

20/35



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

INESTABILIDADES EN PLASMAS EN LA
APROXIMACION MAGNETOHIDRODINAMICA

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

presenta

ALEJANDRO LORENZANA MONROY



México, D. F.

1988



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

| | PAG. |
|---|------|
| PROLOGO | 1 |
| INTRODUCCION | 3 |
| CAPITULO I | |
| Descripción General de un Plasma | 8 |
| 1. Plasmas en equilibrio térmico | 8 |
| 2. Parámetros y características de un Plasma | 10 |
| 2.1. Longitud de Debye | 10 |
| 2.2. Parámetro de Plasma | 13 |
| 2.3. Cusineutralidad Eléctrica | 14 |
| 2.4. Frecuencia de Plasma | 15 |
| 2.5. Frecuencia Ciclotrónica | 16 |
| 2.6. Clasificación de los Plasmas | 17 |
| CAPITULO II | |
| Descripción MHD de un Plasma | 21 |
| 1. Ecuaciones de Maxwell | 22 |
| 2. Ecuaciones MHD | 27 |
| 2.1. Ecuación de continuidad | 27 |
| 2.2. Ecuación de Momento | 28 |
| 2.3. Ecuación de Estado | 31 |
| CAPITULO III | |
| Equilibrio MHD | 36 |
| 1. Ecuaciones Magnetostáticas | 36 |
| 2. Equilibrio de un Sistema con Simetría Cilíndrica | 40. |

| | |
|--|------------|
| 3. Equilibrio de un Sistema con Simetría Axial | PAG. 42 |
|--|------------|

CAPITULO IV

| | |
|--|----|
| Inestabilidades en un plasma MHD | 46 |
| 1. Principio de energía | 50 |
| 1.1. Ecuación de Modos | 50 |
| 1.2. Método de energía | 54 |
| 1.3. Cálculo de δW | 58 |
| 2. Inestabilidad de un Plasma confinado libre de fuerzas | 68 |
| 3. Inestabilidad de Kurskal-Schwarzchild | 72 |

| | |
|--------------|----|
| CONCLUSIONES | 78 |
|--------------|----|

| | |
|------------|----|
| APENDICE A | 84 |
|------------|----|

| | |
|------------|----|
| APENDICE B | 89 |
|------------|----|

| | |
|--------------|----|
| BIBLIOGRAFIA | 94 |
|--------------|----|

PROLOGO

El presente trabajo tiene como objetivo determinar las condiciones de estabilidad para un plasma en equilibrio, dentro del marco de la teoría magnetohidrodinámica, dada la importancia de las inestabilidades de los plasmas en diferentes fenómenos que ocurren en nuestro sistema solar.

El estudio comienza planteando las condiciones bajo las cuales la materia se considera plasma, así como los parámetros y características más importantes de un plasma, enfatizándose el comportamiento colectivo que solo presentan los plasmas.

Basándose en lo anterior, se elabora un capítulo en el que se desarrolla el modelo magnetohidrodinámico a partir de la mecánica de fluidos y de las leyes que gobiernan el electromagnetismo clásico, haciendo énfasis en las condiciones bajo las cuales dicho modelo es válido. En ese capítulo se incluye una breve discusión de las ecuaciones de Maxwell.

El tercer capítulo lo constituye un estudio del equilibrio magnetohidrodinámico, estableciendo lo que se conoce como ecuaciones magnetostáticas.

Por último, en el capítulo cuatro, se estudia la estabilidad de un plasma para perturbaciones infinitamente pequeñas, dentro de este marco se analiza la energía del plasma dando como resultado lo que se conoce como principio de

energía, a partir del cual se puede establecer una condición suficiente de estabilidad en términos de la energía potencial, así como el cálculo de dicha energía a partir de la configuración inicial.

INTRODUCCION

Entendemos por plasma un gas ionizado en un estado de cuasineutralidad eléctrica, el comportamiento del cual está gobernado por efectos colectivos debidos a la interacción electromagnética entre las partículas cargadas que lo componen.

El plasma es cuasineutro, es decir, a pesar de ser macroscópicamente neutro, en regiones de escala microscópica no lo es. Esto se logra si cualquier concentración local de cargas o potencial externo introducido en el sistema es apantallado en una distancia pequeña comparada con las dimensiones del sistema, dejando el resto del plasma libre de campos o potenciales eléctricos. De esta manera podemos tomar la densidad de iones igual a la densidad de electrones,

El comportamiento colectivo se debe a que el movimiento no depende solamente de condiciones locales, sino también del estado del plasma en regiones remotas, esto debido a que la fuerza de Coulomb entre partículas cargadas es de largo alcance.

El término plasma fue introducido por Tonk y Langmuir en 1928 para describir una colección de partículas cargadas. Al estado de plasma se le conoce también como "cuarto estado de la materia" y surge de la idea de W. Crooks* que al agregar calor a un sólido, sufre una transición de fase a

* Crooks dió este nombre al medio ionizado en la descarga eléctrica en un gas.

un estado gaseoso y si se agrega aún más energía a un gas, ésta se emplea en la ionización de alguno de sus átomos. A una temperatura superior a 10^5 °K la mayoría de la materia existe en un estado ionizado, es este cuarto estado al que se le llama Plasma. El estado de plasma puede existir a temperaturas menores que 10^5 °K si hay algún mecanismo que ionice el gas y si la densidad es suficientemente baja para que la recombinación ión-electrón sea muy lenta.

El Sol y las estrellas se encuentran lo suficientemente mente calientes para estar casi por completo ionizados, lo mismo ocurre con el gas interestelar, debido a la acción de la radiación estelar. Es probable que el 99% de la materia del universo esté en estado de plasma. En la Tierra, debido a su baja temperatura alta densidad y al efecto protector de la atmósfera cercana, no existen plasmas naturales, a excepción de los plasmas temporales formados por los relámpagos y los manifestados eventualmente en las auroras boreales; sin embargo en la ionósfera existe plasma creado por la fotoionización y más afuera, los anillos de radiación de la Tierra (anillos de Van Allen) consisten de electrones y protones atrapados en el campo magnético de la Tierra. En realidad se ha observado que todo el espacio alrededor de la Tierra hasta la magnetopausa (límite entre el campo magnético terrestre y el medio interplanetario) está lleno de un plasma suficientemente diluido de protones y electrones. A través del medio interplanetario fluye plasma proveniente del ol llama

do "viento solar". Es importante señalar que el viento solar, a pesar de ser un gas muy diluido, con aproximadamente $10 \frac{\text{part}}{\text{cm}^3}$ a la altura de la orbita Terrestre, puede ser considerado un fluido debido precisamente al comportamiento colectivo que presentan los plasmas.

Los plasmas en el laboratorio son relativamente fáciles de producir, basta proporcionar a un gas neutro cierta cantidad de energía extra, suficiente para liberar electrones que normalmente se encuentran ligados al átomo. En la Tabla I se muestran algunas energías de ionización y puede verse que éstas van desde algunos eV, hasta algunas decenas de eV.

| GAS | ENERGIA DE IONIZACION (eV) |
|-----------------------|----------------------------|
| Hidrógeno | 13.6 |
| Helio | 24.6 |
| Litio | 5.4 |
| Neón | 21.6 |
| Cesio | 3.9 |
| Argón | 15.7 |
| Mercurio | 10.4 |
| Molécula de Hidrógeno | 15.4 |
| Molécula de Nitrógeno | 15.8 |
| Nitrógeno | 14.5 |
| Oxígeno | 13.5 |
| Fierro | 7.8 |
| Sodio | 5.1 |

TABLA I. Energía de ionización de algunos elementos.

La investigación en plasmas no sólo se ha orientado a la mejor comprensión de los plasmas naturales, también ha estado relacionada con posibles aplicaciones tecnológicas, particularmente la fusión termonuclear controlada, así como la conversión directa de energía térmica en electricidad, o la propulsión iónica de naves espaciales, por mencionar algunas.

Los plasmas en el laboratorio y en algunas regiones de la ionósfera, generalmente no presentan una ionización total; pero muchas de las características del plasma son independientes tanto de la presencia de partículas neutras, como de la presencia de otros electrones, aún atrapados en los átomos ionizados. Además, grados de ionización bajos son suficientes para que un gas exhiba propiedades electromagnéticas; con aproximadamente un 0.1% de ionización un gas alcanza una conductividad eléctrica del orden de la mitad de su máximo valor posible y con un 1% de ionización la conductividad es casi la misma que la de un gas completamente ionizado. Es entonces útil analizar teóricamente el comportamiento de un gas totalmente ionizado, el cual tiene la ventaja de ser más simple. Este trabajo se enfoca al caso de ionización total.

El estudio de la estabilidad de un plasma es importante, porque de los sistemas naturales que involucran plasma, solamente de aquéllos cuyas configuraciones sean estables, se espera que sean permanentes. Además muchos de los fenómenos que ocurren en el Sol y en las magnetósferas planetarias están asociados con inestabilidades de los plasmas involucra

dos.

Algunos ejemplos en los plasmas espaciales incluyen inestabilidades que producen ondas no térmicas y distribución de partículas en las Magnetósferas y el medio interplanetario y radiación no térmica de los planetas y de la corona solar, inestabilidades involucradas en efectos de propagación no lineal en la ionósfera, e inestabilidades que dan lugar a la dispersión y aceleración de partículas rápidas en plasmas astrofísicos.

Para el sol en particular, se han sugerido diferentes procesos de inestabilidades como mecanismos de aceleración de los rayos cósmicos solares, producto de las ráfagas solares.

La probabilidad de que una configuración en equilibrio de un plasma sea estable es muy pequeña, de ahí la necesidad de un criterio de estabilidad que permita determinar si un equilibrio es estable o inestable. Este criterio se obtiene a partir de lo que se conoce como método de la energía. En este trabajo se desarrolla dicho método, a partir de la teoría magnetohidrodinámica.

Cuando se hace uso de algún resultado no desarrollado en este trabajo, se hace referencia al autor que lo trata en la forma más clara; para tratamientos alternativos consultar la bibliografía.

CAPITULO I

DESCRIPCION GENERAL DE UN PLASMA.

En este capitulo se discuten los parámetros así como las características más importantes de un plasma en equilibrio térmico.

1.- Plasma en equilibrio térmico.

Supongamos un plasma con n_0 partículas por unidad de volumen distribuidas uniformemente. Si V es un volumen cúbico unitario, entonces hay $\sim n_0^{1/3}$ partículas por lado en el cubo V . Si d es la distancia media entre una partícula y su vecino más cercano, entonces

$$(n_0^{1/3} - 1)d \sim 1$$

de ahí

$$d \sim \frac{1}{n_0^{1/3} - 1}$$

Si n_0 es muy grande, i.e.

$$n_0^{1/3} \gg 1$$

entonces

$$d \sim n_0^{-1/3} \quad (1.0)$$

El plasma puede ser tratado clásicamente si la onda asociada de De Broglie de la partícula tiene una longitud λ_B mucho menor que el espacio entre partículas vecinas; es decir,

de acuerdo con (1.0)

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{mu} \ll n_e^{-1/3} \quad (1.1)$$

Las aproximaciones cercanas de un gas de partículas coulombianas con energía cinética media E_c , están dados por lo que se conoce como distancia crítica o longitud de Landau

$$l_L \quad v_L = \frac{zc^2}{E_c} \quad (1.2)$$

si se cumple que

$$\lambda_B \ll l_L \quad (1.3)$$

entonces se puede despreciar la degeneración en los estados de energía atómicos. Es decir, si se cumple (1.1) y (1.3) se puede despreciar cualquier efecto cuántico y tratar al plasma clásicamente.

$$V \ll c \quad (1.4)$$

donde V es cualquier velocidad característica del plasma y c es la velocidad de la luz.*

Si se cumplen las condiciones anteriores, el plasma puede ser tratado clásicamente, y puede estudiarse utilizando la estadística de Maxwell-Boltzman.

Sea $f_{\alpha}(\vec{u})d\vec{u}$ el número de partículas de especie α por unidad de volumen, con velocidades entre \vec{u} y $\vec{u} + d\vec{u}$ de un plasma en equilibrio térmico, entonces, de acuerdo con la estadística de Maxwell-Boltzman

*Para un estudio de los fenómenos cuánticos y los fenómenos relativistas, se puede consultar: A. Beiser, Conceptos de Física Moderna. México, 1981. Mc Graw-Hill.

$$f_s(\vec{u}) = A \exp - \frac{U_s}{kT_s} \quad (1.5)$$

con $U_s = \frac{1}{2} m u^2 + \text{energía potencial}$

T_s es la temperatura de las partículas de especie S y k es la constante de Boltzman.

Integrando (1.5) podemos encontrar que la energía cinética promedio es:

$$E_c = \frac{3}{2} kT \quad (1.6)$$

Como E_c y T están relacionadas por (1.6) es común encontrar en libros sobre plasmas la temperatura en unidades de energía. El factor de conversión es

$$1 \text{ ev} = 11,600 \text{ } ^\circ\text{K}$$

Es importante mencionar que un plasma puede tener varias temperaturas al mismo tiempo. En ocasiones los iones y los electrones tienen distribuciones de Maxwell con diferentes temperaturas (T_i y T_e , respectivamente). Esto sucede cuando la razón de colisiones entre iones o entre electrones es mucho mayor que la razón de colisiones ión-electrón; entonces cada especie está en su propio equilibrio térmico.

2.- Parámetros y Características de un Plasma

2.1. Longitud de Debye.

En la introducción definimos un plasma por dos caracte-

rísticas, efectos colectivos debidos a la interacción electromagnética y cuasineutralidad eléctrica. Es por tanto de interés determinar la distancia a la cual se extiende el campo eléctrico de una partícula del plasma antes de que su efecto sea anulado por las partículas de carga opuesta que se encuentran en la vecindad. Dicho potencial satisface la ecuación de Poisson (Reitz, 1984)

$$\nabla^2 \phi = - 4\pi \rho_{e1} \quad (1.7)$$

donde la densidad de carga ρ_{e1} está dada por

$$\rho_{e1} = -en_e + zen_i$$

En coordenadas esféricas (1.7) tiene la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} = 4\pi(en_e - zen_i)$$

Dado el potencial ϕ , la ecuación (1.5) tiene la forma

$$f_s(\vec{u}) = A \exp \left[- \frac{\frac{1}{2} mu^2 + Z_s^2 e\phi}{kT_s} \right]$$

Integrando f_s sobre \vec{u}

$$n_s = n_{0s} \exp \left[- \frac{Z_s^2 e\phi}{kT_s} \right] \quad (1.8)$$

De (1.8) y suponiendo que $T_i = T_e = T$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} = 4\pi \left(n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) - z n_{i0} \exp\left(-\frac{Ze\phi}{kT}\right) \right)$$

Utilizando la condición de cuasineutralidad

$$n_{e0} = Z n_{i0},$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} = 4\pi z n_{e0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{Ze\phi}{kT}\right) \right]$$

De (1.2) y (1.6) se deduce que para distancias

$$r \gg \lambda_D,$$

$$e\phi \ll kT$$

Podemos desarrollar los exponentes y eliminar los términos de orden superior

$$\therefore \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} = 4\pi z n_{e0} (1+Z) \frac{e\phi}{kT} \quad (1.9)$$

Definiendo la longitud de Debye como

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{e^2 (1+Z) 4\pi z n_{e0}} \right)^{1/2} \quad (1.10)$$

(1.9) toma la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi \quad (1.11)$$

Donde, el potencial

$$\phi_D = \frac{e}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.12)$$

llamado potencial de Debye, es solución de (1.11).

