Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# Clasificación de Gérmenes de Codimensión $\leq 5$

Para obtener el título de

M A T E M A T I C O

Presenta

Luis I. Hernández de la Cruz

Dirigido por

Dr. Alberto León Kushner Schnur

México, D. F. 1988.

Indice


| | | Página |
|---|---|---|
| Introducción | | 7- 9 |
| I | Determinación de Gérmenes | 10-96 |
| II | Determinación de Gérmenes de Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ | 97-108 |
| III | Codimensión | 109-138 |
| IV | Clasificación | 139-207 |
| V | Teorema de Preparación | 208-299 |
| VI | Desdobles | 300-366 |
| VII | Gérmenes | 367-408 |
| Bibliografía | | 409 |

Introducción.

Un método usual en las Matemáticas, es la clasificación de objetos con determinadas características; en esta tesis se ofrece al lector una forma de clasificar, mediante ciertas clases de equivalencia, las funciones de clase $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ en base a tres conceptos fundamentales: Determinación, Codimensión e Ideal Jacobiano, los cuales están definidos en términos de la expansión en Serie de Taylor que poseen los gérmenes, siendo estos últimos clases de equivalencia de funciones. Como resultado de esta clasificación se obtienen las catástrofes elementales, estas son cierto tipo de singularidades de funciones suaves de $\mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^r$ en $\mathbb{R}$ llamadas desdobles.

Los desdobles de algunos gérmenes polinomiales, entre otros : $X^3$, $X^4$ , $X^5$ , $X^6$ , $X^2Y + Y^4$ , le sugirieron a René Thom que para $r \leq 4$ las catástrofes elementales podrían ser finitamente clasificadas; esta conjetura la hizo por el año de 1963.

La clasificación local de funciones de clase $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no ofrece dificultad alguna, como puede apreciarse en la primera parte del capítulo I.

En tanto que la clasificación de gérmenes de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 2)$ de gérmenes finitamente determinados se reducen a simples proyecciones; la prueba de esta aseveración precisa de los conceptos que se introducen en el capítulo I, y de algunos otros resultados adicionales; este será el tema a desarrollar en el capítulo II.

Como el espacio vectorial de funciones de clase $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ tiene dimensión infinita, es preciso transformar las funciones a gérmenes y, a través de la determinación, considerar a éstos en el espacio de K-jets, el cual tiene dimensión finita, logrando con ello hacer la clasificación en un espacio de dimensión finita en vez de hacerlo en uno de dimensión infinita. Este será el objetivo de la segunda parte del capítulo I y los capítulos III y IV.

El resultado más importante del capítulo I se debe a Mather quien dio una versión algebraica para la determinación de gérmenes. Este teorema proporciona una condición necesaria y una suficiente para saber cuando un germen es finitamente determinado; este resultado se utiliza en el capítulo III para demostrar que para aquellos gérmenes de determinación finita, la determinación de un germen disminuída en dos unidades es menor o igual que la codimensión de dicho germen, de ahí que solamente se analicen aquellos gérmenes en el espacio de 7-jets de codimensión menor o igual que cinco, ya que los 7-jets de codimensión mayor o igual que seis forman una variedad cerrada algebraica $\leq$ en el espacio de 7-jets, $J^7$. Luego, la clasificación que aparece en el capítulo IV se obtiene de la partición inducida por la codimensión en $J^7-\leq$.

El capítulo VI estudia los desdobles, los cuales resultan de vital importancia en la demostración de la conjetura de René Thom, ésta fue probada años más tarde, pues en el momento en que fue planteada no existía suficiente herramienta matemática para hacerlo. El resultado más importante de este capítulo es el que asegura la existencia de un isomorfismo entre dos desdobles transversales; para la demostración de este resultado fue necesaria una versión $C^{\infty}$ del Teorema de Preparación de Weierstrass (hecha por Malgrange en 1965) que a su vez es una consecuencia del Teorema de División Polinomial; la solución a este último problema, para el caso complejo, ya era conocida a finales del siglo pasado.

Finalmente, el capítulo VII culmina con la clasificación de catástrofes elementales que corresponden a los gérmenes de codimensión menor o igual que cinco. Para conseguir este objetivo se analizarán exclusivamente los desdobles universales con $r$ parámetros, donde $r \leq 5$, ya que de este tipo de desdobles es posible construir los gérmenes de catástrofes; de la clasificación de estos últimos se obtienen las once catástrofes elementales mencionadas al final del capítulo VII.

La mayor parte de este trabajo está basado en la revisión de un artículo denominado Clasificación de Catástrofes elementales de Codimensión menor o igual que cinco; revisión hecha en 1975 por Christopher Zeeman y David Trotman, escrito original del primero de ellos.

El resto de la información incluída en esta tesis, se extrajo de los textos que aparecen en la bibliografía.

Aquellos resultados que no corresponden a conocimientos básicos de Algebra, Cálculo en Varias Variables y Topología Diferencial que aquí se presentan, se formulan y se demuestran en cada uno de los capítulos en donde son necesario.

Tesis dirigida por: Dr. Alberto León Kushner Schnur.

# C A P I T U L O 1

## DETERMINACION

El concepto <u>Determinación de Gérmenes</u> surge de la relación
que existe entre aquellas funciones que tienen en común "una cier-
te finita" de su expansión en Serie de Taylor y difieren entre sí
por un difeomorfismo en el dominio, los gérmenes son clases de e-
quivalencia de funciones y el conjunto de éstos tiene una estruc-
tura de espacio vectorial de dimensión infinita, más aún, de un
anillo local (Proposición 1.1 y Teorema 1.3) y a través de la re-
lación de equivalencia que proporciona la "parte finita" de la ex
pansión en Serie de Taylor, es posible reducir gérmenes a k-jet
de gérmenes: estos últimos pertenecen a un espacio vectorial de
dimensión finita (Teorema 1.9).

Este será el objetivo de la primera parte del Capítulo 1
en tanto que la segunda parte, está dedicada a la formulación de
3 criterios algebráicos, con los cuales es posible saber que gér-
menes son finitamente determinados, dichos resultados están con-
tenidos en: Teorema 1.19 (Teorema de Mather); Corolario 1.22 y
el Teorema 1.24 (Teorema de Stefan).

La determinación de gérmenes de funciones de clase
$C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ es el tema a desarrollar en el siguiente capítu-
lo.

Antes de entrar propiamente al desarrollo del tema que corresponde a éste capítulo, se hará la clasificación local de las funciones de clase $C^{\infty}$ con dominio y contradominio en el conjunto de los numeros reales.

## Clasificación Local de Funciones de Clase $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

La clasificación de funciones de clase $C^{\infty}$ alrededor de cero con valores y variable real, no ofrece dificultad alguna, pues únicamente se requiere saber como es la expansión en Serie de Taylor de dichas funciones alrededor del cero para poder determinar, por un lado, aquellas funciones que difieren por un difeomorfismo, en el dominio de un polinomio de la forma $C \pm X^{k}$ para cierto número natural K y alguna constante C ; y por otra parte, a aquellas funciones cuya expansión en Serie de Taylor se anula en cero, a éstas últimas se les conoce como Funciones Planas.

Con respecto a las funciones que no se anulan al hacer su desarrollo en Serie de Taylor en cero se les clasifica de la siguiente manera:

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^{\infty}$ de acuerdo al Teorema de Taylor, para toda X en una vecindad del cero se tiene
$f(x)= f(0)+ f'(0)\dfrac{x}{1!} + \dots + f^{(n)}(0)\dfrac{x^{n}}{n!} + \dots$, sin pérdida de generalidad puede suponerse que $f(0)=0$, ya que si $f(0)\neq 0$ al clasificar la función $f-f(0)$, que evidentemente se anula en cero, automáticamente se estará clasificando a la función f: es decir, si $f-f(0)$ y $\pm X^{k}$ difieren por un difeomorfismo $\phi$ en el dominio para algún número natural K, entonces $(f-f(0))\circ\phi = \pm X^{k}$ pero

$(f-f(0))\circ\phi = f\circ\phi - f(0)\circ\phi = f\circ\phi - f(0)$ de aquí que

$(f-f(0))\circ\phi + f(0)= f(0) \pm X^{k}$ es decir $f\circ\phi = f(0) \pm X^{k}$ esto significa que f y $f(0) \pm X^{k}$ difieren entre si por un difeomorfismo.

Ahora bien, si la expansión en Serie de Taylor de la función $f$ no se anula en cero y $f(0)=0$ entonces existe un número natural $K$ con las siguientes características $f^{(k)}(0)\neq 0$ y $f^{(n)}(0)=0 \quad \forall\ n < k$ : en consecuencia, para toda $X$ en una vecindad del cero se tiene

$$f(x)= f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(k+1)}(0)\frac{x^{k+1}}{k+1!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \dots$$

Esta última expresión puede escribirse de la forma

$$f= x^k g \quad \text{donde} \quad g= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + f^{(k+1)}(0)\frac{x}{k+1!} + \dots + f^{(n)}(x)\frac{x^{n-k}}{n!} + \dots$$

obsérvese que, la función $g$ es de clase $C^\infty$ y además, no se anula en cero ya que $f^{(k)}(0)\neq 0$.

Defínase ahora la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\phi(x) = \left\{\begin{array}{lll} x\sqrt[k]{g(x)} & \text{si} & g>0 \\ x\sqrt[k]{-g(x)} & \text{si} & g<0 \end{array}\right. \quad \text{en alguna vecindad del cero}$$

La función $\phi$ definida de esta manera es de clase $C^\infty$ porque es el producto de 2 funciones de clase $C^\infty$, además, por el Teorema de la Función Inversa existe una vecindad alrededor del cero en la cual $\phi$ es un difeomorfismo local, ya que

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \sqrt[k]{\pm g(x)} + x \pm g'(x)\left(\pm g(x)\right)^{\frac{1}{k}-1}$$

en consecuencia, $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(0) = \sqrt[k]{\pm g(0)} \neq 0$

; considérese la composición $x^k \circ \phi$ esto es,

$$(x^k \circ \phi)(x) = \left(x\,(\pm g(x))^{\frac{1}{k}}\right)^k = x^k\left(\pm g(x)\right) = \pm x^k g(x) = \pm f(x)$$

Como puede apreciarse $f = \pm x^k \circ \phi$, esto significa que efectivamente $f$ y el polinomio $\pm x^k$ difieren localmente por un difeomorfismo en el dominio; por lo tanto, la clasificación de las funciones de clase $C^\infty$ de variable y valores reales se reduce a:

1.- Las Funciones Planas

2.- Funciones que difieren por un difeomorfismo de un polinomio de la forma $C \pm x^k$ para algún número natural K, donde $C$ es la constante que se obtiene al evaluar la función en cero.

## Determinación de Gérmenes de Funciones de Clase $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

### Definición

Sea $C^{\infty}(M,Q)$ el conjunto de funciones $C^{\infty}$ de $M$ en $Q$, donde $M$ y $Q$ son variedades $C^{\infty}$. Si $x \in M$ y si las funciones $f$ y $g$ pertenecen a $C^{\infty}(M,Q)$, entonces se dice que $f$ es equivalente a $g$ en $x$, simbólicamente $f \equiv g$ en $x$, si existe una vecindad $N$ de $x$ en $M$ tal que las restricciones en dicha vecindad de las funciones $f$ y $g$ coinciden: esto es $f/N = g/N$.

La definición anterior nos proporciona una relación de equivalencia en $C^{\infty}(M,Q)$. En efecto, la reflexividad y la simetría son una consecuencia inmediata de la definición anterior, por esta razón, únicamente se exhibe la transitividad.

Supóngase que $f$, $g$ y $h$ son funciones en $C^{\infty}(M,Q)$ tal que $f \equiv g$ en $x$ y $g \equiv h$ en $x$, entonces por definición existen vecindades $N_1$ y $N_2$ de $x$ tales que $f/N_1 = g/N_1$ y $g/N_2 = h/N_2$; sea $N = N_1 \cap N_2$ entonces $N$ resulta ser una vecindad de $x$, ya que ambas son vecindades de $x$. Como $N \subset N_1$ y $N \subset N_2$ entonces $f/N = g/N$ y $g/N = h/N$, por lo tanto $f/N = h/N$. Es decir, $f \equiv h$ en $x$.

**Notación.** "El germen de $f$ en $x$" será la clase de equivalencia de $f$ en $x$ y se denotará como $[f]_x$. 1.0(1)

Generalmente se escribirá $[f]$ en vez de $[f]_x$, si es que esto no da lugar a confución.

Nuestro interés es investigar los gérmenes de funciones de $M$ en $Q$, en donde $M$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $Q$ subconjunto $\mathbb{R}^p$ de ahí que estaríamos trabajando en: un subconjunto de

$$C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ es } C^{\infty} \right\} \qquad 1.0(2)$$

**Proposición 1.1**

Sea $E_n$ el conjunto de gérmenes en cero de funciones $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Entonces, $E_n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión infinita; más aún, $E_n$ es un anillo conmutativo con 1. Es decir, $E_n$ es una $\mathbb{R}$-álgebra.

**Demostración.** La suma, multiplicación y la multiplicación por escalares están inducidas puntualmente por la estructura de $\mathbb{R}$. Como se muestra a continuación:

Sean $[f]$ y $[g]$ dos gérmenes en $E_n$ entonces definimos:

$$1.- \ [f] + [g] = [f+g] \qquad 1.1(1)$$
$$2.- \ [f] \cdot [g] = [f \cdot g]$$
$$3.- \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha[f] = [\alpha f]$$

Estas tres operaciones están bien definidas pues son independientes de los representantes elegidos. En efecto, supóngase que: $f$ y $f'$ son dos representantes de $[f]$ y $g$ y $g'$ representantes de $[g]$; como $f$, $f'$, $g$, $g'$ pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ entonces $f+g$, $f'+g'$, $f \cdot g$, $f' \cdot g'$, $\alpha f$ y $\alpha' f$ son funciones que pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, como $f$ y $f'$ son equivalentes en cero, entonces por definición si existe una vecindad $N_1$ del cero tal que $f/N_1 = f'/N_1$, luego entonces $\alpha f(x) = \alpha f'(x)$ $\forall x \in N_1$ esto es 3- ; $[\alpha f] = [\alpha f']$ ó sea $\alpha[f] = \alpha[f']$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

De ahí que $[\alpha f] \in \mathcal{E}_n$.

Considérense $f$ y $f'$ como en el párrafo anterior y supóngase que $g$ y $g'$ son equivalentes en cero, entonces sí existe

$N_2(0)$ tal que $g(x) = g'(x) \quad \forall x \in N_2$. Como antes, sea $N = N_1 \cap N_2$, sabemos que $N$ es una vecindad del cero y además $N \subset N_1$ y $N \subset N_2$, de donde $\forall x \in N$ tenemos $f(x) = f'(x)$ y $g(x) = g'(x) \quad \forall x \in N$. Luego entonces $f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$ y $f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in N$. En consecuencia: $(f+g)/N = (f'+g')/N$ y $(fg)/N = (f'g')/N$

Por consiguiente

1.- $[f+g] = [f'+g']$
2.- $[f \cdot g] = [f' \cdot g']$

Por lo tanto $[f+g]$ y $[f \cdot g] \in E_n$.

El germen en cero de la función idénticamente cero, es el neutro para la adición; en tanto que el germen en cero de la función constante uno es el neutro para la multiplicación y $-[f] = [-f]$ por 3 de 1.1(1). La existencia del inverso multiplicativo de cualquier germen $[f] \in E_n$, para el cual $f(0) \neq 0$, se justifica en la prueba del Teorema 1.3 (véase justificación de 1.3(2).

Las propie_dades para la multiplicación y adición entonces están inducidas puntualmente por la estructura de $\mathbb{R}$. Además debe observarse que $[f] + [g]$ y $[f] \cdot [g]$ están definidas en la intersección de las vecindades donde f y g están definidas, en consecuencia, $E_n$ en verdad es una $\mathbb{R}$-álgebra.

Ahora bien, para mostrar que $E_n$ visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es de dimensión infinita basta con exhibir la independencia lineal de un conjunto infinito de vectores en $E_n$. Para ello considérense los gérmenes en cero de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$: $e^{x_1}, e^{2x_1}, \ldots, e^{sx_1}$ $(s \in \mathbb{N})$. Este conjunto está formado por vectores propios de $E_n$ con valores propios distintos entre sí bajo el operador lineal.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : E_n \longrightarrow E_n$$ (ver Definición en 1.2(2).

En efecto, trabajando con representantes de los gérmenes tenemos: $\dfrac{\partial(e^{sx_1})}{\partial x_1} = se^{sx_1} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[e^{sx_1}\right] = s\left[e^{sx_1}\right]$

es decir $\left[e^{sx_1}\right]$ es un vector propio con valor propio S de $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ consecuentemente el conjunto $\left[e^{x_1}\right], \left[e^{2x_1}\right], \ldots, \left[e^{sx_1}\right]$ es un conjunto infinito de vectores linealmente independientes contenido en $E_n$. Por lo tanto, la dimensión de $E_n$ es infinita.

Observación

A fin de introducir la noción de composición de gérmenes, es necesario extender el concepto de gérmenes de funciones $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$.

Definición

Si $f$ es una función $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ entonces $f = (f_1, \ldots, f_p)$ y se define el germen de $f$ en cero como:

$$[f] = ([f_1], [f_2], \ldots, [f_p]) \qquad 1.1(2)$$

Es claro que la vecindad $N(0)$ en la cual $[f]$ está definida, es la intersección $N_1 \cap N_2 \cap, \ldots, \cap N_p$ donde $N_i$ es una vecindad del cero en la cual $[f_i] \in E_n$ está definida $i=1, \ldots, p$.

De aquí que dos funciones $g$ y $h$ ambos en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ serán equivalentes en cero sí y sólo sí $g_i$ equivalente con $h_i$ en cero para $i=1, \ldots, p$.

Corolario 1.2

Sea $E_{(n,p)}$ el conjunto de gérmenes en cero de funciones $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^p$ entonces $E_{(n,p)}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión infinita.

Demostración

Las operaciones que hacen a $E_{(n,p)}$ un espacio vectorial están ind ucidas coordenada a coordenada por las operaciones de $E_n$, el cual ya sabemos que es espacio vectorial. (ver 1.1(1) en la prueba de proposición 1.1)

Por ésta razón únicamente nos limitaremos a exhibir un isomorfismo entre $E_{(n,p)}$ y $E_n \times E_n \times \ldots \times E_n$ (p-factores).

Tal isomorfismo está dado por la función que asocia $([f_1], [f_2], \ldots, [f_p]) \longrightarrow [f]$ donde $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

Linealidad:

$$[f]+[g] = ([f_1], \ldots, [f_p]) + ([g_1], \ldots, [g_p]) =$$
$$= ([f_1]+[g_1], \ldots, [f_p]+[g_p]) = ([f_1+g_1], \ldots, [f_p+g_p]) =$$
$$= [f+g]$$

Si $s \in \mathbb{R}$ entonces $s([f] = s([f_1], \ldots, [f_p]) =$
$= (s[f_1], \ldots, s[f_p]) = ([sf_1], \ldots, [sf_p]) = [sf]$.

Esto prueba la linealidad.

Ahora el núcleo consta exclusivamente del germen en cero de la función idénticamente cero; en efecto, si: $([f_1], \ldots, [f_p]) \longrightarrow [0]$ en $E_{(n,p)}$ esto implica que $[f_i] = [0]$ en $E_n$ $i=1, \ldots, p$. Por lo tanto, nuestra función es inyectiva, también es suprayectiva ya que:

$\forall [f] \in E_{(n,p)}$ se tiene $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ si sólo si, $f_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $i=1, \ldots, p$ y $f = (f_1, \ldots, f_p)$

Esto significa que $([f_1],\ldots,[f_p]) \longrightarrow [f]$. De ahí que $E_{(n,p)}$ y $E_n \times\ldots\times E_n$ ($p$-factores) sean isomorfos. Como cada uno de los $p$ factores en el producto cartesiano es de dimensión infinita así mismo lo es $E_{(n,p)}$. Lo que completa la prueba.

Definición

Si $[g] \in E_{(n,q)}$ y $[h] \in E_{(q,p)}$ entonces se define: la composición de éstos gérmenes como

$$[h] \circ [g] = [h \circ g] \qquad 1.2(1)$$

Esta composición sólo tiene sentido para aquéllos gérmenes en cero $[g]$ tal que $g(0)=0$.

Observación

$[h \circ g]$ es un germen en $E_{(n,p)}$ ya que $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$ y $h \in C^\infty(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ entonces la composición $h \circ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

La composición de gérmenes es independiente de la elección de los representantes. En efecto, $h \equiv h'$ en 0 y $g \equiv g'$ en 0, entonces existen vecindades $N_1$ y $N_2$ del 0 en $\mathbb{R}^q$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente tal que $h(y)=h'(y)$ $\forall\, y \in N_1$ y $g(x)=g'(x)$ $\forall\, x \in N_2$. Ahora bien, $g$ y $g'$ son continuas pues ambas son funciones $C^\infty$; en consecuencia, existe una vecindad $N$ del 0 en $\mathbb{R}^n$ tal que $N \subset N_2$ y $g(x)=g'(x) \in N_1$ $\forall\, x \in N$ y $g(N) \subset N_1$, $g'(N) \subset N_1$, además por hipótesis $g(0)=g'(0)=0 \in N_1$. Por otra parte, $h$ y $h'$ coinciden en $N_1$; luego $\forall\, x \in N$ se tiene $h(g(x)) = h(g'(x))$ $\therefore$ $[h \circ g] = [h' \circ g']$

Definición

Para todo germen $[f] \in E_n$ y $\forall\, i=1,\ldots,n$, definimos el operador $\dfrac{\partial}{\partial x_i} : E_n \longrightarrow E_n$ como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[f] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f\right] \qquad 1.2(2)$$

Nuevamente esta definición es independiente de la forma de elegir los representantes. Esto es, si f y g son equivalentes en cero entonces por definición existe una vecindad N en la cual f y g coinciden y por tanto:

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ en dicha vecindad, luego entonces:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]$$

Ahora bien $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es un germen en $E_n$ ya que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. $\therefore$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\forall$ $i=1, \ldots, n$.

Esto nos permite aplicar el operador $\frac{\partial}{\partial x_j}$ a los elementos de $E_n$ tantas veces como lo deseemos y por consiguiente expresar la derivada de cualquier orden de un germen de $E_n$ en término de sus derivadas parciales: es decir; Sea $\alpha$ un multiíndice con n-coordenadas; esto es, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donde $\alpha_i$ es un entero no negativo $\forall$ $i=1, \ldots, n$. Denótese

1.- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$

2.- $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ 1.2(3)

3.- Para toda x en $\mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

4.- $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_n^{\alpha_n}}$

Entonces la derivada de orden $|\alpha|$ del germen $[f] \in E_n$, se expresa como:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}[f] = \left[\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}(f)\right] \qquad 1.2(4)$$

Observación

Las definiciones anteriores muestran de que manera se pueden extender los conceptos y resultados que son válidos para funciones $C^{\infty}$ a gérmenes en el anillo $E_n$ y a los gérmenes en el espacio vectorial $E_{(n,p)}$. Así por ejemplo: Cuando se diga que un germen $\eta$ es $C^{\infty}$, en realidad nos estaremos refiriendo a que cualesquiera de sus representantes es $C^{\infty}$. 1.2(5)

Definición

Si A es un anillo conmutativo con 1 entonces un ideal M en A es maximal si $M \neq A$ y no existe ningún ideal N tal que $M \subset N \subset A$ (las inclusiones en sentido estricto).

Definición

Un anillo local es un anillo conmutativo con 1, el cual tiene un único ideal maximal.

Teorema 1.3

$E_n$ es un anillo local cuyo ideal maximal, al cual denotaremos $M_n$, está formado por los gérmenes en cero de aquellas funciones en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que se anulan en cero.

Demostración

Probaremos las dos siguientes afirmaciones:

$$M_n = \left\{ [f] \in E_n \;/\; f(0)=0 \right\} \text{ es un ideal de } E_n \qquad 1.3(1)$$

Mn es maximal y es único con ésta propiedad

Justificación de 1.3(1).- Es claro que el germen en cero de la función idénticamente cero pertenece a Mn.

Ahora supóngase que $[f] \in Mn \Rightarrow f(0)=0$ y $-f(0)=0$

luego entonces $[-f] = -[f]$ también pertenece a Mn

Suponer que $[f]$ y $[g] \in Mn$ entonces $f(0)=0$ y $g(0)=0$

de donde $(f+g)(0)=0$ en consecuencia $[f+g] = [f] + [g]$ es

en Mn, esto prueba que Mn es un subgrupo aditivo de $E_n$.

Para ver que Mn es un ideal, considérense $[h] \in E_n$ y

$[f] \in Mn$ entonces $[f.h]$ es por definición $[f] . [h]$ pero

$(f.h)(0)= f(0). h(0)= 0.h(0)=0$ $\therefore$ $[f] . [h] \in Mn$, en consecuencia Mn es realmente un ideal del anillo

Justificación de 1.3(2).- Para exhibir la maximalidad de Mn bastará con mostrar que $(Mn)^c$ consta exclusivamente de unidades.

En efecto, supóngase que $[f] \notin Mn$ entonces $f(0)\neq 0$ pero

como $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ f es diferenciable y por tanto f es continua, entonces existe una vecindad N de 0 tal que $\forall x \in N$, $f(x)\neq 0$.

Considérese el germen de f en N, por construcción éste germen es distinto de cero en N, razón por la cual podemos considerar el germen de la función $f^{-1}= 1/f$, la cual está definida en la misma vecindad N, y por tanto $[f] . [f^{-1}]$ es el germen de la función constante 1. Lo que prueba que el germen de f es una unidad, esto es, $(Mn)^c$ contiene solamente unidades; por lo tanto, Mn es maximal en $E_n$.

Unicidad: Supóngase que Mn y Mn' son ideales maximales de $E_n$ donde:

$$Mn = \left\{ [f] \in E_n \;\middle|\; f(0)=0 \right\}$$

Mostraremos que Mn=Mn'. En efecto, $Mn \cap Mn' \neq \phi$ ya que ambos son ideales y en particular son subespacios vectoriales entonces al menos contienen el germen en cero de la función idénticamente cero.

Afirmamos que Mn' no contiene unidades, pues de lo contrario si $[f] \in Mn'$ fuese una unidad tendríamos que $[f] \cdot [g] = [1]$ para algún $[g] \in E_n$. Esto nos conduciría a concluir que el ideal generado por el germen $[f]$, el cual está contenido en Mn', coincide con el anillo $E_n$: que claramente contradice la hipótesis inicial, a saber $Mn' \neq E_n$ ya que Mn' es maximal. Por consiguiente Mn' no contiene unidades, luego entonces $Mn' \subset Mn$ y por lo tanto $Mn = Mn'$.

Teorema 1.4

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al origen, si f es una función en $C^\infty(U, \mathbb{R})$ entonces existen n-funciones $g_1, \dots, g_n$ en $C^\infty(U, \mathbb{R})$, que satisfacen

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, g_i(x) \qquad \forall\, x \in U \tag{1.4(1)}$$

donde $x_i$ es la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que asocia $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$.

Demostración

Considérese la función $g: [0,1] \times U$ definida como $g(t,x) = f(t.x)$ esta función es $C^\infty$, pues es composición de funciones $C^\infty$, entonces derivando con respecto a t y aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$g'(t,x) = f'(tx)\frac{\partial(tx)}{\partial t} = \left(\frac{\partial f(tx)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(tx)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, x_i$$

De acuerdo al Teorema Fundamental del Cálculo

$$f(x)-f(0)=g(1,x)-g(0,x)=\int_0^1 g'(t,x)\,dt=\int_0^1 f'(tx)\,x\,dt=$$

$$=\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, x_i\, dt$$

Ahora, utilizando la linealidad de la integral y factorizando $x_i$ ya que no es función de $t$ obtenemos:

$$f(x)-f(0)=\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt$$

Por último defínase $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como:

$$g_i(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt \qquad i=1,\ldots,n$$

Es claro que $g_i(0)=\int_0^1 \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}\,dt=\frac{\partial f(0)}{\partial x_i}\int_0^1 dt=\frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$

Como $f$ es $C^\infty$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ también es $C^\infty$, lo que garantiza que $g_i$ sea $C^\infty$. Por lo tanto $f(x)-f(0)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,x_i$.

$\square$

Corolario 1.5

El ideal Mn está finitamente generado por los gérmenes en cero de $x_1, \ldots, x_n$ donde $x_i$ es la proyección i-ésima de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Demostración

En virtud del Teorema 1.4 tenemos $\forall$ f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
se tiene $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(x)$.

Pero si el germen de f pertenece al ideal Mn (ver 1.3(1), entonces $f(0)=0$ de ahí que $f(x) = \sum_{i} x_i\, g_i(x)$, es decir,

$$[f] = \sum_{i=1}^{n} [x_i][g_i] \qquad 1.5(1)$$

donde $[g_i] \in E_n$ y $[x_i]$ es el germend de la proyección i-ésima de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto Mn está finitamente generado por $[x_1], \ldots, [x_n]$. □

Notación

Simplificamos la notación de la siguiente manera $E = E_n$, $M = Mn$, además, a los gérmenes de $E_n$ los denotaremos con las letras griegas (las más usuales serán: $\gamma, \eta, \mu, \nu, \xi, \phi$) usaremos indistintamente el símbolo $[x_i]$ y $x_i$ para representar el germen en cero de la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que asocia $(x_1, \ldots, x_n) \to x_i$ y nos limitaremos a trabajar con representantes de los gérmenes cuando el caso lo amerite. 1.5(2)

Corolario 1.6

El ideal $M^k$ está generado por los gérmenes en cero de la forma $[x^\alpha]=[x_1^{\alpha_1}]\cdot\ldots\cdot[x_n^{\alpha_n}]$ donde $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k$. En consecuencia $M^k$ es un ideal finitamente generado.

Demostración

De acuerdo al Corolario 1.5 podemos elegir como generadores del ideal $M^k$ a los productos de k-generadores de $M$ y en consecuencia es de la forma $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$. Ahora bien $\forall\, i=1,\ldots,n$ sea $\alpha_i$ el número de factores $x_i$ que aparecen en la expresión anterior. Luego entonces, como el anillo $E$ es conmutativo se tiene que $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k} = x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ y claramente $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k$.

Esto significa que $x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$ pertenece al ideal generado por los gérmenes de la forma: $x^\alpha$ donde $\alpha_1+\ldots+\alpha_n = k$. □

Observación 1.6(1)

$$M \supset M^2 \supset\ldots\supset M^{k+1} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

La justificación de esta afirmación es inmediata, ya que los generadores de $M^{k+1}$ son de la forma: $[x^\beta]=[x_1^{\beta_1}]\cdot\ldots\cdot[x_n^{\beta_n}]$ donde $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ y $\beta_1+\ldots+\beta_n = k+1$. Como $k\geq 1$ entonces existe un índice i entre 1 y n para el cual $\beta_i \geq 1$, luego entonces, $[x^\beta]=[x_i][x^\alpha]$ donde $\alpha$ es el multiíndice que satisface:

$$\alpha_j = \left\{ \begin{array}{l} \beta_j \text{ si } i\neq j \\ \hline 1-\beta_j \text{ si } i=j \end{array} \right\}.$$

Es claro que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$; por lo tanto $[x^\beta] = [x_i][x^\alpha]$ pertenece la ideal $M^k$.

Proposición 1.7

Un germen $\eta$ está en $M^{k+1}$ si, sólo si, $\eta(0)=0$ " $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^\alpha}(0)=0$ $\forall$ multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha| \le k$.

Demostración

Sea $\eta$ un germen en $M^{k+1}$ por 1.6(1) $M^{k+1} \subset M$ entonces, $\eta(0)=0$. Por el Corolario 1.6, $\eta = \sum_\beta \eta_\beta x^\beta$ donde $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_1 + \ldots + \beta_n = k+1$ y $\eta_\beta \in \mathcal{E}$. Como $\eta_\beta$ y $x^\beta$ son $C^\infty$ entonces de la linealidad del operador $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ se tiene que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\sum_\beta \eta_\beta x^\beta = \sum_\beta \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\eta_\beta x^\beta)$$

Ahora bien

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\eta_\beta x^\beta) = \sum_\gamma \binom{\alpha}{\gamma} \frac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial x^{\alpha-\gamma}}\eta_\beta \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} x^\beta \qquad 1.7(1)$$

Donde los multiíndices $\gamma$ son tales que $0 \le \gamma_i \le \alpha_i$ $(i=1, \ldots, n)$ y $\binom{\alpha}{\gamma}$ es el coeficiente multinomial que depende de $\alpha$ y $\gamma$. Por otra parte,

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma}}(x^{\beta})=\begin{cases}\dfrac{\beta_1!}{(\beta_1-\gamma_1)!}\cdot\ \cdot\dfrac{\beta_n!}{(\beta_n-\gamma_n)!}\,x^{\beta-\gamma} & \text{si } \gamma_i\le\beta_i \quad \forall\, i=1,\dots,n\\ 0 \text{ si } \gamma_i>\beta_i \text{ para alguna } i & i=1,\dots,n\end{cases}$$

Luego entonces

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma}}x^{\beta}(0)=\begin{cases}\beta! & \text{si } \gamma=\beta\\ 0 & \text{si } \gamma\neq\beta\end{cases} \qquad 1.7(2)$$

Por consiguiente si $|\alpha|\le k$ entonces

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0)=\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\binom{\alpha}{\gamma}\frac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial x^{\alpha-\gamma}}\eta_{\beta}(0)\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma}}x^{\beta}(0)=0$$

Recíprocamente, como $\eta\in C^{\infty}$ todas sus parciales de cualquier orden existen y son contínuas, luego, podemos aproximar al germen $\eta$ mediante su expansión en Series de Taylor en una vecindad del cero de la siguiente manera:

$$\eta=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0)\frac{x^{\alpha}}{\alpha!}+\sum_{|\alpha|=k+1}\eta_{\alpha}(x)\frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \qquad 1.7(3)$$

Luego si $\dfrac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0)=0$ para todo multiíndice $\alpha$ tal que $|\alpha|\le k$ entonces 1.7(3) se transforma en

$$\eta=\sum_{|\alpha|=k+1}\eta_{\alpha}(x)\frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \qquad 1.7(4)$$

que claramente pertenece al ideal $M^{k+1}$.

