = -\delta(f M_x - M_y f) + (f M_x - M_y f) \otimes M_x +$$

$$+ M_y \otimes (f M_x - M_y f) = -f\delta(M_x) + \delta(M_y) f + f M_x \otimes M_x - M_y \otimes M_y f =$$

$$= f[-\delta(M_x) + M_x \otimes M_x] - [-\delta(M_y) + M_y \otimes M_y] f .$$

Por tanto si ponemos $h_x = -\delta(\mathcal{U}_x) + \mathcal{U}_x \otimes \mathcal{U}_x$, para toda $x \in |\mathcal{K}|$, entonces $\mathcal{D}^2(f) = f h_x - h_y f$, $f \in \mathcal{K}(x,y)$.

Como antes, utilizando afirmación 1 no es difícil ver que $h_x \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(x,x)$.

Ahora sea $f$ homogéneo de grado 1, entonces $f \in \mathcal{L}(x,y)$.

Tenemos: $\mathcal{D}(f) = -\delta(f) + f \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_y \otimes f = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i \quad (*)$

$$t_i \in \mathcal{L}(x, z_i),\ s_i \in \mathcal{L}(z_i, y).$$

Pero $\mathcal{D}(s_i) = -\delta(s_i) + s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} + \mathcal{U}_y \otimes s_i$ y

$$\mathcal{D}(t_i) = -\delta(t_i) + t_i \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i .$$

Aplicando la fórmula de Leibnitz obtenemos:

$$\mathcal{D}^2(f) = \sum_{i=1}^{n} [\, s_i \otimes \mathcal{D}(t_i) - \mathcal{D}(s_i) \otimes t_i \,] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \mathcal{D}(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(s_i) \otimes t_i .$$

Sustituyendo las expresiones para $\mathcal{D}(s_i)$ y $\mathcal{D}(t_i)$ antes obtenidas tenemos:

$$\mathcal{D}^2(f) = \sum_{i=1}^{n} [-s_i \otimes \delta(t_i) + s_i \otimes t_i \otimes \mathcal{U}_x + s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i] +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\delta(s_i)\otimes t_i-\sum_{i=1}^{n}s_i\otimes\mathcal{U}_{z_i}\otimes t_i-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{U}_y\otimes s_i\otimes t_i\ .$$

De (*) se obtiene: $\sum_{i=1}^{n} s_i\otimes t_i=-\delta(f)+f\otimes\mathcal{U}_x+\mathcal{U}_y\otimes f$, y

$$\sum_{i=1}^{n}\delta(s_i)\otimes t_i=(\delta\otimes 1)\Big(\sum_{i=1}^{n}s_i\otimes t_i\Big)=(\delta\otimes 1)(-\delta(f)+f\otimes\mathcal{U}_x+\mathcal{U}_y\otimes f)=$$

$$=-(\delta\otimes 1)\delta(f)+\delta(f)\otimes\mathcal{U}_x+\delta(\mathcal{U}_y)\otimes f\ .$$

Similarmente, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}s_i\otimes\delta(t_i)=-(1\otimes\delta)\delta(f)+f\otimes\delta(\mathcal{U}_x)+\mathcal{U}_y\otimes\delta(f)\ .$$

Por lo tanto

$$\mathcal{D}^2(f)=-\sum_{i=1}^{n}s_i\otimes\delta(t_i)+\sum_{i=1}^{n}s_i\otimes t_i\otimes\mathcal{U}_x+\sum\delta(s_i)\otimes t_i-\sum\mathcal{U}_y\otimes s_i\otimes t_i=$$

$$=(1\otimes\delta)\delta(f)-f\otimes\delta(\mathcal{U}_x)-\mathcal{U}_y\otimes\delta(f)-(\delta\otimes 1)\delta(f)+\delta(f)\otimes\mathcal{U}_x+$$

$$+\delta(\mathcal{U}_y)\otimes f-\delta(f)\otimes\mathcal{U}_x+f\otimes\mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x+\mathcal{U}_y\otimes f\otimes\mathcal{U}_x+\mathcal{U}_y\otimes\delta(f)-$$

$$-\mathcal{U}_y\otimes f\otimes\mathcal{U}_x-\mathcal{U}_y\otimes\mathcal{U}_y\otimes f=f\otimes[-\delta(\mathcal{U}_x)+\mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x]-$$

$$-[-\delta(\mathcal{U}_y)+\mathcal{U}_y\otimes\mathcal{U}_y]\otimes f=fh_x-h_yf\ .$$

Por lo tanto de la manera en que fué definida $\mathcal{D}$ se puede concluir que (i) se cumple.

Pongamos $h_x = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i$, $t_i \in \mathcal{L}(x, z_i)$, $s_i \in \mathcal{L}(z_i, x)$.

$$\mathcal{D}(h_x) = \mathcal{D}\Big(\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \mathcal{D}(t_i) - \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}(s_i) \otimes t_i .$$

Pero $\mathcal{D}(t_i) = -\delta(t_i) + t_i \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i$ y

$$\mathcal{D}(s_i) = -\delta(s_i) + s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} + \mathcal{U}_x \otimes s_i .$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{D}(h_x) = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \left[-\delta(t_i) + t_i \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i\right] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[-\delta(s_i) + s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} + \mathcal{U}_x \otimes s_i\right] \otimes t_i = -\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \delta(t_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i \otimes \mathcal{U}_x + \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i + \sum_{i=1}^{n} \delta(s_i) \otimes t_i - \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \mathcal{U}_{z_i} \otimes t_i$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_x \otimes s_i \otimes t_i .$$

Pero $-\delta(\mathcal{U}_x) + \mathcal{U}_x \otimes \mathcal{U}_x = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(s_i) \otimes t_i = (\delta \otimes 1)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes t_i\Big) = \delta \otimes 1\big(-\delta(\mathcal{U}_x) + \mathcal{U}_x \otimes \mathcal{U}_x\big) =$$

$$= -(\delta \otimes 1)\delta(\mathcal{U}_x) + \delta(\mathcal{U}_x) \otimes \mathcal{U}_x .$$

Análogamente:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes \delta(t_i) = (1\otimes\delta)\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\otimes t_i\right) = (1\otimes\delta)\left[-\delta(\mathcal{U}_x)+\mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x\right] =$$

$$= -(1\otimes\delta)\,\delta(\mathcal{U}_x) + \mathcal{U}_x\otimes\delta(\mathcal{U}_x).$$

Luego aplicando estas igualdades y la definición de $\delta\circ\delta$ obtenemos:

$$\mathcal{L}(h_x) = (1\otimes\delta)\delta(\mathcal{U}_x) - \mathcal{U}_x\otimes\delta(\mathcal{U}_x) - \delta(\mathcal{U}_x)\otimes\mathcal{U}_x + \mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x$$

$$-(\delta\otimes 1)\delta(\mathcal{U}_x) + \delta(\mathcal{U}_x)\otimes\mathcal{U}_x + \mathcal{U}_x\otimes\delta(\mathcal{U}_x) - \mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x\otimes\mathcal{U}_x =$$

$$= (1\otimes\delta)\delta(\mathcal{U}_x) - (\delta\otimes 1)\delta(\mathcal{U}_x) = 0.$$

De esta manera queda mostrada la fórmula (ii). //

Ahora veamos qué efecto sobre la $\mathcal{L}$ produce una distinta elección de las $\mathcal{U}_x$.

Sea $\mathcal{U}'_x \in \mathcal{C}(x,x)$ tal que $\varepsilon(\mathcal{U}'_x) = 1_x$, $x \in |\mathcal{K}|$.

Definimos $\mathcal{L}'$ tal que si $f \in \mathcal{K}(x,y)$, $\mathcal{L}'(f) = f\mathcal{U}'_x - \mathcal{U}'_y f$ ;

si $g \in \mathcal{I}(x,y)$, $\mathcal{L}'(g) = -\delta(g) + g\otimes\mathcal{U}'_x + \mathcal{U}'_y\otimes g$.

Por lo tanto $(\mathcal{L}-\mathcal{L}')(f) = fh_x - h_y f$.

$(\mathcal{D}-\mathcal{D}')(g) = g\otimes h_x + h_y\otimes g$ con $h_x = M_x - M'_x \in \mathcal{L}(x,x)$.

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente:

2.3.2 TEOREMA. Si $(\mathcal{E},\delta,\varepsilon)$ es un BOCS con la condición (35) sobre $\mathcal{K}$ y

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

es la sucesión exacta (de bimódulos) correspondiente. Entonces si se eligen elementos $M_x \in \mathcal{E}(x,x)$ tales que $\varepsilon(M_x) = id_x$, obtenemos una diferencial $\mathcal{D}$ de grado 1 dada por las fórmulas:

(i) si $f \in \mathcal{K}(x,y)$, $\mathcal{D}(f) = fM_x - M_y f$.

(ii) si $f \in \mathcal{L}(x,y)$, $\mathcal{D}(f) = -\delta(f) + f\otimes M_x + M_y\otimes f$.

$\mathcal{D}^2$ es una diferencial interna y los $\{h_x\}$ satisfacen $\mathcal{D}(h_x) = 0$. Elecciones diferentes de familias $\{M_x\}$ determinan diferenciales que difieren por una diferencial interna.

Además, $\mathcal{E}(-,y) = \mathcal{L}(-,y) \oplus M_y\mathcal{K}(-,y)$ como $\mathcal{K}^{op}$-módulos.

Pasemos ahora a analizar la situación recíproca.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo y $\mathcal{D}$ una diferencial

$(\mathcal{D}-\mathcal{D}')(g) = g\otimes h_x + h_y\otimes g$ con $h_x = M_x - M'_x \in \mathcal{L}(x,x)$.

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente:

1.3.2 TEOREMA: Si $(\mathcal{C},\delta,\mathcal{E})$ es un BOCS con la condición (I) sobre $\mathcal{K}$ y

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

es la sucesión exacta (de bimódulos) correspondiente. Entonces si se eligen elementos $M_x \in \mathcal{C}(x,x)$ tales que $\mathcal{E}(M_x) = id_x$, obtenemos una diferencial $\mathcal{D}$ de grado 1 dada por las fórmulas:

(i) si $f \in \mathcal{K}(x,y)$, $\mathcal{D}(f) = fM_x - M_y f$.

(ii) si $f \in \mathcal{L}(x,y)$, $\mathcal{D}(f) = -\delta(f) + f\otimes M_x + M_y\otimes f$.

$\mathcal{D}^2$ es una diferencial interna y los $\{h_x\}$ satisfacen $\mathcal{D}(h_x) = 0$. Elecciones diferentes de familias $\{M_x\}$ determinan diferenciales que difieren por una diferencial interna.

Además, $\mathcal{C}(-,y) = \mathcal{L}(-,y) \oplus M_y\mathcal{K}(-,y)$ como $\mathcal{K}^{op}$-módulos.

Pasemos ahora a analizar la situación recíproca.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo y $\mathcal{D}$ una diferencial de grado 1 de $\mathcal{L}$ sobre ${}^{\mathcal{U}}\mathcal{K}$, tal que $\mathcal{D}^2$ es una diferencial interna dada por la familia $\{h_X\}$ con $\mathcal{D}(h_X)=0$.

Con esta información construiremos un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ que satisface la condición $(\mathfrak{H}^*)$.

Para simplicidad usaremos la notación introducida en las páginas 43 y 44.

En objetos: si $(X,Y)\in|{}^{u}\mathcal{K}^{\circ}\times{}^{u}\mathcal{K}|$ entonces

$$\mathcal{E}(X,Y)=\mathcal{L}(X,Y)\dot{\oplus}\,{}^{u}\mathcal{K}(X,Y).$$

En morfismos: sean $s\in{}^{u}\mathcal{K}(X',X)$ y $t\in{}^{u}\mathcal{K}(Y,Y')$.

Queremos definir un morfismo

$$\mathcal{E}(s,t):\mathcal{E}(X,Y)=\mathcal{L}(X,Y)\oplus{}^{u}\mathcal{K}(X,Y)\longrightarrow\mathcal{L}(X',Y')\dot{\oplus}\,{}^{u}\mathcal{K}(X',Y')$$

Entonces si $c=(a,b)\in\mathcal{E}(X,Y)$. Definimos

(21) $\mathcal{E}(s,t)c:=tcs:=(tas+\mathcal{D}(t)bs,\ tbs)$, en donde

$tas=\mathcal{L}(s,t)a$; $\mathcal{D}(t)bs=\mathcal{D}(t)\otimes bs$ (composición en $T(\mathcal{L})$);

$tbs={}^{u}\mathcal{K}(s,t)b$.

Pongamos $\mathcal{U}_Y=(0,id_Y)\in\mathcal{L}(Y,Y)\dot{\oplus}\,{}^{u}\mathcal{K}(Y,Y)$, entonces

$(0,b) = (0, id_y)b = \mathcal{M}_y b$ y podemos escribir

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{M}_y . \mathcal{K}(x,y) \quad \text{y}$$

$$\mathcal{E}(s,t)c = tas + \mathcal{D}(t)bs + \mathcal{M}_y t bs .$$

De la definición (21) se sigue que $t\mathcal{M}_y = \mathcal{D}(t) + \mathcal{M}_y \cdot t$.

No es difícil ver que $\mathcal{E}$ así definido es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo.

La counidad está dada por la proyección :

$$\varepsilon_{(x,y)} : \mathcal{E}(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{M}_y \mathcal{K}(x,y) \longrightarrow \mathcal{K}(x,y)$$

Así que $\varepsilon_{(x,x)}(\mathcal{M}_x) = id_x$.

Finalmente definiremos la comultiplicación $\delta$.

Sea $f \in T_n(\mathcal{L})(x,y)$. Por hipótesis, se tiene

$\mathcal{D}^2(f) = fh_x - (-1)^{2\,\mathrm{grad} f} h_y f$ para cierta familia de morfismos

homogéneos $h_x \in \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}(x,x)$, $x \in |\mathcal{K}|$ con $\mathcal{D}(h_x) = 0$.

Ahora consideremos la aplicación

$$\mathcal{E} \xrightarrow{\ \delta\ } \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{E}$$

definida como sigue :

Si $f \in \mathcal{L}(x,y)$, entonces $\delta(f) := -\mathcal{D}(f) + f \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_y \otimes f$

y $\quad \delta(\mathcal{U}_x) := -1_x + \mathcal{U}_x \otimes \mathcal{U}_x$

$\quad \delta(\mathcal{U}_y g) := \delta(\mathcal{U}_y) g \, , \; g \in \mathcal{K}$ .

Veamos ahora que $\delta$ es natural.

Sean $s \in \mathcal{K}(x',x)$ y $t \in \mathcal{K}(y,y')$. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x,y) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathcal{C}(s,t)"'] & (\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C})(x,y) = \mathcal{C}(-,y) \otimes \mathcal{C}(x,-) \arrow[d, "\mathcal{C}(-,t) \otimes \mathcal{C}(s,-)"] \\
\mathcal{C}(x',y') \arrow[r, "\delta"] & (\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C})(x',y') = \mathcal{C}(-,y') \otimes \mathcal{C}(x',-)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

En efecto: Solamente lo haremos para los generadores.

Si $f \in \mathcal{L}(x,y)$, entonces tenemos:

$\delta\, \mathcal{C}(s,t) f = \delta(tfs) = -\mathcal{D}(tfs) + tfs \otimes \mathcal{U}_{x'} + \mathcal{U}_{y'} \otimes tfs =$

$= -\mathcal{D}(tfs) + tf \otimes s\mathcal{U}_{x'} + \mathcal{U}_{y'} t \otimes fs$.

Pero $tf \otimes s\mathcal{U}_{x'} = tf \otimes (\mathcal{D}(s) + \mathcal{U}_x s) = tf \otimes \mathcal{D}(s) + tf \otimes \mathcal{U}_x s$.

$\mathcal{U}_{y'} t \otimes fs = (t\mathcal{U}_y - \mathcal{D}(t)) \otimes fs = t\mathcal{U}_y \otimes fs - \mathcal{D}(t) \otimes fs$.

y $\mathcal{D}(tfs) = tf\mathcal{D}(s) - \mathcal{D}(t)fs + t\mathcal{D}(f)s$.

$\therefore\ \delta\,\mathcal{C}(s,t)f = tf\otimes M_x s + tM_y\otimes fs - t\mathcal{D}(f)s$.

Por otro lado tenemos:

$\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathcal{C}(s,-)\,\delta(f) = \mathcal{C}(-,t)\otimes\mathcal{C}(s,-)\,(-\mathcal{D}(f) + f\otimes M_x + M_y\otimes f)$

$= -t\mathcal{D}(f)s + tf\otimes M_x s + tM_y\otimes fs$.

En forma similar se puede probar que

$$\delta\,\mathcal{C}(s,t)M_y g = \mathcal{C}(-,t)\otimes\mathcal{C}(s,-)\,\delta(M_y g).$$

De lo anterior podemos concluir que $\delta$ es natural.

Para concluir veamos que los diagramas de la definición de BOCS son conmutativos:

<u>Afirmación 1</u>. <u>El diagrama</u>

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[r, "1\otimes\delta"] & \mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\delta"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \\ & \mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[r, "\delta\otimes 1"] & (\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C})\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[uu, "\tau", "\cong"'] \end{tikzcd} \qquad (22)$$

<u>conmuta</u>.

En efecto, sea $f\in\mathcal{L}(x,y)$, $\delta(f) = -\mathcal{D}(f) + f\otimes M_x + M_y\otimes f$.

Supongamos que $\mathcal{D}(f)=\sum_i s_i\otimes t_i$, $t_i\in\mathcal{L}(X,Z_i)$, $s_i\in\mathcal{L}(Z_i,Y)$

entonces $\mathcal{D}^2(f)=\mathcal{D}(\sum_i s_i\otimes t_i)=\sum s_i\otimes\mathcal{D}(t_i)-\sum_i\mathcal{D}(s_i)\otimes t_i=$

$=f\otimes h_X-h_Y\otimes f$ (A)

Por un lado tenemos:

$(1\otimes\delta)\delta(f)=(1\otimes\delta)[-\sum_i s_i\otimes t_i+f\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes f]=$

$=-\sum_i s_i\otimes\delta(t_i)+f\otimes\delta(\mathcal{U}_X)+\mathcal{U}_Y\otimes\delta(f)=-\sum s_i\otimes[-\mathcal{D}(t_i)+t_i\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_{Z_i}\otimes t_i]$

$+f\otimes(-h_X+\mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X)+\mathcal{U}_Y\otimes(-\mathcal{D}(f)+f\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes f)=$

$=\sum_i s_i\otimes\mathcal{D}(t_i)-\sum_i s_i\otimes t_i\otimes\mathcal{U}_X-\sum_i s_i\otimes\mathcal{U}_{Z_i}\otimes t_i-f\otimes h_X+f\otimes\mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X-$

$-\sum_i\mathcal{U}_Y\otimes s_i\otimes t_i+\mathcal{U}_Y\otimes f\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes\mathcal{U}_Y\otimes f$.

Por otro lado tenemos:

$(\delta\otimes 1)\delta(f)=(\delta\otimes 1)[-\sum_i s_i\otimes t_i+f\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes f]=$

$=-\sum_i\delta(s_i)\otimes t_i+\delta(f)\otimes\mathcal{U}_X+\delta(\mathcal{U}_Y)\otimes f=$

$=-\sum_i[-\mathcal{D}(s_i)+s_i\otimes\mathcal{U}_{Z_i}+\mathcal{U}_Y\otimes s_i]\otimes t_i+(-\sum_i s_i\otimes t_i+f\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes f)\otimes\mathcal{U}_X+$

$+(-h_Y+\mathcal{U}_Y\otimes\mathcal{U}_Y)\otimes f=\sum_i\mathcal{D}(s_i)\otimes t_i-\sum_i s_i\otimes\mathcal{U}_{Z_i}\otimes t_i-$

$-\sum_i\mathcal{U}_Y\otimes s_i\otimes t_i-\sum_i s_i\otimes t_i\otimes\mathcal{U}_X+f\otimes\mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X+\mathcal{U}_Y\otimes f\otimes\mathcal{U}_X-$

$-h_Y\otimes f+\mathcal{U}_Y\otimes\mathcal{U}_Y\otimes f$.

Por $(\Delta)$ se tiene $\sum_i s_i \otimes \mathcal{D}(t_i) - f\otimes h_X = \sum \mathcal{D}(s_i)\otimes t_i - h_Y \otimes f$

Por lo tanto: $(1\otimes\delta)\delta(f) = (\delta\otimes 1)\delta(f)$ para $f \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Ahora consideremos $f = \mathcal{U}_X$.

Por un lado tenemos:

$(1\otimes\delta)\delta(\mathcal{U}_X) = (1\otimes\delta)(-h_X + \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X) = -(1\otimes\delta)h_X + \mathcal{U}_X\otimes\delta(\mathcal{U}_X) =$

$= -(1\otimes\delta)h_X + \mathcal{U}_X\otimes(-h_X + \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X) = -(1\otimes\delta)h_X - \mathcal{U}_X\otimes h_X +$

$+ \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X$.

Por otro lado tenemos:

$(\delta\otimes 1)\delta(\mathcal{U}_X) = (\delta\otimes 1)(-h_X + \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X) = -(\delta\otimes 1)h_X + \delta(\mathcal{U}_X)\otimes\mathcal{U}_X =$

$= -(\delta\otimes 1)h_X + (-h_X + \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X)\otimes\mathcal{U}_X = -(\delta\otimes 1)h_X - h_X\otimes\mathcal{U}_X +$

$+ \mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X\otimes\mathcal{U}_X$.

Supongamos que $h_X = \sum_i s_i\otimes t_i \quad s_i \in \mathcal{L}(Z_i, X),\ t_i \in \mathcal{L}(X, Z_i)$.

Entonces tenemos:

$(\delta\otimes 1)(h_X) + h_X\otimes\mathcal{U}_X = \sum_i \delta(s_i)\otimes t_i + h_X\otimes\mathcal{U}_X =$

$= \sum_i (-\mathcal{D}(s_i) + s_i\otimes\mathcal{U}_{Z_i} + \mathcal{U}_X\otimes s_i)\otimes t_i + h_X\otimes\mathcal{U}_X =$

$= -\sum_i \mathcal{D}(s_i)\otimes t_i + \sum_i s_i\otimes\mathcal{U}_{Z_i}\otimes t_i + \sum_i \mathcal{U}_X\otimes s_i\otimes t_i + h_X\otimes\mathcal{U}_X =$

$$= -\sum_i \mathcal{D}(s_i)\otimes t_i + \sum_i s_i\otimes \mu_{z_i}\otimes t_i + \mu_x\otimes h_x + h_x\otimes \mu_x\ .$$

Pero como $\mathcal{D}(h_x)=0$, entonces $\mathcal{D}(\sum s_i\otimes t_i) = \sum s_i\otimes \mathcal{D}(t_i) -$

$- \sum \mathcal{D}(s_i)\otimes t_i = 0$. Luego $\sum s_i\otimes \mathcal{D}(t_i) = \sum \mathcal{D}(s_i)\otimes t_i$ .

Por lo tanto

$$(\delta\otimes 1)(h_x) + h_x\otimes \mu_x = -\sum s_i\otimes \mathcal{D}(t_i) +$$

$$+ \sum s_i\otimes \mu_{z_i}\otimes t_i + \mu_x\otimes h_x + h_x\otimes \mu_x = (1\otimes\delta)(h_x) + \mu_x\otimes h_x\ .$$

De donde se sigue:

$$-(1\otimes\delta)(h_x) - \mu_x\otimes h_x + \mu_x\otimes\mu_x\otimes\mu_x = -(\delta\otimes 1)h_x - h_x\otimes\mu_x +$$

$$+ \mu_x\otimes\mu_x\otimes\mu_x\ .\ \text{Luego}\ (1\otimes\delta)\delta(\mu_x) = (\delta\otimes 1)\delta(\mu_x)\ .$$

<u>Afirmación 2. El diagrama</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[d, "1\otimes\varepsilon"] \\
\mathcal{K}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{C} \arrow[r, "\Gamma"'] & \mathcal{C} & \mathcal{C}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{K} \arrow[l, "\bar{\Gamma}"]
\end{tikzcd}$$

<u>conmuta</u>.

Demostración: Si $f\in\mathcal{L}(X,Y)$, entonces

$S(f) = -\mathcal{D}(f) + f \otimes \mathcal{U}_X + \mathcal{U}_Y \otimes f$.

Supongamos que $\mathcal{D}(f) = \sum_i s_i \otimes t_i$ con $t_i \in \mathcal{L}(X, Z_i)$, $s_i \in \mathcal{L}(Z_i, Y)$ luego

$$(\varepsilon \otimes 1) S(f) = (\varepsilon \otimes 1)(-\sum s_i \otimes t_i + f \otimes \mathcal{U}_X + \mathcal{U}_Y \otimes f) =$$

$$= -\sum_i \varepsilon(s_i) \otimes t_i + \varepsilon(f) \otimes \mathcal{U}_X + \varepsilon(\mathcal{U}_Y) \otimes f = id_Y \otimes f.$$

Por tanto $\Gamma(\varepsilon \otimes 1) S(f) = f$.

Ahora si $f = \mathcal{U}_X$, tenemos:

$$(\varepsilon \otimes 1) S(\mathcal{U}_X) = (\varepsilon \otimes 1)(-h_X + \mathcal{U}_X \otimes \mathcal{U}_X) = -(\varepsilon \otimes 1) h_X + \varepsilon(\mathcal{U}_X) \otimes \mathcal{U}_X =$$

$$= -(\varepsilon \otimes 1) h_X + id_X \otimes \mathcal{U}_X.$$

Supongamos que $h_X = \sum s_i \otimes t_i$, entonces

$$(\varepsilon \otimes 1) S(\mathcal{U}_X) = -(\varepsilon \otimes 1)(\sum_i s_i \otimes t_i) + id_X \otimes \mathcal{U}_X = id_X \otimes \mathcal{U}_X.$$

Así que $\Gamma(\varepsilon \otimes 1) S(\mathcal{U}_X) = \mathcal{U}_X$.

En forma análoga se prueba la conmutatividad de la otra parte del diagrama, mostrándose la afirmación 2.

Podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente:

2.3.3 TEOREMA. Supongamos que $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo y $\mathcal{D}$ una diferencial de grado 1 de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{K}$ tal que $\mathcal{D}^2$ es una diferencial interna dada por la familia $\{h_x\}$ con $\mathcal{D}(h_x)=0$. Entonces $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ en donde $\mathcal{E}, \delta$ y $\varepsilon$ están definidos como antes es un BOCS con la condición $(\mathcal{F}')$ tal que $\ker \varepsilon = \mathcal{L}$.

Aún más, todo BOCS con la condición $(\mathcal{F})$ es de esta forma (salvo isomorfismo).

Ahora veamos las representaciones de un BOCS con la condición $(\mathcal{F})$, en términos de la diferencial asociada.

Sea $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ un BOCS con la condición $(\mathcal{F})$ y núcleo $\mathcal{L}$. Elijamos elementos $\mathcal{U}_x \in \mathcal{E}(x,x)$ tal que $\varepsilon(\mathcal{U}_x)=id_x$. Supongamos que $\mathcal{D}$ es la diferencial asociada. (Entonces $\mathcal{D}^2$ es una diferencial interna dada por la familia $\{h_x\}$ con $\mathcal{D}(h_x)=0$, ver 2.3.2).

Sea $R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \mathrm{Mod}_k)$ la categoría de representaciones de $\mathcal{E}$ en la $k$-categoría de $k$-espacios vectoriales $\mathcal{V}=\mathrm{Mod}_k$.

Consideremos un morfismo $\eta \in R(A,B)$ con $A,B \in (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$

$$\therefore \eta : {}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \longrightarrow {}^{B}_{\mathcal{K}}\mathcal{V}^{A}_{\mathcal{K}} \text{ transformación natural.}$$

Recuérdese que $\mathcal{E}(-,Y) = \mathcal{L}(-,Y) \oplus M_Y \mathcal{K}(-,Y)$, para $Y \in |\mathcal{K}|$.

Entonces $\eta$ está dado por $\eta_{X,Y} = (\rho_{X,Y}, \sigma_{X,Y})$, donde

$$\rho_{X,Y} : \mathcal{L}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A(X), B(Y)) \quad y$$

$$\sigma_{X,Y} : M_Y \mathcal{K}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A(X), B(Y))$$

son aplicaciones lineales, naturales en $X$ (por la naturalidad de $\eta$). Obsérvese que por el teorema de Yoneda, $\sigma_{-,X}$ está completamente determinado por $\sigma_{X,X}(M_X)$.

2.3.4 PROPOSICION. 1) La familia de aplicaciones $\rho_{X,Y}$, $\sigma_{X,Y}$ satisfacen las fórmulas siguientes:

Si $X' \xrightarrow{f} X$ y $Y \xrightarrow{g} Y'$ son morfismos en $\mathcal{K}$ y $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces

$$B(g)\rho_{X,Y}(u)A(f) = \rho_{X',Y'}(guf) \qquad (23)$$

Si $X \xrightarrow{h} Y$ es un morfismo en $\mathcal{K}$, entonces

$$B(h)\sigma_{X,X}(M_X) = \sigma_{Y,Y}(M_Y)A(h) + \rho_{X,Y}(\mathcal{D}(h)) \qquad (24)$$

2) Recíprocamente cualquier familia de aplicaciones $\rho_{X,Y}$, $\sigma_{X,X}(M_X)$ que satisfacen (23) y (24), determinan un único morfismo $\eta \in R(A,B)$.

Demostración: i) En primer lugar supongamos que

$$f : x' \longrightarrow x \quad y \quad g : y \longrightarrow y' \quad \text{en } \mathcal{K}.$$

Como $\eta$ es natural se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{U}_y^1\mathcal{K}(x,y) \arrow[r, "(\zeta_{x,y} ; \nabla_{x,y})"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f,g)"'] & \mathcal{V}(A(x), B(y)) \arrow[d, "\mathcal{V}(A(f), B(g))"] \\
\mathcal{L}(x',y') \oplus \mathcal{U}_{y'}^1\mathcal{K}(x',y') \arrow[r, "(\zeta_{x',y'} ; \nabla_{x',y'})"] & \mathcal{V}(A(x'), B(y'))
\end{tikzcd}$$

Por tanto, si $u \in \mathcal{L}(x,y)$ tenemos:

$$B(g)\,\zeta_{x,y}(u)\,A(f) = \eta_{x',y'}\,\mathcal{C}(f,g)(u,0) = \eta_{x',y'}(guf,0) = \zeta_{x',y'}(guf)$$

Mostrándose (23).

Supongamos ahora que $h : x \longrightarrow y$ es un morfismo en $\mathcal{K}$.
De la naturalidad de $\eta$ se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(x,x) \oplus \mathcal{U}_x^1\mathcal{K}(x,x) \arrow[r, "(\zeta_{x,x} ; \nabla_{x,x})"] \arrow[d, "\mathcal{C}(1_x,h)"'] & \mathcal{V}(A(x), B(x)) \arrow[d, "\mathcal{V}(A(1_x), B(h))"] \\
\mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{U}_y^1\mathcal{K}(x,y) \arrow[r, "(\zeta_{x,y} ; \nabla_{x,y})"] & \mathcal{V}(A(x), B(y))
\end{tikzcd}$$

Entonces $B(h)\sigma_{x,x}(u_x) = \eta_{x,y}(\mathcal{L}(h), h) = \delta_{x,y}(\mathcal{L}(h)) + \sigma_{x,y}(h)$

pero $\sigma_{x,y}(h) = \sigma_{y,y}(u_y)A(h)$ (por la naturalidad de $\eta$)

$\therefore B(h)\sigma_{x,x}(u_x) = \sigma_{y,y}(u_y)A(h) + \delta_{x,y}(\mathcal{L}(h))$.

Mostrándose (24).

2) Consideremos la aplicación $\eta: \mathcal{E} \longrightarrow {}^B\mathcal{V}^A$

dada por $\eta_{x,y} := (\delta_{x,y}, \sigma_{x,y})$, donde

$\sigma_{x,y}: \mathcal{K}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A(x), B(y))$ es la aplicación lineal, natural en $x$ determinada por el elemento $\sigma_{y,y}(u_y)$ (existe por teorema de Yoneda).

Veamos ahora que $\eta$ es natural.

Si $f: x' \longrightarrow x$ y $g: y \longrightarrow y'$ son morfismos en $\mathcal{K}$, tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{K}(x,y) \arrow[r, "(\delta_{x,y}\,,\,\sigma_{x,y})"] \arrow[d, "\mathcal{E}(f,g)"'] \arrow[dr, phantom, "(25)"] & \mathcal{V}(A(x), B(y)) \arrow[d, "\mathcal{V}(A(f), B(g))"] \\
\mathcal{E}(x',y') = \mathcal{L}(x',y') \oplus \mathcal{K}(x',y') \arrow[r, "(\delta_{x',y'}\,,\,\sigma_{x',y'})"] & \mathcal{V}(A(x'), B(y'))
\end{tikzcd}$$

Si $u \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces

$V(A(f),B(g))\eta_{X,Y}(u,0) = V(A(f),B(g))\delta_{X,Y}(u) =$

$= B(g)\delta_{X,Y}(u)A(f) = \delta_{X';Y'}(guf)$ por (23)

$= \eta_{X';Y'}(guf,0) = \eta_{X';Y'}\,\mathcal{E}(f,g)(u,0)$.

Ahora si $h \in \mathcal{K}(X,Y)$ tenemos:

$V(A(f),B(g))\eta_{X,Y}(0,h) = V(A(f),B(g))\sigma_{X,Y}(h) =$

$= B(g)[\sigma_{Y,Y}(u_Y)A(h)]A(f) =$ (por la naturalidad de $\sigma_{,Y}$)

$= B(g)\sigma_{Y,Y}(u_Y)A(hf) =$ por fórmula (24)

$= [\sigma_{Y;Y'}(u_{Y'})A(g) + \delta_{Y,Y'}(\mathcal{D}(g))]A(hf)$.

por otro lado tenemos:

$\eta_{X;Y'}\,\mathcal{E}(f,g)(0,h) = \eta_{X;Y'}(\mathcal{D}(g)hf, ghf) =$

$= \delta_{X;Y'}(\mathcal{D}(g)hf) + \sigma_{X;Y'}(ghf)$ por fórmula (23)

$= \delta_{Y,Y'}(\mathcal{D}(g))A(hf) + \sigma_{X;Y'}(ghf)$ por la nat. de $\sigma_{,Y'}$

$= \delta_{Y,Y'}(\mathcal{D}(g))A(hf) + \sigma_{Y;Y'}(u_{Y'})A(ghf)$.

por tanto, el diagrama (25) conmuta; de donde podemos concluir que $\eta \in R(A,B)$.

Evidentemente por definición de $\eta$, este es único. //

Recuérdese que la identidad en $A$ en $R(\mathcal{E},\mathcal{V})$ está dada por la composición:

$$1_A = \left( \mathcal{E} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{K} \xrightarrow{\bar{A}} \mathcal{V}^A \right).$$

Supongamos que $1_A = (\alpha_{x,y}, \beta_{x,y})$.

2.3.5 LEMA. 1) *Si $A$ es un objeto en $R(\mathcal{E},\mathcal{V})$, entonces*

$$1_A = \left(\alpha_{x,y} = 0,\ \beta_{x,x}(\mathcal{U}_x) = id_{A(x)}\right).$$

2) *Supongamos que $\eta$ es un morfismo de $A$ en $B$ dado por la familia de morfismos $(\rho_{x,y}, \Gamma_{x,x}(\mathcal{U}_x))$ y $\eta'$ un morfismo de $B$ en $C$ dado por la familia de morfismos $(\rho'_{x,y}, \Gamma'_{x,x}(\mathcal{U}_x))$. Supongamos que el producto $\eta'\eta$ está dado por la familia $(\mu_{x,y}, \Sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x))$. Entonces*

$$\mu_{x,y}(\ell) = \pi(\eta'\otimes\eta)\delta(\ell) = -\sum_{i=1}^{n} \rho'_{z_i,y}(y_i)\rho_{x,z_i}(x_i) +$$
$$+ \rho'_{x,y}(\ell)\Gamma_{x,x}(\mathcal{U}_x) + \Gamma'_{y,y}(\mathcal{U}_y)\rho_{x,y}(\ell) \qquad (26)$$

con $\ell \in \mathcal{L}(x,y)$ y $\mathcal{D}(\ell) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i$; $x_i \in \mathcal{L}(x,z_i)$; $y_i \in \mathcal{L}(z_i,y)$.

$$\Sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x) = \pi(\eta'\otimes\eta)\delta(\mathcal{U}_x) = -\sum_{i=1}^{m} \rho'_{z_i,x}(w_i)\rho_{x,z_i}(v_i) +$$
$$+ \Gamma'_{x,x}(\mathcal{U}_x)\Gamma_{x,x}(\mathcal{U}_x) \qquad (27)$$

<u>con</u> $h_x = \sum_{i=1}^{m} w_i \otimes v_i$, $v_i \in \mathcal{L}(x, z_i)$, $w_i \in \mathcal{L}(z_i, x)$.

Demostración:

1) Supongamos que $\mathcal{E} := 1_A$.

Entonces $\mathcal{E}_{x,x}(\mathcal{U}_x) = \hat{A}_{x,x}\,\mathcal{E}_{xx}(\mathcal{U}_x) = \hat{A}_{xx}(id_x) = id_{A(x)}$.

Luego $\beta_{x,x}(\mathcal{U}_x) = id_{A(x)}$.

Por otro lado, como $\mathcal{L} = \ker \mathcal{E}$ se sigue que $\alpha_{x,y} = 0$.

De lo anterior se concluye que $1_A = (\alpha_{x,y} = 0, \beta_{x,x}(\mathcal{U}_x) = id_{A(x)})$.

2) Recordemos que el producto $\eta'\eta$ en $R({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \mathcal{V})$ está dado mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{C} \arrow[r, "\eta' \otimes \eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{B} \otimes_{\mathcal{K}} {}^{B}\mathcal{V}^{A} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\eta'\eta"] & {}^{C}\mathcal{V}^{A} \end{tikzcd}$$

Sea $\ell \in \mathcal{L}(x, y)$, entonces:

$$\delta(\ell) = -\mathcal{D}(\ell) + \ell \otimes \mathcal{U}_x + \mathcal{U}_y \otimes \ell .$$

Como $\mathcal{D}(\ell) \in \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}(x, y)$, entonces

$\mathcal{D}(\ell) = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i$ con $x_i \in \mathcal{L}(x, z_i)$, $y_i \in \mathcal{L}(z_i, y)$

$$\therefore \delta(\ell) = -\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_i + \ell \otimes M_x + M_y \otimes \ell$$

$\eta' \otimes \eta\, \delta(\ell) = -\sum_{i=1}^{n} \int'_{z_i, y}(y_i) \otimes \int_{x, z_i}(x_i) + \int'_{x,y}(\ell) \otimes \Gamma_{x,x}(M_x) +$

$+ \Gamma'_{y,y}(M_y) \otimes \int_{x,y}(\ell)$, y

$\pi(\eta' \otimes \eta)\delta(\ell) = -\sum_{i=1}^{n} \int'_{z_i, y}(y_i) \int_{x, z_i}(x_i) + \int'_{x,y}(\ell)\Gamma_{x,x}(M_x) +$

$+ \Gamma'_{y,y}(M_y)\int_{x,y}(\ell) = \mathcal{M}_{x,y}(\ell)$. Mostrándose (26).

Análogamente, se tiene:

$\delta(M_x) = -h_x + M_x \otimes M_x$, $h_x \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(x,x)$.

Supongamos que $h_x = \sum_{i=1}^{m} w_i \otimes v_i$, $v_i \in \mathcal{L}(x, z_i)$, $w_i \in \mathcal{L}(z_i, x)$.

$\therefore (\eta' \otimes \eta)\delta(M_x) = -\sum_{i=1}^{m} \int'_{z_i, x}(w_i) \otimes \int_{x, z_i}(v_i) + \Gamma'_{x,x}(M_x) \otimes \Gamma_{x,x}(M_x)$,

y $\pi(\eta' \otimes \eta)\delta(M_x) = -\sum_{i=1}^{m} \int'_{z_i, x}(w_i)\int_{x, z_i}(v_i) +$

$+ \Gamma'_{x,x}(M_x)\Gamma_{x,x}(M_x) = \Sigma_{x,x}(M_x)$. Probándose (27). //

<u>Definición</u>. <u>El</u> BOCS <u>con la condición</u> ($\mathcal{K}$.) $\mathcal{K}$ $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ <u>se llama</u> <u>normal</u> <u>si se pueden seleccionar las</u> $M_x$ <u>de suerte tal</u> <u>que</u> $M_x \otimes M_x - \delta(M_x) = h_x = 0$ <u>para cada</u> $x \in |\mathcal{K}|$.

2.3.6 LEMA. Supongamos que ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ es un BOCS normal con las correspondientes $\mathcal{U}_x$. Entonces si $\eta = (\rho_{x,y}, \sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x))$ es un isomorfismo, todas las aplicaciones $\sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x)$ son isomorfismos.

Demostración:
Si $\eta$ es un isomorfismo de $A$ en $B$ entonces existe $\eta' \in R(B,A)$ tal que $\eta\eta' = id_B$, $\eta'\eta = id_A$.
Supongamos que $\eta'$ está dado por la familia $(\rho'_{x,y}, \sigma'_{x,x}(\mathcal{U}_x))$, entonces aplicando la fórmula (27) obtenemos:

$$\sigma'_{x,x}(\mathcal{U}_x)\,\sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x) = id_{A(x)}\,,\ \text{aquí } l_x = 0\,.$$

Similarmente $\sigma_{x,x}(\mathcal{U}_x)\,\sigma'_{x,x}(\mathcal{U}_x) = id_{B(x)}$.
Mostrándose lo deseado. //

## §2.4 Cambio de categoría y un teorema de Roiter.

En esta sección estudiaremos cómo dado un BOCS $\mathcal{E}$ sobre cierta categoría $\mathcal{A}$ y $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor, a $\mathcal{E}$ le podemos asociar un BOCS $\mathcal{E}^{\Phi}$ sobre $\mathcal{B}$.
Veremos las relaciones entre las representaciones de ambos BOCS's lo cual nos permitirá pasar de una categoría a otra.

2.4.1 Observación: Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ k-categorías y $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un k-funtor. Entonces a través de $\Phi$, ${}^{\Phi}\mathcal{B}^{\Phi}$ es un $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ bimódulo (ver §1.1).
Recuérdese que ${}^{\Phi}\mathcal{B}^{\Phi}$ está definido como sigue:
En objetos: si $(x,y) \in |\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}|$, entonces

$${}^{\Phi}\mathcal{B}^{\Phi}(x,y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi(x), \Phi(y)).$$

En morfismos: si $(f,g) : (x,y) \longrightarrow (x',y')$ es un morfismo en $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$; ${}^{\Phi}\mathcal{B}^{\Phi}(f,g) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi(x),\Phi(y)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi(x'),\Phi(y'))$ está dado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi(f),\Phi(g)) : h \longmapsto \Phi(g) h \Phi(f)$.

En lo que sigue, por simplicidad, denotaremos a ${}^{\Phi}\mathcal{B}^{\Phi}$ por $\mathcal{B}$ aclarando que vemos a $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}$ Bimódulo vía $\Phi$.

En forma similar $\mathcal{B}$ es un $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$ Bimódulo y un $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ Bimódulo.

Supongamos ahora que tenemos un BOCS $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{A}$ con counidad $\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ y comultiplicación $\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}$.

Consideremos el $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$ Bimódulo ${}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}}$ y tenemos $\varepsilon'$ como la siguiente composición:

$$ {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon \otimes 1} {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\cong} {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} $$

en donde $\pi$ es la composición. Definamos ahora $\delta'$ como la composición:

$$ {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \xrightarrow{1 \otimes \delta \otimes 1} {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} (\mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C}) \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \cong $$

$$ \cong {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{A} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \xrightarrow{1 \otimes 1 \otimes \Phi \otimes 1 \otimes 1} {}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B})_{\mathcal{B}} \cong $$

$$ \cong {}_{\mathcal{B}}\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} (\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B}) \cong (\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B}) \underset{\mathcal{B}}{\otimes} (\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B}) . $$

Ahora veamos que $(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}, \delta', \varepsilon')$ es un Bocs sobre $\mathcal{B}$.

En efecto: Solamente probaremos la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B})\otimes_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \arrow[d, "\varepsilon'\otimes 1"] & \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \arrow[l, "\delta'"'] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{B}) \arrow[r, "\cong", "\nabla"'] & \mathcal{B}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

Sea $b\otimes u\otimes b' \in \mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}(x,y)$, $x,y\in|\mathcal{B}|$, un generador

$b\otimes u\otimes b' \xmapsto{1\otimes\delta\otimes 1} b\otimes\delta(u)\otimes b' \xmapsto{\cong} \sum b\otimes x_i\otimes 1_{z_i}\otimes y_i\otimes b'$

(con $\delta(u)=\sum x_i\otimes y_i$) $\xmapsto{1\otimes 1\otimes\Phi\otimes 1\otimes 1} \sum b\otimes x_i\otimes \Phi(1_{z_i})\otimes y_i\otimes b' \xmapsto{\cong}$

$\longmapsto \sum b\otimes x_i\otimes(\Phi(1_{z_i})\otimes y_i\otimes b') \xmapsto{\cong} \sum b\otimes x_i\otimes 1_{\Phi(z_i)}\otimes 1_{\Phi(z_i)}\otimes y_i\otimes b'$

$\xmapsto{(1\otimes\varepsilon\otimes 1)\otimes 1} \sum b\otimes\varepsilon(x_i)\otimes 1_{\Phi(z_i)}\otimes 1_{\Phi(z_i)}\otimes y_i\otimes b' \xmapsto{\pi\otimes 1\otimes 1}$

$\longmapsto b\sum\varepsilon(x_i)\otimes 1_{\Phi(z_i)}\otimes y_i\otimes b' \xmapsto{\nabla} b\otimes\sum\varepsilon(x_i)y_i\otimes b' =$

$= b\otimes\nabla(\varepsilon\otimes 1)\delta(u)\otimes b' = b\otimes u\otimes b'$.

Por tanto $\nabla\cdot\varepsilon'\otimes 1\cdot\delta' = id$.

En forma similar se prueba la conmutatividad de los otros diagramas.

Denotaremos al 80CS obtenido por $\mathcal{E}^{\#}$.

Nótese que si $\mathcal{E}$ tiene la condición (₮), entonces $\mathcal{E}'_{(X,Y)} : \mathcal{E}^{\#}(X,Y) \longrightarrow \beta(X,Y)$ es epimorfismo $\forall X, Y \in |\beta|$ y por consiguiente $\mathcal{E}^{\#}$ tiene también la condición (₮).

<u>Definición</u>. Un $\mathcal{A}$-<u>módulo izquierdo</u> es un funtor covariante de $\mathcal{A}$ en $Mod_K$. En forma similar, un $\mathcal{A}$-<u>módulo</u> <u>derecho</u> es un funtor contravariante de $\mathcal{A}$ en $Mod_K$.