Obsérvese que el rango del potencial ϕ_D dado por (1.12) está determinado por λ_D . Para una distancia $r = \lambda_D$, el potencial decae $\frac{1}{\lambda_D} \exp(-1)$; es por esto que a λ_D se le conoce como distancia de apantallamiento. Podemos considerar entonces que una partícula cargada en un plasma interacciona solo con partículas que se encuentran a una distancia menor que una longitud de Debye; se dice que estas partículas se encuentran dentro de una esfera de Debye alrededor de la partícula cargada.

2.2 Parámetro de Plasma

Para que el plasma exhiba efectos colectivos debido a la interacción electromagnética, la longitud de Debye debe ser más grande que la distancia entre partículas. De acuerdo con (1.0) tenemos un plasma si

$$\lambda_D \gg n_D^{-1/3} \quad (1.13)$$

Definiendo el parámetro de plasma Λ como

$$\Lambda \equiv n_0 \lambda_D^3 \quad (1.14)$$

la condición (1.13) es equivalente a

$$\Lambda \gg 1 \quad (1.15)$$

Es decir que el parámetro de plasma es proporcional al número de partículas en una esfera de Debye (con $\frac{4}{3}\pi$ = constante de proporcionalidad) y la condición (1.15) establece que un plasma tiene un gran número de partículas en una esfera de Debye.

Algunos autores definen el parámetro de plasma como Λ^{-1}

2.3 Quasineutralidad eléctrica

De acuerdo con lo anterior si se introduce un potencial externo o se fuerza una concentración de cargas en el plasma, su efecto será anulado a una distancia $\sim \lambda_D$, por lo que la condición de quasineutralidad exige que

$$l \gg \lambda_D \quad (1.16)$$

si l es la dimensión característica del plasma.

Por otro lado, la fuerza de restauración de quasineutralidad es enorme, ya que cualquier desbalance entre las cargas positivas y negativas conducen a campos eléctricos muy intensos. Así por ejemplo, el campo eléctrico en una región de plasma con radio igual a 1 cm. y densidad $n_e \sim 10^{13} \frac{\text{part}}{\text{cm}^3}$, debido a una desviación del 1% de la neutralidad es

$$|\vec{E}| = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\bar{n}_0}{100} \frac{e}{r^2} = 6 \times 10^4 \frac{\text{Volts}}{\text{cm}}$$

este campo produce una aceleración $\sim 10^{20} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, de manera que el desbalance es rápidamente neutralizado por transferencia de electrones.

2.4. Frecuencia de Plasma

Este efecto nos lleva a otra característica importante de un plasma; debido a la inercia los electrones oscilarán alrededor de la región de carga inicial. Por simplicidad considérese una región plana de plasma con densidad electrónica n_e ; si los electrones son desplazados una distancia X en una dirección perpendicular a la frontera de dicha región, de tal forma que de un lado de la región hay un exceso de carga eléctrica $-n_e ex$ por unidad de área, y del otro lado aparece un exceso de cargas positivas. Debido a su gran masa el movimiento de los iones es despreciado por el momento. Así el campo eléctrico es:

$$E_x = 4\pi n_e ex$$

Entonces la ecuación de movimiento de los electrones en el interior del plasma es

$$m_e \ddot{X} = -4\pi e^2 n_e X$$

reordenando

$$\ddot{x} + \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} x = 0$$

que es la ecuación del oscilador armónico.

Es decir que los electrones oscilan con una frecuencia angular dada por

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \quad (1.17)$$

llamada frecuencia electrónica de plasma.

Si ahora tomamos en cuenta el movimiento de los iones encontramos que éstos oscilan con una frecuencia llamada frecuencia iónica de plasma

$$\omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n_i Z^2 e^2}{m_i} \quad (1.18)$$

A partir de (1.17) y (1.18) definimos la frecuencia de plasma ω_p como*

$$\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \omega_{pe}^2 \quad (1.19)$$

2.5 Frecuencia Ciclotrónica

Otro parámetro importante de un plasma es la frecuencia ciclotrónica Ω , que es la frecuencia a la que giran los electrones de un plasma cuando éste se encuentra en un campo magnético constante. La ecuación de movimiento de un electrón

* Dado que $m_i \gg m_e$

en un campo magnético \vec{B} constante es (Reitz, 1984):

$$m_e \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{c}{c} (\vec{u} \times \vec{B})$$

cuyas soluciones, si \hat{e}_x , \hat{e}_y , \hat{e}_z son vectores unitarios en las direcciones X, Y, Z y tomando $\vec{B} = B\hat{e}_z$, son

$$\vec{u}(t) = u_{\parallel} \hat{e}_z + u_{\perp} (\hat{e}_x \cos \Omega t - \hat{e}_y \sin \Omega t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + u_{\parallel} t \hat{e}_z + \frac{u_{\perp}}{\Omega} (\hat{e}_x \sin \Omega t + \hat{e}_y \cos \Omega t)$$

El electrón se mueve con una velocidad u_{\parallel} a lo largo de la dirección de \vec{B} y con un movimiento giratorio u_{\perp} perpendicular al campo en un círculo con radio de giro r_L (radio de Larmor) dado por

$$r_L = \frac{m_e u_{\perp} c}{eB}$$

y una frecuencia de giro Ω ciclotrónica

$$\Omega = \frac{eB}{m_e c} = \frac{u_{\perp}}{r_L} \quad (1.20)$$

2.6 Clasificación de los Plasmas

Utilizando los parámetros discutidos con anterioridad, podemos clasificar los plasmas como sigue:

1) Partículas individuales, no plasma (no hay efectos colectivos)

$$\lambda_D < n_0^{-1/3}$$

o

$$\lambda_D > \ell$$

a) No hay recombinación si

$$\ell_L < n_0^{-1/3}$$

b) No hay interacción entre partículas si

$$\lambda_C > \lambda_D$$

o

$$\ell_L > \lambda_D$$

donde λ_C es el camino libre medio para colisiones.

2) Plasma (efectos colectivos)

$$n_0^{-1/3} \ll \lambda_D$$

o

$$\ell_L \ll \lambda_D$$

y

$$\lambda_D \ll \ell$$

a) sin colisiones (plasma diluído) si

$$\lambda_C \geq \ell$$

b) Con colisiones (plasma denso)

$$\lambda_C \ll \lambda$$

a) Isotrópico (muy denso)

$$\Omega \ll \nu$$

con ν frecuencia de colisiones. Esto debido a que las colisiones frecuentes durante un período de giro destruyen las anisotropías.

β) Anisotrópico

$$\Omega \gg \nu$$

En la Tabla 2 se dan los valores de estos parámetros para algunos plasmas conocidos.

| | n_p (cm ⁻³) | T (°K) | A | λ_D (cm) | $\tilde{\lambda}$ (cm) | λ (cm) | ω_p (hz) | B(G) | ν (hz) | Ω (hz) |
|------------------------|---------------------------|------------------|--------------------|---------------------|------------------------|----------------------|--------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| Plasma Intergaláctico | 10 ⁻⁵ | 10 ³ | 3x10 ² | 7x10 ⁴ | 10 ²³ | 10 ¹³ | 2x10 ² | 10 ⁻⁸ | 10 ⁻⁸ | 2x10 ⁻¹ |
| Plasma Interestelar | 1 | 10 ⁴ | 3x10 ⁶ | 7x10 ² | 10 ¹⁴ | 1.3x10 ¹² | 6x10 ⁴ | 10 ⁻⁶ | 6x10 ⁻⁴ | 20 |
| Plasma Interplanetario | 10 ² | 10 ⁵ | 10 ⁹ | 10 ² | 10 ¹³ | 1.3x10 ¹² | 6x10 ⁵ | 10 ⁻⁴ | 10 ⁻³ | 2x10 ³³ |
| Ionósfera | 10 ⁶ | 10 ³ | 10 ⁴ | 0.2 | 10 ⁶ | 1.3x10 ⁴ | 6x10 ⁷ | 10 ⁻¹ | 10 ⁴ | 2x10 ⁵ |
| Corona solar | 10 ⁶ | 10 ⁶ | 3x10 ⁸ | 7 | 10 ¹¹ | 1.3x10 ¹⁰ | 6x10 ⁷ | 10 ⁻⁴ | 0.6 | 2x10 ³ |
| Q-Plasma | 10 ⁸ | 10 ⁵ | 10 ⁶ | 0.2 | 10 ² | 1.3x10 ⁶ | 6x10 ⁸ | 10 ² | 10 ³ | 2x10 ³ |
| Q-Plasma denso | 10 ¹¹ | 10 ⁴ | 10 ³ | 2x10 ⁻³ | 10 ² | 1.3x10 ⁻³ | 2x10 ¹⁰ | 10 ³ | 3x10 ⁷ | 2x10 ¹⁰ |
| Plasma caliente denso | 10 ¹² | 10 ⁶ | 3x10 ⁵ | 7x10 ⁻⁴ | 10 ³ | 1.3 | 6x10 ¹⁰ | 10 ⁴ | 3x10 ⁹ | 2x10 ¹¹ |
| Plasma de fusión | 10 ¹⁶ | 10 ⁸ | 3x10 ⁶ | 7x10 ⁻⁴ | 10 ³ | 1.3x10 ⁴ | 6x10 ¹² | 10 ⁵ | 5x10 ⁶ | 2x10 ¹² |
| Interior estelar | 10 ²⁴ | 10 ⁸ | 10 ⁶ | 10 ⁻⁶ | 10 ¹¹ | 1.3x10 ⁻² | 6x10 ¹⁶ | 10 ⁶ | 5x10 ¹² | 2x10 ¹³ |
| Enana Blanca | 10 ³⁰ | 10 ⁸ | 30 | 7x10 ⁻¹¹ | 10 ¹⁰ | 10 ⁻⁴ | 6x10 ¹⁹ | 10 ⁵ | 5x10 ¹⁹ | 2x10 ¹² |
| Estrella de neutrones | 10 ¹⁷ | 10 ²² | 7x10 ¹⁷ | 7x10 ⁻⁷ | 10 ⁹ | 10 ¹² | 6x10 ²² | 10 ¹² | 5x10 ⁴ | 2x10 ¹⁹ |
| Mercurio líquido | 10 ²³ | 10 ² | 10 ⁻⁷ | 10 ⁻¹⁰ | 10 | 1.3x10 ⁻⁵ | 10 ¹⁶ | 10 ³ | 10 ¹⁵ | 2x10 ¹⁰ |

Tabla 2. Parámetros característicos de plasmas típicos.

CAPITULO II

DESCRIPCION MAGNETOHIDRODINAMICA DE UN PLASMA

El propósito de este capítulo es el de establecer el conjunto de ecuaciones que gobiernan el movimiento de un plasma, resultado de las leyes físicas de conservación de masa, momento y energía.

Existen básicamente 2 maneras de derivar las ecuaciones de movimiento de un fluido en general. Uno de estos métodos ataca el problema desde un punto de vista de partícula, es decir, este método considera el fluido como un conjunto de partículas cuyo movimiento es gobernado por las leyes de la dinámica. Los fenómenos macroscópicos se predicen del comportamiento del fluido a partir de la mecánica y la teoría de probabilidad.

El método alternativo que se usa para derivar las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido usa el concepto de fluido continuo.

En la aproximación de continuo, las partículas individuales son ignoradas, suponiendo el fluido como materia continua. En cada punto del fluido continuo se supone que hay un único valor de la velocidad, presión, densidad, etcétera, llamadas variables de campo. Se considera entonces que la materia continua obedece las leyes de conservación de masa, momento y energía, que trae como resultado un conjunto de ecuaciones

ciones diferenciales que gobiernan a las variables de campo.

La aproximación del continuo requiere que el camino libre medio de las partículas sea muy pequeño, comparado con la longitud característica del fluido, i.e.

$$\lambda_c \ll \ell \quad (2.1)$$

De esta manera podemos tomar promedios de partículas como un punto e ignorar la estructura molecular del fluido.

La aproximación de un solo fluido requiere además que

$$T_e = T_i = T \quad (2.2)$$

1. ECUACIONES DE MAXWELL.

El comportamiento electromagnético se describe a partir de las ecuaciones de Maxwell. Si \vec{J} denota la densidad de corriente, las ecuaciones de Maxwell tienen la forma (Reitz, 1984):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_{el} \quad (2.6)$$

El término $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ no aparece en la ecuación (2.4) debido a que éste es despreciable. Obsérvese que de acuerdo con

(2.3)

$$|\dot{\vec{E}}| \sim \frac{k}{t} \frac{1}{c} |\dot{\vec{B}}| \quad (2.7)$$

si t es el tiempo característico de variación del campo. Así

$$\frac{\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \dot{\vec{B}}|} = \frac{\frac{1}{c t} |\dot{\vec{E}}|}{\frac{1}{\lambda} |\dot{\vec{B}}|} = \lambda \frac{k}{c t} \frac{|\dot{\vec{B}}|}{|\dot{\vec{B}}|} = \left(\frac{c}{t} \frac{1}{c} \right)^2$$

Podemos interpretar el término $\frac{k}{t}$ como una velocidad característica de variación. Entonces de acuerdo con la condición (1.4)

$$\frac{\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \dot{\vec{B}}|} = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \ll 1$$

Lo que significa que el sistema experimenta cambios muy pequeños durante el tiempo que le toma a la luz atravesarlo. Es decir que cambios en el estado electrodinámico de una región del sistema, son radiados a cualquier otra región casi instantáneamente en la escala de tiempo t , y podemos no tomar en cuenta la radiación electromagnética.

Se debe notar que al despreciar la corriente de desplazamiento, la ecuación (2.6) se utiliza sólo para determinar ρ_{e1} a partir del campo vectorial obtenido a partir del resto de las ecuaciones. Más aún, el hecho de que $\frac{1}{c} \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t} = 0$ implica que, a pesar de la diferencia de masa de los electrones y los iones, ambos pueden seguir las variaciones en el campo, conservándose la condición de cuasineutralidad, y en-

tonces

$$\rho_{e1} \approx 0 \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.2) se sigue que la ecuación de continuidad de la carga tiene la forma

$$\text{div } \vec{J} = 0 \quad (2.9)$$

Este resultado se obtiene también utilizando (2.8).

La ley de Ohm para un sistema de referencia que localmente se mueve con el fluido en el punto en cuestión, tiene la forma (Jackson, 1965)

$$\vec{J}' = \sigma \vec{E}' \quad (2.10)$$

donde σ es la conductividad eléctrica. En el caso no relativista, para un sistema de referencia en reposo, si \vec{V} es la velocidad del fluido para este sistema

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \quad (2.11)$$

$$\vec{J}' = \vec{J}$$

por tanto de (2.10)

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}) \quad (2.12)$$

la contribución a la corriente dada por el término $\rho_{e1} \vec{V}$, debido al flujo de la carga, no aparece en (2.12) debido a que

éste es muy pequeño.