Corolario 1.8

Un germen $\eta$ del anillo E está en $M^k - M^{k+1}$ si, sólo si, existe un multíndice $\alpha$ de norma k, $|\alpha| = k$, para el cual

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{|\beta|}\eta}{\partial x^{\beta}}(0)=0$$

para todo multíndice $\beta$ de norma $\leq$ k-1.

Demostración

El Teorema 1.7 garantiza las dos siguientes afirmaciones:

1.- Un germen $\eta$ pertenece al ideal $M^k$ si. sólo si, todas sus parciales de orden menor o igual que k-1 se anulan en cero.

2.- Una condición necesaria y suficiente para que un germen $\eta$ no pertenezca al ideal $M^{k+1}$, es que exista un multíndice $\alpha$ de norma $\leq$ k para el cual $\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0) \neq 0$.

De 1 y 2 se sigue que $\eta \in M^k - M^{k+1}$ si, sólo si, existe un multíndice $\alpha$ de norma k, $|\alpha| = k$, para el cual

$$\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{|\beta|}\eta}{\partial x^{\beta}}(0)=0$$

para todo multíndice $\beta$ de norma menor o igual que k-1. $\square$

1.8(1)

Observación

Si $\eta \in M^{k+1}$ entonces $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in M^k$

En efecto, $\eta \in M^{k+1}$ implica que todas sus parciales de orden menor o igual que k se anulan en cero, consecuentemente todas las parciales de orden menor o igual que k-1 del germen:

$\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ i=1 , ..., n se anulan en cero, lo que significa según el Teorema 1.7 que $\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \in M^k$

**Observación 1.8(2)**

Si un ideal $\mathcal{I}$ del anillo E está generado por $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ; entonces $\lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_s \mu_s$ también son generadores del mismo ideal siempre y cuando las $\lambda_i$ sean unidades.

En efecto, sea $\xi \in \langle \mu_1, \ldots, \mu_s \rangle$ entonces $\xi = \eta_1 \mu_1, \ldots, \eta_s \mu_s$ y como $\lambda_i$ para i=1 , ..., s es una unidad entonces $\xi = (\eta_1/\lambda_1) \cdot \lambda_1 \mu_1 + \ldots + (\eta_s/\lambda_s) \cdot \lambda_s \mu_s$ y en consecuencia de donde $\xi \in \langle \lambda_1 \mu_1, \ldots; \lambda_s \mu_s \rangle$ ; la otra contención es $\langle \mu_1, \ldots, \mu_s \rangle \subset \langle \lambda_1 \mu_1, \ldots, \lambda_s \mu_s \rangle$ inmediata.

Teorema 1.9

I.- $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un anillo local cuyo ideal maximal es $\dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$

II.- $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

1.9(1)

Demostración

1.- El cociente $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un anillo conmutativo con uno

2.- $\dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un ideal del anillo $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$

3.- $\dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es el único ideal maximal de $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$

4.- $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

5.- $\left\{ [x^{\alpha}] + \mathcal{M}^{k+1} \in \dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}} \;\middle/\; \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ y } 0 \leq \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k \right\}$ éste conjunto es una base finita del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$. Aquí $[x^{\alpha}]$ es el germen constante $[1]$ si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ (véase el significado de $x^{\alpha}$ en 3 de 1.2(3) para $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$).

La justificación de éstas 5 aseveraciones es suficiente para probar el Teorema 1.9 de la siguiente manera:

De 1, 2, y 3 se deduce que $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un anillo local y que su único ideal maximal es $\dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$, lo que prueba I, mientras que de 4 y 5 se concluye que $\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Justificación de 1 en 1.9(1): De la Proposición 1.1 y del Corolario 1.6 se sabe que $\mathcal{E}$ es un anillo conmutativo con uno y que $M^{k+1}$ es un ideal de $\mathcal{E}$; como el cociente de un anillo entre uno de sus ideales resulta ser un anillo, se sabe que, el cociente $\frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$ también es un anillo conmutativo con uno, que tiene a las clases: $[0] + M^{k+1}$ y $[1] + M^{k+1}$ como elementos neutros para la adición y la multiplicación respectivamente.

Justificación de 2 en 1.9(1).- $\frac{M}{M^{k+1}}$ es realmente un ideal del anillo $\frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$. Efectivamente, el Teorema 1.3 y de la observación hecha en 1.6(1) se tiene que, $M \subset \mathcal{E}$ y $M^{k+1} \subset M$ de aquí que $\frac{M}{M^{k+1}} \subset \frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$ (todas son contenciones propias), es claro que $[0] + M^{k+1}$ pertenece a $\frac{M}{M^{k+1}}$. Ahora bien, sea $\eta + M^{k+1}$ cualquier elemento de $\frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$ y considérense $\mu_1 + M^{k+1}$ y $\mu_2 + M^{k+1}$ dos clases en $\frac{M}{M^{k+1}}$, entonces por definición se tiene que:

$$(\eta + M^{k+1})(\mu_1 + M^{k+1}) = \eta\mu_1 + M^{k+1} \quad \text{y} \qquad 1.9(2)$$
$$(\mu_1 + M^{k+1}) + (\mu_2 + M^{k+1}) = (\mu_1 + \mu_2) + M^{k+1}$$

En consecuencia, las clases $\eta\mu_1 + M^{k+1}$ y $(\mu_1 + \mu_2) + M^{k+1}$ pertenecen a $\frac{M}{M^{k+1}}$ ya que $\mu_1$ y $\mu_2$ pertenecen a $M$, entonces $\mu_1 + \mu_2$ y $\eta\mu$ también pertenecen a $M$. Por consiguiente, $(\eta + M^{k+1})(\mu_1 + M^{k+1})$ y $(\mu_1 + M^{k+1}) + (\mu_2 + M^{k+1})$ pertenecen a $\frac{M}{M^{k+1}}$, esto significa que $\frac{M}{M^{k+1}}$ es un ideal de $\frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$.

Justificación de 3 en 1.9(1).- Para probar que el ideal $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es maximal y único con esta propiedad, basta observar que cualquier ideal de $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ distinto de éste anillo cociente está contenido en $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$, para ello considérese el Epimorfismo Canónico $j: E \to \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ y supóngase que $\dot{I}$ es un ideal de $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ tal que $\dot{I} \neq \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$, entonces $j^{-1}(\dot{I})$ es un ideal del anillo local $E \neq E$ y por consiguiente está contenido en algún ideal maximal pero, M es el único ideal maximal de E, luego entonces, $j^{-1}(\dot{I}) \subset M$, por lo tanto, $j(j^{-1})(I)$ está contenido en $j(M)$ lo que equivale a decir que el ideal $\dot{I}$ está contenido en el ideal $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ para cualquier ideal $\dot{I} \neq \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$, esto significa que $\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es el único ideal maximal del anillo $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$.

Justificación de 4 y 5 en 1.9(1).- $M^{k+1}$ es un subespacio vectorial de E, de donde $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un espacio vectorial, (ver Proposición 1.1 y Corolario 1.6), cuyos elementos están generados por los monomios $\overline{x_i}$ de grado menor o igual que k; es decir, los generadores de $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ son de la forma $x^{\alpha} + M^{k+1}$ donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$. El simbolo $x^{\alpha} = 1$ si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$. En efecto, cada $\eta \in E$ puede expresarse de acuerdo al Teorema de Taylor como:

$$\eta(0) + \eta_1 + \dots + \eta_k + \mu \qquad 1.9(3)$$

donde $\eta_i = \sum_{\alpha} \eta_\alpha \; x^\alpha,\ |\alpha| = i$ y

$$\eta_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial x^\alpha}(0) \qquad i=1,\ldots,k \qquad \mu \in M^{k+1}$$

(ver 1.2(3), 1.7(3) y 1.7(4).

Considérese el epimorfismo canónico entre los espacios vectoriales $j^k : E \longrightarrow \frac{\mathcal{E}}{M^{k+1}}$ que asocia a cada germen $\eta$ de E la clase $\eta + M^{k+1}$, simbólicamente

$$j^k(\eta) = \eta + M^{k+1} \quad \text{o bien} \quad j^k(\eta) = \bar{\eta} \qquad 1.9(4)$$

Utilizando la linealidad de $j^k$ en 1.9(3) tenemos:

$$\begin{aligned} j^k(\eta) &= j^k(\eta(0)) + j^k(\eta_1) + \ldots + j^k(\eta_k) + j^k(\mu) = \\ &= \overline{\eta(0)} + \overline{\eta_1} + \ldots + \overline{\eta_k} + \bar{\mu} \\ &= \overline{\eta(0)} + \overline{\sum_{|\alpha|=1} \eta_\alpha x^\alpha} + \ldots + \overline{\sum_{|\alpha|=k} \eta_\alpha x^\alpha} + \bar{\mu} \\ &= \eta(0) + \sum_{|\alpha|=1} \eta_\alpha \cdot \overline{x^\alpha} + \ldots + \sum_{|\alpha|=k} \eta_\alpha \cdot \overline{x^\alpha} + \bar{\mu} \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$\bar{\mu} = [\bar{0}]$ ya que $\mu \in M^{k+1}$ y $M^{k+1}$ es el núcleo de j.

En las igualdades anteriores hemos utilizado la asociatividad, conmutatividad y distributividad de la adición y la multiplicación así como la linealidad del epimorfismo de espacios vectoriales j. Resumiendo, cada elemento $\bar{\eta} \in E/M^{k+1}$ se puede expresar como:

$$\eta = \eta_0 + \sum_{|\alpha|=1} \eta_\alpha \overline{x^\alpha} + \ldots + \sum_{|\alpha|=k} \eta_\alpha \cdot \overline{x^\alpha}$$

Es decir, los monomios $\overline{x^\alpha}$ de grado menor o igual a k generan a $E/M^{k+1}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y el número total de estos es $\frac{(n+k)!}{n!\ k!}$ como se prueba en el Lema 3.2 del Capítulo 3.

Por lo tanto $E/M^{k+1}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, más aún, una base de éste espacio vectorial está constituída por:

$\overline{x^{\alpha}} = x^{\alpha} + M^{k+1}$ donde $0 \leq |\alpha| \leq k.$

En efecto, en el párrafo anterior mostramos que las $\overline{x^{\alpha}}$ generan a $E/M^{k+1}$, únicamente resta por demostrar la independencia lineal. Para este efecto supóngase que $\sum_{\alpha} C_{\alpha} \overline{x^{\alpha}} = \overline{0}$ donde $\alpha$ recorre todos los multiíndices distintos tal que $0 \leq |\alpha| \leq k$ y $C_{\alpha} \in \mathbb{R}$, esto es equivalente a que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} C_{\alpha} x^{\alpha} \in M^{k+1}.$$

Mostraremos que $C_{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha$

De las definiciones de $x^{\alpha}$, $\dfrac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}$ y de la linealidad de ésta última se tiene que:

$$\frac{\partial^{|\gamma|} x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \alpha! & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

(véase 1.7(2)).

Por consiguiente, si $|\gamma| \leq k$, por 1.7(1) tenemos

$$0 = \frac{\partial^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} \left( \sum_{\alpha} C_{\alpha} x^{\alpha} \right)(0) = \gamma! \, C_{\gamma}$$

Por lo tanto $C_{\gamma} = 0 \quad \forall \gamma$ tal que $0 \leq |\gamma| \leq k$, es decir, $\overline{x^{\alpha}}$ son linealmente independientes en $E/M^{k+1}$.

$\square$

Notación

Llamaremos $J^{k} = E/M^{k+1}$, $\mathcal{J}^{k} = M/M^{k+1}$ y $j^{k}$ al homomorfismo que va de $E \longrightarrow E/M^{k+1}$. 1.9(5)

### Definición

Sea $\eta$ un germen en E y $\eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_k$ el germen que se obtiene del desarrollo en Serie de Taylor de $\eta$ en cero, considerado hasta orden k, entonces 1.9(6)

$$j^k(\eta) = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_k$$

se define como el k-jet en cero del germen $\eta$. $\eta_0$ es la parte constante de $\eta$ en tanto que $\eta_j$ es el germen que contiene a todos los monomios de grado j que aparecen en el desarrollo de Serie de Taylor de $\eta$ en cero, $j = 1, \dots, k$. Es decir, 1.9(7)

$$\eta_j = \sum_{\alpha} \frac{\partial^{|\alpha|} \eta}{\partial x^{\alpha}}(0) \frac{x^{\alpha}}{\alpha!}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = j$.

1.9(8)

### Observación

$J^k$ se le conoce como el espacio de k-jets y resulta ser isomorfo al anillo de los polinomios en n-variables con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que k. En efecto, de la linealidad de $j^k$, de los apartados 1.9(4), 1.9(6) y 1.9(7) y las operaciones descritas en 1.9(2) podemos establecer un homomorfismo de la siguiente manera:

$$j^k(\eta) \longrightarrow P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_k(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

donde $P_0(x)$ es el polinomio constante $\eta(0)$ y $P_j(x)$ es el polinomio homogéneo de grado j cuyos coeficientes están determinados por las parciales de $\eta$ de orden j evaluadas en cero (como se indica en 1.9(7).

Es claro que, $j^k(\eta) \longrightarrow 0$ si, sólo si, $j^k(\eta)=0$ si sólo si $\eta \in M^{k+1}$ (consulte Proposición 1.7), además,

$$j^k\left(\left[P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_k(x)\right]\right) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_k(x)$$

(véase 1.0(1). Esto significa que el homomorfismo que acabamos de describir es un isomorfismo.

Sea G el subconjunto de $E_{(n,n)}$ que consta de los gérmenes en cero de difeomorfismos locales que mandan cero en cero.

Con la composición G resulta ser un grupo cuyo elemento neutro es el germen de la identidad en $\mathbb{R}^n$ (luego G es no vacío).

G es cerrado con respecto a la composición. En efecto, la composición de difeomorfismos es nuevamente un difeomorfismo, luego si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son dos elementos de G, entonces,

$\gamma_1 \circ \gamma_2 \in G$ ya que $\gamma_1 \circ \gamma_2 = [g_1 \circ g_2]$

donde $g_1$ y $g_2$ son representantes cualesquiera de $\gamma_1$ y $\gamma_2$ respectivamente (ver Definición en 1.5). De ésta misma definición se deduce que la composición sea asociativa. Por otra parte, cada germen de G es por definición el germen de un difeomorfismo, por lo tanto, el germen de $g^{-1}$ será su inverso. En el párrafo anterior hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 1.10

El conjunto de gérmenes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que se anulan en cero, al cual denotamos como G, resulta ser un grupo bajo la composición.

NOTA: Haciendo una analogía al caso de los representantes de gérmenes, basta considerar aquellos difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que estén definidos en una vecindad de cero, es decir, G consta de gérmenes de difeomorfismos locales que se anulan en cero. Simbólicamente:

$$G = \left\{ \gamma \in E_{(n,n)} \;/\; \gamma = [g] \text{, donde } g \text{ es un difeomorfismo local en } \mathbb{R}^n \text{ y } G(0)=0 \right\} \qquad 1.10(1)$$

Definición 1.10(2)

Sean $\eta$ y $\xi$ gérmenes en E, entonces, se dice que $\eta$ y $\xi$ son "equivalentes por la derecha", simbólicamente: $\eta \sim \xi$

Si existe un germen $\gamma$ en el grupo G que satisface $\xi = \eta\circ\gamma$

La definición anterior establece una relación de equivalencia en E. En efecto:

1.- Reflexibidad; como $\eta = \eta\circ I$ entonces $\eta \sim \eta$

2.- Simetría. Supóngase que $\eta \sim \xi$ entonces por definición existe $\gamma \in G$ tal que $\eta = \xi\circ\gamma$ pero $\gamma \in G$ entonces $\gamma^{-1} \in G$ $\therefore$ $\eta\circ\gamma^{-1} = (\xi\circ\gamma)\circ\gamma^{-1} =$

$$= \xi\circ(\gamma\circ\gamma^{-1}) = \xi\circ I = \xi \quad \therefore \quad \xi \sim \eta$$

3.- Transitividad. Si $\eta \sim \xi$ y $\xi \sim \mu$ entonces existen $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ tales que $\eta = \xi \circ \gamma_1$ = ec. 1

$\xi = \mu \circ \gamma_2$ = ec. 2.

Componiendo ec. 2 con $\gamma_1$ obtenemos:

$\xi\circ\gamma_1 = \mu\circ\gamma_2\circ\gamma_1$ y al sustituir ésta ecuación en ec. 1 obtenemos $\eta = \mu\circ\gamma_2\circ\gamma_1$.

Como $\gamma_1$ y $\gamma_2 \in G$ entonces $\gamma_2\circ\gamma_1 \in G$ $\therefore$ $\eta \sim \mu$.

Definición

La acción del grupo de difeomorfismos G sobre el anillo E induce en éste último una partición; como puede verse, los elementos de ésta partición resultan ser las clases de equivalencia dada por la definición anterior.

Llamaremos a la "órbita de bajo G" (brevemente, la G-órbita de $\eta$ ) a la clase de equivalencia definida por la relación anterior y la denotamos por $(\eta, G)$. Es decir:

$$(\eta, G) = \{\xi \in E / \xi = \eta\circ\gamma \text{ para algún germen } \gamma \in G\} \qquad 1.10(3)$$

entonces $\eta \sim \xi$ si, sólo si $(\eta, G) = (\xi, G)$.

Definición

Si $\eta$ y $\xi$ pertenecen al anillo E entonces se dice que $\eta$ y $\xi$ son k-equivalentes, simbólicamente: ($\eta \overset{k}{\sim} \xi$) si tienen el mismo k-jet; es decir,

$$\eta \overset{k}{\sim} \xi \quad \text{si, sólo si,} \quad j^k(\eta) = j^k(\xi) \qquad 1.10(4)$$

Observación

La relación de k-equivalencia resulta ser una relación de equivalencia, la demostración es inmediata si se hace uso de las propiedades reflexivas, simétrica y transitiva de la igualdad y de la definición de k-equivalencia.

Definición

Se dice que un germen $\eta$ que pertenece al anillo E es "k-determinado" si dado cualquier otro germen $\xi$ de E que sea k-equivalente con $\eta$ se tiene que $\xi$ es equivalente por la derecha con $\eta$.

Simbólicamente: $\eta \in E$ es "k-determinado" si $\forall \xi \in E$ tal que

$$\eta \overset{k}{\sim} \xi \quad \text{implica que} \quad \eta \sim \xi \qquad 1.10(5)$$

Observación

Es claro que si $\eta$ es k-determinada entonces $\eta$ es i-determinada $\forall\, i \geq k$. En efecto, sea $\eta$ k-determinada y supóngase que $\eta \overset{i}{\sim} \xi$ $i \geq k$. Por definición $j^i(\eta) = j^i(\xi)$ entonces $j^k(\eta) = j^k(\xi)$ o bien, $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ y como $\eta$ es k-determinado entonces $\eta \sim \xi$.

Por lo tanto $\eta$ es i-determinado $\forall\ i \geq k$.

De acuerdo a la definición anterior y a la observación precedente es posible clasificar a los gérmenes del anillo $\mathcal{E}$ en clases de equivalencia según sean o no k-determinados, ésta clasificación nos sugiere introducir el concepto de "gérmenes finitamente determinados", el cual formularemos en la siguiente.

**Definición.** Un germen $\eta$ del anillo $\mathcal{E}$ se dice que es finitamente determinado si es k-determinado para alguna $k \in \mathbb{N}$ .

De aquí en adelante el concepto "determinación de un germen" será aplicado exclusivamente a los gérmenes que sean finitamente determinados. Por la importancia de éste concepto lo enunciamos en las siguientes.

**Definición**

La determinación de $\eta$ será el mínimo de los $k \in \mathbb{N}$ para el cual $\eta$ sea k-determinada, lo que escribimos como $\det \eta = k$.

**Observación**

Si $\eta$ y $\xi$ son k-equivalentes entonces

$$\eta - \xi \in M^{k+1} \qquad 1.10(6)$$

En efecto, por el Teorema de Taylor podemos escribir

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_k + \mu_\eta \quad y$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_k + \mu_\xi$$ donde $\eta_0, \xi_0, \eta_j$ y $\xi_j$

son los gérmenes que se describen en 1.9(7), en tanto que $\mu_\eta$ y $\mu_\xi$ son gérmenes que pertenecen al ideal $M^{k+1}$ (1.7(-)).

Por consiguiente, si $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ entonces por definición se tiene que $j^k(\eta) = j^k(\xi)$ donde

$j^k(\eta) = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_k$ y $j^k(\xi) = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_k$

De donde
$$\eta - \xi = j^k(\eta) + \mu_\eta - \left(j^k(\xi) + \mu_\xi\right) =$$
$$= j^k(\eta) - j^k(\xi) + \mu_\eta - \mu_\xi =$$
$$= \mu_\eta - \mu_\xi \in M^{k+1}$$

es decir $\eta - \xi \in M^{k+1}$.

Lema 1.11

El espacio de k-jets en cero de gérmenes en $E_{(n,p)}$, al cual denotamos como $J^k_{(n,p)}$, es un espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración

Por el Corolario 1.2 se tiene que $E_{(n,p)}$ es isomorfo a $E \times \ldots \times E$ (p-factores) luego el k-jet en cero de un germen en $E_{(n,p)}$ está unívocamente determinado por los k-jets en cero de p gérmenes de E; esto establece un isomorfismo entre $J^k_{(n,p)}$ y $J^k \times \ldots \times J^k$ (p factores). Pero $J^k = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{M}^{k+1}}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, según se establece en II del Teorema 1.9; por lo tanto $J^k_{(n,p)}$ también resulta ser un espacio vectorial de dimensión finita.

$\square$

Notación 1.11(1)

Si $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$ pertenece al espacio vectorial $E_{(n,p)}$, entonces el k-jet en cero del germen $\delta$ será $\left(j^k(\delta_1), \ldots, j^k(\delta_p)\right)$ que por brevedad lo denotaremos como $j^k(\delta)$.

Proposición 1.12

Si $G^k$ es el conjunto de k-jets en cero de gérmenes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que se anulan en el origen, entonces $G^k$ es un grupo de Lie de dimensión finita $\forall k$.

Demostración

Para mostar que $G^k$ es un grupo de Lie de dimensión finita, probaremos las 4 siguientes aseveraciones:

1.- $G^k$ es una variedad de dimensión finita 1.12(1)

2.- $G^k$ tiene estructura de grupo

3.- La operación que hace de $G^k$ un grupo vista como función es $C^\infty$

4.- La función del grupo $G^k$ en si mismo que asocia a cada elemento su inverso en el grupo, es $C^\infty$

Justificación de 1 en 1.12(1).- En primer término mostraremos que $G^k$ está contenido en un espacio vectorial de dimensión finita y después mostraremos que $G^k$ es un conjunto abierto de dicho espacio vectorial. $G^k$ está contenido en $\mathcal{J}^k$ x...x $\mathcal{J}^k$ (n-factores) donde $\mathcal{J}^k$ es el ideal maximal de $J^k$ (ver 1.9(5) y Teorema 1.9). En efecto, los elementos de $G^k$ son los k-jets en cero de gérmenes de difeomorfismos en $\mathbb{R}^n$ y por consiguiente de gérmenes en $E_{(n,n)}$ que se anulan en cero, luego entonces, el Lema 1.11 nos garantiza que $G^k$ está contenido en un espacio vectorial de dimensión finita, concretamente en $\mathcal{J}^k$ x...x $\mathcal{J}^k$ (n-factores), esta contención es propia, ya que el k-jet del germen constante cero no pertenece a $G^k$.

Ahora se da a $G^k$ la topología relativa de subconjuntos en $\mathcal{J}^k \times \ldots \times \mathcal{J}^k$ y probaremos que $G^k$ es un subconjun

to abierto de él.

Esto lo haremos de la siguiente manera:

Como $G^k \subset \mathcal{J}^k \times \ldots \times \mathcal{J}^k$, si hacemos uso de la

notación dada en 1.11(1) podemos expresar

$$G^k = \left\{ j^k(\gamma) \in J^k_{(n,n)} \,/\, \gamma \in G \right\} \qquad 1.12(2)$$

Luego si $j^k(\gamma_0)$ pertenece a $G^k$ entonces al considerar la ma-

tríz $M_{\gamma_0}$ de n x n dada por el Jacobiano de $j^k(\gamma_0)$ evaluado

en cero, se tiene que $M_{\gamma_0}$ es no singular ya que $\gamma_0$ es

el germen de un difeomorfismo en $\mathbb{R}^n$ y por consiguiente el

determinante de ésta matríz Jacobiana evaluado en cero es diferen

te de cero.

Pero el conjunto de matrices no singulares de n x n es

abierto en el espacio de matrices de n x n; de ahí que existe

una vecindad de radio $\varepsilon$ centrada en $M_{\gamma_0}$ que consta ex-

clusivamente de matrices invertibles, entonces si $j^k(\gamma)$ difie-

re de $j^k(\gamma_0)$ en menos que $\varepsilon$ en particular tendremos que la

parte lineal de $j^k(\gamma)$ difiere de la parte lineal de $j^k(\gamma_0)$

en menos que $\varepsilon$ lo cual equivale a afirmar que $M_\gamma$ está en

la vecindad de radio $\varepsilon$ centrada an $M_{\gamma_0}$.

Por lo tanto $M_\gamma$ es invertible. De donde se infiere que

$j^k(\gamma)$ pertenece al conjunto $G^k$.

Por lo tanto $G^k$ es un cunjunto abierto de un espacio vecto-

rial de dimensión finita y en consecuencia resulta ser una varie-

dad de dimensión finita.

NOTA

La vecindad de radio $\varepsilon$ con centro en $j^k(\gamma_0)$ es un cu-

bo s-dimensional donde s es la dimensión de

$J^k \times \ldots \times J^k$ (n-factores)

Justificación de 2 en 1.12(1) .- $G^k$ es un grupo bajo la siguiente operación para $j^k(\gamma_1)$, $j^k(\gamma_2) \in G^k$ se define

$$j^k(\gamma_1) \cdot j^k(\gamma_2) = j^k(\gamma_1 \circ \gamma_2) \qquad 1.12(3)$$

Esta operación tiene sentido ya que si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ pertenecen a G entonces $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in$ G. De ahí que $j^k(\gamma_1 \circ \gamma_2) \in G^k$. Esta definición es independiente de los representantes como se muestra a continuación: $j^k(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ solamente involucra derivadas parciales de orden menor o igual que k de los gérmenes $\gamma_1$ y $\gamma_2$ entonces $j^k(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ coincidirá con $j^k(\delta_1 \circ \delta_2)$ para aquellos gérmenes $\delta_1$ y $\delta_2$ de G que satisfagan $j^k(\delta_1) = j^k(\gamma_1)$ y $j^k(\delta_2) = j^k(\gamma_2)$.

La asociatividad de la operación definida en 1.12(2) se sigue de la correspondiente para la composición de gérmenes en el grupo G. El neutro de $G^k$ es el k-jet de la identidad Id en $E_{(n,n)}$. Además, si $j^k(\gamma)$ es cualquier elemento de $G^k$ entonces $j^k(\gamma^{-1})$, que también pertenece a $G^k$ es el inverso de $j^k(\gamma)$ ya que $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1}) = j^k(\gamma \circ \gamma^{-1}) = j^k(\mathrm{Id})$ y $j^k(\gamma^{-1}) \cdot j^k(\gamma) = j^k(\gamma^{-1} \circ \gamma) = j^k(\mathrm{Id})$ y como el inverso es único podemos escribir:

$$j^k(\gamma^{-1}) = j^k(\gamma)^{-1} \qquad 1.12(4)$$

Por lo tanto $G^k$ es un grupo.

**Justificación de 3 en 1.12(1).-** A fin de mostrar que la función que asocia cada par de k-jets $j^k(\gamma) . j^k(\delta)$ el k-jet $j^k(\gamma \circ \delta)$ es $C^\infty$, será suficiente probar que en cada coordenada ésta función depende polinomialmente de las derivadas parciales en cero de orden $\leq$ k de los gérmenes $\gamma_i$ y $\delta_j$ donde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ y $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$. En efecto, sean $\gamma$ y $\delta$ elementos del grupo G, entonces de 1.11(1) y 1.12(2) se tiene que $j^k(\gamma) = \left(j^k(\gamma_1), \dots, j^k(\gamma_n)\right)$ y $j^k(\delta) = \left(j^k(\delta_1), \dots, j^k(\delta_n)\right)$ ambos pertenecen al grupo $G^k$.

Ahora del isomorfismo que existe entre $J^k$ y el anillo de polinomios de grado k en n-variables, se tiene que para i, j=1 ,..., n

$$j^k(\gamma_i) = \sum_\alpha a_i^\alpha \cdot x^\alpha \quad y \quad j^k(\delta_j) = \sum_\alpha b_j^\alpha \cdot x^\alpha \tag{1.12(5)}$$

donde las sumas recorren todos los multiíndices de orden mayor que cero y menor o igual que k y $a_i^\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \gamma_i}{\partial x^\alpha}(0)$ $b_j^\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \delta_j}{\partial x^\alpha}(0)$

Ahora bien por definición

$j^k(\gamma) . j^k(\delta) = j^k(\gamma \circ \delta) = \left(j^k(\gamma_1 \circ \delta), \dots, j^k(\gamma_n \circ \delta)\right)$

y en virtud del isomorfismo mencionado anteriormente y las expresiones dadas en 1.12(5) se tiene que $j^k(\gamma_i \circ \delta)$ coincide con el k-jet de

$$\sum_\alpha a_i^\alpha \left( \prod_{j=1}^{n} \sum_\beta b_j^\beta \, x^\beta \right)^\alpha \tag{1.12(6)}$$

Es claro que la expresión dada por 1.12(6) depende polinomialmente de los coeficientes $a_i^\alpha$ y $b_j^\beta$, $\forall$ i,j=1 ,..., n. Por consiguiente, la función que asocia $j^k(\gamma) . j^k(\delta) \longrightarrow j^k(\gamma \circ \delta)$ es $C^\infty$.

Justificación de 4 en 1.12(1).- La función que asocia a cada elemento de G su inverso en el mismo grupo en cada coordenada, es un polinomio cuyos coeficientes dependen racionalmente de los coeficientes que determinan al k-jet del dominio (ver 1.12(5)). En efecto, si $\sum_{\alpha} a_i^{\alpha} . x^{\alpha}$ y $\sum_{\alpha} b_j^{\alpha} . x^{\alpha}$ son las coordenadas i y j de $j^k(\gamma)$ y $j^k(\gamma^{-1})$ respectivamente, como se propone en 1.12(5), entonces $\beta_j^{\alpha}$ es una función racional en las variables $a_i^{\beta}$.

La justificación de esta aseveración se hace por inducción sobre la norma de $\alpha$ ; antes de entrar propiamente a la argumentación inductiva, se hace necesaria la siguiente discusión.

Para cualquier $\gamma$ en g se tiene que $j^k(\gamma) . j^k(\gamma^{-1})$ es el k-jet de la identidad, esto es,

$$j^k(\gamma) . j^k(\gamma^{-1}) = (x_1 , \dots , x_n) \qquad \underline{1.12(7)}$$

Los términos en $x^{\alpha}$ que aparecen en la coordenada i del k-jet de $j^k(\gamma) . j^k(\gamma^{-1})$ como se propone en 1.12(6) se obtienen de la siguiente manera:

$$a_i^{\beta} \cdot \prod_{h=1}^{|\beta|} b_{h(\beta)}^{\delta_h} \cdot x^{\delta_h} \quad \text{donde} \quad |\beta| \leq |\alpha| \qquad \underline{1.12(8)}$$

$\sum_{h=1}^{|\beta|} \delta_h = \alpha$ , $1 \leq h(\beta) \leq n$ y el subíndice $h(\beta)$ se determina de la siguiente manera:

$$\text{Si} \quad \beta = (\beta_1 , \dots , \beta_n) \quad \text{y} \quad j = \min \{ r \mid \beta_r \neq 0 \} \qquad \underline{1.12(9)}$$

para $r=1 , \dots , n$ entonces

<u>Paso 1.-</u> $1(\beta) = \dots = \beta_j(\beta) = j$. Si $\beta_j = |\beta|$

entonces $h(\beta)$ queda completamente definida.

Paso 2.- Si $\beta_j < |\beta|$ entonces considérese

$s = \min \{ r \,/\, \beta_r \neq 0 \ \text{para} \ j < r \leq n \}$ y defínase

$(\beta_j + 1)(\beta) = \ldots = (\beta_j + \beta_s)(\beta) = s$, si

$\beta_j + \beta_s = |\beta|$ entonces $h(\beta)$ está determinado para toda

$h \leq |\beta|$ ; de no ser así, repítase el Paso 2 con las modificaciones propias del caso tantas veces como sea necesario hasta que quede completamente determinada $h(\beta)$.

Primer paso de Inducción.- Para todo multiíndice $\alpha$ de norma uno, se tiene que la norma de $\beta$ también es uno y la expresión dada en 1.12(3) adopta la forma

$a_i^{\mathcal{E}_j} \cdot b_{l(\mathcal{E}_j)}^{\mathcal{E}_n}$ donde $\beta = \mathcal{E}_j$ y $\alpha = \mathcal{E}_h$ son los multiíndices que tienen uno y las coordenadas $j$ y $h$ respectivamente y cero en sus demás coordenadas; además, $l(\mathcal{E}_j) = j$ (véase 1.12(9).