2.9.2 TEOREMA (Roiter). Sea $\mathcal{V}$ una subcategoría plena de la categoría de todos los $k$-espacios vectoriales Mod$k$. Si $\Phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $k$-funtor y $\mathcal{E}$ es un BOCS sobre $\mathcal{A}$, entonces hay un funtor $F: R(\mathcal{E}^{\Phi}, \mathcal{V}) \longrightarrow R(\mathcal{E}, \mathcal{V})$ fiel y pleno. Aún más, si el funtor restricción $S: (\mathcal{B}, \text{Mod}k) \longrightarrow (\mathcal{A}, \text{Mod}k)$ es denso, $F$ es una equivalencia de categorías. Si $I$ es un ideal de $\mathcal{A}$ y $\Phi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I$ es el funtor canónico, entonces $F$ es una inmersión plena.

Demostración: Supongamos primero que $\mathcal{V} = \text{Mod}k$. Tenemos el par adjunto de funtores $(T, S)$, en donde $T: (\mathcal{A}, \text{Mod}k) \longrightarrow (\mathcal{B}, \text{Mod}k)$ se define como sigue:

En objetos: sea $A \in |(\mathcal{A}, \text{Mod}k)|$. Como $\mathcal{B}$ es un $\mathcal{B}$-$\mathcal{A}$ bimódulo, podemos definir $T(A) = \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} A \in (\mathcal{B}, \text{Mod}k)$.

En morfismos: si $A \xrightarrow{\eta} A'$ es una $k$-transformación natural, definimos $T(\eta) = 1 \otimes \eta: \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} A \longrightarrow \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} A'$.

Sea $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T, S)$ el cotriple asociado al par adjunto

$(T,S)$. Aplicando la proposición 2.1.7 se tiene un funtor $E_0 : (\mathcal{B}, \mathrm{Mod}_K)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}_K)$ fiel y pleno.

Por otro lado, $TS(M) = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} M \cdot \Phi$.

Pero $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} M \cong M$, por tanto:

$M \circ \Phi \cong (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} M) \circ \Phi = {}_{\mathcal{A}}|(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} M)$ = restricción de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} M$ a $\mathcal{A}$.

Por lo tanto tenemos: $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} M \cdot \Phi \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} M) \cong (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} M$,

de lo cual se sigue que $TS$ es isomorfo al funtor $(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} -$.

Así que por la observación 2.2.3 se sigue que el cotriple $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T,S)$ es isomorfo al cotriple inducido por el BOCS $({}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_{\mathcal{B}}, \delta'', \varepsilon'')$ (ver 2.2.3).

De donde aplicando teorema 2.2.2 obtenemos:

$R(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, \mathrm{Mod}_K) \cong (\mathcal{B}, \mathrm{Mod}_K)_{\mathbb{C}}$ y en consecuencia:

un funtor $E_1 : R(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}, \mathrm{Mod}_K) \longrightarrow (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}_K)$ fiel y pleno.

Sea ahora $\mathcal{C} := (\mathcal{C}, \delta, \varepsilon)$ un BOCS sobre $\mathcal{A}$, tenemos la siguiente situación:

$$(\mathcal{B}, \mathrm{Mod}\,k) \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}\,k) \underset{T_0}{\overset{S_0}{\rightleftarrows}} (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}\,k)_{\mathbb{C}'}, \text{ donde}$$

$S_0, T_0$ son los funtores definidos como en 2.1.3 y $\mathbb{C}' = (\mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} -, \bar{\delta}, \bar{\varepsilon})$ es el cotriple inducido por el BOCS $\mathcal{C}$.

Como $(TT_0, S_0S)$ es un par de funtores adjuntos, entonces por la proposición 2.1.7 se tiene un funtor

$\mathcal{I}_2 : (\mathcal{B}, \mathrm{Mod}\,k)_{\mathbb{C}(TT_0, S_0S)} \longrightarrow (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}\,k)_{\mathbb{C}'}$ fiel y pleno. Obsérvese que $TT_0S_0S(M) = TT_0(M \circ \Phi) = T(\mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} M \circ \Phi) = \mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} M \circ \Phi \cong (\mathcal{B} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{C} \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathcal{B}) \underset{\mathcal{B}}{\otimes} M$.

$$\therefore TT_0S_0S \underset{\psi}{\cong} \mathcal{C}^{\Phi} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} - \quad (\text{como funtores}).$$

<u>Afirmación</u>. Si $\mathcal{C}^{\Phi} := (\mathcal{C}^{\Phi}, \delta', \varepsilon')$ y $\mathbb{C}^{\Phi} := (\mathcal{C}^{\Phi} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} -, \bar{\delta}', \bar{\varepsilon}')$ es el cotriple inducido por $\mathcal{C}^{\Phi}$ (ver 2.2.1), entonces $TT_0S_0S \underset{\psi}{\cong} \mathcal{C}^{\Phi} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} -$ induce un isomorfismo de cotriples: $\mathbb{C}(TT_0, S_0S) \longrightarrow \mathbb{C}^{\Phi}$.

En efecto. Recuérdese que $\mathbb{C}(TT_0, S_0S) = (TT_0S_0S, (TT_0|\beta(S_0S), \alpha)$ (ver 2.1.6).

Por probar que los diagramas

$$\begin{tikzcd} TT_0S_0S \arrow[r, "\psi^1"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{E}^{E}\underset{\beta}{\otimes}- \arrow[d, "\bar{E}'"] \\ id_{(\beta, Mod_k)} \arrow[r, equal] & id_{(\beta, Mod_k)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TT_0S_0S \arrow[r, "\psi^1"] \arrow[d, "(TT_0|\beta(S_0S)"'] & \mathcal{E}^{E}\underset{\beta}{\otimes}- \arrow[d, "\bar{\delta}'"] \\ (TT_0S_0S)^2 \arrow[r, "\rho(\psi^1)"'] & (\mathcal{E}^{E}\underset{\beta}{\otimes}-)^2 \end{tikzcd}$$

conmutan.

Solamente probaremos la conmutatividad del primer diagrama (la otra parte se hace en forma análoga).

Para facilitar la notación pongamos $\mathcal{C}\!\mathcal{A} := (\mathcal{A}, Mod_k)$ y $\mathcal{C}\!\beta := (\beta, Mod_k)$.

A continuación, describiremos explícitamente las counidades de ambos cotriples.

Por un lado tenemos:

$\bar{E}' : (\mathcal{E}^{E}\underset{\beta}{\otimes}-) \longrightarrow 1d_\beta$, en donde si $M \in |\mathcal{C}\beta|$,

$\bar{E}'_M : \mathcal{E}^{E}\underset{\beta}{\otimes}M \xrightarrow{E\otimes 1} \beta\underset{\beta}{\otimes}M \xrightarrow[\cong]{\Gamma} M$ con

$$\mathcal{E}' : (\beta \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} \beta) \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{E} \otimes 1} (\beta \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} \mathfrak{A} \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} \beta) \xrightarrow{\cong} (\beta \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} \beta) \xrightarrow{\pi} \beta$$

Por otro lado, veamos cuál es la adjunción del par adjunto $(TT_0, S_0S)$.

$(T,S)$ es un par adjunto. El inverso de la adjunción del par adjunto $(T,S)$ está definido como sigue:

si $A \in |\mathcal{C}|$ y $B \in |\mathcal{B}|$, entonces

$$\begin{array}{ccc} (\varphi'_{A,B})^{-1} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, S(B)) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A), B) \\ \| & & \| \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \circ \mathcal{E}) & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{B}}(\beta \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} A ; B) \end{array}$$

$$(A \xrightarrow{f} B \circ \mathcal{E}) \longmapsto \left[ (\varphi'_{A,B})^{-1}(f) : \beta \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} A \to B \right]$$

, en donde si $Y \in |\beta|$, entonces

$$\begin{array}{rcl} (\varphi'_{A,B})^{-1}(f)_Y : \beta(-,Y) \underset{\mathfrak{A}}{\otimes} A & \longrightarrow & B(Y) \\ b \underset{x}{\otimes} a & \longmapsto & B(b)(f_x(a)) \end{array}$$

con $x \in |\mathfrak{A}|$, $b \in \beta(\mathcal{E}(x), Y)$ y $a \in A(x)$.

Ahora $(T_0, S_0)$ es un par adjunto. Además sabemos que si $F \in |\mathcal{C}_{\mathcal{C}}| = |\mathcal{C}|$ y $G \in |\mathcal{C}|$, entonces la adjunción está dada por la identidad

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}} F, G) \underset{\varphi''_{F,G}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}}(F,G).$$

Aplicando las adjunciones anteriores tenemos:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}F), M) \underset{\varphi'_{\mathcal{C}\otimes F, M}}{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}} F, M\circ\Phi) \underset{\varphi''_{F,M\circ\Phi}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}}(F, M\circ\Phi)$$

Recuérdese que $M\circ\Phi = {}_{\mathcal{A}}|(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{B}} M)$ = restricción de $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{B}} M$ a $\mathcal{A}$.

Por tanto si $M \in |\mathcal{B}|$ tenemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}} M\circ\Phi, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{B}} M, M) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\otimes_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}\otimes M), M\circ\Phi) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}}(\mathcal{B}\otimes M, M\circ\Phi)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}}(\mathcal{B}\otimes M, {}_{\mathcal{A}}|(\mathcal{B}\otimes M)).$$

Recuérdese que $1_{\mathcal{B}\otimes M} = \bar{\varepsilon}_{\mathcal{B}\otimes M}\, V$ en $\mathcal{A}_{\mathcal{C}'}$, en donde

$$\bar{\varepsilon}_{\mathcal{B}\otimes M} : \mathcal{C}\otimes\mathcal{B}\otimes M \longrightarrow \mathcal{B}\otimes M$$
$$c'\otimes b'\otimes m' \longmapsto \varepsilon(c')b'\otimes m'$$

Finalmente de lo anterior es fácil ver que

$$\varphi^{-1}_{S_0S(M),M}\left(\mathcal{E}_{\beta\otimes M}\right) = \bar{\mathcal{E}}'_M \eta_M .$$

Mostrándose la afirmación. //

Luego aplicando 2.2.2 se tiene:

$R(\mathcal{E}^{\Phi}, Mod\,k) \cong (\beta, Mod\,k)_{\mathcal{C}(TT_0, S_0S)}$ .

Pero $R(\mathcal{E}, Mod\,k) \cong (\mathcal{A}, Mod\,k)_{\mathcal{C}'}$. Por lo tanto tenemos un funtor $E : R(\mathcal{E}^{\Phi}, Mod\,k) \longrightarrow R(\mathcal{E}, Mod\,k)$ fiel y pleno.

El funtor anterior puede restringirse como sigue:

$$\begin{tikzcd} R(\mathcal{E}^{\Phi}, Mod\,k) \arrow[r, "E"] & R(\mathcal{E}, Mod\,k) \\ R(\mathcal{E}^{\Phi}, \mathcal{V}) \arrow[u, hook] \arrow[r, "E_3"] & R(\mathcal{E}, \mathcal{V}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

con $E_3$ fiel y pleno. ~~A~~ S es denso, entonces por 2.1.7, $E$ y $E_3$ son equivalencias.

Finalmente en el caso $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I = \beta$, el funtor restricción $S$ es inyectivo en objetos, el funtor $S_0$ es también inyectivo en objetos, y en consecuencia $E$ es una inmersión plena. //

2.4.3 COROLARIO. $\mathcal{A}$ una k-categoría y $\mathcal{K}$ una subcategoría, $\mathcal{C}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$; $\Phi: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ la inclusión. Entonces, si $\mathcal{K}'$ es la subcategoría plena de $\mathcal{A}$ formada por los inescindibles de $\mathcal{A}$, tal que cada objeto de $\mathcal{A}$ se puede escribir como la suma directa finita de objetos de $\mathcal{K}'$, el BOCS $\mathcal{C}^{\Phi}$ puede restringirse a $\mathcal{K}'$ y si denotamos por $\mathcal{C}'$ a esa restricción, se tiene que

$$R(\mathcal{C}^{\Phi}, \mathrm{Mod}_k) \simeq R(\mathcal{C}', \mathrm{Mod}_k).$$

Demostración: Sean $\varepsilon, \varepsilon^{\Phi}$ y $\delta, \delta^{\Phi}$ las counidades y comultiplicaciones de los BOCS's $\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\Phi}$ respectivamente.

Si $X, Y \in |\mathcal{K}'|$, $\mathcal{C}^{\Phi}(X,Y) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{A}(X,Y) \xrightarrow{\varepsilon^{\Phi}} \mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{K}'(X,Y)$ (esto es, porque $\mathcal{K}'$ es plena). Por lo tanto $\varepsilon^{\Phi}, \delta^{\Phi}$ se restringen sin dificultad. Sean $\varepsilon', \delta'$ esas restricciones.

Ahora: Sea $\mathbb{C} := (\mathcal{C} \otimes -, \bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ el cotriple asociado a $\mathcal{C}$

Sea $\mathbb{C}' := (\mathcal{C}' \otimes -, \bar{\varepsilon}', \bar{\delta}')$ el cotriple asociado a $\mathcal{C}'$

(ver 2.2.1).

Tenemos entonces la siguiente serie de funtores adjuntos:

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{K}') \underset{S'}{\overset{T'}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(\mathfrak{C}) \underset{T}{\overset{S}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(\mathcal{K}) \underset{T_0}{\overset{S_0}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}(\mathcal{K})_{\mathbb{C}} ,$$

donde $S$, $S'$ son las restricciones. Nótese que aquí, por ser $\mathcal{K}' = \mathrm{ind}(\mathfrak{C})$, $(S',T')$ también es un par adjunto. Además, tenemos un isomorfismo $S'TT_0S_0ST'(M) \underset{\mathcal{F}}{\cong} \mathfrak{C} \otimes_{\mathcal{K}'} M$ natural en $M$.

Sea $\mathbb{C}^a := \mathbb{C}(S'TT_0, S_0ST')$ (ver 2.1.6).

Aplicando 2.1.8 a $\mathcal{F} := S'TT_0S_0ST'$ y a $\mathcal{F}$, obtenemos un nuevo cotriple $\mathbb{C}'' = (\mathfrak{C} \otimes_{\mathcal{K}'} -, \varepsilon'', \delta'')$ tal que

$\mathbb{C}^a \underset{\mathcal{F}}{\cong} \mathbb{C}''$.

Analizando la adjunción del par adjunto $(S'TT_0, S_0ST')$ como se hizo en 2.4.2, no es difícil ver que $\mathbb{C}'' = \mathbb{C}'$.

Entonces, aplicando sucesivamente 2.4.2, 2.2.2, 2.1.7, $\mathbb{C}^a \cong \mathbb{C}'$, 2.2.2, tenemos:

$$R(\mathfrak{C}^{\mathcal{F}}, \mathrm{Mod}_K) \cong R(\mathfrak{C}, \mathrm{Mod}_K) \cong \mathrm{Mod}(\mathcal{K})_{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Mod}(\mathcal{K}')_{\mathbb{C}^a}$$

$$\cong \mathrm{Mod}(\mathcal{K}')_{\mathbb{C}'} \cong R(\mathfrak{C}', \mathrm{Mod}_K) . //$$

§2.5 Categorías cociente y el BOCS inducido correspondiente.

Si $I$ es un ideal de la categoría $\mathcal{K}$, tenemos un funtor $\Phi: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/I$. Por lo tanto si $\mathcal{E}$ es un BOCS sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\mathcal{D}$, tenemos el BOCS inducido $\mathcal{E}^{\Phi} := \mathcal{E}_I$ sobre $\mathcal{K}/I$. Aquí veremos que en ciertos casos, es posible describir el núcleo de $\mathcal{E}^{\Phi}$ en términos del núcleo de $\mathcal{E}$, y la diferencial asociada $\mathcal{D}_I$ a $\mathcal{E}_I$ en términos de $\mathcal{D}$. Analizaremos también los BOCS's sobre una categoría cociente $\mathcal{K}/I$ con diferencial $\mathcal{D}$.

De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \mathcal{K} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{K}/I \longrightarrow 0$$

obtenemos la sucesión exacta

$$I \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \xrightarrow{i \otimes id} \mathcal{K} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{K}/I \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \longrightarrow 0 ,$$

en consecuencia $(\mathcal{K}/I) \otimes \mathcal{E} \cong \mathcal{K} \otimes \mathcal{E}/im(i \otimes id)$.

Pero
$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \otimes \mathcal{E} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{E} \\ im(i \otimes id) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong"'] & I\mathcal{E} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
conmuta.

Por tanto $(\mathbb{K}/I)\otimes \mathcal{E} \cong \mathcal{E}/I\mathcal{E}$. Por razones análogas

$$\mathcal{E}_I = (\mathbb{K}/I)\otimes\mathcal{E}\otimes(\mathbb{K}/I) \cong \mathcal{E}/I\mathcal{E}\otimes(\mathbb{K}/I) \cong \mathcal{E}/I\mathcal{E}\Big/ \overline{I\mathcal{E}+\mathcal{E}I}/I\mathcal{E}$$
$$\cong \mathcal{E}/I\mathcal{E}+\mathcal{E}I.$$

En muchos casos es posible calcular el núcleo de $\mathcal{E}_I$ :

Primero observemos que si $\mathcal{L}$ = núcleo de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}_0$ es una diferencial interna de grado 1 de $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{K}$ entonces $\mathcal{D}_0(I)\subset I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$.

Por tanto, si $\mathcal{D}$ es una diferencial asociada a $\mathcal{E}$ (ver 2.7.2) y $\mathcal{D}(I)\subset I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$ entonces lo mismo ocurre para cualquier otra diferencial asociada a $\mathcal{E}$. Diremos que $\mathcal{E}$ es <u>compatible</u> con $I$, si para cualquier diferencial $\mathcal{D}$ asociada a $\mathcal{E}$ se tiene $\mathcal{D}(I)\subset I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$.

2.5.1 <u>PROPOSICION</u>. <u>Si $I$ es un ideal de $\mathbb{K}$ y $\mathcal{E}$ es un Bocs sobre $\mathbb{K}$ compatible con $I$, entonces si $\mathcal{L}$ es el núcleo de $\mathcal{E}$, el núcleo de $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}/I\mathcal{E}+\mathcal{E}I$ es $\cong$ $\mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$. Además, la diferencial $\underline{\mathcal{D}}$ asociada a $\mathcal{E}_I$ correspondiente a la familia $\{\overline{M}_y\}$ (ver 2.3.2)</u>

es la inducida por $\mathcal{D}: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ en $\mathcal{K}/I \longrightarrow \mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$.

Demostración: Para objetos $x, y$ de $\mathcal{K}$ se tiene:

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \oplus M_y \mathcal{K}(x,y).$$

por lo tanto $I\mathcal{E}(x,y) = I\mathcal{L}(x,y) + J$, donde

$J = \sum_w I(w,y) M_w \mathcal{K}(x,w) \subseteq M_y I(x,y) + (I\mathcal{L}+\mathcal{L}I)(x,y)$

(pues $\mathcal{E}$ es compatible con $I$).

Por otra parte: $\mathcal{E}I(x,y) = \mathcal{L}I(x,y) \oplus M_y I(x,y)$.

por tanto: $(I\mathcal{E}+\mathcal{E}I)(x,y) = (I\mathcal{L}+\mathcal{L}I)(x,y) \oplus M_y I(x,y)$.

$\therefore \mathcal{E}/I\mathcal{E}+\mathcal{E}I(x,y) = \mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I(x,y) \oplus \bar{M}_y \mathcal{K}/I(x,y)$.

Como la counidad de este BOCS está dada por la proyección, entonces el núcleo de $\mathcal{E}_I$ es $\mathcal{L}_I \cong \mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$.

Es evidente que la diferencial asociada $\mathcal{D}_I$ a $\mathcal{E}_I$ correspondiente a la familia $\{\bar{M}_y\}$ es la inducida por $\mathcal{D}: \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ en $\mathcal{K}/I \longrightarrow \mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$. //

2.5.2 <u>COROLARIO</u>. <u>Sea $I$ un ideal de $\mathcal{K}$. Entonces todo BOCS $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{K}/I$ con diferencial $\mathcal{D}$ es de la forma $\vec{\mathcal{E}}_I$, para algún BOCS $\vec{\mathcal{E}}$ sobre $\mathcal{K}$.</u>

Demostración: Supongamos que $\mathcal{L}$ es el núcleo de $\mathcal{E}$.
El funtor $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/I$ hace de $\mathcal{L}$ un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo.
$\vec{\mathcal{L}}$ por "restricción de escalares".
Entonces $\mathcal{D}$ induce una diferencial $\hat{\mathcal{D}}$ de $\vec{\mathcal{L}}$ sobre $\mathcal{K}$.
Obsérvese que $\mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{L} = \mathcal{L} \underset{\mathcal{K}/I}{\otimes} \mathcal{L}$ y por tanto $T(\vec{\mathcal{L}})$ como $\mathcal{K}/I$-$\mathcal{K}/I$ bimódulo $= T(\mathcal{L})$. Entonces tenemos:

$$\hat{\mathcal{D}}: \mathcal{K} \longrightarrow \vec{\mathcal{L}}.$$

Si $u \in \mathcal{K}(x,y)$, entonces $\hat{\mathcal{D}}(u) = \mathcal{D}(\bar{u}) \in \vec{\mathcal{L}}(x,y)$

$$\therefore \hat{\mathcal{D}}(I) = 0 \subseteq I\vec{\mathcal{L}} + \vec{\mathcal{L}}I.$$

luego $\hat{\mathcal{D}}$ da lugar a un BOCS $\vec{\mathcal{E}}$ compatible con $I$ (ver 2.3.3), y $\vec{\mathcal{E}}_I = \vec{\mathcal{E}} / I\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}I$.
Como $\vec{\mathcal{E}}$ es compatible con $I$ y por definición de $\vec{\mathcal{L}}$, se sigue que $(I\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}I)(x,y) = \mathcal{M}_y I(x,y)$.
Por lo tanto, $\vec{\mathcal{E}}_I(x,y) = \vec{\mathcal{E}} / I\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{E}}I(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \oplus \mathcal{M}_y \mathcal{K}/I(x,y)$
$\cong \mathcal{E}(x,y)$. Además por 2.5.1, la diferencial $\mathcal{D}_I$ de $\vec{\mathcal{E}}_I$

es la inducida por $\vec{\mathcal{D}}: \vec{\mathcal{K}} \to \vec{\mathcal{L}}$ en $\vec{\mathcal{K}}/I \longrightarrow \vec{\mathcal{L}}/I\vec{\mathcal{L}}+\vec{\mathcal{L}}I = \overline{\mathcal{L}}$, esto es, si $\bar{v} \in \vec{\mathcal{K}}/I$ con $v \in \vec{\mathcal{K}}$, entonces $\mathcal{D}_I(\bar{v}) = \overline{\vec{\mathcal{D}}(v)} = \overline{\mathcal{D}(v)} = \mathcal{D}(\bar{v})$. Por tanto $\vec{\mathcal{E}}_I$ tiene diferencial $\mathcal{D}$, de donde podemos concluir que $\mathcal{E} \cong \vec{\mathcal{E}}_I$ como BOCS's. //

<u>Definición</u>. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Un objeto $X \neq 0$ en $\mathcal{A}$ se llama <u>inescindible</u> si siempre que $X \cong Y \oplus Z$ en $\mathcal{A}$, entonces $Y \cong 0$ ó $Z \cong 0$.

<u>Definición</u>. Una $k$-categoría aditiva $\mathcal{A}$ se llama <u>Krull-Schmidt</u> si cada $X \in |\mathcal{A}|$ se puede escribir de manera única (salvo orden) en suma directa finita de objetos inescindibles de $\mathcal{A}$.

<u>Definición</u>. Una $k$-categoría Krull-Schmidt $\mathcal{A}$ es de <u>tipo de representación finito</u> si solamente hay un número finito (salvo isomorfismo) de objetos inescindibles en $\mathcal{A}$.

Definición. Si $\mathcal{V}$ es una k-categoría aditiva y $\mathcal{C}_K$ un BOCS, diremos que $\mathcal{C}$ es de tipo de $\mathcal{V}$-representación finito si la categoría $R(\mathcal{C},\mathcal{V})$ tiene solamente un número finito (salvo isomorfismo) de objetos inescindibles. En caso contrario, diremos que $\mathcal{C}$ es de tipo de $\mathcal{V}$-representación infinito.

Si $\mathcal{V}$ = modk, entonces diremos que $\mathcal{C}$ es de tipo de representación finito en vez de tipo de $\mathcal{V}$-representación finito.

2.5.3 PROPOSICION. Si $\mathcal{C}$ es de tipo de representación finito, $\mathcal{C}_I$ también lo es.

Demostración: Se sigue de 2.4.2. //

## §2.6 Bimódulos y Bocs's libres; Bicarcajes.

Consideremos una $k$-categoría $\mathcal{K}$. Aquí introduciremos el concepto de $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre y el bicarcaj asociado a un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre (cuando $\mathcal{K}$ es pequeña). También definiremos el marco de una gráfica punteada.

Si $I$ es un ideal de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{E}$ es un Bocs compatible con $I$, entonces probaremos que si $\mathcal{E}$ es libre sobre $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}_I$ es también libre sobre $\mathcal{K}/I$. Veremos también algunos otros resultados, que utilizaremos en los siguientes capítulos.

Aquí $k$ denotará un campo fijo.

<u>Definición</u>. Una $k$-categoría pequeña $\mathcal{K}$ es <u>libre</u> si existe un carcaj $C$ tal que $\mathcal{K} \cong kC$, donde $kC$ es la categoría de caminos del carcaj $C$.

Dado un carcaj $C$, $|C|$ denotará el conjunto de vértices de $C$ y $C_1$ el conjunto de flechas de $C$.

2.6.1 <u>Observación</u>: Si $\mathcal{K}$ es una $k$-categoría pequeña, entonces existe un carcaj $C$ tal que $\mathcal{K} \cong kC/I$, $I$ ideal de $kC$.

En efecto. Definimos el carcaj $C$ como sigue:

$|C| = |\mathcal{K}|$ y hay $d$ flechas de $X$ en $Y$ en $C$ si $d = \dim_k \mathcal{K}(X,Y)$.

Definimos ahora la aplicación $\theta : C \longrightarrow \mathcal{K}$ como la identidad en los objetos y $\theta(\beta) = u_\beta$ en las flechas de $C$, en donde $u_\beta$ es el básico en $\mathcal{K}(X,Y)$ el cual origina a la flecha $\beta$.

Sabemos que $\theta$ puede ser extendido a un $k$-funtor $\bar{\theta} : kC \longrightarrow \mathcal{K}$ de manera única, con la propiedad de que $\bar{\theta}(\beta) = u_\beta$.

Además $\bar{\theta} : kC(X,Y) \longrightarrow \mathcal{K}(X,Y)$ es un epimorfismo para cada pareja de objetos $X, Y$ de $kC$.

Luego podemos tomar el cociente inducido por: $kC/\ker\bar{\theta}$.

Llamando $\ker\bar{\theta} = I$, podemos concluir que $kC/I \cong \mathcal{K}$. //

<u>Definición</u>. Un <u>bicarcaj</u> es por definición una pareja $\mathcal{B} = (C, \Delta)$ de carcajes con el mismo conjunto de vértices, en donde las flechas de $C$ son de grado 0 y las flechas de $\Delta$ son de grado 1. Gráficamente las flechas de grado 0

serán representadas por flechas continuas y las de grado 1 por flechas punteadas.

2.6.2 Definiciones. Sea $\mathcal{K}$ una k-categoría arbitraria.

(i) Sea $\mathcal{L}$ un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo, $\ell \in \mathcal{L}(v,w)$; $\ell$ o es un elemento $\mathcal{K}$-libre si:

$$\mathcal{K}\ell\mathcal{K}(-,?) := \mathcal{K}(w,?)\,\ell\,\mathcal{K}(-,v) \cong \mathcal{K}(w,?) \underset{k}{\otimes} \mathcal{K}(-,v).$$
$$g\ell f \longleftarrow g \otimes f$$

(ii) $\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}$ o $\mathcal{K}$-libre si existe $\{\ell_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\ell_\lambda \in \mathcal{L}(a_\lambda, b_\lambda)$ elemento $\mathcal{K}$-libre, tal que

$$\mathcal{L}(-,?) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{K}(b_\lambda,?)\,\ell_\lambda\,\mathcal{K}(-,a_\lambda).$$

El conjunto de elementos $\{\ell_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ se llama una base de $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{K}$ (o $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{L}$).

(iii) Un BOCS $({}_{\mathcal{K}}\mathcal{C}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ es libre sobre $\mathcal{K}$ si su núcleo $\mathcal{L}$ es un bimódulo libre sobre $\mathcal{K}$.

2.6.3 Observaciones: (a) Si $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo, entonces es claro que existe un epimorfismo $F \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}$, con $F$ un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre.

(b) Si $F := \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{K}\ell_\lambda\mathcal{K}$ es un bimódulo $\mathcal{K}$-libre con base $\Delta = \{\delta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, entonces cualquier aplicación $\varphi$ del conjunto $\Delta$ en un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\mathcal{L}$ puede extenderse a un morfismo $\bar{\varphi}: F \longrightarrow \mathcal{L}$ de manera única, tal que $\bar{\varphi}(\delta_\lambda) = \varphi(\delta_\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda$.

2.6.9 <u>LEMA</u>. <u>Sea $\mathcal{A}$ una $k$-categoría. Si $\mathcal{L}$ es un bimódulo libre sobre $\mathcal{A}$ con base $\Delta$ y $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un $k$-funtor. Entonces</u>:

<u>$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ es un bimódulo libre sobre $\mathcal{B}$ con base</u>

$$\bar{\Delta} = \{1 \otimes \delta \otimes 1 \mid \delta \in \Delta\}.$$

Demostración: Como $\mathcal{L} = \coprod_{\delta \in \Delta} \mathcal{A}\delta\mathcal{A}$, entonces

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = \coprod_{\delta \in \Delta} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\delta\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = \coprod_{\delta \in \Delta} \mathcal{B}(1 \otimes \delta \otimes 1)\mathcal{B}.$$

Ahora si $\delta \in \Delta \cap \mathcal{L}(v,w)$, tenemos:

$$\mathcal{B}(1 \otimes \delta \otimes 1)\mathcal{B} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\delta\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}(w,?) \otimes_k \mathcal{A}(-,v)) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}.$$

pero $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}(w,?) \otimes_k \mathcal{A}(-,v)) \cong (\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}(w,?)) \otimes_k \mathcal{A}(-,v)$.

$$\therefore \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}(w,?) \otimes_k \mathcal{A}(-,v)) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \cong [(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}(w,?)) \otimes_k \mathcal{A}(-,v)] \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$$

$$\cong (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}(w,?)) \otimes_k (\mathcal{A}(-,v) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \cong \mathcal{B}(w,?) \otimes_k \mathcal{B}(-,v).$$

Mostrándose nuestro lema. //

2.6.5 LEMA. Sea $\mathcal{K}$ una $k$-categoría y $\mathcal{K}'$ la subcategoría plena de los inescindibles de $\mathcal{K}$, tal que cada objeto de $\mathcal{K}$ se puede escribir de manera única en suma directa finita de objetos de $\mathcal{K}'$. Para cada objeto $X \in |\mathcal{K}|$, si $X = \amalg X_i$ es la descomposición en inescindibles $X_i \in |\mathcal{K}'|$ de $X$, denotemos por $\sigma(X_i, X)$ (resp. $\tau(X, X_i)$) las inyecciones (resp. proyecciones) canónicas. Sea $\mathcal{L}$ un bimódulo sobre $\mathcal{K}$. Entonces:

(i) $\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}'$ (con base $\Delta$) si y solo si $\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}$ (con base $\Delta \subseteq \bigcup_{X,Y \in |\mathcal{K}'|} \mathcal{L}(X,Y)$).

(ii) Sea $\Delta = \{\delta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de elementos con $\delta_\lambda \in \mathcal{L}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces:

$\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}$ con base $\Delta$ si y solo si $\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}'$ con base $\Delta' = \{\tau(Y, Y_j)\delta\sigma(X_i, X) \mid X = \amalg X_i \xrightarrow{\delta} Y = \amalg Y_j \in \Delta\}$

Demostración: (i) $\Leftarrow$) Evidente.

$\Rightarrow$) Claramente $\Delta$ genera a $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{K}$.

Veamos ahora que cada $\delta \in \Delta \cap \mathcal{L}(v, w)$ es un elemento $\mathcal{K}$-libre, esto es, $\mathcal{K}\delta\mathcal{K}(X,Y) \cong \mathcal{K}(w,Y) \otimes_k \mathcal{K}(X,v)$ con $X, Y$ objetos de $\mathcal{K}$.

Caso 1: $X, Y \in |\mathcal{K}'|$.

Por hipótesis se cumple:

<u>Caso 2</u>: $X = \amalg X_i$ y $Y$ inescindible.

Tenemos: ${}^{\mathcal{K}}\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(\amalg X_i, Y) \cong \amalg {}^{\mathcal{K}}\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(X_i, Y) \cong \amalg \mathcal{K}(W, Y) \otimes_k \mathcal{K}(X_i, V)$
(ya que $S$ es $\mathcal{K}$-libre)

$\cong \mathcal{K}(W, Y) \otimes_k \mathcal{K}(\amalg X_i, V) = \mathcal{K}(W, Y) \otimes_k \mathcal{K}(X, V)$.

<u>Caso 3</u>: $Y = \amalg Y_j$ y $X$ inescindible.
Análogo al caso 2.

<u>Caso 4</u>: $X = \amalg X_i$ y $Y = \amalg Y_j$.
Se sigue de los casos 2 y 3.

(ii) Por hipótesis $\mathcal{L}$ es la suma directa de bimódulos de la forma $\mathcal{K}(Y, ?) \otimes_k \mathcal{K}(-, X) \cong \mathcal{K}(Y, ?)\, \delta\, \mathcal{K}(-, X)$, donde $\delta \in \Delta \cap \mathcal{L}(X, Y)$.

Veamos ahora que cada uno de estos bimódulos está generado libremente sobre $\mathcal{K}$ por elementos de $\Delta'$.

<u>Caso 1</u>: $X, Y \in |\mathcal{K}'|$.
Es evidente.

<u>Caso 2</u>: $X = \amalg X_i$ y $Y \in |\mathcal{K}'|$.

Tenemos: $\mathcal{K}(Y, ?)\, \delta\, \mathcal{K}(-, \amalg X_i) \cong \amalg \mathcal{K}(Y, ?)\, \delta\, \tau(X_i, X)\, \mathcal{K}(-, X_i)$.

Además es claro que $\delta\, \tau(X_i, X)$ son elementos $\mathcal{K}$-libres de $\mathcal{L}$ (puesto que $\delta$ es $\mathcal{K}$-libre)

Caso 3: $x \in |\mathcal{K}|$ y $Y = \coprod Y_j$.

Tenemos: $\mathcal{K}(\coprod Y_j, ?)\,\delta\,\mathcal{K}(-,x) = \coprod \mathcal{K}(Y_j,?)\,\tau(Y,Y_j)\,\delta\,\mathcal{K}(-,x)$, con $\tau(Y,Y_j)\delta$ elementos $\mathcal{K}$-libres de $\mathcal{L}$ (ya que $\delta$ es $\mathcal{K}$-libre).

Caso 4: $X = \coprod X_i$, $Y = \coprod Y_j$.

Entonces: $\mathcal{K}(\coprod Y_j, ?)\,\delta\,\mathcal{K}(-,\coprod X_i) \cong \coprod_{i,j} \mathcal{K}(Y_j,?)\,\tau(Y,Y_j)\,\delta\,\Gamma(X_i,X)\,\mathcal{K}(-,X_i)$

Como antes, $\tau(Y,Y_j)\,\delta\,\Gamma(X_i,X)$ son elementos $\mathcal{K}$-libres.

$\therefore$ $\Delta'$ es una $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{L}$.

El recíproco se prueba en forma análoga. //

2.6.6 Afirmación. Sea $I$ un ideal de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo. Si $\ell$ es un elemento $\mathcal{K}$-libre de $\mathcal{L}$, entonces su clase $\bar{\ell}$ es elemento $\mathcal{K}/I$-libre de $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}/I\mathcal{L}+\mathcal{L}I$.

Demostración: Supongamos que $\ell \in \mathcal{L}(x,y)$ es $\mathcal{K}$-libre, entonces $\mathcal{K}\ell\mathcal{K}(v,w) \cong \mathcal{K}(y,w) \otimes_k \mathcal{K}(v,x)$.

Obsérvese que $(\mathcal{K}\ell\mathcal{K})_I = \mathcal{K}/I\,\bar{\ell}\,\mathcal{K}/I$. Por lo tanto:

$\mathcal{K}/I\,\bar{\ell}\,\mathcal{K}/I(v,w) = (\mathcal{K}\ell\mathcal{K})_I(v,w) = (\mathcal{K}\ell\mathcal{K})(v,w)/(I\ell\mathcal{K})(v,w) +$

$+(\mathcal{K}\ell I)(v,w) \cong \mathcal{K}(y,w)\otimes_k \mathcal{K}(v,x)/I(y,w)\otimes_k \mathcal{K}(v,x)+\mathcal{K}(y,w)\otimes_k I(v,x)$

$\overset{(\boxtimes)}{\cong} \mathcal{K}(y,w)/I(y,w)\otimes_k \mathcal{K}(v,x)/I(v,x) = \mathcal{K}/I(y,w)\otimes_k \mathcal{K}/I(v,x)$

(todos los isomorfismos son naturales en $v$ y $w$).

$\therefore \bar{\mathcal{I}}$ es $\mathcal{K}/I$-libre.

$(\boxtimes)$ la aplicación $m\otimes n \longrightarrow \bar{m}\otimes\bar{n}$ es un isomorfismo. //

2.6.7 <u>Observación</u>: Si ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ es un Bocs $\mathcal{K}$-libre con núcleo $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ es una diferencial de $\mathcal{E}$ y $\Delta$ es una $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{L}$, un morfismo $\eta \in R(M,N)$ está completamente determinado por una familia de aplicaciones

$\{M(c)\xrightarrow{\rho(\delta)} N(d)\}$, $\delta\in\Delta\cap\mathcal{L}(c,d)$ y

$\eta_{a,a}(\mathbb{I}_a): M(a)\longrightarrow N(a)$, $a\in|\mathcal{K}|$ tal que si ponemos $\rho(\sum_\delta f_\delta\,\delta\, g_\delta) = \sum_\delta N(f_\delta)\rho(\delta)M(g_\delta)$;

$g_\delta \in \mathcal{K}(b,c)$, $f_\delta\in\mathcal{K}(d,e)$, la igualdad (21) de 2.3.1 se cumple.

2.6.8 <u>Observación</u> : Consideremos un bimódulo libre $\mathcal{L}$ sobre la categoría $\mathcal{K} = \kappa C/I$ con $C$ un carcaj. Supongamos que $\mathcal{L} = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{K} \delta_\lambda \mathcal{K}$ con $\delta_\lambda$ elementos libres de $\mathcal{L}$.

Con el objeto de describir gráficamente el bimódulo $\mathcal{L}$, le asociamos la bigráfica $\mathcal{B}(\mathcal{L}) = (C; \Delta)$ definida como sigue: $|\mathcal{B}(\mathcal{L})| = |C|$, $C := C$, finalmente para cada básico $\delta_\lambda \in \mathcal{L}(a_\lambda, b_\lambda)$, ponemos en $\Delta$ una flecha punteada de $a_\lambda$ en $b_\lambda$.

Si ponemos $\mathcal{K}(\Delta) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{K}(b_\lambda, ?) \otimes_\kappa \mathcal{K}(-, a_\lambda)$, entonces $\mathcal{L} \cong \mathcal{K}(\Delta)$.

2.6.9 <u>Observación</u> : Veamos ahora que a cada bicarcaj $\mathcal{B} = (C, \Delta)$ le podemos asociar de manera natural un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre sobre $\mathcal{K}$ en donde $\mathcal{K} = \kappa C$, como sigue:

Si $v, w \in |\mathcal{K}|$ denotemos por $\kappa(\mathcal{B})(v, w)$ el $\kappa$-espacio vectorial con base los caminos de $v$ en $w$ de la forma $\gamma = \beta_s \ldots \beta_1$ con $\beta_i$ flecha en $\mathcal{B}$ tal que la suma de los grados de las $\beta_i$ es igual a 1.

Esta familia de $\kappa$-espacios vectoriales determina claramente un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\kappa(\mathcal{B})$.

claramente $k(\mathcal{B})(-,?) \cong \coprod_{\delta \in \Delta_i} \mathcal{K}(b_\delta,?) \otimes_k \mathcal{K}(-,a_\delta)$.

Por tanto $k(\mathcal{B})$ está generado libremente sobre $\mathcal{K}$ por las flechas de grado 1 de $\mathcal{B}$.

2.6.10 <u>Observación</u>: Todo bimódulo libre $\mathcal{L}$ sobre una categoría libre $\mathcal{K}$ es isomorfo a $k(\mathcal{B})$ para algún bicarcaj $\mathcal{B} = (C, \Delta)$.

En efecto. Supongamos $\mathcal{K} = kC$, $C$ carcaj.
Como $\mathcal{L}$ es libre sobre $\mathcal{K}$, entonces
$\mathcal{L}(-,?) \cong \coprod_{\lambda \in \Delta} (kC(b_\lambda,?) \otimes_k kC(-,a_\lambda))$ y
$\mathcal{L} = \coprod_{\lambda \in \Delta} \mathcal{K} \mathcal{L}_\lambda \mathcal{K}$ con $\mathcal{L}_\lambda$ elemento libre de $\mathcal{L}(a_\lambda, b_\lambda)$.

Ahora para cada $\lambda \in \Delta$, ponemos en $C$ una flecha punteada $s_\lambda$ de $a_\lambda$ en $b_\lambda$ y así creamos $\mathcal{B}$.
Definimos ahora la aplicación

$$kC(\Delta) \longrightarrow \mathcal{L}$$
$$\sum_\lambda f_\lambda \otimes g_\lambda \longmapsto \sum_\lambda f_\lambda \mathcal{L}_\lambda g_\lambda$$

y se extiende mediante $\sum$ al isomorfismo buscado. //

El siguiente concepto será muy conveniente en nuestro estudio de morfismos entre representaciones de BOCS's triangulares (§ 4.2).

Definición. Sea ${}^{\nu}\mathcal{K} = kC/I$ y $\Delta$ una gráfica punteada con $|\Delta| = |{}^{\nu}\mathcal{K}|$. Un marco $W$ de $\Delta$ consiste de lo siguiente:

(i) para cada punto $i \in \Delta$ un par de $k$-espacios vectoriales $W_1(i), W_2(i)$.

(ii) para cada punto $i$ en $\Delta$ una transformación lineal
$$W(i): W_1(i) \longrightarrow W_2(i).$$

(iii) para cada flecha $i \overset{x}{\dashrightarrow} j$ de $\Delta$, una transformación lineal $W(x): W_1(i) \longrightarrow W_2(j)$.

Si todas las transformaciones $W(i)$ son isomorfismos, $W$ se llama un marco no singular de $\Delta$.

2.6.11 Observación: Sea $\mathcal{E}$ un BOCS libre sobre ${}^{\nu}\mathcal{K} = kC/I$. Sea $\mathcal{L}$ el núcleo de $\mathcal{E}$ y $\Delta$ una ${}^{\nu}\mathcal{K}$-base de $\mathcal{L}$.
Si $\eta: M \longrightarrow N$ es un morfismo en $R(\mathcal{E})$, $\eta$ determina un marco de la gráfica punteada $\Delta$ (con $|\Delta| = |{}^{\nu}\mathcal{K}|$)

asociada a la base $\Delta$ (ver 2.6.8), de la manera siguiente:

Para cada punto $i \in \Delta$ ponemos los $k$-espacios vectoriales

$W_1(i) := M(i)$; $W_2(i) := N(i)$

Para cada punto $i \in \Delta$ ponemos la transformación lineal

$W(i) := \eta(\mathbb{1}_i) : M(i) \longrightarrow N(i)$

Si $x : i \dashrightarrow j$ es una flecha en $\Delta$ ponemos la transformación lineal $W(x) := \eta(x_{ij}) : M(i) \longrightarrow N(i)$, en donde $x_{ij}$ es el básico en $\Delta$ que determina a la flecha $x$.

2.6.12 LEMA. Sea $\mathcal{C}$ un BOCS libre sobre $\mathcal{K} = kC/I$, con diferencial $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{L}$ el núcleo de $\mathcal{C}$ y $\Delta$ una $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{L}$. Sean $A, B$ dos representaciones de $\mathcal{C}$. Sea $W$ un marco de $\Delta$ tal que $W_1(i) = A(i)$ y $W_2(i) = B(i)$, para $i \in |C|$, y sea $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow {}^{B}\mathrm{Mod}^{A}$ el único morfismo de bimódulos tal que $\rho(x) = W(x)$ para cada $x \in \Delta$.

Entonces:

$W$ es un marco de un morfismo $\eta : (\rho_{a,b})\mathbb{1}_{a,a}(\mathbb{1}_a)) : A \to B$ en $R(\mathcal{C})$ si y sólo si $B(\bar{\alpha})W(i) - W(j)A(\bar{\alpha}) = \rho(\mathcal{D}(\bar{\alpha}))$

para cada flecha $i \xrightarrow{\alpha} j$ de $C$.

Demostración: Por probar la fórmula (*):

$\rho(\mathcal{D}(h)) = B(h)W(i) - W(j)A(h)$ para cada morfismo $h: i \longrightarrow j$ en $\mathcal{K}$.

En efecto. Basta probar (*) para $h = \bar{\pi}$ con $\pi$ camino de $C$ (pues $\rho$, $\mathcal{D}$, $A$ y $B$ son $k$-lineales).

Lo haremos por inducción sobre la longitud de $\pi$: Claramente la fórmula (*) se cumple para caminos triviales y para flechas de $C$.

Supongamos ahora que $\pi = (i \xrightarrow{\pi_1} t \xrightarrow{\pi_2} j)$ con $\pi_1, \pi_2$ caminos no triviales de $C$. Entonces $\bar{\pi} = \bar{\pi}_2 \bar{\pi}_1$ y

$\rho(\mathcal{D}(\bar{\pi}_2 \bar{\pi}_1)) = \rho(\mathcal{D}(\bar{\pi}_2)\bar{\pi}_1) + \rho(\bar{\pi}_2 \mathcal{D}(\bar{\pi}_1)) =$

$= \rho(\mathcal{D}(\bar{\pi}_2))A(\bar{\pi}_1) + B(\bar{\pi}_2)\rho(\mathcal{D}(\bar{\pi}_1)) = (B(\bar{\pi}_2)W(t) - W(j)A(\bar{\pi}_2))A(\bar{\pi}_1)$

$+ B(\bar{\pi}_2)(B(\bar{\pi}_1)W(i) - W(t)A(\bar{\pi}_1)) = B(\bar{\pi}_2)W(t)A(\bar{\pi}_1) -$

$- W(j)A(\bar{\pi}_2\bar{\pi}_1) + B(\bar{\pi}_2\bar{\pi}_1)W(i) - B(\bar{\pi}_2)W(t)A(\bar{\pi}_1) =$

$= B(\bar{\pi}_2\bar{\pi}_1)W(i) - W(j)A(\bar{\pi})$.