Usando (2.4), (2.6) y (2.7)

$$\frac{|\rho_{e1} \vec{V}|}{|\vec{J}|} = \frac{|\vec{V}| |V \cdot \vec{E}|}{c |V \times \vec{B}|} = \frac{V \frac{1}{c} |\vec{E}|}{\frac{c}{V} |\vec{B}|} = \left(\frac{V}{c}\right)^2 \ll 1$$

lo que demuestra que $\rho_{e1} \vec{V}$ es despreciable. A partir de la condición de cuasineutralidad (2.3), se llega al mismo resultado. Por tanto (2.12) es la forma adecuada de la ley de Ohm*

Si sustituimos \vec{E} de (2.12) y \vec{J} de (2.4) en (2.3) obtenemos que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{B} \right) + \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (2.13)$$

que se conoce como ecuación de inducción.

La razón de los términos de la parte derecha de (2.13) es, bajo un análisis dimensional

$$\frac{|\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})|}{\frac{c^2}{4\pi} |\nabla \times (\frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{B})|} = \frac{V |\vec{B}|}{\frac{c^2}{4\pi \sigma L} |\vec{B}|} = \sigma L V \frac{4\pi}{c^2}$$

Definimos el número magnético de Reynolds por

$$R_m \equiv \sigma L V \frac{4\pi}{c^2} \quad (2.14)$$

*Se puede demostrar que la corriente Hall es de la forma $\frac{\Omega}{vB} \vec{J} \times \vec{B}$ entonces para plasmas isotrópicos para los que $\frac{\Omega}{vB} \ll 1$ esta corriente es despreciable (Cap, 1976).

Cuando

$$R_m \gg 1 \quad (2.15)$$

el campo eléctrico efectivo $|\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}|$ es muy pequeño comparado con $|\vec{E}|$ o con $|\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}|$ y por tanto de (2.4) y (2.12)

$$\vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \quad (2.16)$$

y (2.13) toma la forma

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) gobiernan la inducción de un conductor perfecto, para el que

$$\sigma \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

que es un caso muy frecuente en los plasmas espaciales.

La ecuación (2.16) implica que \vec{E} es siempre perpendicular tanto a \vec{V} como a \vec{B} ; además el hecho que

$$(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}) = 0$$

implica que se cumple (2.18), de tal manera de \vec{J} es finito y diferente de cero.

Concluimos esta sección señalando que la fuerza electro

magnética o de Lorentz es

$$\vec{f} = \rho_{e1} \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}$$

pero de acuerdo con (2.4), (2.6) y (2.7)

$$\frac{|\rho_{e1}| |\vec{E}|}{\frac{1}{c} |\vec{J} \times \vec{B}|} \sim \frac{\frac{1}{4\pi} |\nabla \cdot \vec{E}| |\vec{E}|}{\frac{c}{4\pi} |\nabla \times \vec{B}| |\vec{B}|} \sim \frac{\lambda |\vec{E}|}{ct |\vec{B}|} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$$

por tanto el término $\rho_{e1} \vec{E}$ es despreciable y la fuerza de Lorentz es (Reitz, 1984)

$$\vec{f} = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \quad (2.19)$$

Cabe señalar que utilizando (2.8), \vec{f} tiene la forma (2.19).

2. ECUACIONES MHD.

2.1. Ecuación de continuidad.

Suponiendo que en el plasma no ocurren reacciones nucleares, ni ionización o recombinación, entonces el principio de conservación de masa establece que el cambio en el tiempo de la densidad de masa ρ de un elemento de volumen, es igual al flujo de masa a través de la superficie del elemento de volumen, esto es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) expresa no sólo la conservación de la masa, dado que es una ecuación diferencial parcial, sino que el campo de velocidades \vec{V} es continuo. Es por ésto que (2.20) se conoce como ecuación de continuidad.

2.2. Ecuación de Momento

El principio de conservación del momento es una aplicación de la 2a. ley de Newton al movimiento de un elemento de plasma; es decir que el cambio en el momento del elemento es igual a la fuerza neta externa que actúa sobre dicho elemento. Las fuerzas externas sobre el elemento se dividen en fuerzas de cuerpo, tales como la fuerza debida a la gravedad y la fuerza de Lorentz, y fuerzas de superficie que son la fuerza debida a la presión y la debida a los esfuerzos viscosos. Esto es

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = + \rho \vec{g} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} + \nabla \cdot \vec{\Pi} \quad (2.21)$$

donde $\vec{\Pi}$ es el tensor de esfuerzos.

Podemos reescribir (2.21) en la forma

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = + \rho \vec{g} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} + \nabla \cdot \vec{\Pi} \quad (2.22)$$

Para plasmas isotrópicos se ha demostrado experimentalmente que, al igual que los fluidos neutros, se comportan como un fluido Newtoniano*, para el cual

* Un fluido newtoniano se puede definir como aquel fluido para el cual Π_{is} depende linealmente del gradiente de velocidad, entonces (2.22) y (2.23) se obtienen sin la condición de isotropía (Landau, 1959).

$$\pi_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.23)$$

donde P es la presión termodinámica. Al tensor τ se le conoce como tensor de esfuerzos cortantes y está dado por

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \mu' \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (2.24)$$

μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del plasma y μ' es el coeficiente de viscosidad de volumen.

Como resultado del movimiento del fluido, en general la presión mecánica \bar{P} es diferente de la presión termodinámica P . Podemos calcular P a partir de (2.23) y (2.24)

$$-\bar{P} = \frac{1}{3} \text{Tr}_a \dot{V} = \frac{1}{3} \sum_k \Pi_{kk}$$

entonces

$$-\bar{P} = -P + \mu' \text{div } \vec{V} \quad (2.25)$$

Si el plasma es un gas monoatómico, la presión mecánica es igual a la presión termodinámica. De acuerdo con (2.25)

$$\mu' = 0 \quad (2.26)$$

Para plasmas poliatómicos μ' es en general muy pequeña, por lo que la condición (2.26) es en general una buena aproximación.

Sustituyendo (2.23), (2.24) y (2.26) en (2.22), obtenemos

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.27)$$

que se conoce como ecuación de Navier-Stokes.

Bajo un análisis dimensional, la razón de la inercia y los efectos viscosos en (2.27), si ρ_c y μ_c representan valores característicos de la densidad y el coeficiente de viscosidad dinámica respectivamente, será

$$\frac{\left| \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \right|}{\left| \mu \left[\nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \nabla \cdot (\nabla \vec{V}) \right] \right|} = \frac{\left| \rho \frac{V}{t} \right|}{\left| \mu \frac{V}{l^2} \right|} = \frac{\rho_c V l}{\mu_c}$$

definimos el número de Reynolds R_e en forma análoga a R_m , así

$$R_e \equiv \frac{\rho_c V l}{\mu_c}$$

es una medida de la importancia relativa del término viscoso en (2.27); cuando

$$R_e \gg 1 \quad (2.28)$$

el término viscoso es despreciable, i.e.

$$\mu = 0$$

y (2.27) toma la forma

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \nabla P + \frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (2.29)$$

2.3 Ecuación de Estado

Un elemento de fluido no está, en general en reposo y por tanto nunca está en equilibrio termodinámico; una teoría de continuo debiera contener la teoría termodinámica irreversible de no equilibrio como parte de sus ecuaciones dinámicas. En este trabajo consideramos, sin embargo, sistemas que están en equilibrio termodinámico localmente*, así todas las funciones de posición (presión, densidad, etc.) cumplen exactamente las mismas relaciones termodinámicas que aquellas obtenidas para pequeños cambios reversibles de un sistema en equilibrio termodinámico.

Si $\frac{dQ}{dt}$ es la razón de producción de calor de un elemento de volumen y S su entropía, se cumple que (Callen, 1960)

$$\frac{dQ}{dt} = T \frac{dS}{dt} \quad (2.30)$$

donde, en un sistema que se mueve con el elemento de volumen

*La hipótesis del equilibrio termodinámico local da lugar a resultados que concuerdan bien con los experimentos cuando la escala de tiempo da las variaciones de los parámetros del fluido es muy grande comparada con el tiempo de relajación térmica de las partículas individuales del continuo, y cuando las dimensiones del fluido son grandes comparadas con las microescalas, (camino libre medio, etc.). Esto se cumple para las inestabilidades macroscópicas.

$$\frac{dq}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{E}' + \phi(u) - \nabla \cdot \vec{q} \quad (2.31)$$

$\phi(u)$ es la razón de producción de calor, debido a las fuerzas de fricción; $\vec{J} \cdot \vec{E}'$ es el calor producido por el calentamiento Joule; el vector \vec{q} denota el flujo de calor por conducción hacia afuera del elemento de plasma.

La ley de conducción de calor de Fourier establece que (Callen, 1960)

$$\vec{q} = - \epsilon \nabla T \quad (2.32)$$

con ϵ conductividad térmica.

Si se cumplen las condiciones (2.15) y (2.26) entonces, utilizando (2.31) y (2.32), reescribimos (2.30) en la forma

$$T \frac{ds}{dt} = \epsilon \nabla^2 T \quad (2.33)$$

Podemos desarrollar el término $\frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt}$$

Utilizando las relaciones de Maxwell podemos escribir (Landau, 1958)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho C_p}{T} \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt} \quad (2.34)$$

donde C_p es el calor específico a presión constante por unidad de masa. Sustituyendo (2.34) en (2.33)

$$\rho \frac{C_p}{T} \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt} = \frac{1}{T} \epsilon \nabla^2 T \quad (2.35)$$

de un análisis dimensional, si C_{CP} es un valor característico de C_p , obtenemos que

$$\frac{|\rho C_p \frac{dT}{dt}|}{|\epsilon \nabla^2 T|} = \frac{\rho_C C_{CP} \frac{1}{E}}{\epsilon \frac{1}{L}} = \frac{\rho_C C_{CP} V}{\epsilon}$$

definiendo el número de Péclet.

$$P_e = \frac{\rho_C C_{CP} V}{\epsilon} \quad (2.36)$$

entonces P_e es una medida de la magnitud del calor producido por conducción, respecto al calor por transporte colectivo. De tal forma, que la conducción de calor es despreciable respecto al transporte convectivo si

$$P_e \gg 1 \quad (2.37)$$

Si se cumple (2.37), de (2.35) y (2.34), obtenemos que

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (2.38)$$

es decir, la entropía se conserva y el movimiento es adiabático.

Una consecuencia de (2.38) se obtiene a partir de la relación:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dt} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_P \frac{dS}{dt}$$

entonces

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dt} \quad (2.39)$$

utilizando las relaciones de Maxwell (Landau, 1958)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \frac{C_P}{C_V} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad (2.40)$$

donde C_V es el calor específico a volumen constante, por unidad de masa y

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Utilizando (2.40), (2.39) tiene la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dt} \quad (2.41)$$

Si además el plasma cumple con la ecuación de estado del gas ideal (ver Apéndice A).

$$P = \rho RT \quad (2.42)$$

encontramos, después de evaluar $\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$ a partir de (2.42) que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \frac{\rho}{P}$$

Sustituyendo en (2.41) y reordenando obtenemos

$$\frac{dP_p^{-Y}}{dt} = 0 \quad (2.43)$$

Con los resultados anteriores definimos un plasma ideal como aquel cuyo comportamiento está determinado por las ecuaciones (2.17), (2.20), (2.29) y (2.43); este conjunto de ecuaciones se conoce como ecuaciones MHD ideal.

Un plasma se puede aproximar por las ecuaciones MHD ideal si cumple con las condiciones (2.15), (2.28), (2.37) y (2.42), además de las condiciones para ser tratado clásicamente y como continuo.

CAPITULO III

EQUILIBRIO MHD

En la teoría MHD, equilibrio significa el balance completo de fuerzas.

Debido a que una inestabilidad es la tendencia a alejarse del equilibrio, haremos una revisión de las condiciones de dicho equilibrio. Contraremos nuestra atención en estados en los que tanto la velocidad de flujo \vec{V} , como la aceleración del fluido, $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$, son cero; es decir, estados en los que existe un balance entre la fuerza de Lorentz, el gradiente de presión y las demás fuerzas de cuerpo externas (e.g. fuerza de gravedad). Las ecuaciones que gobiernan el estado de equilibrio de un plasma se conocen como ecuaciones magnetohidrostáticas ó magnetostáticas (ecuaciones MHS).

1. Ecuaciones Magnetostáticas.

Las ecuaciones básicas del equilibrio de un plasma se obtienen a partir de (2.4) y (2.5) y (2.29), tomando $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ y $\vec{V} = 0$, es decir

$$\nabla p = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (3.2)$$

$$\text{y} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

El término $\frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}$ de (3.1) lo podemos descomponer en dos términos utilizando (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{8\pi} \nabla B^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

El término $\frac{B^2}{8\pi}$ se asocia generalmente con una presión llamada presión magnética. Con esta idea, podemos definir la presión total p' como la suma de la presión cinética y la presión magnética, i.e.

$$p' = p + \frac{1}{8\pi} B^2 \quad (3.5)$$

Sustituyendo (3.4) y (3.5) en (3.1)

$$\nabla p' = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (3.6)$$

Si $\vec{g} = 0$ (3.1) se reduce a

$$\nabla p = \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B} \quad (3.7)$$

o en la forma (3.6)

$$\nabla p' = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (3.8)$$

El producto escalar de (3.7) con \vec{B} es

$$\vec{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (3.9)$$

y con \vec{J} es

$$\vec{J} \cdot \nabla p = 0 \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10) se sigue que el campo magnético y la densidad de corriente son siempre perpendiculares al gradiente de presión, el cual a su vez es normal a las superficies isobáricas (superficies donde $p = \text{cte}$); entonces no hay líneas de campo magnético o líneas de corriente que crucen alguna superficie isobárica, y las superficies isobáricas son también superficies magnéticas y superficies de corriente. En general $\frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}$ no es constante en la medida que ∇p no lo es. A pesar de que \vec{J} y \vec{B} están en la misma superficie, sólo pueden ser paralelos en regiones en las que el gradiente de presión sea cero. El producto vectorial de \vec{B} con (3.7) da lugar a una expresión de la corriente perpendicular a \vec{B}

$$\vec{J}_\perp = \frac{c}{B^2} \vec{B} \times \nabla p$$

Por tanto, no existen corrientes perpendiculares en ausencia de un gradiente de presión.

Cuando las líneas de campo magnético son rectas y paralelas, entonces el término del lado derecho de (3.8) es cero y

$$\nabla p = 0 \quad (3.11)$$

o bien

$$p = \text{cte} \quad (3.12)$$

Esto es, de (3.5)

$$P + \frac{1}{8\pi} B^2 = \text{cte} \quad (3.13)$$

si a es una constante que incluye el término 8π entonces

$$-P = \frac{a}{B^2} \quad (3.14)$$

La ecuación (3.14) establece que para sistemas en equilibrio magnetostático que cumplen con (3.11), las regiones de baja presión cinética son regiones con campo magnético intenso.

Este hecho se ha utilizado para explicar la osccuridad de las manchas solares. La división Zeeman de las líneas espectrales, muestra que una mancha solar es una región de campos magnéticos relativamente intensos, por tanto, de acuerdo con (3.14) para estar en equilibrio mecánico, debe estar a una presión más baja y por tanto, a una temperatura relativamente inferior.