Simplificando notación en la expresión anterior, escribiendo $a_{ij}$ y $b_{jn}$ en vez de $a_i^{\mathcal{E}_j}$ y $b_{l(\mathcal{E}_j)}^{\mathcal{E}_n}$ respectivamente se tiene que el coeficiente de $x^{\mathcal{E}_h} = x_n$ en la coordenada $i$ del k-jet de $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ tiene la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jh} \qquad \underline{1.12(10)}$$

Extrayendo el coeficiente de $x_n$ en cada una de las coordenadas del k-jet de $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ y sustituyéndolos en la expresión dada en 1.12(7) se obtiene el siguiente sistema de n-ecuaciones con con las n-incógnitas $b_{1h}, \ldots, b_{nh}$

$\mathcal{A} \cdot B = E^h$ donde $\mathcal{A} = (a_{ij})$ ; $B$ es el vector columna $(b_{1h}, \ldots, b_{nh})$ y $E^h$ es el vector columna unitario que tiene 1 en la coordenada h.

Como $\mathcal{A}$ representa la parte lineal del k-jet de $\gamma$ y $\gamma$ es el germen de un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene que la matríz $\mathcal{A}$ es invertible, en consecuencia, el sistema en 1.12(10) tiene la siguiente solución única $B = \mathcal{A}^{-1} \cdot E^k$ por consiguiente, el coeficiente $b_{jh}$ es un polinomio en las variables $a_{ij}$ ya que $b_{jh} = \dfrac{(-1)^{j+h} \operatorname{Det}(A_{hj})}{\operatorname{Det}(A)}$ donde $A_{hj}$ es el menor de la matríz A que se obtiene al eliminar el renglón h y la columna j por lo tanto para todo multiíndice $\alpha$ de norma uno y para todo $j=1, \ldots, n$ se tiene que $b^\alpha_j$ depende racionalmente de los coeficientes que determinan a la parte lineal de $j^k(\gamma)$, es decir, de $a^\beta_i$ donde $|\beta| = 1$.

<u>2o. paso Inductivo</u>: Supóngase inductivamente que para todo multiíndice $\alpha$ de norma menor que k y para toda $j=1, \ldots, n$ se tiene que los coeficientes $b^\alpha_j$ dependen racionalmente de las $a^\beta_i$ donde $|\beta| < k$.

A continuación se demuestra que si la norma de $\alpha$ es k entonces $b^\alpha_j$ también es una función racional en las variables $a^\beta_i$, en efecto, en los términos que contienen al factor $x^\alpha$ en el k-jet de $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ como se propone en 1.12(6) para $|\alpha| = k$, se les puede clasificar en las 2 formas siguientes:

1.- $a^\beta_i \cdot b^\alpha_{1(\beta)} \cdot x^\alpha$ si $|\beta| = 1$

2.- $a^\beta_i \prod_{h=1}^{|\beta|} b^{\delta_h}_{h(\beta)} \cdot x^{\delta_h}$ si $1 \leq |\beta| \leq k$.

Como existen n-multiíndices $\beta$ de norma uno, se tiene que el coeficiente de $x^{\alpha}$ en cada una de las n-coordenadas de k-jet de $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ es de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^{\varepsilon_j} \cdot b_{1(\varepsilon_j)}^{\alpha} + (\text{suma finita de términos de la forma} \qquad \mathbf{1.12(11)}$$
$$a_i^{\beta} \prod_{h=1}^{|\beta|} b_{h(\beta)}^{\delta_h} \;,\quad |\beta| > 1)$$

como $|\delta_h| < |\alpha|$ y $|\alpha| < k$ entonces $\prod_{h=1}^{|\beta|} b_{h(\beta)}^{\delta_h}$ también es una función racional dependiente de las variables $a_i^{\beta}$ ya que deacuerdo a nuestra hipótesis de inducción, cada coeficiente $b_{h(\beta)}^{\delta_h}$ lo es, por lo tanto, la suma contenida en el paréntesis es a su vez una función racional en las variables $a_i^{\beta}$ el cual se denotará como $-P_i^{\alpha}$.

Escríbase ahora $a_{ij}$ y $b_j^{\alpha}$ en vez de $a_i^{\varepsilon_j}$ y $b_{1(\varepsilon_j)}^{\alpha}$ a fin de expresar al coeficiente de $x^{\alpha}$, el cual es cero, ya que $|\alpha|$ es estrictamente mayor que uno, en la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_j^{\alpha} - P_i^{\alpha}$, si se extraen los n-coeficientes de $x^{\alpha}$ en el k-jet de $j^k(\gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ y comparándolos con la expresión dada en 1.12(7) se obtiene el sistema $\mathcal{A} B = P$ donde $\mathcal{A} = a_{ij}$ ; B y P son los vectores columna $(B_1^{\alpha}, \ldots, B_n^{\alpha})$ y $(P_1^{\alpha}, \ldots, P_n^{\alpha})$ respectivamente. Este es nuevamente un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas el cual tiene la solución única $B = \mathcal{A}^{-1} \cdot P$, ya que $\mathcal{A}$ es invertible (compárese con 1.12(9), 1.12(10) y 1.12(11)). Por lo tanto, para todo multiíndice $\alpha$ de norma k, $b_j^{\alpha}$ también es una función racional en las variables $a_i^{\beta}$.

Proposición 1.13

Sean $\eta$ y $\xi$ gérmenes en E. Si $\eta$ es k-determinado entonces:

I.- Si $\eta$ es k-equivalente con $\xi$ implica la k-determinación del germen $\xi$.

II.- Si $\eta$ es equivalente por la derecha con $\xi$ entonces $\xi$ es k-determinado.

Demostración de I.

Supóngase que $\xi$ es k-equivalente con $\mu$.

Por demostrar que $\xi$ es equivalente por la derecha con $\mu$.

Si $\xi \overset{k}{\sim} \mu$, de nuestra hipótesis sabemos que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ y por la transitividad de $\overset{k}{\sim}$ se tiene que $\eta \overset{k}{\sim} \mu$. Pero $\eta$ es k-determinada entonces $\eta \sim \xi$ y $\eta \sim \mu$, ahora de la propiedad transitiva de equivalente por la derecha se tiene que $\xi \sim \mu$. Por consiguiente, $\xi$ es k-determinado.

Demostración de II.

De la k-determinación del germen $\eta$ y de la equivalencia por la derecha de los gérmenes $\eta$ y $\xi$ se concluye que el germen $\xi$ también es k-determinado; en efecto,

$\eta \sim \xi \implies \xi = \eta \circ \gamma$ para algún $\gamma \in G$, en consecuencia, $j^k(\xi) = j^k(\eta \circ \gamma)$, es decir, $\xi \overset{k}{\sim} \eta \circ \gamma$ ; luego, si $\xi \overset{k}{\sim} \mu$ entonces por transitividad se tiene que $\eta \circ \gamma \overset{k}{\sim} \mu$ de aquí que

$j^k(\eta \circ \gamma) \cdot j^k(\gamma^{-1}) = j^k(\mu) \cdot j^k(\gamma^{-1})$ o equivalentemente, $j^k(\eta) = j^k(\mu \circ \gamma^{-1})$ (véase 1.12(2), en otras palabras, $\eta \overset{k}{\sim} \mu \circ \gamma^{-1}$ . Ahora, de la k-determinación de $\eta$ se sigue que $\eta \sim \mu \circ \gamma^{-1}$ y por transitividad se obtiene que $\eta \sim \mu$ ya que claramente $\mu \sim \mu \circ \gamma^{-1}$ nuevamente por transitividad se concluye que $\xi \sim \mu$ ya que partimos de la hipótesis $\eta \sim \xi$.

$\square$

Definición 1.13(1)

Sea $\eta$ un germen del anillo E y $\{x_i\}$ un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ entonces el ideal Jacobiano de $\eta$ al cual denotamos por: $\Delta(\eta)$, es el ideal de E generado por

$$\left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \eta}{\partial x_n} \right\}$$

Observación

El ideal Jacobiano del germen $\eta$ $\Delta(\eta)$ es independiente del cambio de coordenadas. 1.13(2)

En efecto, sean $\Delta x$ y $\Delta y$ los ideales de E generados por

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad y \quad \frac{\partial \eta}{\partial y_j} \quad \text{respectivamente} \quad \begin{array}{l} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n \end{array}$$

Si $\gamma$ es el germen del difeomorfismo que manda $x_i$ en $y_i$ entonces $\eta \circ \gamma$ es un germen en E y por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial \eta}{\partial y_j} = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

Como $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in \Delta x \quad \forall i$ y $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ es un germen en E entonces $\frac{\partial \eta}{\partial y_j} \in \Delta x \quad \forall j$. Por lo tanto

$\Delta_y \subset \Delta_x$.

Para la otra contención sea $\xi = \eta \circ \gamma$ , como $\gamma' \in G$ implica $\gamma^{-1} \in G$ y de acuerdo a la demostración anterior.

$\Delta(\xi \circ \gamma^{-1}) \subset \Delta(\xi)$ pero esto es equivalente a decir que $\Delta(\eta) \subset \Delta(\eta \circ \gamma)$ ya que por construcción $\xi \circ \gamma^{-1} = \eta \circ \gamma \circ \gamma^{-1} = \eta$ en consecuencia $\Delta_x \subset \Delta_y$.

Por lo tanto $\Delta_x = \Delta_y$ es decir, el ideal Jacobiano es independiente del cambio de coordenadas.

Proposición 1.14

Sea $\eta$ un germen de E entonces para todo $\lambda$ del germen constante de E se tiene:

I.- El ideal Jacobiano de $\eta$ coincide con el ideal Jacobiano de $\eta + \lambda$ es decir, $\Delta(\eta) = \Delta(\eta + \lambda)$.

II.- $\eta$ es k-determinado si, sólo si, $\eta + \lambda$ es k-determinado.

Demostración. Parte I: Como $\lambda$ es el germen de la función constante que asocia a cada x en $\mathbb{R}^n$, el real $\lambda$ entonces $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0$ y de la linealidad del operador $\frac{\partial}{\partial x_i}$ se tiene que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta + \lambda) = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$. Luego entonces los generadores del ideal Jacobiano de $\eta + \lambda$ son los mismos que los generadores del ideal Jacobiano de $\eta$. Por lo tanto $\Delta(\eta + \lambda) = \Delta(\eta)$.

Parte II.- Mostraremos que todo germen constante $\lambda$ en E satisface:

1.- $\eta \sim \xi \iff \eta + \lambda \sim \xi + \lambda$

2.- $\eta \overset{k}{\sim} \xi \iff \eta + \lambda \overset{k}{\sim} \xi + \lambda$

Luego, verificar la k-determinación para el germen $\eta$ será equivalente verificarla para el germen $\eta + \lambda$. Así por ejemplo: si $\eta$ es k-determinado y $\eta + \lambda \overset{k}{\sim} \xi$ entonces por 2.- $\eta \overset{k}{\sim} \xi - \lambda$ y de la k-determinación de $\eta$ se sigue que $\eta \sim \xi - \lambda$ y usando 1.- se concluye que $\eta + \lambda \sim \xi$ por lo tanto $\eta + \lambda$ es k-determinado.

El recíproco es análogo.

Para completar la prueba de la parte II, únicamente nos resta por jus_tificar las afirmaciones hechas en 1 y 2. Para ésto obsérvese que todo germen constante $\lambda$ satisface:

$$\lambda = \lambda \circ \gamma \quad \forall \gamma \in G \quad y \quad \lambda = j^k(\lambda) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Luego entonces, si:

$$\begin{aligned} & \eta \sim \xi \\ \Longleftrightarrow\ & \eta = \xi \circ \gamma \\ \Longleftrightarrow\ & \eta + \lambda = \xi \circ \gamma + \lambda \circ \gamma \\ \Longleftrightarrow\ & \eta + \lambda = (\xi + \lambda) \circ \gamma \\ \Longleftrightarrow\ & \eta + \lambda \sim \xi + \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \eta \overset{k}{\sim} \xi \\ \Longleftrightarrow\ & j^k(\eta) = j^k(\xi) \\ \Longleftrightarrow\ & j^k(\eta) + \lambda = j^k(\xi) + \lambda \\ \Longleftrightarrow\ & j^k(\eta) + j^k(\lambda) = j^k(\xi) + j^k(\lambda) \\ \Longleftrightarrow\ & j^k(\eta + \lambda) = j^k(\xi + \lambda) \\ \Longleftrightarrow\ & (\eta + \lambda) \overset{k}{\sim} \xi + \lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto, las afirmaciones hechas en 1 y 2 son verdaderas. $\square$

Corolario 1.15

Sea $\eta$ elemento de E y $\mu = \eta - \eta(0)$ $\mu \in$ M ya que $\mu$ se anula en cero. Entonces $\eta$ es k-determinada si, sólo si $\mu$ es k-determinada.

Demostración

En efecto, al considerar al germen constante $\alpha = -\eta(0) \in \mathbb{R}$ se tiene $\mu = \eta + \alpha$ y por la Proposición 1.14 tenemos $\eta$ es k-determinada si, sólo si $\eta - \eta(0)$ es k-determinado.

$\square$

Observación.- En virtud del Corolario 1.15, de aquí en adelante sólo consideraremos aquéllos gérmenes que pertenecen al ideal maximal M. Ya que estamos interesados en conocer bajo que condiciones un germen es finitamente determinado. 1.15(1)

Para enunciar el resultado más importante de éste capítulo, requerimos de 2 resultados más y una observación, a los cuales estaremos aludiendo en el presente y capítulos posteriores.

Proposición 1.16

Sea A el conjunto de gérmenes en $(0, t_0)$ de funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$. Entonces A es un anillo local cuyo ideal maximal $\mathcal{A}$ consta de todos los gérmenes que se anulan en $(0, t_0)$.

La demostración es análoga a la que se hizo para demostrar que $E_n$ es un anillo local, Teorema 1.3.

La proyección $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ produce un monomorfismo $P^*$ del anillo de gérmenes $E_n$ en el anillo A, de la siguiente manera:

$$P^*(\eta) = \eta \circ P$$

Formalmente $\eta \circ P$ es el germen de $f \circ P$ donde f es cualquier representante de $\eta$.

Proposición 1.17

Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^s)$ y $f(0)=0$ entonces f induce un homomorfismo de anillos $f^*: E_s \longrightarrow E_t$ definido como $f^*(\eta) = \eta \circ [f]$, más aún $f^*$ resulta ser un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

En efecto, $\eta \circ [f]$ tiene sentido pues en realidad: $\eta \circ f = [g \circ f]$ donde $g$ es un representante de $\eta$ y $\eta \in E_s$ es decir, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ y como

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^s)$ entonces $g \circ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^t, \mathbb{R})$ de ahí que la clase de $g \circ f$ coincida con

$$\eta \circ [f] = f^*(\eta) \in E_t.$$

Esta definición no depende del representante elegido, ya que si h es otro representante de $\eta$ entonces $h/N = g/N$ para alguna vecindad $N$ de donde

$h/N \circ f = g/N \circ f$ esto implica $[h \circ f] = [g \circ f]$.

Ahora bien, sean $a$ y $b \in \mathbb{R}$ y $\eta$ y $\xi$ gérmenes en $E_s$, entonces por definición:

$$\begin{aligned} f^*(a\eta + b\xi) &= (a\eta + b\xi) \circ f = (a\eta) \circ f + (b\xi) \circ f = \\ &= a \cdot (\eta \circ [f]) + b \cdot (\xi \circ [f]) = \\ &= a\left(f^*(\eta)\right) + b\left(f^*(\xi)\right) \end{aligned}$$

además $f^*(\eta\xi) = (\eta\xi) \circ f = (\eta \circ [f])(\xi \circ [f]) = f^*(\eta) \cdot f^*(\xi)$. Por lo tanto $f^*$ es un homomorfismo de anillos y de $\mathbb{R}$-álgebras. □

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y $M$ un B-módulo entonces $M$ tiene inducida una estructura de A-módulos, a saber si $a \in A$ y $m \in M$ el producto $am$ se define como $f(a) \cdot m$. Este producto tiene sentido, ya que $f(a) \in B$ y $M$ es un B-módulo y hace de $M$ un A-módulo.

Cuando $A$ es un anillo local con ideal maximal $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}M$ lo entenderemos como $f(\mathcal{A}) \cdot M$.

Los conceptos anteriores nos permiten hacer las dos aseveraciones siguientes:

Sea $P: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ la proyección natural sobre el segundo factor entonces $P$ induce un homomorfismo de anillos $P^*: E_s \longrightarrow E_{n+s}$ dado por

$$P^*(\eta) = \eta \circ P \qquad \forall \eta \in E_s \qquad 1.17(1)$$

Si $M$ es un $E_{n+s}$ módulo entonces $\mathcal{M}$ denotará el mismo conjunto $M$, pero visto como un $E_s$ módulo con la estructura inducido por el homomorfismo $P^*$. 1.17(2)

El Teorema 1.19 es el principal resultado de éste capítulo el cual nos expresa algunas relaciones existentes entre los ideales de E y gérmenes de E que son k-determinados. El la prueba de éste teorema se hace uso de una versión particular del Lema de Nakayama el cual enunciamos y demostraremos porque aludiremos a él en ocasiones posteriores.

**Sublema.-** Si A es un anillo local y $\mathcal{A}$ su ideal maximal entonces $1 + \lambda$ es una unidad $\forall\ \lambda \in \mathcal{A}$.

**Demostración:** Como $\lambda \in \mathcal{A}$ entonces $-\lambda \in \mathcal{A}$ luego al suponer que $1 + \lambda \in \mathcal{A}$ implicaría $1 + \lambda - \lambda = 1 \in \mathcal{A}$, ésto nos coduciría a concluír que $A = \mathcal{A}$, que claramente contradice la maximalidad del ideal $\mathcal{A}$, luego entonces $1 + \lambda \in A - \mathcal{A}$.

Ahora considérese el ideal del anillo A generado por $1 + \lambda$; del párrafo anterior se sigue que $\langle 1 + \lambda \rangle$ no está contenido en el ideal maximal $\mathcal{A}$ y como el anillo A tiene un único ideal maximal se sigue de inmediato que el ideal generado por $1 + \lambda$ coincide con el anillo A pero; por hipótesis, A es un anillo con 1 entonces necesariamente debe existir un elemento $\mu$ en A que satisface $(1 + \lambda)\mu = 1$ por lo tanto $1 + \lambda$ es una unidad para todo $\lambda$ en $\mathcal{A}$.

$\square$

Lema de Nakayama 1.18

Sean $N_1$ y $N_2$ A-módulos (posiblemente contenidos en algún A-módulo más grande). Si A es un anillo local y $\mathcal{A}$ su ideal maximal y si $N_1$ está finitamente generado sobre A entonces la contensión $N_1 \subset N_2 + \mathcal{A} N_1$ implica que $N_1 \subset N_2$.

Demostración

Caso especial:

Primeramente se muestra el lema para el caso especial en que $N_2 = 0$ y en consecuencia $N_1 \subset \mathcal{A} N_1$ implicará $N_1 = 0$.

En efecto, el que $N_1$ sea finitamente generado sobre A nos permite elegir un conjunto mínimo de generadores, digamos $m_1, \ldots, m_r$. Luego si, $N_1 \subset \mathcal{A} N_1$ entonces podemos expresar cada elemento m de $N_1$ en la forma

$m = \alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_r m_r$ (Ec. 1).

Caso 1.-

$r = 1$ (única posibilidad)

Si $r=1$ ésto significa que el A-módulo está generado por un sólo elemento, a saber $m_1$ y $m_1 = \alpha m_1$ con $\alpha \in \mathcal{A}$. Entonces $(1 - \alpha)\, m_1 = 0$. De acuerdo al sublema anterior se tiene que $(1 - \alpha)$ es una unidad, luego entonces al multiplicar la igualdad anterior por $(1 - \alpha)^{-1}$ se obtiene $m_1 = 0$ ésto prueba que $m=0$ y por tanto $M=0$.

Caso 2.-

$r > 1$ (imposible)

Si $r > 1$ entonces $r - 1 \geq 1$ y por (Ec. 1) se tiene:
$m_r = \alpha_{1r} m_1 + \ldots + \alpha_{rr} m_r$ con $\alpha_{ir} \in \mathcal{A}$. De aquí que $(1 - \alpha_{rr}) m_r = \alpha_{1r} m_1 + \ldots + \alpha_{(r-1)r} m_{r-1}$.

Pero por el sublema anterior $1 - \alpha_{rr}$ es una unidad, luego $(1 - \alpha_{rr})^{-1}$ pertenece al anillo A, esto implica que
$m_r = \beta_1 m_1 + \ldots + \beta_{r-1} m_{r-1}$ (Ec.2), donde
$\beta_i = (1 - \alpha_{rr})^{-1} \alpha_{ir}$ $\quad i=1, \ldots, r-1.$

Esto contradice a la hipótesis supuesta, es decir, que $m_1, \ldots, m_r$ era un conjunto mínimo de generadores.

Por lo tanto, $r > 1$ no es posible.

Caso General.- Con las hipótesis formuladas en el Lema de Nakayama es posible concluír:

1.- $(M_1 + M_2)/M_2$ es un A-módulo finitamente generado.

2.- $(M_2 + \mathcal{A} M_1)/M_2$ coincide con $\mathcal{A}\left[(M_1 + M_2)/M_2\right]$

La veracidad de éstas dos aseveraciones es suficiente para probar el caso general, el procedimiento es el siguiente:
Como $M_1 \subset M_2 + \mathcal{A} M_1$ entonces $M_1 + M_2 \subset M_2 + \mathcal{A} M_1$ ; fórmese ahora el cociente de A-módulos, en la segunda de estas contenciones, dividiendo cada miembro entre $M_2$ a fin de obtener

$$(M_1 + M_2)/M_2 \subset (M_2 + \mathcal{A} M_1)/M_2 .$$

Luego, en virtud de las aseveraciones 1 y 2 se obtiene que el A-módulo finitamente generado $(M_1 + M_2)/ M_2$ está contenido en $\mathcal{A}\left[(M_1 + M_2)/ M_2\right]$ y debido al caso especial se concluye que $M_1 + M_2/ M_2$ es el A-módulo idénticamente cero que claramente implica $M_1 \subset M_2$ ; siendo ésta la conclusión del Lema de Nakayama.

Con la justificación de 1 y 2 se da por concluída la demostración del caso general y al mismo tiempo del Lema de Nakayama.

La suma y el cociente de Amódulos es nuevamente un A-módulo de ahí que el cociente $M_1 + M_2/ M_2$ sea también un A-módulo, su estructura como A-módulo está inducida por la que posée la suma de A-módulo $M_1 + M_2$ , esto es, $\forall\ \lambda \in A$ y $\forall\ m \in M_1$ se tiene

$\lambda \cdot (m + M_2) = (\lambda_m + M_2)$. Por consiguiente, si $m_1 , \ldots, m_s$ es un conjuntomd de generadores de $M_1$ sobre A entonces $(m_1 + M_2) , \ldots, (m_s + M_2)$ será un conjunto de generadores del A-módulo $M_1 + M_2/ M_2$ ; justificándose así la aseveración hecha en 1.

Ahora bien, por ser $\mathcal{A}$ un ideal de A se tiene que los elementos de $\mathcal{A}(M_1 + M_2)/ M_2$ son de la forma $\lambda (m + M_2)$ donde $\lambda \in \mathcal{A}$ y $m \in M_1$ pero ésta expresión coincide con $(\lambda_m + M_2)$ que claramente pertenece al cociente $(\mathcal{A} M_1 + M_2)/ M_2$ esto es $\mathcal{A}(M_1 + M_2)/ M_2 \subset (M_2 + \mathcal{A} M_1)/ M_2$ para exhibir la otra contención, hágase la misma argumentación en sentido inverso, esto justifica la afirmación hecha en 2.

$\square$

**Teorema 1.19** **TEOREMA DE MATHER**

Sea $\eta$ un germen que pertenece al ideal maximal $M$ y $\Delta = \Delta(\eta)$ el ideal Jacobiano de $\eta$, entonces:

I Si $M^{k+1} \subset M^2\Delta$ entonces el germen $\eta$ es k-determinado.

II Si $\eta$ es k-determinado entonces $M^{k+1} \subset M\Delta$

**NOTA:** Como la demostración de este teorema es muy extensa resulta indispensable para su mejor comprensión intercalar en el desarrollo de ésta, una proposición y 4 lemas en la primera parte y un lema más en la segunda.

Demostración. Parte I: Nuestro objetivo es demostrar que $\eta$ es k-determinada partiendo de la hipótesis $M^{k+1} \subset M^2\Delta$ ; es decir, que $\forall$ germen $\xi$ en E que sea k-equivalente con $\eta$ implique que $\eta$ sea equivalente por la derecha con $\xi$. La idea de la demostración es ir modificando continuamente el germen $\eta$, a travéz de una homotopía, en el germen $\xi$, suponiendo que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$.

Sea $\Phi$, el germen en $\{0\} \times \mathbb{R}$ de una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida como sigue:

$$\Phi(x, t) = (1-t)\,\eta(x) + t\,\xi(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad y \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Considérese la restricción de $\Phi$ a $\mathbb{R}^n \times \{t\}$ y denótesela como $\phi^t$, esto es $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

$\phi^t(x) = \Phi(x, t)$, de esta definición se sigue que para $t=0$ $\phi^0 = \eta(x)$ y en $t=1$ $\phi^1 = \xi(x)$ ya que

$$\Phi(x,\ 0) = (1-0)\ \eta(x) + 0\ \xi(x) = \eta(x) \qquad y$$
$$\Phi(x,\ 1) = (1-1)\ \eta(0) + 1\ \xi(x) = \xi(x)$$

La siguiente proposición nos muestra una familia de gérmenes de difeomorfismos con los cuales se prueba que $\eta$ y $\xi$ son equivalentes por la derecha.

Proposición 1.20

Si $t_o$ es un número fijo en $[0,\ 1]$, entonces existe una familia de difeomorfismos $\gamma^t$ en $G$ definida $\forall$ t en una vecindad de $t_o$ tal que:

I $\gamma^{t_o}$ es la identidad

II $\phi^t \circ \gamma^t = \gamma^{t_o}$

La proposición 1.20 implica que $\eta$ equivalente con $\xi$. En efecto, la compacidad del intervalo $[0,\ 1]$ nos permite cubrirlo con un número finito de vecindades como las pide la proposición 1.20; digamos: $N_o$, $N_1$, ..., $N_s$ donde $N_i$ es una vecindad centrada en $t_i$ $i=0, \ldots, s$ y $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_s = 1$.

De la conexidad del intervalo $[0,\ 1]$ se sigue $N_i \cap N_{i+1} \neq \phi$ $i=0, \ldots, s-1$ además de acuerdo a la proposición 1.20 en cada vecindad $N_i$ tenemos una familia $\gamma_i^t$ en $G$, tal que

1.- $\gamma_i^{t_i}(x) = x$

2.- $\phi^t \circ \gamma_i^t = \gamma^{t_i}$

De aqui que si $t \in N_i \cap N_{i+1}$ entonces en particular $t \in N_i$ y $t \in N_{i+1}$ que de acuerdo a 2.- se sigue: $\phi^t \circ \gamma_i^t = \phi^{t_i} \ldots (3)$ $\phi^t \circ \gamma_{i+1}^t = \phi^{t_{i+1}} \ldots (4)$

Pero $\gamma_i^t \in G$ luego $(\gamma_i^t)^{-1} \in G$ en consecuencia la ecuación (3) podemos componer por la derecha con $(\gamma_i^t)^{-1}$ para obtener: $\phi^t = \phi^{t_i} \circ (\gamma_i^t)^{-1}$. Sustituyendo ésta ecuación en (4) se obtiene $\left(\phi^{t_i} \circ (\gamma_i^t)^{-1}\right) \circ \gamma_{i+1}^t = \phi^{t_{i+1}}$ es decir, $\phi^{t_i} \circ \gamma_i = \phi^{t_{i+1}}$ donde $\gamma_i = (\gamma_i^t)^{-1} \circ \gamma_i^t$, que claramente pertenece a G ya que $(\gamma_i^t)^{-1} \in G$ y $\gamma_i^t \in G$.

Por lo tanto $\phi^{t_i}$ es equivalemte a $\phi^{t_{i+1}}$ $i=0, \ldots, s-1$.

Luego entonces por transitividad se tiene $\phi^{t_0}$ es equivalente por la derecha con $\phi^{t_1}$ equivalente por la derecha ... equivalente por la derecha con $\phi^{t_s}$.

Y como $t_0=0$ y $t_s=1$ por (1) se tiene $\eta = \phi^0$ equivalente con $\phi^1 = \xi$ esto es, $\eta$ equivalente por la derecha con $\xi$. Formalmente el difeomorfismo $\gamma \in G$ que exhibe la equivalencia por la derecha entre $\eta$ y $\xi$ es una composición finita de difeomorfismos $\gamma = \gamma_0 \circ \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{s-1}$ donde $\gamma_i = (\gamma_i^1)^{-1} \circ \gamma_{i+1}^t$. Probando así que $\eta$ es k-determinado.

Los 4 lemas siguientes garantizan la existencia de una familia de difeomorfismos $\gamma^t \in G$ como lo pide la proposición 1.20, lo que concluirá la prueba de éste resultado.

**Lema 1:**

Para todo $t_o \in [0, 1]$ existe un germen $\Gamma$ en el punto $(0, t_o)$ de una función que pertenece a $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $(x, t)$ en una vecindad pequeña de $(0, t_0)$ se satisfacen las 3 propiedades siguientes:

a) $\Gamma(x, t_0) = x$

b) $\Gamma(0, t) = 0$

c) $\Phi\left(\Gamma(x, t), t\right) = \Phi(x, t_0)$

**Lema 2:**

La condición establecida en el inciso c del Lema 1 es equivalente a la siguiente:

$$c')\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\Gamma(x,t),t)\cdot \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\Gamma(x,t),t\right) = 0$$

**Lema 3:**

Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t_0 \leq 1$ existe un germen $\xi$ en el punto $(0, t_0)$ de una función en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que satisface:

d) $\xi(0, t_0) = 0$

e) Para todo punto $(x, t)$ en una vecindad de $(0, t_0)$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,t)\cdot \xi_i(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) = 0$$

<u>Lema 4:</u>

La contención $M^{k+1} \subset M^2\Delta$ implica $M^{k+1} \subset M^2\Omega$ donde $\Omega$ es el ideal del anillo A generado por:

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ i=1 ,..., n y A denota el anillo de gérmenes en $(0, t_0)$ de funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (ver proposición 1.16).

Recuérdese que $\Phi = (1-t)\,\eta + t\,\xi$ y que estamos asumiendo que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$

<u>El Lema 4 implica al Lema 3</u> como sigue:

Por la linealidad de $\dfrac{\partial}{\partial t}$ se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-t)\,\eta + t\,\xi\right] = -\eta + \xi = \xi - \eta$$

y por ser $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ entonces de la observación 1.10(6) se tiene que $\xi - \eta \in M^{k+1}$ y por el Lema 4 se sigue que $M^{k+1} \subset M^2\Omega$ luego entonces $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = (\xi - \eta) \in M^2\Omega$ y de ahí que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\, \omega_j$ donde $\mu_j \in M^2$ y $\omega_j \in \Omega$ pero $\Omega$ es el ideal generado por

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ (i=1 ,..., n) entonces $\omega_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

donde aij son gérmenes en A , de aquí que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_j \mu_j\left(\sum_i a_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = \sum_i \sum_j \mu_j\left(a_{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)$$

Ahora sea $\xi_i = -\sum_{j=1}^{n} \mu_j\, a_{ij}$ i=1 ,..., n

$\xi_i$ así definido es un germen en el anillo A, ya que $a_{ij} \in A$ y $\mu_j$ es $P^{*}(\mu_j)$ que es un elemento del ideal maximal de A (véase 1.17(1)). En consecuencia al sustituir $\xi_i$ en la expresión anterior se obtiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \sum_i \xi_i \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)$$

de donde $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_i \xi_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0$

satisfaciéndose así el inciso e del Lema 3.

Ahora bien, por construcción, $\xi_i$ es un germen de A. Por lo tanto, si hacemos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ se consigue un germen en $(0, t_0)$ de funciones en $C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\xi(0, t_0) = 0$ ya que $\xi_i(x, t) = - \sum \dot{\mu}_j(x) . a_{ij}(x, t)$ y como $\dot{\mu}_j \in M^2$ entonces $\dot{\mu}_j(0) = 0$, consecuentemente $\xi_i(0, t) = - \sum_j \dot{\mu}_j(0) . a_{ij}(0, t) = 0 \quad i=1, \ldots, n.$

Formalmente $\dot{\mu}_j(x) = (\mu_j \circ P)(x, t)$ donde P es la proyección $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (ver observación 1.17(1)). Por lo tanto $\xi(0, t) = 0$ que satisface el inciso d del Lema 3 completando así la prueba del Lema 3.

<u>Implicación de los Lemas 1 y 2 a partir del Lema 3</u>

Como $\xi$ es diferenciable, el teorema de existencia y unicidad de Ecuaciones Diferenciables Ordinarias nos garantiza la existencia de una solución $\Gamma(x, t)$ de la ecuación diferencial.

$\dfrac{\partial \Gamma}{\partial t} = \xi(\Gamma, t)$ que pasa por x en el tiempo $t_0$ esto es, $\Gamma(x, t_0) = x$ que corresponde al inciso a del Lema 1.

Del inciso d tenemos $\xi(0, t) = 0$ lo que implica que el sistema

$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \xi(\Gamma, t)$ tiene como solución $\Gamma(0, t) = 0$
para toda $t$ en una vecindad de, $t_0$, satisfaciéndose así el inci-
so b del Lema 1.