Mostrándose la fórmula (*). La prueba se completa utilizando 2.3.4 (ver pág. 63). //

# CAPITULO 3

## DERIVACION

En este capítulo estudiaremos categorías dadas explícitamente por generadores y relaciones. Veremos que en ciertos casos, aplicando un procedimiento geométrico sencillo, dada una categoría $\mathcal{A}$ se puede construir otra categoría $\mathcal{A}_\Delta$ y una inmersión $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_\Delta$, tal que el núcleo del funtor composición $\Pi : \mathcal{A}_\Delta \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_\Delta \longrightarrow \mathcal{A}_\Delta$ es un $\mathcal{A}_\Delta$-$\mathcal{A}_\Delta$ bimódulo libre. De tal manera que si ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ es un BOCS, veremos entonces que en ciertos casos, el BOCS ${}_{\mathcal{A}_\Delta}\mathcal{E}^{\Phi}_{\mathcal{A}_\Delta}$ (introducido en el capítulo 2) se puede describir en forma explícita, en términos de $\mathcal{E}$ y $\ker \Pi$. También veremos que $R(\mathcal{E}, \mathrm{Mod}\,k) \simeq R(\mathcal{E}^{\Phi}, \mathrm{Mod}\,k)$, y que si $\mathcal{E}$ satisface la condición (A), entonces $\mathcal{E}^{\Phi}$ también la cumple.
Aquí $k$ denotará un campo fijo.

### §3.1 Carcajes derivados y categorías derivadas.

En esta sección nos concentraremos principalmente en la demostración del siguiente:

3.1.1 TEOREMA.- Si $\mathcal{A} = kC/I$ con $C$ carcaj y $0 \neq f = \bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ con $X \neq Y$, y $\alpha$ una flecha en $C$. Entonces existen $k$-categorías $\mathcal{A}_f$ y $\mathcal{A}(f^*)$ con $\mathcal{A}(f^*) \subseteq \mathcal{A}_f$, que satisfacen:

(a) Hay un funtor $\bar{\Phi}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}(f^*) \subseteq \mathcal{A}_f$.

(b) Existe un morfismo $f^*: \bar{\Phi}(y) \longrightarrow \bar{\Phi}(x)$ tal que $\bar{\Phi}(f) f^* \bar{\Phi}(f) = \bar{\Phi}(f)$ y $f^* \bar{\Phi}(f) f^* = f^*$.

(c) $\mathcal{A}(f^*)$ está generada por $Im\, \bar{\Phi}$ y $f^*$.

(d) $\bar{\Phi}$ satisface la propiedad: si $\Psi: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}$ es un $k$-funtor en una $k$-categoría esqueléticamente pequeña $\mathcal{L}$ tal que existe un morfismo $\lambda^*: \Psi(y) \longrightarrow \Psi(x)$ con $\Psi(f)\lambda^*\Psi(f) = \Psi(f)$ y $\lambda^*\Psi(f)\lambda^* = \lambda^*$, entonces existe un único $k$-funtor $\bar{\Psi}: \mathcal{A}(f^*) \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que $\bar{\Psi}(f^*) = \lambda^*$ y $\bar{\Psi}\bar{\Phi} = \Psi$. Si $\mathcal{L}$ es tal que sus idempotentes dividen, entonces $\bar{\Psi}$ se puede extender a un funtor $\bar{\Psi}: \mathcal{A}_f \longrightarrow \mathcal{L}$.

(e) $\bar{\Phi}$ es una inmersión.

3.1.2 Observaciones - definiciones:

1) El elemento $f^*$ se llama un pseudoinverso de $f$.

2) Las propiedades (a), (b), (c) y (d) determinan la categoría $\mathcal{A}(f^*)$ hasta isomorfismo. De aquí en adelante la llamaremos la categoría derivada reducida de $\mathcal{A}$ con respecto a $f$.

Consideremos $C$ un carcaj y $\alpha: x \to y$ una flecha con $x \neq y$ en $C$. Construyamos un nuevo carcaj $C_\alpha$, que llamaremos el <u>carcaj derivado de $C$ con respecto a $\alpha$</u>, como sigue:

Puntos de $C_\alpha$ = (Puntos de $C$) $\cup \{z\}$, $z$ un nuevo punto.

Para cada flecha $a \xrightarrow{\beta} b$ de $C$, en $C_\alpha$ tenemos las flechas siguientes:

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha \neq \beta, \ C_\alpha \text{ contiene la flecha } a \xrightarrow{\beta^{(0)}} b, \ \beta^{(0)} := \beta \\ \text{Si } a \notin \{x,y\}, b \in \{x,y\}, \ C_\alpha \text{ contiene la flecha } a \xrightarrow{\beta^{(1)}} z \\ \text{Si } a \in \{x,y\}, b \notin \{x,y\}, \ C_\alpha \text{ contiene la flecha } z \xrightarrow{\beta^{(1)}} b \\ \text{Si } \alpha \neq \beta, a \in \{x,y\}, b \in \{x,y\}, \ C_\alpha \text{ contiene las flechas} \\ a \xrightarrow{\beta^{(1)}} z, \ z \xrightarrow{\beta^{(2)}} b \ \text{ y } \ z \xrightarrow{\beta^{(3)}} z. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{B}$ la categoría aditiva generada por $kC_\alpha$.

Ahora las categorías $kC$ y $kC_\alpha$ estarán relacionadas a través de un funtor $\Phi$ definido como sigue:

$$\Phi : kC \longrightarrow \mathcal{B} \supseteq kC_\alpha$$

$$a \longmapsto \begin{cases} a \text{ si } a \notin \{x, y\} \\ a \oplus z \text{ si } a \in \{x,y\} \end{cases}$$

$$\underset{\text{(flecha)}}{a \xrightarrow{\beta} b} \longmapsto \begin{cases} a \xrightarrow{\beta} b \text{ si } a, b \notin \{x,y\} \\ a \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \beta^{(1)} \end{pmatrix}} b \oplus z \text{ si } a \notin \{x,y\},\ b \in \{x,y\} \\ a \oplus z \xrightarrow{(\beta, \beta^{(1)})} b \text{ si } a \in \{x,y\},\ b \notin \{x,y\} \\ a \oplus z \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta & \beta^{(2)} \\ \beta^{(1)} & \beta^{(3)} \end{pmatrix}} b \oplus z \text{ si } a, b \in \{x,y\},\ \alpha \neq \beta. \\ a \oplus z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_z \end{pmatrix}} b \oplus z \text{ si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Podemos ahora extender $\Phi$ a un funtor de $\kappa C$ en $\mathfrak{B}$.

<u>Notación</u>: si $a \in |\kappa C|$, denotaremos usualmente a $\Phi(a)$ por $\underline{a}$. En forma similar, si $\delta$ es un morfismo en $\kappa C$, denotaremos a $\Phi(\delta)$ por $\underline{\delta}$.

Denotemos por $\alpha^*$ a la aplicación

$$\alpha^* : \underline{y} \longrightarrow \underline{x} \text{ dada por } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_z \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{K}_\alpha$ la subcategoría plena de $\mathfrak{B}$ con objetos $c \in C_\alpha$ y $\underline{x}, \underline{y}$; por $\mathcal{K}(\alpha^*)$ denotemos a la subcategoría plena de $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ formada por objetos de la forma $\underline{a}$ con $a \in |\kappa C|$, y $\mathcal{K}_\mathcal{L}' :=$ subcategoría plena de $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ con objetos $|C_\mathcal{L}| = \kappa C_\mathcal{L} = \operatorname{ind} \mathcal{K}_\mathcal{L}$.

3.1.3 <u>LEMA</u>. $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ <u>está generada por</u> $\operatorname{Im} \Phi := \underline{\mathcal{K}}$ y $\mathcal{L}^*$.

Demostración:

Sea $\mathcal{K}_0$ la subcategoría de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ generada por $\underline{\mathcal{K}}$ y $\mathcal{L}^*$.

i) <u>Observación</u>: $e_x : \underline{x} \longrightarrow \underline{x}$ dado por $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_z \end{pmatrix}$ es igual a $\mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}$.

Análogamente,
$$\begin{cases} f_x = \begin{pmatrix} 1_x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{\underline{x}} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \\ f_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_z \end{pmatrix} = \underline{\mathcal{L}} \mathcal{L}^* \\ e_y = \begin{pmatrix} 1_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{\underline{y}} - \underline{\mathcal{L}} \mathcal{L}^* \end{cases}$$

ii) Evidentemente $e_x, e_y, f_x, f_y \in \mathcal{K}_0$.

iii) $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*) \subseteq \mathcal{K}_0$.

En efecto. Sean $a, b \in |\mathcal{K}|$, por probar que
$$\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{a}, \underline{b}) \subseteq \mathcal{K}_0(\underline{a}, \underline{b})$$

<u>Caso 1</u>: $a, b \notin \{x, y\}$.

Entonces $\underline{a} = a$, $\underline{b} = b$, y $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(a,b)$ está generado como $k$-espacio vectorial por caminos de $\mathcal{H} : a \rightsquigarrow b$

en $kC_\alpha$.

<u>Caso 2</u>: $a \notin \{x,y\}$, $b \in \{x,y\}$.

$\mathcal{K}(\alpha^*)(a, b\oplus z)$ está generado como $k$-espacio vectorial por los morfismos $a \xrightarrow{\binom{\mu^0}{0}} b\oplus z$, $a \xrightarrow{\binom{0}{\mu^1}} b\oplus z$

con $\mu^0 : a \rightsquigarrow b$, $\mu^1 : a \rightsquigarrow z$ caminos en $kC_\alpha$.

<u>Caso 3</u>: $a \in \{x,y\}$, $b \notin \{x,y\}$.

Análogo al caso 2.

<u>Caso 4</u>: $a, b \in \{x,y\}$.

$\mathcal{K}(\alpha^*)(a\oplus z, b\oplus z)$ está generado como $k$-espacio vectorial por morfismos

$\begin{pmatrix} \mu^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu^1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \mu^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu^3 \end{pmatrix}$ con $\mu^i$ caminos en $kC_\alpha$.

Probaremos todos los casos por inducción sobre la longitud $\ell$ del camino involucrado.

$\ell = 1$:

<u>Caso 1</u>: $\mu = a \xrightarrow{\beta^{(1)}} b \in \mathcal{K}_0$.

<u>Caso 2</u>: $\mu$ flecha, entonces $F(\mu) = \binom{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}$ y $\binom{\mu^{(1)}}{0} = \delta_x \underline{\mu} \in \mathcal{K}_0$ si $b = x$ o $\binom{\mu^{(1)}}{0} = e_y \underline{\mu}$ si $b = y$.

Similarmente $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu^{(1)} \end{pmatrix} = e_x \underline{\mu} \in \mathcal{K}_0$ si $b = x$, y $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu^{(1)} \end{pmatrix} = f_y \underline{\mu} \in \mathcal{K}_0$ si $b = y$

Caso 3: Similar al caso 2.

Caso 4: Si $\mu$ es flecha, entonces $\Phi(\mu) = \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu^{(0)} & \mu^{(2)} \\ \mu^{(1)} & \mu^{(3)} \end{pmatrix}$,
Por ejemplo si $\mu : x \longrightarrow y$, entonces

$$\begin{pmatrix} \mu^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_y \underline{\mu} f_x \in \mathcal{K}_0, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mu^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_y \underline{\mu} e_x \in \mathcal{K}_0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu^{(1)} & 0 \end{pmatrix} = f_y \underline{\mu} f_x \in \mathcal{K}_0; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(3)} \end{pmatrix} = f_y \underline{\mu} e_x \in \mathcal{K}_0.$$

los otros casos se pueden analizar en forma análoga.

Paso inductivo: Supongamos cada uno de los casos probados para caminos de longitud $< n$.

Supongamos ahora que los caminos involucrados tienen longitud $n > 1$.

Caso 1: Supongamos que $\mu = (a \xrightarrow{\mu_1} w \xrightarrow{\mu_2} b)$ con $\mu_1$ y $\mu_2$ caminos no triviales en $kQ$.

Caso 1.1. $w \notin \{x, y\}$, $\underline{w} = w$.
Entonces $\mu_1 \in \mathcal{K}_0$ y por hipótesis de inducción $\mu_2 \in \mathcal{K}_0$,

por lo tanto $\mu = \mu_2\mu_1 \in \mathcal{K}_0$.

<u>Caso</u> 1.2 : $w \in \{x, y\}$, $\underline{w} = w \oplus z$.

Entonces $(\mu_2, 0)\begin{pmatrix}\mu_1\\0\end{pmatrix} = \mu_2\mu_1$, pero por hipótesis de inducción, tanto $(\mu_2, 0)$ como $\begin{pmatrix}\mu_1\\0\end{pmatrix}$ están en $\mathcal{K}_0$ y consecuentemente $\mu = \mu_2\mu_1 \in \mathcal{K}_0$.

<u>Caso</u> 2 : $\begin{pmatrix}\mu^\circ\\0\end{pmatrix} : a \longrightarrow b \oplus z$, $\mu^\circ = (a \xrightarrow{\mu_1} w \xrightarrow{\mu_2} b)$ con $\mu_1$ y $\mu_2$ caminos en $kC\mathcal{L}$.

<u>Caso</u> 2.1 : $w \notin \{x, y\}$.

Entonces por hipótesis de inducción, $\begin{pmatrix}\mu_2\\0\end{pmatrix} : w \longrightarrow b \oplus z$ está en $\mathcal{K}_0$, y $\begin{pmatrix}\mu_2\\0\end{pmatrix}\mu_1 = \begin{pmatrix}\mu_2\mu_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu^\circ\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{K}_0$

<u>Caso</u> 2.2 : $w \in \{x; y\}$.

Por hipótesis de inducción, los morfismos $\begin{pmatrix}\mu_2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\mu_1\\0\end{pmatrix}$ están en $\mathcal{K}_0$. En consecuencia

$$\begin{pmatrix}\mu^\circ\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu_2\mu_1\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{K}_0$$

En forma análoga se muestra que $\begin{pmatrix}0\\\mu'\end{pmatrix} \in \mathcal{K}_0$.

<u>Caso</u> 3. Similar al caso 2.

Caso 4: Se muestra en forma análoga a los anteriores. //

3.1.4. PROPOSICION. Sea $\alpha: x \longrightarrow y$ una flecha en $C$, $x \neq y$. Entonces si $\psi: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ es un $k$-funtor de $\mathcal{K} = kC$ en una $k$-categoría esq. pequeña $\mathcal{L}$ tal que existe un $\mathcal{L}$-morfismo $\lambda^*: \psi(y) \longrightarrow \psi(x)$ con $\psi(\alpha)\lambda^*\psi(\alpha) = \psi(\alpha)$ y $\lambda^*\psi(\alpha)\lambda^* = \lambda^*$, entonces existe un único $k$-funtor $\bar{\psi}: \mathcal{K}(\alpha^*) \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que $\bar{\psi}(\alpha^*) = \lambda^*$ y $\bar{\psi}\Phi = \psi$. Si $\mathcal{L}$ es tal que sus idempotentes dividen, entonces $\bar{\psi}$ se puede extender a un funtor $\bar{\psi}: \mathcal{K}_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}$.

Demostración: Sea $\mathcal{L}_a = Mod(\mathcal{L})$, entonces $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L}_a$. Consideremos el morfismo $e_x = \lambda^*\psi(\alpha): \psi(x) \longrightarrow \psi(x)$, entonces $e_x e_x = \lambda^*\psi(\alpha)\lambda^*\psi(\alpha) = \lambda^*\psi(\alpha) = e_x$. Por tanto $e_x$ es idempotente y dá lugar a una descomposición de $\psi(x)$ en $\mathcal{L}_a$: $\psi(x) = X_1 \oplus X_2$ con $e_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{X_2} \end{pmatrix}$ (Esto es posible porque la categoría $Mod(\mathcal{L})$ es abeliana).

$f_x = 1_{\psi(x)} - e_x = \begin{pmatrix} 1_{X_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; de igual manera $e_y := \psi(\alpha)\lambda^*: \psi(y) \longrightarrow \psi(y)$ es idempotente y dá

lugar a la descomposición $\Psi'(y)=y_1\oplus y_2$ con $e_y=\begin{pmatrix}0&0\\0&1_{y_2}\end{pmatrix}$.
$f_y=1_{\Psi'(y)}-e_y=\begin{pmatrix}1_{y_1}&0\\0&0\end{pmatrix}$. Entonces, es fácil ver que

$\Psi'(\alpha):x_1\oplus x_2\longrightarrow y_1\oplus y_2$ está dado por una matriz $\begin{pmatrix}0&0\\0&\rho\end{pmatrix}$
con $\rho:x_2\longrightarrow y_2$ isomorfismo y $\lambda^*=\begin{pmatrix}0&0\\0&\rho^{-1}\end{pmatrix}$.

Definamos ahora un funtor $\bar{\Psi}':kC_\alpha\longrightarrow \mathcal{L}_a$ como sigue:
"En objetos": $\bar{\Psi}'(a)=\begin{cases}\Psi'(a) & \text{si } a\notin\{x,y,z\}\\ x_1 & \text{si } a=x\\ y_1 & \text{si } a=y\\ x_2 & \text{si } a=z\end{cases}$

"En morfismos": Sea $\beta: a\longrightarrow b$ una flecha en $C$.
Si $a,b\notin\{x,y\}$: ponemos $\bar{\Psi}'(\beta)=\Psi'(\beta)$.
Si $a\notin\{x,y\}, b\in\{x,y\}$: $\Psi'(\beta):\Psi'(a)\longrightarrow\Psi'(b)=b_1\oplus b_2$.
$$\therefore\ \Psi'(\beta)=\begin{pmatrix}\Psi'_1(\beta)\\ \Psi'_2(\beta)\end{pmatrix}$$

pongamos $\bar{\Psi}'(\beta)=\Psi'_1(\beta)$ y $\bar{\Psi}'(\beta'')=\begin{cases}\Psi'_2(\beta) & \text{si } b=x\\ \rho^{-1}\Psi'_2(\beta) & \text{si } b=y\end{cases}$

Análogamente, si $b \notin \{x, y\}$; $a \in \{x, y\}$

$\psi'(\beta) : a_1 \oplus a_2 = \psi'(a) \longrightarrow \psi'(b) \quad \therefore \psi'(\beta) = (\psi_1'(\beta) \;\; \psi_2'(\beta))$.

Definamos $\bar{\psi}'(\beta) = \psi_1'(\beta)$ y $\bar{\psi}'(\beta^{(1)}) = \begin{cases} \psi_2'(\beta) & \text{si } a = x \\ \psi_2'(\beta)\,\rho & \text{si } a = y \end{cases}$

Ahora si $\alpha \neq \beta$ con $a, b \in \{x, y\}$.

$\psi'(\beta) : a_1 \oplus a_2 \longrightarrow b_1 \oplus b_2 \quad \therefore \psi'(\beta) = \begin{pmatrix} \psi_{11}'(\beta) & \psi_{12}'(\beta) \\ \psi_{21}'(\beta) & \psi_{22}'(\beta) \end{pmatrix}$.

Definimos entonces

| | $a = x$, $b = x$ | $a = x$, $b = y$ | $a = y$, $b = x$ | $a = y$, $b = y$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{\psi}'(\beta) =$ | $\psi_{11}'(\beta)$ | $\psi_{11}'(\beta)$ | $\psi_{11}'(\beta)$ | $\psi_{11}'(\beta)$ |
| $\bar{\psi}'(\beta^{(1)}) =$ | $\psi_{21}'(\beta)$ | $\rho^{-1}\psi_{21}'(\beta)$ | $\psi_{21}'(\beta)$ | $\rho^{-1}\psi_{21}'(\beta)$ |
| $\bar{\psi}'(\beta^{(2)}) =$ | $\psi_{12}'(\beta)$ | $\psi_{12}'(\beta)$ | $\psi_{12}'(\beta)\,\rho$ | $\psi_{12}'(\beta)\,\rho$ |
| $\bar{\psi}'(\beta^{(3)}) =$ | $\psi_{22}'(\beta)$ | $\rho^{-1}\psi_{22}'(\beta)$ | $\psi_{22}'(\beta)\,\rho$ | $\rho^{-1}\psi_{22}'(\beta)\,\rho$ |

Tenemos pues definido $\bar{\psi}'$ para todas las flechas de $C_\alpha$; por tanto se obtiene un funtor $\bar{\psi}' : kC_\alpha \longrightarrow \mathcal{L}a$

El funtor $\bar{\Psi}'$ se extiende a $\mathcal{B}$ y entonces si lo restringimos a $\mathcal{K}_2$ obtenemos un funtor $\bar{\Psi}' : \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{L}a$.

Consideremos ahora la composición $\bar{\Psi}'\Phi$, tenemos

$$\bar{\Psi}'\Phi(y) = \bar{\Psi}'(y \oplus z) = y_1 \oplus x_2 \cong y_1 \oplus y_2 .$$

Consideremos los objetos en $\mathcal{L}a$, $w_0 = y_1 \oplus x_2$ y $w_1 = y_1 \oplus y_2$.

Sea $h : w_0 \longrightarrow w_1$ el isomorfismo en $\mathcal{L}a$ entre $w_0$ y $w_1$ dado por $\begin{pmatrix} 1_{y_1} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$. Podemos definir

$T : \mathcal{L}a \longrightarrow \mathcal{L}a$ un isomorfismo de categorías como sigue:

"En objetos": $T(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \neq w_0 \\ w_1 & \text{si } v = w_0 \end{cases}$

"En morfismos": si $f \in \mathcal{L}a(v,v')$, $T(f) = \begin{cases} hfh^{-1} & \text{si } v = w_0, v' = w_0 \\ hf & \text{si } v \neq w_0, v' = w_0 \\ fh^{-1} & \text{si } v = w_0, v' \neq w_0 \\ f & \text{si } v \neq w_0, v' \neq w_0 \end{cases}$.

Entonces $\bar{\Psi} = T\bar{\Psi}'$ determina un funtor

$\bar{\Psi} : \mathcal{K}(\mathcal{A}^*) \longrightarrow \mathcal{L}$ con las propiedades requeridas.

Ahora si $\bar{\bar{\Psi}}' : \mathcal{K}(\lambda^*) \longrightarrow \mathcal{L}$ es otro funtor tal que $\bar{\bar{\Psi}}'(\lambda^*) = \lambda^*_1$ y $\bar{\bar{\Psi}}' \mathcal{F} = \Psi'$, entonces $\bar{\bar{\Psi}}' \mathcal{F} = \bar{\Psi}' \mathcal{F}$.

Entonces $\bar{\Psi}'$ y $\bar{\bar{\Psi}}'$ coinciden en la imagen de $\mathcal{F}$ y $\lambda^*$.

Pero sabemos que $\mathcal{K}(\lambda^*)$ está generada por $\mathrm{Im}\,\mathcal{F}$ y $\lambda^*$; entonces podemos concluir que $\bar{\Psi}' \cong \bar{\bar{\Psi}}'$.

Finalmente es claro que si los idempotentes de $\mathcal{L}$ dividen, $\bar{\Psi}'$ puede ser extendido a un funtor $\bar{\Psi}' : \mathcal{K}_\lambda \longrightarrow \mathcal{L}$. //

3.1.5 <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea $C$ un carcaj y $\lambda$ una flecha no lazo de $C$. Sean $\mathcal{K} = kC$ y $\mathcal{K}_\lambda$ la categoría asociada a $\mathcal{K}$ con respecto a $\lambda$ como antes. Entonces el funtor restricción $S : (\mathcal{K}_\lambda, \mathrm{Mod}_k) \longrightarrow (\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$ es un funtor denso.</u>

Demostración: Sea $M$ un objeto en $(\mathcal{K}, \mathrm{Mod}_k)$, $M(\lambda) : M(x) \longrightarrow M(y)$ es un morfismo en $\mathrm{Mod}_k$.

$M(\lambda)$ tiene la forma

$$M(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} M(\lambda)/u & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$M(\alpha)/U$ un isomorfismo, la anterior forma matricial con respecto a una descomposición:

$$M(x) = U \oplus \ker M(\alpha) \qquad U \underset{M(\alpha)/U}{\cong} \operatorname{Im} M(\alpha)$$

$$M(y) = \operatorname{Im} M(\alpha) \oplus W$$

Tomando $M(\alpha)^* = \left(\begin{array}{c|c} (M(\alpha)/U)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) : M(y) \longrightarrow M(x)$ obtenemos:

$M(\alpha)M(\alpha)^*M(\alpha) = M(\alpha)$; $M(\alpha)^*M(\alpha)M(\alpha)^* = M(\alpha)^*$.

Por lo tanto existe un funtor $N : \mathcal{K}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Mod}_k$ tal que $N\Phi = M$, esto prueba nuestro resultado. //

Pasemos ahora a tratar el caso general.

3.1.6 <u>TEOREMA</u>. <u>Sea</u> $\mathcal{C}$ <u>una</u> $k$-<u>categoría pequeña y</u> $f$ <u>un</u> $\mathcal{C}$-<u>morfismo nonulo</u> $x \xrightarrow{f} y$ <u>con</u> $x \neq y$. <u>Sabemos entonces que</u> $\mathcal{C} = kC/I$ <u>con</u> $C$ <u>un carcaj e</u> $I$ <u>un ideal de</u> $kC$, <u>y que</u> $f = \bar{\alpha}$ <u>para alguna flecha</u> $x \xrightarrow{\alpha} y$ <u>de</u> $C$. <u>Sea</u> $\mathcal{K} = kC$ <u>y</u> $\Phi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}_\alpha$ <u>como antes</u>. <u>Sea</u> $I_\alpha$ <u>el ideal de</u> $\mathcal{K}_\alpha$ <u>generado por</u> $\Phi(I)$, <u>y</u> $(I_\alpha)^*$

su restricción a $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$. Entonces, las categorías $\mathcal{C}(f^*) := \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)/(I_\mathcal{L})^* \subseteq \mathcal{K}_\mathcal{L}/I_\mathcal{L} =: \mathcal{C}_f$ y el funtor inducido por $F$: $\bar{F}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_f$, satisfacen (b), (c) y (d) del teorema 3.1.1.

Demostración:

(b) Tómese $f^* = \mathcal{I}^*$.

(c) Se sigue del hecho de que $F(\mathcal{K})$ y $\mathcal{L}^*$ generan a $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ (como k-categoría).

(d) Supongamos que $\Psi_1: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{L}$ es un k-funtor de $\mathcal{C}$ en una k-categoría esqueléticamente pequeña $\mathcal{L}$ tal que existe un $\mathcal{L}$-morfismo $\lambda^*: \Psi'(y) \longrightarrow \Psi'(x)$ con $\Psi'(f)\lambda^*\Psi'(f) = \Psi'(f)$ y $\lambda^*\Psi'(f)\lambda^* = \lambda^*$.

Consideremos la composición de funtores

$$\Psi' = \left(\mathcal{K} \xrightarrow{\pi} \mathcal{K}/I \xrightarrow{\Psi_1} \mathcal{L}\right).$$

Por la demostración de 3.1.4, hay un funtor $\bar{\Psi}': \mathcal{K}_\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dd, bend right=60, "\Psi'"'] & \mathcal{K}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[ddl, bend left=60, "\bar{\Psi}'"] \\
\mathcal{K}/I \arrow[r, "\bar{\Phi}"] \arrow[d, "\Psi_I'"] & \mathcal{K}_1/I_1 \\
\mathcal{L} &
\end{tikzcd}$$

Como $\bar{\Psi}'(\Phi(I)) = \Psi'(I) = \Psi_I'\pi(I) = 0 \iff \bar{\Psi}'(I_1) = 0$,

entonces $\bar{\Psi}'$ induce un funtor $\bar{\Psi}_I' : \mathcal{A}_f \longrightarrow \mathcal{L}$.

Probemos ahora que $\bar{\Psi}_I'\bar{\Phi} = \Psi_I'$.

En efecto: $\bar{\Psi}_I'\bar{\Phi} = \Psi_I' \iff \underset{\bar{\Psi}'\Phi}{\underset{\|}{\bar{\Psi}_I'\bar{\Phi}\pi}} = \Psi_I'\pi = \Psi'$.

Entonces $\bar{\Psi}_I'$ determina un funtor $\bar{\Psi}_I' : \mathcal{A}(f^*) \longrightarrow \mathcal{L}$ con las propiedades requeridas. //

$\mathcal{A}_f$ será llamada la <u>categoría derivada de $\mathcal{A}$ con respecto a</u> $f$.

3.1.7 <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea</u> $\mathcal{A} = k\mathcal{C}/I$ <u>y</u> $f = \mathcal{I}$ <u>un</u> $\mathcal{A}$<u>-morfismo</u> <u>como en</u> 3.1.6. <u>Entonces</u> <u>el funtor restricción</u>.

$S : (\mathcal{A}_f, \mathrm{Mod}_k) \longrightarrow (\mathcal{A}, \mathrm{Mod}_k)$ <u>es un funtor denso</u>.

Demostración: Como en 3.1.5.

3.1.8 <u>LEMA</u>. <u>El funtor</u> $\bar{\mathfrak{F}}$ : $\mathcal{A} = kC/I \longrightarrow \mathcal{A}_f = kC_\angle/I_\angle$ <u>es una inmersión</u> (<u>i.e, fiel e inyectiva en objetos</u>).

Demostración: Sea $u: w_1 \longrightarrow w_2$ una aplicación no cero en en $\mathcal{A}$. Existe $u_0: w_1 \longrightarrow w_2$ en $kC$ tal que $\bar{u}_0 = u$.
Por otra parte, existe un objeto $M \in Mod(\mathcal{A})$ tal que $M(u) \neq 0$. Por 3.1.7 sabemos que hay un objeto $\bar{M} \in Mod(\mathcal{A}_f)$ tal que $\bar{M}\bar{\mathfrak{F}} = M$, por tanto $0 \neq M(\bar{u}_0) = \bar{M}(\bar{\mathfrak{F}}(\bar{u}_0))$, entonces $\bar{\mathfrak{F}}(u) \neq 0$, de donde se concluye que $\bar{\mathfrak{F}}$ es fiel. Evidentemente $\bar{\mathfrak{F}}$ es inyectivo en objetos. //

3.1.9 <u>Observación</u>. <u>Sea</u> $\mathcal{A} = kC/I$ y $J$ <u>un ideal de</u> $\mathcal{A}$. <u>Si</u> $f: J$ <u>es un</u> <u>$\mathcal{A}$-morfismo (como antes) tal que</u> $0 \neq \bar{f} = g$ <u>en</u> $\mathcal{A}/J$, <u>entonces</u> $(\mathcal{A}/J)_g \cong \mathcal{A}_f/J_\angle$ <u>en donde</u> $J_\angle$ <u>es el ideal en</u> $\mathcal{A}_f$ <u>generado por la imagen de</u> $J$ <u>en</u> $\mathcal{A}_f$.

Demostración: Si $J = J'/I \subseteq \mathcal{A} = kC/I$, entonces

$$\mathcal{A}/J = \frac{kC/I}{J'/I} \cong kC/J'.$$

De aquí derivando obtenemos la categoría

$$kC_\angle/(J')_\angle \cong \frac{kC_\angle/I_\angle}{(J')_\angle/I_\angle} = \mathcal{A}_f/J_\angle$$

$$\therefore (\mathcal{A}/J)_g \cong \mathcal{A}_f/J_\angle.$$

## §3.2 Una k-base natural para $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$.

Supondremos primeramente el caso libre $\tilde{\mathcal{K}} = kC$, con carcaj y $x \xrightarrow{\mathcal{L}} y$ una flecha no lazo en $C$.

Como sabemos tenemos una inmersión $\Phi : \tilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{L}^*) \subset \mathcal{K}_{\mathcal{L}}$.

Por definición las categorías $\tilde{\mathcal{K}}$ y $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ tienen los "mismos" objetos.

Identificaremos a $\tilde{\mathcal{K}}$ con su imagen $\underline{\tilde{\mathcal{K}}}$: entonces $|\tilde{\mathcal{K}}| = \{$vértices de $C$ distintos de $x, y\} \cup \{\underline{x}, \underline{y}\}$.

En esta sección veremos con más detalle las relaciones entre ambas categorías.

<u>Definición</u>. Sea $I$ un ideal de una k-categoría $\mathcal{C}$ y $T$ un conjunto de morfismos de $I$. Diremos que $T$ es una <u>k-base para</u> $I$ si para cualesquier dos objetos $a, b \in \mathcal{C}$ se tiene que $T(a,b) = I(a,b) \cap T$ es una k-base del espacio vectorial $I(a,b)$. Diremos que $T$ forma una base de $\mathcal{C}$ si en la definición anterior $I = \mathcal{C}$.

Sea $C^*$ el carcaj que se obtiene de $C$ adjuntando la flecha extra $\alpha_0^* : y \longrightarrow x$ .

Con el objeto de obtener una $k$-base para $\mathcal{K}(\Delta^*)$, consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{$caminos $\mu$ de $C^* \mid \alpha\alpha_0^*\alpha, \alpha_0^*\alpha\alpha_0^* \nmid \mu\}$ ($\cup$ los caminos triviales).

Pongamos $\underline{\alpha}_0^* := \alpha^*$ .

Si $\mu = \beta_s \ldots \beta_1$ es un camino de $C^*$, ponemos $\underline{\mu} := \underline{\beta}_s \ldots \underline{\beta}_1$ (la composición en $\mathcal{K}(\Delta^*)$).

Denotemos por $\underline{\mathcal{A}}$ al conjunto formado por los morfismos $\underline{\mu}$, $\mu \in \mathcal{A}$.

Desde este momento hasta el final de esta sección nos concentraremos principalmente en la prueba de la siguiente :

3.2.1 PROPOSICION. $\underline{\mathcal{A}}$ forma una $k$-base de la categoría $\mathcal{K}(\Delta^*)$.

Para esto será de utilidad considerar al conjunto $\mathcal{P} := \{\mu \in \mathcal{A} \mid \alpha\alpha_0^*, \alpha_0^*\alpha \nmid \mu\}$.

<u>Definición</u>. Si $\mu: a \rightsquigarrow b$ es un camino orientado de $C^*$, definimos por recurrencia sobre la longitud de $\mu$ el conjunto $\mathcal{L}(\mu)$ de caminos de $C_1$ que derivan de $\mu$:

(i) Si $\mu = \varepsilon_a$ es un camino trivial de $C^*$:

$$\mathcal{L}(\varepsilon_a) = \begin{cases} \{\varepsilon_a\} & \text{si } a \notin \{x, y\} \\ \{\varepsilon_a, \varepsilon_z\} & \text{si } a \in \{x, y\} \end{cases}.$$

(ii) Si $\mu$ es una flecha de $C^*$:

$$\mathcal{L}(\mu) = \begin{cases} \{\mu^{(0)}\} & \text{si } a, b \notin \{x, y\} \\ \{\mu^{(0)}, \mu^{(1)}\} & \text{si } a \notin \{x, y\},\ b \in \{x, y\} \\ \{\mu^{(1)}, \mu^{(0)}\} & \text{si } a \in \{x, y\},\ b \notin \{x, y\}. \\ \{\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}\} & \text{si } a, b \in \{x, y\} \text{ y } \mu \notin \{\alpha, \alpha^*\} \\ \{\varepsilon_z\} & \text{si } \mu \in \{\alpha, \alpha^*\} \end{cases}$$

(iii) Si $\mu$ tiene longitud $\ell > 1$ y $\mathcal{L}(\rho)$ ha sido definido para caminos $\rho$ de $C^*$ de longitud $\ell - 1$, descomponemos $\mu = \beta\rho$ con $\beta$ flecha y $\rho$ de longitud $\ell - 1$, tenemos:

$\mathcal{L}(\mu) = \{\mu'$ camino de $C_1 \mid \mu' = \beta'\rho'$ para alguna flecha

$\beta' \in \mathcal{L}(\beta), \delta' \in \mathcal{L}(\delta) \}$.

(28) En $\mathcal{K}_\lambda$ sean

$$x \underset{\pi(\underline{x},x)}{\overset{\sigma(x,\underline{x})}{\rightleftarrows}} \underline{x} \underset{\sigma(z,\underline{x})}{\overset{\pi(\underline{x},z)}{\rightleftarrows}} z \quad , \quad y \underset{\pi(\underline{y},y)}{\overset{\sigma(y,\underline{y})}{\rightleftarrows}} \underline{y} \underset{\sigma(z,\underline{y})}{\overset{\pi(\underline{y},z)}{\rightleftarrows}} z$$

las proyecciones y las inyecciones canónicas.

Denotemos:

$e_z := \sigma(z,\underline{x})\pi(\underline{x},z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^*\underline{\alpha}$ ,

$e_x := \sigma(x,\underline{x})\pi(\underline{x},x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{\underline{x}} - \alpha^*\underline{\alpha}$ ,

$e'_z := \sigma(z,\underline{y})\pi(\underline{y},z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\alpha}\alpha^*$ ,

$e_y := \sigma(y,\underline{y})\pi(\underline{y},y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1_{\underline{y}} - \underline{\alpha}\alpha^*$ .

(En general, si $b = b_1 \oplus \cdots \oplus b_n$, $e_{b_i} := \sigma(b_i,b)\pi(b,b_i)$; si $n=1$, esta notación aún tiene sentido).

Para facilidad de notación mientras no haya ambigüedad, denotaremos también a $e'_z$ por $e_z$.

<u>Definición.</u> Sea $\mathcal{U} = (x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} x_m)$ un camino de $C^*$ (con $\beta_i$ flecha), el índice $i \in \{0,1,\ldots,m\}$

es *admisible en* $\mathcal{M}$ si: $x_i \in \{x, y\}$ y además:

$$\begin{cases} i=0,\ \beta_1 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\} \text{ o } m=0;\ \text{o} \\ i=m,\ \beta_m \notin \{\alpha, \alpha_0^*\} \text{ o } m=0;\ \text{o} \\ i \in \{1,\dots,m-1\} \text{ y } \{\beta_{i-1}, \beta_i\} \cap \{\alpha, \alpha_0^*\} = \phi \end{cases}.$$

*Definiciones.* (i) Sea $\mathcal{M} = (x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow x_{m-1} \xrightarrow{\beta_m} x_m)$ un camino de $C^*$, una *inserción* $\underline{e}$ de $\mathcal{M}$ es una sucesión $\{e_j\}_{j=0,\dots,m}$ de idempotentes $e_j : \underline{x}_j \longrightarrow \underline{x}_j$, donde:

$$e_j \in \begin{cases} \{id_{\underline{x}_j}\} \text{ si } j \text{ no es admisible}; \\ \{e_x, e_z\} \text{ si } j \text{ es admisible y } x_j = x; \\ \{e_y, e_z\} \text{ si } j \text{ es admisible y } x_j = y \end{cases}.$$

(ii) Si $\mathcal{M}$ es un camino de $C^*$ y $\underline{e}$ es una inserción de $\mathcal{M}$, ponemos $\tau_{\underline{e}}(\mathcal{M}) := e_m \beta_m e_{m-1} \dots \beta_1 e_0$ (un morfismo en $\mathcal{K}(\mathcal{A}^*)(\underline{x}_0, \underline{x}_m)$).

(iii) Denotemos por $I(\mathcal{M})$ el conjunto de inserciones de $\mathcal{M}$, y por $R(\mathcal{M})$ al conjunto $\{\tau_{\underline{e}}(\mathcal{M}) / \underline{e} \in I(\mathcal{M})\}$.

3.2.2 LEMA: Sea $\mu\in\mathcal{A}$. Supongamos que $\mu=\delta_2\rho\delta_1$ donde $\delta_1,\delta_2\in\{\alpha,\alpha^*\}$ o bien son triviales, $\rho\in\mathcal{A}$, y $\rho$ no comienza ni termina por $\alpha$ o $\alpha^*$. Entonces tenemos dos biyecciones $G$ y $F$ dadas por

$$G:\mathcal{I}(\mu)\longrightarrow R(\mu)\ ;\ F:\mathcal{L}(\mu)\longrightarrow R(\mu)$$

$$\underline{e}\longmapsto \tau_{\underline{e}}(\mu) \qquad (v\xrightarrow{\mu'}w)\longmapsto \underline{\delta_2}\tau(w,\underline{\delta_2^-})\mu'\pi(\underline{\delta_1^+},v)\underline{\delta_1}$$

(Aquí: $\delta_1^+(\delta_2^-)$ denota el vértice terminal (inicial) de $\delta_1$ (respectivamente $\delta_2$)).

Demostración: Por inducción sobre la longitud de $\mu: x_0\rightsquigarrow x_m$.

Caso $m=0$:

$$\mathcal{L}(\mu)=\begin{cases}\{\tau_{x_0}\} & \text{si } x_0\notin\{x,y\}\\ \{\tau_a,\tau_z\} & \text{si } \underline{x}_0=a\oplus z\in\{\underline{x},\underline{y}\}.\end{cases}$$

$$\mathcal{I}(\mu)=\begin{cases}\{(id\underline{x}_0)\} & \text{si } x_0\notin\{x,y\}\\ \{(e_a),(e_z)\} & \text{si } \underline{x}_0=a\oplus z\in\{\underline{x},\underline{y}\}.\end{cases}$$

$$R(\mu)=\begin{cases}\{id\underline{x}_0\} & \text{si } x_0\notin\{x,y\}\\ \{e_a,e_z\} & \text{si } x_0=a\oplus z\in\{\underline{x},\underline{y}\}.\end{cases}$$

Entonces en este caso, $G$ y $F$ son biyectivas.

Caso $m=1$.: Aquí $x_0 \xrightarrow{\mu} x_1$ es una flecha y tenemos 4 subcasos:

(1) $\mu \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

(2) $x_0, x_1 \notin \{x, y\}$

(3) $x_0, x_1 \in \{x, y\}$, pero $\mu \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$

(4) $\begin{cases} x_0 \in \{x, y\} \\ x_1 \notin \{x, y\} \end{cases}$ o $\begin{cases} x_0 \notin \{x, y\} \\ x_1 \in \{x, y\} \end{cases}$.

Analicemos ahora cada uno de estos subcasos:

(1) $\mu \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$: Aquí 0, 1 ambos son no admisibles en $\mu$.

Por tanto: $I(\mu) = \{(id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1})\}$, $R(\mu) = \{\underline{\mu}\}$,

$\mathcal{L}(\mu) = \{\tau_z\}$.

$\therefore$ G y F son biyectivas.

(2) $x_0, x_1 \notin \{x, y\}$: Nuevamente, 0 y 1 son no admisibles en $\mu$.

Por lo tanto: $I(\mu) = \{(id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1})\}$, $R(\mu) = \{\underline{\mu}\}$,

$\mathcal{L}(\mu) = \{\mu^{(0)}\}$, y

$F(\mu) = \tau_{\underline{x}_1} \Pi(x_1, \underline{x}_1) \mu^{(0)} \Pi(\underline{x}_0, x_0) \tau_{\underline{x}_0} = \mu^{(0)} = \underline{\mu}$.

(3) $x_0, x_1 \in \{x, y\}$, pero $\mathcal{M} \notin \{\mathcal{L}, \mathcal{L}_0^*\}$ : Aquí $0, 1$ son índices admisibles en $\mathcal{M}$.

Supongamos que $\underline{x}_0 = a_1 \oplus a_2$, $\underline{x}_1 = b_1 \oplus b_2$ con $a_1, b_1 \in \{x, y\}$, $b_2 = a_2 = z$. Entonces tenemos:

$$I(\mathcal{M}) = \left\{ \underline{c}_{11} = (e_{a_1}, e_{b_1}), \underline{c}_{21} = (e_{a_1}, e_{b_2}), \underline{c}_{12} = (e_{a_2}, e_{b_1}), \underline{c}_{22} = (e_{a_2}, e_{b_2}) \right\}$$

(recuérdese que por ejemplo: $e_{a_1} = \nabla(a_1, \underline{x}_0)\pi(\underline{x}_0, a_1)$).

$$\begin{cases}
\gamma_{\underline{c}_{11}}(\mathcal{M}) = \nabla(b_1, \underline{x}_1)\underbrace{\pi(\underline{x}_1, b_1)\mathcal{M}\nabla(a_1, \underline{x}_0)}_{\mathcal{M}^{(0)}}\pi(\underline{x}_0, a_1) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\gamma_{\underline{c}_{12}}(\mathcal{M}) = \nabla(b_1, \underline{x}_1)\underbrace{\pi(\underline{x}_1, b_2)\mathcal{M}\nabla(a_2, \underline{x}_0)}_{\mathcal{M}^{(2)}}\pi(\underline{x}_0, a_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
\gamma_{\underline{c}_{22}}(\mathcal{M}) = \nabla(b_2, \underline{x}_1)\underbrace{\pi(\underline{x}_1, b_2)\mathcal{M}\nabla(a_2, \underline{x}_1)}_{\mathcal{M}^{(3)}}\pi(\underline{x}_1, a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{(3)} \end{pmatrix}; \\
\gamma_{\underline{c}_{21}}(\mathcal{M}) = \nabla(b_2, \underline{x}_1)\pi(\underline{x}_1, b_2)\mathcal{M}\nabla(a_1, \underline{x}_0)\pi(\underline{x}_0, a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{M}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}.
\end{cases}$$

$$\therefore R(\mathcal{M}) = \left\{ \underset{F(\mathcal{M}^{(0)})}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} \mathcal{M}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{F(\mathcal{M}^{(1)})}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{M}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{F(\mathcal{M}^{(2)})}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}, \underset{F(\mathcal{M}^{(3)})}{\underset{\|}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}^{(3)} \end{pmatrix}}} \right\}.$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{M}^{(1)}, \mathcal{M}^{(2)}, \mathcal{M}^{(3)}\}.$$

$\therefore$ G y F son biyectivas.

(4) Análogo al subcaso (3).

<u>Paso inductivo</u>: $\mathcal{J}'$ tiene longitud $m>1$:

(a) Veamos primero que $F: \mathcal{L}'(\mathcal{J}') \longrightarrow \mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_\mathcal{L}$ es inyectiva y que $F(\mathcal{J}')$ nunca es cero. (Nótese que la expresión $\mathcal{J}' = \delta_2 \zeta \delta_1$ del enunciado es única salvo en el caso $\mathcal{L}$ (o $\mathcal{L}^*$) donde $\mathcal{L}: \mathcal{L}\zeta\zeta = \zeta\zeta\mathcal{L}$ (sim), pero se verifica en este caso que $F_{\mathcal{L}\zeta\zeta} = F_{\zeta\zeta\mathcal{L}}$).

En efecto. Supongamos que $F(v \xrightarrow{\mathcal{J}'} w) = F(v' \xrightarrow{\mathcal{J}''} w')$; entonces $\underline{\delta}_2 \Gamma(w, \underline{\delta}_2^-) \mathcal{J}' \pi(\underline{\delta}_1^+, v) \underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 \Gamma(w, \underline{\delta}_2^-) \mathcal{J}'' \pi(\underline{\delta}_1^+, v) \underline{\delta}_1$. (*)

Como $\underline{\delta}_2 \in \{\underline{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*, id\}$, entonces $\pi(\underline{\delta}_2^+, w) \underline{\delta}_2 = \pi(\underline{\delta}_2^-, w)$ (pues $w = z$ si $\delta_2$ no es trivial).

Similarmente: $\underline{\delta}_1 \Gamma(v, \underline{\delta}_1^-) = \Gamma(v, \underline{\delta}_1^+)$.

Por lo tanto, componiendo (*) $\begin{cases} \text{con } \pi(\underline{\delta}_2^+, w) \text{ por la izquierda} \\ \text{con } \Gamma(v, \underline{\delta}_1^-) \text{ por la derecha} \end{cases}$

obtenemos $\mathcal{J}' = \mathcal{J}''$.