Las ecuaciones (3.1) ó (3.7), (3.2) y (3.3) establecen las condiciones de equilibrio. Sin embargo para configuraciones independientes de al menos una coordenada, es posible reducir las ecuaciones de equilibrio a una ecuación diferencial parcial de una incógnita, introduciendo una función de flujo magnético ψ . En las secciones siguientes encontraremos dicha ecuación para el caso de un cilindro recto (simetría cilíndrica) y un toroide con simetría axial.

2. Equilibrio de un Sistema con Simetría Cilíndrica.

Tomando el eje Z a lo largo del eje del cilindro, entonces se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial Z} = 0 \quad (3.15)$$

de la ecuación (3.3)

$$\frac{\partial B_X}{\partial X} + \frac{\partial B_Y}{\partial Y} = 0 \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) implica que existe una función ψ tal que

$$B_X = + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad (3.17)$$

y

$$B_Y = - \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (3.18)$$

donde dada la simetría

$$\psi = \psi(X, Y) \quad (3.19)$$

La función ψ generalmente se asocia con el flujo magnético.

Utilizando (3.17) y (3.18), si \hat{X}_i es un vector unitario a lo largo del eje X_i .

$$\vec{B} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \hat{X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \hat{Y} + B_Z \hat{Z} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) en (3.2).

$$\frac{\dot{\mathbf{J}}}{\mathbf{C}} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \ddot{\mathbf{B}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial B_Z}{\partial Y} \hat{\mathbf{X}} - \frac{\partial B_Z}{\partial X} \hat{\mathbf{Y}} - \nabla^2 \psi \hat{\mathbf{Z}} \right] \quad (3.21)$$

A partir de (3.20) y (3.21) podemos evaluar

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathbf{J}}}{\mathbf{C}} \times \dot{\mathbf{B}} = & -\frac{1}{4\pi} \left[\left(B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial X} + \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \hat{\mathbf{X}} + \left(B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial Y} + \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \hat{\mathbf{Y}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial B_Z}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{\partial B_Z}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \hat{\mathbf{Z}} \right] \quad (3.22) \end{aligned}$$

pero de acuerdo con (3.7) y (3.15)

$$\frac{\partial B_Z}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{\partial B_Z}{\partial X} \frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0 \quad (3.23)$$

entonces, de acuerdo con (3.19)

$$B_Z = B_Z(\psi)$$

Y

$$B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial X_i} = B_Z \frac{dB_Z(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \quad \text{para } X_i = X, Y \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.23) y (3.24) en (3.22)

$$\frac{\dot{\mathbf{J}}}{\mathbf{C}} \times \dot{\mathbf{B}} = -\frac{1}{4\pi} (B_Z B'_{Z'}(\psi) + \nabla^2 \psi) \nabla \psi \quad (3.25)$$

definiendo

$$f(\psi) \equiv B_Z B'_{Z'}(\psi) + \nabla^2 \psi \quad (3.26)$$

$$\frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi} f(\psi) \nabla \psi$$

o bien

$$\frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \left(\int f d\psi \right)$$

y de (3.7)

$$\nabla P = \nabla \left(-\frac{1}{4\pi} \int f d\psi \right)$$

de donde

$$P = -\frac{1}{4\pi} \int f d\psi + \text{cte}$$

o bien

$$\frac{dP}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi} f \quad (3.27)$$

Sustituyendo el valor de f , (3.26) en (3.27)

$$\frac{dP}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi} (B_z(\psi) B_z^2(\psi) + \nabla^2 \psi) \quad (3.28)$$

Si se especifican las funciones $P(\psi)$ y $B_z(\psi)$ (se pueden establecer arbitrariamente), y las condiciones de frontera para ψ , entonces se resuelve (3.28) para ψ ; y con este resultado se calcula \vec{B} utilizando (3.17) y (3.18).

3. Equilibrio de un Sistema con Simetría Axial.

La ecuación para ψ que determina el equilibrio de un toroide con simetría axial, se obtiene con un proceso similar al seguido para simetría cilíndrica.

Utilizando coordenadas cilíndricas (r, ϕ, Z) y tomando

el eje Z en coincidencia con la línea central del toroide, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (3.29)$$

Evaluando (3.31) mediante (3.29), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r B_z) = 0 \quad (3.30)$$

Entonces existe un potencial vectorial $\psi(r, z)$ tal que

$$B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.31)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.32)$$

Debido a que se cumple (3.29) podemos escribir la componente axial del campo magnético, en términos de una función de (r, z) . Definimos $\chi(r, z)$ como

$$B_\phi = \frac{1}{r} \chi(r, z) \quad (3.33)$$

Utilizando (3.31), (3.32) y (3.33) podemos escribir \vec{B} como

$$\vec{B} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{r} + \frac{\chi}{r} \hat{\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{z} \quad (3.34)$$

y de (3.2)

$$\frac{\vec{J}}{C} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \vec{B} = \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial z} \hat{r} - \frac{1}{r} \Delta^* \psi \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \hat{z} \right] \frac{1}{4\pi} \quad (3.35)$$

donde se hizo uso del operador

$$\Delta^* \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.36)$$

Entonces haciendo uso de (3.35) y (3.34) calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = & - \frac{1}{4\pi r^2} \left[\left(\chi \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \Delta^* \psi \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \hat{\phi} \right. \\ & \left. + \left(\chi \frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \Delta^* \psi \right) \hat{z} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ya que P es independiente de ϕ , ∇P no tiene componente ϕ . Entonces de (3.7) y (3.37)

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \quad (3.38)$$

lo que implica que

$$\chi = \chi(\psi) \quad (3.39)$$

de donde $\chi \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = \chi \frac{d\chi}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ para $x_i = r, z$ (3.40)

Sustituyendo (3.38) y (3.40) en (3.37)

$$\frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = - \frac{1}{4\pi r^2} \left[\chi(\psi) \chi'(\psi) + \Delta^* \psi \right] \nabla \psi \quad (3.41)$$

definiendo

$$f(\psi) \equiv \chi(\psi) \chi'(\psi) + \Delta^* \psi \quad (3.42)$$

entonces

$$\frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi r^2} f(\psi) \nabla\psi$$

o bien

$$\frac{\vec{J}}{C} \times \vec{B} = -\frac{1}{4\pi r^2} \nabla \left(\int f d\psi \right)$$

y de acuerdo con (3.7)

$$\nabla P = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int f d\psi \right)$$

de donde

$$P(\psi) = -\frac{1}{4\pi r^2} \int f d\psi + \text{cte}$$

derivando respecto a ψ

$$\frac{dP}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi r^2} f \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.42) en (3.43)

$$\frac{dP}{d\psi} = -\frac{1}{4\pi r^2} \left(\chi(\psi) \chi'(\psi) + \Delta^* \psi \right) \quad (3.44)$$

Así la solución general de (3.44), para funciones arbitrarias $\chi(\psi)$ y $P(\psi)$, da la solución más general de (3.7) para el caso de simetría axial.

CAPITULO IV

INESTABILIDADES EN UN PLASMA MHD,

En el capítulo anterior se analizó la estructura del equilibrio magnetostático. Determinar si dicho equilibrio es estable o inestable, es importante tanto en aplicaciones tecnológicas como en astrofísica.

En forma intuitiva la manera como se decide la estabilidad de un sistema, es determinado cuando éste es desviado del equilibrio al realizar un desplazamiento arbitrariamente pequeño y después se permite que evolucione solo.

Suponemos que el cambio en el campo magnético resultado de la perturbación se hace cero en el infinito. O si el sistema está contenido, supondremos que no hay intercambio de energía entre el sistema y los alrededores. Esto puede ser logrado suponiendo que las paredes son perfectamente conductoras, entonces $\hat{n} \times \vec{E}$ es cero, así como el flujo normal del vector de Poynting $\hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})$, es decir la radiación electromagnética es reflejada*. En ambos casos la energía total E_{tot} del sistema se conserva.

Existen muchas situaciones de interés en los cuales los efectos de la difusión son despreciables durante la evolución del desplazamiento, una vez iniciado. Si esto sucede, no se pierde energía en forma de calor, y

* Esta condición no es necesaria para plasmas MHD, ya que la radiación es despreciable.

$$E_{\text{tot}} = k + W = \text{cte} \quad (4.1)$$

donde k es la energía cinética del sistema y la energía potencial W es la suma de: la energía interna I del volumen del fluido (V), la energía potencial asociada con cualquier campo de fuerza conservativo externo, denotado por Q , la energía M del campo magnético en V , y la energía del campo magnético en la región de vacío \hat{V} alrededor de V (y dentro del contenedor si éste existe) \hat{M} . Es decir

$$W = I + Q + M + \hat{M} \quad (4.2)$$

En equilibrio la energía cinética inicial es cero, por tanto de (4.1) podemos escribir

$$K = - \delta W$$

donde δ denota incremento.

Más adelante demostraremos que, en el modelo MHD ideal, δW solo depende de $\vec{\xi}$, donde $\vec{\xi}(\vec{X}_0)$ es el desplazamiento del fluido que está situado en \vec{X}_0 en el estado de equilibrio (más adelante se define $\vec{\xi}$ con precisión). La estructura del equilibrio aparece en la función $\delta W(\vec{\xi})$, pero ésta no depende de la razón de deformación, sólo depende de valores instantáneos de $\vec{\xi}$. Podemos escribir

$$k(\vec{\xi}) = - \delta W(\vec{\xi}) \quad (4.3)$$

Es ilustrativo revisar la gráfica de δW como función de $\vec{\xi}$, en forma análoga a como se grafica la energía potencial de un campo de fuerzas conservativo en mecánica elemental.

Existen varias posibilidades del valor de δW . Si $\delta W > 0$ para toda $\vec{\xi} \neq 0$, en la vecindad de $\vec{\xi} = 0$ (ver Fig. 1), existen valores E_1 de E tal que $0 < \delta W \leq E_1$, y que contiene solo un extremo de δW . Si desplazamos el sistema de $\vec{\xi} = 0$ con una

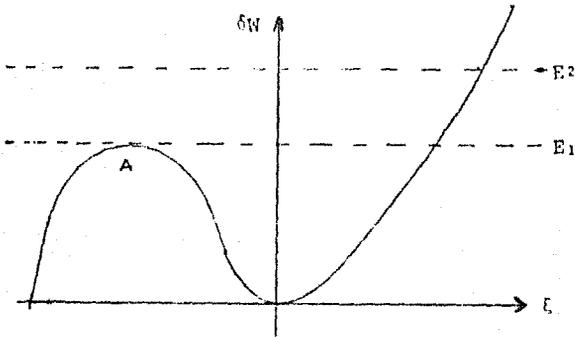


Figura 1

energía cinética $k_0 < E_1$ se mantendrá oscilando alrededor de $\vec{\xi} = 0$. En la práctica, la disipación eventualmente convertirá k_0 en calor y el sistema regresará al estado de mínima energía ($\vec{\xi} = 0$). Entonces decimos que el sistema es estable para todas las perturbaciones con energía menor que E_1 .

Si $\delta W < 0$ para alguna $\vec{\xi} \neq 0$ para toda vecindad de $\vec{\xi} = 0$ (ver Fig. 2) entonces no importa que tan pequeño (y positivo) $-\delta W(\vec{\xi})$ puede ser, el sistema siempre se alejará de $\vec{\xi} = 0$.

La energía cinética del movimiento será $K = E - \delta W$

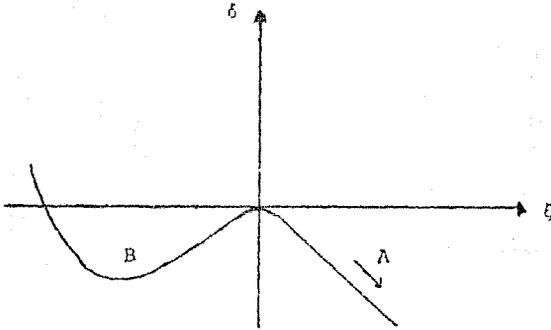


Figura 2.

y mientras δW continúe decreciendo, la energía cinética se incrementará, lo que puede resultar en la dispersión total del sistema en infinito. Puede eventualmente ejecutar una os cilaación en cualquier pozo potencial (representado por B en Fig. 2), el sistema oscilará en torno a B sin cesar. En la práctica la disipación acabará por convertir la energía $E - \delta W$ en calor, dejando al sistema en B. En ninguno de los dos casos se regresa al estado de equilibrio inicial $\xi = 0$, y por tanto decimos que el sistema es inestable.

Por supuesto los casos tratados anteriormente no agotan todas las posibilidades. Por ejemplo, un sistema puede ser estable para perturbaciones de energía menores que un cierto valor, digamos E_1 , pero inestables respecto a perturbaciones de mayor energía. Es el caso esquematizado en la Fig. 2, si por ejemplo, la energía es E_2 , el sistema rebasará el máximo

en Λ y entonces el sistema ya no regresa a $\vec{\xi} = 0$. Sin embargo, en este trabajo definimos la estabilidad sólo con respecto a perturbaciones infinitesimales:

Decimos que el sistema es estable si para toda $\vec{\xi}$ en una vecindad infinitesimal de $\vec{\xi} = 0$, se cumple que $\delta W > 0$.

El sistema es inestable si existe alguna $\vec{\xi}$ en una vecindad infinitesimal de $\vec{\xi} = 0$, para que $\delta W < 0$.

En la siguiente sección se demostrará que la condición sobre δW , determina la condición de estabilidad del sistema (i.e. si el sistema es estable o inestable).

1. Principio de Energía.

1.1 Ecuación de modos

Debido a la naturaleza infinitesimal de la perturbación, los términos cuadrados de las ecuaciones de movimiento pueden ser despreciados, dando lugar a lo que se conoce como ecuaciones linealizadas MHD. Una característica de las ecuaciones linealizadas es que cualquier perturbación puede ser expresada por la suma de funciones propias, determinadas en forma única, por las condiciones de equilibrio y de frontera, independientemente de la perturbación escogida.

Denotemos las cantidades en equilibrio con subíndice "0", y las cantidades perturbadas con un subíndice "1". Las ecuaciones linealizadas son, utilizando (2.17), (2.20), (2.29), (2.43) y (3.1)

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_1 \times \vec{B}_0) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = - \vec{V}_1 \cdot \nabla \rho_0 - \rho_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 \quad (4.5)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = - \nabla P_1 + \frac{\vec{J}_0}{C} \times \vec{B}_1 + \frac{\vec{J}_1}{C} \times \vec{B}_0 + \rho_1 \vec{g} \quad (4.6)$$

Y

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = - (\vec{V}_1 \cdot \nabla) P_0 - \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{V}_1 \quad (4.7)$$

Considerando la perturbación $\vec{\xi}(\vec{X}_0, t)$, vector de desplazamiento, de tal forma

$$\vec{X}_1 = \vec{\xi} + \vec{X}_0 \quad (4.8)$$

Y

$$\vec{V}_1 = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \quad (4.9)$$

En un sistema de coordenadas Lagrangiano, $\vec{\xi}$ representa el desplazamiento de un elemento de fluido de su posición inicial. En coordenadas Eulerianas, $\vec{\xi}$ caracteriza el flujo de una sucesión de diferentes elementos de fluido a través de un punto. El campo vectorial $\vec{\xi}$ está bien definido en ambos sistemas y la diferencia en la interpretación no es relevante, ya que se trata de perturbaciones arbitrariamente pequeñas.