Ahora en el inciso e, considérese $x = \Gamma(x, t)$ de la
ecuación $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \xi(\Gamma, t)$ se obtiene el sistema
$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = \xi_i$ donde $= (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ entonces al sus-
tituir en el inciso e se tiene:

$$\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,t) \cdot \xi_i(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\big(\Gamma(x,t),t\big) \cdot \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\big(\Gamma(x,t),t\big) = 0$$

ecuación que corresponde al inciso c' del Lema 2.

Ahora bien, como $\xi$ es un germen en $(0, t_0)$ de funciones
en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, entonces $\Gamma$ resulta también ser un ger
men en $(0, t_0)$ de funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que satisfacen,
como ya vimos, el inciso a y b del Lema 1 y el inciso c' del Lema 2.

A fin de completar la prueba del Lema 1 queda por demostrar
que la condición dada por el inciso c' es equivalente a la condición
dada en c. En efecto si

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\big(\Gamma(x,t),t\big) \cdot \frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\big(\Gamma(x,t),t\big) = 0$$

entonces por la regla de la cadena esto es equivalente a decir que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Phi \circ \big(\Gamma(x,t),t\big)\Big) = 0$$

Esto significa que como función de $t$ $\Phi\big(\Gamma(x, t), t\big)$
es una función constante en una vecindad de $(0, t_0) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$
y la pista para conocer dicha constante nos la proporciona el inciso a
$\Gamma(x, t_0) = x$ $\forall (x, t_0)$ en una vecindad de $(0, t_0)$,

esto implica que $\Phi\left(\Gamma(x, t), t\right)$ toma el valor constante $\Phi\left(\Gamma(x, t_0), t_0\right) = \Phi(x, t_0)$ $\forall (x, t)$ en una vecindad de $(0, t_0)$.

Por lo tanto el inciso c, $\Phi\left(\Gamma(x, t), t\right) = \Phi(x, t_0)$ se satisface.

Recíprocamente c implica c'

Para obtener c':

Basta diferenciar con respecto a $t$ y utilizar la regla de la cadena en el miembro izquierdo de la igualdad del inciso c. Obsérvese que en el miembro derecho de la misma igualdad

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi / (\mathbb{R}^n \times t_0)\right) \equiv 0$$

ya que $\Phi(x, t_0)$ no depende de la variable $t$ completando así la equivalencia entre c y c'.

Lema 1 implica Proposición 1.20

En efecto, defínase $\gamma^t$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$, $\gamma^t(x) = \Gamma(x, t)$ nuestro objetivo es de mostrar que $\forall t$ en una vecindad pequeña de $t_0$, el conjunto $\{\gamma^t\}$ es una familia de gérmenes de difeomorfismos en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que se anulan en cero.

Como $\gamma^t$ es la restricción de $\Gamma$ en $\mathbb{R}^n \times t$ entonces $\gamma^t$ resulta ser un germen en cero que satisface $\gamma^t(0) = 0$; pues por definición $\gamma^t(0)$ coincide con $\Gamma(0, t)$ y esto es igual a cero por el inciso b del Lema 1.

Por el inciso a del mismi lema se tiene que: $\gamma^{t_0}(x) = x$ es decir $\gamma^{t_0}$ es el germen de la identidad en $\mathbb{R}^n$ satisfaciéndose así I de la proposición 1.20, por el inciso c se tiene que $\Phi\left(\Gamma(x, t), t\right) = \Phi(x, t_0)$ $\forall x$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$, esto es,

$$\phi^{t_0}\gamma^t = \phi^{t_0}$$

que corresponde a II de la proposición 1.20.

Finalmente sea $F: [0,1] \longrightarrow E_{(n,n)}$ la función que asocia $t \longrightarrow \gamma^t$, F definida de esta manera satisface $F(t_0) = \gamma^{t_0}$ que es el germen de la identidad en $\mathbb{R}^n$ según el inciso a del Lema 1.

Ahora bien, el conjunto de difeomorfismos en $\mathbb{R}^n$ de clase $C^\infty$ que se anulan en cero es abierto en el espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pues corresponden al mapeo de rango máximo (la justificación de esta afirmación es análoga a la hecha en la Proposición 1.12); esto nos permite considerar una vecindad N en $\gamma^{t_0}$ completamente contenida en difeomorfismos que se anulan en G, esto es, la vecindad N consta exclusivamente de difeomorfismos, ya que $\gamma^{t_0}$ como ya dijimos, es la identidad en $\mathbb{R}^n$ luego entonces, de la continuidad de la función F se sigue que $F^{-1}(N)$ es un abierto en $\mathbb{R}$ que contiene a $t_0$.

Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall\ t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ se tiene que $F(t) = \gamma^t$ es el germen de algún difeomorfismo en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto $\gamma^t \in G$ implicando así la Proposición 1.20 a partir del Lema 1.

Demostración del Lema 4

Completando así la suficiencia de la k-determinación.

Por ser $\Phi = (1-t)\eta + t\xi$ y por la linealidad del operador $\frac{\partial}{x_i}$ se tiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = (1-t)\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + t\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + t\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi - \eta)$$

Como estamos suponiendo que $\eta$ es k-equivalente con $\xi$, entonces $(\xi - \eta) \in M^{k+1}$ por 1.10(6) y por la observación hecha en 1.8(1) se tiene que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi - \eta) \in M^k$

Ahora considerando a t como el germen constante del anillo A que asocia $(x, t) \longrightarrow t$ $\forall (x, t)$ en una vecindad de $(0, t_0)$ se obtiene que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - t\,\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi - \eta) \text{ pertenece } \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right\rangle + AM^k$$

que a su vez está contenido en $\Omega + AM^k$ recuérdese que $\Omega$ es el ideal generado por:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

Por lo tanto $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ es un elemento de $\Omega + AM^k$ $\forall$ $i=1, \ldots, n$, lo que significa que

$$\Delta \subset \Omega + AM^k \qquad \underline{1.20(1)}$$

Por otra parte si $\mathcal{A}$ denota al ideal maximal del anillo local A esto es $\mathcal{A}$ consta de todos los gérmenes de A que se anulan en $(0, t_0)$. Entonces

$$AM \subset \mathcal{A} \qquad \underline{1.20(2)}$$

Formalmente AM es $AP^*(M)$ (ver Proposición 1.16 y 1.17(1). Ahora bien, por hipótesis $M^{k+1} \subset M^2\Delta$, entonces vía el homomorfismo $P^*$ $A \cdot M^{k+1} \subset AM^2\Delta$ y por 120(1) se tiene que

$AM^2 \Delta \subset AM^2(\Omega + AM^k) = M^2 (A\,\Omega) + AM^{k+2} = M^2\Omega + (AM)\, M^{k+1} \subset M^2\Omega +$ $+ \mathcal{A}\, M^{k+1}$ . Esta última contención por 1.20(2).

Luego entonces $AM^{k+1} \subset M^2\Omega + \mathcal{A}\, M^{k+1}$ y por 1.20(2) se obtiene

$$AM^{k+1} \subset M^2\,\Omega + \mathcal{A}\,(AM)\,M^{k+1} \qquad \underline{1.20(3)}$$

Aplicamos el Lema 1.18 (Nakayama) para el anillo A el ideal $\mathcal{A}$ y los A-módulos $N_1$ y $N_2$ definidos como sigue.

$N_1 = AM^{k+1}$ el cual está finitamente generado por los monomios de los gérmenes de las $x_i$ de grado k+1 (Corolario 1.5) y $N_2 = M^2\,\Omega$; entonces sustituyendo $N_1$ y $N_2$ en 1.20(3) y observando que $\mathcal{A} = \mathcal{A}\,A$ obtenemos $N_1 \subset N_2 + \mathcal{A}\,N_1$.

Ahora aplicamos el Lema de Nakayama para obtener $N_1 \subset N_2$ esto es $A\,.\,M^{k+1} \subset M^2\,\Omega$ que en particular implica $M^{k+1} \subset M^2\,\Omega$, ya que en este caso $M^{k+1}$ es un ideal en el anillo A vía el homomorfismo $P^*$. Por lo tanto $AM^{k+1} = M^{k+1}$.

Análogamente $M^2\,\Omega$ es un ideal en el anillo A.

Concluyendo de esta manera la prueba del Lema 4 y al mismo tiempo la prueba del inciso 1 del Teorema 1.19.

$\square$

Prueba del inciso 2 del Teorema 1.19

Ahora se prueba que $M^{k+1} \subset M\Delta$ tiene como condición necesaria la k-determinación del germen $\eta$; considérese el mapeo natural que manda al ideal maximal $M$ a $J^{k+1} = M/M^{k+2}$ mediante $j^{k+1}$, esto es, $\forall\ \eta \in M \quad \eta \longmapsto j^{k+1}(\eta)$.

$$\text{Sea} \quad P = \{ \xi \in M \ / \ \eta \text{ es k-equivalente con } \xi \}$$

$$Q = \{ \xi \in M \ / \ \eta \text{ es equivalente con } \xi \}$$

es decir, $Q = (\eta, G)$ es la órbita de $\eta$ bajo el grupo $G$ (véase 1.10(3)); si suponemos que $\eta$ es k-determinado entonces por definición $\eta$ k-equivalente con $\xi$ en consecuencia $\forall\ \xi \in P$ se tiene $\eta$ equivalente con $\xi$ de donde $\xi \in Q$, luego entonces, $P \subset Q$. Por lo tanto

$$j^{k+1}(P) \subset j^{k+1}(Q) \qquad \underline{1.20(4)}$$

P coincide con $\eta + M^{k+1}$

En efecto $\forall\ \xi \in P$ se tiene $\xi = (\eta + (\xi - \eta))$ entonces $\in \eta + M^{k+1}$ ya que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ $\xi - \eta \in M^{k+1}$ de acuerdo a 1.10(6). Por lo tanto $P \subset \eta + M^{k+1}$.

Recíprocamente:

Sea $\xi \in \eta + M^{k+1}$ entonces $\xi = \eta + \mu$ para alguna $\mu \in M^{k+1}$ entonces $J^k(\xi) = J^k(\eta + \mu) = J^k(\eta) + J^k(\mu) = J^k(\eta)$ ya que $J^k(\mu) = 0$ por el Teorema 1.7 esto significa que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ esto es $\xi \in P$ de donde $\eta + M^{k+1} \subset P$. Por lo tanto $P = \eta + M^{k+1}$.

Sea $\zeta = j^{k+1}(\eta)$ entonces de la igualdad anterior y la linealidad del homomorfismo $j^{k+1}$ se obtiene

$j^{k+1}(P) = j^{k+1}(\eta + M^{k+1}) = j^{k+1}(\eta) + j^{k+1}(M^{k+1})$.

Luego entonces el espacio tangente a $j^{k+1}(P)$ en $\zeta$ al cual denotamos como $T_{\zeta}\left(j^{k+1}(P)\right)$ no es otra cosa que $j^{k+1}(M^{k+1})$ ya que $\zeta + j^{k+1}(M^{k+1})$ es un espacio afín de $j^{k+1}(M^{k+1})$ el cual es un espacio vectorial de dimensión finita (Teorema 1.9).

$$T_{\zeta}\left(j^{k+1}(P)\right) = j^{k+1}(M^{k+1}) \qquad \underline{1.20(5)}$$

En virtud de la Proposición 1.10, $G^{k+1}$ es un grupo de Lie de dimensión finita, entonces la órbita de $\zeta$ bajo $G^{k+1}$ resulta ser una variedad; además el homomorfismo $j^{k+1}$ preserva las órbitas. En efecto, si $\eta \circ \gamma \in Q$ entonces de la definición hecha en 1.12(3) se tiene que

$j^{k+1}(\eta \circ \gamma) = j^{k+1}(\eta) \cdot j^{k+1}(\gamma) = \zeta \cdot j^{k+1}(\gamma) \in (\zeta, G^{k+1}$

esto es $j^{k+1}(Q) \subset (\zeta, G^{k+1})$, la otra contención es inmediata (consulte 1.12(2) y 1.12(3). Por lo tanto

$j^{k+1}(Q) = j^{k+1}(\quad, G) = (\quad, G^{k+1})$.

El que $(\zeta, G^{k+1})$ sea una variedad de dimensión finita nos garantiza la existencia del plano tangente $\zeta$ en $j^{k+1}(Q)$ el cual satisface:

<u>Lema 1.21</u>

$$T_{\zeta}(j^{k+1}(Q) = j^{k+1}(M\Delta)$$

Implicación de la contención $M^{k+1} \subset M\Delta$ a partir del Lema 1.21.

Por 1.19(1) se tiene $j^{k+1}(P) \subset j^{k+1}(Q)$ , entonces $T_{\xi}\left(j^{k+1}(P)\right) \subset T_{\xi}\left(j^{k+1}(Q)\right)$ luego entonces el Lema 1.21 implicaría que $j^{k+1}(M^{k+1}) \subset j^{k+1}(M\Delta)$ ya que por 1.19(2) $T_{\xi}\left(j^{k+1}(P)\right) = j^{k+1}(M^{k+1})$ , en consecuencia $\left(M^{k+1} + \ker(j^{k+1})\right) \subset \left(M\Delta + \ker(j^{k+1})\right) = M\Delta + M^{k+2}$ y como $\left(M^{k+1} \subset (M^{k+1} + \ker(j^{k+1})\right)$ se concluye que $M^{k+1} \subset M\Delta + M^{k+2}$.

Aplicando ahora el Lema de Nakayama a esta última contención, considerando al anillo E como A, al ideal $\mathcal{A}$ como el ideal maximal M (véase Proposición 1.16) y a los E-módulos $N_1$ y $N_2$ dados por $N_1 = M^{k+1}$ el cual es finitamente generado (Còrolario 1.6) y $N_2 = M\Delta$ se obtiene $M^{k+1} \subset M\Delta$ , probando así el inciso 2 del Teorema 1.19.

<u>Prueba del Lema 1.21</u>

Como $\mathbb{R}^n$ tiene estructura de grupo aditivo, pues se trata de un espacio vectorial, se tiene que cada germen $\gamma \in G$ se puede expresar como Id. $+ \delta$ donde Id. es el germen de la identidad y $\delta$ es el germen en cero de alguna función $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Esto es $\gamma(x) = x + \delta(x)$ es claro que $\delta(0) = 0$ pues $\gamma \in G$ (y por tanto $0 = \gamma(0) = 0 + \delta(0)$).

Ahora uniremos al germen de Id. con el germen $\gamma = \text{Id.} + \delta$ mediante una curva contínua de gérmenes $\gamma^t$ definidos de la siguiente manera:

$$\forall\ t \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad \gamma^t = \text{Id.} + t\delta$$

, en particular en $t=0$ $\gamma^0$ coincide con Id. y en $t=1$ $\gamma^1$ coincide con $\gamma$ , en ambos casos se trata de gérmenes de difeomorfismos, es decir, de elementos de G; por otra parte, los difeomorfismos forman un conjunto abierto en el espacio de funciones $C^{\infty}$ (la justificación de este hecho es análoga a la que se hizo en Proposición 1.12) razón por la cual podemos escoger una vecindad U de la identidad es decir, de $\gamma^{0}$ completamente contenida en G y una $t_0 > 0$ que depende de U tal que $\gamma^{t} \subset U$ siempre y cuando $-t_0 \leq t \leq t_0$ y como $U \subset G$ entonces $\gamma^{t}$ es un germen en G. Más aún

I.- $\gamma^{t}$ pertenece a una curva contenida en G que pasa por la identidad en el tiempo t=0

en tanto que

II.- $\eta \circ \gamma^{t}$ pertenece a una curva contenida en Q que pasa por el germen $\eta$ en el tiempo t=0

esto es claro, ya que si $-t_0 < t < t_0$ entonces $\gamma^{t} \in G$ de donde $\eta$ es equivalente por la derecha con $\eta \circ \gamma^{t}$

Por lo tanto $\eta \circ \gamma^{t} \in Q$, además $\eta \circ \gamma^{0} = \eta \circ \mathrm{Id.} = \eta$

De I y II se sigue que $j^{k+1}(\eta \circ \gamma^{t})$ pertenece a una curva que está contenida en $j^{k+1}(Q)$ y que pasa por $\zeta = j^{k+1}(\eta)$ en el tiempo t=0.

Ahora bien la tangente a la curva en t=0 esta dada por $\frac{\partial}{\partial t}\left(j^{k+1}(\eta \circ \gamma^{t})\right)$ en cero, el siguiente resultado nos muestra que esta tangente pertenece a $j^{k+1}(M\Delta)$.

Sublema

$$\frac{\partial}{\partial t} j^{k+1}(\eta \circ \gamma^{t}) \Big/_{0} \quad \text{pertenece a} \quad j^{k+1}(M\Delta).$$

Demostración

$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\eta \circ \gamma^t)$ es por definición el germen en cero de $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f \circ g^t)$ donde f y $g^t$ son representantes de $\eta$ y $\gamma^t$ respectivamente. Como $f \circ g^t$ es una función $C^\infty$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f \circ g^t)\right) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}(f \circ g^t)\right)$$

luego de la linealidad del operador $\frac{\partial}{\partial t}$ y observando que el conjunto de multiíndices $\alpha$ de norma $\leq$ k+1 es finito, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} j^{k+1}(\eta \circ \gamma^t)\Big/_0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{|\alpha|=1}^{k+1} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\eta \circ \gamma^t)\Big/_0 \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!}\right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=1}^{k+1} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(\eta \circ \gamma^t)\right)\Big/_0 \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \tag{1.21(1)}$$

$$= \sum_{|\alpha|=1}^{k+1} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta \circ \gamma^t)\right)\Big/_0 \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha!} = j^{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\eta \circ \gamma^t)\right)\Big/_0$$

Por otra parte, de la definición de $\gamma^t$ se sigue que $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ es un germen en $E_{(n,n)}$ que se anula en cero, esto nos permite calcular

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \circ \gamma^t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\eta\,(\text{Id.} + t\,\delta)\right) \quad \text{en cero}$$

(la manera de hacerlo es haciendo uso de la regla de la cadena en $f \circ (\text{Id.} + td)$ como se hizo en el párrafo anterior, aquí d es el representante de $\delta$) a fin de obtener

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \circ \gamma^t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot (\text{Id.} + t\,\delta) \cdot \delta_i \quad \text{y}$$

evaluando en t=0 se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta \circ \gamma^t)\Big/_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot \delta_i \tag{1.21(2)}$$

De 1.21(1) y 1.21(2) se concluye que

$$\frac{\partial}{\partial t} j^{k+1}(\eta \circ \gamma^t)\Big/_0 = j^{k+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \delta_i$$

que claramente es un elemento de $j^{k+1}(M\Delta)$ pues $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in \Delta$ y como ya vimos $\Delta_i(0) = 0$ entonces $\Delta_i \in M$.

Continuando con la prueba del Lema 1.21

Con el sublema anterior hemos mostrado que la tangente a la curva $j^{k+1}(\eta \circ \gamma^t)$ en $j^{k+1}(Q)$ la cual esta dada por $\frac{\partial}{\partial t}\left(j^{k+1}(\eta \circ \gamma^t)\right)\Big/_{t=0}$ que por definición pertenece a $T_\xi(j^{k+1}(Q))$; también es un elemento de $j^{k+1}(M\Delta)$. Más aún, cualquier tangente en el $T_\xi\, j^{k+1}(Q)$ procede de una curva en $j^{k+1}(Q)$ lo que significa que también proviene de una curva en $G^{k+1}$ y en consecuencia de una curva en $G$ que empieza en la identidad ya que $Q = (\eta, G)$ entonces $j^{k+1}(Q) = (\xi, G^{k+1})$ por lo tanto cuando $\delta$ varía en G obtenemos todas las curvas cuyas tangentes generan a $T_\xi(j^{k+1}(Q))$ de ahí que

$$T_\xi\left(j^{k+1}(Q)\right) \subset j^{k+1}(M\Delta) \qquad \underline{1.21(3)}$$

Por otra parte, dado $\xi$ en $M\Delta$ se puede escribir

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \delta_i \qquad \text{donde} \qquad \delta_i \in M$$

Ahora considérese $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ entonces $\delta$ es un germen en $E_{(n,n)}$ que se anula en cero ya que $\delta_i \in M$. Además $\delta$ determina una curva en G definida como antes $\gamma^t = \mathrm{Id.} + t\,\delta$

Por lo tanto $j^{k+1}(M\Delta) \subset T\mathcal{G}(j^{k+1}(Q))$ 1.21(4)

las contenciones 1.21(3) y 1.21(4) justifican la igualdad propuesta en el Lema 1.21.

$\square$

Corolario 1.22

Un germen $\eta$ es finitamente determinado si y solo si, $M^k \subset \Delta(\eta)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$

Demostración

$\eta$ finitamente determinado implica en particular que $\eta$ es k-determinado para alguna $k \in \mathbb{N}$ y por el inciso II del Teorema 1.19 se tiene $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta)$ y en consecuencia $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta) \subset \Delta(\eta)$

Recíprocamente. Si $M^k \subset \Delta(\eta)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ multiplicando esta contención por $M^2$ obtenemos:
$M^{k+2} \subset M^2\,\Delta(\eta)$ y por I del Teorema 1.19 implica que $\eta$ es $(k+1)$ - determinada y por tanto finitamente determinada.

$\square$

El Corolario anterior no menciona con precisión cual es la determinación de $\eta$.

Corolario 1.23

Si $\eta \in M - M^2 \Longrightarrow \eta$ es 1-determinado

Demostración

Si $\eta \in M - M^2 \Longrightarrow$ existe alguna $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} \notin M$ esto es $\left.\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right|_0 \neq 0$ para alguna $i=1,\ldots,n.$

(consulte Corolario 1.8) por lo tanto $\Delta(\eta)$ coincide con el anillo E, pues entre sus generadores hay una unidad a saber $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ y en consecuencia por I del Teorema 1.19 $\eta$ resulta ser 1-determinada.

$\square$

Observación 1.23(1)

De ahora en adelante el análisis de la k-determinación, para gérmenes en cero de funciones en $C^\infty$ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$, se hace exclusivamente en gérmenes pertenecientes al ideal $M^2$, pues el Corolario 1.23 señala que los gérmenes que están en $M-M^2$ tienen determinación uno y por el Corolario 1.15 la determinación de un germen $\eta$ coincide con la determinación del germen $\eta - \eta(0)$, es claro que este último germen pertenece al ideal maximal M (véase observación 1.15(1). Sin embargo debido a la importancia del siguiente teorema, como una excepción, se hará caso omiso de esta observación a fin de no restarle generalidad al mismo.

A diferencia del Teorema de Mather, el siguiente resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para la k-determinación. Al final de este capítulo se dan un par de contraejemplos que muestran que las condiciones I y II del Teorema 1.19 no son reversibles; completando de esta manera el estudio de la k-determinación de gérmenes en el anillo local E.

Teorema 1.24 (Stefan)

Sea $\eta$ un germen en el anillo local $E$, entonces $\eta$ es k-determinado si y solo si, $M^{k+1} \subset M\Delta(\eta+\mu)$ para todo germen $\mu$ perteneciente al ideal $M^{k+1}$.

Demostración. Necesidad: Sea $\mu \in M^{k+1}$ entonces de la Proposición 1.7 se tiene que $j^k(\mu) = 0$ en consecuencia $j^k(\eta+\mu) = j^k(\eta) + j^k(\mu) = j^k(\eta)$, es decir, $\eta+\mu \overset{k}{\sim} \eta$ pero por hipótesis $\eta$ es k-determinado, entonces en base a la Proposición 1.14(I) se infiere que $\eta+\mu$ también es k-determinado y de acuerdo al Teorema 1.19(II) se concluye que $M^{k+1} \subset M\Delta(\eta+\mu)$.

Suficiencia: De la contención $M^{k+1} \subset M\Delta(\eta+\mu)$ $\forall \mu \in M^{k+1}$ se demostrará que el germen $\eta$ es k-determinado esto es, se probará que todo germen $\xi$ en $E$ que sea k-equivalente con $\eta$ también es equivalente por la derecha con $\eta$ nótese que $\eta \overset{k}{\sim} \xi$ entonces $\xi - \eta \in M^{k+1}$ (véase 1.10(6)), de ahí que

$$\xi = \eta + \mu \qquad \text{para alguna} \qquad \mu \in M^{k+1}$$

Defínase ahora el germen $\Phi$ en $\{0\} \times \mathbb{R}$ de una función $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$\Phi(x, t) = (1-t)\,\eta(x) + t\,\xi(x)$, $\Phi$ definida de esta manera resulta ser un germen del anillo local $A$ (Proposición 1.16) que satisface $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \xi - \eta$, se tiene que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \in M^{k+1} \qquad \text{(1)}$$

Si $t$ en $\mathbb{R}$, sea $\phi^t$ la restricción de $\Phi$ en $\mathbb{R}^n \times t$, esto es $\phi^t(x) = \Phi(x, t)$. Es claro que $\phi^t$ es un germen en el anillo E que satisface $j^k(\phi^t) = j^k(\eta)$ ya que $j^k(\phi^t) = j^k(\eta) + t\left(j^k(\xi) - j^k(\eta)\right) = j^k(\eta) + t\,(0)$ ya que por hipótesis $j^k(\eta) = j^k(\xi)$ y $t$ es constante. Luego entonces, de nuestra hipótesis inicial se tiene que $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\phi^t)$, luego

$$M^{k+1} \subset M\,\Delta(\phi^t) + M^{k+2} \qquad \underline{(2)}$$

Ahora bién, si $t_0$ es un número fijo entonces $\dfrac{\partial \phi^{t_0}}{\partial x_i}(x)$ coincide con $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, t_0)$, de aquí que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, t_0) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, t) = (t_0 - t)\frac{\partial}{\partial x_i}(\Phi - \eta)(x)$$

Esto significa que $\dfrac{\partial \phi^{t_0}}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, t_0) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x, t) + (t_0 - t)\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\xi - \eta)\right)(x)$ pertenezca al ideal $\left\langle \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right\rangle + M_{n+1} \cdot M^k_{n+1}$, considerando a $t - t_0$ como un germen en el anillo A que claramente se anula en $t_0$ y recordando que $\dfrac{\partial}{\partial x}(\xi - \eta) \in M^k$ puede ser considerado como un germen en el anillo A (ver 1.17(1)) y por tanto como un elemento en el ideal $M^k_{n+1}$, por consiguiente $\dfrac{\partial \phi^{t_0}}{\partial x_i}$ pertenece al ideal $\Delta(\Phi) + M^{k+1}_{n+1}$, luego entonces,

$$\Delta(\phi^{t_0}) \subset \Delta(\Phi) + M^{k+1}_{n+1} \qquad \underline{(3)}$$

Sustituyendo 3 en 2 y considerando a cada uno de los ideales como un ideal en el anillo A, se obtiene la siguiente contención:

$M^{k+1}(A) \subset M\,\Delta\,(\,\phi^{t_0}\,)\,A + M^{k+2}(A) \subset M\left(\Delta\,(\,\Phi\,) + M^{k+1}_{n+1}\right)(A) +$
$+ M^{k+2}(A) \subset M\,\Delta\,(\,\Phi\,)\,A + M^{k+2}\,A$ es decir,

$M^{k+1}(A) \subset M\,\Delta\,(\,\Phi\,)\,A + M^{k+2}(A)$ . Utilizando el Lema de Nakayama 1.18 se obtiene que

$M^{k+1}(A) \subset M\,\Delta\,(\,\Phi\,)\,A = MA\,\Delta\,(\,\Phi\,)$ ; finalmente de esta última contención y de (2) se obtiene que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ pertenece al ideal $MA\,\Delta\,(\,\Phi\,)$ , luego entonces, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

donde $\xi_i \in MA \subset \mathcal{A}$ (recuérdese que $\mathcal{A}$ es el ideal maximal de A el cual esta formado por los gérmenes que se anulan en $(0,\, t_0)$). En consecuencia $\Xi = (\,\xi_1\,,\ldots,\,\xi_n)$ es un germen en èl punto $(0,\, t_0)$ de alguna función en $C^\infty(\,\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,,\,\mathbb{R}^n\,)$ que satisface $\Xi\,(0,\, t) = 0$ y para todo punto $(x,\, t)$ en una vecindad de $(0,\, t_0)$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} - \xi_i\,(x,t)\,\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Este es precisamantte el postulado del Lema 3 que aparece en la demostración del Teorema 1.19 (I), el cual garantiza la existencia de un germen $T$ en $(0,\, t_0)$ $\forall\; t_0 \in (0,\, 1)$ del anillo A (ver Lema 1 en demostración del Teorema de Mather) que satisface:

a) $T\,(x,\, t_0) = x$

b) $T\,(0,\, t) = 0$

c) $\Phi\left(T\,(x,\, t)\,,\, t\right) = \Phi\,(x,\, t_0)$

Con este germen $T$ se construye una familia de difeomorfismos $\gamma^t$ en G para t en una vecindad de $t_0$ con las siguientes propiedades:

I $\quad \gamma^{t_0} = \mathrm{Id}.$

II $\quad \varphi^{t} \circ \gamma^{t} = \gamma^{t_0}$ (ver Proposición 1.20)

Finalmente, de la compacidad y conexidad del intervalo (0, 1) es posible elegir un número finito de difeomorfismos, cuya composición nos exhibe la equivalencia por la derecha de los gérmenes $\eta$ y $\xi$ concluyendo así la k-determinación del germen $\eta$.

$\square$

__NOTA:__ La justificación de estos últimos argumentos está contenida, con todos sus detalles, en la demostración del Teorema 1.19 (i).

__Definición__

La esencia de un germen $\eta$ en E con respecto a un sistema fijo de coordenadas $x_i \in \mathbb{R}^n$ se define como el mínimo de los naturales k para el cual el k-jet de $\eta$ contiene a todas las coordenadas $x_i$, lo que denotaremos como $E_s(\eta)$. 1.24(1)

Corolario 1.25

La determinación de $\eta$ es mayor o igual que la esencia de $\eta$ con respecto a cualquier sistema de coordenadas. Simbólicamente

$$\det(\eta) \geq E_s(\eta)$$

Demostración

Supóngase que $\eta$ es finitamente determinada, esto es, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\det(\eta) = k$ ; si $k < E_s(\eta)$ entonces por definición existe alguna $x_i$ $i=1,\dots,n$ tal que $x_i \notin j^k(\eta)$. Considérese el germen $\xi = j^k(\eta)$ entonces $\Delta(\xi)$ no contiene a potencia alguna de $x_i$ y por lo tanto tampoco contiene a ninguna potencia del ideal maximal M, esto significa por una parte que $\xi$ no puede ser finitamente determinado (véase Corolario 1.22) pero por otra se tiene que $\eta$ es k-equivalente con $j^k(\eta)$ y por construcción $j^k(\eta)$ coincide con $\xi$ en consecuencia por transitividad se tiene $\eta$ k-equivalente con $\xi$ y de acuerdo a la Proposición 1.13 se obtiene que el germen $\xi$ es k-determinado, por lo tanto, suponer que la determinación de $\eta$ es menor que la esencia de $\eta$ nos conduce a una contradicción. $\square$

Para concluir este capítulo damos dos contraejemplos que muestran que las condiciones I y II del Teorema 1.19 no son reversibles.

Ejemplo 1.-

Para $n=1$ el anillo $E = E_1$ consta de los gérmenes en cero de funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de funciones $C^\infty$ y $M$ es el ideal generado por el germen de $x$.

Sea $\eta$ el germen de $E_1$ dado por $\eta(x) = x^{k+1}$ entonces $\Delta = \Delta(\eta)$ es el ideal generado por $(k+1)\, x^k$ que es por definición $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$ y como el Jacobiano es independiente de un cambio de coordenadas, en este caso dado por $x \longrightarrow \sqrt[k]{k+1}\ x$ (ver 1.13(2)) se tiene que $\Delta(\eta)$ $\Delta = M^k$ que a su vez está generado por $x^k$. Consecuentemente $\Delta = M^k$ implica $M^{k+1} \subset M\Delta$ y $M^{k+2} \subset M^2\Delta$ y de acuerdo a I del Teorema 1.19 se tiene que $\eta$ es $(k+1)$ determinado.

Ahora bien $E_s(\eta) = k+1$

En efecto
$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}(\eta) = \begin{cases} \dfrac{(k+1)!}{(k+1-s)!} \cdot x^{k-s} & \text{si } s \leq k \\ (k+1)! & \text{si } s = k+1 \end{cases}$$

entonces
$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}(\eta)\Big/_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq k \\ (k+1)! & \text{si } s = k+1 \end{cases}$$

de donde
$$j^s(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq k \\ x^{k+1} & \text{si } s = k+1 \end{cases}$$

luego entonces, $k+1$ es el menor de los naturales con la propiedad de que $j^{k+1}(\eta)$ contiene a la variable $x$. Por lo tanto $E_s(\eta) = k+1$.

Hasta aquí hemos demostrado que $E_s(\eta) = k+1$ $M^{k+1} \subset M\Delta$ y $\eta$ es $k+1$-determinado y sin embargo $\eta$ no es $k$-determinado ya que si así fuera tendríamos por una parte $\det(\eta) \leq k$ y por la otra, de acuerdo al Corolario 1.24 se tendría que $E_s(\eta) \leq \det(\eta)$ que conduciría a la contradicción $k+1 \leq k$ luego entonces la condición II del Teorema 1.19 no es reversible, es decir, $M^{k+1} \subset M\Delta$ no basta para garantizar que $\eta$ sea $k$-determinada.

<u>Ejemplo 2.-</u>

Para $n=2$ $E_2 = E$ consta de los gérmenes de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $C^\infty$. El ideal $M$ está generado por los gérmenes $x, y$ y consecuentemente $M^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$.

Sea $\eta = \dfrac{x^3}{3} + xy^3$ entonces el ideal Jacobiano de $\eta$ está generado por $x^2 + y^3$ y por $xy^2$ (véase observación 1.8(2)).