$\therefore$ $F$ es inyectiva. Además el mismo argumento muestra que $F(\mathcal{J}') \neq 0$.

(b) Supongamos ahora que el lema se cumple para caminos de longitud $< m$.

Escribamos $\mathcal{U} = \delta_2 \, \rho \, \delta_1 : x_0 \xrightarrow{\delta_1} x_1 \xrightarrow{\rho} x_{m-1} \xrightarrow{\delta_2} x_m$ como en el enunciado del lema:

Por probar $\begin{cases} F \text{ está bien definida (es decir, } F(\mathcal{Q}(\mathcal{U})) \subseteq R(\mathcal{U})) \\ F \text{ es supráyectiva} \\ G \text{ es inyectiva.} \end{cases}$

<u>Caso</u> A: $\delta_1$ no es trivial: (por tanto $\delta_1 \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$).

Aquí la longitud de $\delta_2 \rho$ es $m-1$.

$\therefore \begin{cases} F_1 : \mathcal{Q}(\delta_2 \rho) \longrightarrow R(\delta_2 \rho) \\ G_1 : I(\delta_2 \rho) \longrightarrow R(\delta_2 \rho) \end{cases}$

son biyectivas (por hipótesis de inducción).

"F está bien definida"

En efecto. Si $v \xrightarrow{\underline{d}'} w \in \mathcal{Q}(\delta_2 \rho \delta_1) \subseteq \mathcal{Q}(\delta_2 \rho)$,

entonces $0 \neq F(\mathcal{U}') = \underline{\delta}_2 T(w, \underline{\delta}_2^-) \mathcal{U}' \pi(\underline{\delta}_1^+, v) \underline{\delta}_1 = F_1(\mathcal{U}') \underline{\delta}_1$,

por lo tanto hay una inserción $\underline{e}' = (e_1, \ldots, e_m) \in I(\delta_2 \rho)$

tal que $F_1(\mathcal{U}') = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho)$.

$\therefore 0 \neq \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho) \underline{\delta}_1 = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho) e_0 \underline{\delta}_1$.

Por lo tanto $e_1\underline{\delta}_1 \neq 0$ y $e_1\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_1$.

Por otro lado, $\underline{e} = (id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1}, e_2, \ldots, e_m) \in I(\mathcal{M})$ (pues 0, 1 no son admisibles) y $\tau_{\underline{e}}(\delta_2 \rho \delta_1) = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho)\underline{\delta}_1 = F(\mathcal{M})$.

Así pues, $F$ está bien definida.

"$F$ es suprayectiva"

En efecto: Sea $\underline{e} \in I(\delta_2 \rho \delta_1)$, entonces $\underline{e} = (id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1}, e_2, \ldots, e_m)$

Obsérvese que $(id_{\underline{x}_1}, e_2, \ldots, e_m) \notin I(\delta_2 \rho)$, ya que 1 es un índice admisible.

Sea $e_1$ el idempotente no trivial tal que $e_1\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_1$ (es decir, $e_1 = e_2$) y tomemos $\underline{e}' = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$.

$$\therefore \underline{e}' \in I(\delta_2 \rho).$$

Luego por hipótesis de inducción, hay un camino $\mathcal{M}_1$ $w \in \mathcal{C}(\delta_2 \rho)$ tal que $F_1(\mathcal{M}_1) = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho)$.

$\therefore \tau_{\underline{e}}(\delta_1 \rho \delta_1) = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2 \rho)\underline{\delta}_1 = F_1(\mathcal{M}_1)\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_2 \pi(w, \underline{\delta}_2^-)\mathcal{M}_1 \pi(\underline{\delta}_1^+, u)\underline{\delta}_1$, donde $u$ es $z$ o el otro sumando $\in \{x, y\}$.

Si $u \neq z$, entonces $\pi(\underline{\delta}_1^+, u)\underline{\delta}_1 = 0$ y consecuentemente $F_1(\mathcal{M}_1)\underline{\delta}_1 = 0$.

Pero $F_1(\mathcal{M}_1) = F_1(\mathcal{M}_1)e_1 = F_1(\mathcal{M}_1)\underline{\delta}_1\underline{\delta}_1^*$ (aquí $(\alpha^*)^* = \alpha$ por definición) $= 0$, lo cual no es cierto.

$\therefore\ \mathcal{M} = \mathcal{I}$ y $\mathcal{M}_1 \in \mathcal{L}(\delta_2\rho\delta_1)$ y $\tau_{\underline{e}}(\delta_2\rho\delta_1) = F(\mathcal{M}_1)$.

$\therefore$ F es suprayectiva.

"G es inyectiva"

En efecto. Sean $\underline{e} = (id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1}, e_2, \ldots, e_m)$ y $\underline{f} = (id_{\underline{x}_0}, id_{\underline{x}_1}, f_2, \ldots, f_m)$ en $I(\delta_2\rho\delta_1)$. Nótese que 0, 1 no son admisibles.

Supongamos ahora que $\tau_{\underline{e}}(\delta_2\rho\delta_1) = \tau_{\underline{f}}(\delta_2\rho\delta_1)$.

Sea $e_1$ el idempotente tal que $e_1\underline{\delta}_1 = \underline{\delta}_1$.

por lo tanto $\left\{\begin{array}{l} \underline{e}' := (e_1, e_2, \ldots, e_m) \\ \underline{f}' := (e_1, f_2, \ldots, f_m) \end{array}\right. \in I(\delta_2\rho)$.

$\therefore\ (\square)\ \left\{\begin{array}{l} \tau_{\underline{e}}(\delta_2\rho\delta_1) = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2\rho)\underline{\delta}_1 \\ \quad\quad " \\ \tau_{\underline{f}}(\delta_2\rho\delta_1) = \tau_{\underline{f}'}(\delta_2\rho)\underline{\delta}_1 \end{array}\right.$ y $\left\{\begin{array}{l} \tau_{\underline{e}'}(\delta_2\rho) = \tau_{\underline{e}'}(\delta_2\rho)e_1 \\ \tau_{\underline{f}'}(\delta_2\rho) = \tau_{\underline{f}'}(\delta_2\rho)e_1 \end{array}\right.$

Multiplicando ahora $(\square)$ por $\underline{\delta}_1^*$ a la derecha, tenemos: $\tau_{\underline{e}'}(\delta_2\rho) = \tau_{\underline{f}'}(\delta_2\rho)$. De aquí como $G_1$ es inyectiva, entonces $\underline{e}' = \underline{f}'$, y consecuentemente $\underline{e} = \underline{f}$.

$\therefore$ G es inyectiva.

Caso B: $\delta_2$ no es trivial:

Es análogo al caso (A).

Caso C: $\delta_1$ y $\delta_2$ son ambos triviales:

Aquí, $\mu = \beta\lambda$ con $\lambda$ camino no trivial de $C^*$ que no comienza con $\mathcal{L}$ o $\mathcal{L}_0^*$ y $\beta$ es una flecha $\notin \{\mathcal{L}, \mathcal{L}_0^*\}$.

Entonces tenemos 2 subcasos:

Subcaso C-1: la última flecha $\delta$ de $\lambda$ está en $\{\mathcal{L}, \mathcal{L}_0^*\}$:

Entonces $\mu: x_0 \xrightarrow{\lambda_1} x_{m-2} \xrightarrow{\delta} x_{m-1} \xrightarrow{\beta} x_m$.

Por hipótesis de inducción $\begin{cases} F_1: \mathcal{L}(\delta\lambda_1) \longrightarrow R(\delta\lambda_1) \\ G_1: I(\delta\lambda_1) \longrightarrow R(\delta\lambda_1) \end{cases}$ son biyectivas.

"F está bien definida"

En efecto. Sea $v \xrightarrow{\mu'} w \in \mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(\beta\delta\lambda_1)$.

Entonces $\mu' = v \xrightarrow{\lambda'} u \xrightarrow{\beta'} w$ donde $\beta' \in \mathcal{L}(\beta)$, $\lambda' \in \mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}(\delta\lambda_1)$.

$F(\mu') = \sigma(w, \underline{x}_m)\mu'\pi(\underline{x}_0, v) = \sigma(w, \underline{x}_m)\beta'\lambda'\pi(\underline{x}_0, v) =$

$$= \sigma(w, \underline{x}_m)\underbrace{\pi(\underline{x}_m, w)\underline{\beta}\,\sigma(z, \underline{x}_{m-1})}_{\beta'}\lambda'\pi(\underline{x}_0, v).$$

Pero $\mu' \in \mathcal{L}(\delta\lambda_1)$ y $0 \neq F_1(\lambda') = \underbrace{\underline{\delta}\,\sigma(\mu, \underline{x}_{m-2})}_{\overset{\shortparallel}{\sigma(z, \underline{x}_{m-1})}}\lambda'\pi(\underline{x}_0, v)$,

$$\begin{tikzcd} z = \mu \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \underline{x}_{m-2} \arrow[d, "\underline{\delta}"] \\ & \underline{x}_{m-1} \end{tikzcd}$$

$\therefore F(\mu') = e_w \beta F_1(\lambda')$. Luego como $F_1$ está bien definida, hay una inserción $\underline{e}' = (e_0, e_1, \dots, e_{m-1}) \in I(\delta\lambda_1)$ tal que $F_1(\lambda') = \tau_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1)$.

$\therefore F(\mu') = e_w \beta \tau_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1)$.

Nótese ahora que $\underline{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{m-1}, e_w) \in I(\beta\delta\lambda_1)$ (pues si $x_m \in \{x, y\}$, como $\beta \notin \{\alpha, \alpha^*\}$, $m$ es admisible y por tanto $id \neq e_w$ es uno de los idempotentes que se puede poner. Si $x_m \notin \{x, y\}$, $m$ no es admisible y entonces ponemos $e_w = id$.)

Así pues, $F(\mu') = \tau_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda_1)$.

$\therefore F$ está bien definida.

"$F$ es suprayectiva"

En efecto. Sea $\tau_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda_1) \in R(\mu)$, con $\underline{e} = (e_0, \dots, e_m) \in I(\mu)$. Como $m-1$ no es admisible ni en $\mu$ ni en $\delta\lambda_1$, entonces

$\underline{e}' = (e_1, \ldots, e_{m-1}) \in I(\delta\lambda_1)$.

$\therefore T_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda) = e_m \beta T_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1)$. Pero como $F_1$ es suprayectiva, entonces existe $v \xrightarrow{\lambda'} z \in \mathcal{D}(\delta\lambda_1)$ tal que $T_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1) = F_1(\lambda')$.

$$\therefore T_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda) = e_m\beta F_1(\lambda') = \Gamma(w,\underline{x}_m)\underbrace{\pi(\underline{x}_m,w)\beta\Gamma(z,\underline{x}_{m-1})}\lambda'\pi(\underline{x}_0,v).$$

Pero $\pi(\underline{x}_m,w)\beta\Gamma(z,\underline{x}_{m-1}) := (z \xrightarrow{\beta'} w)$ = flecha de $C_\alpha$, donde $w$ está determinado por $e_m = e_w = \Gamma(w,\underline{x}_m)\pi(\underline{x}_m,w)$.

$\therefore T_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda) = \Gamma(w,\underline{x}_m)\beta'\lambda'\pi(\underline{x}_0,v) = F(\beta'\lambda')$, allí $\beta'\lambda' \in \mathcal{D}(\beta\lambda)$.

$\therefore F$ es suprayectiva.

"$G$ es inyectiva".

En efecto. Sean $\underline{e} = (e_0, \ldots, e_m)$, $\underline{f} = (f_0, \ldots, f_m) \in I(\beta\delta\lambda_1)$. Supongamos que $T_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda_1) = T_{\underline{f}}(\beta\delta\lambda_1)$. Como antes, $\underline{e}' = (e_0, \ldots, e_{m-1})$, $\underline{f}' = (f_0, \ldots, f_{m-1}) \in I(\delta\lambda_1)$ y $e_m\beta T_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1) = T_{\underline{e}}(\beta\delta\lambda_1) = T_{\underline{f}}(\beta\delta\lambda_1) = f_m\beta T_{\underline{f}'}(\delta\lambda_1)$.

Si $e_m \neq f_m$, al multiplicar por $e_m$ ambos lados, el término a la derecha de la igualdad se anula pero el de la izquierda no pues $F(\mu) \neq 0$ $\forall \mu$.

$\therefore e_m = f_m$.

Tambien probamos ya que: $F(\beta'\lambda') = F(\beta''\lambda'')$ con

$$\begin{cases} F_1(\lambda') = T_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1) \\ F_1(\lambda'') = T_{\underline{f}'}(\delta\lambda_1) \end{cases}$$ con $\beta', \beta''$ (saliendo de $z$ determinados

por $\underline{e}, \underline{f}$ respectivamente) $\in \mathcal{D}(\beta)$; $\lambda', \lambda'' \in \mathcal{D}(\lambda)$.

Ahora como $F$ es inyectiva, entonces $\beta'\lambda' = \beta''\lambda''$, y por lo tanto $\beta' = \beta''$ y $\lambda' = \lambda''$.

$\therefore G_1(\underline{e}') = T_{\underline{e}'}(\delta\lambda_1) = T_{\underline{f}'}(\delta\lambda_1) = G_1(\underline{f}')$. Pero como $G_1$ es inyectiva, entonces $\underline{e}' = \underline{f}'$, y en consecuencia $\underline{e} = \underline{f}$.

$\therefore$ $G$ es inyectiva.

<u>Subcaso</u> C-2: la última flecha de $\lambda$ no está en $\{\alpha, \alpha_0^*\}$:

Entonces $\mu: x_0 \xrightarrow{\lambda} x_{m-1} \xrightarrow{\beta} x_m$ y $\begin{cases} F_1 : \mathcal{D}(\lambda) \longrightarrow R(\lambda) \\ G_1 : I(\lambda) \longrightarrow R(\lambda) \end{cases}$

son biyectivas.

"$F$ está bien definida"

En efecto. Si $\mu' \in \mathcal{D}(\beta\lambda)$, entonces $\mu' = (v \xrightarrow{\lambda'} u \xrightarrow{\beta'} w)$

con $\begin{cases} \lambda' \in \mathcal{D}(\lambda) \\ \beta' \in \mathcal{D}(\beta) \end{cases}$

$\therefore F(\mu') = \Gamma(w, \underline{x}_m)\mu'\Pi(\underline{x}_0, v) = \Gamma(w, \underline{x}_m)\beta'\lambda'\Pi(\underline{x}_0, v) =$

$= \underbrace{\Gamma(w, \underline{x}_m)\beta'\Pi(\underline{x}_{m-1}, u)}_{F_1'(\beta')}\ \underbrace{\Gamma(u, \underline{x}_{m-1})\lambda'\Pi(\underline{x}_0, v)}_{F_1(\lambda')}$.

pero como $F_1'$ y $F_1$ están bien definidas, entonces hay inserciones $\begin{cases} \underline{e}' = (e_{m-1}, e_m) \in I(\beta) \\ \underline{f}' = (f_0, \dots, f_{m-1}) \in I(\lambda) \end{cases}$ tal que $\begin{cases} F_1'(\beta') = T_{\underline{e}'}(\beta) \\ F_1(\lambda') = T_{\underline{f}'}(\lambda) \end{cases}$

$\therefore F(\mu') = T_{\underline{e}'}(\beta)T_{\underline{f}'}(\lambda) = T_{\underline{e}}(\beta\lambda) = T_{\underline{e}}(\mu)$ con $\underline{e} =$ $= (f_0, \dots, f_{m-1}, e_m) \in I(\beta\lambda)$ (pues si $e_{m-1} \neq f_{m-1}$, $F(\mu') = 0$, lo cual no es posible).

$\therefore F$ está bien definida.

"$F$ es suprayectiva".

En efecto. Si $\underline{e} = (e_0, \dots, e_m) \in I(\beta\lambda)$, entonces $\underline{e}' = (e_0, \dots, e_{m-1}) \in I(\lambda)$ y $T_{\underline{e}}(\beta\lambda) = e_m\beta e_{m-1} T_{\underline{e}'}(\lambda)$.

Como $F_1$ es suprayectiva, entonces existe $v \xrightarrow{\lambda'} u \in \mathcal{L}(\lambda)$ tal que $F_1(\lambda') = T_{\underline{e}'}(\lambda)$. $e_m = e_w, w \in |C_j|$.

$\therefore T_{\underline{e}}(\beta\lambda) = e_m\beta e_{m-1} F_1(\lambda') = \Gamma(w, \underline{x}_m)\underbrace{\Pi(\underline{x}_m, w)\beta\Gamma(u, \underline{x}_{m-1})}_{u \xrightarrow{\beta'} w \text{ flecha de } C_2 \text{ en } \mathcal{L}(\beta)}\lambda'\Pi(\underline{x}_0, v) =$

$= \nabla(w, \underline{x}_m)\beta'\lambda'\pi(\underline{x}_0, v) = F(\beta'\lambda')$ con $\beta'\lambda' \in \mathcal{D}(\beta\lambda)$.

$\therefore$ F es suprayectiva.

" G es inyectiva ".

En efecto. Sean $\underline{e} = (e_0, \ldots, e_m)$, $\underline{f} = (f_0, \ldots, f_m) \in I(\mu)$.

Entonces $\underline{e}' = (e_0, \ldots, e_{m-1})$, $\underline{f}' = (f_0, \ldots, f_{m-1}) \in I(\lambda)$.

Ahora si $\gamma_{\underline{e}}(\mu) = \gamma_{\underline{f}}(\mu)$, entonces tenemos:

$0 \neq F(\text{algo}) = e_m\beta\gamma_{\underline{e}'}(\lambda) = f_m\beta\gamma_{\underline{f}'}(\lambda)$, por lo tanto $e_m = f_m$. Como antes esto implica: $F(\beta'\lambda') = F(\beta''\lambda'')$

con $\begin{cases} F_1(\lambda') = \gamma_{\underline{e}'}(\lambda) \\ F_1(\lambda'') = \gamma_{\underline{f}'}(\lambda) \end{cases}$, donde $\begin{cases} \beta', \beta'' \in \mathcal{D}(\beta) \\ \lambda', \lambda'' \in \mathcal{D}(\lambda) \end{cases}$.

Como F es inyectiva, entonces $\beta'\lambda' = \beta''\lambda''$ y en consecuencia $\lambda' = \lambda''$.

Así pues, $\gamma_{\underline{e}'}(\lambda) = \gamma_{\underline{f}'}(\lambda)$.

Pero como G es inyectiva, entonces $\underline{e}' = \underline{f}'$ y por lo tanto $\underline{e} = \underline{f}$.

$\therefore$ G es inyectiva. //

3.2.3 <u>LEMA</u>. $\underline{A}$ k-<u>genera</u> <u>a</u> $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ ($T := \bigcup\{R(\mu) \mid \mu \in \mathcal{X}\}$ k-<u>genera</u> <u>a</u> $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$).

Demostración: Sea $f: a \longrightarrow b$ un morfismo de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$. Por lo tanto $f = (f^{(0)}), \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \end{pmatrix}, (f^{(0)}, f^{(1)}), \begin{pmatrix} f^{(0)} & f^{(2)} \\ f^{(1)} & f^{(3)} \end{pmatrix}$ para algunos morfismos $f^{(i)}$ de $kC_{\mathcal{L}}$ (dependiendo de si $a, b \notin \{\underline{x}, \underline{y}\}$; $a \notin \{\underline{x}, \underline{y}\} \ni b$; $a \in \{\underline{x}, \underline{y}\} \not\ni b$, $a, b \in \{\underline{x}, \underline{y}\}$).

Luego basta ver que cada $f \in F := \left\{ (f^{(0)}), \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f^{(1)} \end{pmatrix}, (f^{(0)}, 0), (0, f^{(1)}), \begin{pmatrix} 0 & f^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f^{(1)} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f^{(3)} \end{pmatrix} \;\middle|\; f^{(i)} \text{ es camino de } C_{\mathcal{L}} \right\}$ está k-generado por $\underline{A}(T)$.

Primeramente probaremos el siguiente:

<u>Lema</u>: Para cada camino $\mu'$ de $C_{\mathcal{L}}$, existe $\mu \in \mathcal{X}$ tal que $\mu' \in \mathcal{D}(\mu)$.

Demostración: Probaremos un poco más:

<u>Afirmación</u>. Para cada camino $\mu'$ de $C_{\mathcal{L}}$, existe $\mu \in \mathcal{X}$ tal que $\mu$ no comienza ni termina por $\mathcal{L}_0 \setminus \mathcal{L}^*$ y $\mu' \in \mathcal{D}(\mu)$.

En efecto. la prueba la haremos por inducción sobre la longitud $m$ de $\mu'$:

$\underline{m=0}$: Entonces $\mu' = \tau_a$, y $\mu := \begin{cases} \tau_a & \text{si } a \neq z \\ \tau_x & \text{si } a = z \end{cases}$ sirve.

$\underline{m=1}$: Entonces $\mu' = \beta^{(i)}$ para alguna flecha $\beta$ de $C$ (por definición de $C_{\mathcal{L}}$), $i \in \{0,1,2,3\}$.

$\therefore$ $\mu := \beta$ sirve.

$\underline{m > 1}$: Supongamos que hemos probado la afirmación para caminos $\rho'$ de longitud $m-1$ y probemoslo para $\mu'$.

Expresemos $\mu' = \beta' \rho'$ con $\beta'$ flecha y $\rho'$ camino de longitud $m-1$. Entonces $\beta' \in \mathcal{D}(\beta)$ y $\rho' \in \mathcal{D}(\rho)$ para algún $\rho \in \mathcal{A}$ (que no comienza ni termina por $\mathcal{L}$ o $\mathcal{L}_0^*$) y $\beta$ flecha ($\neq \mathcal{L}, \mathcal{L}_0^*$). Entonces definimos:

$$\mu := \begin{cases} \beta\rho & \text{si } \rho^+ = \beta^- \\ \beta\mathcal{L}\rho & \text{si } \rho^+ = x, \beta^- = y \\ \beta\mathcal{L}_0^*\rho & \text{si } \rho^+ = y, \beta^- = x \end{cases}$$

Por lo tanto $\mu \in \mathcal{A}$, y $\mu$ no comienza ni termina por $\mathcal{L}$ o $\mathcal{L}_0^*$, y $\mu' \in \mathcal{D}(\mu)$. Mostrándose la afirmación.

Ahora bien, cada morfismo $f \in F$ es de la forma:

$f = \nabla(b', \underline{b})\mu' \pi(\underline{a}, a')$ donde $a' \xrightarrow{\mu'} b'$ es un camino de $C_{\mathcal{L}}$ y $a', b'$ son sumandos directos de (en un sentido amplio: pueden coincidir con) $\underline{a}$, $\underline{b}$ respectivamente.

Por el lema de las biyecciones (3.2.2): $F: \mathcal{D}(\mu) \longrightarrow R(\mu)$ está bien definida, es decir, existe $\underline{c} = (c_0, \dots, c_m) \in \mathcal{I}(\mu)$ con $T_{\underline{c}}(\mu) = F(\mu') = \nabla(b', \underline{b})\mu' \pi(\underline{a}, a') = \rho$.

Pero $T_{\underline{c}}(\mu) = c_m \beta_m c_{m-1} \dots c_1 \beta_1 c_0$ donde $\mu = \beta_m \dots \beta_1$ es la factorización de $\mu$ en flechas de $C^*$.

Como cada $c_i \in \{id, \underline{\alpha}\alpha^*, \alpha^*\underline{\alpha}, 1-\underline{\alpha}\alpha^*, 1-\alpha^*\underline{\alpha}\}$, entonces $\rho \in \langle \underline{A}(\underline{a}, \underline{b}) \rangle$ (generado como $k$-espacio vectorial) . //

3.2.9 <u>LEMA</u>. <u>Si</u> $\mu_1, \mu_2 \in A^*(a,b)$ <u>con</u> $\mu_1 \neq \mu_2$, <u>entonces</u>

$$\mathcal{D}(\mu_1) \cap \mathcal{D}(\mu_2) = \phi .$$

Demostración: Primero observemos que si $\beta, \delta$ son flechas de $C^*$ con $\{\beta, \delta\} \cap \{\alpha, \alpha^*\} = \phi$, y si $\beta' \in \mathcal{D}(\beta)$, $\delta' \in \mathcal{D}(\delta)$ y $\beta' = \delta'$, entonces $\beta = \delta$. $\quad (\Delta)$

Ahora sean $\mu_1 = \delta_n \dots \delta_1$, $\mu_2 = \beta_m \dots \beta_1 \in A^*(a,b)$ descomposiciones en productos de flechas de $\mu_1$ y $\mu_2$ respectivamente. Sea $\mu' \in \mathcal{D}(\mu_1) \cap \mathcal{D}(\mu_2)$.

Probaremos por inducción sobre $n$ que el lema vale (es decir, $\mu_1 = \mu_2$):

<u>$n=0$</u>: Entonces $\mu_1 = \tau_a$ y $\mu' \in \mathcal{D}(\tau_a)$.

Por tanto $\mu'$ es trivial, y en consecuencia $\mu_2$ es trivial de $a$ en $b=a$. $\therefore \mu_2 = \tau_a$.

<u>$n=1$</u>: Entonces $\mu_1 = \alpha_1$ y suceden 2 casos:

<u>Caso I</u>: $\alpha_1 \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$

Entonces $\mu' = \tau_z$, y consecuentemente $\mu_2 \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

$\therefore \mu_2 = \mu_1$.

<u>Caso II</u>: $\alpha_1 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

Entonces $\mu'$ es una flecha, y por lo tanto $\mu_2 = \delta_2 \beta \delta_1$ con $\delta_1, \delta_2 \in \{\alpha, \alpha_0^*, id\}$, $\beta$ flecha y $\mu' \in \begin{cases} \mathcal{D}(\beta) \\ \mathcal{D}(\alpha_1) \end{cases}$.

Ahora si $\alpha_1 \neq \beta$, entonces es claro que $\mathcal{D}(\alpha_1) \cap \mathcal{D}(\beta) = \phi$.

$\therefore \alpha_1 = \beta$ y $\mu' = \beta^{(i)}$

$\therefore$ el diagrama
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\delta_1"'] & b \\ a \arrow[r, "\beta"'] & b \arrow[u, "\delta_2"'] \end{tikzcd}$$
es imposible a menos que $\delta_1, \delta_2$ sean triviales. $\therefore \mu_2 = \mu_1$.

<u>Paso inductivo</u>: Supongamos que $\ell(\gamma_1)=n>1$ y que el lema se cumple para caminos $\gamma_1'$ de longitud $n-1$ y mostremoslo para $\gamma_1$.

Entonces $\gamma' = \alpha_n' \cdots \alpha_1' = \beta_m' \cdots \beta_1'$ con $\begin{cases} \alpha_i' \in \mathcal{D}(\alpha_i) \\ \beta_i' \in \mathcal{D}(\beta_i) \end{cases}$

<u>Caso 1</u>: $\alpha_1 \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

Como $\gamma_1 \in \mathcal{A}$, entonces $\alpha_2 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$

$\therefore \gamma' = \alpha_n' \cdots \alpha_2' = \beta_m' \cdots \beta_1' \in \mathcal{D}(\alpha_n \cdots \alpha_2) \cap \mathcal{D}(\beta_m \cdots \beta_1)$,

y por hipótesis de inducción, $\alpha_n \cdots \alpha_2 = \beta_m \cdots \beta_1$.

$\therefore \alpha_1 : \beta_1 = a \longrightarrow a$, lo cual es imposible.

<u>Caso 2</u>: $\alpha_1 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

<u>Subcaso 2.1</u>: $\beta_1 \in \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

Como $\gamma_2 \in \mathcal{A}$, entonces $\beta_2 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

$\therefore \gamma' = \alpha_n' \cdots \alpha_1' = \beta_m' \cdots \beta_2'$; y entonces $\beta_2' = \alpha_1'$.

Ahora por observación ($\Delta$), se tiene que $\beta_2 = \alpha_1$.

$\therefore$ Se tiene la situación:

$$\beta_1 \circlearrowleft a \xrightarrow{\alpha_1 = \beta_2} \cdots \longrightarrow b$$

$\therefore \beta_1$ es lazo, lo cual es imposible.

<u>Subcaso 2.2</u> : $\beta_1 \notin \{\alpha, \alpha_0^*\}$.

Entonces como antes, $\beta_1' = \alpha_1'$ y por observación (A) se tiene que $\beta_1 = \alpha_1$.

$\therefore \alpha_n' \cdots \alpha_2' = \beta_m' \cdots \beta_2' \in \mathcal{D}(\alpha_n \cdots \alpha_2) \cap \mathcal{D}(\beta_m \cdots \beta_2)$

y por hipótesis de inducción, $\alpha_n \cdots \alpha_2 = \beta_m \cdots \beta_1$

$\therefore \mu_1 = \mu_2$. //

3.2.5 <u>COROLARIO</u>. <u>T es una k-base de</u> $\mathcal{K}(\alpha^*)$.

Demostración: Sean $\underline{a}, \underline{b} \in |\mathcal{K}(\alpha^*)|$ y $T(\underline{a},\underline{b}) = \mathcal{K}(\alpha^*)(\underline{a},\underline{b}) \cap T$.

Por 3.2.3, $T(\underline{a},\underline{b})$ k-genera a $\mathcal{K}(\alpha^*)(\underline{a},\underline{b})$.

Supongamos ahora que $\displaystyle\sum_{\mu \in T(a,b)} \sum_{\underline{e} \in I(\mu)} \lambda_{\mu,\underline{e}} \, \tau_{\underline{e}}(\mu) = 0$,

con $\{\lambda_{\mu,\underline{e}} \in k\}$. Por el lema de las biyecciones,

$$\sum_{\mu = \delta_2 \Gamma \delta_1 \in T(a,b)} \sum_{\underline{e} \in I(\mu)} \lambda_{\mu,\underline{e}} \, \underline{\delta}_2 \, \nabla(w(\mu,\underline{e}),\underline{\delta}_2^-) \, \mu_{\mu,\underline{e}} \, \Pi(\underline{\delta}_1^+, v(\mu,\underline{e})) \, \underline{\delta}_1$$

$= 0$ donde $F(v(\mu,\underline{e}) \xrightarrow{\mu_{\mu,\underline{e}}} w(\mu,\underline{e})) = \tau_{\underline{e}}(\mu)$ para cada $\mu, \underline{e}$.

Multiplicando por $\nabla(v(\tilde{\mu},\tilde{\underline{e}}),\underline{\tilde{\delta}}_1^-)$ a la derecha y por $\Pi(\underline{\tilde{\delta}}_2^+, w(\tilde{\mu},\tilde{\underline{e}}))$ a la izquierda, para un $\tilde{\mu} = \tilde{\delta}_2 \tilde{\Gamma} \tilde{\delta}_1$

$\in \mathcal{A}(a,b)$ y un $\underline{\tilde{e}} \in I(\tilde{\mu})$ fijos, obtenemos una suma:

$$\sum_{(\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}} \lambda_{\mu,\underline{e}} \mathcal{M}_{\mu,\underline{e}} = 0 \text{ en } kC_{\mathcal{L}} \text{, donde}$$

$I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}} = \{ (\mu,\underline{e}) / \mu \in \mathcal{A}(a,b),\ \underline{e} \in I(\mu)$ y

$\Pi(\underline{\delta}_2^{+}, w(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}})) \Gamma_{\underline{e}}(\mu) \nabla(v(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}), \delta_1^{\tilde{}}) \neq 0 \}$.

Obsérvese que los caminos $\{\mathcal{M}_{\mu,\underline{e}} / (\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}\}$ son todos distintos pues:

(1) $\mathcal{M}_{\mu,\underline{e}} \neq \mathcal{M}_{\mu,\underline{f}}$ para $\mu$ y $\underline{e} \neq \underline{f}$ en $I(\mu)$ porque $G$ es biyectiva (en el lema de las biyecciones).

(2) Si $\mu_1 \neq \mu_2$, entonces $\mathcal{M}_{\mu_1,\underline{e}} \neq \mathcal{M}_{\mu_2,\underline{f}}$ por el lema 3.2.7. Por lo tanto $\lambda_{\mu,\underline{e}} = 0$ para toda $(\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}$.

Pero $(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}) \in I_{\tilde{\mu},\tilde{\underline{e}}}$ siempre y la pareja $(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}})$ que habíamos fijado era arbitraria. //

Por 3.2.3, sabemos que $\underline{A}$ $k$-genera a $\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})$. Para verificar la independencia lineal de $\underline{A}$, introduciremos una noción auxiliar para dar una descripción alternativa de $\underline{A}$.

$\in \mathcal{A}(a,b)$ y en $\underline{\tilde{e}} \in I(\tilde{\mu})$ fijos, obtenemos una suma:

$\sum_{(\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}} \lambda_{\mu,\underline{e}} \mu_{\mu,\underline{e}} = 0$ en $kC_{\mathcal{L}}$, donde

$I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}} = \{(\mu,\underline{e}) / \mu \in \mathcal{A}(a,b), \underline{e} \in I(\mu)$ y

$\pi(\underline{\delta}_2^{\tilde{+}}, w(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}})) \tau_{\underline{e}}(\mu) \pi(v(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}), \delta_1^{\tilde{-}}) \neq 0 \}$.

Obsérvese que los caminos $\{\mu_{\mu,\underline{e}} / (\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}\}$ son todos distintos pues:

(1) $\mu_{\mu,\underline{e}} \neq \mu_{\mu,\underline{f}}$ para $\mu$ y $\underline{e} \neq \underline{f}$ en $I(\mu)$ porque $\mathcal{G}$ es biyectiva (en el lema de las biyecciones).

(2) Si $\mu_1 \neq \mu_2$, entonces $\mu_{\mu_1,\underline{e}} \neq \mu_{\mu_2,\underline{f}}$ por el lema 3.2.4. Por lo tanto $\lambda_{\mu,\underline{e}} = 0$ para toda $(\mu,\underline{e}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}$. Pero $(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}) \in I_{\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}}}$ siempre y la pareja $(\tilde{\mu},\underline{\tilde{e}})$ que habíamos fijado era arbitraria. //

Por 3.2.3, sabemos que $\underline{A}$ k-genera a $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$. Para verificar la independencia lineal de $\underline{A}$, introduciremos una noción auxiliar para dar una descripción alternativa de $\underline{A}$.

<u>Definiciones</u>. Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{X}$. Una <u>inserción propia</u> de $\mathcal{M}: x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\beta_m} x_m$ es una sucesión $\underline{f} = (f_0, \ldots, f_m)$ de idempotentes $f_i : \underline{x}_i \longrightarrow \underline{x}_i$ tal que

$$f_i \in \begin{cases} \{id_{\underline{x}_i}\} & \text{si } i \text{ no es admisible en } \mathcal{M} \\ \{e_i, id_{\underline{x}_i}\} & \text{si } i \text{ es admisible en } \mathcal{M}. \end{cases}$$

Como antes, $T_{\underline{f}}(\mathcal{M}) := f_m \beta_m f_{m-1} \ldots \beta_1 f_0$.

$$I'(\mathcal{M}) := \{\text{inserciones propias de } \mathcal{M}\}$$

$$R'(\mathcal{M}) := \{T_{\underline{f}}(\mathcal{M}) \mid \underline{f} \in I'(\mathcal{M})\}.$$

3.2.6 <u>Observación</u>: $\underline{A} = \{T_{\underline{f}}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathcal{X}, \underline{f} \in I'(\mathcal{M})\}$.

En efecto. Supongamos que $\underline{A}' = \{T_{\underline{f}}(\mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \in \mathcal{X}, \underline{f} \in I'(\mathcal{M})\}$.

1º) Claramente $\underline{A}' \subseteq \underline{A}$.

2º) Sea $\mathcal{M} = \beta_m \beta_{m-1} \ldots \beta_1 \in A$ y $\underline{\mathcal{M}} = \underline{\beta}_m \ldots \underline{\beta}_1 \in \underline{A}$.

Entonces sucede:

- La en $\mathcal{M}: x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\beta_m} x_m$ no aparecen pedazos de la forma $x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\alpha^*} x$ o $y \xrightarrow{\alpha^*} x \xrightarrow{\alpha} y$, entonces $\mu \in \mathcal{A}$ y considerando la inserción propia $\underline{f} = (f_0, \ldots, f_m)$ de $\mu$ con $f_i = id_{\underline{x}_i}$ $\forall i$, tenemos que $\underline{\mu} = T_{\underline{f}}(\mu) \in \underline{\mathcal{A}}'$

Ahora si en $\mu$ aparecen pedazos de la forma

$$x_i = x \xrightarrow{\alpha} x_{i+1} = y \xrightarrow{\alpha_0^*} x_{i+2} = x \quad \sigma \quad x_j = y \xrightarrow{\alpha_0^*} x_{j+1} = x \xrightarrow{\alpha} x_{j+2} = y,$$

entonces al quitar estos pedazos de $\mu$, obtenemos un camino $\mu' = \beta_e' \ldots \beta_1' \in \mathcal{A}'$.

Hay que notar que al quitar un pedazo de la forma anterior, se tiene que $i$ (resp. $j$) es un índice admisible de $\mu'$.

Con esto en mente, podemos considerar la inserción propia $\underline{f}' = (f_0', \ldots, f_e')$ de $\mu'$, en donde

$$f_i' = \begin{cases} id_{\underline{x}_i} & \text{si } i \text{ no es admisible} \\ \epsilon_x & \text{si } i \text{ es admisible} \end{cases}.$$

Ahora es claro que $\underline{\mu} = T_{\underline{f}'}(\mu') \in \underline{\mathcal{A}}'$. //

Ahora sí estamos en condiciones de terminar la prueba de la proposición 3.2.1.

3.2.1 <u>PROPOSICION</u>. $\underline{\mathcal{A}}$ forma una k-base de la categoría $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$.

Demostración: Ya sabemos que $\underline{\mathcal{A}}$ k-genera a $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ (ver 3.2.3). También sabemos que $T = \bigcup\{R(\mathcal{H}) / \mathcal{H} \in \mathcal{A}\}$ es k-base de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ (ver 3.2.5). Entonces si $\underline{a}, \underline{b} \in |\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)|$, $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{a},\underline{b}) = \bigoplus_{\mathcal{H}\in\mathcal{A}(a,b)} V(\mathcal{H})$ con $V(\mathcal{H}) = \langle R(\mathcal{H})\rangle$ (generado como k-espacio vectorial).

Entonces $\dim V(\mathcal{H}) = |R(\mathcal{H})| = |I(\mathcal{H})| = 2^t$, donde $t$ es el número de índices admisibles de $\mathcal{H}$.

Por otro lado, afirmamos que $\langle R(\mathcal{H})\rangle = \langle R'(\mathcal{H})\rangle$ para cada $\mathcal{H}\in\mathcal{A}(a,b)$.

En efecto. Sea $\underline{e} = (e_1,\dots,e_m) \in I(\mathcal{H})$, entonces $T_{\underline{e}}(\mathcal{H}) = e_m\beta_m \cdots e_1\beta_1 e_0$ con $e_i \in \{\underline{\alpha}\alpha^*, 1-\underline{\alpha}\alpha^*, \alpha^*\underline{\alpha}, 1-\alpha^*\underline{\alpha}, id\}$.

$\therefore T_{\underline{e}}(\mathcal{H}) \in \langle R'(\mathcal{H})\rangle \quad \therefore \langle R(\mathcal{H})\rangle \subseteq \langle R'(\mathcal{H})\rangle$

Ahora si $\underline{e} \in I'(\mathcal{H})$, entonces $T_{\underline{e}}(\mathcal{H}) = e_m\beta_m\cdots e_1\beta_1 e_0$ con $e_i \in \{\underline{\alpha}\alpha^*, \alpha^*\underline{\alpha}, id\}$.

pero $id_{\underline{x}}\,\boxed{\underline{x}\text{ admisible}} \in \{(1-\underline{\alpha}\alpha^*)+\underline{\alpha}\alpha^*,\ (1-\alpha^*\underline{\alpha})+\alpha^*\underline{\alpha}\}$.

válido para inserciones no propias

$\therefore\ \mathcal{T}_{\underline{c}}(\mathcal{J}') \subset \langle R(\mathcal{J}') \rangle$.

Pero $|R'(\mathcal{J}')| \leq 2^t$, y por tanto se da la igualdad y $R'(\mathcal{J}')$ es k-base.

$\therefore\ \underline{\mathcal{A}}(\underline{a},\underline{b}) = \bigcup \{ R'(\mathcal{J}') \mid \mathcal{J}' \in \mathcal{T}(a,b) \}$ es k-base de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{a},\underline{b})$.

$\therefore\ \underline{\mathcal{A}}$ es una k-base de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$. //

3.27. <u>Afirmación</u>. $\mathcal{A} \xrightarrow{\ H\ } \underline{\mathcal{A}}$ <u>es una biyección</u>.

$$\mathcal{J}' \longmapsto \underline{\mathcal{J}'}$$

Demostración: Primeramente probaremos lo siguiente:

(i) para cada $a \xrightarrow{\mu} b \in \mathcal{A}$, hay un camino $\mu_0 \in \mathcal{X}$ con $\underline{\mu} = T_{\underline{e}}(\mu_0)$ para alguna inserción propia $\underline{e} \in \mathcal{I}'(\mu_0)$ tal que $(\mu_0, \underline{e})$ determina unívocamente a $\mu$.

(ii) $\Pi(\underline{b}, b')\underline{\mu}\,\nabla(a'; \underline{a}) \in k\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ es una combinación lineal de caminos en $\mathcal{L}(\mu)$ (siempre que $a', b' \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ y $a'/\underline{a}, b'/\underline{b}$).

En efecto. "(i)" Si $\mu = \beta_n \beta_{n-1} \ldots \beta_1$ es la descomposición en flechas de $\mu \in \mathcal{A}$, entonces $\mu = \mu_{m+1} \mu'_m S_m \mu'_{m-1} \ldots S_1 \mu'_0 \mu_0$,

donde $\mu_0 = \begin{cases} \beta_2\beta_1 & \text{si } \beta_2\beta_1 \in \{\mathcal{L}\mathcal{L}_0^*, \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\} ; \\ \text{trivial} & \text{si no} \end{cases}$

$, \mu_{m+1} := \begin{cases} \beta_n\beta_{n-1} & \text{si } \beta_n\beta_{n-1} \in \{\mathcal{L}\mathcal{L}_0^*, \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\} ; \\ \text{trivial} & \text{si no} \end{cases}$

$S_i \in \{\mathcal{L}\mathcal{L}_0^*, \mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\}$; $\mu'_i \in \mathcal{X}$ no triviales y $m$ máxima.

Considerando $\mu_0 = \mu'_m \mu'_{m-1} \cdots \mu'_0 \in \mathcal{X}$, se sigue inmediatamente (i).

"(ii)" Por inducción sobre $\mathcal{L}(\mu)$:

$\underline{\mathcal{L}(\mu) = 0}$ : $\mu = \sigma_a$.

Entonces $\Pi(\underline{a}, a'')\underline{\mu}\,\nabla(a'; \underline{a}) = \Pi(\underline{a}, a'')\, 1_{\underline{a}}\, \nabla(a'; \underline{a}) =$

$= \pi(\underline{a}, a'') \left( \sum_i \nabla(a_i; \underline{a}) \pi(\underline{a}, a_i) \right) \nabla(a'; \underline{a})$ (donde $\underline{a} = \bigoplus_i a_i$)

$= \pi(\underline{a}, a'') \nabla(a'; \underline{a}) 1_{a'} \in \{0, 1_{a'}\}$, con $1_{a'} \in \{\tau_z, \tau_x, \tau_y\}$.

$\underline{\ell(\mu) = 1}$: Entonces $\mu = (a \xrightarrow{\beta} b)$.

$$\therefore \pi(\underline{b}, b') \underline{\mu} \nabla(a'; \underline{a}) \in \begin{cases} \{\beta^{(0)}\} & \text{si } a, b \notin \{x, y\} \\ \{\beta^{(0)}, \beta^{(1)}\} & \text{si } a \notin \{x, y\}, b \in \{x, y\} \\ \{\beta^{(0)}, \beta^{(1)}\} & \text{si } a \in \{x, y\}, b \notin \{x, y\} \\ \{\beta^{(0)}, \beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \beta^{(11)}\} & \text{si } a, b \in \{x, y\}, \beta \notin \{\alpha, \alpha_0^*\} \\ \{0, \tau_z\} & \text{si } \beta \in \{\alpha, \alpha_0^*\} \end{cases}$$

$\underline{\ell(\mu) > 1}$: Supongamos que $\mu = \beta\mu : a \xrightarrow{\mu} b \xrightarrow{\beta} c$ con $\beta$ flecha de $C^*$.

Entonces $\pi(\underline{c}, c') \underline{\mu} \nabla(a'; \underline{a}) = \pi(\underline{c}, c') \underline{\beta} \underbrace{\sum_i \nabla(b_i; \underline{b}) \pi(\underline{b}, b_i)}_{1_{\underline{b}}} \underline{\mu} \nabla(a'; \underline{a})$

$= \sum_i (\pi(\underline{c}, c') \underline{\beta} \nabla(b_i; \underline{b})) (\pi(\underline{b}, b_i) \underline{\mu} \nabla(a'; \underline{a}))$ = por hip. de induc.

$= \left( \sum_{\beta' \in \mathcal{D}(\beta)} \lambda_{\beta'} \beta' \right) \left( \sum_{\mu' \in \mathcal{D}(\mu)} \lambda_{\mu'} \mu' \right) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}(\beta\mu)} \lambda_\delta \delta$.

Mostrándose (ii).

Ahora bien, probemos que $H$ es inyectivo.

En efecto. Si $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in \mathcal{A}$ satisfacen $\underline{\mathcal{H}} = \underline{\mathcal{H}'} : \underline{a} \to \underline{b}$, entonces para $a, b'$ adecuados (usando (iii)), $0 \neq \pi(\underline{b}, b')\,\underline{\mathcal{H}}\,\pi(a, \underline{a}) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{H})} \lambda_\delta \delta$ .

$$\pi(\underline{b}, b')\,\underline{\mathcal{H}'}\,\pi(a, \underline{a}) = \sum_{\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{H}')} \lambda_\delta \delta$$

Entonces como $\mathcal{G}$ es libre, existe $\delta \in \mathcal{D}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{H}')$.

Pero $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{H}_0)$ y $\mathcal{D}(\mathcal{H}') \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{H}_0')$, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{H}_0) \cap \mathcal{D}(\mathcal{H}_0') \neq \emptyset$, y por 3.2.4 se tiene que $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0'$

$$\therefore \begin{cases} \underline{\mathcal{H}} = \tau_{\underline{e}}(\mathcal{H}_0) \\ \underline{\mathcal{H}'} = \tau_{\underline{e}'}(\mathcal{H}_0') = \tau_{\underline{e}'}(\mathcal{H}_0) \ ; \ \underline{e}, \underline{e}' \in I'(\mathcal{H}_0). \end{cases}$$

Recuérdese ahora que se mostró en la demostración de 3.2.1 (pág. 147) que $|R'(\mathcal{H}_0)| = |R(\mathcal{H}_0)|$, pero además es claro que $|I'(\mathcal{H}_0)| = |I(\mathcal{H}_0)|$.

$$\therefore \quad G' : I'(\mathcal{H}_0) \longrightarrow R'(\mathcal{H}_0) \text{ es biyectiva}$$
$$\underline{e} \longmapsto \tau_{\underline{e}}(\mathcal{H}_0)$$

$\therefore \underline{e} = \underline{e}'$ y $(\underline{e}, \mathcal{H}_0) = (\underline{e}', \mathcal{H}_0)$

$\therefore \mathcal{H} = \mathcal{H}'$ (por (i)). //

## § 3.3. El $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $\mathcal{K}_1$ y el funtor composición.

En esta sección veremos principalmente que el núcleo del funtor composición $\pi: \mathcal{K}_1 \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}$ es un $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_1$ bimódulo libre (ver 2.6.2).