Integrando las ecuaciones para el campo magnético, la densidad y la presión perturbados, (4.4), (4.5) y (4.7), utilizando (4.9)

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (4.10)$$

$$\rho_1 = -\nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \quad (4.11)$$

$$P_1 = -(\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 - \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (4.12)$$

las constantes de integración se eliminan si la perturbación representa un estado dinámico que ha pasado por el equilibrio. Dinámicamente ésta aseveración corresponde a empezar con una pelota en la cima de una colina con alguna velocidad inicial, en lugar de empezar con la pelota desplazada de la cima de la colina sobre alguna trayectoria que pueda no pasar nunca por la cima. Esto se logra con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(\vec{X}, 0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\xi}(\vec{X}, 0)) &\neq 0 \\ \vec{B}_1(\vec{X}, 0) &= 0 \\ \rho_1(\vec{X}, 0) &= 0 \\ P_1(\vec{X}, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como mencionamos anteriormente, es posible determinar el campo magnético, la densidad y la presión del sistema perturbado, y por tanto la energía asociada, a partir del conocimiento de $\vec{\xi}$ y de la configuración inicial. Para el caso lineal esto se logra mediante las ecuaciones (4.10), (4.11) y (4.12).

Sustituyendo (4.10), (4.11) y (4.12) en (4.6); utilizan

do (2.4) y (4.9), obtenemos la ecuación de movimiento en términos del vector de desplazamiento.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} &= \nabla [(\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}] + \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0))] \times \vec{B}_0 \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}_0) \times (\nabla \times [\vec{\xi} \times \vec{B}_0]) - g \nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \\ &= \vec{F}(\vec{\xi}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las condiciones de frontera son, $\vec{\xi}$ finito en cualquier punto y, suponiendo paredes impermeables $\vec{\xi} \cdot \hat{n} = 0$ en la frontera.

$\vec{F}(\vec{\xi})$ se conoce como operador de fuerzas (4.14) como ecuación de modos. En el apéndice B se demuestra que $\vec{F}(\vec{\xi})$ es Hermitiano.

Para un equilibrio particular \vec{B}_0, ρ_0 y P_0 se conocen y por tanto se pueden evaluar \vec{F} a partir de (4.14).

De la ecuación (4.14) tenemos que

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi})$$

Las funciones propias $\vec{\xi}_K$ de $\vec{F}(\vec{\xi})$ están dadas por

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = K \vec{\xi}_K$$

ya que \vec{F} es el Hermitiano el valor propio K es real; (Nieto, 1978);

entonces

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_K}{\partial t^2} = k \xi_K$$

Integrando respecto al tiempo

$$\xi_K(\vec{X}, t) = \xi_K(\vec{X}) e^{i\omega_K t} \quad (4.15)$$

y

$$K = -\omega_K^2 \rho_0 \quad (4.16)$$

entonces

$$-\omega_K^2 \rho_0 \xi_K(\vec{X}) = \vec{F}(\xi_K(\vec{X})) \quad (4.17)$$

las funciones ξ_K se llaman modos normales.

Es claro de (4.15) que para $\omega_K^2 > 0$ la configuración es estable y corresponde a una oscilación y $\omega_K^2 < 0$ corresponde a un incremento exponencial de la perturbación. Además, a partir de (4.16) podemos establecer que, en general, un equilibrio *libre* es estable si y sólo si todos los valores propios del operador \vec{F} son negativos, esto es equivalente a suponer $\omega_K^2 > 0$ para todo K , provocando que los modos normales oscilen.

1.2 Método de la energía

La energía cinética K de un elemento de volumen es

$$K = \int d^3X \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \quad (4.18)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial t} &= \int d^3x \rho_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \\ &= \int d^3x \rho_0 \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \ddot{\vec{\xi}}\end{aligned}$$

Como $\ddot{\vec{\xi}}$ es Hermitiano (ver apéndice B) podemos escribir

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \ddot{\vec{\xi}} + \dot{\vec{\xi}} \cdot \frac{\partial \ddot{\vec{\xi}}}{\partial t} \right]$$

de ahí

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\vec{\xi}} \cdot \ddot{\vec{\xi}})$$

Haciendo uso de (4.3)

$$\frac{\partial (\delta W)}{\partial t} = - \frac{1}{2} \int d^3x \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\vec{\xi}} \cdot \ddot{\vec{\xi}}) \quad (4.19)$$

e integrando

$$\delta W = - \frac{1}{2} \int d^3x \dot{\vec{\xi}} \cdot \ddot{\vec{\xi}} \quad (4.20)$$

Multiplicando (4.17) por $\ddot{\vec{\xi}}$ e integrando

$$\omega_K^2 \int d^3x \rho_0 \xi^2 = - \int d^3x \ddot{\xi}_K \cdot \ddot{\vec{\xi}}_K$$

de (4.20)

$$\omega_K^2 \int d^3x \rho_0 \xi_K^2 = \delta W_K$$

despejando ω_K^2

$$\omega_K^2 = \frac{\delta W_K}{\int d^3x \rho_0 \xi^2} \quad (4.21)$$

El numerador de la parte derecha de (4.21) siempre es positivo. Para un estado estable ω_K^2 es positivo y por tanto $\delta W_K > 0$.

En general cualquier perturbación $\vec{\xi}$ la podemos expresar como combinación lineal de $\vec{\xi}_K$ así

$$\vec{\xi} = \sum_K \alpha_K \vec{\xi}_K \quad (4.22)$$

como α_K constantes reales. Entonces (4.20) se puede escribir como

$$\delta W = + \int d^3x \left(\sum_K \alpha_K \vec{\xi}_K \right) \cdot \left(\sum_J \alpha_J \omega_J^2 \rho_0 \vec{\xi}_J \right)$$

de ahí

$$\delta W = \int d^3x \sum_K \sum_J \alpha_K \alpha_J \omega_J^2 \rho_0 \vec{\xi}_J \cdot \vec{\xi}_K$$

Se sigue del carácter Hermitiano de \vec{F} que las funciones propias correspondientes a valores propios diferentes son or

tonormales. Las funciones propias degeneradas pueden ser ortonormalizadas en la forma usual*. Así la condición de ortonormalidad establece que

$$\vec{\xi}_K \cdot \vec{\xi}_J = \delta_{KJ}$$

y

$$\delta W = \int d^3X \sum_K \rho_0 \alpha_K^2 \omega_K^2 \xi_K^2 \quad (4.23)$$

donde $\rho_0 \alpha_K^2 \xi_K^2$ es positivo para cualquier $\vec{\xi}$. Ya que si $\omega_K^2 > 0$ para toda K , entonces el equilibrio es estable, y de (4.23) esto corresponde a $\delta W > 0$. Si existe alguna $\vec{\xi}_1$ para la que $\omega_1^2 < 0$ podemos elegir una perturbación $\vec{\xi}'$ tal que

$$\vec{\xi}' = \alpha_1 \vec{\xi}_1$$

y entonces de acuerdo con (4.15) el sistema será inestable si es perturbado por $\vec{\xi}'$, y de (4.23) $\delta W < 0$ si utilizamos $\vec{\xi}'$. Con esto demostramos que δW es, según se afirmó con anterioridad, un discriminante de estabilidad, de tal forma que $\delta W > 0$ para toda $\vec{\xi}$, es una condición necesaria y suficiente de estabilidad.

Resulta claro de (4.14) y (4.20) que el valor δW depende exclusivamente de $\vec{\xi}$ y de la configuración inicial del sistema (ésto es, de los valores de las variables de campo del sistema en equilibrio).

* Método de ortonormalización de Gram-Schmidt (Nieto, 1978).

1.3 Cálculo de δW

Algunas complicaciones aparecen si el plasma tiene una frontera definida, es decir, es un sistema plasma-vacío; en cuyo caso, para evaluar δW es conveniente desarrollar explícitamente las contribuciones a la energía de las diferentes regiones y de la frontera.

Vamos a transformar la expresión para el cambio en la energía potencial, ecuación (4.20), para separar la contribución de superficie y de la energía de vacío de la parte correspondiente al fluido, y derivar las condiciones de frontera linealizadas. Es conveniente definir el vector \vec{Q} como

$$\vec{Q} \equiv \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (4.24)$$

de (2.17) se sigue que \vec{Q} es el cambio $\delta \vec{B}$ en el campo magnético siguiendo el movimiento del fluido descrito por $\vec{\xi}$.

Utilizando (4.24) escribimos explícitamente (4.20)

$$\begin{aligned} \delta W = & -\frac{1}{2} \int d^3x \vec{\xi} \cdot \left[\nabla ((\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} - \vec{g} \nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \right] \quad (4.25) \end{aligned}$$

Se integra sobre el total de volumen ocupado por el plasma no perturbado. Haciendo uso de las siguientes identidades.

$$\nabla \cdot \left[\vec{\xi} ((\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) \right] = \vec{\xi} \cdot \nabla ((\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi})$$

$$+ \nabla \cdot \vec{\xi} ((\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q}] &= \vec{Q} \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) - (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \cdot \nabla \times \vec{Q} \\ &= Q^2 + \vec{\xi} \cdot [(\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\vec{\xi} \cdot [(\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{Q}] = -(\nabla \times \vec{B}_0) \cdot (\vec{\xi} \times \vec{Q}) \quad (4.28)$$

(4.25) toma la forma

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{1}{4\pi} Q^2 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}_0) \cdot (\vec{\xi} \times \vec{Q}) + (\nabla \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 \right. \\ &\quad \left. + \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 + \vec{\xi} \cdot \vec{g} \nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^3x \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} + \vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aplicando el teorema de Gauss a la segunda integral del lado derecho de (4.29), suponiendo que S es la superficie de la interfase entre el plasma y el vacío, con $d\vec{S}$ elemento de área tenemos que

$$\begin{aligned} 2\delta W &= \int d^3x \left[\frac{Q^2}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{B}_0) \cdot (\vec{\xi} \times \vec{Q}) + (\nabla \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 \right. \\ &\quad \left. + \vec{\xi} \cdot \vec{g} \nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \right] \\ &\quad - \int d\vec{S} \cdot \left[\frac{1}{4\pi} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} + \vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

A la contribución a δW de la integral de volumen del plasma, la denotamos como δW_p es decir

$$\delta W_p \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \left[\frac{Q^2}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{V} \times \vec{B}_0) \cdot (\vec{\xi} \times \vec{Q}) + (\mathbf{V} \cdot \vec{\xi}) \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 (\mathbf{V} \cdot \vec{\xi})^2 + \vec{\xi} \cdot \vec{g} \nabla \cdot \rho_0 \vec{\xi} \right] \quad (4.31)$$

A partir de las ecuaciones de frontera podemos transformar la integral de superficie de (4.30).

Para llevar a cabo dicha transformación, necesitamos determinar el campo magnético perturbado en la frontera. Integrando respecto al tiempo, desde $t = 0$ la relación

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{B} \quad (4.32)$$

se obtiene que

$$\vec{B}(\vec{X}, t) - B_0(\vec{X}_S, 0) = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \vec{Q} \quad (4.33)$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones (2.17) y (4.9). \vec{X}_S denota la localización de un elemento de plasma situado en la superficie no perturbada (posición del elemento de plasma en el equilibrio) y \vec{X} su posición en la superficie perturbada. De la ecuación adiabática (2.43) y la ecuación de continuidad (2.20)

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P \nabla \cdot \vec{V} \quad (4.34)$$

Integrando respecto al tiempo desde $t = 0$, y usando (4.9)

$$P(\vec{x}, t) - P_0(\vec{x}_S, 0) = -\gamma P_0(\vec{x}_S, 0) \mathbf{v} \cdot \vec{\xi} \quad (4.35)$$

Para la parte de vacío se tienen ecuaciones similares, donde \vec{B} se reemplaza por \vec{B}_V y \vec{Q} por $\delta\vec{B}_V$. De la ecuación (3.13) se sigue que, ya que $P_V = 0$ (presión en el vacío)

$$\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right)_{\text{plasma}} = \frac{B_V^2}{8\pi} \quad (4.36)$$

Sustituimos (4.33) y (4.35) en (4.36) para la frontera perturbada. Dado que la perturbación es muy pequeña podemos hacer uso de (4.36) para el estado perturbado, entonces

$$-\gamma P_0 \mathbf{v} \cdot \vec{\xi} + \frac{\vec{B}_0}{4\pi} [\vec{Q} + (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_0] = \frac{B_V}{4\pi} \cdot [\delta\vec{B}_V + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \vec{B}_0] \quad (4.37)$$

El término $(\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q}$ de la integral de superficie de (4.30) se puede desarrollar como la diferencia de productos punto; de la ecuación (3.9) se sigue que $\vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = 0$, entonces

$$\int d\vec{S} \cdot \frac{1}{4\pi} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} = - \int d\vec{S} \cdot \frac{1}{4\pi} \vec{\xi} (\vec{B}_0 \cdot \vec{Q}) \quad (4.38)$$

De (4.37) y (4.38) la integral de superficie de (4.30) toma la forma

$$\int d\vec{S} \cdot \left[\frac{1}{4\pi} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} + \vec{\xi} (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) + \vec{\xi} \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \right]$$

$$= \int d\vec{S} \cdot \vec{\xi} \left[\frac{\vec{B}_0}{4\pi} \cdot (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_0 - \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \nabla \delta \vec{B}_V \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \vec{\xi} \cdot \nabla P_0 \right] \quad (4.39)$$

Haciendo uso de la identidad

$$\vec{B} \cdot (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B} = (\vec{\xi} \cdot \nabla) \frac{B^2}{2}$$

la integral de superficie toma la forma

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{\xi} \left[\vec{\xi} \cdot \nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) - \vec{\xi} \cdot \nabla \frac{B_0^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \cdot \delta \vec{B}_V \right] \quad (4.40)$$

Dado que (4.36) es válida para toda la frontera, la componente tangencial de $\nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right)$ debe ser continua. Por tanto, solamente se conservan las componentes normales y (4.40) se puede escribir como

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{\xi} \left[\vec{\xi} \cdot \nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) - \vec{\xi} \cdot \nabla \frac{B_0^2}{8\pi} - \frac{\vec{B}_0}{4\pi} \cdot \delta \vec{B}_V \right] \\ = - \int d\vec{S} \cdot (\vec{\xi} \cdot \hat{n})^2 \left[\nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) \right] \\ - \int d\vec{S} \cdot \vec{\xi} \frac{\vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B}_V}{4\pi} \quad (4.41)$$

A partir de este resultado definimos

$$\delta W_S \equiv \frac{1}{2} \int d\vec{S} \cdot (\vec{\xi} \cdot \hat{n})^2 \left[\nabla \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) \right] \quad (4.42)$$

Queda por transformar la segunda integral del lado derecho de (4.41). En el vacío el desplazamiento de la frontera cambia el campo magnético por $\delta\vec{B}_V$, y un campo eléctrico pequeño $\delta\vec{E}_V$ es generado por inducción. La componente del campo eléctrico que se mueve con el plasma, debe ser continua a través de la frontera del plasma, lo cual da lugar, de acuerdo con (2.11) a

$$\hat{n} \times (\delta\vec{E}_V + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}_{oV}) = \hat{n} \times (\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}_o) \quad (4.43)$$

Esto ya que el campo eléctrico en el vacío en el equilibrio es cero ($\vec{E}_{oV} = 0$). Utilizando (2.16) el lado derecho de (4.43) es cero y por tanto

$$\hat{n} \times \delta\vec{E}_V = - \hat{n} \times \left(\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}_{oV} \right) \quad (4.44)$$

Desarrollando el triple producto vectorial de (4.44) y haciendo uso de la condición de frontera $\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$ obtenemos que

$$\hat{n} \times \delta\vec{E}_V = \frac{1}{c} (\hat{n} \cdot \vec{V}) \vec{B}_V \quad (4.45)$$

Introducimos el vector potencial $\delta\vec{A}$, para generar el campo en el vacío de primer orden

$$\nabla \times \delta\vec{A} = \delta\vec{B}_V \quad (4.46)$$

y de (2.3)

$$\delta \vec{E}_V = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\delta \vec{A})}{\partial t} \quad (4.47)$$

donde se ha adoptado la norma de Coulomb, (Jackson, 1965) y por tanto el potencial escalar de retardo no aparece.