Ahora $M^2\Delta = (x^2, xy, y^2)(x^2 + y^3, xy^2)$

$$\xi_1 = x^4 + x^2y^3 \ , \qquad \xi_2 = x^3y^2 \ , \qquad \xi_3 = x^3y + xy^4 \ ,$$

$$\xi_4 = x^2y^3 \ , \qquad \xi_5 = x^2y^2 + y^5 \ , \qquad \xi_6 = xy^4$$

Sea $\xi = (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_6 \xi_6)$.

En esta expresión sustituímos los valores de $\lambda_i$ como se indica en 1, 2, ... 7 para obtener los generadores de $M^6$.

Para 1, 2 y 3 considérese $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$.

1.- $\lambda_1 = x^2$ y $\lambda_4 = -x^2$ entonces $\xi = x^6$

2.- $\lambda_1 = xy$ y $\lambda_4 = -xy$ entonces $\xi = x^5y$

3.- $\lambda_1 = y^2$ y $\lambda_4 = -y^2$ entonces $\xi = x^4y^2$

4.- $\lambda_2 = y$ y $\lambda_i = 0$ $i \neq 2$ entonces $\xi = x^3y^3$

5.- $\lambda_4 = y$ y $\lambda_i = 0$ $i \neq 4$ entonces $\xi = x^2y^4$

6.- $\lambda_6 = y$ y $\lambda_i = 0$ $i \neq 6$ entonces $\xi = xy^5$

7.- $\lambda_5 = y$ y $\lambda_4 = -1$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_6 = 0$

entonces $\xi = y^6$.

Por lo tanto, $M^6 \subset M^2\Delta$ que a su vez implica por I del Teorema 1.19 que $\eta$ es 5-determinada.

Ahora bien si la ecuación:

$$y^5 = \lambda_1(x, y)(x^4 + x^2y^3) + \lambda_2(x, y)\, x^3y^2 + \lambda_3(x, y)(x^3y + xy^4) +$$

$$+ \lambda_4(x, y)\, x^2y^3 + \lambda_5(x, y)(x^2y^2 + y^5) + \lambda_6(x, y)\, xy^4$$

tuviese solución para ciertos gérmenes $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$ del anillo E entonces al aplicar los operadores $\frac{\partial^5}{\partial y^5}$ y $\frac{\partial^4}{\partial y^2 \, \partial x^2}$ a la igualdad anterior y evaluando en cero, se llegaría a la siguiente contradicción: en el primer caso $\lambda_5(0, 0) = 1$ y en el segundo $\lambda_5(0, 0) = 0$ es claro que ambas situaciones no pueden ocurrir simultáneamente.

Como puede apreciarse el sistema planteado por la ecuación $y^5 = \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_6 \xi_6$ no tiene solución, en otras palabras, $M^5$ no está contenido en $M^2\Delta$. No obstante se demostrará que el germen $\eta = \frac{x^3}{3} + xy^3$ es 4-determinada y en consecuencia la condición I del Teorema 1.19 tampoco es reversible.

Para mostrar que la determinación de $\eta$ es 4, obsérvese que la esencia de $\eta$ es 4 ya que $j^4(\eta) = x^3/3 + xy^3$ es el menor de los jets de $\eta$ que contiene a las variables x, y, pues por una parte el uno-jet de $\eta$ y el 2-jet de $\eta$ son cero, ya que $\eta$ no contiene monomios de grado $\leq 2$; en tanto que $j^3(\eta) = x^3/3$ solo contiene a la variable x, luego entonces por el Corolario 1.25 $\det(\eta) \geq 4$.

De acuerdo al Teorema 1.24 (Stefan) el germen $\eta$ será 4-determinado siempre y cuando el ideal $M^5$ esté contenido en el Producto $M\Delta(\eta+\mu)$ para cualquier germen $\mu$ en $M^5$ o equivalentemente por el Lema de Nakayama 1.18

$$M^5 \subset M\Delta(\eta+\mu)+M^6 \qquad \forall \mu \in M^5 \tag{1.25(1)}$$

Del Corolario 1.6 se sabe que los generadores de $M^5$ son : $x^5$, $x^4y$, $x^3y^2$, $x^2y^3$, $xy^4$, $y^5$ luego para exhibir que $M^5 \subset M\Delta(\eta+\mu)+M^6$, será suficiente expresar cada generador de $M^5$ en la forma:

$$\lambda_1\left(x\frac{\partial}{\partial x}(\eta+\mu)\right)+\lambda_2\left(y\frac{\partial}{\partial x}(\eta+\mu)\right)+\lambda_3\left(x\frac{\partial}{\partial y}(\eta+\mu)\right)+$$

$$+\lambda_4\left(y\frac{\partial}{\partial y}(\eta+\mu)\right)+\nu \qquad (\nu\in M^6),$$ donde $\nu$ pertenece al ideal $M^6$ o bien

$$\begin{aligned}&\lambda_1(x^3+xy^3)+\lambda_2(x^2y+y^4)+\lambda_3(x^2y^2)+\\&+\lambda_4(xy^3)+\lambda_1\left(x\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)+\lambda_2 y\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)+\\&+\lambda_3 x\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)+\lambda_4 y\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)+\nu\end{aligned} \tag{1.25(2)}$$

Puesto que $M\Delta(\eta+\mu)=\left\langle x\frac{\partial\eta}{\partial x}+x\frac{\partial\mu}{\partial x},\right.$

$$\left. y\frac{\partial\eta}{\partial x}+y\frac{\partial\mu}{\partial x},\ x\frac{\partial\eta}{\partial y}+x\frac{\partial\mu}{\partial y},\ y\frac{\partial\eta}{\partial y}+y\frac{\partial\mu}{\partial y}\right\rangle=$$

$$=\left\langle x^3+xy^3+x\frac{\partial\mu}{\partial x},\ x^2y+y^4+y\frac{\partial\mu}{\partial x},\ x^2y^2+x\frac{\partial\mu}{\partial y},\ xy^3+y\frac{\partial\mu}{\partial y}\right\rangle$$

Con el fin de expresar todos los generadores de $M^5$, con excepción de $y^5$, como se propone en 1.25(2), sustitúyanse los valores de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$, $\lambda_5$ y $\nu$ en dicha expresión como se muestra en la siguiente tabla.

| | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^5$ | $x^2$ | $0$ | $0$ | $-x^2$ | $-x^2\left(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ |
| $x^4y$ | $xy$ | $0$ | $0$ | $-xy$ | $-xy\left(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ |
| $x^3y^2$ | $y^2$ | $0$ | $0$ | $-y^2$ | $-y^2\left(x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ |
| $x^2y^3$ | $0$ | $0$ | $0$ | $x$ | $-xy\frac{\partial u}{\partial y}$ |
| $xy^4$ | $0$ | $0$ | $0$ | $y$ | $-y^2\frac{\partial u}{\partial y}$ |

<u>1.25(3)</u>

<u>NOTA</u>: Todos los elementos de la sexta columna pertenecen al ideal $M^6$, pues por hipótesis $u \in M^5$ entonces

$\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ pertenecen al ideal $M^4$ y en cada caso

$\frac{\partial u}{\partial x}$ y/o $\frac{\partial u}{\partial y}$ tienen como factor un monomio

de grado $\geq 2$.

Para obtener $y^5$ en la expresión dada en 1.25(2) será suficiente determinar los valores de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ y $\nu$

únicamente para los 7 casos siguientes:

$\mu = 0$ , $x^5$ , $x^4y$ , $x^3y^2$ , $x^2y^3$ , $xy^4$ , $y^5$ , esto es posible ya que cualquier otro elemento de $M^5$ es expresable en términos de estos.

Las 7 ecuaciones para calcular $y^5$ se obtienen de la siguiente manera:

| $\mu$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\nu$ | = |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $y$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $y^5$ |
| $x^5$ | $0$ | $y$ | $-1$ | $0$ | $-5x^4y^2$ | $y^5$ |
| $x^4y$ | $x^2$ | $y$ | $-1$ | $0$ | $-4x^6y-5x^3y^3$ | $y^5$ |
| $x^3y^2$ | $2xy$ | $y$ | $-1$ | $0$ | $-6x^4y^3-5x^2y^4$ | $y^5$ |
| $x^2y^3$ | $3y^2$ | $y$ | $-1$ | $0$ | $-6x^2y^5-5xy^5$ | $y^5$ |
| $xy^4$ | $0$ | $y$ | $-1$ | $4x$ | $-16x^2y^4-y^6$ | $y^5$ |
| $y^5$ | $0$ | $y$ | $-1$ | $5y$ | $-25y^6$ | $y^5$ |

<u>1.25(4)</u>

Luego entonces de 1.25(2), 1.25(3) y 1.25(4) y aplicando el Lema de Nakayama en 1.25(1) se concluye que el ideal $M^5$ efectivamente este contenido en el producto $M\Delta(\eta+\mu)$ $\forall \mu \in M^6$ y por el Teorema 1.24 se tiene que el germen $\eta = x^3/3 + xy^3$ es 4-determinado.

1.25(5)

# CAPITULO 2

## Determinación de gérmenes de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$.

En este capítulo se estudia la determinación de gérmenes de funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (ver 1.0 (2) ), donde $p$ es estrictamente mayor que uno. El teorema 2.3 proporciona un criterio análitico para la determinación finita de gérmenes en el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $E_{(n,p)}$ (véase corolario 1.2) pero visto como $E_n$- módulo; en tanto que el teorema 2.4 afirma que la determinación finita de gérmenes en $E_{(n,p)}$ únicamente se obtiene una sola clase de equivalencia, ésta corresponde a la órbita del germen en cero de la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$, de ésto último se desprende que no existen gérmenes finitamente determinados en $E_{(n,p)}$ si $n$ es menor que $p$, aunque debe acotarse que si se admite la equivalencia por la derecha y por la izquierda en las definiciones dadas en los apartados 1.10 (2) y 1.10 (5) entonces la situación es distinta.

Se advierte al lector que en este capítulo se utilizará la notación introducida en el capítulo 1.

$E_{(n,p)}$ admite una estructura de $E_n$-módulo ya que visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E_{(n,p)}$ es isomorfo a $E_n \times \ldots \times E_n$ (p-factores) y $E_n$ además de ser un espacio vectorial es un anillo (véase proposición 1.1 y corolario 1.2) .

Luego entonces, el $E_n$- submódulo $M_{(n,p)}$ del módulo $E_{(n,p)}$ es por definición $M_n \times \ldots \times M_n$ (p-factores) (véase corolario 1.5)

2.0 (1)

Todo germen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ de $\mathcal{E}_{(n,p)}$ induce un morfismo de $\mathcal{E}_n$- módulos $T\eta : \mathcal{E}_{(n,n)} \longrightarrow \mathcal{E}_{(n,p)}$ de la siguiente manera:

$$\forall \xi \in \mathcal{E}_{(n,n)} \text{ defínase } T\eta(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(\xi_i) \qquad 2.0\ (2)$$

es decir $T\eta(\xi) = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_i}(\xi_i), \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_p}{\partial x_i}(\xi_i) \right)$

$T\eta$ es claramente un morfismo de $\mathcal{E}_n$- módulos.

Observación.

Obsérvese que $T\eta(\mathcal{E}_{(n,n)})$ está contenido en

$$\Delta(\eta_1) \times \dots \times \Delta(\eta_p) \qquad 2.0\ (3)$$

ya que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i}(\xi_i)$ pertenece al ideal Jacobiano.

$\Delta(\eta_j)$ $j=1, \dots, p$.

Con la ayuda de los morfismos $T\eta$ y recordando que la determinación de un germen es independiente del valor que éste tenga en cero (véase 1,15 (1) es posible reformular la versión algebráica del teorema de Mather 1.19 para gérmenes en el $\mathcal{E}_n$- módulo $\mathcal{E}_{(n,p)}$ como sigue.

Teorema 2.1

Un germen $\eta$ que pertenece al $\mathcal{E}_n$- módulo $\mathcal{E}_{(n,p)}$ y se anula en cero es finitamente determinado si, y solo si, la imágen de $\mathcal{E}_{(n,n)}$ bajo $T\eta$ contiene el ideal $M^k_{(n,p)}$ para algún número natural K donde $M^k_{(n,p)} = M^k_n \times \dots \times M^k_n$ (p-factores).

La demostración de éste teorema involucra los argumentos que se utilizaron en la prueba del teorema 1.19 y el corolario 1.22; únicamente hay que hacer las adaptaciones correspondientes a gérmenes en $\mathcal{E}_{(n,p)}$.

Como una alternativa a la formulación algebráica para la K- determinación de gérmenes dada por el teorema anterior; a continuación se da un criterio análitico de la misma, para ello se requiere considerar a $E_n$ y $E_{(n,p)}$ como módulos con variable compleja de la siguiente manera:

Sea $\eta^{\mathbb{C}}$ la complificación del germen $\eta$ , esto es $\eta^{\mathbb{C}}$ es el germen que tiene la misma regla de correspondencia que el germen $\eta$ ,sólo que a diferencia de éste último $\eta^{\mathbb{C}}$ utiliza variables complejas y toma valores en los números complejos.

Así por ejemplo, si $\eta$ es un germen en $E_{(n,p)}$ entonces del apartado 1.12 (5) se tiene que las coordenadas $i$ de $j^k(\eta)$, $j^k(\eta^{\mathbb{C}})$ son de la forma.

$$\sum_{\alpha} a_i^{\alpha} \cdot X^{\alpha} \quad \text{donde} \quad |\alpha| \leq k,\ a_i^{\alpha} \in \mathbb{R} \ \text{y} \ X \in \mathbb{R}^n \ \text{y}$$

$$\sum_{\alpha} a_i^{\alpha} \, \omega^{\alpha} \quad \text{donde} \quad \omega \in \mathbb{C}^n \qquad 2.1\ (1)$$

Nuestro interés es investigar la determinación finita de gérmenes en $E_{(n,p)}$ y ésta es posible conocerla al analizar los K-jets de dichos gérmenes (consulte la proposición 1.13); ésto nos permite hacer el análisis de la determinación finita de gérmenes en un espacio de funciones -- analíticas, más aún, por 2.1 (1) y el lema 1.11 en un espacio de funciones polinomiales, las cuales tienen en cada coordenada un polinomio en - n-variables de grado menor ó igual que K.

De ahí que puede suponerse sin pérdida de generalidad que $\eta^{\mathbb{C}}$ es el germen de alguna función analítica de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^p$ .

En estas condiciones si se consideran exclusivamente a los gérmenes de funciones analíticas entonces los $E_n$-módulos $E_{(n,n)}$ y $E_{(n,p)}$ - se transforman en los $E_n$-módulos $E_{(n,n)}$ y $E_{(n,p)}$ respectivamente, es decir $E_n$ , $E_{(n,n)}$ y $E_{(n,p)}$ constan exclusivamente de las complifica -

ciones de todos los gérmenes analíticos que pertenecen a $E_n$, $E_{(n,n)}$ y $E_{(n,p)}$ respectivamente.

Ahora considérese el conjunto de singularidades de un germen $\eta^{\mathbb{C}}$ y denótesele como $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ es decir,

$$\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / \text{rang } (D_z(\eta^{\mathbb{C}}) < p \right\} \qquad 2.1\ (2)$$

$\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ es un conjunto análitico. En efecto, si $z \in \Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ entonces $D_z(\eta^{\mathbb{C}})$ es una matriz de $p.n$ que tiene rango menor que $p$, ésto significa que el determinante de cualquier menor de $p \times p$ de la matriz $D_z(\eta^{\mathbb{C}})$ es cero y como estos determinantes son sumas de productos de funciones analíticas, entonces, en cada uno de ellos se están considerando los ceros de funciones analíticas.

Obsérvese que si $n$ es menor que $p$ entonces $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ coincide con $\mathbb{C}^n$, éste caso es de poco interés, ya que todo punto del dominio es una singularidad. 2.1 (3)

Lema 2.2

Sea $\eta$ un germen en el $E_n$-módulo $E_{(n,p)}$ entonces las dos afirmaciones siguientes son equivalentes.

a) $T\eta\,(E_{(n,n)}) \supset M^k_{(n,p)}$

b) $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) \subset \{0\}$

Demostración

(a) $\Rightarrow$ (b)

Supóngase que existe un elemento $z$ en $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ y que $z \neq 0$ entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $z_i \neq 0$. Considérese --- $P_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $P_i(\omega) = \omega_i$ ; $\forall\, \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$.

Sea $e_j$ el vector de $\mathbb{C}^p$ que tiene uno en la coordenada $j$ y cero en sus demás coordenadas entonces $\left\{ (p_i^k) \cdot e_j \quad j=1, \dots, p \right\}$ es un conjunto de gérmenes linealmente independientes que generan un subespacio p-dimensional de $\mathcal{T}\eta^{\mathbb{C}}(E^{\mathbb{C}}_{(n,n)})$ ya que claramente cada germen $p_i^k \cdot e_j$ pertenece al submódulo $M^k_{(n,p)}$ y por hipótesis, ésto último está condenido en la imágen de $E^{\mathbb{C}}_{(n,n)}$ bajo $\mathcal{T}\eta^{\mathbb{C}}$.

Esto es equivalente a afirmar que el subespacio p-dimensional generado por $z_i^k \cdot e_1, \dots, z_i^k \cdot e_p$ está contenido en la imagen de $D_z \eta^{\mathbb{C}}$ la cual tiene dimensión menor que $p$ en $\mathbb{C}^p$ ya que se está asumiendo que la derivada en $z$ de $\eta^{\mathbb{C}}$ tiene rango estrictamente menor que $p$, por consiguiente, ésta última contención es imposible; consecuentemente $z$ no puede ser distinto de cero. Por lo tanto, $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ esta contenido en $\{0\}$.

nota: La contención $M^k_{(n,p)} \subset \mathcal{T}\eta(E_{(n,n)})$ implica la contención

$(M^{\mathbb{C}}_{(n,p)})^k \subset \mathcal{T}\eta^{\mathbb{C}}(E^{\mathbb{C}}_{(n,n)})$.

(b) $\Longrightarrow$ (a)

Caso 1: $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \emptyset$

En este caso necesariamente $n \geq p$ pues de lo contrario de la observación 2.1 (3) se tendría que $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}^n$. Como $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ es vacío entonces no existe singularidad alguna, ésto significa que en particular el cero es un punto regular de $\eta^{\mathbb{C}}$ y por el Teorema de la Sumersión se tiene que localmente $\eta^{\mathbb{C}}$ es una proyección de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^p$ de ahí que la imagen de $E^{\mathbb{C}}_{(n,n)}$ bajo $\mathcal{T}\eta^{\mathbb{C}}$ necesariamente contenga a $M^{\mathbb{C}}_{(n,p)}$ pues $M^{\mathbb{C}}_{(n,n)}$ se proyecta en $M^{\mathbb{C}}_{(n,p)}$ bajo $\mathcal{T}\eta^{\mathbb{C}}$.

Caso 2 : $\Sigma(\eta^{c}) = 0$.

Sea $\mathcal{A}_r$ una submatríz de p.p de la matríz $D_0(\eta^{c})$, esto es $\mathcal{A}_r$ contiene p-columnas de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial w_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial w_i} \end{pmatrix} \qquad 1 \leq i \leq n \qquad \text{como:}$$

rang $(D_0(\eta^{c}) < p)$ entonces $|\mathcal{A}_r|(0) = 0$ 2.2 (1)

desarrollando a la submatríz $\mathcal{A}_r$ con respecto al renglón j se tiene que

$$|\mathcal{A}_r| = \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial \eta_j^{c}}{\partial w_{i_s}} \cdot |\mathcal{A}_r(j,s)| \qquad 2.2\ (2)$$

donde $1 \leq i_s \leq n$, $\mathcal{A}_r(j,s)$ es la submatríz de $\mathcal{A}_r$ de tamaño $(p-1) \cdot (p-1)$ que se obtiene al cancelar el renglón j y la columna S de $\mathcal{A}_r$.

En consecuencia, al sustituir en 2.2 (2) $\frac{\partial \eta_j^{c}}{\partial w_{i_s}}$ por $\frac{\partial \eta_h^{c}}{\partial w_{i_s}}$ se obtiene una submatríz de p.p con dos renglones iguales a saber, el renglón j y el renglón h si $h \neq j$, entonces

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{\partial \eta_h^{c}}{\partial w_{i_s}} |\mathcal{A}_r(j,s)| = 0 \qquad 2.2\ (3)$$

Considérese $\Sigma_r = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / |\mathcal{A}_r|(z) = 0 \right\}$; de 2.2 (1) se sigue que -- $0 \in \Sigma_r\ \forall r$ esto significa que $\Sigma(\eta^{c}) \subset \bigcap_r \Sigma_r$, para exhibir la otra contención considérese $z \in \bigcap_r \Sigma_r$ entonces $|\mathcal{A}_r|(z) = 0\ \forall r$ luego entonces $D_z(\eta^{c})$ tiene rango menor que p por consiguiente -- $z \in \Sigma(\eta^{c})$ en consecuencia $\bigcap_r \Sigma_r = \Sigma \eta^{c}$ $\therefore$ $\bigcap_r \Sigma_r = \{0\}$

nota: $r$ recorre un conjunto de índices cuya cardinalidad es equivalente al número total de menores de p x p que posee la matríz $D_0(\eta^{c})$.

Ahora bien, considérese el germen de la proyección en la coordenada
$i$ de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ , es decir, $P_i(\omega) = \omega_i$ , como el polinomio $P_i$ se anula
en cero, entonces por el Teorema de los ceros de Hilbert, se tiene que pa-
ra cierto número natural $K_i$ el polinomio $P_i^{ki}$ pertenece al ideal , $\mathcal{J}$ ,
generado por todos los determinantes de los menores $\mathcal{A}_\gamma$ de $p \times p$ de la-
matríz $D_0(\eta^{\mathbb{C}})$ . Sea $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ entonces para todo multiíndi-
ce $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de norma $K$ se tiene que el polinomio homo
géneo $\omega^\alpha = \omega_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \omega_n^{\alpha_n}$ (véase 3 en 1.2 (3) ) también pertene
ce al ideal $\mathcal{J}$ ya que no es posible que ocurra $\alpha_i < K_i \; \forall i$ y al mismo
tiempo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = |\alpha| = K \;\therefore$
$\omega^\alpha = \sum_\gamma \mu_\gamma \cdot |\mathcal{A}_\gamma|$ donde $\mu_\gamma$ es un polinomio en n-variables;
sustituyendo $|\mathcal{A}_\gamma|$ como se propone en 2.2 (2) se tiene que

$$\omega^\alpha = \sum_\gamma \left( \mu_\gamma \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial \eta_j^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_{i_s}} \cdot \left| \mathcal{A}_\gamma(j,s) \right| \right) \qquad 2.2\ (4)$$

Como $1 \leq i \leq n$ entonces en virtud de las leyes asociativa, --
conmutativa y distributiva válidas en el anillo de los polinomios de n-va-
riables es posible factorizar en la expresión anterior, aquellos gérmenes-
que tengan como factor común

$\dfrac{\partial \eta_j^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_i}$ para $i = 1, \dots, n$ y agruparlos en
n-sumas a fin de expresar a $\omega^\alpha$ en la forma

$$\omega^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_j^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_i} (\xi_i) \quad \text{donde} \quad \xi_i = \sum_{\substack{\gamma\,(j,s)\\ i_s = i}} \mu_\gamma \left| \mathcal{A}_{\gamma\,(j,s)} \right| \qquad 2.2\ (5)$$

es un germen en $E_n^{\mathbb{C}}$ .

Considérese el germen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ del
$E_n^{\mathbb{C}}$-módulo $E_{(n,n)}^{\mathbb{C}}$ , entonces de la definición 2.0 (2) se tiene que

$$\tilde{\eta}^{\mathbb{C}}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_i} (\xi_i) = \omega^\alpha (e_j) \qquad 2.2\ (6)$$

donde $e_j$ es el vector columna $\mathbb{C}^n$ que tiene uno en la coordenada $j$ y cero en sus demás coordenadas.

Para verificar esta igualdad sustituya $h$ por $j$ en 2.2 (5), agrúpese ésta suma como se indica en 2.2 (4) y aplíquese la igualdad dada en 2.2 (3) para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_h^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_i} ( \xi_i ) = \begin{Bmatrix} \omega^{\alpha} & si & h = j \\ 0 & si & h \neq j \end{Bmatrix}$$

Por consiguiente, de 2.2 (6) se concluye que la imágen de $E^{\mathbb{C}}_{(n,n)}$ bajo $T\eta^{\mathbb{C}}$ contiene a $( M^{\mathbb{C}}_{(n,p)})^k$ ya que los generadores de éste último ideal son de la forma $\omega^{\alpha} ( e_j)$. Esto equivale a decir que $M^k_{(n,p)}$ está contenido en $T\eta ( E_{(n,n)})$.

$\square$

Teorema 2.3

Un germen $\eta$ que pertenece al módulo $E_{(n,p)}$ sobre el anillo $E_n$ es finitamente determinado sí, y solo sí, el conjunto de singularidades del germen $\eta^{\mathbb{C}}$ es vacío ó únicamente consta del cero, es decir,

$$\Sigma ( \eta^{\mathbb{C}} ) \subset \{0\}.$$

nota: Este teorema es válido para toda $p \geq 1$ y para toda $n \geq p$ (véase la justificación de la segunda de estas afirmaciones en la prueba del lema 2.2 (caso 1 de b $\Longrightarrow$ a ).

La demostración del teorema 2.3 es una aplicación directa del teorema 2.1 y del lema 2.2.

El siguiente resultado afirma que los únicos gérmenes que son finitamente determinados en el módulo $E_{(n,p)}$ sobre el anillo $E_n$ para $p \geq 2$ pertenecen a la órbita del germen en cero de la proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$, es más, también asegura que la determinación de éstos

Teorema 2.4

Sea $\eta$ un germen en el módulo $\mathcal{E}_{(n,p)}$ y $p \geq 2$ entonces $\eta$ es finitamente determinado sí y solo sí, $\eta$ es equivalente por la derecha con el germen de un epimorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$.

Demostración.

Suficiencia: Si $\eta$ es equivalente por la derecha con un epimorfismo p $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ entonces por definición $\eta = \rho \circ \gamma$ para al-- gún $\gamma \in \omega$ (véase 1.10 (1) y 1.10 (02) ); luego entonces, la derivada en cero de $\eta$ es un epimorfismo ya que $D_0 ( \gamma )$ es un isomorfismo- y $D_0 ( \rho )$ coincide con $\rho$ por consiguiente el teorema de submersión, afirma que localmente $\eta$ difiere por un difeomorfismo en el dominio del germen de la proyección $\pi$ en el primer factor de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ en $\mathbb{R}^p$.

Ahora bien, cualquier germen $\xi$ de $\mathcal{E}_{(n,p)}$ que satisfaga $j^1 ( \eta ) = j^1 ( \xi )$ evidentemente satisface $Do ( \eta ) = Do ( \xi )$ y en consecuencia por el mismo argumento anterior, se tiene que el germen $\xi$ es equivalente por la derecha con el germen $\pi$ y por transitividad también es equivalente por la derecha con el germen $\eta$, ésto significa que la determinación de $\eta$ es uno, por lo tanto, $\eta$ es finitamente -- determinado.

Necesidad: Se mostrará que un germen es equivalente por la derecha con el germen de un epimorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ si el germen es finitamente determinado. Procédase en la siguiente forma: en virtud del teorema 2.3, un germen $\eta$ es finitamente determinado sí, y solo sí, $\Sigma ( \eta^{\mathbb{C}} )$ está contenido en $\{ 0 \}$, en esta contención existen dos- posibilidades

1.- $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \emptyset$.

2.- $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \{0\}$

[En ambos casos necesariamente $n \geq p$ (véase observación 2.1 (3)]

De la primera de estas posibilidades se sigue la conclusión del teorema. En efecto, como $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ es vacío entonces el germen $\eta^{\mathbb{C}}$ no posee singularidad alguna, es decir, en todo punto del dominio la derivada de $\eta^{\mathbb{C}}$ es un epimorfismo, en particular, el cero es un punto regular de $\eta^{\mathbb{C}}$ y por el teorema de sumersión se tiene que localmente el germen $\eta^{\mathbb{C}}$ difiere del germen de un epimorfismo de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^p$ por un difeomorfismo en el dominio; esto significa que el germen $\eta$ es equivalente por la derecha con el germen de un epimorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$ ya que $\eta$ coincide con la restricción de $\eta^{\mathbb{C}}$ en parte imaginaria idénticamente cero.

Con respecto a la segunda posibilidad la situación es la siguiente:

Si se supone que $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \{0\}$ entonces por una parte se tiene que la dimensión de $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$, considerada ésta como variedad algebráica, es idénticamente cero; y por otra parte es posible expresar a $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ como la imágen inversa de una variedad algebráica de codimensión menor ó igual que $n-(p-1)$ bajo una función analítica que preserva esta desigualdad en la codimensión del dominio. Es decir, en éste caso la codimensión de $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ tendría que ser menor ó igual que $n-(p-1)$ ó equivalentemente

$$\dim\left(\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})\right) = n - \operatorname{cod}\left(\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})\right) \geq n-n+p-1 = p-1 \geq 1$$

ya que por hipótesis $p \geq 2$.

Como ambas situaciones no ocurren simultáneamente entonces $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \{0\}$ es imposible.

En el siguiente párrafo se muestra que $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ es la imágen - inversa de una variedad algebráica bajo una función analítica como se acaba de proponer.

Sea $S_{(p,n)}$ el espacio vectorial de todas las matrices de $p \times n$ sobre el campo de los números complejos y considérese a $S_c$ el subespacio vectorial de $S_{(p,n)}$ que consta de todas las matrices de rango $c$, entonces, en virtud del teorema de rango constante se tiene que $S_c$ es - una subvariedad diferenciable de $S_{(p,n)}$ de codimensión $(n-c)(p-c)$.(Proposición 5.3 Cap. II (G,G. ). Mas aún el conjunto de matrices de rango $\leq p-1$ es un conjunto algebráico ya que está dado por los ceros de todos los menores de $p \times p$.

Ahora bien, el conjunto $S = \bigcup_{c=0}^{p-1} S_c$ resulta ser un conjunto algebráico de codimensión igual a $n-(p-1)$ en $S_{(p,n)}$, pues es una unión finita de variedades diferenciables, cuya codimensión mínima es $n-(p-1)$ como $S_{(p,n)}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^{p\times n}$ entonces resulta que $S$ puede ser considerado como un conjunto algebráico de codimensión $n-(p-1)$ en $\mathbb{C}^{p\times n}$.

Ahora considérese la función $\rho_{\eta^{\mathbb{C}}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow S_{(p,n)}$ definida de la siguiente manera $\forall\, z \in \mathbb{C}^n$

$$\rho_{\eta^{\mathbb{C}}}(z) = \left( \frac{\partial \eta_i^{\mathbb{C}}}{\partial \omega_j}(z) \right)$$

Como $\eta^{\mathbb{C}}$ es una función analítica, entonces, así mismo lo es la función $\rho_{\eta^{\mathbb{C}}}$ (consulte el párrafo previo a 2.1 (2) ).

Además $\rho_{\eta^{\mathbb{C}}}(0)$ está en $S$ ya que se partió del supuesto $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) = \{0\}$ entonces rang $(D_0(\eta^{\mathbb{C}})) < p$. La imágen inversa de $S$ bajo $\rho_{\eta^{\mathbb{C}}}$ es por definición

$\left\{ z \in \mathbb{C}^n \;/\; \text{rang}\,( D_z (\eta^{\mathbb{C}}) \leq p-1 \right\}$ . Este conjunto coincide con $\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})$ : luego entonces

$$\operatorname{cod}\left(\rho^{-1}_{\eta^{\mathbb{C}}}(s)\right) = \operatorname{cod}\left(\Sigma(\eta^{\mathbb{C}})\right) \leq \left(n-(p-1)\right)\left(p-(p-1)\right) =$$
$$= n-(p-1)$$

por consiguiente $\quad \dim = \Sigma(\eta^{\mathbb{C}}) \geq p-1$

$\square$

# Capítulo 3

## Codimensión

El concepto "codimensión de un germen" es de vital -- importancia en la clasificación de gérmenes de funciones de clases $C^{\infty}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. La relación que existe entre la codimensión y la determinación de un germen se exhibe en la Proposición 3.1, de esta relación y el corolario 1.25 se infiere que la determinación de un germen finitamente determinado está acotada inferiormente por su esencia y superiormente por su codimensión más 2 unidades. Y utilizando la codimensión de gérmenes el espacio vectorial K- jets, se prueba en el corolario 3.6 que el espacio $M^2/M^{k+1}$ es expresable como la unión de un conjunto algebraico con una unión finita que consta de diferencias de variedades algebraicas, en tanto que el teorema 3.7 se dice cuál es la codimensión de las órbitas bajo el grupo K- jets de difeomorfismos - en $M^2/M^{k+1}$ recuérdese que sólo se consideran a aquellos gérmenes que pertenecen al ideal $M^2$ pues en virtud del Corolario 1.23, los gérmenes que pertenecen a $M - M^2$ se sabe que son 1- determinados.

En este y los capítulos posteriores se seguirá utilizando la notación dada en el capítulo 1.

Definición

La codimensión de un germen $\eta$ que pertenece al ideal $M^2$ se define como la dimensión del $\mathbb{R}$ espacio vectorial $M/\Delta(\eta)$ La cual se denotará como cod ( $\eta$ ), es decir,

$$\text{cod}\ (\ \eta\ ) = \dim\ (\ M/\Delta\ (\eta)\ \ )$$

por brevedad se escribirá $M\ /\ \Delta$ en vez $M\ /\Delta\ (\ \eta\ )$

3.0(1)

Esta definición tiene sentido ya que $\eta \in M^2$ entonces

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in M \ \ \forall i \ \ \ i = 1, \ldots, \eta$$

y en consecuencia

$$\Delta < \frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \eta}{\partial x_n} > \subset M \ (\text{véase } 1.13\ (1))$$

Así pues al considerar a M y a $\Delta$ como $\mathbb{R}$ espacios vectoriales se tiene que $M\ /\Delta$ resulta ser un $\mathbb{R}$ espacio vectorial que puede tener dimensión finita ó infinita, en consecuencia, la codimensión puede ser finita ó infinita.