3.3.1 PROPOSICION. $\mathcal{K} = kC$

(i) Para cada $\delta \in \mathcal{A}_1 = \{\delta \in \mathcal{A} \mid \delta$ termina en $\mathcal{L}_0^*$ pero no en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}\}$, el elemento $\underline{\delta}$ del $\mathcal{K}$-módulo izquierdo $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ es sin torsión (es decir, $f\underline{\delta} = 0$ implica $f=0$, para cada $f \in \mathcal{K}(x,-)$. En particular la multiplicación induce un isomorfismo natural $\mathcal{K}\underline{\delta} \cong \mathcal{K}(x,-)$.

(ii) Para cada $\delta' \in \mathcal{A}_2 = \{\delta_1 - \mathcal{L}_0^* \mathcal{L} \delta_1 \mid \mathcal{L}_0^* \mathcal{L} \delta_1 \in \mathcal{A}\}$, el elemento $\underline{\delta}'$ del $\mathcal{K}$-módulo izquierdo $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ tiene por anulador a $\mathcal{K}\underline{\mathcal{L}}$ (es decir, $\mathcal{K}\underline{\mathcal{L}} = \{f \in \mathcal{K}(x,-) \mid f\underline{\delta}' = 0\}$). En particular, la multiplicación induce un isomorfismo $\mathcal{K}\underline{\delta}' \cong \mathcal{K}(x,-)/\mathcal{K}\underline{\mathcal{L}}$.

(iii) Sea $\mathcal{A}' := [\mathcal{A} \setminus \{\delta \in \mathcal{A} \mid \delta$ termina en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}\}] \cup \mathcal{A}_2$. Entonces $\mathcal{A}'$ también es $k$-base de $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ y además:

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}^*) = \underline{\mathcal{K}} \oplus \left(\bigoplus_{\delta \in \mathcal{A}_1} \mathcal{K}\underline{\delta}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\delta' \in \mathcal{A}_2} \mathcal{K}\underline{\delta}'\right).$$

Demostración: "(i)" Sean $\delta \in \mathcal{A}_1(a,x)$, $f \in {}^{\vee}\mathcal{K}(x,b)$ tales que $f\underline{\delta}=0$. Entonces $f=\sum \lambda_i \partial_i'$ con $\lambda_i \in k$, $\partial_i'$ caminos distintos de $C$. Como $\delta$ termina en $\mathcal{L}_0^*$, todos los caminos $\{\partial_i'\delta\}$ son distintos; y como $\delta$ no termina en $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$, todos ellos están en $\mathcal{A}$ (es decir, $\delta\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\mathcal{L}_0^* \nmid \partial_i'\delta$ para cada $i$). Entonces $0=f\underline{\delta}=\sum \lambda_i \underline{\partial_i'\delta}$ implica que $\lambda_i=0$ para cada $i$, y en consecuencia $f=0$.

"(ii)" Sean $\delta' \in \mathcal{A}_2(a,x)$, $f \in {}^{\vee}\mathcal{K}(x,b)$ tales que $f\underline{\delta}'=0$. Sea $f=\sum \lambda_i \partial_i'$ como antes y $\delta'=\delta_1-\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\delta_1$ con $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\delta_1 \in \mathcal{A}$. Entonces $0=f\underline{\delta}'=f(\underline{\delta}_1-\mathcal{L}^*\underline{\mathcal{L}}\delta_1)=\sum \lambda_i \underline{\partial_i'}\underline{\delta}_1-\sum_i \lambda_i \underline{\partial_i'}\mathcal{L}^*\underline{\mathcal{L}}\,\underline{\delta}_1$ (*)

Sea $J=\{i \mid \partial_i' \text{ no comienza en } \mathcal{L}\}$. Podemos deducir entonces una igualdad (*) donde $i$ corre en $J$ (pues $i \notin J$ implica $\partial_i'$ comienza en $\mathcal{L}$ (pero $\underline{\mathcal{L}}\,\underline{\delta}'=0$), y por lo tanto $\underline{\partial_i'}\underline{\delta}'=0$).

Mostremos ahora que $\lambda_j=0$ para todo $j \in J$.

En efecto. Basta ver que $\{\partial_j'\delta_1\}_{j\in J} \cup \{\partial_j'\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\delta_1\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{A}$ y son todos distintos.

Como $\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}\delta_1 \in \mathcal{A}$, entonces $\delta_1 \in \mathcal{A}$ y $\delta_1$ no termina en $\mathcal{L}_0^*$. $\partial_j'$ no comienza en $\mathcal{L}$ y es camino de $C$.

Por lo tanto $\gamma_j \alpha_0^* \alpha \delta_i \in \mathcal{A} \ni \gamma_j \delta_i$ para cada $j \in J$.

Ahora si $\gamma_j \neq \gamma_{j'}$, tenemos:

$\gamma_j \delta_i = \gamma_{j'} \delta_i$ implica $\gamma_j = \gamma_{j'}$, lo cual es imposible.

$\gamma_j \alpha_0^* \alpha \delta_i = \gamma_{j'} \alpha_0^* \alpha \delta_i$ implica $\gamma_j = \gamma_{j'}$, lo cual es imposible.

$\gamma_j \delta_i = \gamma_{j'} \alpha_0^* \alpha \delta_i$ implica $\gamma_j = \gamma_{j'} \alpha_0^* \alpha$, y por lo tanto $\gamma_j$ comienza en $\alpha$, lo cual no puede ser.

Así pues, los caminos en $\{\gamma_j \delta_i\}_{j \in J} \cup \{\gamma_j \alpha_0^* \alpha \delta_i\}_{j \in J}$ son todos distintos.

$\therefore f = \sum_i \lambda_i \gamma_i$ con cada $\gamma_i$ comenzando en $\alpha$.

$\therefore f \in \mathcal{K}\underline{\alpha}$.

"(iii)" Primeramente nótese que las aplicaciones

$$\{\underline{\delta} \in \underline{\mathcal{A}} \mid \delta \text{ termina en } \alpha_0^* \alpha\} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}_2 \quad \text{y}$$
$$\underline{\delta} = \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1 \longmapsto \underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1$$

$$\mathcal{A}' \longrightarrow \underline{\mathcal{A}}'$$
$$\delta' \longmapsto \underline{\delta}'$$

son biyectivas (pues $\underline{\mathcal{A}}$ es k-base de $\mathcal{K}(\Gamma')$ y $\mathcal{A} \to \underline{\mathcal{A}}$, $\delta \mapsto \underline{\delta}$ es biyectiva, (ver 3.2.1 y 3.2.7)).

Por lo tanto, $|\underline{\mathcal{A}}'(a,b)| = |\underline{\mathcal{A}}(a,b)|$ para todo $a,b \in |\mathcal{K}(\mathcal{A}^*)|$.

Como $|\underline{\mathcal{A}}'(a,b)|$ puede ser infinito, entonces para ver que $\mathcal{A}'$ es $\kappa$-base de $\mathcal{K}(\mathcal{A}^*)$, no basta ver que $\underline{\mathcal{A}}'(a,b) \subseteq$ $\subseteq \langle \underline{\mathcal{A}}(a,b) \rangle$ y $\underline{\mathcal{A}}(a,b) \subseteq \langle \underline{\mathcal{A}}'(a,b) \rangle$ para todo $a$, $b \in |\mathcal{K}(\mathcal{A}^*)|$ (evidentemente se cumplen estas contenciones).

Se debe ver que para cada $F'' \subseteq \mathcal{A}'(a,b)$ finito, $\underline{F}''$ es linealmente independiente. Para esto bastará ver que para $F' \subseteq \mathcal{A}'(a,b)$ finito se cumple ($\delta' = \delta_i - \lambda_0^* \lambda \delta_i \in F' \Longrightarrow$ $\Rightarrow \delta_i \in F'$), $\underline{F}'$ es linealmente independiente (pues cualquier $F''$ está contenido en un $F'$ como ese (agregando algunos elementos de $\mathcal{A}'$ a $F''$)).

Por lo tanto $F' = (\{\text{ciertos caminos}\} =: \Delta) \dot{\cup} (\{\text{ciertos diferenciales } \delta'\} =: \Delta')$.

Sea $F = \Delta \dot{\cup} \{\lambda_0^* \lambda \delta_i \,/\, \text{si } \delta_i - \lambda_0^* \lambda \delta_i \in \Delta'\}$.

<u>Afirmación</u>: $\langle \underline{F}' \rangle = \langle \underline{F} \rangle$.

[Como $|\underline{F}'| = |\underline{F}|$, entonces ($\underline{F}$ es linealmente independiente si y solo si $\underline{F}'$ lo es);

Pero $\underline{F} \subseteq \underline{\Delta}$, por lo tanto $\underline{F}$ es linealmente indep., y en consecuencia $\underline{F}'$ también lo es ].

"$\underline{F}' \subseteq \langle \underline{F} \rangle$".

En efecto. Si $\delta' = \delta_1 - L_0^* L \delta_1 \in F'$ implica $\delta_1 \in F'$. Por lo tanto $\delta_1 \in F$, y además $L_0^* L \delta_1 \in F$.

$$\therefore \underline{\delta}' \in \langle \underline{F} \rangle .$$

"$\underline{F} \subseteq \langle \underline{F}' \rangle$".

En efecto. Sea $\delta \in F(a,b)$.

Si $\delta$ no termina en $L_0^* L$, entonces $\underline{\delta} \in \underline{F}'(a,b)$.

Supongamos ahora que $\delta = L_0^* L \delta_1$. Entonces $\delta_1 - L_0^* L \delta_1 \in \Delta' \subseteq F' \Longrightarrow \delta_1 \in F'$.

Por lo tanto, $\underline{\delta} = \underset{\underline{F}'}{\underline{\delta_1}} - \underbrace{(\underline{\delta_1} - \underline{L^* L \delta_1})}_{\underline{F}'} \in \langle \underline{F}'(a,b) \rangle$.

Así pues, $\underline{\Delta}'$ es k-base de $\tilde{\mathcal{K}}(L^*)$.

Ahora bien, $\underline{\Delta}'$ k-base de $\tilde{\mathcal{K}}(L^*)$ implica

$$\tilde{\mathcal{K}}(L^*) = \underline{\tilde{\mathcal{K}}} + \Big(\sum_{\delta \in \underline{\Delta}_1} \tilde{\mathcal{K}} \underline{\delta}\Big) + \Big(\sum_{\delta' \in \underline{\Delta}_2} \tilde{\mathcal{K}} \underline{\delta}'\Big) .$$

Finalmente mostremos que la suma es directa.

Sea $\mathcal{P}$ = los caminos del carcaj $C$ y

$$\sum_{\gamma' \in \mathcal{P}} \lambda_{\gamma'} \underline{\gamma'} + \sum_{\delta \in \Delta_1} \sum_{\gamma'_\delta \in \mathcal{P}} \lambda'_{\gamma'_\delta} \gamma'_\delta \underline{\delta} + \sum_{\delta' \in \Delta_2} \sum_{\gamma'_{\delta'} \in \mathcal{P}} \lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \gamma'_{\delta'} \underline{\delta'} = 0$$

(con $\lambda_{\gamma'}, \lambda'_{\gamma'_\delta}, \lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \in k$).

Pero cada $\delta' = \delta_1 - \alpha_0^* \alpha \delta_1$ con $\delta_1 \in \Delta$ y $\delta_1$ no termina en $\alpha_0^*$.

$$\therefore \sum_{\gamma' \in \mathcal{P}} \lambda_{\gamma'} \underline{\gamma'} + \sum_{\delta \in \Delta_1} \sum_{\gamma'_\delta \in \mathcal{P}} \lambda'_{\gamma'_\delta} \gamma'_\delta \underline{\delta} + \sum_{\substack{\delta_1 \in \Delta(-,x) \\ \delta_1 \text{ no termina en } \alpha_0^*}} \sum_{\gamma'_{\delta'} \in \mathcal{P}} \left(\lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \gamma'_{\delta_1} \underline{\delta_1} - \lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \gamma'_{\delta_1} \underline{\alpha_0^* \alpha \delta_1}\right) =$$

$= 0^{(+)}$. Podemos suponer que los $\gamma'_{\delta'} = \gamma'_{\delta_1}$ con $\lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \neq 0$ no comienzan en $\alpha$ (pues de no ser así, anulan a la $\delta'$ correspondiente). Por lo tanto $\gamma'_{\delta_1} \alpha_0^* \alpha \delta_1 \in \Delta$. Entonces

$$\{\gamma'\}_{\gamma' \in \mathcal{P}} \cup \{\gamma'_\delta \delta\}_{\delta \in \Delta_1} \cup \{\gamma'_{\delta_1} \delta_1\}_{\substack{\delta_1 \in \Delta(-,x) \\ \delta_1 \text{ no termina en } \alpha_0^*}} \cup \{\gamma'_{\delta_1} \alpha_0^* \alpha \delta_1\} \subseteq \Delta.$$

Fijemos ahora un $\gamma'_{\delta_1} \alpha_0^* \alpha \delta_1$ de longitud máxima con $\lambda''_{\gamma'_{\delta'}} \neq 0$. Entonces tenemos:

$\gamma'_{\delta_1} \alpha_0^* \alpha \delta_1 \neq \gamma'$ pues $\gamma' \in \mathcal{P}$, y por lo tanto $\alpha_0^* \nmid \gamma'$.

$\gamma'_{\delta_1} \alpha_0^* \alpha \delta_1 \neq \gamma'_\delta \delta$.

En efecto. Si $\mathcal{H}_{\delta_1}\alpha_0^*\alpha\delta_1 = \mathcal{H}_{\delta}\delta$, como $\delta = \alpha_0^*\beta\delta_3$ con $\beta \neq \alpha$ (pues $\delta \in \Delta_1$),

$\therefore \mathcal{H}_{\delta_1}\alpha_0^*\alpha\delta_1 = \mathcal{H}_{\delta}\alpha_0^*\beta\delta_3$, lo cual implica que $\mathcal{H}_{\delta_1}\alpha_0^*\alpha = \mathcal{H}_{\delta}\alpha_0^*\beta$. Entonces $\alpha = \beta$, lo cual es imposible.

$\mathcal{H}_{\delta_1}\alpha_0^*\alpha\delta_1 \neq \mathcal{H}'_{\delta_1''}\delta_1''$

En efecto. Si $\mathcal{H}_{\delta_1}\alpha_0^*\alpha\delta_1 = \mathcal{H}'_{\delta_1''}\delta_1''$ implica

$\log(\mathcal{H}_{\delta_1''}\alpha_0^*\alpha\delta_1'') > \log(\mathcal{H}_{\delta_1''}\alpha_0^*\alpha\delta_1)$, lo cual es imposible.

Ahora bien, como $\underline{A}$ es linealmente independiente, entonces $\lambda''_{\mathcal{H}_{\delta_1}} = 0$, lo cual no es cierto.

Por lo tanto no hay sumandos en la 3ª sumatoria de $(+)$ con coeficientes $\neq 0$, es decir, $\lambda''_{\delta_1} = 0$ para todo $\mathcal{H}_{\delta_1}$.

$$\therefore \sum_{\mathcal{H} \in \mathcal{D}} \lambda_{\mathcal{H}}\,\underline{\mathcal{H}} + \sum_{\delta \in \Delta_1} \sum_{\mathcal{H}_\delta \in \mathcal{D}} \lambda_{\mathcal{H}_\delta}\,\mathcal{H}_\delta\,\underline{\delta} = 0.$$

Pero aquí $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_\delta\delta$ siempre, pues $\alpha_0^* / \delta$ y $\alpha_0^* \not/ \mathcal{H}$.

Por lo tanto ambas sumatorias se anulan. Mostrándose (iii). //

3.3.2 <u>COROLARIO</u>. <u>El conjunto</u> $T := \{\underline{\delta}\otimes 1 \mid \delta \in \mathcal{A}\} \cup \{\underline{\delta}\underset{x}{\otimes}\underline{\delta}' \mid \delta\in \mathcal{A}(x,?),\ \delta'\in \mathcal{A}_1(-,x)\} \cup \{\underline{\delta}\underset{x}{\otimes}\underline{\delta}'' \mid \delta\in \mathcal{A}_2^c(x,?),\ \delta''\in \mathcal{A}_2(-,x)\}$ (aquí $\mathcal{A}_2^c = \{\delta\in\mathcal{A} \mid \delta$ <u>no comienza en</u> $\mathcal{A}\}$) <u>es una</u> $k$-<u>base del</u> $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ <u>bimódulo</u> $\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)$.

Demostración: Veamos primero que $\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}/\mathcal{K}\underline{\mathcal{A}} \cong \mathcal{K}(\mathcal{A}^x)/\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underline{\mathcal{A}}$ en $\mathrm{Mod}(\mathcal{K}(\mathcal{A}^x))$.

En efecto: la aplicación $\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)(x,?) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}^x)(-,?)\underset{\mathcal{K}}{\otimes}\mathcal{K}(x,-)/\mathcal{K}\underline{\mathcal{A}}$

$$f \longmapsto f\otimes 1$$

es un morfismo de módulos izquierdos y su núcleo contiene a $\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underline{\mathcal{A}}$. Por lo tanto

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)/\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}^x)(-,?)\otimes\mathcal{K}(x,-)/\mathcal{K}\underline{\mathcal{A}}$$

$$\bar{f} \longmapsto f\otimes 1$$

es morfismo de módulos izquierdos. Más aún, la aplicación $g\otimes\bar{f} \longmapsto \overline{gf}$ define su inversa.

Ahora bien, nótese que $\overline{\underline{\mathcal{A}}_2(x,-)}$ es $k$-base de $\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)/\mathcal{K}(\mathcal{A}^x)\underline{\mathcal{A}}$ (pues si $\sum_i \lambda_i\,\overline{\underline{\delta}_i} = 0$, donde los $\delta_i$

(todos distintos) no comienzan en $\mathcal{L}$. Entonces
$\sum \lambda_i \underline{\delta}_i = \sum \lambda_j \underline{\delta}'_j$ en ${}^{\prime}\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)$ con $\delta_i, \delta'_j \in \mathcal{A}$ y los
$\delta'_j$ (todos distintos) comienzan en $\mathcal{L}$. $\therefore \lambda_i = 0 \; \forall i$ ).
Finalmente tenemos:

$$\mathcal{K}(\mathcal{J}^x) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}(\mathcal{J}^x) = \mathcal{K}(\mathcal{J}^x) \otimes \Big(\mathcal{K} \oplus \big(\bigoplus_{\delta \in \mathcal{A}_1} \mathcal{K}\underline{\delta}\big) \oplus \big(\bigoplus_{\delta' \in \mathcal{A}_2} \mathcal{K}\underline{\delta}'\big)\Big) \cong$$

$$\cong \mathcal{K}(\mathcal{J}^x) \otimes \Big(\mathcal{K} \oplus \big(\bigoplus_{\delta \in \mathcal{A}_1} \mathcal{K}(x,-)\big) \oplus \big(\bigoplus_{\delta' \in \mathcal{A}_2} \mathcal{K}(x,-)/\mathcal{K}\underline{\mathcal{L}}\big)\Big) \cong$$

$$\cong \mathcal{K}(\mathcal{J}^x) \oplus \big(\bigoplus_{\delta \in \mathcal{A}_1} \mathcal{K}(\mathcal{J}^x)(\underline{x},-)\big) \oplus \big(\bigoplus_{\delta' \in \mathcal{A}_2} \mathcal{K}(\mathcal{J}^x)(\underline{x},-)/\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)\underline{\mathcal{L}}\big).$$

(Usando que $\underline{\mathcal{A}}$ es $k$-base de $\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)$ y que $\overline{\underline{\mathcal{A}}\mathcal{L}^c(\underline{x},-)}$ es $k$-base de $\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)/\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)\underline{\mathcal{L}}$, obtenemos una $k$-base natural para el lado derecho, esta base es llevada por el isomorfismo a la base del enunciado. //

3.3.3 <u>Observación</u>: Supongamos $\mathcal{K} = kC$ y $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$ como antes. Entonces los elementos de $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}(v,w)$ con $v \in |\mathcal{K}_{\mathcal{J}}|$ y $w \in |\mathcal{K}(\mathcal{J}^x)|$ son de la forma $g\sigma$ con $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, id_v\}$ y $g \in \mathcal{K}(\mathcal{J}^x)$. De manera similar los elementos de

$\mathcal{K}_\mathcal{L}(v;w)$ con $v \in |\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)|$ y $w \in |\mathcal{K}_\mathcal{L}|$ son de la forma $\pi' h$ con $\pi' \in \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, id_w\}$ y $h \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$

(29) (donde $x \underset{\nu_1}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} x\oplus z \underset{\nu_2}{\overset{\pi_2}{\rightleftarrows}} z \underset{\nu_4}{\overset{\pi_4}{\rightleftarrows}} y\oplus z \underset{\nu_3}{\overset{\pi_3}{\rightleftarrows}} y$ son las proyecciones y las inyecciones canónicas.)

En efecto. Probaremos solamente la primera parte.

Si $v \in |\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)|$, entonces $\mathcal{K}_\mathcal{L}(v,w) = \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(v,w)$, por tanto cada elemento $f \in \mathcal{K}_\mathcal{L}(v,w)$ lo podemos escribir como $f = f \cdot id_v$.

Analicemos ahora los casos restantes: $\mathcal{K}_\mathcal{L}(x, x\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(z, x\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(y, y\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(z, y\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(x, y\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(y, x\oplus z)$, $\mathcal{K}_\mathcal{L}(z,w)$ con $w \neq \underline{x}, \underline{y}$.

Si $f \in \mathcal{K}_\mathcal{L}(x, x\oplus z)$, entonces $f = f\pi_1\nu_1 = g\nu_1$, en donde $g = f\pi_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(x\oplus z, x\oplus z)$.

Si $f \in \mathcal{K}_\mathcal{L}(z, x\oplus z)$, entonces $f = f\pi_2\nu_2 = g\nu_2$, en donde $g = f\pi_2 \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(x\oplus z, x\oplus z)$.

Si $f \in \mathcal{K}_\mathcal{L}(x, y\oplus z)$, entonces $f = f\pi_1\nu_1 = g\nu_1$, en donde $g = f\pi_1 \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(x\oplus z, y\oplus z)$.

De manera similar, se prueban los otros casos.

La otra parte, se puede analizar en forma análoga.

Más aún, de lo anterior no es difícil convencerse que $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$, $\{\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3, \nabla_4\}$ y $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$ generan a la categoría $\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}$.

3.3.9 <u>LEMA</u>. (i) <u>Si</u> $\delta \in \mathcal{L}$ <u>termina en</u> $\mathcal{L}_0^*$; $h \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)(\underline{x}, -)$, <u>entonces</u> $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(1 \underset{\underline{x}}{\otimes} \underline{\delta}) \cong \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h$ <u>en</u> $Mod(\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*))$; <u>el isomorfismo manda</u> $fh \otimes \underline{\delta}$ <u>en</u> $fh$.

(ii) <u>Si</u> $\delta \in \mathcal{L}(?, x)$, $h \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)(\underline{x}, -)$, <u>entonces</u> $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(1 \underset{k}{\otimes} \underline{\delta}) \cong$
$\cong \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h$ <u>en</u> $Mod(\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*))$; <u>el isomorfismo manda</u> $fh \otimes \underline{\delta}$ <u>en</u> $fh$.

Demostración: (Aquí $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(1 \otimes \underline{\delta}) \subseteq \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*) \otimes \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$).

"(i)" Sea $\underline{w}$ en $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$ y sea $\delta \in \mathcal{L}$.

Sea $\varphi_w : \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(\underline{w}) = \tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}(\underline{x}, \underline{w})h \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(1 \underset{\underline{x}}{\otimes} \underline{\delta})(\underline{w})$

$$\begin{aligned} &\phantom{\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)h(1 \otimes \underline{\delta})(\underline{w})} \;\; \| \\ &\tilde{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}(\underline{x}, \underline{w})h(1 \otimes \underline{\delta}) \\ fh &\longmapsto fh \otimes \underline{\delta} \end{aligned}$$

claramente $\varphi$ es suprayectiva, natural y lineal.

Ahora si $fh \underset{\underline{x}}{\otimes} \underline{\delta} = \varphi_w(fh) = 0$, escribiendo $fh = \sum \lambda_i \underline{\delta}_i$ con

$\delta_i \in \mathcal{S}(x,w)$, veremos que $\lambda_i = 0$ para todo $i$. Luego $\varphi$ es inyectiva.

Caso 1: Si $\delta \in \mathcal{S}_i$, entonces $0 = \sum \lambda_i \underline{\delta_i} \otimes \underline{\delta} = \sum \lambda_i (\underline{\delta_i} \otimes \underline{\delta})$ y por 3.3.2, $\lambda_i = 0 \ \forall i$.

Caso 2: Si $\delta \in \mathcal{L}$ y termina en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}$, entonces

$$f h = \sum_{\delta' \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}''(x,w)} \lambda_{\delta'} \underline{\delta'} + \sum_{\delta'' \in \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(x,w)} \lambda_{\delta''} \underline{\delta''} \text{ ; pongamos } \delta = \mathcal{L}_0^* \mathcal{L} \delta_1 .$$

Por lo tanto, $0 = \sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta'} \otimes \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1} + \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta''} \otimes \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1}$.

Pero como $\delta''$ comienza en $\mathcal{L}$, entonces $\underline{\delta''} = \underline{\delta_1''} \underline{\mathcal{L}}$ y

$$\underline{\delta''} \otimes \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1} = \underline{\delta_1''} \underline{\mathcal{L}} \otimes \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1} = \underline{\delta_1''} \otimes \underline{\mathcal{L}} \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1} = \underline{\delta_1''} \otimes \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1} =$$
$$= \underline{\delta_1''} \underline{\mathcal{L}} \otimes \underline{\delta_1} = \underline{\delta''} \otimes \underline{\delta_1} .$$

$$\therefore \ \circledast : \ 0 = \sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta'} \otimes (\underline{\delta_1} - \underline{\mathcal{L}^*} \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1}) + \sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta'} \otimes \underline{\delta_1} + \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta''} \otimes \underline{\delta_1} .$$

Caso (A): $\underline{\delta_1}$ no contiene $\underline{\mathcal{L}_0^*}$

Entonces pasamos $\underline{\delta_1}$ a la izquierda del símbolo tensorial y obtenemos una expresión del siguiente tipo para $\circledast$:

$$\sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta'} \otimes (\underline{\delta_1} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \delta_1) + \sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta'} \underline{\delta_1} \otimes 1 + \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta''} \underline{\delta_1} \otimes 1 = 0 \text{ y}$$

para algunos $\mu_\rho \in K$:

$$\sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'}\, \underline{\delta}' \otimes (\underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1) + \sum_{\rho \in \mathcal{L}} \mu_\rho\, \underline{\rho} \otimes 1 = 0 .$$

$\therefore \lambda_{\delta'} = 0 \ \forall \delta'$ ; $0 = \mu_\rho \ \forall \rho$.

$$\therefore \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''}\, \underline{\delta}'' \otimes \underline{\delta}_1 = \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''}\, \underline{\delta}''\underline{\delta}_1 \otimes 1 = 0 .$$

Pero $\delta''\delta_1 \in \mathcal{L}$ son todos distintos ($\delta_1$ no termina ni en $\alpha$ ni en $\alpha_0^*$).

Por lo tanto $\lambda_{\delta''} = 0 \ \forall \delta''$. Así pues, $fh = 0$.

<u>Caso (B)</u>: <u>$\delta_1$ contiene $\alpha_0^*$</u>.

Entonces $\delta_1 = \tilde{\delta}_1 \alpha^* \delta_1'$ con $\tilde{\delta}_1$ camino de $C$.

<u>Caso (B-1)</u>: <u>La última flecha de $\tilde{\delta}_1$ no es $\alpha$</u>:

Entonces $\otimes = \sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'}\, \underline{\delta}' \otimes (\underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1) + \sum_{\rho \in \mathcal{L}} \mu_\rho\, \underline{\rho} \otimes \alpha^* \underline{\delta}_1' = 0$.

$\therefore \lambda_{\delta'} = 0 \ \forall \delta'$.

$\therefore 0 = \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''}\, \underline{\delta}'' \otimes \underline{\tilde{\delta}}_1 \alpha^* \underline{\delta}_1' = \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''}\, \underline{\delta}''\underline{\tilde{\delta}}_1 \otimes \alpha^* \underline{\delta}_1'$. Pero

$\delta''\tilde{\delta}_1 \in \mathcal{L}$ son todos distintos (pues $\tilde{\delta}_1$ no termina en $\alpha$ ni en $\alpha_0^*$).

Aplicando el corolario anterior se concluye que $\lambda_{\delta''} = 0$ $\forall \delta''$.

$\therefore fh = 0$ .

<u>Caso</u> (B-2): <u>La última flecha de $\delta_1'$ es $\alpha$</u>.

Entonces $\delta_1' = \alpha\delta_2$, $\delta_1 = \tilde{\delta}_1 \alpha^* \alpha \delta_2$ .

$$\therefore \otimes = \sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \otimes (\underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1) + \Big(\sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \underline{\tilde{\delta}}_1 + \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\tilde{\delta}}_1\Big) \otimes \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2 =$$

$$= \sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \otimes (\underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1) + \Big(-\sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \underline{\tilde{\delta}}_1 - \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\tilde{\delta}}_1\Big) \otimes (\underline{\delta}_2 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2) +$$

$$+ \Big(\sum_{\delta'} \lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \underline{\tilde{\delta}}_1 + \sum_{\delta''} \lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\tilde{\delta}}_1\Big) \otimes \underline{\delta}_2 \;.$$

Prosiguiendo de esta manera (considerando casos (A), (B-1), (B-2) para $\delta_2$ ...) obtenemos en un número finito de pasos:

$$\otimes = \sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \otimes (\underline{\delta}_1 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_1) + \Big(\sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \underline{\tilde{\delta}}_1 + \sum_{\delta''} -\lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\tilde{\delta}}_1\Big) \otimes (\underline{\delta}_2 - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2)$$

$$+ \cdots + \Big(\sum_{\delta'} -\lambda_{\delta'} \underline{\delta}' \underline{\tilde{\delta}}_1 \cdots \underline{\tilde{\delta}}_{n-1} + \sum_{\delta''} -\lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\tilde{\delta}}_1 \cdots \underline{\tilde{\delta}}_{n-1}\Big) \otimes (\underline{\delta}_n - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_n) +$$

$$+ \sum_{\gamma \in \mathcal{B}} \mu_\gamma \underline{\gamma} \otimes \alpha^* \underline{\delta}_n + \sum_{\gamma' \in \mathcal{B}} \mu_{\gamma'} \underline{\gamma}' \otimes 1$$ (con $\delta_n$ que no termina en $\alpha$) con $\mathrm{long}(\delta_1) > \mathrm{long}(\delta_2) > \cdots > \mathrm{long}(\delta_n)$ .

$\therefore \lambda_{\delta'} = 0 \ \forall \delta'$, $\mu_\gamma = 0 \ \forall \gamma$, $\mu_{\gamma'} = 0 \ \forall \gamma'$. Por lo tanto

$$\sum_{\delta''} -\lambda_{\delta''} \underline{\delta}'' \underline{\delta}_1 = 0 \;.$$

pero $\delta''\tilde{\delta}_\cdot \in \mathcal{A}$ son todos distintos (pues $\tilde{\delta}_\cdot$ no termina en $\mathcal{L}$ ni en $\mathcal{L}^*$). Por lo tanto $\lambda_{\delta''} = 0 \ \forall \delta''$.
Así pues, $fh = 0$.
"(ii)" Es inmediato pues $\{\underline{\delta} \otimes \underline{\delta}' / \delta' \in \mathcal{A}(?,x), \delta \in \mathcal{A}(x,-)\}$ es $k$-base de $\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*) \underset{k}{\otimes} \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)(?,\underline{x})$. //

3.3.5 <u>Afirmación</u>. <u>Sean</u> $B, B' \in \mathrm{Bim}_{\tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}$ (<u>ver pag. 2</u>).
<u>Si</u> $B \cong B'$ <u>en</u> $\mathrm{Bim}_{\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)} \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$, <u>entonces</u> $B \cong B'$ en $\mathrm{Bim}_{\tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}} \tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}$.

Demostración: Sup. que $\eta: B \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en $\mathrm{Bim}_{\tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)} \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$.
Consideremos la aplicación $\bar{\eta}: B \longrightarrow B'$ definida como sigue:
si $a, b$ son objetos de $\tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}$, entonces podemos elegir objetos $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{K}}(\mathcal{L}^*)$ tales que $a | \tilde{a}$, $b | \tilde{b}$.
luego si $f \in B(a,b)$ definimos $\bar{\eta}_{(a,b)}(f) =$
$= \pi(\tilde{b}, b)\eta(\tilde{a}, \tilde{b})(\nabla(b, \tilde{b}) f \pi(\tilde{a}, a))\nabla(a, \tilde{a})$. Como $\eta$ es lineal, también lo es $\bar{\eta}$; además tenemos que $\bar{\eta}^{-1} = \bar{\eta}^{\prime}$.
Claramente $\bar{\eta}$ es inyectiva y suprayectiva.
Por probar que $\bar{\eta}$ es natural.
En efecto. Sea $(f,g) \in \tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}^o \times \tilde{\mathcal{K}}_\mathcal{L}((a,b),(c,d))$. Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B(a,b) \arrow[r, "\eta(a,b)"] \arrow[d, "B(f,g)"'] \arrow[dr, phantom, "(*_0)"] & B'(a,b) \arrow[d, "B'(f,g)"] \\ B(c,d) \arrow[r, "\eta(c,d)"] & B'(c,d) \end{tikzcd}$$

Si $v \in B(a,b)$ tenemos:

$(*_1)$: $\eta(c,d)B(f,g)(v) = \eta(c,d)(gvf) = \pi(\tilde{d},d)\eta(\tilde{c},\tilde{d})\left(\nabla(d,\tilde{d})gvf\pi(\tilde{c},c)\right)\nabla(c,\tilde{c})$,

y $(*_2)$: $B'(f,g)\eta(a,b)(v) = g\pi(\tilde{b},b)\eta(\tilde{a},\tilde{b})\left(\nabla(b,\tilde{b})v\pi(\tilde{a},a)\right)\nabla(a,\tilde{a})f =$

$= \underbrace{\pi(\tilde{d},d)\nabla(d,\tilde{d})}_{1_d}g\pi(\tilde{b},b)\eta(\tilde{a},\tilde{b})\left(\nabla(b,\tilde{b})v\pi(\tilde{a},a)\right)\nabla(a,\tilde{a})f\underbrace{\pi(\tilde{c},c)\nabla(c,\tilde{c})}_{1_c}$.

Ahora sean $h_1 := \nabla(a,\tilde{a})f\pi(\tilde{c},c) : \tilde{c} \longrightarrow \tilde{a} \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$,

$h_2 := \nabla(d,\tilde{d})g\pi(\tilde{b},b) : \tilde{b} \longrightarrow \tilde{d} \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$, y

$w := \nabla(b,\tilde{b})v\pi(\tilde{a},a) \in B(\tilde{a},\tilde{b})$.

Como $\eta$ es natural, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} B(\tilde{a},\tilde{b}) \arrow[r, "\eta(\tilde{a},\tilde{b})"] \arrow[d, "B(h_1,h_2)"'] & B'(\tilde{a},\tilde{b}) \arrow[d, "B'(h_1,h_2)"] \\ B(\tilde{c},\tilde{d}) \arrow[r, "\eta(\tilde{c},\tilde{d})"] & B'(\tilde{c},\tilde{d}) \end{tikzcd}$$ conmuta.

Por lo tanto, $\eta(\tilde{c},\tilde{d})B(h_1,h_2)(w) = \eta(\tilde{c},\tilde{d})\left(\nabla(d,\tilde{d})gvf\pi(\tilde{c},c)\right) =$

$= \nabla(d,\tilde{d})g\pi(\tilde{b},b)\eta(\tilde{a},\tilde{b})\left(\nabla(b,\tilde{b})v\pi(\tilde{a},a)\right)\nabla(a,\tilde{a})f\pi(\tilde{c},c) =$

$= B'(h_1, h_2)\,\eta(z,r)\,(w)$.

De lo anterior se sigue que $(*_1) = (*_2)$ (es decir, el diagrama $(*_0)$ conmuta), y en consecuencia $\eta$ es natural.

$\therefore$ $\eta$ es isomorfismo. //

3.3.6 LEMA. Sea $\pi : \mathcal{K}_1 \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ el morfismo composición.

Sea $S := \mathcal{L}^* \otimes 1 - 1 \otimes \mathcal{L}^*$. Entonces:

(i) $\operatorname{Ker} \pi = \mathcal{K}_1 S \mathcal{K}_1$.

(ii) $\operatorname{Ker} \pi$ es un bimódulo libre sobre $\mathcal{K}_1$ con base $\{\pi_4 \otimes \sigma_3, \pi \otimes \sigma_2\}$.

Demostración: Probemos primeramente lo siguiente:

Afirmación 1: Cada elemento $h \in (\mathcal{K}_1 \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_1)(v, w)$ puede expresarse en la forma:

$h = \pi(\underline{b}, w) \otimes f\, \sigma(v, \underline{a}) + r$, donde $v/\underline{a}$, $w/\underline{b}$ en $\mathcal{K}_1$;

$f \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ y $r \in \mathcal{K}_1 S \mathcal{K}_1$.

En efecto: Claramente $\mathcal{K}_1 \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_1$ está generado por:

$$\Gamma = \left\{ \pi(\underline{b}, w)(\underline{S}' \otimes \underline{S})\,\sigma(v, \underline{a}) \;\middle|\; \begin{array}{l} v/\underline{a},\ w/\underline{b} \text{ en } \mathcal{K}_1;\ \text{y } S \in \mathcal{S}(a,c), \\ S' \in \mathcal{S}(c,w) \text{ para algún } c \in |\mathcal{C}| \end{array} \right\}$$

Pero si $g = \pi(\underline{b}, w)(\underline{\delta}' \otimes \underline{\delta})\nabla(v, \underline{a}) \in \Gamma$, y $\delta' = \beta_m \cdots \beta_1$ es la descomposición en flechas de $C^*$ de $\delta'$, tomando el menor índice $i$ con $\beta_i = \lambda_0^*$: $\delta' = \delta'' \lambda_0^* \delta'''$ con $\delta''$ y $\delta'''$ caminos.

Entonces: $\underline{\delta}' \otimes \underline{\delta} = \underline{\delta}'' \lambda^* \otimes \underline{\delta}''' \underline{\delta} = \underline{\delta}''(\lambda^* \otimes 1)\underline{\delta}''' \underline{\delta} - \underline{\delta}''(1 \otimes \lambda^*)\underline{\delta}''' \underline{\delta} +$
$+ \underline{\delta}''(1 \otimes \lambda^*)\underline{\delta}''' \underline{\delta} = \underline{\delta}'' 5 \underline{\delta}''' \underline{\delta} + \underline{\delta}'' \otimes \lambda^* \underline{\delta}''' \underline{\delta}$.

Haciendo inducción sobre el número de veces que $\lambda_0^*$ aparece en $\delta'$, obtenemos:

$$g = \pi(\underline{b}, w) \otimes \underline{\delta}' \underline{\delta} \nabla(v, \underline{a}) + \tau_g \quad \text{con } \tau_g \in \tilde{\mathcal{K}}_j 5 \tilde{\mathcal{K}}_i .$$

Ahora bien, si $h \in \tilde{\mathcal{K}}_j \underset{\tilde{\mathcal{K}}}{\otimes} \tilde{\mathcal{K}}_i$, podemos escribir:

$h = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(\underline{b}_i, w) \underline{\delta}_i' \otimes \underline{\delta}_i \nabla(v, \underline{a}_i)$ (combinación lineal de elementos de $\Gamma$ con $\underline{b}_i \in \tilde{\mathcal{K}}(\lambda^*)$)

$= \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(\underline{b}_i, w) \otimes \underline{\delta}_i' \underline{\delta}_i \nabla(v, \underline{a}_i) + \tau_i$ (por la discusión anterior aplicada a cada sumando).

Sea $\underline{b} := \begin{cases} w & \text{si } w \neq x, y, z \\ x \otimes z & \text{si } w = x \\ y \otimes z & \text{si } w = y \\ y \otimes t & \text{si } w = z \end{cases}$, y sea $a = a_{i_0}$ para un $i_0 \in I$ fijo.

Entonces si $w \neq z$ implica $\underline{b}_i = \underline{b}$ $\forall i$, y entonces:

$$h = \sum_i \lambda_i \pi(\underline{b}, w) \otimes \underline{\delta}_i' \underline{\delta}_i \nabla(v, \underline{a}_i) + r_i =$$

$$= \pi(\underline{b}, w) \otimes \underbrace{\sum \lambda_i \underline{\delta}_i' \underline{\delta}_i \nabla(v, \underline{a}_i) \underbrace{\big(\pi(\underline{a}, v)\nabla(v, \underline{a})\big)}_{1_v}}_{f} + \underbrace{\sum r_i}_{r}.$$

Ahora si $w = z$, recordando que $\pi_2 = \pi_4 \nabla_4 \pi_2 = \pi_4 \underline{\alpha}$ y $\pi(\underline{b}, w) = \pi_2, \pi_4$ (pues $\underline{b}_i \in \{y \otimes z, x \otimes z\}$), razonando como antes, obtenemos:

$$h = \sum \lambda_j \pi_2 \otimes \underline{\delta}_j' \underline{\delta}_j \nabla(v, \underline{a}_j) + \sum \lambda_{j'} \pi_4 \otimes \underline{\delta}_{j'}' \underline{\delta}_{j'} \nabla(v, \underline{a}_{j'}) + r$$

$$= \pi_4 \otimes \sum \lambda_j \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_j' \underline{\delta}_j \nabla(v, \underline{a}_j) + \sum \lambda_{j'} \pi_4 \otimes \underline{\delta}_{j'}' \underline{\delta}_{j'} \nabla(v, \underline{a}_{j'}) + r$$

$$= \pi_4 \otimes \underbrace{\Big(\sum \lambda_j \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_j' \underline{\delta}_j \nabla(v, \underline{a}_j) \pi(\underline{a}, v) + \sum \lambda_{j'} \underline{\delta}_{j'}' \underline{\delta}_{j'} \nabla(v, \underline{a}_{j'}) \pi(\underline{a}, v)\Big)}_{f} \nabla(v, \underline{a})$$

$$\therefore r = \pi_4 \otimes f \nabla(v, \underline{a}) + r. \quad //$$

"(ii)"

Claramente: $\pi(S) = \pi(\alpha^* \otimes 1 - 1 \otimes \alpha^*) = \alpha^* - \alpha^* = 0$.

$\therefore \mathcal{K}_\alpha S \mathcal{K}_\alpha \subseteq \operatorname{Ker} \pi$.

"$\operatorname{Ker} \pi \subseteq \mathcal{K}_\alpha S \mathcal{K}_\alpha$".

Basta probar que: $\ell = \pi(\underline{b}, w) \otimes f \nabla(v, \underline{a}) \in (\operatorname{Ker} \pi)(v, w)$

implica $\ell \in \mathcal{K}_{\mathscr{L}} S \mathcal{K}_{\mathscr{L}}$ .

En efecto. Supongamos $0 = \pi(\ell) = \pi(\underline{b},\omega) f \nabla(v,\underline{a})$ .

<u>Caso 1</u>: $\pi(\underline{b},\omega) = id$.

Entonces $0 = \pi(\ell) = \pi(\underline{b},\omega) f \nabla(v,\underline{a})$, y por lo tanto $\ell = 0$ .

<u>Caso 2</u>: $\pi(\underline{b},\omega) = \pi_2$ .

Como $0 = \pi_2 f \nabla(v,\underline{a})$, entonces $f\nabla(v,\underline{a}) = \nabla_1 \pi_1 f \nabla(v,\underline{a}) =$
$= (1 - \mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}}) f \nabla(v,\underline{a})$. Pero $\pi_2 = \pi_2 \nabla_2 \pi_2 = \pi_2 (\mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}})$ .

$\therefore \pi_2 \otimes \nabla_1 \pi_1 = \pi_2 (\mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}} \otimes (1 - \mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}})) = \pi_2 (\mathscr{L}^* \otimes (\underline{\mathscr{L}} - \underline{\mathscr{L}} \mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}})) = 0$ .

Por lo tanto $\ell = 0$ .

<u>Caso 3</u>: $\pi(\underline{b},\omega) = \pi_1$

Como $\pi_1 f \nabla(v,\underline{a}) = 0$, entonces $f\nabla(v,\underline{a}) = \nabla_2 \pi_2 f \nabla(v,\underline{a}) =$
$= \mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}} f \nabla(v,\underline{a})$. Además $\pi_1 = \pi_1 \nabla_1 \pi_1$ .

$\therefore \pi_1 \otimes f\nabla(v,\underline{a}) = \pi_1 \otimes \mathscr{L}^* \underline{\mathscr{L}} f \nabla(v,\underline{a}) = -\underbrace{\pi_1 \mathscr{L}^*}_{0} \otimes \underline{\mathscr{L}} f \nabla(v,\underline{a}) + r =$
$= 0 + r \in \mathcal{K}_{\mathscr{L}} S \mathcal{K}_{\mathscr{L}}$ .

<u>Caso 4</u>: $\pi(\underline{b},\omega) = \pi_3$ . Similar al caso 3 .

<u>Caso 5</u>: $\pi(\underline{b},\omega) = \pi_4$ . Similar al caso 2 .

Mostrándose (a) .

"(ii)" 1) $\ker \pi = {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(\pi_1 \otimes \nabla_2){}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} + {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(\pi_4 \otimes \nabla_3){}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ :

En efecto: $\mathfrak{S} = \mathcal{L}^{*} \otimes 1 - 1 \otimes \mathcal{L}^{*} = \nabla_1 \pi_4 \otimes 1 - 1 \otimes \nabla_2 \pi_4 = \nabla_2 \pi_4 \otimes (\nabla_3 \pi_3 + \nabla_4 \pi_4)$

$- (\nabla_1 \pi_1 + \nabla_2 \pi_2) \otimes \nabla_2 \pi_4 = \nabla_2 (\pi_4 \otimes \nabla_3) \pi_3 + \nabla_2 \pi_4 \otimes \nabla_4 \pi_4 - \nabla_1 (\pi_1 \otimes \nabla_2) \pi_4 -$

$- \nabla_2 \pi_2 \otimes \nabla_2 \pi_4$ .

pero $\pi_4 \otimes \nabla_4 = \pi_4 \otimes \underline{\mathcal{L}} \nabla_2 = \pi_4 \underline{\mathcal{L}} \otimes \nabla_2 = \pi_4 \otimes \nabla_2$ .

$\therefore \mathfrak{S} = \nabla_2 (\pi_4 \otimes \nabla_3) \pi_3 - \nabla_1 (\pi_1 \otimes \nabla_2) \pi_4$ .