Integrando (4.45) con respecto al tiempo, obtenemos que

$$-\hat{n} \times \delta \vec{A} = (n \cdot \vec{c}) \vec{B}_{eV}$$

Sustituyendo, junto con (4.46) en el último miembro del lado derecho de (4.41)

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{c} \frac{\vec{B}_{eV} \cdot \delta \vec{B}_V}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int (d\vec{S} \times \delta \vec{A}) \cdot (V \times \delta \vec{A}) \quad (4.48)$$

Aplicando el teorema de Gauss

$$\frac{1}{4\pi} \int (d\vec{S} \times \delta \vec{A}) \cdot (V \times \delta \vec{A}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x_V \nabla \cdot \left[\delta \vec{A} \times (V \times \delta \vec{A}) \right] \quad (4.49)$$

Donde se está integrando sobre la región de vacío. El signo cambia en (4.49), ya que $d\vec{S}$ apunta hacia afuera del plasma y hacia adentro del vacío. Se está suponiendo que, o el vacío se extiende a infinito o este termina en una pared conductora donde la componente tangencial del campo eléctrico y $\delta \vec{A}$ son cero. Obsérvese que

$$\nabla \cdot \left[\delta \vec{A} \times (V \times \delta \vec{A}) \right] = (V \times \delta \vec{A}) \cdot (V \times \delta \vec{A}) - \delta \vec{A} \cdot \nabla \times (V \times \delta \vec{A}) \quad (4.50)$$

Como en el vacío no hay corriente

$$\nabla \times (\nabla \times \delta \vec{A}) = 0 \quad (4.51)$$

A partir de (4.50), (4.51) y (4.46), (4.49) toma la

forma

$$-\frac{1}{4\pi} \int d^3x_V \nabla \cdot [\delta \vec{A} \times (\nabla \times \delta \vec{A})] = - \int d^3x_V \frac{(\delta \vec{U}_V)^2}{4\pi} \quad (4.52)$$

Definiendo δW_V a partir de (4.52) como

$$\delta W_V \equiv \frac{1}{2} \int d^3x_V \frac{\delta B_V^2}{4\pi} \quad (4.53)$$

Con estos resultados podemos expresar la energía potencial como una suma de las contribuciones de la región de plasma, la región de vacío y la frontera, de las ecuaciones (4.29), (4.31), (4.42) y (4.53)

$$\delta W = \delta W_P + \delta W_V + \delta W_S \quad (4.54)$$

El primer término en δW_P es el cambio en la energía magnética, el segundo es el trabajo realizado en contra de las fuerzas magnéticas no balanceadas en el plasma, los dos últimos términos representan el cambio en la energía interna del fluido, debido a fuerzas no magnéticas presentes.

La integral de superficie δW_S representa el trabajo rea

lizado contra la corriente de superficie por los desplazamientos de la frontera debidos a $\vec{\xi}$. La componente de vacío δW_v es el cambio en la energía magnética en la región de vacío.

El mismo resultado se obtiene calculando explícitamente los valores de (4.2) y agrupando contribuciones a la energía de la región de plasma, vacío y frontera.

El primer término de $\delta W(\vec{\xi})$ es una integral de volumen; los dos primeros términos del integrando pueden dar lugar a una inestabilidad debida a la corriente, el segundo término puede dar lugar a una inestabilidad debida a la presión, ambas por la contribución de términos negativos a δW , el tercer término es siempre estabilizador, el último término puede provocar inestabilidades debidas a la gravedad. El segundo término en δW es una integral de volumen sobre la región de vacío del campo perturbado y es siempre estabilizadora. El último término en δW es una integral de superficie sobre la interface entre el plasma y el vacío y puede estabilizar o desestabilizar, dependiendo de la configuración del campo y de la perturbación.

Dado que γ aparece solamente como un término positivo de δW_p encontramos que el sistema es más estable si γ es grande. Para un plasma incomprensible ($\gamma \rightarrow \infty$) encontramos el caso más estable para la misma configuración; cuando la presión es independiente del volumen ($\gamma \rightarrow 0$) tenemos el caso

más inestable. Consecuentemente, para demostrar la inestabilidad de un sistema, es suficiente demostrar la inestabilidad del mismo para el caso de plasma incompresible.

Obsérvese que cada término de la energía potencial es de segundo orden en las cantidades pequeñas. Dado que el sistema inicial está en equilibrio, los términos de primer orden de la energía potencial perturbada se hacen cero automáticamente.

La inestabilidad de un sistema es fácil de probar, a partir del método de la energía, basta con introducir una perturbación en el sistema - normalmente se escoge dicha perturbación por inspección - y mostrar que hace decrecer la energía potencial. La estabilidad, por supuesto, es más difícil de probar, se tiene que demostrar que ningún tipo de perturbación da lugar a un valor negativo de δW . Esto se logra minimizando δW con respecto a cualquier perturbación posible, si δW_{\min} es positivo, entonces el sistema es estable.

La ecuación de modos permite también investigar el movimiento del sistema en una vecindad del equilibrio. Tiene la ventaja de que se puede calcular el valor de ω^2 de forma inmediata, y por tanto, se obtiene de forma directa la frecuencia de oscilación, o la razón de crecimiento de la inestabilidad. Es claro que el resultado que se obtenga sólo es válido mientras sigan siendo válidas las ecuaciones linealizadas, es decir, mientras los términos no lineales de las ecuaciones MHD sean despreciables. La ecuación de modos es

en general mucho más difícil de resolver que el cálculo de δW , por tanto, en la práctica resulta mejor utilizar el método de la energía.

En la siguiente sección, establecemos las condiciones de estabilidad para un sistema confinado libre de fuerzas, a partir del método de la energía. Al final analizamos la inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild utilizando la ecuación de modos, lo que permite obtener la razón de crecimiento para dicha inestabilidad.

2. Inestabilidad de un plasma confinado libre de fuerzas

Vamos a estudiar el caso de un plasma en un campo magnético libre de fuerzas encerrado por paredes rígidas con ductoras (la pared es necesaria para poder eliminar las fuerzas, ya que un sistema libre de fuerzas tiende a expandirse). Suponemos que el plasma llena todo el espacio del interior del recipiente, de tal forma que los términos δW_V y δW_G no aparecen en δW . Consideremos el sistema menos estable eligiendo $\gamma = 0$, lo cual, además simplifica la expresión para δW_p . Dado que el plasma está libre de fuerzas, $V \cdot \vec{p} = 0$ entonces de (3.1) se sigue que \vec{J} y \vec{B} son paralelos y (3.2) se puede escribir como

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \alpha \vec{B}_0 \quad (4.55)$$

Restringiremos el análisis para el caso de campos para

los que α es constante. Entonces de (4.31)

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int d^3X \left[Q^2 + \alpha \vec{B}_0 \cdot (\vec{\xi} \times \vec{Q}) \right] \quad (4.56)$$

Definiendo

$$\vec{R} \equiv \vec{\xi} \times \vec{B}_0 \quad (4.57)$$

y de (4.24) podemos reescribir (4.56) en la forma

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int d^3X \left[(V \times \vec{R})^2 - \alpha \vec{R} \cdot (V \times \vec{R}) \right] \quad (4.58)$$

Es claro, a partir de la definición de \vec{R} , que δW depende solo de $\vec{\xi}$ a través de \vec{R} , por tanto, es suficiente minimizar con respecto a \vec{R} . De (4.57) resulta claro que mientras para toda $\vec{\xi}$ existe una \vec{R} , solo los campos \vec{R} perpendiculares a \vec{B}_0 pueden ser usados, i.e.

$$\vec{R} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (4.59)$$

Una condición de normalización para $\vec{\xi}$, (o \vec{R}) es

$$-\frac{1}{8\pi} \int d^3X \alpha \vec{R} \cdot (V \times \vec{R}) = \text{cte} \quad (4.60)$$

Esta condición representa una restricción para \vec{R} .

Siguiendo las reglas del cálculo variacional, multiplicamos (4.60) por una constante indeterminada λ y la sumamos

a (4.58). Así en lugar de minimizar δW , minimizamos

$$I = \int d^3X [(V \times \vec{R})^2 - (\lambda + 1)\alpha \vec{R} \cdot (V \times \vec{R})] \equiv \int d^3XL \quad (4.61)$$

I tiene un extremo (máximo o mínimo) donde L satisfaga la ecuación de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial R_i} = \int_K \frac{d}{dx_K} \frac{\partial L}{\partial R_{i,K}} \quad (4.62)$$

donde

$$R_{i,K} \equiv \frac{\partial R_i}{\partial x_K} \quad (4.63)$$

Calculando cada término para la componente X

$$\frac{\partial L}{\partial R_x} = -(\lambda + 1)\alpha (V \times \vec{R})_x \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{x,x}} = 0 \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{x,y}} = -2(V \times \vec{R})_z + (\lambda + 1)\alpha R_z \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial R_{x,z}} = 2(V \times \vec{R})_y - (\lambda + 1)\alpha R_y \quad (4.67)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial L}{\partial R_{x,y}} + \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial L}{\partial R_{x,z}} = -2[V \times (V \times \vec{R})]_x + (\lambda + 1)\alpha (V \times \vec{R})_x \quad (4.68)$$

Ecuaciones similares se obtienen para las otras dos componentes. Por tanto la ecuación de Euler tiene la forma

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{R}) = (\lambda + 1) \alpha \nabla \times \vec{R} \quad (4.69)$$

El valor de \vec{R} que satisfaga (4.69) y normalizado de acuerdo con (4.60) minimiza (o maximiza) δW . Para obtener los valores correspondientes de δW calculamos (4.58).

Haciendo uso de la identidad

$$(\nabla \times \vec{R}) \cdot (\nabla \times \vec{R}) = \nabla \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{R}) - \nabla \cdot [(\nabla \times \vec{R}) \times \vec{R}] \quad (4.70)$$

y de la ecuación (4.69) podemos expresar el término

$$\alpha \vec{R} \cdot (\nabla \times \vec{R}) = \frac{1}{\lambda + 1} [(\nabla \times \vec{R})^2 + \nabla \cdot ((\nabla \times \vec{R}) \times \vec{R})] \quad (4.71)$$

Sustituyendo en (4.58) para el valor extremo de δW , de notado δW_{ex} , obtenemos

$$\delta W_{ex} = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\lambda + 1} \int d^3x (\nabla \times \vec{R})^2 - \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\lambda + 1} \int d^3x \nabla \cdot [(\nabla \times \vec{R}) \times \vec{R}] \quad (4.72)$$

la segunda integral del lado derecho de (4.72), por el teorema de divergencia, puede ser escrita como

$$\int d^3x \nabla \cdot [(\nabla \times \vec{R}) \times \vec{R}] = \int dS \cdot (\nabla \times \vec{R}) \times \vec{R} \quad (4.73)$$

En la pared \vec{E} y \vec{E}_0 son tangenciales, entonces \vec{R} es normal a la superficie y por tanto (4.73) es cero. Así utilizan

do la definición de K

$$\delta W_{ex} = \frac{1}{8\pi} \frac{\lambda}{\lambda+1} \int d^3x Q^2 \quad (4.74)$$

Haciendo uso de (4.24) y (4.57) expresamos (4.69) como

$$\frac{1}{8} \nabla \times \vec{Q} = (\lambda + 1) \vec{Q} \quad (4.75)$$

los valores λ de (4.74) se determinan como los valores propios de (4.75).

El valor de δW_{ex} contiene el mínimo absoluto de δW . De (4.74) observamos que δW_{ex} es negativo solamente si existe un valor propio de (4.75), tal que $-1 < \lambda < 0$. Si no existe tal valor propio, la configuración es estable.

El problema de estabilidad se ha reducido a encontrar los valores propios de un operador, ecuación (4.75). Esta ecuación es, por supuesto, más simple que la ecuación de movimiento.

3. Inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild.

Entre las inestabilidades más importantes, se encuentra el análogo magnetohidrodinámico de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, la cual ocurre cuando un fluido denso es sopor_{tado} contra la gravedad por otro de menor densidad, el siste_{ma}

ma está en equilibrio, ya que la fuerza que actúa sobre el fluido superior está balanceado por la presión del fluido de la parte baja. Este equilibrio es inestable, pues cuando el fluido inferior intercambia lugar con el fluido denso, la energía potencial decrece transformándose en energía cinética. Una inestabilidad similar se presenta cuando un plasma es soportado en contra de la gravedad por un campo magnético, como por ejemplo en la atmósfera solar. Esta inestabilidad recibe el nombre de inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild.

De las ecuaciones (4.14), (4.17) y (4.24) podemos escribir que

$$\begin{aligned}
 -w^2 \rho_0 \vec{\xi} = & -\nabla P_1 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0 \\
 & + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times B_0) \times \vec{Q} + \hat{e}_Y g \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

donde \hat{e}_x , \hat{e}_y y \hat{e}_z son vectores unitarios en las direcciones X, Y y Z, respectivamente. Suponiendo flujo incompresible

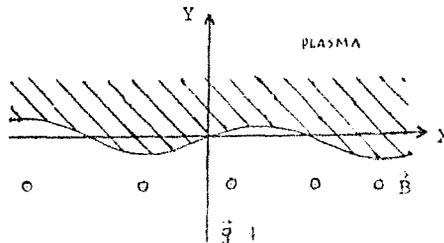


Fig. 3. Perturbación de un plasma suspendido en un campo magnético.

$$\nabla \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (4.77)$$

Entonces P_1 en (4.76) es, de acuerdo con (4.14)

$$P_1 = (\vec{\xi} \cdot \nabla) P_0 \quad (4.78)$$

Tomamos el campo magnético a lo largo de Z , entonces
(ver Fig. 3)

$$\vec{B}_0 = \hat{e}_Z B_0 \quad (4.79)$$

Suponemos que las ecuaciones de equilibrio dependen solamente de Y , y tomamos en cuenta solo las perturbaciones que no varían a lo largo del campo magnético, entonces

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial Z} = 0 \quad (4.80)$$

Evaluando \vec{Q} encontramos que

$$\vec{Q} = -\epsilon_Y \frac{dB_0}{dY} \hat{e}_Z \quad (4.81)$$

entonces

$$(\nabla \times \vec{Q}) \times \vec{B}_0 + (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{Q} = -\nabla(\vec{B}_0 \cdot \vec{Q}) \quad (4.82)$$

Sustituyendo en (4.76)

$$\rho_0 \omega^2 \vec{\xi} = \nabla(P_1 + \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \vec{Q}) - \hat{e}_Y g (\vec{\xi} \cdot \nabla) \rho_0 \quad (4.83)$$

Dado que las condiciones a lo largo de la frontera entre el plasma y el campo son iguales para todo punto, es de esperarse que una perturbación se propague en forma simétrica en la medida en que ésta avance en la dirección X; la perturbación será simétrica con respecto al desplazamiento en X para cada punto de dicho eje.