En caso de que el germen $\eta$ pertenezca a la diferencia $M\text{-}M^2$ se define a la codimensión de $\eta$ como cero, ya que en la demostración del Corolario 1.23, se muestra que el ideal $\Delta\ (\eta)$ coincide con el anillo $\mathcal{E}$ .

Observese que si $\eta$ es equivalente por la derecha con $\xi$ (consulte 1.10(2)) entonces de la observación 1.13 (2) se infiere $\Delta\ (\eta) = \Delta\ (\xi)$ por consiguiente, de acuerdo a la definición 3.0 (1) que se concluye que cod ( $\eta$ )= cod ( $\xi$ )

3.02

La siguiente Proposición establece una relación entre la codimensión y la determinación de un germen $\eta$ .

Proposición 3.1

Sea $\eta$ un germen perteneciente al ideal $M^2$ entonces, la codimensión de $\eta$ y la determinación de $\eta$ ambas son finitas ó - ambas son infinitas. En el primer caso, la determinación de $\eta$ ,- disminuida en 2 unidades no excede a la codimensión de $\eta$ . Simbólicamente:

1.- det ($\eta$) es finita si, y sólo si, cod ($\eta$) es finita y det ($\eta$) $-2 \leq$ cod ($\eta$) .

2.- det ($\eta$) es infinita si, y sólo sí, cod ($\eta$) es - infinita.

Demostración

Sea $\eta \in M^2$ entonces

De aquí que $\Delta(\eta) \subset M$ ; se escribirá $\Delta$ en vez de $\Delta$ ($\eta$) si - es que ésto no se presta a ninguna confusión. Entonces que $\Delta \subset M$ en la observación hecha en 1.6.1 se tiene que $M \supset M^2 \supset M^3 \supset \ldots M^s$ $\forall s \in N$. y al considerar la estructura de $\mathbb{R}$- espacios vectoriales que tienen $\Delta, M, \ldots M^s$ se obtiene una sucesión descendiente - de subespacios vectoriales de M de la siguiente manera:

$$M = M + \Delta \supset M^2 + \Delta \supset \ldots \supset M^s + \Delta \quad s = 1, 2, \ldots$$

3.1(1)

Existen 2 alternativas en 3.1 (1)

1.- La sucesión se vuelve estacionaria esto es, existe $S \in N$ tal que $M^{s-1} + \Delta = M^s + \Delta$

2.- La sucesión jamás es estacionaria es decir, $\forall s \in N \quad M^s + \Delta \subset M^{s-1} + \Delta$

Caso 1

En el caso de 1 se probará que cuando la sucesión 3.1(1) se vuelve estacionaria, entonces, el germen $\eta$ resulta ser de deter minación finita esto a su vez implicará que la codimensión sea finita.

En efecto, si la sucesión 3.1(1) es estacionaria --- entonces es posible hacer la siguiente consideración

Sea $K = \min \ ( S \in \mathbb{N} \ / \ M^{s} + \Delta = M^{s-1} + \Delta \ )$ 3.1(2)

entonces $M^{k-1} \subset M^{k-1} + \Delta = M^{k} + \Delta$ y aplicando el lema de Nakayama- 1.18 para $M = M^{k-1}$, $\eta = \Delta$, $\mathcal{A} = M$, $A = \mathcal{E}$ se obtiene $M^{k-1} \subset \Delta$ 3.1(3)

De aquí que al multiplicar por $M^2$ esta contensión se obtiene $M^{k+1} \subset M^2 \ \Delta$ ; esto a su vez implica según el teorema- 1.19 inciso 1 que el germen es K- determinado donde K es un - número natural y como det $(\eta)$ K se tiene que la determina -- ción de $\eta$ es finita.

Ahora bien $M^{k-1} \subset \Delta$ implica la existencia de un epimorfismo $( M \ / \ M^{k-1}) \longrightarrow ( M \ / \Delta)$

Esto significa que la determinación $M \ / \ \Delta$ es menor- o igual que la dimensión de $M \ / \ M^{k-1}$ y de acuerdo al Teorema - 1.9 $M \ / \ M^{k-1}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E} \ / \ M^{k-1}$ el cual es de dimensión finita y por lo tanto la codimensión de $\eta$ es finita.

Recíprocamente, si la codimensión de $\eta$ es finita - entonces la sucesión dada por 3.1(1) no puede ser un descenso- estricto ya que

$$\frac{M}{\Delta} = \frac{M+\Delta}{\Delta} \supset \frac{M^2+\Delta}{\Delta} \supset \dots \supset \frac{M^s+\Delta}{\Delta} \supset \dots \supset$$

y en consecuencia

$$\dim \left(\frac{M}{\Delta}\right) = \dim \left( \frac{M+\Delta}{\Delta}\right) \geq \dim \left( \frac{M^2+\Delta}{\Delta}\right) \geq \dots \geq$$
$$\dim \left( \frac{M^s+\Delta}{\Delta}\right) \geq 0$$

Pero, por hipótesis la codimensión de $\eta$ es finita, de ahí que necesariamente debe existir alguna $s \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(M^{s-1} + \Delta / \Delta) = \dim(M^{s} + \Delta / \Delta)$. Esto sucede siempre y cuando $\dfrac{M^{s-1}+\Delta}{\Delta} = \dfrac{M^{s}+\Delta}{\Delta}$ lo que equivale a decir que:

$$M^{s-1} + \Delta = M^{s} + \Delta \tag{3.1(4)}$$

tornándose así la sucesión 3.1(1) estacionaria.

Siguiendo la misma argumentación hecha en el párrafo previo a 3.1(3), se tiene que $M^{s-1} \subset \Delta$ y de acuerdo al Corolario 1.22 se tiene que el germen $\eta$ es finitamente determinado.

Ahora bien, para probar que $\det(\eta)-2 \leq \operatorname{cod}(\eta)$ considérese $k = \min \left\{ s \in \mathbb{N} / M^{s-1} + \Delta = M^{s} + \Delta \right\}$

entonces del párrafo anterior se tiene que

$$\det(\eta) = k$$

y la sucesión 3.1(1) es un descenso estricto que contiene $k-2$ contenciones propias, es decir,

$$M^{s} + \Delta \subset M^{s-1} + \Delta \qquad \text{para} \quad 0 \leq s < k,$$
$$M^{s} + \Delta = M^{s-1} + \Delta \qquad \text{para} \quad s \geq k$$

Entonces por 3.1(3) se tiene $M^{k-1} + \Delta = \Delta$. y ésto muestra que en 3.1(1) hay k-2 contenciones propias y en consecuencia se tiene la siguiente sucesión:

$$\frac{M}{\Delta} \supset \frac{M^{2}+\Delta}{\Delta} \supset \cdots \supset \frac{M^{k-1}+\Delta}{\Delta} = 0$$

que a su vez implica

$$\operatorname{cod}(\eta) = \dim\left(\frac{M}{\Delta}\right) > \dim\left(\frac{M^{2}+\Delta}{\Delta}\right) > \cdots > \dim\left(\frac{M^{k-1}+\Delta}{\Delta}\right) = 0$$

lo que conduce a la desigualdad $\operatorname{cod}(\eta) \geq k-2$ es decir,

$$\operatorname{cod}(\eta) \geq \det(\eta) - 2$$

Caso 2

La sucesión dada por 3.1(1) no es estacionaria, en éste caso las consideraciones:

determinación de $\eta$ es finita y codimensión de $\eta$ es finita son imposibles; pues en ambas situaciones, se llegaría a contradecir el carácter no estacionario de la sucesión

$$M + \Delta \supset M^2 + \Delta \supset \cdots \supset M^s + \Delta \quad \cdots$$

Por ejemplo, si la determinación de $\eta$ fuese finita, entonces en virtud del Corolario 1.22, se tendría

$M^k \subset \Delta$ para algún $k \in \mathbb{N}$ de donde

$\Delta = M^k + \Delta = M^{k+1} + \Delta$ ya que $M^{k+1} \subset M^k \subset \Delta$

y nuevamente se estaría analizando el caso anterior.

Luego, necesariamente hay que partir de la hipótesis determinación de $\eta$ es infinita y como en 3.1(1) se tiene una sucesión infinita no estacionaria de subespacios vectoriales a saber

$$\frac{M}{\Delta} \supset \frac{M^2 + \Delta}{\Delta} \supset \cdots \supset \frac{M^s + \Delta}{\Delta} \supset \cdots$$

y por ser una sucesión estricta de epimorfismos, se tiene:

$$\dim\left(\frac{M^s + \Delta}{}\right) > \dim\left(\frac{M^{s+1} + \Delta}{\Delta}\right) > 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{N}$$

Esto nos conduce a la siguiente sucesión infinita:

$$\operatorname{cod}(\eta) = \dim\left(\frac{M}{\Delta}\right) > \dim\left(\frac{M^2 \quad \Delta}{\Delta}\right) > \cdots > \dim\left(\frac{M^s + \Delta}{\Delta}\right) > \cdots$$

Luego entonces, la codimensión de $\eta$ es infinita. Por lo tanto, si es cierto que det( $\eta$ ) es infinita implica codimensión de $\eta$ es infinita.

Ahora, si la codimensión de $\eta$ es infinita, entonces del mismo párrafo anterior, se concluye que la determinación de $\eta$ no puede ser finita. Por lo tanto, codimensión de $\eta$ es infinita si y sólo si, determinación de $\eta$ es infinita.

Concluyendo así la demostración de la Proposición 3.1.

$\square$

Corolario 3.2

Sea $\eta = Q+P$ un germen finitamente determinado, donde $Q(x_1, \ldots, x_\rho) = \sum_{i=1}^{\rho} a_i x_i^2$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i \neq 0$ y P es un polinomio que pertenece al ideal $M^3$ que depende exclusivamente de las variables $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ entonces las determinaciones de $\eta$ y P son iguales, y la codimensión de $\eta$ coincide con la codimensión de P. Más aún, si det($\eta$) es infinita la conclusión sigue siendo la misma.

Demostración

Por hipótesis, P es un polinomio que depende exclusivamente de las variables $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ entonces su ideal Jacobiano $\Delta_P$ está generado por:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x_{\rho+1}}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right)$$

Luego entonces, el ideal Jacobiano de $\eta$ $\Delta = \Delta(\eta)$ está generado por:

$$\left( x_1, \ldots, x_\rho, \frac{\partial P}{\partial x_{\rho+1}}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial x_n} \right) = \Delta_Q + \Delta_P = M_\rho + \Delta_P \qquad 3.2(I)$$

donde $M_\rho$ es el ideal generado por $(x_1, \ldots, x_\rho)$ (ver observación 1.8(2)).

Es claro que si $\lambda = n-\rho$ entonces $M = M_\rho + M_\lambda$ aquí $M_\lambda$ denota al ideal generado por $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ por consiguiente:

$$M = M_{\rho} + M_{\lambda} \qquad \text{y} \qquad M_{\rho} \cap M_{\lambda} = 0 \qquad 3.2(2)$$

Más aún

$$M^{k+1}_{\rho} + M^{k+1}_{\lambda} \subset M^{k+1} \subset \sum_{i=0}^{k+1} M^{k+1-i}_{\rho} M^{i}_{\lambda} \qquad 3.2(3)$$

de 3.2(1) y 3.2(2) se tiene que

$$\frac{M}{\Delta} = \frac{M_{\rho} + M_{\lambda}}{\Delta(Q) + \Delta(P)} \qquad \text{pero } \Delta(Q)$$

coincide con $M_{\rho}$ luego entonces $M_{\rho}$ está contenido en el núcleo del epimorfismo canónico de $M$ en $M/\Delta$. De donde resulta que los generadores de éste espacio vectorial son las clases de polinomios, que dependen únicamente de las variables $x_{\rho+1}, \dots, x_n$.

Pero $M_{\lambda}$ es isomorfo al ideal maximal del anillo local $E_{\lambda}$ y $\Delta(P) \subset M_{\lambda}$, entonces se sigue de inmediato que $M/\Delta \ (P)$ ; por consiguiente,

$\operatorname{cod}(\eta) = \dim(M/\Delta)$ coincide con $\operatorname{cod}(P) = \dim(M_{\lambda}/\Delta(P))$.

En estas condiciones, se deduce de la Proposición 3.1 que:

$\det(\eta) < \infty$ es equivalente a $\operatorname{cod}(\eta) < \infty$

y como ésta última coincide con $\operatorname{cod}(P)$, se concluye que determinación de P también es finita.

En caso de que $\det(\eta)$ sea infinita, de la misma Proposición 3.1, se tiene que $\operatorname{cod}(\eta)$ que coincide con $\operatorname{cod}(P)$, según se acaba de probar, también es infinita.

Para completar la demostración del Corolario 3.2, únicamente queda por verificar la igualdad $\det(\eta) = \det(P)$ con las hipótesis iniciales, $\eta$ finitamente determinado y P finitamente determinado.

En efecto, haciendo uso del Teorema de Stefan 1.24, se tiene que el germen $\eta = Q+P$ es k-determinado, si y sólo si, $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta + u)\ \forall u \in M^{k+1}$ en particular $\forall u_\lambda \in M_\lambda^{k+1}$ (véase 3.2(2)).

De 3.2(1), 3.2(2) y 3.2(3) se sigue que

$$M_\rho^{k+1} + M_\lambda^{k+1} \subset M_\rho\,\Delta(\eta + u_\lambda) + M_\lambda(\Delta Q + \Delta(P + u_\lambda)) \subset$$
$$\subset M_\rho(\Delta(\eta + u_\lambda) + M_\lambda) +$$
$$+ M_\lambda\,\Delta(P + u_\lambda)) \subset \subset M_\rho + M_\lambda\,\Delta(P + u_\lambda)$$

ya que

$\Delta(\eta + u_\lambda) = \Delta Q + \Delta(P + u_\lambda) = M_\rho + \Delta(P + u_\lambda)$ y

$M(\Delta(\eta + u) + M) \subset M$ ; en consecuencia

$M_\rho^{k+1} + M_\lambda^{k+1} \subset M_\rho + M_\lambda\,\Delta(P + u_\lambda)$ como

$M_\rho \quad M_\lambda = 0$ entonces necesariamente

$M_\lambda^{k+1} \subset M_\lambda\,\Delta(P + u_\lambda)\ \forall u_\lambda \in M_\lambda^{k+1}$ y aplicando el Teorema 1.24, se tiene que el polinomio P es k-determinado $\forall\ k \geq \det(\eta)$, es decir, $\det(P) \leq \det(\eta)$.

En el siguiente párrafo se demostrará que $\det(\eta) \leq \det(P)$, que junto con la desigualdad anterior nos produce la igualdad deseada, a saber, $\det(\eta) = \det(P)$

De la desigualdad $\det(\eta) \leq \det(P)$ es verdadera si el germen $\eta$ es k-determinado, $\forall\ k \geq \det(P)$ o equivalentemente, por el Teorema 1.24 el ideal $M^{k+1}$ está contenido en el ideal

$$M\,\Delta(\eta + u) \quad \forall u \in M^{k+1}$$

El Lema de Nakayama 1.18 afirma que

$M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta + u)$ si $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta + u) + M^{k+2}$

y el Corolario 1.6 establece que

$M^{k+1} = \langle x^{\alpha} \in M : |\alpha| = k+1 \rangle$. Por consiguiente,

únicamente resta por verificar que $x^{\alpha}$ pertenece a la suma

$M \Delta(\eta + \mu) + M^{k+2}$ para todo multiíndice

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de norma k+1 a fin de obtener la contensión

$$M^{k+1} \subset M \Delta(\eta + \mu) \quad \forall \mu \in M^{k+1}$$ ; por supuesto partiendo de la hipótesis $\det(P) \leq k$.

Obsérvese que si $k \geq \det(P)$ entonces $k > 2$ ; ya que $P \in M^3$ y en consecuencia $j_2(P) = 0$ y por el Corolario 1.25 se infiere que

$$2 < E_s(P) \leq \det(P) \leq k$$ . Por hipótesis,

$\eta = Q+P$ , $Q = \sum_{i=1}^{\rho} a_i (x_i)^2$ y

$P(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ , es un polinomio que no depende de las variables $x_1, \dots, x_\rho$ entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial x_j} = 0 \quad \forall \; j \quad \text{tal que} \quad \rho < j \leq n$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad \forall \; i \quad \text{tal que} \quad 1 \leq i \leq \rho$$

entonces el ideal Jacobiano de la suma $\eta + \mu$ ($\mu \in M^{k+1}$), está generado por:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta+\mu) \; \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta+\mu) \quad 1 \leq i \leq \rho < j \leq n \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta+\mu) \quad 1 \leq i \leq \rho \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta+\mu) \; \rho < j \leq n \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(q+\mu) \quad 1 \leq i \leq \rho \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(p+\mu) \; \rho < j \leq n \right\rangle$$

por consiguiente

$$M\Delta(\eta+\mu) = M\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta+\mu) \quad 1 \leq i \leq \rho \right\rangle + M\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(\eta+\mu)\ \rho < j \leq n \right\rangle \mu \in M^{k+1} \qquad 3.2(4)$$

Ahora bien el ideal $M^{k+1}$ puede expresarse en la forma:

$M^{k+1} = M_\rho^{k+1} + M_\lambda^{k+1}$ donde $M_\rho^{k+1}$ es el ideal generado por: $\langle x^\alpha \in M$ tal que $|\alpha| = k+1$ y $\alpha_i \geq 1$ para alguna $i \leq \rho\rangle$ y $M_\lambda^{k+1}$ es el ideal generado por

$$\langle x^\alpha \in M \text{ tal que } |\alpha| = k+1 \text{ y } \alpha_i = 0 \ \forall\ i \leq \rho\rangle \qquad 3.2(5)$$

Luego entonces, cualquier germen del ideal $M^{k+1}$ puede expresarse en la forma

$\mu = \mu_\rho + \mu_\lambda$ donde $\mu_\rho \in M_\rho^{k+1}$ y $\mu_\lambda \in M_\lambda^{k+1}$

A continuación se prueba que los generadores del ideal $M^{k+1}$ se encuentran en el ideal $M\Delta(\eta+\mu)\ \mu \in M^{k+1}$

Caso 1

El monomio $x^\alpha$ pertenece al ideal $M_\rho^{k+1}$; como $k > 2$ y $\alpha_i \geq 1$ para alguna $i \leq \rho$ entonces $x^\alpha$ puede expresarse en la forma:

$x_s \, x_i \, x^{\beta}$ donde $|\beta| = k-1$ y $1 \leq s \leq n$ .

En éste caso como $\dfrac{\partial q}{\partial x_i} \neq 2 \, a_i \, x_i$ y $a_i \neq 0$

entonces del apartado 3.2(4) se tiene que

$$x^{\alpha} = x_s \left(2a_i \, x_i + \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\right) x^{\beta} / 2a_i - x_s \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \, x^{\beta} / 2a_i$$

pertenece a la suma

$M \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i} (q + \mu) \quad 1 \leq i \leq \rho \right\rangle + M^{k+2}$ ; ya que

$x^{\beta} \in M^{k-1}$ , $\dfrac{\partial \mu}{\partial x_i} \in M^k$ y $x_s \in M$

entonces el producto $x_s \dfrac{\partial \mu}{\partial x_i} \, x^{\beta} / 2a_i$ pertenece

al ideal $M^{2k}$ el cual está contenido en el ideal $M^{k+2}$
( consulte 1.6(1) y 1.8(1)). Por lo tanto

$$M_{\rho}^{k+1} \subset M \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (q + \mu) \quad 1 \leq i \leq \rho \right\rangle + M^{k+2} \quad \mu \in M^{k+1} \tag{3.2(6)}$$

Caso 2

El monomio $x^{\alpha}$ pertenece al ideal $M_{\lambda}^{k+1}$ . En éste caso se está suponiendo que el polinomio P es k-determinado, entonces por el Teorema de Stefan 1.24, se infiere que

$M_{\lambda}^{k+1} \subset M_{\lambda} \Delta (P + \mu_{\lambda})$ , $\mu_{\lambda} \in M_{\lambda}^{k+1}$ , en consecuencia

si $\mu_{\rho} \in M_{\rho}^{k+1}$ entonces

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha} = & \sum_{j,\, t=\rho+1}^{n} x_t \, \frac{\partial}{\partial x_j}(P+\mu_\lambda)\, \xi_{j,t} \; + \\
& + \sum_{j,t=\rho+1}^{n} x_t \, \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu_\rho - \mu_\rho)\, \xi_{j,t} \; = \\
& = \sum_{j,t=\rho+1}^{n} x_t \, \frac{\partial}{\partial x_j}(P+\mu_\lambda+\mu_\rho)\, \xi_{j,t} \; - \\
& - \sum_{j,t=\rho+1}^{n} x_t \, \frac{\partial \mu_\rho}{\partial x_j}\, \xi_{j,t}
\end{aligned}
$$

La primera suma que aparece en el miembro derecho de ésta igualdad claramente pertenece al ideal $M_\lambda \Delta (P+\mu)$, en tanto que la segunda suma se encuentra en el ideal $N_\rho^{k+1}$ ya que $\dfrac{\partial \mu_\rho}{\partial x_j} = \sum_{|\alpha| = k+1} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(x^{\alpha}\xi_\alpha)$ contiene al factor $x_i$ para alguna $i \leq \rho$ pues $j > \rho$ y $\mu_\rho \in N_\rho^{k+1}$; por consiguiente:

$$
\left( M_\lambda^{k+1} \subset M_\lambda \Delta (P+\mu) + N_\rho^{k+1} \subset M\, \Delta (P+\mu) + N_\rho^{k+1} \right) \tag{3.2(7)}
$$

De los apartados 3.2(4) a 3.2(7), se infiere que cualquier generador del ideal $M^{k+1}$ pertenece a la suma $M\,\Delta(\eta+\mu) + M^{k+2}$ $\forall \mu \in M^{k+1}$ por lo tanto $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta+\mu) + M^{k+1}$ y al aplicar el Lema de Nakayama 1.18, se concluye que $M^{k+1} \subset M\,\Delta(\eta+\mu)$ ésto significa, de acuerdo al Teorema de Stefan 1.24, que el germen $\eta$ es k-determinado. $\square$

Lema 3.3

La dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $E/M^{k+1}$ es

$$\dim(M/M^{k+1}) = \frac{(n+k)!}{n!\;\;k!}$$

Demostración

Se hace por inducción sobre el número $n+k$. Si $n+k=0$ entonces $n=0$ y $k=0$; en ambos casos se está analizando la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial dado por el cociente de un anillo local entre su ideal maximal. Por consiguiente, el miembro izquierdo de la igualdad dada en el Lema 3.3 es 1, en tanto que si $n=0$, entonces:

$$\frac{(0+k)!}{0!\;\;k!} = \frac{k!}{k!} = 1$$ y si $k=0$ entonces

$$\frac{(n+0)!}{n!\;\;0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$ ; por lo tanto la aseveración hecha en el Lema 3.3 es verdadera para el caso $n+k=0$.

Supóngase inductivamente que para todo par de numeros naturales $s$ y $t$ tales que $0 \leq s+t \leq n+k-1$ se satisface la igualdad

$$\dim(E_s / M_s^{t+1}) = \frac{(s+t)!}{s!\;\;t!} \qquad 3.3(1)$$

1.- Recuérdese que $E_s$ es el anillo de gérmenes en el orígen de funciones que pertenecen a $C^{\infty}(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ (consulte 1.0(2)) y que $M_s$ es su ideal maximal (ver Teorema 1.3)

2.- A continuación se demuestra que la igualdad 3.3(1) se satisface para el caso $s+t=n+k$

En efecto, por el Teorema 1.9 se tiene que los generadores del espacio vectorial de $\dfrac{E}{M^{k+1}}$ son de la forma $\bar{x}^{\alpha}$ donde $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$

En estas condiciones $x^{\alpha}$ puede expresarse en una, y sólo una, de las dos formas siguientes:

1.- $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ siempre y cuando $\alpha_n = 0$

o bien

2.- $x^{\alpha} = x_n \cdot (x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_{n-1}})$ siempre y cuando $\alpha_n \geq 1$

Sean $J^k_{n-1}$ y $J^k_{xn}$ los subespacios de $E/M^{k+1} = J^k$ generados por las clases de las $x^{\alpha}$ del tipo 1 y $x^{\alpha}$ del tipo 2 respectivamente.

Es claro que $J^k_{n-1}$ es isomorfo al espacio vectorial $E_{n-1} / M^{k+1}_{n-1}$ y $J^k_{xn}$ es isomorfo a $E_n / M^k_n$ y en consecuencia

$$\dim ( J_{n-1} ) = \dim \left( \frac{E_{n-1}}{M^{k+1}_{n-1}} \right) \text{ y}$$

$$\dim ( J^k_n ) = \dim \left( \frac{E_n}{M^k_n} \right)$$

Y por la hipotesis de inducción ya sabemos que

$$\dim \left( \frac{E_{n-1}}{M^{k+1}_{n-1}} \right) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!} \qquad \text{y}$$

$$\dim \left( \frac{E_n}{M^k_n} \right) = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

y como $J^k_{n-1} \cap J^k_{xn} = 0$ entonces $\dim \left(\frac{M}{M^{k+1}}\right) = \dim ( J^k_{n-1} )$

$$+ \dim ( J^k_{xn} ) = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)!\,k!} + \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,(k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,(k-1)!} \cdot \frac{n+k}{n\,k} = \frac{(n+k)!}{n!\,k!}$$

verificandose así la igualdad 3.3 (1) para $s + t = n + k$ $\forall k, n \in \mathbb{N}$ $\square$

Ahora centramos nuestra atención en aquellos germenes de $M^2$ que tienen codimensión menor o igual que $C$, donde $C$ es un número natural menor o igual $k-2$ a fin de establecer algunas relaciones en el espacio de $k$ jets y $I^k$ entre este conjunto y el conjunto de germenes de codimensión mayor que $C$.

Para conseguir este objetivo considerese los siguientes conjuntos

$$T_c = \{ \eta \in M^2 / \ \mathrm{cod}(\eta) = c \}$$
$$\Omega_c = \{ \eta \in M^2 / \ \mathrm{cod}(\eta) \leq c \}$$
$$\Sigma_c = \{ \eta \in M^2 / \ \mathrm{cod}(\eta) \geq c \}$$

a $T_c$ se le llamará el c estrato de $M^2$. 3.3 (2)

OBSERVACION

$M^2$ es la unión ajena de sus c- estratos esto es

$$M^2 = T_c \cup T_1 \cup \ldots \cup T_c \cup \ldots \cup T_\infty \qquad 3.3\ (3)$$

La razón que justifica esta aseveración se apoya en el hecho de que la codimensión de un germen es única.

Considerese el homomorfismo $\widetilde{\Pi} : M^2 \longrightarrow I^k$ donde $I^k = M^2 / M^{k+1}$ 3.3 (4)

Sean $T_c^k$ , $\Sigma_c^k$ , $\Omega_c^k$ l. s imágenes de $T_c$ , $\Sigma_c$, $\Omega_c$ bajo $\widetilde{\Pi}$ en el espacio de k- jets $I^k$ .

A fin de agilizar la demostración del Teorema 3.5 se hace necesaria la siguiente discusión.

Defínase un invariante $\tau(z)$ para $z \in I^k$ de la siguiente manera. Elíjase un germen $\eta$ que este en la imagen inversa de $z$ bajo $\widetilde{\Pi}$ esto es $\eta \in \widetilde{\Pi}^{-1}(z)$ entonces $\eta$ pertenece al ideal $M^2$ en consecuencia el ideal generado entonces el ideal generado por las parciales de $\eta$ con respecto a $x_i$ esta contenido en el ideal maximal M y visto como $\mathbb{R}$ espacios vectoriales se tiene que $\Delta$ es un subespacio vectorial de M luego entonces se define

$$\tau(z) = \dim \left( \frac{M}{\Delta + M^k} \right) \qquad 3.3\ (5)$$

$\tau(z)$ asi definido es independiente del germen $\eta$ elegido

En efecto, sea $\eta'$ un germen en $M^2$ tal que $\widetilde{\Pi}(\eta') = \widetilde{\Pi}(\eta) = z$ entonces $\eta - \eta' \in M^{k+1}$ esto a su vez implica que

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta'}{\partial x_i} \in M^k$$

y en consecuencia $\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \in \Delta' + M^k \ \forall\ i = 1, \dots, \eta$.

donde $\Delta^1 = \Delta\ (\eta^1)$ probándose así que $\Delta \subset \Delta' + M^k$ o bien $\Delta + M^k \subset \Delta^1 + M^k$

Haciendo el mismo proceso en el razonamiento anterior mediante la sustitución de $\eta$ por $\eta'$ se obtiene $\Delta' + M^k \subset \Delta + M^k$ ambas contenciones implican $\Delta + M^k = \Delta' + M^k$ de aqui que $\frac{M}{\Delta + M^k} = \frac{M}{\Delta' + M^k}$

y por lo tanto $\dim \left( \frac{M}{\Delta + M^k} \right) = \dim \left( \frac{M}{\Delta' + M^k} \right)$

es decir $\tau(z)$ está bien definido, pues no depende del representante elegido.

El siguiente lema nos dice que relación existe entre $\tau(z)$ y la codimensión de un germen $\eta$ donde $\eta$ está en la imagen inversa de $z$ bajo $\widetilde{\Pi}$ ( consulte 3.3 (4) )

LEMA 3.4

Si $0 \leq c \leq k-2$ y $\eta \in \widetilde{\Pi}^{-1}(z)$ entonces

I $\tau(z) \leq c$ implica $\operatorname{cod}(\eta) = \tau(z)$

II $\tau(z) > c$ si y sólo si $\operatorname{cod}(\eta) > c$

En este caso $\tau(z)$ y $\operatorname{cod}(\eta)$ pueden ser diferentes.

DEMOSTRACION

I Considerese la sucesión

$$\Delta + M^k \subset \Delta + M^{k-1} \subset \dots \subset \Delta + M^2 \subset \Delta + M = M$$

Esta sucesión de $\mathbb{R}$ espacios vectoriales tiene cuando mas k-1 contenciones propias: entonces al construir la siguiente sucesión de epimorfismos:

$$\frac{M}{\Delta + M^k} \longrightarrow \frac{M}{\Delta + M^{k-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \frac{M}{\Delta + M^2} \longrightarrow \frac{M}{\Delta + M} = 0$$

se obtiene

$$0 = \dim\left(\frac{M}{\Delta + M}\right) \leq \dim\left(\frac{M}{\Delta + M^2}\right) \leq \cdots \leq \dim\left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right) = \tau(z)$$

Luego entonces la única posibilidad es que alguno de estos epimorfismos sea un isomorfismo, ya que estamos suponiendo $\tau(z) \leq c$ y $c \leq k-2$. En consecuencia $M / \Delta + M^{s-1}$ es isomorfo a $M / \Delta + M^s$ por consiguiente $\Delta + M^{s-1} = \Delta + M^s$ para alguna $s \leq k$.

Esto significa que $M^{s-1}$ esta contenido en $\Delta$ (sígase la argumentación hecha en 3.1 (3) y 3.1 (4); por lo tanto $\Delta = \Delta + M^s$ y como $s \leq k$ entonces $\Delta = \Delta + M^k$ (consulte observación 1.6 (1) ) de aqui que $\frac{M}{\Delta} = \frac{M}{\Delta + M^k}$ Por lo tanto $\dim\left(\frac{M}{\Delta}\right) = \dim\left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right)$

es decir $\operatorname{cod}(\eta) = \tau(z) \leq c$.

II $\tau(z) > c$ como $\Delta + M^k \supset \Delta$ entonces $M/\Delta \longrightarrow M/\Delta + M^k$ por consiguiente dim $\left(\frac{M}{\Delta}\right) \geq$ dim $\left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right)$ es decir cod $(\eta) \geq \tau(z) > c$

Recíprocamente sea $\eta$ un germen en $M^2$ que satisfaga cod $(\eta) > c$ para $c \leq k-2$ entonces si $\tau(z)$ fuese menor o igual que $c$ esto nos conduciría por I de lema 3.4 a que $\tau(z) =$ cod $(\eta)$ que claramente se contrapone con nuestra hipótesis inicial cod $(\eta) > c$ Luego entonces necesariamente $\tau(z) > c$ .

Nótese que a pesar de que $\tau(z)$ siempre es finita la codimensión $(\eta)$ puede que no lo sea

En efecto $M^k \subset \Delta + M^k$ entonces $\frac{M}{M^k} \longrightarrow \frac{M}{\Delta + M^k}$

De ahí que dim $\left(\frac{M}{M^k}\right) \geq$ dim $\left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right)$

pero del lema 3.3. se deduce que dim $\left(\frac{M}{M^k}\right) =$ dim $\left(\frac{\mathcal{E}}{M^k}\right) - 1 = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$

3.4 (i)

Esto muestra que $\tau(z)$ siempre es finita. Ahora basta considerar un germen $\eta$ que no lo sea finitamente determinado y al aplicar la proposición 3.1 se concluye que cod $(\eta)$ es infinita

$\square$

TEOREMA 3.5

SI $0 \leq c \leq k-2$ entonces el espacio de k- jets $I^k = M^2 / M^{k+1}$ puede expresarse como la unión ajena $I^k = \Omega_c^k \cup \Sigma_{c+1}^k$ y en este caso $\Sigma_{c+1}^k$ resulta ser una variedad real algebráica cerrada.