Entonces $\pi_1 \mathfrak{S} \nabla_4 = -\pi_1 \otimes \nabla_2$ y $\pi_2 \mathfrak{S} \nabla_3 = \pi_4 \otimes \nabla_3$ .

por lo tanto ${}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(\pi_1 \otimes \nabla_2){}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} + {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(\pi_4 \otimes \nabla_3){}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} = {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} \mathfrak{S} \, {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} = \ker \pi$.

2) $\pi_1 \otimes \nabla_2$ y $\pi_4 \otimes \nabla_3$ son libres sobre ${}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ .

En efecto, primeramente verificaremos que $\pi_1 \otimes \nabla_2$ es libre sobre ${}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})$ :

$G = {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} / (\pi_1 \otimes \nabla_2) {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} / (?,-) = {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,-)(\pi_1 \otimes \nabla_2) {}^{u}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(?,z) =$

$= {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(\underline{x},-) \nabla_1 (\pi_1 \otimes \nabla_2) \pi_2 \, {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(?,\underline{x}) =$

$= {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes \nabla_2 \pi_2) {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(?,\underline{x}) =$

$= {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes \mathcal{L}^{*}\underline{\mathcal{L}}) {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(?,\underline{x}) =$

$= {}^{u}\mathcal{K}(\mathcal{L}^{*})(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes 1) \mathcal{L}^{*} \underline{\mathcal{L}} \left( \bigoplus_{s \in \mathcal{S}'(?,x)} k \underline{s} \right)$ (ver (iii) de 3.3.1).

Obsérvese que para cada $\delta \in \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}'$ ; $\underline{\mathcal{L}}\,\underline{\delta} = 0$ .

Sea $\mathcal{H}(?,x) := \mathcal{L}'(?,x) \setminus \mathcal{L}_2(?,x) = \mathcal{L}(?,x) \setminus \{\delta \in \mathcal{L} \mid \delta$ termina en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}\}$.

Entonces $G = \sum_{\delta \in \mathcal{H}(?,x)} {}^{\sim}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta})$.

<u>Afirmación</u> 2. La suma anterior es directa.

En efecto: Sean $a, b \in {}^{\sim}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$ y

$(\Delta_1)$: $0 = \sum_{\delta \in \mathcal{H}(a,x)} f_\delta \nabla_1 \pi_1 \otimes \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta}$ ; $f_\delta \in {}^{\sim}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x}, b)$.

<u>Nótese</u> que: $\{\mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta} \mid \delta \in \mathcal{H}(?,x)\} = \underline{\mathcal{L}}_1 \cup (\underline{\mathcal{L}}_3 = \{\underline{\delta} \in \underline{\mathcal{L}} \mid \delta$ termina en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}\})$.

Por lo tanto de $(\Delta_1)$ tenemos:

$0 = \sum_{\delta \in \mathcal{L}_1} f_\delta \nabla_1 \pi_1 \otimes \underline{\delta} + \sum_{\delta' \in \mathcal{L}_3} f_{\delta'} \nabla_1 \pi_1 \otimes \underline{\delta}'$. Razonando como en las páginas 162-163, tenemos:

$$0 = \sum_{\delta \in \mathcal{L}_1} f_\delta \otimes \nabla_1 \pi_1 \otimes \underline{\delta} + \sum_{\delta_i' \in \mathcal{L}_3} \Big[ - f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \otimes (\underline{\delta}_2^{(i)} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta}_2^{(i)}) -$$

$$- f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \underline{\tilde{\delta}}_2^{(i)} \otimes (\underline{\delta}_3^{(i)} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta}_3^{(i)}) - \dots - f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \underline{\tilde{\delta}}_2^{(i)} \cdots \underline{\tilde{\delta}}_{n_i-1}^{(i)} \otimes (\underline{\delta}_{n_i}^{(i)} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, \underline{\delta}_{n_i}^{(i)})$$

$$+ f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \underline{\tilde{\delta}}_2^{(i)} \cdots \underline{\tilde{\delta}}_{n_i-1}^{(i)} \otimes \underline{\delta}_{n_i}^{(i)} \Big]$$ con $\delta_{n_i}^{(i)} = id$ o $\delta_{n_i}^{(i)}$ un camino que no termina en $\mathcal{L}_0^* \mathcal{L}$ pero sí en $\mathcal{L}_0^*$.

escribiendo $f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 = \sum_{\mu \in \mathcal{A}} \lambda_{\delta_i', \mu} \underline{\mu}$ (pues $\underline{\mathcal{A}}$ es k-base de $\mathcal{K}(\omega)$),

tenemos:

$$f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \otimes (\underline{\delta}_2^{(i)} - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2^{(i)}) = \sum_{\mu \in \mathcal{A}} \lambda_{\delta_i', \mu}\, \underline{\mu} \otimes (\underline{\delta}_2^{(i)} - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2^{(i)}) =$$

$$= \sum_{\mu \in \mathcal{A}_\alpha^c} \lambda_{\delta_i', \mu}\, \underline{\mu} \otimes (\underline{\delta}_2^{(i)} - \alpha^* \underline{\alpha}\, \underline{\delta}_2^{(i)}).$$

Pero $\delta_i' \neq \delta_j'$ implica $\delta_2^{(i)} \neq \delta_2^{(j)}$.

Por lo tanto, si $\delta_i'$ es tal que $\delta_2^{(i)}$ tiene longitud máxima entre todos los $\delta_2^{(j)}$ que tienen algún coeficiente $\lambda_{\delta_j', \mu} \neq 0$, entonces resulta (por 3.3.2) que $\lambda_{\delta_i', \mu} = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{A}_\alpha^c$, lo cual es imposible.

$\therefore$ para todo $\delta_i' \in \mathcal{A}_3$, $f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1$ se factoriza por $\underline{\alpha}$ (es decir, igual a $g\,\underline{\alpha}$). Pero $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}\, e_2 = \underline{\alpha}\, \nabla_2 \pi_2$.

$$\therefore f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 = f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 e_2 = f_{\delta_i'} \nabla_1 \underbrace{\pi_1 \nabla_2}_{=0} \pi_2 = 0.$$

$$\therefore f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 = 0 \quad \forall \delta_i' \in \mathcal{A}_3.$$

Por lo tanto $\sum_{\delta_i' \in \mathcal{A}_3} f_{\delta_i'} \nabla_1 \pi_1 \otimes \underline{\delta}_i' = 0$.

$\therefore \sum_{\delta \in \mathcal{B}_1} f_\delta \nabla_1 \pi_1 \otimes \underline{\delta} = 0$. De donde se sigue que $f_\delta \nabla_1 \pi_1 = 0 \ \forall \delta$

(pues si $f_\delta \nabla_1 \pi_1 = \sum \lambda_{\delta, \eta} \underline{\eta}$, se sustituye y se usa la descripción de la base de 3.3.2). Mostrándose la afirmación 2. //

Luego entonces tenemos:

$$G = {}^{\varepsilon}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} / (\pi_1 \otimes \nabla_2) {}^{\varepsilon}\mathcal{K}_{\mathcal{L}} / (?,-) = \bigoplus_{\delta \in \mathcal{H}(?,x)} {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta})$$

$$\cong \bigoplus_{\delta \in \mathcal{H}(?,x)} {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-) \nabla_1 \pi_1 \quad (\text{por } 3.3.4)$$

$$\cong \bigoplus_{\delta \in \mathcal{H}(?,x)} {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-)(\nabla_1 \pi_1 \otimes_k \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta}) \quad (\text{por } 3.3.4)$$

$$\cong {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-) \nabla_1 \pi_1 \otimes_k \Big( \bigoplus_{\delta \in \mathcal{H}(?,x)} k \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta} \Big) =$$

$$= {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-) \nabla_1 \pi_1 \otimes_k \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}}\, {}^{\varepsilon}\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(?,\underline{x}) \cong$$

$\cong \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(\underline{x},-)\nabla_1\pi_1 \otimes \nabla_2\pi_2\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)(?,\underline{x}) \cong \mathcal{K}_{\mathcal{L}}|(x,-)\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}|(?,z)$.

Verifiquemos ahora que es un isomorfismo natural de bimódulos sobre $\mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$.

Sea $f\pi_1 \otimes \nabla_2 g$ un generador de $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}|(\pi_1\otimes\nabla_2)\mathcal{K}_{\mathcal{L}}|(?,-)$.

Sean $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{K}(\mathcal{L}^*)$. Entonces.

$\bar{f} f\pi_1 \otimes \nabla_2 g\bar{g} = \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \otimes \nabla_2\pi_2 g'\bar{g}$ (donde $f = f'\nabla_1$ y $g = \pi_2 g'$)

$= \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \otimes \mathcal{L}^*\underline{\mathcal{L}}\, g'\bar{g}$.

Escribiendo $\mathcal{L}^*\underline{\mathcal{L}}\, g'\bar{g} = \sum_{\delta\in\mathcal{A}^*} \lambda_\delta \underline{\delta}$, donde $\mathcal{A}^* = \{\delta \in \mathcal{A} / \delta \text{ termina en } \mathcal{L}^*\}$,

tenemos: $\bar{f} f\pi_1 \otimes \nabla_2 g\bar{g} = \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \otimes \sum \lambda_\delta \underline{\delta} = \sum \lambda_\delta \bar{f}\nabla_1\pi_1 \otimes \underline{\delta}$,

y se transforma bajo nuestro homomorfismo en:

$\sum \lambda_\delta \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \underset{k}{\otimes} \underline{\delta} = \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \underset{k}{\otimes} \sum \lambda_\delta \underline{\delta} = \bar{f} f'\nabla_1\pi_1 \underset{k}{\otimes} \mathcal{L}^*\underline{\mathcal{L}}\, g'\bar{g} =$

$= \bar{f}(f\pi_1 \otimes \nabla_2 g)\bar{g}$. Por lo tanto nuestro isomorfismo es natural.

Finalmente por 3.3.5, $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,-)(\pi_1\otimes\nabla_2)\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(?,z) \cong$

$\cong \mathcal{K}_{\mathcal{L}}(x,-)\underset{k}{\otimes}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}(?,z)$ en $\mathrm{Bimod}_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}}\text{-}\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$.

Similarmente $\pi_4 \otimes \nabla_3$ es $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$-libre.

1) la suma ${}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell(\pi_1\otimes\nabla_2){}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell + {}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell(\pi_4\otimes\nabla_3){}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell$ es directa.

En efecto. Sea $B := {}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell(\pi_1\otimes\nabla_2){}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell \cap {}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell(\pi_4\otimes\nabla_3){}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell$

(${}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell$-${}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell$ subbimódulo de ${}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell \underset{\mathcal{K}}{\otimes} {}^{\alpha}\mathcal{K}_\ell$).

Por probar que $B=0$. Para esto bastará mostrar que $B/_{{}^{\alpha}\mathcal{K}(\mu)}=0$.

Sea $h\in B(\underline{a},\underline{b})$ con $\underline{a},\underline{b}\in|{}^{\alpha}\mathcal{K}(\mu)|$, entonces

$$h=\sum_i \mu_i(\pi_1\otimes\nabla_2)v_i = \sum_j f_j(\pi_4\otimes\nabla_3)g_j .$$

Podemos elegir $v_i'$, $g_j'$ tales que:

$$\begin{tikzcd} \underline{a} \arrow[r, "v_i"] \arrow[dr, dashed, "v_i'"'] & z \\ & \underline{y} \arrow[u, "\pi_1"'] \end{tikzcd} \quad \therefore\ \mu_i(\pi_1\otimes\nabla_2)v_i = \mu_i(\pi_1\otimes\alpha^*)v_i'$$

$$\begin{tikzcd} \underline{b} \arrow[r, "g_j"] \arrow[dr, dashed, "g_j'"'] & y \\ & \underline{y} \arrow[u, "\pi_3"'] \end{tikzcd} \quad \therefore\ f_j(\pi_4\otimes\nabla_3)g_j = f_j(\pi_4\otimes(1-\underline{\alpha}\alpha^*))g_j'$$

Entonces $h=\sum_i\mu_i(\pi_1\otimes\alpha^*)v_i' = \sum_i \mu_i(\pi_1\otimes\alpha^*)\Big(\sum_{\delta\in\mathcal{L}(a,y)}\lambda_{\delta,i}\underline{\delta}\Big) =$

$$=\sum_i\sum_\delta \lambda_{\delta,i}(\mu_i\pi_1\otimes\alpha^*\underline{\delta}) = \sum_{\delta\in\mathcal{L}(a,y)}\Big(\sum_i\lambda_{\delta,i}\mu_i\Big)\pi_1\otimes\alpha^*\underline{\delta} =$$

$=\sum_{\delta\in\mathcal{L}^*(a,x)} \mu_\delta\pi_1\otimes\underline{\delta}$ para algunos $\mu_\delta\in\mathcal{K}(x,\underline{b})$ y

$\mathcal{A}^*(a,x) = \{\delta \in \mathcal{A} \mid \delta$ termina en $\mathcal{L}^*\}$.

$\therefore \quad (*) : h = \sum_{\delta \in \mathcal{A}^*(a,x)} \mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta}$ .

Similarmente se tiene: $(**) : h = \sum_{\delta \in \mathcal{A}(a,y)} f_\delta \pi_1 \otimes (1 - \underline{\mathcal{L}}\mathcal{L}^*)\underline{\delta}$

para algunos $f_\delta \in \mathcal{K}_\mathcal{L}(z, \underline{b})$.

Nótese ahora que si $\delta \in \mathcal{A}(a,y)$ con $\delta = \mathcal{L}\delta'$, entonces $(1 - \underline{\mathcal{L}}\mathcal{L}^*)\underline{\delta} = 0$.

Por lo tanto, de $(**)$ tenemos que:

$(**)' : h = \sum_{\delta \in \mathcal{J}(a,y)} f_\delta \pi_1 \otimes (1 - \underline{\mathcal{L}}\mathcal{L}^*)\underline{\delta}$, donde $\mathcal{J}(a,y) := \{\delta \in \mathcal{A}(a,y) \mid \delta$ no termina en $\mathcal{L}\}$.

Obsérvese que si $\delta \in \mathcal{J}(a,y)$, entonces $\mathcal{L}^*\delta \in \mathcal{A}_1(a,x)$ y son todos distintos.

Recuérdese ahora que en 3.3.2 (pag. 158) tenemos básicos de tres tipos:

<u>tipo 1</u>: $\{\underline{\delta} \otimes 1 \mid \delta \in \mathcal{A}\}$ ; $\ell(\delta \otimes 1) := 0$ .

<u>tipo 2</u>: $\{\underline{\delta} \underset{x}{\otimes} \underline{\delta}' \mid \delta \in \mathcal{A}(x,?), \delta' \in \mathcal{A}_1(-,x)\}$ ; $\ell(\delta \otimes \delta') = \ell(\delta')$

<u>tipo 3</u>: $\{\underline{\delta} \underset{x}{\otimes} \underline{\delta}'' \mid \delta \in \mathcal{A}'(x,?), \delta'' \in \mathcal{A}_2(-,x)\}$ ; $\ell(\delta \otimes \delta'') =$

$= \ell(\alpha^* \alpha \delta_1)$ donde $\delta'' = \delta_1 - \alpha^* \alpha \delta_1$ .

<u>Observación</u> : Si $g \in \mathcal{K}(\alpha^*)$, $\delta \in \mathcal{S}$ que termina en $\alpha^* \alpha$, entonces : $g \otimes \underline{\delta}$ es combinación lineal de básicos de tipo 1, tipo 3 de longitud $\leq \ell(\delta)$ y básicos tipo 2 pero de longitud $< \ell(\delta)$.

En efecto : (Se omite : pues el argumento es idéntico al usado en "el caso 2" (páginas 162-165) y en las páginas 172-173.

Ahora bien, en la expresión $(**)'$ elegimos $\delta_0 \in J(a,y)$ con $\ell(\delta_0) = \max\{\ell(\delta) / \delta \in J(a,y)$ y $f_\delta \pi_q \neq 0\}$ (si $h \neq 0$ tal $\delta_0$ existe claramente).

Además descompongamos cada $\delta \in J(a,y)$ como $\delta = f'_\delta \, d'_\delta$ con $f'_\delta$ camino de $C$, $d'_\delta$ trivial o en $\mathcal{S}^*(a_1, x)$.

$$\therefore \ (**)'' : h = \sum_{\delta \in J(a,y)} f_\delta \pi_q f'_\delta \otimes \underline{d}'_\delta - \sum_{\delta \in J(a,y)} f_\delta \pi_q \underline{\alpha} \otimes \alpha^* \underline{\delta} .$$

En esta expresión se cumple :

$\ell(d'_\delta) \leq \ell(\delta) \leq \ell(\delta_0) < \ell(\delta_0) + 1 = \ell(\alpha^* \delta_0)$. Entonces cada $f_\delta \pi_q f'_\delta \otimes \underline{d}'_\delta$ se expresa como combinación lineal de básicos tipo 1, 2 ó 3 pero de longitud < long. $\mathcal{L}_0^*\delta_0$ ."

$\therefore - f_{\delta_0} \pi_1 \underline{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{L}^* \underline{\delta_0}$ representa la parte de la suma anterior (**)" que involucra básicos de la forma $\{\underline{\delta} \otimes \mathcal{L}^* \underline{\delta_0} / \delta \in \mathcal{S}\}$, y la máxima longitud de básicos en el desarrollo de $h$ determinado por (**)" se alcanza en uno de esa forma.

Ahora bien, en (*):

$$(*)' : h = \overbrace{\sum_{\delta \in \mathcal{S}_1(a,x)} \mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta}}^{t_1} + \overbrace{\sum_{\substack{\delta \in \mathcal{S}^* \\ \text{pero } \delta \text{ termina} \\ \text{en } \mathcal{L}_0^* \mathcal{L}}} \mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta}}^{t_2}$$

<u>Afirmación</u> 3. La suma de la derecha $t_2$ nuevamente puede escribirse como combinación lineal de básicos tipo 1, 3 ó básicos tipo 2 pero de long. < long.$(\mathcal{L}_0^*\delta_0)$.

En efecto. Para $\delta \in \mathcal{S}^*$ con $\delta = \mathcal{L}_0^* \mathcal{L} \delta_1$, $\mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta} =$

$= -\mu_\delta \pi_1 \otimes (\underline{\delta_1} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_1}) - \mu_\delta \pi_1 \underline{\tilde{\delta}_2} \otimes (\underline{\delta_2} - \mathcal{L}^* \underline{\mathcal{L}} \underline{\delta_2}) - \cdots -$

$- \mu_\delta \pi_1 \underline{\tilde{\delta}_2} \cdots \underline{\tilde{\delta}_{n-1}} \otimes \underline{\delta_n}$ con $\delta_n = id$ o en $\mathcal{S}_1$. Esto significa que en el desarrollo de $\mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta}$ como combinación lineal de básicos, la máxima longitud de los básicos involucrados se alcanza en alguno de tipo 3.

luego entonces, lo mismo vale para la segunda sumatoria $t_2$ que aparece en (*)'. Pero esta longitud se halla acotada extrictamente por $\ell(\alpha_0^* \delta_0)$ como se hizo ver antes. Además, la longitud de los términos tipo 2 (y 1) del desarrollo de $t_2$ es extrictamente menor que la máxima de los términos del tipo 3. //

Esto implica que la máxima longitud en algún término tipo 2 obtenida desarrollando $h$ en (*)' debe aparecer en el desarrollo de la primera sumatoria $t_1$.

$\therefore -f_{\delta_0}\pi_1 \underline{\alpha} \otimes \alpha^* \underline{\delta}_0 = \mu_\delta \pi_1 \otimes \underline{\delta}$ con $\delta = \alpha_0^* \delta_0$.

Luego $(f_{\delta_0}\pi_1 \underline{\alpha} + \mu_\delta \pi_1) \otimes \underline{\delta} = 0$.

$\therefore f_{\delta_0}\pi_1 \underline{\alpha} = -\mu_\delta \pi_1 = f_{\delta_0}\pi_2$.

Multiplicando ahora por $\nabla_2$ a la derecha, obtenemos $f_{\delta_0} = 0$ en contradicción con nuestra elección de $\delta_0$.

Así pues, $h = 0$. //

## §3.4 Derivación de Bocs's sobre categorías libres.

Sea $\mathcal{E} = (E, \delta, \varepsilon)$ un Bocs sobre $\tilde{K} = kC$ que satisface la condición ($\mathbb{H}^{o}$) (ver pag. 42) y $\alpha : x \longrightarrow y$ una flecha no lazo en $C$. Sea $\tilde{K} \xrightarrow{\Phi} \tilde{K}_\alpha$ la inmersión canónica.

El Bocs inducido $\mathcal{E}^{\Phi}$ por $\Phi$ es el Bocs inducido por $\mathcal{E}$ con respecto a $\alpha$.

En lo que sigue $\mathcal{E}^{\Phi}$ será denotado por $\mathcal{E}_\alpha$.

Supongamos que $L$ es el núcleo del Bocs $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}$ la diferencial asociada a la elección de la familia $\{\mathcal{U}_x\}$.

En lo que sigue calcularemos el núcleo $L_\alpha$ de $\mathcal{E}_\alpha$ en términos del núcleo de $\mathcal{E}$, así como la diferencial $\mathcal{D}_\alpha$ asociada a la familia $\{\hat{\mathcal{U}}_x\}$ que precisaremos más adelante en el caso de que $\mathcal{D}(\alpha) = 0$.
(Recuérdese que $\mathcal{E}_\alpha$ también satisface la condición ($\mathbb{H}^{o}$), ver 2.4.1).

Consideremos la aplicación $\varepsilon_\alpha : \tilde{K}_\alpha \otimes \mathcal{E} \otimes \tilde{K}_\alpha \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon \otimes 1} \tilde{K}_\alpha \otimes \tilde{K}_\alpha \xrightarrow{\pi} \tilde{K}_\alpha$

que es la counidad del Boes $\mathcal{E}_\alpha$.

Nótese que los elementos $\xi = \pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_2$ y $\eta = \pi_1 \otimes \mathcal{U}_y \otimes \nabla_3$ están en el núcleo de $\mathcal{E}_\alpha$.

3.4.1 TEOREMA. Supongamos que $\mathcal{K} = kC$, $\alpha$ una flecha no lazo en $C$ y $\mathcal{D}(\alpha) = 0$, entonces el núcleo $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{E}_\alpha$ es igual a $\mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \oplus \mathcal{K}_\alpha \xi \mathcal{K}_\alpha \oplus \mathcal{K}_\alpha \eta \mathcal{K}_\alpha$.

Además $\xi$ y $\eta$ son elementos $\mathcal{K}_\alpha$-libres.

Demostración: Sea $\mathcal{L} \xrightarrow{j} \mathcal{E}$ el núcleo de $\mathcal{E}$.

Probemos primero lo siguiente:

Afirmación. La aplicación $\mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{1 \otimes j \otimes 1} \mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha$ es un monomorfismo.

En efecto. Sabemos que la sucesión $0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{j} \mathcal{E} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K} \to 0$ se divide en $\mathrm{Mod}(\mathcal{K}^{op})$.

Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{j \otimes 1} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} \underset{\underset{\mathcal{K}_\alpha}{\shortparallel}}{\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}_\alpha} \longrightarrow 0 \qquad (30)$$

es exacta en Mod($\mathcal{K}$).

Veamos ahora que la sucesión (30) se divide en Mod($\mathcal{K}$) construyendo una sección para $\varepsilon\otimes 1$:

Sea $\tau : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ la sección de $\varepsilon$ en Mod($\mathcal{K}$) tal que

$\tau(1_w) = \mathcal{U}_{\underline{w}}$ $\forall w$ (ver pág. 93)

Por lo tanto $\varepsilon\tau = id$ y además $\tau$ induce un morfismo $\mathcal{K}/\mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{\bar{\tau}} \mathcal{E}/\mathcal{E}_\alpha$ ya que $\tau(\mathcal{K}_\alpha) \subseteq \mathcal{E}_\alpha$

$(\tau(S\alpha) = S\alpha\,\mathcal{U}_x = S\,\mathcal{U}_y\,\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ pues $\mathcal{L}(\alpha)=0)$.

Finalmente basta verificar la conmutatividad de:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}_\alpha \arrow[rr, "\varepsilon\otimes 1"] \arrow[d, equal] & & \mathcal{K}\otimes\mathcal{K}_\alpha \arrow[d, equal] \\
\mathcal{E}\otimes\Big(\underline{\mathcal{K}}\oplus\big(\bigoplus\limits_{s\in\Delta_1}\mathcal{K}\underline{s}\big)\oplus\big(\bigoplus\limits_{s'\in\Delta_2}\mathcal{K}\underline{s'}\big)\Big) \arrow[d, "\cong"] & & \mathcal{K}\otimes\Big(\underline{\mathcal{K}}\oplus\big(\bigoplus\limits_{s\in\Delta_1}\mathcal{K}\underline{s}\big)\oplus\big(\bigoplus\limits_{s'\in\Delta_2}\mathcal{K}\underline{s'}\big)\Big) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}\oplus\big(\bigoplus\limits_{s\in\Delta_1}\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}(x,-)\big)\oplus\big(\bigoplus\limits_{s'\in\Delta_2}\mathcal{E}\otimes\mathcal{K}/\mathcal{K}_\alpha\big) \arrow[d, "\cong"] & & \mathcal{K}\oplus\big(\bigoplus\limits_{s\in\Delta_1}\mathcal{K}(x,-)\big)\oplus\big(\bigoplus\limits_{s'\in\Delta_2}\mathcal{K}(x,-)/\mathcal{K}_\alpha\big) \arrow[dll, "\hat{\tau}=\tau\oplus(\oplus\tau)\oplus(\oplus\bar{\tau})"] \\
\mathcal{E}\oplus\big(\bigoplus\limits_{s\in\Delta_1}\mathcal{E}(x,-)\big)\oplus\big(\bigoplus\limits_{s'\in\Delta_2}\mathcal{E}(x,-)/\mathcal{E}_\alpha\big). \arrow[urr, bend left, "\hat{\varepsilon}=\varepsilon\oplus(\oplus\varepsilon)\oplus(\oplus\bar{\varepsilon})"] & &
\end{tikzcd}$$

(como $\varepsilon : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ es morfismo de bimódulos, $\varepsilon(\mathcal{C}\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{K}\mathcal{L}$
$\therefore\ \bar{\varepsilon} : \mathcal{C}/\mathcal{C}\mathcal{L} \to \mathcal{K}/\mathcal{K}\mathcal{L}$ está bien definida, y por tanto $\bar{F}$ es sección de $\bar{\varepsilon}$)

$\therefore\ \hat{\varepsilon}\hat{F} = id$, obteniéndose la sección buscada.

Tensoreando ahora a la sucesión (30) por $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ a la izquierda obtenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \xrightarrow{1\otimes j \otimes 1} \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \longrightarrow \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L}}}{\mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L}} \longrightarrow 0$$

de donde se sigue la conclusión de la afirmación. //

Ahora bien, tenemos el diagrama conmutativo con columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \mathcal{L}_\mathcal{L} \arrow[r, dashed, "\Psi"] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r, "1\otimes j \otimes 1"] \arrow[d] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r, "1\otimes\varepsilon\otimes 1"] \arrow[d, "\varepsilon_\mathcal{L}"] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{K}_\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \qquad (31)$$

Por el lema de la serpiente $\Psi$ es suprayectiva, y por

3.3.c, $N = ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\pi_4\otimes\nabla_3{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}) \oplus ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\pi_1\otimes\nabla_2{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp})$ con $\pi_4\otimes\nabla_3$ y $\pi_1\otimes\nabla_2$ ${}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}$-libres. Por lo tanto $N$ es proyectivo.

Luego la primera sucesión horizontal de (31) se divide y por tanto $\mathcal{L}_{\perp} \cong ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}\mathcal{L}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}) \oplus N$ (*)

Ahora bien, si $\ell\in\mathcal{L}_{\perp}$, entonces $N \ni \psi(\ell) = \sum b_i\pi_4\otimes\nabla_3 b_i' + \sum b_j''\pi_1\otimes\nabla_2 b_j''' = \psi(\sum b_i\eta b_i' + \sum b_j''\xi b_j''')$

$\therefore (\ell - \sum b_i\eta b_i' - \sum b_j''\xi b_j''') \in \ker\psi = {}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}\mathcal{L}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}$

$\therefore \mathcal{L}_{\perp} = ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}\mathcal{L}\underset{\mathcal{H}}{\otimes}{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}) \oplus [({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\eta{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}) + ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\xi{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp})]$.

De (*) se sigue que la suma $({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\eta{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}) + ({}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}\xi{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp})$ es directa.

Además $\xi$ y $\eta$ son ${}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}$-libres (de no ser así los elementos $\mathcal{E}_{\perp}(\xi) = \pi_1\otimes\nabla_2$, $\mathcal{E}_{\perp}(\eta) = \pi_4\otimes\nabla_3$ tampoco lo serían). //

Nos interesa describir bien $\mathcal{E}_{\perp}$; para lo cual nos concentraremos a menudo en describir $\mathcal{E}_{\perp}' = {}_{{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}'}|\mathcal{E}_{\perp}|_{{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}'}$, en donde ${}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}' = \operatorname{ind}{}^{\mathcal{H}}\!K_{\perp}$.

Nos falta describir una diferencial natural $\mathcal{D}_{\perp}$ y su relación con $\mathcal{D}$.

Otra vez consideremos los morfismos e igualdades de (28) y (29) (ver págs. 122 y 160 respectivamente).

(32)

En $\mathcal{E}_\mathcal{L} = \mathcal{H}_\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{H}} \mathcal{H}_\mathcal{L}$ escojamos: $\hat{\mathcal{M}}_w := 1_w \otimes \mathcal{M}_w \otimes 1_w$ si $w \neq x, y, z$; $\hat{\mathcal{M}}_x := \pi_1 \otimes \mathcal{M}_x \otimes \nabla_1$; $\hat{\mathcal{M}}_y := \pi_3 \otimes \mathcal{M}_y \otimes \nabla_3$; $\hat{\mathcal{M}}_z := \pi_2 \otimes \mathcal{M}_x \otimes \nabla_2$.

(Obsérvese que si $\mathcal{L}(\alpha) = \alpha\mathcal{M}_x - \mathcal{M}_y\alpha = 0$, entonces $\pi_2 \otimes \mathcal{M}_x \otimes \nabla_2 = \pi_4 \otimes \mathcal{M}_y \otimes \nabla_4$. En efecto: $\pi_4 \otimes \mathcal{M}_y \otimes \nabla_4 = \pi_4 \underline{\alpha}\alpha^* \otimes \mathcal{M}_y \otimes \underline{\alpha}\alpha^* \nabla_4 = \pi_4 \underline{\alpha}\alpha^* \otimes \mathcal{M}_y \alpha \otimes_c \alpha^* \nabla_4 = \pi_4 \underline{\alpha}\alpha^* \otimes \alpha\mathcal{M}_x \otimes \alpha^* \nabla_4 = \pi_4 \underline{\alpha} \otimes \mathcal{M}_x \otimes \alpha^* \nabla_4 = \pi_2 \otimes \mathcal{M}_x \otimes \nabla_2$.)

Esta condición de simetría se supone de aquí en adelante. Nótese que entonces aplicando $\mathcal{E}_\mathcal{L} \xrightarrow{1\otimes\varepsilon\otimes 1} \mathcal{H}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_\mathcal{L} \otimes \mathcal{H}_\mathcal{L}$ obtenemos $\pi_2 \otimes \nabla_2 = \pi_4 \otimes \nabla_4$. (33)

Puesto que $\mathcal{E}_\mathcal{L}(\hat{\mathcal{M}}_w) = 1_w$, para cada $w \in |\mathcal{H}_\mathcal{L}|$, por 2.3.2 obtenemos una diferencial asociada $\mathcal{L}_\mathcal{L}$.

3.4.2 Observación. Si $v \xrightarrow{h} w$ es un $\mathcal{H}$-morfismo, entonces $\mathcal{L}_\mathcal{L}(\underline{h}) = 1_w \otimes \mathcal{L}(h) \otimes 1_v$.

En efecto: $\mathcal{L}_\mathcal{L}(\underline{h}) = \underline{h}\hat{\mathcal{M}}_v - \hat{\mathcal{M}}_w \underline{h} = \underline{h}1_v \otimes \mathcal{M}_v \otimes 1_v - 1_w \otimes \mathcal{M}_w \otimes 1_w \underline{h} = 1_w \otimes h\mathcal{M}_v \otimes 1_v - 1_w \otimes \mathcal{M}_w h \otimes 1_v = 1_w \otimes (h\mathcal{M}_v - \mathcal{M}_w h) \otimes 1_v = 1_w \otimes \mathcal{L}(h) \otimes 1_v$. //

Por la observación 3.3.3 y la observación anterior, para calcular $\mathcal{L}_\alpha$ en morfismos de $\mathcal{K}_\alpha$ es suficiente calcular $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_i)$, $\mathcal{L}_\alpha(\pi_i)$, $i=1,2,3,4$.

3.4.3 <u>Afirmación</u>. <u>Se cumplen las siguientes igualdades</u>:

(i) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_1)=0$

(ii) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_2)=-e_x\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2$

(iii) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_3)=-e_z\otimes\mathcal{U}_y\otimes\nabla_3$

(iv) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_4)=0$

(v) $\mathcal{L}_\alpha(\pi_1)=\pi_1\otimes\mathcal{U}_x\otimes e_z$

(vi) $\mathcal{L}_\alpha(\pi_2)=0$

(vii) $\mathcal{L}_\alpha(\pi_3)=0$

(viii) $\mathcal{L}_\alpha(\pi_4)=\pi_4\otimes\mathcal{U}_y\otimes e_y$.

Demostración: probaremos solamente las igualdades (i) y (ii), las otras se pueden probar en forma análoga.

(i) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_1)=\nabla_1\hat{\mathcal{U}}_x-\hat{\mathcal{U}}_{\underline{x}}\nabla_1=\nabla_1(\pi_1\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1)-$

$-(e_z+e_x)\otimes\mathcal{U}_x\otimes(e_z+e_x)\nabla_1=\nabla_1\pi_1\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1-(e_z+e_x)\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1=$

$=-e_z\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1=-\alpha^*\underline{\alpha}\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1=-\alpha^*\otimes\alpha\mathcal{U}_x\otimes\nabla_1=$

$=-\alpha^*\otimes\mathcal{U}_y\otimes\underline{\alpha}\nabla_1=0$.

(ii) $\mathcal{L}_\alpha(\nabla_2)=\nabla_2\hat{\mathcal{U}}_z-\hat{\mathcal{U}}_{\underline{x}}\nabla_2=\nabla_2(\pi_2\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2)-$

$-(e_z+e_x)\otimes\mathcal{U}_x\otimes(e_z+e_x)\nabla_2=e_z\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2-e_z\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2-$

$-e_x\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2=-e_x\otimes\mathcal{U}_x\otimes\nabla_2$. //

Con el objeto de obtener una fórmula para $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ en los elementos de la forma $\underline{h}\nabla_i$ o $\Pi_i\underline{h}$ en $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$, introducimos el siguiente orden parcial entre los $\nabla_i$ y $\Pi_j$:

$\Pi_1 > \Pi_2$, $\nabla_2 > \nabla_1$, $\nabla_3 > \nabla_4$, $\Pi_4 > \Pi_3$.

Pondremos $\nabla_i > \nabla_{i'}$ (respectivamente $\Pi_i > \Pi_{i'}$) si $\nabla_i$ (respectivamente $\Pi_i$) es maximal. Si $\nabla_i$ (resp. $\Pi_i$) es minimal pondremos $\nabla_{i'} = 0$ ($\Pi_{i'} = 0$).

3.4.9 <u>Afirmación</u>. <u>Sea</u> $h$ <u>un</u> $\mathcal{K}$-<u>morfismo</u> <u>y</u> <u>sea</u> $\underline{h} = \Phi(h)$ <u>su</u> <u>imagen</u> <u>bajo</u> $\Phi$ <u>en</u> $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. <u>Denotando</u> <u>por</u> $\hat{v}$ <u>al</u> <u>elemento</u> $1w_2 \otimes v \otimes 1w_1$ <u>si</u> $v \in \mathcal{E}(w_1, w_2)$ <u>tenemos</u> <u>las</u> <u>siguientes</u> <u>fórmulas</u>:

(a) $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\underline{h}\nabla_i) = \underline{\mathcal{D}(h)}\nabla_i \pm \underline{h}\nabla_{i'}(\Pi_{i'} \otimes \mathcal{U}_w \otimes \nabla_i)$

(b) $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\Pi_i\underline{h}) = (\Pi_i \otimes \mathcal{U}_w \otimes \nabla_{i'})\Pi_{i'}\underline{h} + \Pi_i\underline{\mathcal{D}(h)}$

(c) $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}(\Pi_j\underline{h}\nabla_i) = \Pi_j\underline{\mathcal{D}(h)}\nabla_i \pm \Pi_j\underline{h}\nabla_{i'}(\Pi_{i'} \otimes \mathcal{U}_w \otimes \nabla_i) + (\Pi_j \otimes \mathcal{U}_w \otimes \nabla_{j'})\Pi_{j'}\underline{h}\nabla_i$ (<u>cuando</u> $i = j$, <u>en</u> <u>el</u> <u>primer</u> <u>término</u> $\Pi_{i'}$ <u>depende</u> <u>de</u> $\nabla_i$ <u>y</u> <u>en</u> <u>el</u> <u>siguiente</u> $\nabla_{i'}$ <u>depende</u>

de $\pi_2$). Para cierto $w \in \{x, y\}$.

Demostración: Probaremos solamente (a).

Consideremos primeramente $\nabla_1 = \begin{pmatrix} 1_x \\ 0 \end{pmatrix} : x \longrightarrow \underline{X}$.

$\mathcal{L}_\lambda(\underline{h}\nabla_1) = \underline{h}\,\mathcal{L}_\lambda(\nabla_1) + (-1)^0 \mathcal{L}_\lambda(\underline{h})\nabla_1 = \mathcal{L}_\lambda(\underline{h})\nabla_1 =$

$= \mathcal{L}(\underline{h})\nabla_1 + \underline{h}\,\nabla_1(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_1)$.

Para $\nabla_2$ tenemos:

$\mathcal{L}_\lambda(\underline{h}\nabla_2) = \underline{h}\,\mathcal{L}_\lambda(\nabla_2) + (-1)^0 \mathcal{L}_\lambda(\underline{h})\nabla_2 = \underline{h}(-c_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_2) +$

$+ \mathcal{L}_\lambda(\underline{h})\nabla_2 = \mathcal{L}(\underline{h})\nabla_2 - \underline{h}(c_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_2)$.

Pero $c_x = \nabla_1\pi_1$, por tanto $\mathcal{L}_\lambda(\underline{h}\nabla_2) = \mathcal{L}(\underline{h})\nabla_2 - \underline{h}\nabla_1(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_2)$.

Para $\nabla_3$ y $\nabla_4$ se procede en forma análoga. //

## §3.5 Derivación de BOCS's: el caso general.

Sea $\mathcal{E}=(E,\delta,\varepsilon)$ un BOCS sobre $\mathcal{K}=kC/I$ con diferencial $\mathcal{D}$, $\alpha: x \longrightarrow y$ una flecha que no es lazo en $C$ con $\alpha \notin I$ en $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{K}=kC/I \xrightarrow{\bar{\Phi}} \mathcal{K}_I = (kC/\alpha)/I_\alpha$ la inmersión canónica (ver 3.1.8).

En esta sección investigaremos el núcleo de $\mathcal{E}^{\bar{\Phi}}$, así como la diferencial asociada en el caso en que $\mathcal{D}(I)=0$.

Para facilidad de la notación, denotaremos a $\mathcal{K}_I$ por $\mathcal{K}_\alpha$, y otra vez en lo que sigue $\mathcal{E}^{\bar{\Phi}}$ será denotado por $\mathcal{E}_\alpha$.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es el núcleo del BOCS $\mathcal{E}$.

Consideremos la diferencial $\mathcal{D}_\alpha$ asociada a $\mathcal{E}_\alpha$ en forma análoga a como se hizo para el caso $\mathcal{K}=kC$. También es claro que las afirmaciones correspondientes a 3.4.3 y 3.4.4 se cumplen para este caso, aún más, las pruebas de estas son análogas a las que se hicieron en la sección anterior.

En lo que sigue calcularemos el núcleo $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{E}_\alpha$.

3.5.1 PROPOSICION. Sea $\mathcal{K}=kC$ y $\mathcal{E}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\mathcal{D}$. Si $I$ es un ideal en $\mathcal{K}$ compatible con $\mathcal{E}$ (ver páginas 84 y 85), y $\alpha$ una flecha no lazo en $C$, entonces $(\mathcal{E}_I)_\alpha \cong (\mathcal{E}_\alpha)_{I_\alpha}$ como BOCS's.

Demostración: Sabemos por definición (ver 3.1.6) que $(\mathcal{K}/I)_\alpha = \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha$.

Entonces $(\mathcal{E}_I)_\alpha = (\mathcal{K}/I)_\alpha \otimes \mathcal{E}_I \otimes (\mathcal{K}/I)_\alpha =$

$= \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \underset{\mathcal{K}/I}{\otimes} \mathcal{E}_I \underset{\mathcal{K}/I}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha = \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \underset{\mathcal{K}/I}{\otimes} (\mathcal{K}/I \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}/I) \underset{\mathcal{K}/I}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha$

$\cong (\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha) \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} (\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha) \cong (\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha) \underset{\mathcal{K}_\alpha}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}_\alpha}{\otimes} (\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha)$

$\cong \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \underset{\mathcal{K}_\alpha}{\otimes} \mathcal{E}_\alpha \underset{\mathcal{K}_\alpha}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha = (\mathcal{E}_\alpha)_{I_\alpha}$ (como bimódulos).

Finalmente, no es difícil ver que este isomorfismo también es un isomorfismo de BOCS's (ver pag. 91'). //

3.5.2 PROPOSICION. Sea $\mathcal{K}: kC$ y $\mathcal{E}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\mathcal{D}$. Si $I$ es un ideal en $\mathcal{K}$ compatible con $\mathcal{E}$, y $\alpha$ una flecha no lazo en $C$ con $\mathcal{D}(\alpha)=0$, entonces el núcleo de $(\mathcal{E}_\alpha)_{I_\alpha}$ es $(\mathcal{L}_\alpha)_{I_\alpha} = \mathcal{L}_\alpha / I_\alpha\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}_\alpha I_\alpha \cong$

$\cong (\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha) \oplus \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \bar{\xi}\, \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \oplus \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha \bar{\eta}\, \mathcal{K}_\alpha/I_\alpha$

(ver pag. 181). Además $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ son elementos $\mathcal{K}_\alpha/I_\alpha$-libres en $(\mathcal{L}_\alpha)_{I_\alpha}$.

Demostración: Por 3.4.2, la regla de Leibnitz y el hecho de que $\mathcal{E}$ es compatible con $I$, $\mathcal{E}_\perp$ es compatible con $I_\perp$.

Entonces por 2.5.1, el núcleo de $(\mathcal{E}_\perp)_{I_\perp}$ es $(\mathcal{L}_\perp)_{I_\perp} =$
$= \mathcal{L}_\perp / I_\perp\mathcal{L}_\perp + \mathcal{L}_\perp I_\perp$.

$\mathcal{L}_\perp = \mathcal{K}_\perp \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\perp \oplus \mathcal{K}_\perp \xi \mathcal{K}_\perp \oplus \mathcal{K}_\perp \eta \mathcal{K}_\perp$ (por 3.4.1).

$I_\perp\mathcal{L}_\perp + \mathcal{L}_\perp I_\perp = (I_\perp \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\perp + \mathcal{K}_\perp \otimes \mathcal{L} \otimes I_\perp) +$
$+ (I_\perp \xi \mathcal{K}_\perp + \mathcal{K}_\perp \xi I_\perp) + (I_\perp \eta \mathcal{K}_\perp + \mathcal{K}_\perp \eta I_\perp)$.

$\therefore \mathcal{L}_\perp / I_\perp\mathcal{L}_\perp + \mathcal{L}_\perp I_\perp \cong \mathcal{K}_\perp/I_\perp \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_\perp/I_\perp \oplus$
$\oplus \mathcal{K}_\perp/I_\perp \, \bar{\xi} \, \mathcal{K}_\perp/I_\perp \oplus \mathcal{K}_\perp/I_\perp \, \bar{\eta} \, \mathcal{K}_\perp/I_\perp$.

Finalmente, por 2.6.6 $\bar{\xi}$ y $\bar{\eta}$ son elementos libres de $(\mathcal{L}_\perp)_{I_\perp}$. //

*Definición*. Sea $\mathcal{K} = kC/I$ y $\mathcal{E}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\mathcal{D}$. Una flecha $\alpha : x \longrightarrow y$ en $C$ se llama *arista* si $x \neq y$, $\bar{\alpha} \neq 0$, y *arista minimal con respecto a* $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}(\bar{\alpha}) = 0$.

3.5.3 TEOREMA. Supongamos que $\mathcal{C}$ es un BOCS sobre $\mathcal{K} = kC/I$ con núcleo $\mathcal{I}$ y diferencial $\mathcal{D}$. Si $\alpha$ es una arista minimal en $C$, entonces el núcleo $\mathcal{I}_\alpha$ de $\mathcal{C}_\alpha$ es isomorfo a $\mathcal{K}_\alpha \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha \oplus \mathcal{K}_\alpha \bar{\xi} \mathcal{K}_\alpha \oplus \mathcal{K}_\alpha \bar{\eta} \mathcal{K}_\alpha$.

La diferencial $\mathcal{D}_\alpha$ asociada a $\mathcal{C}_\alpha$ queda determinada por las fórmulas de 3.4.4 módulo $I_\alpha$.

Demostración: Por 2.5.2 sabemos que $\mathcal{C} \cong \widehat{\mathcal{C}_I}$. Además $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{D}_I}$.

Finalmente aplicando 3.5.1, tenemos:

$\mathcal{C}_\alpha \cong (\widehat{\mathcal{C}_I})_\alpha \cong (\widehat{\mathcal{C}_\alpha})/I_\alpha$, de donde se sigue nuestro resultado. //

## §3.6 BOCS's con la condición (A).

A menudo, en las aplicaciones, se cumple la siguiente condición:

(A) Si $\mathcal{E}$ es un BOCS sobre $\mathcal{K}$ y si $M, N$ son objetos de $\mathrm{Mod}(\mathcal{K})$, $\eta = (\delta_{x,x}, \Gamma_{x,x}(\mathbb{1}_x))$ un morfismo en $R(\mathcal{E}_x)$ entre $M$ y $N$ es isomorfismo si y solo si todos los $\Gamma_{x,x}(\mathbb{1}_x)$ son isomorfismos.

En lo que sigue probaremos la invariancia de la condición (A) con respecto a la derivación.

Primeramente veamos lo siguiente:

Observación: Supongamos que $\mathcal{L} : \mathcal{K}^{op} \times \mathcal{K} \longrightarrow Ab$ es un $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo y $N : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Mod}_k$ un $k$-funtor. Entonces tenemos el funtor $[\mathcal{L}, N] : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Mod}_k$ definido como sigue:

En objetos: si $v \in |\mathcal{K}|$ ponemos $[\mathcal{L}, N](v) := (\mathcal{L}(v,-), N)$.