Debido a esto, la perturbación puede suponerse de la forma e^{iKX} .

De ahí, la ecuación (4.83), en componentes, toma la forma

$$\rho_0 \omega^2 \xi_X = iK \left(P_1 + \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \quad (4.84)$$

y

$$\rho_0 \omega^2 \xi_Y = \frac{\partial}{\partial Y} \left(P_1 + \frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) - g \xi_Y \frac{d\rho_0}{dY} \quad (4.85)$$

Despejando el término entre paréntesis de (4.84) y sustituyendo en (4.85)

$$\rho_0 \omega^2 \xi_Y = \frac{\omega^2}{iK} \frac{\partial}{\partial Y} (\rho_0 \xi_X) - g \xi_Y \frac{d\rho_0}{dY} \quad (4.86)$$

de la ecuación (4.77) se sigue que

$$\frac{\partial \xi_X}{\partial X} = - \frac{\partial \xi_Y}{\partial Y} \quad (4.87)$$

Entonces se puede eliminar ξ_X de (4.86) derivando respecto a X y usando (4.87), ésto es

$$iK\rho_0\omega^2\xi_Y = -\frac{\omega^2}{iK}\frac{\partial}{\partial Y}(\rho_0\frac{\partial\xi_Y}{\partial Y}) - ikg\xi_Y\frac{d\rho_0}{dY}$$

o bien

$$K^2(\rho_0\omega^2 + g\frac{d\rho_0}{dY})\xi_Y = \omega^2\frac{\partial}{\partial Y}(\rho_0\frac{\partial\xi_Y}{\partial Y}) \quad (4.88)$$

Suponiendo que el plasma tiene densidad uniforme ρ_0 separada del vacío por una hoja de corriente en $Y = 0$. Es decir

$$\frac{d\rho_0}{dY} = \rho_0\delta(Y) \quad (4.89)$$

donde $\delta(Y)$ es la delta de Kronecker. Para $Y > 0$, $\frac{d\rho_0}{dY} = 0$ y (4.88) tiene la forma

$$K^2\xi_Y = \frac{\partial^2\xi_Y}{\partial Y^2} \quad (4.90)$$

cuya solución es

$$\xi_Y = \xi_{0Y} e^{-KY} e^{iKX} \quad (4.91)$$

la cual no diverge, como era de esperarse, cuando $Y \rightarrow \infty$.

Utilizando (4.89) se puede integrar (4.88) através de la frontera, es decir, en el intervalo $-\epsilon \leq Y \leq \epsilon$ con $\epsilon \rightarrow 0$, de ahí

$$K^2 g \rho_0 \xi_Y = -\omega^2 \rho_0 K \xi_Y \quad (4.93)$$

de donde se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = -Kg \quad (4.94)$$

la cual, como se esperaba, da lugar a soluciones inestables para cualquier número de onda k , de hecho k muy grande corresponde a un crecimiento mayor de la inestabilidad.

CONCLUSIONES

Una de las características más importantes que distinguen a los plasmas, es la gran variedad de inestabilidades que presentan. En este trabajo se ha discutido el método de la energía que es el más importante para el estudio de inestabilidades de las configuraciones en equilibrio de los plasmas.

El comportamiento dinámico de un plasma MHD ideal está descrito por las ecuaciones (2.17), (2.20), (2.29) y (2.43). Los procesos disipativos no desempeñan ningún rol en la teoría MHD ideal. Dicho plasma se encuentra en equilibrio si cumple con (3.1), (3.2) y (3.3). Estas ecuaciones se utilizan para establecer el principio de energía, ya que el resolver directamente estas ecuaciones resulta bastante complejo.

Dentro del marco MHD definimos un sistema estable como aquel para el que cualquier desplazamiento infinitesimal del equilibrio, provoca un incremento en su energía potencial. Un sistema es inestable cuando algún desplazamiento infinitesimal del equilibrio da lugar a un decremento en la energía potencial, con lo cual el sistema tiende a alejarse del equilibrio. Dicho desplazamiento está definido por (4.8) y (4.9).

Para el caso de perturbaciones infinitesimales los términos no lineales de las ecuaciones MHD son despreciables y entonces el movimiento del plasma queda gobernado por la ecuación diferencial en ξ (4.14) cuyas soluciones solo dependen de las condiciones de equilibrio y de los valores a la frontera.

El carácter Hermitiano del operador \tilde{F} (4.14), da lugar a funciones propias del tipo (4.15) donde la evolución de la perturbación en el tiempo está determinada por el valor de ω_k , de tal forma que $\omega_k^2 > 0$ corresponde a una oscilación con frecuencia ω_k y por tanto a una estabilidad; $\omega_k^2 < 0$ corresponde a un incremento exponencial de la perturbación.

Una forma de determinar la estabilidad del sistema es resolviendo la ecuación de modos (4.14) haciendo uso de (4.15); esto permite obtener el valor de ω y determinar si el sistema es estable e inestable, además de conocer la frecuencia de oscilación o la razón de crecimiento, respectivamente. Como ejemplo de la aplicación de este método se resolvió el problema de la inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild, para un flujo incompresible, donde se obtiene una razón de crecimiento dada por (4.94). En este método hay que resolver una ecuación diferencial de segundo orden, lo que en general es bastante complicado, motivo por el cual se desarrolló un método alternativo, el método de la energía, que es relativamente más simple, pero no da información sobre ω .

En este método se calcula explícitamente $\delta W(\xi)$ lo cual permite determinar directamente si el sistema es estable o inestable, lo que corresponde a $\delta W > 0$ y $\delta W < 0$, respectivamente. El problema se reduce a calcular la integral (4.20).

Es conveniente separar la ecuación (4.20), así se ob-

tuvo la contribución al cambio en la energía potencial por la región de plasma, la frontera entre el plasma y el vacío, y la región de vacío, ecuación (4.54).

El término δW_p es una integral de volumen sobre el plasma. El primer término del integrando puede dar lugar a una inestabilidad originada por la presión, por la contribución de un término negativo a δW ; el segundo término en el integrando es siempre estabilizador; el tercer término puede dar lugar a una inestabilidad originada por la corriente, y el último término puede dar lugar a una inestabilidad originada por la gravedad. El término δW_v es una integral de volumen sobre la región de vacío del campo perturbado y es siempre estabilizadora. El término δW_s es una integral de superficie sobre la interfase entre el plasma y el vacío y puede estabilizar o desestabilizar, dependiendo de la configuración de campo y de la perturbación.

Como γ aparece solamente como un término positivo en δW_p , encontramos que el sistema es más estable si γ es grande. Cuando la presión es independiente del volumen ($\gamma = 0$) tenemos el caso más inestable. Un plasma incompresible ($\gamma = \infty$) da lugar al menos a tanta estabilidad como uno compresible, en la misma configuración. Por tanto para demostrar la inestabilidad de un sistema, es suficiente demostrar la inestabilidad suponiendo flujo incompresible, lo que además simplifica los cálculos.

Como ejemplo de la utilización del método de la energía se analizó el caso de un plasma confinado libre de fuerzas, supusimos además flujo incompresible. El problema de inestabilidad se reduce al cálculo de los valores propios en (4.75), lo cual es más simple que resolver la ecuación de modos. El sistema es inestable si existe un valor propio λ de (4.75) tal que $-1 < \lambda < 0$.

Las inestabilidades en plasmas de laboratorio son de particular importancia, ya que en el diseño de dispositivos de plasmas se deben eliminar o minimizar los crecimientos rápidos de las inestabilidades indeseables.

En la teoría MHD solar y en otras aplicaciones astrofísicas de la teoría MHD, el estudio de las inestabilidades juega un papel muy importante en la descripción y el análisis de los procesos que ocurren en los plasmas espaciales.

La inestabilidad de Kruskal-Schwarzschild, descrita en el Capítulo IV, se usa para explicar numerosos fenómenos que ocurren en las atmósferas solar y planetarias, por ejemplo en la ionósfera de la tierra; la estructuración de la nube de bario puede dar lugar a una inestabilidad del tipo Kruskal-Schwarzschild debido a la desaceleración de la nube, esta inestabilidad permite explicar el comportamiento de las descargas de bario que son inyectadas a través del campo magnético.

Existen básicamente dos mecanismos que dan lugar a inestabilidades MHD en un cilindro circular. Los gradientes de presión junto con la curvatura de las líneas de campo magné-

tico dan origen a la llamada inestabilidad de intercambio, la cual provoca que una parte del plasma trate de intercambiar lugar con otra parte, está en general asociada con algún nivel tolerable de actividad inestable localizada en alguna otra región dentro del plasma; este tipo de movimientos de intercambio han sido observados en la magnetósfera terrestre. El segundo tipo de inestabilidad, originada por una corriente paralela al campo magnético, se conoce como inestabilidad de torcedura; si además se toma en cuenta la resistividad del plasma, se encuentra que este tipo de inestabilidad permite a las líneas de campo magnético romperse y reconectarse, formando islas magnéticas. Este modelo de reconexión ha sido propuesto para explicar la reconexión que ocurre en la magnetocola terrestre y como uno de los mecanismos que intervienen en la formación de ráfagas solares.

Una inestabilidad puede ser generada en la interfase entre dos medios con movimiento relativo. Esta inestabilidad recibe el nombre de inestabilidad de Kelvin-Helmholtz; en particular ocurre cuando un chorro de plasma es inyectado dentro de un plasma estacionario, la inestabilidad deshace al chorro y convierte la energía cinética en energía de turbulencia. Chorros espectaculares se observan en algunas fuentes astrofísicas como son los Cuasares, los núcleos galácticos y el objeto estelar SS433.

Las inestabilidades mencionadas son sólo una pequeña parte de la enorme variedad de inestabilidades que se presentan en los plasmas astrofísicos, y que dan lugar a una gran cantidad de fenómenos físicos. De ahí se deriva la importancia del estudio de las inestabilidades en plasmas.

APENDICE A

ECUACIÓN DE ESTADO

En la tabla 2 se observa que para los plasmas conocidos, la densidad de partículas va de $\sim 10^{-5} \frac{\text{part}}{\text{cm}^3}$ para plasmas espaciales hasta $\sim 10^{15} \frac{\text{part}}{\text{cm}^3}$.

El rango de temperaturas es de 10^2 °K a 10^{10} °K e incluso 10^{12} °K, (ver tabla 2). Ningún otro campo de la física tiene que abarcar variaciones tan grandes de las variables de estado termodinámicas. Desarrollar ecuaciones de estado que sean válidas para todos los rangos de temperatura y densidad, es poco menos que imposible. Sin embargo, el problema de una ecuación de estado apropiada para un plasma es importante. En este apéndice se desarrolla una forma de la ecuación de estado para plasmas ideales, según se definen a lo largo del trabajo. En un plasma denso, las condiciones de equilibrio (e.g. $T_i = T_e$, $\frac{\lambda}{\lambda_D} = 0$) se establecen rápidamente, debido a las frecuentes colisiones.

La termodinámica estadística puede expresar todas las propiedades de un sistema en equilibrio por la llamada función de partición Z .

El plasma en equilibrio cumple con la ecuación de Maxwell - Boltzman

$$n_i = c_i q_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

Donde n_l es el número de partículas con energía total E_l (cinética + potencial). La multiplicidad (o peso) está dado por g_l y es igual al número de estados que tienen la misma energía E_l . Dado que el número de partículas es

$$N = \sum_l n_l = c \sum_l g_l e^{-\frac{E_l}{kT}}$$

Tenemos la constante de normalización

$$c = \frac{N}{\sum_l g_l e^{-\frac{E_l}{kT}}} = \frac{N}{Z}$$

Esto define la función de partición Z

$$Z = \sum_s g_s e^{-\frac{E_s}{kT}} \quad (\text{A.1})$$

(A.1) es en ocasiones llamado suma sobre los estados. De acuerdo con la estadística termodinámica, la ecuación térmica de estado de un sistema descrito por (A.1) está dada por

$$P = kT \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_T \quad (\text{A.2})$$

donde V es el volumen del sistema. Para un gas monoatómico perfecto (partículas puntuales), $g_s = 1$ y la energía $E_s = \frac{mU^2}{2}$

$$Z = \left[d^3\vec{U}_1 d^3\vec{U}_2 \dots \right] \left[d^3\vec{X}_1 d^3\vec{X}_2 \dots \right] \left[g e^{-\frac{mU^2}{2kT}} \right]$$

donde ya que E_g es independiente de la posición

$$\begin{aligned} & \left\{ d^3\vec{X}_1 d^3\vec{X}_2 \dots = V^N \right. \\ \text{además} & \left. d^3\vec{U}_1 d^3\vec{U}_2 \dots = \left[4\pi U^2 dU \right]^N \right. \\ \text{Así} & \\ Z &= \int_0^\infty \left[4\pi U^2 e^{-\frac{mU^2}{2kT}} dU \right]^N V^N \end{aligned}$$

Integrando obtenemos que

$$Z = V^N \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

De (A.2) la ecuación térmica de estado es

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT \quad (\text{A.3})$$

Si el gas es poliatómico o si ocurren reacciones químicas, la ecuación de estado se vuelve más complicada.

Aquí estamos sin embargo, más interesados en la modificación de la ecuación de estado cuando se toma en cuenta la interacción electrostática entre las partículas del plasma.

El cambio en el potencial debido a las interacciones es justamente la diferencia Δ entre el potencial de Debye

($\phi_D = \frac{e}{r} \exp - r/\lambda_D$) y el potencial Coulombiano ($\phi = \frac{e}{r}$). Pa-

ra λ_D muy pequeña ϕ_D se puede expandir, así

$$\Delta = - Z_s \frac{e}{\lambda_D} \quad (\text{A.4})$$

por partícula de especie S .