DEMOSTRACION

Como $\pi : M^2 \longrightarrow I^k$ es un epimorfismo entonces para toda $z \in I^k$ existe $\eta \in M^2$ tal que $\pi(\eta) = z$ : como $\tau(z)$ es única (consulte 3.3 (5)) y $c \leq k-2$ entonces existen dos posibilidades $\tau(z)$ es menor o igual que $c$ ó $\tau(z)$ es estrictamente mayor que $c$ ; en el primer caso del lema 3.4 inciso I se deduce que cod $(\eta) = \tau(z) \leq c$ y de los apartados 3.3 (2) y 3.3 (4) se infiere que $\pi(\eta) = (z)$ pertenece a $\Omega_c^k$.

En el segundo caso del lema 3.4 inciso II se deduce que cod $(\eta) > c$ y de los apartados 3.3 (2) y 3.3 (4) se concluye que $\pi(\eta) = z$ se encuentra en $\Sigma_{c+1}^k$ finalmente como la intersección $\Omega_c^k$ con $\Sigma_{c+1}^k$ es vacia ( consulte 3.3. (2) y 3.3 (4) ) se concluye que la unión $I^k = \Omega_c^k \cup \Sigma_{c+1}^k$ es ajena . Unicamente nos resta por demostrar que $\Sigma_{c+1}^k$ es una variedad algebráica cerrada.

Obsérvese que $\dfrac{M}{\Delta + M^k} \simeq \dfrac{M / M^k}{\Delta + M^k / M^k}$ implica

$$\dim \left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right) = \dim \left(\frac{M}{M^k}\right) - \dim \left(\frac{\Delta + M^k}{M^k}\right)$$ o equivalentemente

$$\dim \left(\frac{\Delta + M^k}{M^k}\right) = \dim \left(\frac{M}{M^k}\right) - \dim \left(\frac{M}{\Delta + M^k}\right)$$

escríbase $\sigma(z)$ en vez de $\dim \left(\frac{\Delta + M^k}{M^k}\right)$ entonces la igualdad anterior adopta la forma $\sigma(z) = \dfrac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} - 1 - \tau(z)$

(Consulte 3.3.5 y 3..1 ) por consiguiente si $\tau(z) > 0$ entonces

$$\sigma(z) < \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} - 1 - 0 = m \qquad 3.5.\,(1)$$

Ahora bien por II del lema 3.4 se tiene que $\mathcal{E}^{k}_{c+1}$ es por definición $\{ z \in I^{k} \,/\, \operatorname{cod}(\eta) > c,\ z = \pi(\eta) \}$ pero este conjunto es equivalente a $\{ z \in I^{k} \,/\, \tau(z) > c,\ c \leq k-2 \} = \{ z \in I^{k} / \sigma(z) < m \}$ con m como 3.5 (1)

Luego entonces $\mathcal{E}^{k}_{c+1}$ está caracterizada por $\{ z \in I^{k} / \sigma(z) < m \}$

A continuación se demostrará que éste último conjunto es una variedad algebráica real y por lo tanto que $\mathcal{E}^{k}_{c+1}$ es algebráica.

Ahora considérese a $I^{k} = \frac{M^{2}}{M^{k+1}}$ como un subespacio vectorial de $J^{k} = \frac{M}{M^{k+1}}$ este espacio vectorial está generado por las clases de los monomios de grado menor o igual que k simbolizadas como $\overline{x^{\alpha}}$ donde $1 \leq |\alpha| \leq k$ ( consulte Teorema 1.9 ) como $z \in I^{k}$ entonces $z = \sum_{2 \leq |\alpha| \leq k} b^{\alpha} x^{\alpha}$ $b^{\alpha} \in \mathbb{R}$ luego entonces $\frac{\partial z}{\partial x_i} \in J^{k-1}$ en consecuencia

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{1 \leq |\beta| \leq k-1} a^{\beta} x^{\beta} \quad a^{\beta} \in \mathbb{R} \qquad 3.5.(2)$$

Ahora bien por definición $\Delta = \Delta(\eta)$ es el ideal generado por $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ i = 1, ... , n ; de ahí que $\frac{\Delta + M^{k}}{M^{k}}$ sea el subespacio vectorial de $J^{k+1}$ generado por $\frac{\partial z}{\partial x_i} x^{\beta}$ (Pues cada elemento del ideal $\Delta + M^{k}$ es de la forma $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \xi_i + \mu$ donde $\mu \in M^{k}$ además $\xi_i$ ( mod $M^{k}$ ) está generado por los monomios $x^{\beta}$, $|\beta| \leq k-1$ ) y $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ ( mod $M^{k}$ ) coincide con $\frac{\partial z}{\partial x_i}$

Luego entonces por 3.5 (2) y ordenando los multiíndices $\beta$ de alguna manera el número total de estos es $s = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$ ( Consulte Lema 3.? ) se tiene que para todo multiíndice de norma mayor o igual a 2 y menor o igual k $\frac{\partial Z}{\partial x_i} \cdot x^\beta = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}^{\beta} v_j$ donde $v_j$ es uno de los generadores $x^\beta$ de $J^{k-1}$ con el orden mencionado en el párrafo anterior.

El siguiente paso es considerar la matriz de $n \times s$ dada por ( $a_{ij}^{\beta}$ ) cuyo renglón $j$ corresponde a las coordenadas del vector $\frac{\partial Z}{\partial x_i} x^\beta$ con respecto a la base $v_1, \ldots, v_s$, es decir, por las coordenadas de los vectores que generan el subespacio vectorial $\frac{\Delta + J^k}{J^k}$ .

Por consiguiente rang ( $a_{ij}^{\beta}$ ) = dim ( $\frac{\Delta + J^k}{J^k}$ ) que es por definición $\sigma$ ( Z ) entonces rang ( $a_{ij}^{\beta}$ ) = $\sigma$ ( Z ) .

Luego entonces $\sigma$ ( Z ) $< m$ ( ver definición de $m$ en 3.5. (2) si y sólo si , dim $\left(\frac{\Delta + J^k}{J^k}\right) < m$ si y sólo si, rang ( $a_{ij}^{\beta}$ ) $< m$ si y sólo si todos los menores de ( $a_{ij}^{\beta}$ ) de orden mayor o igual que $m$ son cero; pero esto es claramente una condición algebráica ya que un menor de orden mayor o igual que m corresponde a un determinante; y si éste es cero entonces se están considerando los ceros de dicho polinomio

Por consiguiente $\Sigma_{c+1}^{k} = \left\{ Z \in J^k / \sigma ( Z ) < m \right\}$ está caracterizada por polinomios en las variables $a_{ij}^{\beta}$ . Esto es, por polinomios con variables, de donde efectivamente $\Sigma_{c+1}^{k}$ es una variedad real algebráica en el espacio vectorial $J^k$ .

□

COROLARIO 3.6

El espacio de K- jets $I^k$ puede expresarse como la unión ajena $I^k = T_0^K \cup T_1^K \cup \ldots \cup T_{K-2}^K \cup \Sigma_{K-1}$ para todo $c \leq K-2$, más aún $T_c^K = \Sigma_c^K - \Sigma_{c+1}^K$ es decir $T_c^K$ es una diferencia de dos variedades algebráicas.

DEMOSTRACION

Por el Teorema 3.5 se tiene que $I^k = \Omega_c^K \cup \Sigma_{c+1}^K$ para $c \leq K-2$. Luego si $c = K-2$ entonces $I^k = \Omega_{K-2}^K \cup \Sigma_{K-1}^K$ es una unión ajena.

Ahora, por definición $\Omega_{K-2}^K = \pi(\Omega_{K-2})$ (consulte 3.3 (4)) y $\Omega_{K-2} = \{\eta \in M^2 \ / \ \mathrm{cod}(\eta) \leq K-2\}$ consulte 3.3 (2) entonces en $\Omega_{K-2}$ hay K-1 posibilidades.

Aquellos gérmenes de $M^2$ de codimensión cero es decir:

$$\{\eta \in M^2 \ / \ \mathrm{cod}(\eta) = 0\} = T_0 ,$$

Aquellos gérmenes de $M^2$ de codimensión uno es decir:

$$\{\eta \in M^2 \ / \ \mathrm{cod}(\eta) = 1\} = T_1 , \ldots ,$$

Aquellos gérmenes de $M^2$ de codimensión K-2 es decir:

$$\{\eta \in M^2 \ / \ \mathrm{cod}(\eta) = K-2\} = T_{K-2}$$

Además de 3.3 (2) se tiene $\Sigma_c^K - \Sigma_{c+1}^K = \{\eta \in M^2/\mathrm{cod}(\eta) \geq c\} - \{\eta \in M^2/\ \mathrm{cod}(\eta) \geq c+1\} = \{\eta \in M^2/\ \mathrm{cod}(\eta) = c\} = T_c$

Por lo tanto $T_c^K = \Sigma_c^K - \Sigma_{c+1}^K$ $\forall c$ $0 \leq c \leq K-2$ que claramente es una diferencia de dos variedades algebráicas de acuerdo al Teorema 3.5.

Luego entonces $\Omega_{K-2}^K = T_0^K \cup T_1^K \cup \ldots \cup T_{k-2}^K$ y por lo tanto $I^k = T_0^K \cup \ldots \cup T_{k-2}^K \cup \Sigma_{k-1}^K$.

□

Recuérdese que en la Proposición 1.12 se probó que :

1.- $G^k$ es un grupo de Lie de dimensión finita y en la demostración del Teorema 1.19 se mostro que: 3.6(1)

2.- $\pi(\eta, G) = (s, G^k)$ es una subvariedad de $J^k$ donde $s = \pi(\eta)$ .

Así mismo insistimos que nuestro interés se centra en aquellos gérmenes de $M^2$ cuya determinación es mayor o igual que 2 ; de aqui que K sea mayor o igual que 2.

TEOREMA 3.7

Sea $\eta$ un germen de $M^2$ de codimensión $c$ donde $0 \leq c \leq k-2$ entonces la órbita de $Z = \pi(\eta)$, $(Z, G^k)$ es una subvariedad de $J^k$ de codimensión $c$.

DEMOSTRACION

Sea $\eta \in M^2$ tal que $\operatorname{cod}(\eta) = c$ $0 \leq c \leq k-2$, en virtud de la proposición 3.1 se tiene $\det(\eta) - 2 \leq \operatorname{cod}(\eta) = c$ de donde $\det(\eta) \leq k$ ya que $c \leq k-2$, es decir un germen $\eta$ es k- determinado y de acuerdo al Teorema 1.19 inciso II se tiene $M^{k+1} \subset M\Delta$.

Por otra parte el lema 1.21 afirma que el plano tangente en $Z$ de $(Z.G^k)$ coincide con $\pi(M\Delta)$ luego entonces la codimensión de la subvariedad $(Z, G^k)$ ( véase lema 3.6 (1) ) es por definición:

$$\dim(J^k) - \dim(\pi(M\Delta)) =$$

$$= \dim\left(\frac{M^2}{M^{k+1}}\right) - \dim\left(\frac{M\Delta}{M^{k+1}}\right) = \dim\left(\frac{M^2}{M\Delta}\right)$$

ya que $\dfrac{M^2}{M\Delta}$ es isomorfo a $\dfrac{M^2/M^{k+1}}{M\Delta/M^{k+1}}$ ( $\eta \in M^2$ implica $\Delta(\eta) = \Delta \subset M$ entonces $M\Delta \subset M^2$ )

Además $M / M^2$ es isomorfo a $\dfrac{M / M\Delta}{M^2/M\Delta}$

De aquí que

$$\dim\left(\frac{M^2}{M\Delta}\right) = \dim\left(\frac{M}{M\Delta}\right) - \dim\left(\frac{M}{M^2}\right) \qquad 3.7\ (1)$$

Asimismo $M\Delta \subset \Delta \subset M$ implica $M/\Delta$ isomorfo a $\dfrac{M / M\Delta}{\Delta / M\Delta}$

entonces

$$\dim\left(\frac{M}{M\Delta}\right) = \dim\left(\frac{M}{\Delta}\right) = \dim\left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right) \qquad 3.7\ (2)$$

Luego entonces al sustituir 3.7 (2) en 3.7 (1) se tiene que la codimensión de $( L, G^k )$ en $I^k$ es igual

$$\dim \left(\frac{M}{\Delta}\right) + \dim \left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right) - \dim \left(\frac{M}{M^2}\right) = c + \dim \left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right) - \eta$$

ya que $\dim \left(\frac{M}{\Delta}\right)$ es por definición $\operatorname{cod} ( \eta ) = c$ y $\dim \left(\frac{\ }{M^2}\right)=n$

Ver diagrama 2 en 3.5 (1)

por lo tanto la codimensión de $( L, G^k)$ en $I^k$ es igual a c.

Siempre y cuando $\dim \left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right)$ sea n, esto último se prueba en el siguiente Lema.

LEMA 3.8

Si $\eta$ es un germen en $M^2$ de codimensión finita entonces dim $(\Delta / M\Delta) = n$

DEMOSTRACION

Por ser $\Delta$ un ideal de $\mathcal{E}$ generado por las parciales de $\eta$ con respecto a $x_i$ entonces $\forall \xi \in \Delta$ se tiene

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \text{ donde } \alpha_i \text{ es un germen de } \mathcal{E}$$

El cual puede expresarse como $a_i + \mu_i$ donde $a_i$ es el germen - constante $a_i(x) = \alpha_i(0)$ y $\mu_i(x) = \alpha_i(x) - \alpha_i(0)$.

De ahí que $a_i \in \mathbb{R}$ y $\mu_i \in M$. Esto nos permite expresar a $\xi$ de la siguiente manera

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \mu_i) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i a_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \sum_i \mu_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \text{ y como}$$

$\mu_i \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} \in M\Delta \qquad i = 1, \ldots, n$ entonces

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \mod (M\Delta)$$

Esto es $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \eta}{\partial x_n}$ generan a $\Delta$ sobre $\mathbb{R}$ mod $(M\Delta)$ y en consecuencia dim $\left(\dfrac{\Delta}{M\Delta}\right) \leq n$.

Supóngase que dim $\left(\dfrac{\Delta}{M\Delta}\right)$ es estrictamente menor que n, entonces el conjunto $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}, \ldots \dfrac{\partial \eta}{\partial x_n}$ mod $(M\Delta)$ resulta ser un conjunto de n vectores linealmente dependientes. Luego entonces existen n números reales $a_1, \ldots, a_n$ no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \text{ y } (\text{Mod } M\Delta)$$

esto significa que $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0$

donde $\mu_i \in M$

Ahora consideremos el siguiente campo vectorial

$$\underline{X} = \sum_{i=1}^{n} ( a_i - \mu_i ) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{entonces}$$

$$\underline{X} ( \eta ) = \sum_{i=1}^{n} ( a_i - \mu_i ) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0 \qquad 3.8\ (1)$$

Por otra parte [illegible] no se anula en cero y por continuidad tampoco se anula en una vecindad del cero. Para justificar esta aseveración basta observar que $\mu_i \in M$ implica $\mu_i( 0 ) = 0$ y de la dependencia lineal de $\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ se tiene que existe al menos una $i$ con $1 \leq i \leq n$ tal que $a_i \neq 0$ .

Sea $j = \min \{ i / a_i \neq 0 \}$ **3.8 (2)** entonces $\underline{X}\ (0) =$

$$= \sum_{i} ( a_i - \mu_i ) (0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \neq 0 .$$

Pues $a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \neq 0$ por consiguiente el campo vectorial $\underline{X}$ no se anula en un punto y como todo campo vectorial que no se anula en un punto puede verse localmente como una sola coordenada ( a travéz de un cambio de coordenadas en el dominio) , entonces mediante el siguiente cambio de coordenadas:

$(x_1 , \ldots , x_n) \longrightarrow (y_1 , \ldots , y_n)$ donde $x_j \longrightarrow y_1$

(compare con 3.8(2)) se tiene que el campo X puede vérsele localmente como la coordenada $\frac{\partial}{\partial y_1}$

Ahora, de 3.8(1) se tiene que $\frac{\partial \eta}{\partial y_1}$ es el germen idénticamente cero en toda una vecindad del orígen; ésto significa que el germen $\eta$ es independiente de la variable $y_1$ .

Por consiguiente el k-jet de $\eta$ (consulte 1.9(3) y 1.9(4)) tampoco depende de la variable $y_1$ ; y de acuerdo a la definición dada en el párrafo previo a Corolario 1.25, se tiene que la esencia del germen $\eta$ es infinita, pero del Corolario 1.25, se infiere que $\det(\eta) \geq E_g(\eta)$ y de la Proposición 3.1 se concluye que la codimensión de $\eta$ es infinita: ésto nos conduce a contradecir nuestra hipó_ tesis inicial $\operatorname{cod}(\eta) < \infty$ en consecuencia, la codimensión $\dim\left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right) < n$ es imposible, por lo tanto

$$\dim\left(\frac{\Delta}{M\Delta}\right) = n \, .$$

$\square$

# C A P I T U L O IV

## Clasificación

Este capítulo está dedicado a completar la clasificación - sugerida en el Capítulo 3. Para el caso particular en el que -- K=7. Esto es, se hará la clasificación para aquellos gérmenes de codimensión menor ó igual que 5 y por tanto se estará trabajando- en el espacio de 7-jets $I^7 = M^2/M^8$ considerado como $\mathbb{R}$-espaci o vectorial.

Los conceptos que aparecen en el diagrama 4.1 se justifi-- can de la Proposición 4.5 en adelante, en tanto que el Teorema -- 4.2, el Corolario 4.3 y el Teorema 4.4 relacionan la teoria desa- rrollada en el Capítulo 3, con la clasificación resumida en dicho diagrama. Por esta razón, puede resultar conveniente empezar la - lectura de este Capítulo a partir de la Proposición 4.5 hasta la- Proposición 4.17 para continuar con el diagrama 4.1 y concluir -- con el Teorema 4.4.

El siguiente es un breve repaso de los conceptos y defini- ciones que estaremos utilizando a lo largo de este capítulo y que se mencionan en el capítulo 1 y 3.

E denota el anillo local de gérmenes en cero de funcio - nes de clase $C^\infty$ con dominio $\mathbb{R}^n$ y contradominio $\mathbb{R}$ y M a - su ideal maximal.

$G$ es el grupo de gérmenes de difeomorfismos en $\mathbb{R}^n$ que - mandan cero en cero.

Entonces $G^7$ es el grupo de 7-jets de gérmenes de difeo - morfismos que pertenecen a $G$.

Si $\eta$ es un germen en el ideal $M^2$ entonces $\Delta$ denota a - su ideal Jacobiano y cod $(\eta)$ = dim $\frac{M}{\Delta}$

$$T_c = \left\{ \eta \in M^2 / \operatorname{cod}(\eta) = c \right\}$$

$$W_c = \left\{ \eta \in M^2 / \operatorname{cod}(\eta) \leq c \right\}$$

$$\Sigma_c = \left\{ \eta \in M^2 / \operatorname{cod}(\eta) > c \right\}$$

entonces $T_c^7$, $W_c^7$, $\Sigma_c^7$ serán las imágenes de $T_c$, $W_c$, $\Sigma_c$ en el espacio de 7-jets $I^7 = \frac{M^2}{M^8}$

Indicaciones para interpretar el Diagrama 4.1

$\boxed{\Sigma 0}$ Significa que la órbita está en $\Sigma_c^7$ (consulte 3.3(4))

(z) Es la órbita del polinomio z bajo el grupo $G^7$ es decir $(z, G^7)$ (consulte 3.6(1) y Teorema 3.7)

$\pm$ Indica que las órbitas con signo + y con signo - son 2 órbitas distintas

$$S_\rho = \left\{ \eta : \eta \sim x_1^2 + \dots + x_\sigma^2 - x_{\sigma+1} - \dots - x_\rho^2 \right\}$$

(consulte 4.6(2))

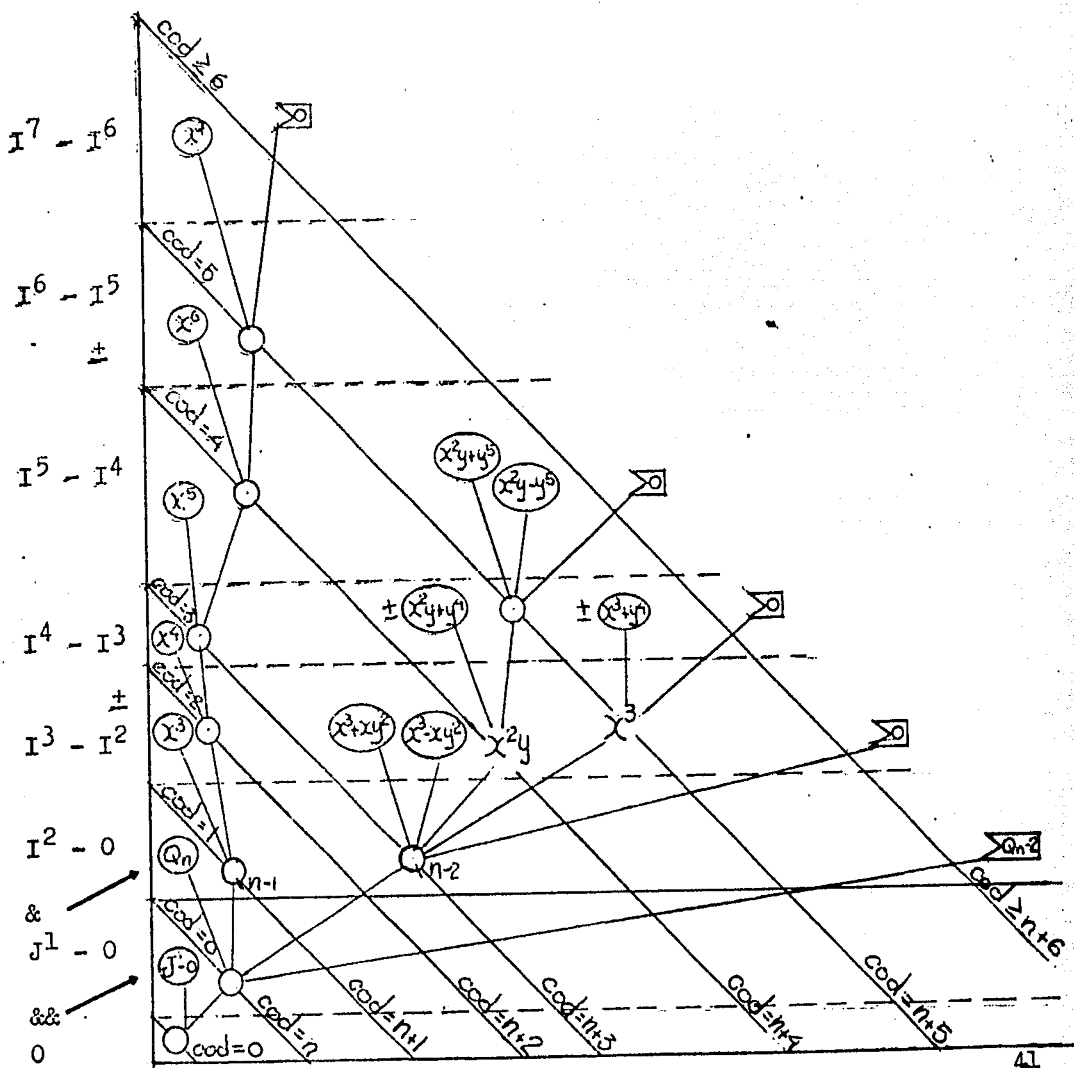
La palabra cod escrita en la parte superior izquierda se refiere a la codimensión del estrato en $I^7$ (consulte 3.0(1) y 3.3(3))

La palabra cod escrita en la parte inferior derecha se refiere a la codimensión del estrato en $J^7$

Las CUSPIDES son las órbitas que contienen exclusivamente una variable escencial, la cual se identificará con la variable x (consulte 4.3(8), 4.12(4), 4.12(5) y 4.13(6)).

Las órbitas UMBILICALES son aquellas que tienen exactamente 2 variables escenciales x, y. (consulte 4.17(11) y 4.17(12)).

## Clasificación de Orbitas en los espacios de 7 jets $I^7 = M^2 / M^8$ y $J^7 = M / M^8$




& $Q_n$ ( Morse órbitas de singularidades estables 4.8 (2) )

&& Orbita Regular 4.5 (4)

Supóngase que ya se tiene hecha y justificada la clasificación -- presentada en el diagrama 4.1, entonces podemos enunciar y demos - trar los 3 resultados siguientes:

Teorema 4.2

En el espacio de 7-jets $I^7 = M^2 / M^8$ si se excluyen los gérmenes que pertenecen a $\Sigma_6^7$, entonces hay exactamente 16n-7 órbitas bajo el grupo de 7-jets de difeomorfismos $G^7$.

Corolario 4.3

Si $0 \leq c \leq 5$ entonces el subconjunto de $I^7$ que consta de todos los gérmenes de codimensión C, es decir, $T_c^7$, es una - subvariedad de $I^7$ de codimensión C.

Teorema 4.4

El espacio de 7-jets $I^7$ es la unión ajena de 6 subvariedades de $I^7$ de codimensión menor que 6 con el conjunto de 7-jets - que corresponden a gérmenes de codimensión mayor ó igual que 6.

Simbólicamente $I^7 = T_0^7 \cup T_1^7 \cup \ldots \cup T_5^7 \cup \Sigma_6^7$ es de -- unión ajena y para toda $c = 1, \ldots, 5$ se tiene que $T_c^7$ es de -- codimensión C en $I^7$.

Demostración 4.2

Lo único que hay que hacer es sumar las órbitas que aparecen en el diagrama 4.1. Estas son :

4.2.1

n + 1 órbitas que corresponden a las singularidades estables, cada una de estas órbitas consta de los gérmenes de rango n e índice $n-\sigma$ donde $0 \leq \sigma \leq n$ (consulte 4.8 (2)).

4.2.2

$7n$ órbitas que corresponden a los gérmenes de rango $n-1$ , -- a los cuales se les denominará cuspides, cada una de estas $7n$ órbitas contiene exclusivamente gérmenes de índice $n-1-\sigma$ donde --- $0 \leq \sigma \leq n-1$ (consulte 4.12 (4) y 4.12 (5)).

4.2.3

8 $(n-1)$ órbitas que corresponden a los gérmenes de rango -- $n-2$, a los cuales se les denominará UMBILICALES, cada una de estas órbitas contiene exclusivamente gérmenes de índice $n-2-\sigma$ donde - $0 \leq \sigma \leq n-2$. Sumando los números que aparecen en 4.2.1 , --- 4.2.2 y 4.2.3 obtenemos el número deseado de órbitas, a saber ---- $16n - 7$ .

$\square$

Demostración Corolario 4.3 y Teorema 4.4

En virtud del corolario 3.6, $I^7$ es igual a la unión disjunta $T_0^7 \cup \ldots \cup T_5^7 \cup \Sigma_6^7$. Luego $I^7 - \Sigma_6^7 = T_0^7 \cup T_1^7 \cup \ldots \cup T_5^7$.

Por el teorema 4.2 se tiene que $T_c^7$ es la unión de un número finito de órbitas, además, para toda $c = 0, 1, \ldots, 5$ y gracias al teorema 3.7 sàbemos que cada una de estas órbitas es una subvariedad de $I^7$ de codimensión C .

$\square$

Nótese que nuestra clasificación dada por el diagrama 4.1 también nos dice que $\Sigma_6^7$ es la unión de un número finito de partes, cada una de codimensión mayor ó igual que 6.

La justificación de esta aseveración está implícitamente contenida en los enunciados de Proposición 4.11 , lema 4.15 y Proposición 4.17.

Definición

Se dice que un germen $\eta$ del ideal M es regular si la parte lineal del germen $\eta$ es distinta de cero, esto es, si
$j^1(\eta) \neq 0$ (véase 1.9 (4)). 4.4 (1)

La definicion anterior también puede formularse en estos términos.

Un germen $\eta$ es regular sí y sólo sí, existe alguna $i = 1, \ldots, n$ tal que $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}(0) \neq 0$ .

De esta definición se sigue inmediatamente que el germen de la proyeccion $x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es regular.

Proposición 4.5

La imágen inversa de $\mathcal{J}_1 - \{0\}$ bajo el epimorfismo canónico $j: M \longrightarrow \mathcal{J}_1$, coincide con la órbita de los gérmenes regulares.

Demostración

Para probar esta proposición, únicamente hay que justificar las dos igualdades siguientes:

1.- $\mathcal{J}_1 - \{0\} = \{\xi \in E \,/\, j(\xi) \neq 0\}$

2.- Si $\eta$ es un germen regular entonces 4.5(1)

$$(\eta, \sigma) = \{\xi \in E \,/\, j(\xi) \neq 0\}$$

La primera de estas igualdades es inmediata, ya que $j(\xi)$ es distinta de cero, sí y sólo sí, $j(\xi) \in \mathcal{J}_1 - \{0\}$ y esto último ocurre siempre y cuando el germen $\eta$ pertenezca a $j^{-1}(\mathcal{J}_1 - \{0\})$ .

Para justificar la segunda igualdad, supóngase que $\xi \in (\eta, G)$ entonces existe $\gamma \in G / \xi = \eta \circ \gamma$ ; como $\eta$ es regular y $\gamma$ es el germen de un difeomorfismo, entonces $j(\gamma) \neq 0$ y $j(\eta) \neq 0$, por consiguiente, $j(\xi) = j(\eta \circ \gamma) = j(\eta) \cdot j(\gamma) \neq 0$ (véase 1.10 (2), 1.10 (3) y 3 en 1.12 (1), por lo tanto

$$(\eta, G) \subset \left\{ \xi \in E \,/\, j(\xi) \neq 0 \right\} \qquad 4.5\ (2)$$

Para exhibir la otra contención supóngase que $\eta$ y $\xi$ son gérmenes regulares. Se probará que $\eta$ es equivalente por la derecha con $\xi$.

En efecto, como $\eta$ es regular entonces para alguna $i \leq n$ $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i} \neq 0$ ; haciendo uso del Teorema de la Función Implícita, se obtiene que, localmente, el germen $\eta$ difiere por un difeomorfismo del germen de la proyección $x_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en el dominio, en otras palabras $\eta \sim x_i$. Análogamente, para alguna $j \leq n$ se verifica $\xi \sim x_j$ ; como las proyecciones $x_i$ y $x_j$ difieren entre si por un difeomorfismo (el difeomorfismo que permuta exclusivamente la coordenada $i$ por la coordenada $j$ en $\mathbb{R}^n$) entonces por transitividad se concluye que $\eta \sim \xi$ esto significa que $\left\{ \xi \in E / j(\xi) \neq 0 \right\} \subset (\eta, G)$. Esta contención y la dada en 4.5 (2), justifican la segunda igualdad que aparece en 4.5 (1). $\square$

De la Proposición 4.5 se infiere que el conjunto de todos los gérmenes regulares del ideal $M$ consta precisamente de aquellos gérmenes que no tienen singularidad alguna, dicho de otra manera, no son singularidades.

Recuérdese que $\mathcal{J}^k = \dfrac{M}{M^{k+1}}$ y $I^k = \dfrac{M^2}{M^{k+1}}$

Observación

Los espacios vectoriales $\mathcal{J}^7$ y $\mathcal{J}^1 \times I^7$ son isomorfos

4.5(3)

En efecto, de acuerdo al Teorema 1.9 se tiene que $\mathcal{J}^7 = \dfrac{M}{M^8}$ es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por las clases de los monomios de la forma $X^\alpha$ donde $1 \leq |\alpha| \leq 7$ (consulte 5 en 1.9(1)). Si $V$ y $\omega$ son los subespacios de $\mathcal{J}^7$ generado por las clases de los monomios de la forma $X^\alpha$ donde $|\alpha| = 1$ y $X^\alpha$ donde $2 \leq |\alpha| \leq 7$, respectivamente, entonces $\mathcal{J}^7$ es la suma directa de $V + \omega$ además $V$ es isomorfo a $\mathcal{J}^1 = \dfrac{M}{M^2}$ y $\omega$ es isomorfo a $I^7 = \dfrac{M^2}{M^8}$ por consiguiente $\mathcal{J}^7$ es isomorfo a $\mathcal{J}^1 \times I^7$.

De esta observación y la Proposición 4.5 se infiere que $(\mathcal{J}^1 - \{0\}) \times I^7$ es la órbita de los gérmenes regulares en $\mathcal{J}^7$.

4.5(4)

Luego entonces, en $0 \times I^7$ ó equivalentemente en $I^7$ se encuentran las llamadas Orbitas Irregulares, éstas corresponden a aquéllos gérmenes que pertenecen al ideal $M^2$; la clasificación de estas órbitas irregulares en el espacio de 7-jets $I^7$ será el tema a tratar en lo que resta de este capítulo.

Definición

Sea $\eta$ un germen del ideal $M^2$, entonces se define el rango de $\eta$' rang ( $\eta$ ) , como el rango de la matríz $(a_{ij})$ , donde $(a_{ij})$ es la matríz asociada a la forma cuadrática $q = j^2(\eta)$.

4.5 (5)

Obsérvese que $q$ tiene asociada una matríz simétrica $A = (a_{ij})$ de $n \times n$.

4.5(6)

En efecto, el germen $\eta$ es de clase $C^\infty$ (véase 1.2(5)), luego entonces $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i x_j}(o) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j x_i}(o)$ por consiguiente $a_{ij} = a_{ji}$.

Obsérvese que el rango de $j^k(\eta)$ coincide con el rango de $\eta$ para todo germen del ideal $M^2$ y para toda $\underline{K}$ mayor ó igual que 2, ya que $j^2(\eta) = j^2(j^k(\eta))$

4.5 (7)

De la definición anterior se sigue que $0 \leq$ rang $(\eta) \leq n$.

Proposición 4.6

Sea $\eta$ un germen del ideal $M^2$ y $j^k(\eta) = q + p'$ su k-jet, donde $q = j^2(\eta)$ es una forma cuadrática y $p'$ es un elemento de $M^3$ ; si $\rho$ es el rango del germen $\eta$ entonces $j^k(\eta)$ es equivalente por la derecha con

$(x_1^2) + \dots + (x_\sigma^2) - x_{\sigma+1}^2 - \dots - x_\rho^2 + p$ donde $p$ es un polinomio de grado mayor ó igual que 3.