En morfismos: si $v \xrightarrow{h} v'$ es un morfismo en $\mathcal{K}$, entonces definimos $[\mathcal{L}, N](h) \delta := \delta \mathcal{L}(h,-)$, para cada transformación natural $\delta \in (\mathcal{L}(v,-), N)$.

Además, sabemos que $(\mathcal{L}\underset{\mathcal{K}}{\otimes} M, N) \cong (M, [\mathcal{L}, N])$.

Supongamos que $\mathcal{K} = kC/I$ y $\mathcal{E}$ un BOCS sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\mathcal{D}$. Sea $\alpha$ una arista minimal en $C$.

Consideremos ahora la composición $\Theta$ de las equivalencias:

$$R(\mathcal{E}_\alpha) = R(\mathcal{E}_\alpha, \mathrm{Mod}\,\mathcal{K}) \underset{\simeq}{\xrightarrow{2.2.2}} \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}_\alpha}(\mathcal{K}_\alpha) \underset{\simeq}{\xrightarrow[3.1.7]{2.9.27}} \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K}) \underset{\simeq}{\xrightarrow{2.2.2}} R(\mathcal{E}).$$

Si $M \in |R(\mathcal{E}_\alpha)|$, $M \in |\mathrm{Mod}(\mathcal{K}_\alpha)|$; $\Theta(M) = S(M) \in |\mathrm{Mod}(\mathcal{K})|$, en donde $S(M)$ es la restricción de $M$ a $\mathcal{K}$.

Además se tiene:

3.6.1 <u>LEMA</u>. <u>Sean $M$ y $N$ objetos de $R(\mathcal{E}_\alpha)$ y $\gamma: M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{E}_\alpha)$ dado por la familia $(f_{v,w}, \nabla(\widehat{M}_v))$. Entonces $\Theta(\gamma): \Theta(M) \longrightarrow \Theta(N)$ está dado por la familia de aplicaciones $(f_{v,w}, \nabla'(M_v))$, donde: $\nabla'(M_v) = \nabla(\widehat{M}_v)$ si $v \neq x, y$;</u>

$\nabla'(M_x): S(M)(x) = M(x) \oplus M(z) \longrightarrow S(N)(x) = N(x) \oplus N(z)$

<u>está dado por la matriz</u> $\begin{pmatrix} \nabla(\widehat{M}_x) & f(\pi_1 \otimes M_x \otimes \sqrt{2}) \\ 0 & \nabla(\widehat{M}_z) \end{pmatrix}$;

y la aplicación $\Gamma'(\hat{M}_y): S(M)(y) = M(y) \oplus M(z) \longrightarrow S(N)(y) =$
$= N(y) \oplus N(z)$ está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \Gamma(\hat{M}_y) & 0 \\ \rho(\pi_1 \otimes M_y \otimes \Gamma_3) & \Gamma(\hat{M}_z) \end{pmatrix}.$$

Demostración: Sea $\eta = (\rho_{v,w}, \Gamma(\hat{M}_v)) : M \longrightarrow N$ un morfismo en $R(\mathcal{E}_\alpha)(M,N)$ y $\psi$ el morfismo correspondiente en $(M,N)_{\mathcal{E}_\alpha}$. Tenemos:

$$(M,N)_{\mathcal{E}_\alpha} = ({}^{\mu}\mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{E} \underset{\mathcal{K}}{\otimes} \mathcal{K}_\alpha \underset{\mathcal{K}_\alpha}{\otimes} M, N)_{\mathcal{K}_\alpha} \cong ({}^{\mu}\mathcal{K}_\alpha \otimes \mathcal{E} \otimes S(M), N)_{\mathcal{K}_\alpha}$$

$\cong (\mathcal{E} \otimes S(M), [{}^{\mu}\mathcal{K}_\alpha, N])_{\mathcal{K}} \cong (\mathcal{E} \otimes S(M), S(N))_{\mathcal{K}}$ (ver pags. 193 y 194).

Sea $\psi'$ el elemento en $(\mathcal{E} \otimes S(M), S(N))$ correspondiente a $\psi$ y $\Theta(\eta)$ el elemento asociado a $\psi'$ en $R(\mathcal{E})(M,N)$, $\Theta(\eta) = (\rho_{v,w}, \Gamma'(\hat{M}_v))$. $\Gamma'(\hat{M}_v) \in (M(v), N(v))$ está dado por $\Gamma'(\hat{M}_v)(m) = \psi'(\hat{M}_v \otimes m)$, $m \in M(v)$ (ver demostración de 2.2.2).

.- Si $v \neq x, y$

$\Gamma'(\mathcal{U}_v)(m) = \Psi'(\mathcal{U}_v \otimes m) = \Psi'(1_v \otimes \mathcal{U}_v \otimes 1_v \otimes m) =$

$= \Psi'(\hat{\mathcal{U}}_v \otimes m) = \Gamma(\hat{\mathcal{U}}_v)(m)$ (ver (3.1));

por tanto $\Gamma'(\mathcal{U}_v) = \Gamma(\hat{\mathcal{U}}_v)$.

Sea ahora $m = (m_1, m_2) \in S(M)(x) = M(x) \oplus M(z)$.

$\Gamma'(\mathcal{U}_x)(m) = \Psi'(\mathcal{U}_x \otimes m) = \Psi'(1_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes 1_x \otimes m) =$

$= \Psi'((e_z + e_x) \otimes \mathcal{U}_x \otimes (e_z + e_x) \otimes m) = \Psi'(e_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_z \otimes m +$

$+ e_z \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_z \otimes m + e_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_x \otimes m) = \Psi'(e_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_z \otimes m) +$

$+ \Psi'(e_z \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_z \otimes m) + \Psi'(e_x \otimes \mathcal{U}_x \otimes e_x \otimes m) =$

$= (\Psi'(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \sigma_2 \otimes m_2) + \Psi'(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \sigma_1 \otimes m_1), \Psi'(\pi_2 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \sigma_2 \otimes m_2))$

$$= \begin{pmatrix} \Psi'(\hat{\mathcal{U}}_x) & \Psi'(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \sigma_2) \\ 0 & \Psi'(\hat{\mathcal{U}}_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

por tanto la transformación $\Gamma'(\mathcal{U}_x) : S(M)(x) \longrightarrow S(N)(x)$

está dada por $\begin{pmatrix} \Gamma(\hat{\mathcal{U}}_x) & \rho(\pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \sigma_2) \\ 0 & \Gamma(\hat{\mathcal{U}}_z) \end{pmatrix}$.

De manera enteramente análoga se calcula $\Gamma'(\mathcal{U}_y)$. //

3.6.2 COROLARIO. Si $\mathcal{C}$ tiene la propiedad (A), $\mathcal{C}_\Delta$ también la tiene.

Demostración: Sea $\eta : M \longrightarrow N$ dado por $(\varphi_{v,w}, \nabla(\mathcal{U}_v))$ y $\Theta(\eta): S(M) \longrightarrow S(N)$ dado por $(\varphi_{v,w}, \nabla'(\mathcal{U}_v))$ obsérvese que $\eta$ es un isomorfismo si y solo si $\Theta(\eta)$ lo es.

Supongamos primeramente que $\eta$ es un isomorfismo, entonces $\Theta(\eta)$ también lo es. De aquí, como $\mathcal{C}$ cumple (A) y por lema anterior es inmediato ver que todas las aplicaciones $\nabla(\vec{\mathcal{U}}_v)$ son isomorfismos.

Supongamos ahora que todas las aplicaciones $\nabla(\vec{\mathcal{U}}_v)$ son isomorfismos. Entonces

$\nabla'(\mathcal{U}_v) = \nabla(\vec{\mathcal{U}}_v)$ para $v \neq x, y$; y $\nabla'(\mathcal{U}_x)$, $\nabla'(\mathcal{U}_y)$ por el lema anterior están dados por

$$\begin{pmatrix} \nabla(\hat{\mathcal{U}}_x) & \varphi(\Pi_1 \otimes \mathcal{U}_x \otimes \nabla_2) \\ 0 & \nabla(\vec{\mathcal{U}}_z) \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \nabla(\hat{\mathcal{U}}_y) & 0 \\ \varphi(\Pi_3 \otimes \mathcal{U}_y \otimes \nabla_3) & \nabla(\vec{\mathcal{U}}_z) \end{pmatrix}$$

respectivamente y estos son isomorfismos si y solo si

$\nabla(\hat{M}_x), \nabla(\hat{M}_y), \nabla(\hat{M}_z)$ son isomorfismos.

En efecto. Si $\nabla'(M_x)$ y $\nabla'(M_y)$ son isomorfismos es evidente que $\nabla(\hat{M}_x), \nabla(\hat{M}_y); \nabla(\hat{M}_z)$ son isomorfismos.

Recíprocamente, si $\nabla(\hat{M}_x), \nabla(\hat{M}_y), \nabla(\hat{M}_z)$ son isomorfismos, entonces es claro que el inverso de $\nabla'(M_x)$ está dado por

$$\begin{pmatrix} \nabla^{-1}(M_x) & -\nabla^{-1}(\hat{M}_x)\,\mathcal{S}(\pi_1 \otimes M_x \otimes \nabla_z)\,\nabla^{-1}(\hat{M}_z) \\ 0 & \nabla^{-1}(\hat{M}_z) \end{pmatrix}$$

Análogamente, es fácil mostrar que $\nabla'(M_y)$ es un isomorfismo. //

Como $\mathcal{E}$ cumple (A), entonces $\oplus(\eta)$ es un isomorfismo si y solo si $\eta$ lo es. Mostrándose nuestro corolario. //

3.6.x Observación: Sea $\mathcal{K}_i$ la subcategoría plena de $\mathcal{K}_L$ formada por los objetos inescindibles de $\mathcal{K}_L$, entonces si $\mathcal{E}$ es el Bocs $\mathcal{E}^{\#}$ restringido a $\mathcal{K}_i$,

$$R({}^{\#}\mathcal{E}^{\#}, \mathrm{Mod}_k) \simeq R(\mathcal{E}, \mathrm{Mod}_k) \quad (\text{ver } 2.9.3).$$

3.6.9 COROLARIO. *Si $\mathcal{E}$ tiene la propiedad (A), $\mathcal{E}_2$ también la tiene.*

Demostración: Como $\mathcal{E}$ cumple (A), entonces por corolario anterior $\mathcal{E}_2$ también la cumple.

Consideremos ahora la equivalencia $R(\mathcal{E}_2') \xrightarrow{E} R(\mathcal{E}_2)$.

Recuérdese que si $M$ es un objeto en $R(\mathcal{E}_2')$, $M \in |Mod(\mathcal{K}_2')|$;

$E(M) = \mathcal{K}_2 \underset{\mathcal{K}_2'}{\otimes} M := \hat{M} \in |Mod(\mathcal{K}_2)|$, en donde $\hat{M}(v) = M(v)$

si $v \neq \underline{x}, \underline{y}$; $\hat{M}(\underline{x}) = M(x) \oplus M(z)$, $\hat{M}(\underline{y}) = M(y) \oplus M(z)$

y $\hat{M}/\mathcal{K}_2' = M$.

Si $\eta: M \longrightarrow N$ es un morfismo en $R(\mathcal{E}_2')$ dado por

$(S_{v,w}, T'(M_v))$, entonces es fácil ver que el morfismo

$E(\eta) = 1 \otimes \eta : E(M) = \mathcal{K}_2 \otimes M \longrightarrow E(N) = \mathcal{K}_2 \otimes N$ está

dado por la familia de aplicaciones $(S_{v,w}, T(\hat{M}_v))$,

donde: $T(\hat{M}_v) = T'(M_v)$ si $v \neq \underline{x}, \underline{y}$;

$T(\hat{M}_{\underline{x}}) : M(x) \oplus M(z) \longrightarrow N(x) \oplus N(z)$ está dado por la matriz

$\begin{pmatrix} \nabla'(M_x) & 0 \\ 0 & \nabla'(M_z) \end{pmatrix}$ ; y la aplicación

$\nabla(\hat{M}_y) : M(y)\oplus M(z) \longrightarrow N(y)\oplus N(z)$ está dada por

la matriz $\begin{pmatrix} \nabla'(M_y) & 0 \\ 0 & \nabla'(M_z) \end{pmatrix}$.

Supongamos ahora que $\eta$ es un isomorfismo, entonces $\Sigma(\eta)$ también lo es.

Como $\mathcal{E}_2$ cumple (A), entonces todas las aplicaciones $\nabla(\hat{M}_v)$ son isomorfismos, en particular todas las aplicaciones $\nabla'(M_v)$ son isomorfismos.

Recíprocamente, si todas las aplicaciones $\nabla'(M_v)$ son isomorfismos, se sigue inmediatamente que todas las aplicaciones $\nabla(\hat{M}_v)$ son isomorfismos.

Como $\mathcal{E}_2$ cumple (A), se tiene que $\Sigma(\eta)$ es isomorfismo si y sólo si $\eta$ lo es. //

# CAPITULO 4

## EL ALGORITMO DE KLEINER-ROITER PARA BICARCAJES

En este capítulo estudiaremos BOCS's construidos explícitamente a partir de ciertas gráficas. Estudiaremos además el efecto de la derivación introducida en el capítulo anterior en tales BOCS's en términos de la gráfica asociada.

En este capítulo $k$ denotará un campo alg. cerrado fijo.

### §4.1 Derivación de BOCS's libres y bigráficas.

Sea $\mathcal{E}$ un BOCS libre sobre la categoría $\mathcal{K} = kC/I$ con diferencial fija $\mathcal{D}$, núcleo $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\Delta)$ y el bicarcaj asociado $\mathcal{F}(\mathcal{L}) = (C, A)$ (ver 2.6.8). Sea $J$ una arista minimal de $C$ (ver pag. 191).

Por 3.3.3, $\mathcal{I}_J = \mathcal{K}_J \otimes \mathcal{I} \otimes \mathcal{K}_J \oplus \mathcal{K}_J \bar{\xi} \mathcal{K}_J \oplus \mathcal{K}_J \bar{\eta} \mathcal{K}_J$ con $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ elementos $\mathcal{K}_J$-libres.

Por lo tanto, de 2.6.4 se sigue que $\mathcal{I}_J$ es un $\mathcal{K}_J$-$\mathcal{K}_J$ bimódulo libre, y consecuentemente $\mathcal{E}_J$ es libre sobre $\mathcal{K}_J$.

4.1.1 <u>Observación</u>: Aplicando 2.6.5 se tiene que el núcleo $\mathcal{L}_\alpha$ de $\mathcal{E}_\alpha$ está generado libremente sobre $\mathcal{K}'_\alpha$ por

$$\Delta'_\alpha := \{1\otimes\delta\otimes 1 \,/\, v \xrightarrow{\delta} w \in \Delta;\ v,w \notin \{x,y\}\} \cup$$
$$\cup \{1\otimes\delta\otimes\sigma_v,\ 1\otimes\delta\otimes\sigma_z \,/\, v \xrightarrow{\delta} w \in \Delta;\ v\in\{x,y\},\ w\notin\{x,y\}\} \cup$$
$$\cup \{\pi'_w\otimes\delta\otimes 1,\ \pi'_z\otimes\delta\otimes 1 \,/\, v \xrightarrow{\delta} w \in \Delta,\ v\notin\{x,y\},\ w\in\{x,y\}\} \cup$$
$$\cup \{\pi'_w\otimes\delta\otimes\sigma_v,\ \pi'_w\otimes\delta\otimes\sigma_z,\ \pi'_z\otimes\delta\otimes\sigma_v,\ \pi'_z\otimes\delta\otimes\sigma_u \,/\, v \xrightarrow{\delta} w \in \Delta;\ v,w\in\{x,y\}\}$$
$$\cup \{\pi_1\otimes\mu_x\otimes\sigma_2,\ \pi_4\otimes\mu_y\otimes\sigma_3\},$$

donde las $\sigma$ y $\pi$'son las inclusiones y proyecciones canónicas correspondientes.

Como se ha señalado previamente $R(\mathcal{E}_\alpha, k) \simeq R(\mathcal{E}'_\alpha, k)$

$$\mathcal{E}'_\alpha = {}_{\mathcal{K}'_\alpha}\mathcal{E}_\alpha{}_{\mathcal{K}'_\alpha}$$

Recuérdese que $\mathcal{K}'_\alpha = kC_\alpha/I_\alpha$. Para nuestros propósitos es suficiente describir el BOCS $\mathcal{E}'_\alpha$.

<u>Definición</u>. Sea $\mathcal{F} = (C,\Delta)$ un bicarcaj y $\alpha: x \longrightarrow y$ no lazo en $C$. Entonces el <u>bicarcaj</u> <u>derivado</u> $\mathcal{F}_\alpha = (C_\alpha, \Delta_\alpha)$ <u>de</u> $\mathcal{F}$ se define como sigue: $C_\alpha$ y $\Delta_\alpha$ se construyen a partir de $C$, $\Delta$ mediante derivación, como en §3.1; y después agregamos a $\Delta_\alpha$ dos flechas $\xi: z \dashrightarrow x$ y $\eta: y \dashrightarrow z$

para obtener $\Delta'_\alpha$. Sea $\mathcal{F}'_\alpha = (C_\alpha, \Delta'_\alpha)$.

Así pues, tenemos probado el siguiente:

4.1.2 TEOREMA. Sea $\mathcal{E}$ un BOCS libre sobre la categoría $\mathcal{K} = kC/I$ con diferencial $\mathcal{D}$, núcleo $\mathcal{L} = \mathcal{K}(\Delta)$ y el bicarcaj asociado $\mathcal{F} = (C, \Delta)$. Sea $\alpha$ una arista minimal de $C$. Entonces el BOCS derivado $\mathcal{E}'_\alpha$ es libre sobre $\mathcal{K}'_\alpha$, su núcleo $\mathcal{L}'_\alpha \cong \mathcal{K}'_\alpha(\Delta'_\alpha)$, su bicarcaj asociado es $\mathcal{F}'_\alpha$ y su diferencial $\mathcal{D}'_\alpha$ queda determinada sobre $\mathcal{K}'_\alpha$ por las fórmulas de 3.4.4.

4.1.3 Observación: Si $\mathcal{E}$ es un BOCS libre sobre la categoría libre $\mathcal{K} = kC$ con diferencial $\mathcal{D}$. Supongamos que $\mathcal{L} = k(\mathcal{F})$ para el bicarcaj $\mathcal{F} = (C, \Delta)$. Sea $\alpha$ una arista minimal de $C$. Entonces se tiene:

$$ {}_{\mathcal{K}'_\alpha}(\mathcal{K}_\alpha \otimes k(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{K}_\alpha)_{\mathcal{K}'_\alpha} \cong k(\mathcal{F}_\alpha) \text{ y } {}_{\mathcal{K}'_\alpha}k(\mathcal{F})_{\alpha\, \mathcal{K}'_\alpha} \cong k(\mathcal{F}_\alpha). $$

Este algoritmo gráfico fue introducido por Kleiner-Roiter (ver [15]).

## §4.2 BOCS's triangulares y marcos de gráficas punteadas.

Para poder aplicar el algoritmo gráfico de Kleiner-Roiter (de la sección anterior) a algún BOCS $\mathcal{K}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ con bicarcaj $\mathcal{D}$ $=(C,\Delta)$ debemos de tener una arista minimal $\alpha$ de $C$. Después de aplicar la derivación a $\mathcal{D}$, si queremos repetir el algoritmo necesitamos encontrar otra vez una flecha $\beta$ de grado 0 en $\mathcal{D}_\alpha'$ con $\partial_\alpha(\bar\beta)=0$. Esto no siempre es posible. Con la finalidad de poder repetir el algoritmo anterior necesitamos el concepto de BOCS triangular.

Consideremos $\mathcal{K}=kC/I$ y $\mathcal{E}$ un BOCS libre sobre $\mathcal{K}$ con diferencial $\partial$. Sea $\Delta$ una $\mathcal{K}$-base del núcleo $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$. Si $\bar\beta\in\mathcal{K}$ con $\beta$ una flecha de $C$, $\partial(\bar\beta)$ puede escribirse en términos de los elementos en $\Delta$ y elementos de la forma $\bar\mu$ con $\mu$ flecha en $C$.

Escojamos para cada flecha $\beta$ de $C$ una expresión de $\partial(\bar\beta)$ como la anterior. Dadas dos flechas $\beta_1,\beta_2$ de $C$, pondremos $\beta_1>\beta_2$ si $\bar\beta_2$ aparece en la expresión de $\partial(\bar\beta_1)$.

Diremos que tenemos una expresión triangular para $\partial$ con respecto a la $\mathcal{K}$-base $\Delta$ si no hay cadenas de la forma $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_1 > \beta_1$. En este caso tendremos una relación antisimétrica que podemos extender a un orden parcial en las flechas de $C$, que denotaremos $\leq$.

4.2.1 Definición. Sea $\mathcal{E}$ un BOCS sobre $\mathcal{K} = {}^{k}C/I$, $\mathcal{E}$ se llamará triangular si satisface la condición (A) (ver pag. 193) y existe una expresión triangular para la misma diferencial $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.

4.2.2 PROPOSICION. Sea $\mathcal{E}$ un BOCS triangular sobre $\mathcal{K} = {}^{k}C/I$. Supongamos que su diferencial $\mathcal{D}$ tiene una expresión triangular con respecto a una $\mathcal{K}$-base $\Delta$ del núcleo $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$. Sea $\alpha$ una arista minimal de $C$, entonces $\mathcal{E}_\alpha'$ es también triangular.

Demostración: Recuérdese que $\mathcal{K}_\alpha' = {}^{k}C_\alpha/I_\alpha$.

Sea $\mathcal{D}_\alpha'$ la diferencial asociada a $\mathcal{E}_\alpha'$ de acuerdo con la elección $\{\bar{M}_w\}_{w \in |\mathcal{K}_\alpha|}$ de la página 185. Vamos a ver que la expresión triangular para $\mathcal{D}$ determina a travéz de las formulas de 3.4.7 (módulo $I_\alpha$) una expresión triangular para $\mathcal{D}_\alpha'$ con respecto a la base $\Delta'_\mathcal{L}$ (ver 4.1.1).

(Por 4.1.2 ya sabemos que el núcleo $\mathcal{I}_\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ es $\mathcal{K}_\mathcal{L}$-libre con base $\Delta'_\mathcal{L}$). Por 3.6.4, sabemos también que $\mathcal{E}_\mathcal{L}$ satisface la condición (A).

Recordemos que cada flecha $\beta$ de $C_\mathcal{L}$ es de la forma $\beta \in \{\delta, \delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \delta^{(3)}\}$, donde $\delta$ es alguna flecha de $C$, por definición de $C_\mathcal{L}$. Entonces por definición de $k(\xrightarrow{F}(kC)_\mathcal{L})$, la misma flecha $\beta$, vista como morfismo de $(kC)_\mathcal{L}$, es de la forma $\beta \in \{\underline{\delta}\,\sigma_i, \pi_i \underline{\delta}, \pi_j \underline{\delta}\,\sigma_i, \underline{\delta}\}$ para alguna flecha $\delta$ de $C$ (como siempre $\sigma_i, \pi_j$ son como en la pag. 160 y $\underline{\delta} = F(\delta)$). En esta situación pondremos $\tilde{\beta} := \delta$.

Veamos ahora que de las fórmulas de 3.4.4 (módulo $\mathcal{I}_\mathcal{L}$) se sigue lo siguiente:

<u>Afirmación</u>: $\beta_1 > \beta_2$ en $C_\mathcal{L}$ implica $\tilde{\beta}_1 \geq \tilde{\beta}_2$ en $C$.

En efecto, lo probaremos para el caso libre $\mathcal{K} = kC$ (para el caso general $\mathcal{K} = kC/I$, se toman simplemente cocientes).

Si $\beta_1 = \pi_j \tilde{\beta}_1 \sigma_i$, entonces

$\mathcal{L}_\mathcal{L}(\beta_1) = \pi_j \underline{\mathcal{L}(\tilde{\beta}_1)}\,\sigma_i \pm \pi_j \tilde{\beta}_1 \sigma_i (\pi_i \otimes (\mathcal{U}_w \otimes \sigma_i) +$

$+\pi_j \otimes M_w \otimes \nabla_j' (\pi_j' \beta_i \nabla_i)$.

Pero $\underline{\mathcal{L}}(\tilde{\beta}_i) = 1 \otimes \mathcal{L}(\tilde{\beta}_i) \otimes 1 = 1 \otimes \sum_p a_p f_p \delta_p g_p \otimes 1$ con

$\delta_p \in \Delta$ ; $f_p$, $g_p$ caminos de $C$, y $a_p \in k$ :

$\therefore \underline{\mathcal{L}}(\tilde{\beta}_i) = \sum_p a_p f_p (1 \otimes \delta_p \otimes 1) g_p = \sum_p a_p f_p (\sum \nabla_\ell \pi_\ell \otimes \delta_p \otimes \sum \nabla_t' \pi_t') g_p$

$= \sum_{p,\ell,t} a_p \underline{f}_p \nabla_\ell (\pi_\ell \otimes \delta_p \otimes \nabla_t') \pi_t' \underline{g}_p$.

$\therefore \pi_j \underline{\mathcal{L}}(\tilde{\beta}_i) \nabla_i = \sum_{p,\ell,t} a_p \pi_j \underline{f}_p \nabla_p (\pi_\ell \otimes \delta_p \otimes \nabla_t') \pi_t' \underline{g}_p \nabla_i$.

Como $\pi_j \underline{f}_p \nabla_p = \sum_q b_q \underline{f}_q'$ con $f_q' \in D(f_p)$, $b_q \in k$ ; y

$\pi_t' g_p \nabla_i = \sum_r c_r g_r'$ con $g_r' \in D(g_p)$, $c_r \in k$.

Aquí, $D(f_p)$ = conjunto de caminos de $C_L$ que derivan de $f_p$, y $D(g_p)$ = " " " " " " " " $g_p$ (ver pag 121).

Entonces $\mathcal{L}_L(\beta_i) = \underbrace{\sum_{p,q,r,t,\ell} a_p b_q c_r f_q' \otimes (\pi_\ell \otimes \delta_p \otimes \nabla_t') g_r'}_{*_1} \pm$

$\pm \underbrace{\pi_j \tilde{\beta}_i \nabla_i (\pi_i \otimes M_w \otimes \nabla_i)}_{*_2} + \underbrace{\pi_j \otimes M_w \otimes \nabla_j' (\pi_j' \tilde{\beta}_i \nabla_i)}_{*_3}$ y

$\beta_1 > \beta_2$ implica que $\beta_2$ aparece en esta expresión de de $\mathcal{D}_f(\beta_1)$.

Nótese que $\pi_j \tilde{\beta}_1 \pi_i$ y $\pi_j \tilde{\beta}_1 \pi_i \in \{0, D(\tilde{\beta}_1)\}$.

Entonces, si $\beta_2$ aparece en el término $*_2$ o en el término $*_3$ se concluye que $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$.

Por otro lado, si $\beta_2$ aparece en el término $*_1$, entonces

$$\begin{cases} \beta_2 / f_q' \text{ para algún } q \text{ o} \\ \beta_2 / g_r' \text{ para algún } r. \end{cases}$$

Si $\beta_2 / f_q'$, entonces como $\begin{cases} f_q' \in D(f_q), \text{ y} \\ \tilde{\beta}_2 / f_q \end{cases}$

se sigue que $\tilde{\beta}_2 / f_r$.

Analogamente si $\beta_2 / g_r'$, entonces $\tilde{\beta}_2 / g_p$.

$\therefore \tilde{\beta}_1 > \tilde{\beta}_2$.

Los otros casos se pueden analizar en forma análoga. //

Por lo tanto si tenemos

$(\nabla)$: $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_s > \beta_1$ en $(\mathcal{L})_1$, esto implica.

$\tilde{\beta}_1 \geq \tilde{\beta}_2 \geq \cdots \geq \tilde{\beta}_s \geq \tilde{\beta}_1$ en $C_1$: Como $\mathcal{C}$ es triangular, entonces se tiene $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \cdots = \tilde{\beta}_s = \beta$. Esto quiere decir que todas las flechas $\beta_i \in \mathcal{D}(\beta)$. Pero por las mismas fórmulas de 3.4.4 (módulo $I_d$) esto es imposible (ya que no hay alguna cadena $(\nabla)$ con estas condiciones.

Por ejemplo si $a \xrightarrow{\beta} b$ con $a \notin \{x, y\}$, $b \in \{x, y\}$, entonces podemos suponer que la cadena $(\nabla)$ es de la forma $\beta_1 > \beta_2 > \beta_1$, en donde $\beta_1 = \beta = \pi_i \underline{\beta}$, $\beta_2 = \beta^{(1)} = \pi_j \underline{\beta}$.

Entonces aplicando la fórmula (b) de 3.4.4 (módulo $I_d$) tenemos:

$\beta_1 > \beta_2$ implica que $\bar{\beta}_2$ aparece en la expresión de

$$\mathcal{D}_d(\bar{\beta}_1) = \mathcal{D}_d(\overline{\pi_i \underline{\beta}}) = \bar{\pi}_i \underbrace{\overline{\mathcal{D}(\beta)}}_{*_4} + \underbrace{(\bar{\pi}_i \otimes \mathcal{U}_\omega \otimes \bar{\pi}_i)\bar{\pi}_i \underline{\bar{\beta}}}_{*_5}.$$

Nótese que $\bar{\beta}_2$ no aparece en el término $*_4$ porque como antes, se tendría que $\tilde{\beta}_1 > \tilde{\beta}_2$ en $C$, lo cual es imposible. Por lo tanto $\bar{\beta}_2$ debe aparecer en el término $*_5$. Ahora $\beta_2 > \beta_1$ implica que $\bar{\beta}_1$ aparece en la expresión de

$$\mathcal{D}_d(\overline{\beta^{(1)}}) = \mathcal{D}_d(\overline{\pi_j \underline{\beta}}) = \underbrace{\bar{\pi}_j \overline{\mathcal{D}(\beta')}}_{*_6} + \underbrace{(\bar{\pi}_j \otimes \mathcal{U}_\omega \otimes \bar{\pi}_j)\bar{\pi}_j \underline{\bar{\beta}}}_{*_7},$$

lo cual no es cierto, ya que es claro que $\bar{\beta}_1$ no aparece en el término $*_6$ ni tampoco en el término $*_7$ (por el orden parcial entre los $\nabla_i$ y $\Pi_j$ y la notación introducida en la pag. 187 ) ).

Así pues, de lo anterior podemos concluir que $\mathcal{E}_2$ es triangular. //

__Definiciones__. (i) Si $\mathcal{K} = k\,C/I$, diremos que $\mathcal{K}$ es __finitamente generada__ si el carcaj $C$ tiene un número finito de flechas.

(ii) Un BOCS $\mathcal{E}$ libre sobre $\mathcal{K} = k\,C/I$ se llamará __finitamente generado sobre__ $\mathcal{K}$ si su núcleo $\mathcal{L}$ es finitamente generado sobre $\mathcal{K}$ (nótese que esto implica que $\mathcal{L}$ admite una $\mathcal{K}$-base finita sobre $\mathcal{K}$).

4.2.3 __LEMA__. __Sea__ $\mathcal{E}$ __un__ BOCS __triangular sobre una categoría finitamente generada__ $\mathcal{K} = k\,C/I$. __Supongamos que su diferencial__ $\delta$ __tiene una expresión triangular con respecto a una__ $\mathcal{K}$-__base__ $\Delta$ __del núcleo__ $\mathcal{L}$ __de__ $\mathcal{E}$. __Sea__ $A$ __una representación de__ $\mathcal{E}$ __y denotemos por la misma__ $\Delta$ __a la gráfica punteada asociada a la__ $\mathcal{K}$-__base__ $\Delta$ __de__ $\mathcal{L}$. __Si__ $W$ __es un marco no singular de__ $\Delta$ (__ver pag. 99__) __tal que__ $W_1(i) = A(i)$ __para__ cualquier punto $i$ de $\Delta$, entonces hay una única representación $B$ en $R(\mathcal{C})$ y un morfismo $\eta: A \longrightarrow B$ en $R(\mathcal{C})$ tal que $W$ es el marco asociado a $\eta$ (ver 2.6.11).

Demostración: Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ las flechas de $C$, en donde $\mathcal{K} = k(/I)$ y donde $\alpha_i > \alpha_j$, si $i > j$, es el orden determinado por la expresión triangular de $\mathcal{D}$.

Probaremos nuestro resultado usando inducción sobre el número de flechas de $C$.

Si $C$ no tiene flechas, entonces el lema es claro.

Ahora sea $J_1$ el ideal de $\mathcal{K}$ generado por los elementos $\bar{\alpha}_s, \ldots, \bar{\alpha}_2$, y consideremos la categoría $\mathcal{K}_1$ con $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}_1|$ definida como sigue:

$\mathcal{K}_1(v_1, v_2) = J_1(v_1, v_2)$, $\mathcal{K}_1(v, v) = k\,id_v + J_1(v, v)$ para objetos $v_1, v_2$ $(v_1 \neq v_2)$, $v$ objetos de $\mathcal{K}_1$.

Obsérvese que $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}$.

Denotemos por $\mathcal{L}_1$ el $\mathcal{K}_1$-$\mathcal{K}_1$ subbimódulo de $\mathcal{L}$ generado por los elementos de $\Delta$.

Evidentemente $\mathcal{L}_1$ es $\mathcal{K}_1$-libre (ya que $\mathcal{L}$ es $\mathcal{K}$-libre).

También es claro que $\mathcal{D}$ restringida a $\tilde{\mathcal{K}}_1$ es una diferencial de grado 1 de $\mathcal{L}_1$ sobre $\tilde{\mathcal{K}}_1$ y el BOCS correspondiente $\mathcal{E}_1$ sobre $\mathcal{K}_1$ (ver 2.3.3) es triangular.

Entonces por hipótesis de inducción, hay una única representación $B_1$ en $R(\mathcal{E}_1)$ y un morfismo $\eta_0 : A/\mathcal{K}_1 \longrightarrow B_1$ en $R(\mathcal{E}_1)$.

Además por 2.6.12, hay una única transformación natural $S_1 : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A(-), B_1(?))$ tal que $S_1(x) = W(x)$ para cada $x \in \Delta$, y

$(x_1)$ $B_1(f) = W(m)A(f)W(e)^{-1} + S_1(\mathcal{D}(f))W(e)^{-1}$ para cada morfismo $f : e \longrightarrow m$ en $\tilde{\mathcal{K}}_1$.

Obsérvese que la expresión $S_1(\mathcal{D}(f))$ tiene sentido porque $\mathcal{D}(\bar{\lambda}_i) \in \mathcal{L}_1$, para $i \in \{2, \dots, s\}$ por hipótesis, y porque $\mathcal{D}$ satisface la regla de Leibnitz.

Probemos ahora la existencia de $B \in |R(\mathcal{E})|$, y un morfismo $\eta : A \longrightarrow B$ con marco $W$.

Consideremos primero el $k$-funtor $B' : kC \longrightarrow \mathrm{Mod}\,k$ definido por: $B'(j) = B_1(j)$ para $j \in |C|$, $B'(\lambda_i) = B_1(\bar{\lambda}_i)$ para $i = s, \dots, 2$; $B'(\lambda_1) = W(s)A(\bar{\lambda}_1)W(t)^{-1} + S_1(\mathcal{D}(\bar{\lambda}_1))W(t)^{-1}$, donde $\alpha_i : c \to d$. ($\rho_1(\mathcal{L}(\bar{\alpha}_i))$ tiene sentido pues $\mathcal{L}(\bar{\alpha}_i) \in$ $\in \bar{\Sigma}_i$).

Sea $\rho_1' : \mathcal{L} \to \operatorname{Hom}_k(A(-), B'(?))$ la transformación natural tal que $\rho_1'(x) = W(x)$ para cada $x \in \Delta$.

Ahora bien, probemos lo siguiente:

<u>Afirmación</u>. (1) Si $g : \ell \to m$ es un $k$ C-morfismo, entonces

$B'(g) = W(m) A(\bar{g}) W(\ell)^{-1} + \rho_1'(\mathcal{L}(\bar{g})) W(\ell)^{-1}$. $(\blacktriangle)$

(2) $B'(I) = 0$. Entonces $B'$ induce un $k$-funtor
 $B : \mathcal{K} \to \mathrm{Mod}_k$.

Prueba: "(1)" Por la forma de $g$ y la definición de $B'$ en las flechas $\alpha_s, \dots, \alpha_t$ será suficiente probar que $g_2 g_1$ satisface la fórmula $(\blacktriangle)$, siempre que $g_1 : \ell \to m$, $g_2 : m \to m$ la satisfagan.

Por hipótesis tenemos:

$B'(g_1) = W(m) A(\bar{g}_1) W(\ell)^{-1} + \rho_1'(\mathcal{L}(\bar{g}_1)) W(\ell)^{-1}$ y

$B'(g_2) = W(m) A(\bar{g}_2) W(m)^{-1} + \rho_1'(\mathcal{L}(\bar{g}_2)) W(m)^{-1}$.

Entonces: $B'(g_2 g_1) = B'(g_2) B'(g_1) =$

$[W(m)A(\bar{g}_2)W(m)^{-1}+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2))W(m)^{-1}][W(m)A(\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+$
$+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}] = W(m)A(\bar{g}_2\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+$
$+W(m)A(\bar{g}_2)W(m)^{-1}S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_1))W(\ell)^{-1}+$
$+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2))A(\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2))W(m)^{-1}S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_1))W(\ell)^{-1}=$
$=W(m)A(\bar{g}_2\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+B'(g_2)S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_1))W(\ell)^{-1}+$
$+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2)\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}=W(m)A(\bar{g}_2\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+$
$+S_1'(\bar{g}_2\mathcal{D}(\bar{g}_1))W(\ell)^{-1}+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2)\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}=$
$=W(m)A(\bar{g}_2\bar{g}_1)W(\ell)^{-1}+S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_2\bar{g}_1))W(\ell)^{-1}.$

Mostrándose (1).

"(2)" Sea $g=\sum c_\mu g_\mu \in I(\ell,m)$, donde $g:\ell\to m$ es un camino en $C$.

Entonces $\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \bar{g}_\mu = 0$ en $\mathcal{K}$, y entonces $\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu \mathcal{D}(\bar{g}_\mu) = 0$. $\therefore \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu S_1'(\mathcal{D}(\bar{g}_\mu))=0$.

Aplicando (1) tenemos:

$$\sum_{\mu=1}^{N} c_\mu B'(g_\mu) = \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu W(m) A(\bar{g}_\mu) W(\ell)^{-1} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{N} c_\mu f_1(\mathcal{D}(\bar{g}_\mu)) W(\ell)^{-1} = \sum_{\mu} c_\mu W(m) A(\bar{g}_\mu) W(\ell)^{-1} =$$

$$= W(m) \Big[ \sum_{\mu} c_\mu A(\bar{g}_\mu) \Big] W(\ell)^{-1} = 0.$$ Mostrándose (2).//

Así pues, $B'$ determina una representación $B$ de $\mathcal{K}$. Más aún, por lema 2.6.12, $W$ es el marco de un morfismo $\eta : A \longrightarrow \bar{B}$ en $R(\mathcal{E})$.

No es difícil convencerse que $B$ es única (por construcción) .//

4.2.4 LEMA (Roiter [11]). Sea $\mathcal{E}$ un Bocs triangular sobre una categoría finitamente generada $\mathcal{K} = kC/I$. Supongamos que su diferencial $\mathcal{D}$ tiene una expresión triangular con respecto a una $\mathcal{K}$-base $\Delta$ del núcleo $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$. Supongamos que para alguna flecha $\alpha$ en $C$, $\mathcal{D}(\alpha) = x \in \Delta$. Entonces si $A$ es un objeto de $R(\mathcal{E})$, hay una representación $\bar{A}$ en $R(\mathcal{E})$ isomorfa a $A$ y tal que $\bar{A}(\alpha) = 0$.

Demostración: Denotemos por la misma $\Delta$ a la gráfica punteada asociada a la $\mathcal{K}$-base $\Delta$.

Consideremos el siguiente marco $W$ de $\Delta$:

para cada objeto $i$ de $\mathcal{K}$, $W_1(i)=A(i)$, $W_2(i)=A(i)$.

$$W(i)=1d_{A(i)}.$$

$W(x)=-A(\alpha): W_1(i)=A(i) \longrightarrow A(j)=W_2(j)$, aquí

$\alpha: i \longrightarrow j$, y $W(y)=0$ para $y \in \Delta$, $y \neq x$.

Por el lema anterior hay un morfismo $\eta: A \longrightarrow \bar{A}$ con el marco asociado a $\eta$ igual a $W$.

Como $W$ es no singular y $\mathcal{E}$ tiene la condición (A), $\eta$ es un isomorfismo. Además, por 2.6.12 tenemos:

$$\bar{A}(\alpha)=A(\alpha)+\delta(\mathcal{D}(\alpha))=A(\alpha)+\delta(x)=A(\alpha)+W(x)=0.$$

Esto prueba nuestro lema. //

4.2.5 <u>PROPOSICION</u>. <u>Sea $\mathcal{E}$ un BOCS triangular sobre una categoría finitamente generada $\mathcal{K}=kC/I$. Supongamos que su diferencial $\mathcal{D}$ tiene una expresión triangular con respecto a una $\mathcal{K}$-base $\Delta$ del núcleo $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$. Supongamos que para alguna flecha $\alpha$ en $C$,</u>

$\mathcal{D}(\mathcal{I}) = x \in \Delta$. Sea $J$ el ideal generado por $\mathcal{I}$ en $\mathcal{K}$ y $\Theta: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/J$ el funtor canónico. Entonces: $\mathcal{E}^{\Theta}$ es un BOCS triangular sobre $\mathcal{K}/J$ y $R(\mathcal{E}) \simeq R(\mathcal{E}^{\Theta})$. Además si $\mathcal{K} = kC/I$, $\mathcal{K}/J = kC'/I'$ donde $C'$ se obtiene del carcaj $C$ omitiendo la flecha $\alpha$ y $I' = \ker(kC' \hookrightarrow kC \to \mathcal{K})$. En la situación general se tiene $\mathcal{D}_J(\bar{h}) = \overline{\mathcal{D}(h)}$ con $\mathcal{D}_J$ la diferencial asociada a $\mathcal{E}_J$. (ver 2.5.1). De lo anterior se infiere la triangularidad de $\mathcal{E}_J$.

Demostración: Por el teorema 2.4.2 y el lema 4.2.4 se sigue $R(\mathcal{E}^{\Theta}) \underset{\bar{\Theta}}{\simeq} R(\mathcal{E})$.

Sabemos (ver pag. 84) que $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}/J\mathcal{E} + \mathcal{E}J$, entonces

$\mathcal{E}_J(v,w) = \mathcal{E}(v,w)/(J\mathcal{E} + \mathcal{E}J)(v,w) \simeq$

$\simeq \mathcal{L}/J\mathcal{L} + \mathcal{L}J + \mathcal{D}(J)(v,w) \oplus \mathrm{I\!d}_{\mathcal{K}/J}(v,w)$.

Por lo tanto el núcleo de $\mathcal{E}_J$ está dado por

$\mathcal{L}_J \simeq \mathcal{L}/J\mathcal{L} + \mathcal{L}J + \mathcal{D}(J)$.

Como $\mathcal{L} = \mathcal{K}_x\mathcal{K} \oplus \underbrace{\coprod_{y \in \Delta\setminus\{x\}} \mathcal{K}_y\mathcal{K}}_{\mathcal{L}'}$, entonces

$$\mathcal{L}_J = \coprod_{y\in\Delta\setminus\{x\}} \mathcal{K}y\mathcal{K}/J\mathcal{L}+\mathcal{L}J = \coprod_{y\in\Delta\setminus\{x\}} \mathcal{K}/J\,\bar{y}\,\mathcal{K}/J .$$

por 2.6.6 los elementos $\bar{y}$ son $\mathcal{K}/J$-libres, y por lo tanto $\mathcal{L}_J$ es $\mathcal{K}/J$-libre con base $\Delta_J = \bar{\Delta}\setminus\{\bar{x}\}$, en donde $\bar{\Delta} = \{\bar{y} \mid y \in \Delta\}$.

Ahora bien, si $\eta : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $R(\mathcal{C}^{\oplus})$, entonces tenemos el morfismo $\bar{\Theta}(\eta) : \bar{\Theta}(A) \longrightarrow \bar{\Theta}(B)$ con $\bar{\Theta}(\eta)(\bar{\eta}_w) = \eta(\eta_w)$ para cada objeto $w$ de $\mathcal{K}$.

Como $\bar{\Theta}(\eta)$ es isomorfismo si y solo si $\eta$ lo es y $\mathcal{C}$ tiene la condición (A), entonces las aplicaciones $\bar{\Theta}(\eta_w)$ son isomorfismos.

$\therefore$ $\mathcal{C}^{\oplus}$ satisface la condición (A). //

4.2.6 <u>LEMA</u>. <u>Sea</u> $\mathcal{C}$ <u>un</u> BOCS <u>libre sobre una categoría libre</u> $\mathcal{K} = kC$. <u>Sea</u> $\Delta$ <u>una</u> $\mathcal{K}$-<u>base del núcleo</u> $\mathcal{L}$ <u>de</u> $\mathcal{C}$. <u>Si hacemos</u> $\underline{x}_1 = \sum_{i=1}^{t} c_i x_i \in \mathcal{L}(v,w)$, <u>para ciertos</u> $c_i \in k$, $x_i \in \Delta$ <u>y</u> $c_1 \neq 0$. <u>Entonces</u> $\Delta' = \{\underline{x}_1\} \cup (\Delta\setminus\{x_1\})$ <u>también es una</u> $\mathcal{K}$-<u>base para</u> $\mathcal{L}$. <u>Más aún, dada cualquier diferencial</u> $\delta$ <u>de</u> $\mathcal{C}$, <u>las expresiones triangulares para</u> $\mathcal{L}$ <u>con</u>

<u>respecto a $\Delta$ coinciden, con las expresiones triangulares para $\mathfrak{D}$ con respecto a $\Delta'$.</u>

Demostración: Evidentemente, $\Delta'$ es también un sistema de $\mathcal{K}$-generadores de $\mathcal{L}$.

Mostremos primeramente que $\underline{x}_1$ es $\mathcal{K}$-libre.

(Nótese que $\underline{x}_1$ es $\mathcal{K}$-libre si y solo si $c_1\underline{x}_1$ es $\mathcal{K}$-libre).

Consideremos las aplicaciones de bimódulos:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(w,?)\otimes_k\mathcal{K}(-,v) \arrow[r, "\psi'"] & \mathcal{K}\underline{x}_1\mathcal{K} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, dotted, "\varphi"'] & \coprod_{i=1}^{t}\mathcal{K}x_i\mathcal{K} \arrow[d, "p_1"] \\
f\otimes g \arrow[r, mapsto] & f\underline{x}_1 g & \mathcal{K}x_1\mathcal{K} \cong \mathcal{K}(w,?)\otimes_k\mathcal{K}(-,v)
\end{tikzcd}$$

Claramente la composición $p_1\iota$ y $\psi'$ son epimorfismos.

Ahora si $\psi'(\sum f_i\otimes g_i)=0$ para algún $\sum f_i\otimes g_i \in$ $\in \mathcal{K}(w,?)\otimes_k\mathcal{K}(-,v)$, entonces $\varphi\psi'(\sum f_i\otimes g_i) =$ $= \sum f_i x_i g_i = 0$. Por lo tanto $\sum f_i\otimes g_i = 0$ pues $x_i$ es $\mathcal{K}$-libre.