La energía electrostática de un sistema de partículas está dada por

$$U = \frac{1}{2} \sum_s q_s \phi_s \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo (A.4)

$$U = - \frac{1}{2} \frac{e^2}{\lambda_D} \bar{Z} n \quad (\text{A.6})$$

donde

$$\bar{Z} = \frac{\sum_s n_s Z_s^2}{n} \quad (\text{A.7})$$

y

$$n = \sum_s n_s \quad (\text{A.8})$$

Reemplazando $(1 + Z^2)n_{e0}$ por $\sum_s Z_s^2 n_s$ en la ecuación (1.10) obtenemos la expresión de la longitud de Debye para varias especies, así podemos escribir (A.6) como

$$U = - \frac{1}{8\pi} \frac{kT}{\lambda_D^3} \quad (\text{A.9})$$

Integrando sobre el volumen de plasma obtenemos Z y sustituyendo en (1.1) obtenemos

$$P = n kT - \frac{1}{4\pi} \frac{kT}{\lambda_D^3} \quad (\text{A.10})$$

De acuerdo con (1.15) la modificación en la presión es muy pequeña, por tanto podemos describir termodinámicamente a los plasmas como gas ideal, mientras la razón de la energía electrostática respecto a la energía térmica sea pequeña. De acuerdo con (A.10) dicha razón denotada por δ es

$$\delta \equiv - \frac{e^2/4\pi(Z)^{1/2}}{k^{3/2}} \frac{\sqrt{n}}{T^{3/2}} \quad (\text{A.11})$$

entonces la modificación de presión puede ser despreciada para bajas densidades y altas temperaturas (cuando $\delta \ll 1$).

Dado que en un campo magnético no altera la energía de la partícula, Z no es alterada y entonces no hay modificación por presión magnética en la ecuación de estado.

Definiendo la constante del gas a partir de la masa m de las partículas

$$R \equiv \frac{k}{m} \quad (\text{A.12})$$

tenemos que

$$P = \rho RT \quad (\text{A.13})$$

APENDICE B

HERMETICIDAD DEL OPERADOR DE FUERZAS

En este apéndice se demuestra que $\vec{F}(\vec{\xi})$ es Hermitiano. Introducimos un vector de desplazamiento $\vec{\eta}$ y un vector de potencial $\delta\vec{C}$ que satisfacen las mismas condiciones de frontera de $\vec{\xi}$ y $\delta\vec{A}$ discutidas en el Capítulo IV. Es decir que de (4.48)

$$-\hat{n} \times \delta\vec{C} = (\hat{n} \cdot \vec{\eta}) \vec{B}_0 \nu \quad (\text{B.1})$$

en la frontera del plasma y el vacío.

$\vec{F}(\vec{\xi})$ es Hermitiano si cumple con

$$\int d^3x \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) = \int d^3x \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}) \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo (4.14) en el lado derecho de (B.2) y reordenando tenemos que

$$\begin{aligned} - \int d^3x \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) &= \int d^3x \left[\gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\eta}) (\nabla \cdot \vec{\xi}) + (\nabla \cdot \vec{\eta}) (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times (\vec{\eta} \times \vec{B}_0)) \cdot (\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\pi} (\vec{\eta} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \\ &+ \int d\vec{S} \cdot \vec{\eta} \left[\frac{1}{4\pi} \vec{B}_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) - \gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi} - (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) \right] \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso del teorema de Gauss.

\vec{B}_{0p} denota el campo magnético en el interior del plasma.

Analicemos primero la integral de volumen en (B.3). la contribución de $\vec{n}_{11} = \alpha \vec{B}_0$ al segundo y cuarto término en la integral es

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \vec{n}_{11} (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) - \frac{1}{4\pi} (\vec{n}_{11} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)) \\
 &= (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) (\vec{B}_0 \cdot \nabla \alpha) + \alpha \nabla P_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \\
 &= (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) (\vec{B}_0 \cdot \nabla \alpha) + \alpha \nabla \cdot ((\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \times \nabla P_0) \\
 &= (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) (\vec{B}_0 \cdot \nabla \alpha) + \alpha \nabla \cdot ((\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) \cdot \vec{B}_0) \\
 &= \nabla \cdot ((\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) \alpha \vec{B}_0)
 \end{aligned}$$

La integral de volumen se transforma en una integral de superficie, la cual es cero, debido a la condición de frontera $\hat{n} \cdot \vec{n}_{11} = 0$. Expresemos $\vec{\xi}$ y $\vec{\eta}$ en términos de los tres vectores \vec{B}_0 , $\nabla \times \vec{B}_0$ y $\vec{e} \equiv \nabla P_0 / |\nabla P_0|$, esto es

$$\vec{\xi} = \xi_1 \nabla \times \vec{B}_0 + \xi_2 \vec{e} + \xi_3 \vec{B}_0 = \vec{\xi}' + \xi_3 \vec{B}_0 \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{\eta} = \eta_1 \nabla \times \vec{B}_0 + \eta_2 \vec{e} + \eta_3 \vec{B}_0 = \vec{\eta}' + \eta_3 \vec{B}_0 \quad (\text{B.5})$$

Como la contribución de $\vec{\eta}_{11}$ es cero, solo la contribución de $\vec{\eta}^1$ se tomará en cuenta, así

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4\pi} (\vec{\eta}^1 \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \\
 & = - \frac{\eta_2}{4\pi} (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\xi_1 \vec{e} + \xi_2 (\vec{e} \times \vec{B}_0)) \\
 & = - \eta_2 (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot (\nabla \xi_1 \times \vec{e}) \\
 & - \frac{\eta_2}{4\pi} (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot [\xi_2 (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{e} - \xi_2 (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B}_0 \\
 & - \xi_2 \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{e}) + \nabla \xi_2 \times (\vec{e} \times \vec{B}_0)] \\
 & = (\eta_2 \vec{e} \cdot \nabla P_0) (\nabla \times \vec{B}_0 \cdot \nabla \xi_1) - \frac{\eta_2}{4\pi} (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \\
 & \cdot [-(\nabla \cdot (\xi_2 \vec{e})) \vec{B}_0 + \xi_2 ((\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{e} - (\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B}_0)] \\
 & = (\vec{\eta}^1 \cdot \nabla P_0) (\nabla \times \vec{B}_0 \cdot \nabla \xi_1) + (\vec{\eta}^1 \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot (\xi_2 \vec{e}) \\
 & + \frac{\xi_2 \eta_2}{4\pi} (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot ((\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B}_0 - (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{e})
 \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\nabla \vec{\eta}^1) (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) - \frac{1}{4\pi} (\vec{\eta}^1 \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \\
 = (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) (\nabla \vec{\eta}^1) + (\vec{\eta}^1 \cdot \nabla P_0) (\nabla \cdot \vec{\xi}^1)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{e}) (\vec{\xi} \cdot \vec{e}) (\vec{e} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot ((\vec{e} \cdot \nabla) \vec{B}_0 - (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{e}) \quad (\text{B.6})$$

Esta ecuación es simétrica con respecto a $\vec{\xi}$ y \vec{n} .

Por tanto queda demostrado que la integral de volumen de (B.3) es simétrica con respecto a $\vec{\xi}$ y \vec{n} .

Ahora consideremos la integral de superficie de (B.3); de acuerdo con (B.1), encontramos que

$$\begin{aligned} \int dS \eta_{\parallel} \vec{B}_0 \cdot (\nabla \cdot \delta \vec{A}) &= - \int dS (\hat{n} \times \delta \vec{C}) \cdot \nabla \times \delta \vec{A} \\ &= - \int dS \hat{n} \cdot (\delta \vec{C} \times (\nabla \times \delta \vec{A})) \\ &= \int d^3 X_v \nabla \cdot (\delta \vec{C} \times (\nabla \times \delta \vec{A})) \\ &= \int d^3 X_v ((\nabla \times \delta \vec{C}) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) - \delta \vec{C} \cdot \nabla \times (\nabla \times \delta \vec{A})) \\ &= \int d^3 X_v (\nabla \times \delta \vec{C}) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

En la frontera entre el plasma y el vacío, la presión

total debe ser continua, por tanto

$$- \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}_{0P} \cdot (\vec{B}_{1P} + (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_{0P})) = \frac{1}{4\pi} \vec{B}_{0V} \cdot (\vec{B}_{1V} + (\vec{\xi} \cdot \nabla) \vec{B}_{0V}) \quad (\text{B.8})$$

Usando esta condición y (B.7), la integral de superficie de (B.3) puede ser reducida a

$$\begin{aligned} & \int dS \left[\eta_{\perp} \frac{\vec{B}_{0V} \cdot \vec{B}_{1V}}{4\pi} + \eta_{\perp} (\vec{\xi} \cdot \nabla) \left(\frac{B_{0V}^2}{8\pi} - \frac{B_{0P}^2}{8\pi} - P_0 \right) \right] \\ & = \int d^3X_V (\nabla \times \delta \vec{C}) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) - \int dS \eta_{\perp} \xi_{\perp} \frac{\partial}{\partial n} \left(P_0 + \frac{B_{0P}^2}{8\pi} - \frac{B_{0V}^2}{8\pi} \right) \end{aligned}$$

Por tanto, la integral (B.3) se reduce a

$$\begin{aligned} - \int d^3X \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) & = \int d^3X \left[\gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\eta}) (\nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times (\vec{\eta} \times \vec{B}_0)) \cdot (\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)) \right. \\ & \quad \left. + (\nabla \cdot \vec{\eta}) (\vec{\xi} \cdot \nabla P_0) - \frac{1}{4\pi} (\vec{\eta} \times (\nabla \times \vec{B}_0)) \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \right] \\ & \quad + \int d^3X_V (\nabla \times \delta \vec{C}) \cdot (\nabla \times \delta \vec{A}) \\ & \quad + \int dS \eta_{\perp} \xi_{\perp} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0V}^2}{8\pi} - \frac{B_{0P}^2}{8\pi} - P_0 \right) \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

(B.9) es simétrico con respecto a $\vec{\xi}$ y $\vec{\eta}$, por tanto se cumple (B.2) y $\vec{F}(\vec{\xi})$ es Hermitiano.

BIBLIOGRAFIA

- Apostol Tom M., Calculus, N.Y. 1969, Wiley. (Vol. II).
- Arfken G., Mathematical Methods for Physicists, United States of America, 1985. Academic Press.
- Bateman Glenn, MHD Instabilities, Cambridge, 1978, The MIT Press.
- Boley Forest I., Plasmas en el Laboratorio y en el Cosmos, México, 1968, Reverté, (Van Nostrand Momentum Books).
- Boyd T.J.M., Sanderson J.J., Plasma Dynamics, E.E.U.U., 1969, Thomas Nelson and Sons.
- Callen H.B., Thermodynamics, N.Y., 1960, Wiley.
- Cambel A.B., Plasma Physics and Magnetofluid Mechanics, N.Y., 1963, Mc. Graw Hill.
- Cap Ferdinand F., Handbook on Plasma Instabilities, United States of America, 1976, Academic Press. (Vol. I).
- Currie I.G., Fundamental Mechanics of Fluids, N.Y., 1974, Mc. Graw Hill.
- Courant Richard, Fritz John, Introduction to Calculus and Analysis, N.Y., 1974, Wiley, (Vol. II).
- Chapman S., Cowling T.G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge, 1953, University Press.
- Chen Francis F., Plasma Physics and Controlled Fusion, United States of America, 1984, Plenum Press, (Vol. I).
- Drummond James ., Plasma Physics, N.Y., 1961, Mc. Graw Hill.
- Dungey J.W., Electrodinamique Cosmique, Paris, 1962, Monographies Duncd.
- Dwight R. Nicholson, Introduction to Plasma Theory, United States of America, 1983, Wiley.
- Frodorov N.N., Fundamentos de Electrodinámica, U.R.S.S., 1982, MIR (Moscu).

- Ginzburg V.I., Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma, N.Y., 1961, Gordon and Breach.
- Hide R., Roberts P.H., Advances in Applied Mechanics, N.Y., 1962, Academic Press.
- Hinchey Fred A., Vectores y Tensores, México, 1979, Limusa.
- Hoel Paul G., Introducción a la Estadística Matemática, España, 1980. Ariel.
- Jackson John D., Classical Electrodynamics, E.E.U.U., 1965, Wiley.
- Kröll Nicholas A. Trivelpice Alvin W., Principles of Plasma Physics, Tokyo Japan, 1973, Mc. Graw Hill.
- Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A., Magneto-hidrodinámica, Netherlands, 1965, Addison-Wesley.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., The Classical Theory of Fields, Great Britain, 1951, Pergamon Press.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., Statistical Physics, Great Britain, 1958, Pergamon Press.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., Thermodynamics, Great Britain, 1958, Pergamon Press.
- Landau L.D. Lifshitz E.M., Electrodynamics of Continuous Media, Great Britain, 1964, Pergamon Press, (Vol. 8).
- Landau L.D. Lifshitz E.M., Fluid Mechanics, Great Britain, 1959, Pergamon Press.
- Leontovich M.A., Reviews of Plasma Physics, E.E.U.U., 1967, Consultant Bureau.
- Linhart J.G., Plasma Physics, Amsterdam, 1960, North Holland.
- Mc. Quistan Richard B., Campos Escalares y Vectoriales, México, 1969, Limusa.
- Melrose D.B., Instabilities in Space and Laboratory Plasmas, Cambridge, 1986, Cambridge University Press.
- Melrose D.B., Plasma Astrophysics, Great Britain, 1980, Gordon and Breach.
- Mikhailovskii A.B., Theory of Plasma Instabilities, N.Y., 1974, Consultants Bureau, (Vol. I, II).

- Nieto S. José, *Introducción a los Espacios de Hilbert*, México, 1978, G.S.D.A.S.
- Nishida Atsuhiko, *Magnetospheric Plasma Physics*, Japan, 1961, Center for Academic Publications.
- Piddington J.H., *Cosmic Electrodynamics*, E.E.U.U., 1969, - Wiley, (Vol. XXIII).
- Reitz, Milford, Christy, *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, México, 1984, Fondo Educativo Interamericano.
- Roberts F.H., *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Great Britain, 1967, Longmans.
- Relf K.M. Landshoff, *The Plasma in a Magnetic Field*, California State, 1958, Stanford University Press.
- Rosenbluth M.N., Spitzer L., *Handbook of Plasma Physics*, N.Y., 1968, North Holland, (Vol. I).
- Sagel L.A., *Mathematics Applied to a Continuum Mechanics*, United States of America, Academic Press.
- Smith George, *Physics of High Temperature Plasmas*, E.E.U.U., 1979, Academic Press.
- Spies G.O., *Stability Criteria and the Maximum Growth Rate in Magnetohydrodynamics*, *The Physics of Fluids*, 1974, Vol. 17, Num11.
- Spitzer L., *Physics of Fully Ionized Gases*, N.Y., 1962, Interscience Publishers.
- Stacey Weston M., *Fusion Plasma Analysis*, E.E.U.U., 1981, Wiley.
- Theory of Plasmas*, The Lebedev Physics Institute, 1975, Academician D.V. Skobel'tsyn, (Vol. 61).
- Thompson, W.B., *An Introduction to Plasma Physics*, Massachusetts, 1964, Wesley.
- Wanysness Roald K., *Campos Electromagnéticos*, México, 1985, Limusa.
- Wentzel Donat G., Tidman Derek A., *Plasma Instabilities in Astrophysics*, E.E.U.U., 1969, Gordon and Breach.
- Wu Ta-You, *Kinetic Equations of Gases and Plasma*, N.Y., 1966, Addison-Wesley.