$\therefore$ $\psi'$ es isomorfismo, y en consecuencia $\underline{x}_1$ es $\mathcal{K}$-libre.

luego $\mathcal{L}$ es $\mathcal{K}$-libre con base $\Delta'$.

Supongamos ahora que la diferencial $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ tiene una expresión triangular con respecto a $\Delta$, y veamos que $\mathcal{D}$ es triangular con respecto a $\Delta'$.

Sea $>$ el orden parcial en las flechas de $C$ con respecto a $\Delta$ y $\succ$ el orden parcial en las flechas de $C$ con respecto a $\Delta'$.

Mostremos que $\beta_1 > \beta_2$ implica $\beta_1 \succ \beta_2$ (con esto bastará pues $\Delta$ se obtiene de $\Delta'$ eliminando $\underline{x}_1$ y agregando en su lugar un elemento de la forma $x_1 = c_1'\underline{x}_1 + c_2'x_2 + \cdots + c_t'x_t$).

Analicemos los dos casos posibles:

<u>Caso 1</u>: $\beta_2$ "aparece como coeficiente" de $\underline{x}_1$ y

$$\mathcal{D}(\beta_1) = \sum_{j=1}^{s} d_j \delta_j \underline{x}_1 \delta_j' + r, \ \delta_j \text{ y } \delta_j' \text{ son básicos de } \mathcal{K}$$

y $r \in \coprod_{\delta \in \Delta' \setminus \{\underline{x}_1\}} \mathcal{K}\delta\mathcal{K}$.

$$\therefore \mathcal{D}(\beta_1) = d_1(c_1\delta_1 x_1 \delta_1') + \cdots + d_s(c_1\delta_s x_1 \delta_s') + r' =$$

$$= c_1(d_1\delta_1 x_1 \delta_1' + \cdots + d_s \delta_s x_1 \delta_s') + r'.$$

A probar que $d_1\delta'_1 x_1 \delta''_1 + \cdots + d_s \delta'_s x_1 \delta''_s \neq 0$.

Sabemos que dada una $\mathcal{K}$-base $T$ de $\mathcal{K}$, entonces $\{\delta' \otimes \delta'' \mid \delta' \in T \cap \mathcal{K}(w, w_1),\ \delta'' \in \mathcal{K}(v_1, v) \text{ para algunos } w, v \in |\mathcal{K}|\}$ constituye una $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{K}(w, ?) \otimes_k \mathcal{K}(-, v)$.

Ahora si $d_1\delta'_1 x_1 \delta''_1 + \cdots + d_s \delta'_s x_1 \delta''_s = 0$, entonces se tendría que $d_1(\delta'_1 \otimes \delta''_1) + \cdots + d_s(\delta'_s \otimes \delta''_s) = 0$. Como los $\delta'_i \otimes \delta''_i$ son todos distintos, entonces son linealmente independientes y por lo tanto $d_1 = d_2 = \cdots = d_s = 0$, lo cual no puede pasar.

Con el mismo argumento se muestra que si $\beta_2$ aparece en $\delta'_{j_0}$ o en $\delta''_{j_0}$, entonces $d_{j_0}\delta'_{j_0} x_1 \delta''_{j_0} \neq 0$.

$$\therefore \beta_1 > \beta_2$$

<u>Caso</u> 2: $\beta_2$ no aparece como coeficiente de $\underline{x}_1$.

$\therefore$ $\beta_2$ aparece como coeficiente de algún $x_{j_0}$, $j_0 \neq 1$.

Supongamos que:

$\mathcal{L}(\beta_1) = \sum_{j=1}^{s} d_j \delta'_j \underline{x}_1 \delta''_j + \sum_{k=1}^{s'} d'_k \delta_k x_{j_0} \delta'_k + r$, donde

$r \in \coprod_{i \neq 1, j_0} \mathcal{K} x_i \mathcal{K}$.

$$\therefore \mathcal{L}(\beta_1) = \underbrace{c_{j_0} d_{j_0} \delta'_{j_0} x_{j_0} \delta''_{j_0}}_{(*)} + d_1 \rho_1 x_{j_0} \rho'_1 + \cdots + d_k \rho_k x_{j_0} \rho'_k + r'$$

Como $\beta_2$ no aparece como coeficiente de $\underline{x}_1$, $\beta_2$ no es factor ni de $\delta'_{j_0}$ ni de $\delta''_{j_0}$, entonces el término $(*)$ no se cancela con ningún término "a la derecha" en donde aparezca $\beta_2$.

Ahora si, si $d_1 \rho_1 x_{j_0} \rho'_1 + \cdots + d_k \rho_k x_{j_0} \rho'_k$ son los términos que contienen a $\beta_2$ (por lo tanto no se cancelan y al menos hay uno por hipótesis), como antes se muestra que $d_1 \neq 0$, $\ldots$, $d_k \neq 0$ y no se cancelan mutuamente.

Mostrándose nuestro lema. //

## § 4.3 El algoritmo de Kleiner-Roiter.

Sea $\mathcal{E}$ un Bocs triangular sobre $\mathcal{K} = kC$. Supongamos que $\mathcal{E}$ es de tipo de representación finito (ver pag. 88). En esta sección veremos que si $\mathcal{K}$ es finitamente generada, entonces podemos aplicar sucesivamente el teorema 4.1.2 y después de un número finito de pasos, obtener un Bocs $\mathcal{E}_0$ sobre una categoría $\mathcal{K}_0$ con diferencial $\mathcal{D}_0$ tal que $\mathcal{K}_0(X,Y) = 0$ si $X \neq Y$ y $\mathcal{K}_0(X,X) = k\,id_X$, en tal caso el bicarcaj asociado $\mathcal{F}_0$ no tiene flechas continuas y si $I(\mathcal{E})$ denota la subcategoría plena de $r(\mathcal{E})$ con objetos dados por un sistema representativo de las clases de isomorfía de los módulos inescindibles, entonces $I(\mathcal{E}) \cong k\mathcal{F}_0$, donde la composición en $k\mathcal{F}$ está determinada por la diferencial $\mathcal{D}_0$.

Recuérdese que si $\mathcal{E}$ es un Bocs sobre $\mathcal{K}$, entonces $r(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}, \text{mod}_k)$ y $R(\mathcal{E}) = R(\mathcal{E}, \text{Mod}_k)$.

Definiciones. (i) Una categoría $\mathcal{K}$ se llamará <u>semisimple</u> si $\mathcal{K}(X,Y) = 0$ para $X \neq Y$ y $\mathcal{K}(X,X) = k\,id_X$.
Un Bocs $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{K}$ se llamará <u>semisimple</u> si $\mathcal{K}$ es semisimple.

(2) Dos BOCS's ${}_{\mathcal{K}_1}\mathcal{E}_{\mathcal{K}_1}$ y ${}_{\mathcal{K}_2}\mathcal{E}_{\mathcal{K}_2}$ se llamarán <u>Morita equivalentes</u> si $R(\mathcal{E}_1) \simeq R(\mathcal{E}_2)$ y $r(\mathcal{E}_1) \simeq r(\mathcal{E}_2)$.

Recuérdese que un BOCS ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ es de tipo de representación finito si el conjunto de las clases de isomorfía de inescindibles en $r(\mathcal{E})$ es finito.

4.3.1 <u>Observación</u>: Si $\mathcal{E}$ es un BOCS sobre $\mathcal{K} = kC/I$ con diferencial $\mathcal{D}$ y $\mathcal{L}$ es una arista minimal de $C$, entonces $R(\mathcal{E}) \simeq R(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ y $r(\mathcal{E}) \simeq r(\mathcal{E}_{\mathcal{L}})$ (ver 2.4.3)

$\therefore$ $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ son Morita equivalentes.

También en el caso 4.2.5, $R(\mathcal{E}) \simeq R(\mathcal{E}^{\oplus})$ y $r(\mathcal{E}) \simeq r(\mathcal{E}^{\oplus})$.

$\therefore$ $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}^{\oplus}$ son Morita equivalentes.

<u>Definiciones</u>. (1) Un carcaj $Q$ se llama <u>localmente finito</u> si a cada vértice de $Q$ llegan o salen solamente un número finito de flechas.

(2) Una $k$-categoría $\mathcal{K}$ se llama <u>localmente finita</u> si:

(i) $\dim_k \mathcal{K}(X,Y)$ es finito, para cualesquier objetos $X, Y$ de $\mathcal{K}$;
(ii) $X \neq Y$ si y solo si $X \not\cong Y$;
(iii) $\mathcal{K}(X,X)$ es un campo local para cualquier $X \in |\mathcal{K}|$.

Dada una $k$-categoría $\mathcal{K}$ localmente finita, podemos asociarle un carcaj $Q$ como sigue:

$|Q| := |\mathcal{K}|$;

$$Q_1(X,Y) := \begin{cases} \dim_k \mathcal{K}(X,Y) \text{ flechas si } X \neq Y, \text{ y} \\ \dim_k \operatorname{rad} \mathcal{K}(X,Y) \text{ flechas si } X = Y \end{cases}$$

Con el objeto de distinguir esta construcción de las anteriores, todas las flechas de $Q$ serán flechas punteadas.

Ahora bien, para cualesquier objetos $X, Y$ de $\mathcal{K}$, seleccionemos una $k$-base $T(X,Y)$ de $\mathcal{K}(X,Y)$ si $X \neq Y$, y $T(X,X)$ una $k$-base de $\operatorname{rad} \mathcal{K}(X,X)$.

Entonces, de la definición de categoría localmente finita, si $X, Y, Z$ son objetos de $\mathcal{K}$, y $\alpha \in T(X,Y)$, $\beta \in T(Y,Z)$ tenemos que $\beta \cdot \alpha = \sum_{\mu \in T(X,Z)} C^{\mu}_{\beta,\alpha} \mu$, donde $C^{\mu}_{\beta,\alpha} \in k$.

Estos coeficientes satisfacen la relación:

$$(*)\quad \sum_{\beta\in T(X,Z)} C^{\beta}_{\beta,\alpha}\, C^{\tau}_{\mu,\beta} = \sum_{\delta\in T(Y,W)} C^{\delta}_{\mu,\beta}\, C^{\tau}_{\delta,\alpha}$$

para $\alpha\in T(X,Y)$, $\beta\in T(Y,Z)$, $\mu\in T(Z,W)$ y $\tau\in T(X,W)$.

Inversamente, si $Q$ es un carcaj localmente finito con flechas punteadas y para cada tres flechas $X \overset{\alpha}{\dashrightarrow} Y$, $Y \overset{\beta}{\dashrightarrow} Z$, $Z \overset{\mu}{\dashrightarrow} W$ se tienen elementos $C^{\mu}_{\beta,\alpha}$ de $k$ satisfaciendo $(*)$, podemos construir una categoría $kQ$ como sigue:

$|kQ| = |Q|$;

$$kQ(X,Y) = \begin{cases} k\text{-espacio vectorial generado por flechas de } X \text{ a } Y \text{ si } X\neq Y, \text{ y} \\ k\,id_X \oplus k\text{-espacio vectorial generado por las flechas de } X \text{ a } X. \end{cases}$$

Finalmente ponemos: $\beta\circ id_X = id_Y\circ\beta$ para $X \overset{\beta}{\dashrightarrow} Y$, y

$$\beta\circ\alpha = \sum_{X \overset{\mu}{\dashrightarrow} Z} C^{\mu}_{\beta,\alpha}\,\mu \quad \text{para } X \overset{\alpha}{\dashrightarrow} Y,\ Y \overset{\beta}{\dashrightarrow} Z.$$

Claramente la categoría $kQ$ es localmente finita. Más aún, si partimos de $\mathcal{K}$, obtenemos un carcaj $Q$ y coeficientes $C^{\mu}_{\alpha,\beta}$, entonces $\mathcal{K}\cong kQ$.

Ahora bien, sea $\mathcal{C}$ un BOCS libre con la condición (A) y semisimple sobre una categoría finitamente generada $\mathcal{K} = kC$. Sea $\mathcal{L}$ el núcleo de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D} = (C, A)$ el bicarcaj asociado. Entonces las representaciones inescindibles de $\operatorname{mod}(\mathcal{K}) = (\mathcal{K}, \operatorname{mod}_k)$ tienen la forma $S_a$, donde $a$ es un objeto de $\mathcal{K}$, dado por:

$$S_a(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq a, \text{ y} \\ k & \text{si } b = a \end{cases}.$$

Si $M \in |r(\mathcal{C})|$, entonces $M \cong \coprod m_i S_{a_i}$ en $\operatorname{mod}(\mathcal{K})$. Pero $\operatorname{mod}(\mathcal{K})$ es una subcategoría de $r(\mathcal{C})$ (ver [18], pág. 45), entonces $M \cong \coprod\limits_i m_i S_{a_i}$ en $r(\mathcal{C})$. Más aún, como $\mathcal{C}$ tiene la condición (A), entonces la descomposición anterior de $M$ es única salvo isomorfismo. Por lo tanto los $S_{a_i}$ son las únicas (salvo isomorfismo) representaciones inescindibles en $r(\mathcal{C})$.

Ahora sean $S_{a_i}, S_{a_j} \in |r(\mathcal{C})|$ y $\varphi \in r(\mathcal{C})(S_{a_i}, S_{a_j})$. Si $a_i \neq a_j$, entonces $\varphi$ está dada por una aplicación lineal (ver pág. 63) $\hat{\varphi} : \mathcal{L}(a_i, a_j) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(k,k) \cong k$

Supongamos ahora que $a_i = a_j$. Si $\varphi$ no es un isomorfismo, entonces otra vez, $\varphi$ está dada por una aplicación lineal $\vec{\varphi}: \mathcal{L}(a_i, a_i) \longrightarrow Hom_k(k,k) \cong k$.
Si $\varphi$ es un isomorfismo, entonces $\varphi$ está dada por dos aplicaciones lineales $k\,id_k : k \longrightarrow k$, con $k \in k$, y $\vec{\varphi}: \mathcal{L}(a_i, a_j) \longrightarrow Hom_k(k,k) \cong k$.

Si $a_i \neq a_j$, entonces una $k$-base para $T(\mathcal{E})(S_{a_i}, S_{a_j})$ está dada por las $\vec{\varphi}_{x_0} \in T(\mathcal{E})(S_{a_i}, S_{a_j})$ con $x_0 \in \Delta_1(a_i, a_j)$, donde

$$\vec{\varphi}_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq x_0, \text{ y} \\ 1 \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Si $a_i = a_j$, entonces una $k$-base para $T(\mathcal{E})(S_{a_i}, S_{a_j})$ está dada por los $\vec{\varphi}_{x_0}$ definidos como antes y la identidad en $k$.

Ahora si $x_0 \in \Delta_1(a_i, b_j)$ y $y_0 \in \Delta_1(a_j, a_t)$, entonces $\vec{\varphi}_{y_0} \vec{\varphi}_{x_0} \in T(\mathcal{E})(S_{a_i}, S_{a_t})$ está dado por (ver 2.2.5, (2c)) $\vec{\varphi}_{y_0}\vec{\varphi}_{x_0}(x) = -\sum_{z,w} C^{x}_{z,w}\, \hat{\varphi}_{y_0}(z)\hat{\varphi}_{x_0}(w)$, con

$$\mathcal{L}(x) = \sum C^{x}_{z,w}\, z \otimes w .$$

Por lo tanto, $\hat{\varphi}_{y_0} \hat{\varphi}_{x_0}(x) = -C^{x}_{y_0,x_0}$.

$$\therefore \hat{\varphi}_{y_0} \hat{\varphi}_{x_0} = -\sum_{x \in \Delta_1(a_i,a_k)} C^{x}_{y_0,x_0}\, \hat{\varphi}_{x} .$$

Resumimos lo anterior en la siguiente:

4.3.2 PROPOSICION. Si $\mathcal{C}$ es un Bocs libre con la condición (A) sobre una categoría finitamente generada y semisimple $\mathcal{K} = k\,C$, con diferencial $\mathcal{L}$ y con bicarcaj $\mathcal{B} = (C, \Delta)$, entonces la subcategoría plena $I(\mathcal{C})$ de $r(\mathcal{C})$ cuyos objetos es un sistema representativo de los módulos inescindibles es $\cong k\,\mathcal{B}$, donde la composición en $k\,\mathcal{B}$ está dada por $y_0 x_0 = -\sum C^{x}_{y_0,x_0}\, x$ con $\mathcal{L}(x) = \sum C^{x}_{z,w}\, z \otimes w$.

4.3.3 TEOREMA (ver Roiter[17] y Kleiner-Roiter[15,16]).
Sea $\mathcal{E}$ un bocs triangular sobre una categoría libre finitamente generada $\mathcal{K} = kC$. Supongamos que $\mathcal{E}$ es de tipo de representación finito. Entonces existe una sucesión de carcajes $C_1, C_2, \ldots, C_s$ y una sucesión de bocs's triangulares Morita equivalentes $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_s$; $\mathcal{E}_i$ bocs sobre $\mathcal{K}_i = kC_i$ y $\mathcal{E}_s$ un bocs semisimple. La cadena es tal que $\mathcal{E}_{i+1} = (\mathcal{E}_i)'_{\alpha_i}$, $\mathcal{K}_{i+1} = (\mathcal{K}_i)'_{\alpha_i}$ con $\alpha_i$ una arista minimal en $C_i$ o bien $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i^{\,\theta}$ con $\theta : \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{K}_i/I_i = \mathcal{K}_{i+1}$ el funtor canónico, $I_i$ el ideal generado por una flecha en $C_i$.

Demostración: Supongamos que tenemos $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_i$ bocs's satisfaciendo las condiciones del teorema con cada $\mathcal{E}_i$ bocs triangular sobre $\mathcal{K}_i = kC_i$.

Como $\mathcal{E}_i$ es triangular existe una diferencial $\delta_i$ y una $\mathcal{K}_i$-base $\Delta_i$ del núcleo $\bar{\mathcal{E}}_i$ de $\mathcal{E}_i$ con respecto a la cual $\delta_i$ tiene una expresión triangular. Recordemos que las flechas de $C_i$ están ordenadas (ver pag. 205), tenemos una flecha $\alpha : x \longrightarrow y$ minimal con respecto a este orden. Tenemos por la minimalidad de $\Delta_i$ los dos casos siguientes:

(i) $\mathcal{D}_i(\alpha)=0$

(ii) $\mathcal{D}_i(\alpha)=c_1x_1+\cdots+c_tx_t$, $x_j\in\Delta_i$ $j=1,2,\ldots,t$ para algunos $c_1,\ldots,c_t\in k$ (no todos cero).

Primeramente analicemos el <u>caso (i)</u>.

<u>Afirmación</u>. $x\neq y$.

En efecto, si $x=y$ consideremos el carcaj $D$:  .

Entonces a cada representación $\underline{V}$ de $D$, dada por un espacio vectorial $V_x$ y una transformación lineal $f_x: V_x\longrightarrow V_x$, le asociamos la siguiente representación de $\mathcal{C}_i$: Para $w\in|\mathcal{C}_i|$, $w\neq x$ ponemos $V_w=0$ y si $\beta$ es cualquier flecha de $\mathcal{C}_i$ distinta de $\alpha$ ponemos $V(\beta)=0$. Entonces la representación $\bar{V}$ así obtenida es una representación de $\mathcal{C}_i$. Ahora es claro que si $\underline{V}$ y $\underline{V}'$ son representaciones de $D$, entonces (como $\mathcal{D}_i(\alpha)=0$ y lema 2.6.12) $\bar{V}\cong\bar{V}'$ en $\mathcal{T}(\mathcal{C}_i)$ si y solo si $\underline{V}\cong\underline{V}'$. Pero $D$ es de tipo de representación infinito, por tanto $\mathcal{C}_i$ sería de tipo infinito. Pero $\mathcal{C}$ es Morita equivalente a $\mathcal{C}_i$ lo cual contradice nuestra hipótesis de inducción. En consecuencia $x \neq y$. Así que podemos considerar el BOCS $(\mathcal{E}_i)'_\mathcal{L}$ sobre $(\mathcal{K}_i)'_\mathcal{L}$.

Por 4.2.2 $(\mathcal{E}_i)'_\mathcal{L}$ es un BOCS triangular. Más aún, sabemos que $\mathcal{E}_i$ y $(\mathcal{E}_i)'_\mathcal{L}$ son Morita equivalentes (ver 4.3.1) entonces pongamos $\mathcal{K}_{i+1} = (\mathcal{K}_i)'_\mathcal{L} = k(C_{i\mathcal{L}})$ y $\mathcal{E}_{i+1} = (\mathcal{E}_i)'_\mathcal{L}$.

Pasemos ahora a considerar el caso (ii):

$\mathcal{D}_i(\mathcal{L}) = c_1x_1 + \dots + c_rx_r \quad x_j \in \Delta_i, \; c_j \in k$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $c_1 \neq 0$. Cambiemos $x_1$ por $\underline{x}_1 = c_1x_1 + \dots + c_rx_r$, dejando el resto de los elementos de $\Delta_i$ igual. Por 4.2.6 con respecto a esta nueva $\mathcal{K}_i$-base $\mathcal{D}_i$ es también triangular. Podemos suponer entonces que $\mathcal{D}_i(\mathcal{L}) \in \Delta_i$. Por tanto aplicando 4.2.5 $R(\mathcal{E}_i) \simeq R(\mathcal{E}_i^{\oplus})$ con $\mathcal{K}_i \xrightarrow{\oplus} \mathcal{K}_i/I$ el funtor canónico, $I$ el ideal generado por $\mathcal{L}$ en $\mathcal{K}_i$. Por 4.2.5 sabemos que $\mathcal{E}_i^{\oplus}$ es triangular, pongamos entonces $\mathcal{K}_{i+1} = \mathcal{K}_i/I = k(C_i|\{\mathcal{L}\})$ y $\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i^{\oplus}$.

En consecuencia obtenemos una cadena de BOCS's Morita equivalentes $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_{i+1}, \ldots$ . En cada paso se pierde una flecha o bien se gana un nuevo vértice en en $C_{i+1}$. Cada vértice en $C_i$ da lugar a una representación simple. Como $\mathfrak{C}_i$, el BOCS sobre $kC_i$, satisface la condición (A), diferentes simples son no isomorfos: Por tanto $Card(C_i) \leq Card$ (clases de isomorfía de inescindibles en $\mathcal{I}(\mathfrak{C}_i)$). Por tanto, si la sucesión de los $\mathfrak{C}_i$ fuese infinita existiría $i$ tal que $Card(C_i) = Card(C_{i+1}) = \ldots$ . Pero entonces a partir de $i$ el único caso posible sería (ii) y en tal caso a partir de $i$ se pierde una flecha en cada paso, lo cual es imposible ya que el número de flechas de $C_i$ es finito. Por tanto el proceso tiene que acabar en una $s$ tal que $C_s$ no tenga flechas. //

<u>Observación</u>: Según el teorema anterior el BOCS final $\mathfrak{C}_s$ da la categoría $\mathcal{I}(\mathfrak{C})$ como sigue: los objetos son los puntos de $C_s$ y cada flecha punteada $\xi : y \dashrightarrow z$ da un elemento $k$-básico de

$\operatorname{Hom}_{\mathcal{I}(\mathfrak{C})}(y, z)$ .

En la práctica, el proceso anterior es más bien complicado. De cualquier forma da paso por paso la construcción de $\mathcal{I}(\mathcal{E})$.

§4.9 <u>Aplicaciones y ejemplos</u>.

En esta sección, mostraremos como diversos e importantes clases de problemas matriciales se formulan en el lenguaje de BOCS's triangulares.

(a) Sea $\mathcal{F}$ un carcaj finito (gráfica orientada finita) formada por aristas continuas y $k$ cierto campo. Tomemos $\mathcal{K} = k\mathcal{F}$ y $\mathcal{E} = (\mathcal{K}, \mathcal{V}; 1_{\mathcal{K}})$ el BOCS trivial. Puesto que no aparecen aristas punteadas en $\mathcal{F}$, entonces sólo se puede establecer la diferencial nula $\mathcal{D}$ (ver pag. 47). De esta forma, $\mathcal{E}$ es un BOCS triangular. La categoría de representaciones $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ corresponde a la categoría de representaciones del carcaj $\mathcal{F}$ introducida en [5] y [20]. Desde luego se puede considerar las categorías de representaciones de carcajes que satisfacen ciertas relaciones.

(b) Sea $\mathcal{M} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ un conjunto parcialmente ordenado finito.

Construimos la bigráfica $\mathcal{F} = (C, \Delta)$, con vértices $a_1, a_2, \dots, a_m, b$.

Supongamos que para cada $a_i \in \mathcal{M}$ hay una <u>flecha continua</u> $\varphi(a_i, b)$ en $\mathcal{F}$ con origen $a_i$ y final $b$ y si $a_i < a_j$, entonces hay una flecha punteada $\psi(a_j, a_i)$ en $\mathcal{F}$ con origen $a_j$ y final $a_i$.

Tomemos $\mathcal{K} = kC$ y $k(\mathcal{F})$ el $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre asociado a $\mathcal{F}$.

Definimos ahora la diferencial $\mathcal{D}$ para las flechas de la bigráfica $\mathcal{F}$ mediante las siguientes fórmulas:

$$\mathcal{D}(\varphi(a_i, b)) = \sum_{a_t < a_i} \varphi(a_t, b)\psi(a_i, a_t)$$

$$\mathcal{D}(\psi(a_j, a_i)) = \sum_{a_i < a_q < a_j} \psi(a_q, a_i)\psi(a_j, a_q).$$

Podemos ahora extender $\mathcal{D}$ a todo $T(k(\mathcal{F}))$ por linealidad y usando la fórmula de Leibnitz (ver pág. 47).

Si $\mathcal{E} := ({}_{\mathcal{K}}\mathcal{E}_{\mathcal{K}}, \delta, \varepsilon)$ es el bocs triangular que determina el $\tilde{\mathcal{K}}$-$\mathcal{K}$ bimódulo $k(\mathcal{F})$ y la diferencial $\mathcal{D}$ de grado 1 de $k(\mathcal{F})$ sobre $\tilde{\mathcal{K}}$ (ver 2.3.3), entonces la categoría de representaciones $R(\mathfrak{E}, mod_k)$ corresponde a las representaciones del conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{M}$ introducidas en [12] (vease también [19]).

(c) Un funtor $\mathcal{F}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{B}$ es <u>representación-equivalente</u> si: $\begin{cases} \text{para cada } B \in |\mathcal{B}| \text{ existe } A \in |\mathcal{U}| \text{ t.q. } \mathcal{F}(A) \cong B \\ \text{si } \mathcal{F}(A) \cong \mathcal{F}(A') \text{ si y solo si } A \cong A' \end{cases}$.

Sea $k$ un campo algebraicamente y $\Lambda$ una algebra de dimensión finita sobre $k$.

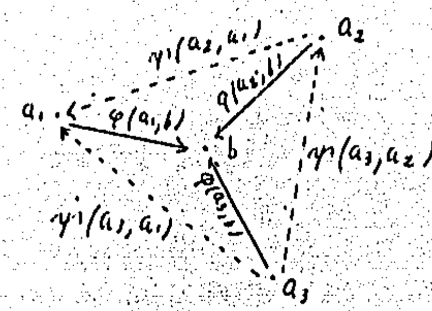
En [21] se prueba que la categoría $mod(\Lambda)$ es representación-equivalente a la categoría $R(\mathfrak{E}, mod_k)$, en donde $\mathfrak{E}$ es cierto Bocs triangular asociado a $\Lambda$.

Entonces si $\Lambda$ es de tipo de representación finito, por teorema de Klenier-Roiter, 4.3.3 es posible en principio construir todas las representaciones inescindibles de $\Lambda$.

Finalmente, daremos dos ejemplos aplicando el teorema 4.3.3.

(1) Sea $\mathcal{M} = \{a_1, a_2, a_3\}$ el conjunto parcialmente ordenado, tal que $a_i < a_j$ si $i < j$.

La bigráfica $\mathcal{B}=(C,A)$ asociada a $\mathcal{M}$ está dada por:




Por comodidad, pongamos $\begin{cases} b:=0 \\ a_1:=1 \\ a_2:=2 \\ a_3:=3 \end{cases}$ y $\begin{cases} \varphi(a_1,b):=\alpha_1 \\ \varphi(a_2,b):=\alpha_2 \\ \varphi(a_3,b):=\alpha_3 \\ \psi(a_2,a_1):=\beta_{21} \\ \psi(a_3,a_1):=\beta_{31} \\ \psi(a_3,a_2):=\beta_{32} \end{cases}$

Tenemos $\mathcal{K}=kC$ y $\mathcal{E}$ el BOCS determinado por el $\mathcal{K}$-$\mathcal{K}$ bimódulo libre $k(\mathcal{B})$ y la diferencial $\mathcal{D}$ dada en (b).

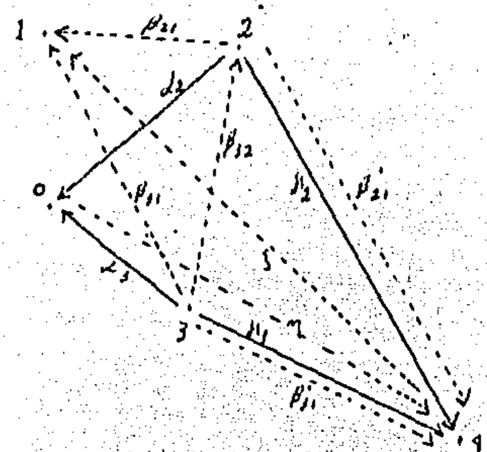
La diferencial $\mathcal{D}$ en las flechas continuas de $\mathcal{B}$ está dada por las fórmulas:

$\mathcal{D}(\alpha_1)=0$, $\mathcal{D}(\alpha_2)=\alpha_1\beta_{21}$, $\mathcal{D}(\alpha_3)=\alpha_2\beta_{32}+\alpha_1\beta_{32}$.

Como $\mathcal{D}(\alpha_1)=0$, entonces podemos aplicar el algoritmo anterior a $\alpha_1$.

Obtenemos: $\mathcal{E}_2=(\mathcal{E}=\mathcal{E}_1)_{\alpha_1}$ sobre $\mathcal{K}_2:=(\mathcal{K}=\mathcal{K}_1)_{\alpha_1}=k(Q_1)$

con bigráfica dada por:

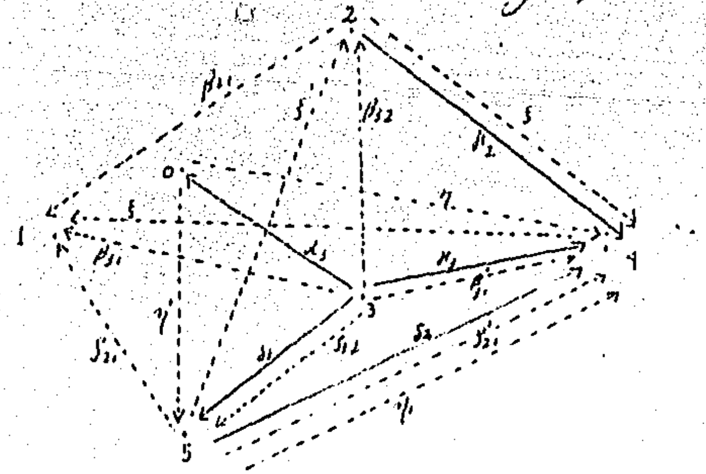



Aquí, aplicando las fórmulas de 3.4.4, tenemos:

$\mathcal{L}'_1(\alpha_2)=0$, $\mathcal{L}'_1(\alpha_3)=\alpha_2\beta_{32}$, $\mathcal{L}'_1(\mu_2)=\eta\alpha_2+\beta'_{21}$,

$\mathcal{L}'_1(\mu_1)=\eta\alpha_3+\mu_2\beta_{32}+\beta'_{11}$

Aplicando el algoritmo a $\alpha_2$ obtenemos: $\mathcal{E}_3=(\mathcal{E}_2)'_{\alpha_2}$ sobre $\mathcal{H}_3=(\mathcal{H}_2)'_{\alpha_2}=\kappa(\mathcal{G}_2)$ con bigráfica dada por:



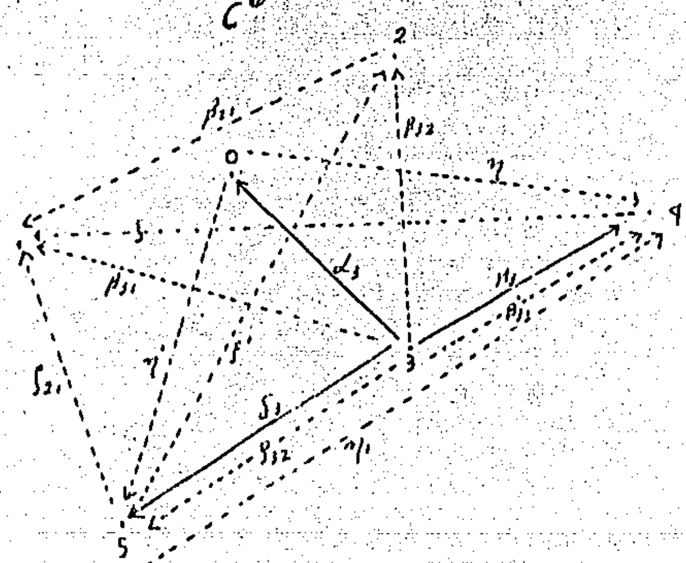

$x := 2$
$y := 0$
$z := 5$

De las fórmulas de 3.4.4, se sigue que la diferencial $\mathcal{D}'_{\alpha_2}$ en las flechas continuas está dada mediante las fórmulas:

$$\mathcal{D}'_{\alpha_2}(\alpha_1)=0,\ \mathcal{D}'_{\alpha_2}(\mu_2)=\beta_{21},\ \mathcal{D}'_{\alpha_2}(\mu_3)=\beta_{31}+\eta\alpha_3+\mu_2\beta_{32},$$

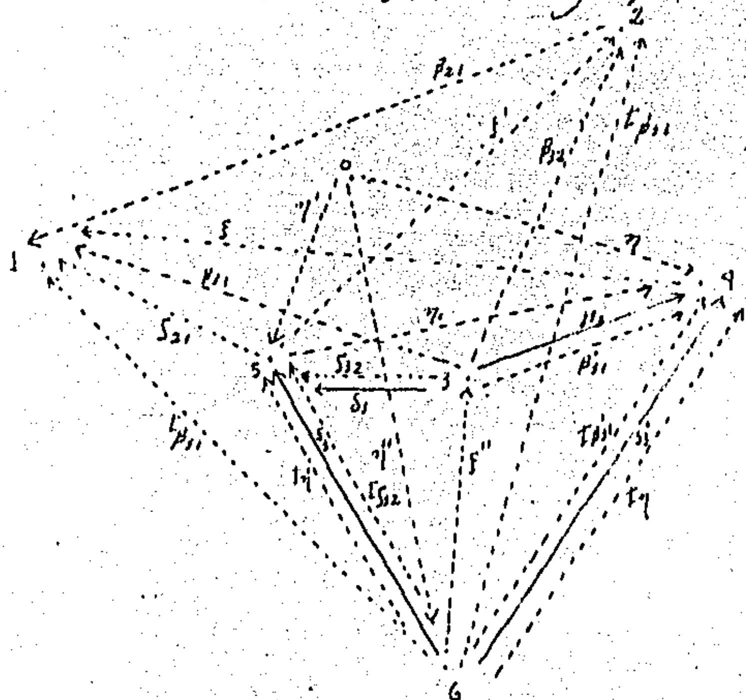
$$\mathcal{D}'_{\alpha_2}(\delta_2)=\delta_{21}-\mu_2\xi,\ \mathcal{D}'_{\alpha_2}(\delta_3)=\delta_{32}+\eta\alpha_3.$$

Aplicando el caso (ii) del teorema 4.3.3 a las flechas $\mu_2$ y a $\delta_2$ sucesivamente, obtenemos el BOCS $\mathcal{E}_3^{\oplus}$ sobre $\mathcal{K}^{\oplus}=k(\underbrace{C_3\setminus\{\mu_2,\delta_2\}}_{C^{\oplus}})$ con bigráfica dada por:




La diferencial $\mathcal{D}^{\oplus}$ en las flechas continuas está dada mediante las siguientes igualdades:
$\mathcal{D}^{\oplus}(\alpha_3)=\mathcal{D}'_{\alpha_2}(\alpha_3)$, $\mathcal{D}^{\oplus}(\mu_3)=\mathcal{D}'_{\alpha_2}(\mu_3)$, $\mathcal{D}^{\oplus}(\delta_3)=$
$=\mathcal{D}'_{\alpha_2}(\delta_3)$.

Aplicando el algoritmo a $\mathcal{L}_3$ obtenemos: $\mathcal{C}_4 = (\mathcal{C}_3^{\oplus})'_{\mathcal{L}_3}$ sobre $\mathcal{K}_4 = (\mathcal{K}^{\oplus})' = k(C^{\oplus}_{\mathcal{L}_3})$ con bigráfica dada por:

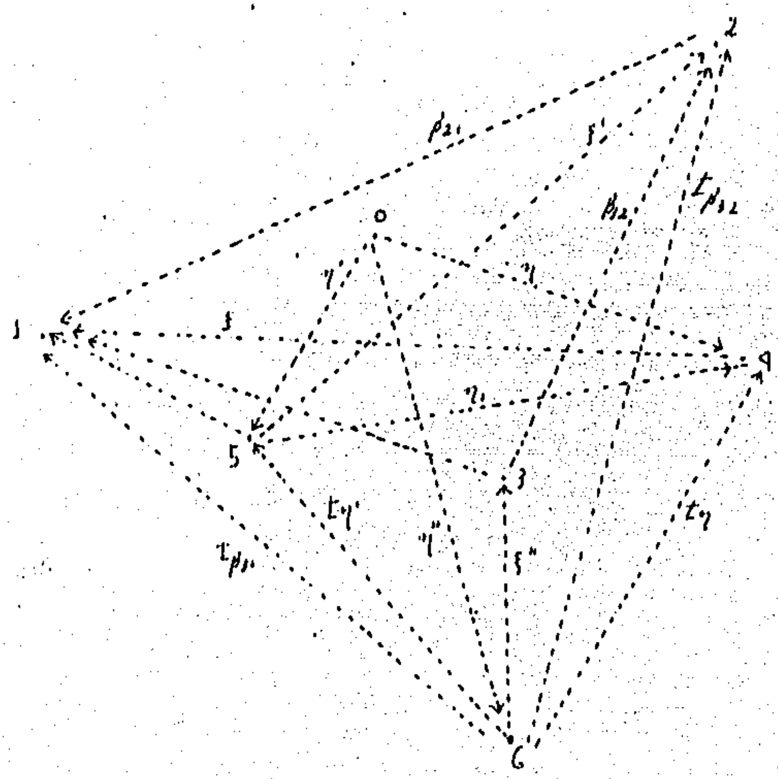



Por las fórmulas de 3.4.4 tenemos:

$\mathcal{L}C'_{\mathcal{L}_3}(\mu_3) = \rho_{31}'$, $\mathcal{L}C'_{\mathcal{L}_3}(\delta_3) = \delta_{32}$, $\mathcal{L}C_{\mathcal{L}_3}(s_3) = t_{\delta_{32}} + t_{\eta'} - \delta_3\,\xi''$,

$\mathcal{L}C_{\mathcal{L}_3}(s_3') = t_{\rho_{31}'} + t_{\eta} - \mu_3\,\xi''$.

Finalmente, aplicando el caso (ii) del teorema 4.3.3 a las flechas $\delta_3$, $\mu_3$, $s_3$ y $s_3'$ sucesivamente, tenemos:

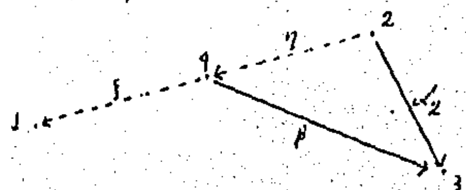



(2) Consideremos el carcaj

$$C_1 = C = \underset{1}{\cdot} \xrightarrow{\alpha_1} \underset{2}{\cdot} \xrightarrow{\alpha_2} \underset{3}{\cdot}$$

Tenemos $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} = \kappa C$ y $\mathcal{C}_1$ el Boes trivial.
Como $\mathcal{L}(\alpha_1) = 0$, entonces podemos aplicar el algoritmo a $\alpha_1$.

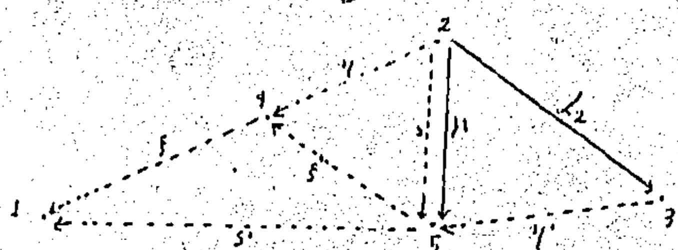
Obtenemos: $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_1)_{\alpha_1}$ sobre $\mathcal{K}_2 = (\mathcal{K}_1)_j = \kappa(C_1)$ con bigráfica dada por:




por fórmulas de 3.4.9, la diferencial $\mathcal{L}^{1}_{\alpha_1}$ en las flechas de grado 1 está dada mediante las igualdades:

$\mathcal{L}^{1}_{\alpha_1}(\beta)=0$, $\mathcal{L}^{1}_{\alpha_1}(\alpha_2)=\beta\eta$.

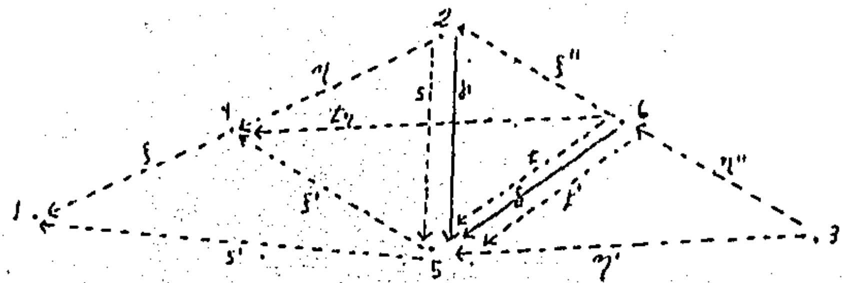
Aplicando el algoritmo a $\beta$ obtenemos: $\mathcal{E}_3=(\mathcal{E}_2)'_{\beta}$ sobre $\mathcal{K}_3=(\mathcal{K}_2)'_{\beta}=k(C_{2\beta})$ con bigráfica dada por:



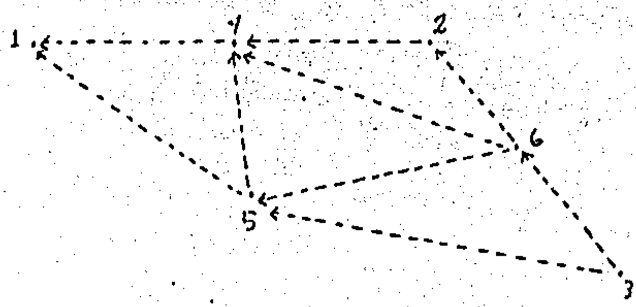

la diferencial $\mathcal{L}'_{\beta}$ en las flechas continuas está dada mediante las igualdades:

$$\mathcal{L}'_{\beta}(\alpha_2)=0,\ \mathcal{L}'_{\beta}(\gamma)=\eta'\alpha_2+s\ .$$

Aplicando el algoritmo a $\alpha_2$ obtenemos: $\mathcal{E}_4=(\mathcal{E}_3)'_{\alpha_2}$ sobre $\mathcal{K}_4=(\mathcal{K}_3)'_{\alpha_2}=k(C_{3\alpha_2})$ con bigráfica dada por:




Finalmente, aplicando el caso (ii) de la demostración del teorema 4.3.3 a las flechas $\delta'$, $\delta$ obtenemos:



# BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, F.W. and FULLER, K.R.: Rings and Categories of Modules.
Graduate texts in Mathematics 13, (1974), Springer Verlag.

[2] AUSLANDER, M.: Representation Dimensión of Artin Algebras.
Queen Mary Collage Math. Notes (1971), 1-155.

[3] AUSLANDER, M.: Representation Theory of Artin Algebras I.
Com. Algebra (1974), 177-268.

[4] BAUTISTA, R., COLAVITA, L. y SALMERON, L: On Adjoint Functors in Representation Theory.
Publicaciones Preliminares del Instituto de Matematicas UNAM (1981).

[5] BERSTEIN, I.N., GELFAND, I.M., PONOMAREV, V.A: Coxeter Functors and Gabriel Theorem.
Uspechi Math. Nouk. 28 (1973), Traducido en Russian Math. Surveys 28 (1973), 17-32.

[6] CIBILS, C., LARRION, F., SALMERON, L.: Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones. Monografías del Instituto de Mat., UNAM, 11, (1982).

[7] DROZD, Y.A.: Matrix Problems and Categories of Matrices.
Zapiski Nauchnykh Sem. LOMI 28 (1972), 144-153.

[8] DROZD, Y.A.: Tame and Wild Matrices Problems. "Matrix Problems" Kiev (1979), 39-74.

[9] DROZD, Y.A.: Tame and Wild Matrix Problems. Lecture Notes Math., vol. 832, Springer-Verlag, Berlin and New York (1980), 242-258.

[10] KLEINER, M.: Matrix Problems and Representations of Finite-Dimensional Algebras.
Proceedings of The IV International Conference on Representation of Algebras; Carleton-Ottawa Math. Lect. Notes 2 (1984), 23.01-23.12.

[11] MACLANE, S.: Categories for the Working Mathematician.
Springer-Verlag. GTM 5 (1971).

[12] NAZAROVA, L.A. and ROITER, A.V.: Representations of Partially Ordered Sets.
Zap. Nauč. Sem. LOMI 28 (1972), 5-31.

[13] RINGEL, C.M. : Introduction to the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras. Proceedings of the II International Conference on Representation of Algebras, Ottawa 1979. (Preliminary Version Available at Carleton Math. Lectures Notes 25, (1980).

[14] ROITER, A.V. : Matrix Problems. Proc. of the International Congress of Math., Helsinki (1978), 157-159.

[15] ROITER, A.V. and KLEINER, M.M. : Representations of Differential Graded Categories. "Matrix Problems" Math. Institute of the Academy of Sciencies, USSR, K, (1977), 5-71.

[16] ROITER, A.V. and KLEINER, M.M. : Representations of Differential Graded Categories. Lectures Notes in Math., 488 (1975), 316-339.

[17] ROITER, A.V. : Matrix Problems and Representations of BOCS's. Proc. of ICRA II. Springer Lecture Notes 25, (1980), 288-324.

[18] SALMERON, L. : Métodos Categóricos en Problemas Matriciales. Tesis de Maestría. U.N.A.M. (1980).

[19] KLEINER, M.M.: Partially Ordered Sets of Finite Tipe.
Zap. Nouch. Sem. LOMI 28 (1972), 32-91.

[20] GABRIEL, P.: Unzerlegbare Darstellungen I.
Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103.

[21] BAUTISTA, R., MIRANDA, L.: Bimodules Over Categories and Their Representations.
Por Aparecer.