Demostración

Como $\rho$ es el rango de la matriz asociada a la forma cuadrática $q$, pues por definición rang $(\eta) = \rho$ (véase 4.5 (5)), entonces el Teorema de Sylvester afirma que existe un "cambio lineal de coordenadas" en $\mathbb{R}^n$ el cual está dado por un difeomorfismo $\gamma$ que satisface:

$$(q \circ \gamma)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} X_j^2 \qquad 4.6(1)$$

Sea $p = p' \circ \gamma$, como $\gamma$ induce un cambio lineal de coordenadas en el dominio entonces $p$ también resulta ser un elemento en $M^3$ por consiguiente el germen
$j^k(\eta) \circ \gamma = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} X_j^2 + p$ está en la órbita del germen $j^k(\eta)$ (ver 1.10 (2) y 1.10 (3)), es decir, $j^k(\eta)$ es equivalente por la derecha con $X_1^2 + \ldots + X_\sigma^2 - X_{\sigma+1}^2 - \ldots - X_\rho^2 + p$.

$\square$

Sea $Q_\rho = \left\{ q \in M^2 - M^3 \,/\, \text{rang } q = \rho \right\}$;

Si $Q = \left\{ q \in M^2 - M^3 \,/\, 0 \leq \text{rang } q \leq n \right\}$ entonces claramente $Q = Q_0 \cup \ldots \cup Q_n$ (unión ajena); como $Q$ es el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las formas cuadráticas cuyas coordenadas están determinadas por los coeficientes $a_{ij}$ donde $1 \leq i \leq j \leq n$, (véase observación 4.5 (6), entonces dim $(q) = \frac{1}{2} n(n+1)$ por consiguiente $Q$ es isomorfo a $I^2 = \dfrac{M^2}{M^3}$. por lo tanto de acuerdo a la observación 4.5 (7) se tiene que

$$I^2 = \bigcup_{\rho=0}^{n} Q_\rho \quad \text{(unión ajena) donde } Q_\rho = \left\{ q \in I^2 / \text{rang } (q) = \rho \right\} \qquad 4.6\ (2)$$

Definición

Sea $\rho$ el rango de una forma cuadrática $q$, si $\gamma$ es el germen de un difeomorfismo que satisface $(q \circ \gamma)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2$ entonces el índice de $q$, ind $(q)$, se define como el número natural $\rho - \sigma$.

4.6 (3)

Observación

El teorema de Sylvester asegura que la definición de rango e índice de una forma cuadrática es independiente de un cambio lineal de coordenadas. 4.6 (4)

En efecto, si rang $(q) = \rho$ entonces por el Teorema de Sylvester existe $\gamma \in G$ tal que

$$q \circ \gamma = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{i=\sigma+1}^{\rho} x_i^2 \text{ , } X = (q \circ \gamma') \circ (\gamma'^{-1} \circ \gamma) \forall \gamma' \in G .$$

por lo tanto rang ( o ) = y ind ( o ) =

Sea $Q_\rho^\sigma$ el subconjunto de $Q_\rho$ que consta de todas las formas cuadráticas de índice $\rho - \sigma$, es decir,

$$Q_\rho^\sigma = \left\{ Q \in Q_\rho \;/\text{ind}\,(q) = \rho - \sigma \right\} \text{ ó bien}$$

$$Q_\rho^\sigma = \left\{ Q \in I^2 \;/\text{rang}\,(q) = \rho,\ \text{ind}\,(q) = \rho - \sigma \right\} \qquad 4.6\ (5)$$

Por consiguiente

$$Q_\rho = \bigcup_{\sigma=0}^{\rho} Q_\rho^\sigma \qquad \text{(unión ajena)} \qquad 4.6(6)$$

Lema 4.7

El conjunto de formas cuadráticas de rango $\rho$ e índice $\rho - \sigma$ es una órbita bajo la acción del grupo de 2-jets de difeomorfismos que se anulan en cero, $G^2$, es decir $Q_\rho^\sigma = (q, G^2)$ donde $q \in Q_\rho^\sigma$.

Demostración

Sea $q$ un elemento de $Q_{\rho}^{\sigma}$ entonces por definición cualquier forma cuadrática $q'$ en $Q_{\rho}^{\sigma}$ tiene rango $\rho$ = rang $(q)$ e índice $\rho - \sigma$ = ind $(q)$ (véase 4.6 (5)). Luego entonces, de la definición 4.6 (3) y la proposición 4.6 se tiene que existen -- gérmenes de isomorfismos $\gamma$ y $\gamma'$ que satisfacen :

$$(q \circ \gamma)\ (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{i=\sigma+1}^{\rho} x_i^2 \quad y$$

$$(q' \circ \gamma')\ (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{i=\sigma+1}^{\rho} x_i^2$$

en consecuencia $q' = (q \circ \gamma) \circ \gamma'^{-1}$, esto significa que $q'$ pertenece a la órbita de $q$ bajo $\mathcal{G}^2$ ; por consiguiente $Q_{\rho}^{\sigma} \subset (q, \mathcal{G}^2)$ .

Para la otra contención considérese $q' \in (q, \mathcal{G}^2)$ donde $q \in Q_{\rho}^{\sigma}$ entonces para alguna $\gamma \in \mathcal{G}^2$ se tiene que $q' = q \circ \gamma$ .

De la Proposición 4.6 y la observación 4.6 (4) se tiene que

rang $(q')$ = rang $(q \circ \gamma)$ = rang $(q) = \rho$ e

ind $(q')$ = ind $(q \circ \gamma)$ = ind $(q) = \rho - \sigma$

en consecuencia $q' \in Q_{\rho}^{\sigma}$ , por consiguiente $(q, \mathcal{G}^2) \subset Q_{\rho}^{\sigma}$ verificándose así la igualdad propuesta en el lema 4.7.

Proposición 4.8

El conjunto de formas cuadráticas de rango $\rho$ es una --- subvariedad de $I^2$ de codimensión $\frac{1}{2}(n-\rho)(n-\rho+1)$.

Demostración

De 4.6 (6) se tiene que $Q_\rho = U_{\sigma}^{\rho} = o\ Q_\rho^{\sigma}$, el Lema - 4.7 afirma que cada componente $Q_\rho^{\sigma}$ es una órbita bajo el grupo $G$; en consecuencia $Q_\rho$ resulta ser una subvariedad de $I^2$.

Para saber cual es su codimensión procédase de la siguiente manera:

Toda forma cuadrática $q$ de rango $\rho$ puede expresarse de - acuerdo al apartado 4.6 (1) en la forma

$q = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{i=\sigma+1}^{\rho} X_i^2$ y de acuerdo a la observa -- ción 4.5 (6) se tiene que la matríz asociada de $q$ es una matríz- de $n \times n$ que tiene la forma $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $E$ es la matríz- diagonal de $\rho \times \rho$ que satisface

$$e_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq i \leq \sigma \\ -1 & \text{si} \quad \sigma + 1 \leq i \leq \rho \end{cases}$$

Sea $N$ una vecindad de $q$ en $I^2$, entonces toda forma cuadrática $q'$ que pertenezca a la intersección $N \cap Q_\rho$ tiene - asociada una matríz simétrica de $n \times n$ de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}$

donde $A$ es una matríz simétrica de $\rho \times \rho$ cuya determinante- es distinto de cero ya que rang $(q') = \rho$ ahora bien $A$ es una matríz no singular entonces $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^t(A^{-1}) & I \end{pmatrix}$ también resulta -- ser una matríz no singular donde $I$ es la matríz identidad de ---

$(n-\rho)(n-\rho)$ y como el rango de una matríz no se altera al multiplicarla por una matríz invertible entonces se tiene que :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^t(A^{-1}) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & C-B^tA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, para que el rango de $q'$ sea $\rho$ es necesario y suficiente que $C - B^t A^{-1} B$ sea la matríz idénticamente cero ó equivalentemente $C = B^t A^{-1} B$. Esto significa que toda forma cuadrática que pertenezca a $N \cap Q_\rho$ tiene asociada una matríz simétrica de $n \times n$ de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & B^tA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Como puede observarse cada una de éstas matrices queda unívocamente determinada por las entradas de las matrices $A$ y $B$. Por consiguiente, la codimensión de $Q_\rho$ en $I^2$ coincide con la dimensión del espacio vectorial de todas las matrices simétricas de $(n-\rho)$ $(n-\rho)$ por lo tanto

$$\operatorname{cod}(Q_\rho) = \tfrac{1}{2}(n-\rho)(n-\rho+1).$$

$\square$

Gracias a la Proposición 4.8 ya es posible hacer la clasificación de un nuevo conjunto de gérmenes en el espacio de 7-jets $I^7$ ; estos son precisamente los gérmenes de rango $n$ los cuales tienen codimensión cero y determinación 2.

En efecto, $I^7$ es isomorfo a $I^2 \times M^3/M^8$, del apartado 4.6 (2) se tiene que

$$I^7 = Q_n \times M^3/M^8 \quad \bigcup_{\rho=0}^{n-1} \quad Q_\rho \quad \times M^3/M^8 \qquad 4.8(1)$$

Del Lema 4.7, la Proposición 4.8 y del apartado 4.6 (6) - se tiene que $Q_n \times M^3/M^8$ es un conjunto abierto en $I^7$ el cual puede expresarse como una unión finita de órbitas, cada una de - ellas de codimensión cero, es decir,

$$Q_n \times M^3/M^8 = \bigcup_{\sigma=0}^{n} \quad Q_n^\sigma \quad \times \quad M^3/M^8 \qquad 4.8(2)$$

A las n+1 órbitas del miembro derecho de esta igualdad se les denominará "órbitas de singularidades estables". En estas - órbitas se encuentran precisamente aquellos gérmenes que se estudian en la Teoria de Morse, los cuales por ser de rango máximo - son 2-determinados y tienen codimensión cero, ya que el ideal -- Jacobiano de un germen de rango n coincide con el ideal maxi-- mal M, de ahí que $M^3 = M^2 \Delta$ y $\dfrac{M}{\Delta} = \{o\}$ (consulte Teorema 1.9 y Definición 3.0 (1)).

Obsérvese que $Q_n \times M^3 / M^8$ coincide exactamente con $T_o^7$ (consulte 3.3 (2) y 3.3 (3)).

Ahora se analizan aquéllos gérmenes de $I^7$ que pertenecen a la unión $\bigcup_{\rho=o}^{n-1} \quad Q_\rho \quad \times \quad M^3/M^8$ ya que los gérmenes que pertenecen a $Q_n \times M^3/M^8$ ya han sido clasificados.

Supóngase que $\eta$ es un germen de rango $\rho <$ n y de acuerdo a la Proposición 4.6 se han elegido coordenadas apropiadas- $x_1, \dots, x_n$ con las cuales el germen $j^k(\eta)$ adopta la -- forma $\sum_{i=1}^{\sigma} \quad x_i^2 - \sum_{i=\sigma+1}^{\rho} \quad x_i^2 + \rho'$ donde p' es un polino--

mio de grado mayor ó igual que 3 dependiente de las variables $x_1, \dots, x_n$.

En estas condiciones la clasificación de gérmenes de rango $\rho$ donde $1 \leq \rho \leq n-1$ y de codimensión $\leq 5$ se obtiene de la información que se extrae al analizar las variables $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ a las cuales se les denominará "Variables Esenciales"; esta nomenclatura queda plenamente justificada en el siguiente teorema, el cual proporciona un criterio para reducir el número de variables de un germen del ideal $M^2$. 4.8(3)

Teorema de Reducción 4.9

Sea $\eta$ un germen del ideal $M^2$ de rango $\rho < n$, entonces -- para todo número natural $K \geq 2$ existe un germen $\xi$ en el ideal - $M^2$ que satisface:

I.- $\eta$ es equivalente por la derecha con $\xi$.

II.- $j^k(\xi) = q + p$ donde $q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2$, $p$ es un polinomio que depende exclusivamente de las variables esenciales

$x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ y $3 \leq \text{grad}(p) \leq k$.

Demostración

La demostración se hace por inducción sobre el número natural $k$. En efecto, de la Proposición 4.6 se tiene que el 2-jet - de $\eta$ es equivalente por la derecha con la forma cuadrática

$$q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2 \quad . \qquad 4.9\ (1)$$

(véase 4.6 (1)), verificándose así la conclusión del teorema para el caso $k = 2$.

Supóngase inductivamente que para todo número natural $S$ tal que $2 \leq S \leq K-1$ existe un germen $\xi$ en el ideal $M^2$ que satisface $\eta \sim \xi$ y $j^s(\xi) = q + p\ (x_{\rho+1}, \ldots, x_n)$ donde $3 \leq \text{grad}(p) \leq s$ y $q$ como en 4.9 (1) .

En particular para $s = k-1$ se tiene que en el espacio de -- k-jets, $I^k : j^k(\xi) = j^{k-1}(\xi) + \xi_k$ donde

$$\xi_k = \sum_{|\alpha| = k} a^{\alpha} y^{\alpha} \qquad 4.9\ (2)$$

(consulte apartados 1.2 (3), 1.9 (6) y 1.9 (7)).

Aplicando la hipótesis de inducción se obtiene que

$$j^k(\xi) = \sum_{i=1}^{\sigma} y_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} y_j^2 + p'(y_{\rho+1}, \dots, y_n) + \xi_k(y_1, \dots, y_n) \qquad 4.9\ (3)$$

donde $3 \leq \text{grad}\,(p') \leq k-1$ y $\xi_k$ es el polinomio homogéneo de -- grado k descrito anteriormente.

Ahora asóciese en una sola suma aquéllos términos de $\xi_k$ que satisfagan

$$y^{\alpha} = y_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} \quad \text{donde} \quad 1 \leq i \leq \rho \quad \text{y} \quad \alpha_i \geq 1 \qquad 4.9\ (4)$$

De 4.9 (2) y 4.9 (4) se tiene que cada una de éstas sumas es un polinomio de grado K que depende exclusivamente de las variables $y_i, \dots, y_n$ ; además, cada uno de estos polinomios puede expresarse en la forma $2y_i\, P_i$ si $1 \leq i \leq \sigma$ ó bien $2y_j\, P_j$ si $\sigma + 1 \leq j \leq \rho$ donde $P_i$ ( $P_j$) es un polinomio de grado k-1 que depende exclusivamente de las variables $y_i, \dots, y_n$ ( $y_j, \dots, y_n$ ).

Defínase ahora el polinomio P" como

$$\xi_k - \left( \sum_{i=1}^{\sigma} 2\, y_i\, P_i - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} 2\, y_j\, P_j \right)$$

; claramente P" es un polinomio de grado k que depende exclusivamente de las variables $y_{\rho+1}, \dots, y_n$ ; por consiguiente.

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\rho} 2\, y_i\, P_i\, (y_i, \dots, y_n) - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} 2\, y_j\, P_j\, (y_j, \dots, y_n) + P''\, (y_{\rho+1}, \dots, y_n) \qquad 4.9(5)$$

Ahora bien para toda $i = 1, \ldots, \ell$ (para toda $j = \ell + 1, \ldots, \rho$ ) y para toda $h = 1, \ldots, n$ se verifica $\dfrac{\partial P_i}{\partial y_n}(o) = 0$

$\left( \dfrac{\partial P_j}{\partial y_n}(o) = o \right)$ ya que $\dfrac{\partial P_i}{\partial y_n}$ $\left( \dfrac{P_j}{n} \right)$ es un polinomio homogéneo de grado $K-2$ y como $K > 2$ entonces $K - 2 > 0$ ; por consiguiente

$$\frac{\partial(y_i + \rho_i)}{\partial y_n}(o) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = h \\ 0 & \text{si } i = h \end{cases}$$

análogamente $$\frac{\partial(y_j + \rho_j)}{\partial y_n}(o) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = h \\ 0 & \text{si } j = h \end{cases}$$

Luego entonces es posible efectuar el siguiente cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ :

$$(y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow (y_1 + P_1, \ldots, y_\rho + P_\rho, y_{\rho+1}, \ldots, y_n)$$

es decir

$$X_i = \begin{cases} y_i + \rho_i & \text{si } 1 \le i \le \rho \\ y_i & \text{si } \rho + 1 \le i \le n \end{cases} \quad \text{entonces}$$

para $i \le \rho$ se tiene que

$X_i^2 = y_i^2 + 2\, y_i\, \rho_i + \rho_i^2$ en consecuencia

$$j^k \,( x_i^2 ) = y_i^2 + 2\, y_i\, P_i \qquad 4.9(6)$$

ya que $P_i^2$ es un polinomio de grado estrictamente mayor que $K$, pues por hipótesis $K > 2$ entonces $2K - 2 > K$.

Sustituyendo 4.9 (5) y 4.9 (6) en 4.9 (3) se obtiene que

$$j^k(\xi) = \sum_{i=1}^{\sigma} y_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} y_j^2 + P' \,( y_{\rho+1}, \dots, y_n ) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\sigma} 2\, y_i\, P_i - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} 2\, y_j\, P_j + P'' \,( y_{\rho+1}, \dots, y_n ) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\sigma} j^k ( X_i^2 ) - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} j^k ( X_j^2 ) + P ( X_{\rho+1}, \dots, X_n )$$

donde $P = P' + P''$ por lo tanto el K-jet de $\xi$ coincide con el k-jet de 4.9(7)

$$X_1^2 + \dots + X_\sigma^2 - X_{\sigma+1}^2 - \dots - X^2 + P ( X_{\rho+1}, \dots, X_n )$$

verificándose así el siguiente paso inductivo.

Nota 4.9 (8) : La función que asigna a cada germen $\eta$ del ideal $M^2$ el polinomio $P ( X_{\rho+1}, \dots, X_n )$, como lo propone el Teorema de Reducción 4.9, está bien definida.

La justificación de esta aseveración está explícitamente contenida en la prueba del Teorema 4.9. Por consiguiente, la clasificación de gérmenes finitamente determinados de rango $\rho < n$ que pertenecen al ideal $M^2$ es equivalente a clasificar polinomios que dependen exclusivamente de las variables esenciales $X_{\rho+1}, \dots, X_n$.

El Teorema de Reducción 4.9 puede generalizarse de la siguiente manera:

Todo germen $\eta$ que pertenece al ideal $M^2$ es equivalente por la derecha con un germen de la forma $\sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=1}^{\rho} x_j^2 + \mu$ donde $\rho$ es el rango de $\eta$ y $\mu$ es un germen que pertenece al ideal $M^3$ que depende exclusivamente de las variables esenciales $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$.

Esta formulación del Teorema de Reducción 4.9 no se utiliza en estas notas, por esta razón, se sugiere al lector que esté interesado en la demostración de éste resultado consulte

Corolario 4.10

Sea $\eta$ un germen de rango $\rho < n$ que pertenece al ideal $M^2$; si $\eta$ es finitamente determinado entonces $\eta$ es equivalente por la derecha con $\sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} X_j^2 + P(X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ donde p es un polinomio de grado mayor ó igual que 3 que pertenece al ideal $M^3$.

Demostración

Del corolario 1.25 se infiere que $2 \leq es(\eta) \leq det(\eta)$ ya que por hipótesis $\eta \in M^2$ entonces $j^o(\eta) = j^1(\eta) = o$.

Del Teorema de Reducción 4.9 se deduce que $\forall\ K \geq det(\eta)$ existe $\xi \in M^2$ tal que $\eta \sim \xi$ y

$j^k(\xi) = q + \rho\ (X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$ donde

$q = \sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} X_j^2$ y $3 \leq grad\ (p) \leq k$.

Como $\eta$ es finitamente determinado y $k \geq det(\eta)$ entonces de la Proposición 1.13 se infiere que el germen $\xi$ es equivalente por la derecha con su k-jet, es decir, $\xi \sim q + \rho$.

Ahora, de la Propiedad Transitiva de la Relación $\sim$ se concluye que $\eta$ es equivalente por la derecha con

$$\sum_{i=1}^{\sigma} X_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} X_j^2 + P\ (X_{\rho+1}, \ldots, X_n)$$

$\square$

El Corolario anterior también es válido para gérmenes de - rango $n$ , en este caso, el germen $\eta$ pertenece a la órbita

$$\sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n} x_j^2$$ (consulte 4.8 (2) ) .

Proposición 4.11

Sea $\eta$ un germen del ideal $M^2$ de rango $\rho$ si $\rho \leq n - 3$ entonces la codimensión de $\eta$ es mayor ó igual que $6$ .

Demostración

Si el germen $\eta$ no es finitamente determinado, entonces de la Proposición 3.1 se tiene que la codimensión de $\eta$ es finita, en consecuencia $\operatorname{cod}(\eta) > 6$.

Supóngase que el germen $\eta$ es finitamente determinado , - entonces $\eta$ es k-determinado para algún número natural $k$ ,- como $\eta \overset{k}{\sim} j^k(\eta)$ entonces $\eta \sim j^k(\eta)$ , luego ,del Teorema de Reducción 4.9 se tiene que $j^k(\eta) = q + p$ donde $q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2$ y $p$ es un polinomio que depende exclusivamente de las variables esenciales de grado mayor ó igual que $3$ y menor ó igual que $k$ ; por hipótesis, $\operatorname{rang}(\eta) = \rho \leq n-3$ entonces $n-\rho \geq 3$ , por consiguiente, $\frac{1}{2}(n-p)(n-p+1) \geq 6$ luego entonces será suficiente con mostrar que

$$\operatorname{cod}(\eta) \geq \tfrac{1}{2}(n-p)(n-p+1) .$$

En efecto, recuérdese que el ideal generado por $\langle x_{p+1}, \ldots, x_n \rangle$ es isomorfo al ideal maximal $M_\lambda$ del anillo local $E_\lambda$ donde $\lambda = n - p$ (consulte Teorema -

1.3 y apartado 3.2 (2)). Entonces por el Lema 3.3 se tiene que --

$$\dim \left( M_\lambda / M_\lambda^3 \right) = \frac{(\lambda+2)!}{\lambda!\ 2!} - 1 = \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)-2}{2} \qquad 4.11\ (1)$$

Por hipótesis grad (p) $\geq$ 3 entonces $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ pertenece al ideal $M_\lambda^3$ $\forall \mu \in M_\lambda$ luego entonces mediante un isomorfismo se tiene que las clases de $\frac{\partial p}{\partial x_{\rho+1}}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n}$ generan al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\Delta_p + M_\lambda^3 / M_\lambda^3$; en consecuencia

$$\dim \left( \Delta_p + M_\lambda^3 / M_\lambda^3 \right) \doteq \lambda \qquad 4.11\ (2)$$

Ahora bien $\Delta_p \subset \Delta_p + M_\lambda^3$ entonces

$$\dim \left( M_\lambda / \Delta_p \right) \geq \dim \left( M_\lambda / \Delta_p + M_\lambda^3 \right) \qquad 4.11\ (3)$$

como $M_\lambda / \Delta_p + M_\lambda^3$ es isomorfo a $\frac{M_\lambda / M_\lambda^3}{\Delta_p + M_\lambda^3 / M_\lambda^3}$ entonces

$$\dim \left( M_\lambda / \Delta_p + M_\lambda^3 \right) = \dim \left( M_\lambda / M_\lambda^3 \right) - \dim \left( \Delta_p + M_\lambda^3 / M_\lambda^3 \right)$$

De 4.11 (1), 4.11 (2) y 4.11 (3) se tiene que

$$\operatorname{cod}(p) = \dim \left( M_\lambda / \Delta_p \right) \geq \dim \left( M_\lambda / \Delta_p + M_\lambda^3 \right) =$$

$$= \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)-2}{2} - \lambda =$$

$$= \frac{(\lambda+2)(\lambda+1)-2(\lambda+1)}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \lambda\ (\lambda+1)$$ ; pero por definición

$\lambda = n - p$ entonces cod (p) $\geq \frac{1}{2}$ (n-p) (n-p+1) por lo tanto del Corolario 3.2 se tiene que cod ($\eta$) = cod (p) en consecuencia cod ($\eta$) $\geq \frac{1}{2}$ (n-p) (n-p+1).

$\square$

Gracias al Teorema de Reducción 4.9 y a la Proposición 4.11, únicamente hay que enfocar nuestra atención en aquellos gérmenes de rango n-1 y rango n-2 que pertenece al espacio de 7-jets $I^7$, ya que que por una parte aquéllos gérmenes de rango M de $I^7$ ya se estudiaron en el apartado 4.8 (2) y por otra parte, los germenes que pertenece a la unión $\bigcup_{1 \leq p \leq n-3} Q_{p}^{(c)} \times M^3 / M^8$ tiene codimensión mayor ó igual que 6 ; y de acuerdo a la Proposición 4.8 ésta unión es una subvariedad de codimención 6 en $I^7$ y por tanto puede ser considerada como un subespacio de codimención 6 en $I^7$, por consiguiente, únicamente queda por investigar aquellos gérmenes de $I^7$ que pertenecen a

$Q_{n-1} \times M^3 / M^8$ ó a $Q_{n-2} \times M^3 / M^8$ ; a los gérmenes que pertenecen al primero de estos conjutos, es decir, a los que tienen rango n-1 se les conoce como <u>CUSPIDES</u> ; en tanto que a los que tienen rango n-2 se les denomina <u>UMBILICALES.</u>

4.11(4)

Proposición 4.12 Clasificación de Cúspides de Codimensión $< 6$

Sea $\eta$ un germen del ideal $M^2$ de codimensión estrictamente menor que 6 , si el rango de $\eta$ es n-1 entonces el germen $\eta$ es equivalente por la derecha con un germen de la forma:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} x_j^2 + x_n^k \quad \text{donde} \quad 3 \leq k \leq 7 .$$

Demostración

Por hipótesis rang( $\eta$ ) = n-1 y cod( $\eta$ ) $< 6$ , entonces de la Proposición 3.1 y del Corolario 4.10, se infiere que el germen $\eta$ es equivalente por la derecha con un germen de la forma:

$$\sum_{i=1}^{\sigma} y_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} y_j^2 + p(y_n) \quad \text{donde} \quad 3 \leq \text{grad}(p)$$

Más aún, la determinación del germen $\eta$ coincide con la escencia del germen $\eta$ o equivalentemente con la escencia del polinomio P (consulte Corólario 1.25). En efecto, si $k = E_s(\eta) = E_s(p)$ entonces

$$P(y_n) = a_k y_n^k + \dots + \quad a_k \neq 0 \quad . \text{ Si}$$

$$q = \sum_{i=1}^{\sigma} y_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} y_j^2$$ entonces el ideal Jacobiano de

$q + a_k y_n^k$ , $\Delta(q + a_k y_n^k)$ está generado por

$\langle y_1 , \dots, y_{n-1} , y_n^{k-1} \rangle$ (consulte observación 1.8(2) y definición III.13(1)).

El Corolario 1.6 afirma que el ideal $M^{k-1}$ está generado por $\{ y^{\alpha} \in M \text{ tal que } |\alpha| = k-1 \}$ pero claramente cada generador y pertenece al ideal

$\langle y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^{k-1} \rangle$ ya que

$$y^{\alpha} = \begin{cases} y_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot y_n^{\alpha_n} & \text{si } \alpha_i \geq 1 \text{ para alguna } i=1, \ldots, n-1 \\ y_n^{k-1} & \text{si } \alpha_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

En consecuencia el ideal $M^{k-1}$ está contenido en el ideal $\Delta(q + a_k y_n^k)$ luego entonces $M^{k+1} \subset M^2 \Delta(q + a_k y_n^k)$ y de acuerdo al Teorema 1.19 I se tiene que el germen $q + a_k y_n^k$ es k-determinado.

Ahora aplíquese la Proposición 1.13 a los gérmenes $q$ y $q + a_k y_n^k$ para concluír que el germen $\eta$ es k-determinado, ésto significa que $\det(\eta) \leq k = E_s(P)$. Por otra parte, del Corolario 1.25 se infiere que $k = es(\eta) \leq \det(\eta)$ pues $j^s(\eta) = 0 \quad \forall\, s < k$ por lo tanto

$$\det(\eta) = E_s(P) \tag{4.12(1)}$$

Ahora bien $a_k \neq 0$ entonces es posible efectuar el siguiente cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$:

$$x_i = \begin{cases} y_i & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ |a_k|^{\frac{1}{k}} y_n & \text{si } i = n \end{cases}$$

De éste cambio de coordenadas y la k-determinación del germen $\eta$, se deduce que el germen $\eta$ es equivalente por la derecha con $q + x_n^k$ o $q - x_n^k$ aunque debe advertirse que ambos gérmenes pertenecen a la misma órbita si k es impar , pues en éste caso $q + x_n^k$ y $q - x_n^k$ difieren entre sí por el difeomorfismo $(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ (ver 1.10(2) y 1.10(3)).

Como $\eta \circ \gamma = q \pm x_n^k$ para alguna $\gamma \in G$ ; entonces de la observación 1.13(2), se tiene que el ideal Jacobiano de $\eta$ coincide con

$\Delta(q \pm x_n^k) = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{k-1} \rangle$ en consecuencia las clases de $x_n, \dots, x_n^{k-2}$ serán una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M/\Delta(\eta)$ es decir

$$\operatorname{cod}(\eta) = k - 2 \qquad 4.12(2)$$

Como $\operatorname{cod}(\eta) < 6$ entonces $3 \leq k \leq 7$ por lo tanto

$$\eta \sim \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} x_j^2 + \begin{Bmatrix} x_n^k & \text{si} & k & \text{es impar} \\ \pm x_n^k & \text{si} & k & \text{es par} \end{Bmatrix} \qquad 4.12(3)$$

$\square$

La Proposición anterior y los apartados 4.12(1), 4.12(2) y 4.12(3), hacen posible la clasificación de gérmenes de codimensión menor que 6 y rango n-1 que pertenecen al ideal $M^2$ de la siguiente manera

$$\eta \sim \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} x_j^2 + \left\{ \begin{array}{ccc} \text{CUSPIDES} & \operatorname{cod}(\eta) & \det(\eta) \\ x^3 & 1 & 3 \\ x^4 & 2 & 4 \\ -x^4 & 2 & 4 \\ x^5 & 3 & 5 \\ x^6 & 4 & 6 \\ -x^6 & 4 & 6 \\ x^7 & 5 & 7 \end{array} \right\} \qquad 4.12(4)$$

Por consiguiente si $\eta$ es un cúspide de codimensión $< 6$ e índice $n-1-\sigma$ entonces $\eta$ pertenece, a una y sólo una, de las 7 órbitas siguientes:

$(q + x^3, G)$ , $(q + x^4, G)$ , $(q - x^4, G)$ , $(q + x^5, G)$ ,
$(q + x^6, G)$ , $(q - x^6, G)$ , $(q + x^7, G)$ donde

$q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} x_j^2$ por lo tanto

> en el espacio de 7 jets $I^7$ existen 7n órbitas que contienen a todos los cúspides de codimensión menor que 6 $\qquad$ 4.12(5)

Ya que por definición, el índice de un cúspide varía entre 0 y n-1 y para cada uno de éstos índices existen 7 órbitas distintas (consulte definición 4.6(3), observación 4.6(4) y la igualdad 4.6(6)).

Proposición 4.13

El subconjunto de gérmenes del espacio de 7 jets $I^7$ de rango $n-1$ de codimensión mayor o igual que 6 es una subvariedad de $I^7$ de codimensión 6.

Demostración

Sea $W$ el subespacio vectorial de $M^3/M^8$ generado por las clases de los monomios $x_n^3$ , $x_n^4$ , $x_n^5$ , $x_n^6$ , $x_n^7$ como $\dim(W) = 5$ entonces

$$W \text{ es isomorfo a } \mathbb{R}^5 \qquad 4.13(1)$$

Si $V$ es el complemento ortogonal de $W$ en $M^3/M^8$ entonces $M^3/M^8 = V \oplus W$ o equivalentemente

$$M^3/M^8 \simeq V \times W \qquad 4.13(2)$$

Ahora bien, el conjunto de cúspides de $I^7$ está contenido en $Q_{n-1} \times M^3/M^8 \simeq Q_{n-1} \times V \times W$ o equivalentemente en la unión $\bigcup_{\sigma=0}^{n-1} Q_{n-1}^{\sigma} \times V \times W$ (consulte 4.6(6) y 4.13(2)).

En consecuencia, los elementos $I^7$ que corresponden a gérmenes de rango $n-1$ e índice $\sigma$ , pueden expresarse mediante un cambio de coordenadas en la forma:

$$q + V + W \quad \text{donde} \quad q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-1} x_j^2 \quad , \quad v \in V \quad y \quad w \in W$$

4.13(3)

(consulté 4.6(4) y Lema 4.7). En é tas condiciones al aplicar
el Teorema de Reducción 4.9 y la observación hecha en 4.9(6),
los gérmenes de rango n-1 e índice $\sigma$ se obtiene una función
polinomial $\theta$ ... $V \times W \longrightarrow W$ que satisface

$$\theta(v + w) = \theta(v) + w \qquad 4.13(4)$$

La justificación de ésta aseveración está contenida en el
argumento que se utilizó para demostrar el Teorema de Reducción
4.9.

Ahora bien, si $j^7(\eta)$ es un germen que pertenece a
$Q^{\sigma}_{n-1} \times M^3/M^8$, entonces de 4.13(3) se tiene que
$j^7(\eta) = q + v + w$ ; luego del Teorema de Reducción 4.9 y la
manera en que se define la función $\theta$, garantizan la existencia de
un germen $\xi$ en el ideal $M^2$ que satisface

$$\eta \sim \xi \quad \text{y} \quad j^7(\xi) = q + \theta(v) + w$$

Como $\eta \sim \xi$ entonces $\Delta(\eta) = \Delta(\xi)$ (ver 1.13(2)).
Por consiguiente, $\operatorname{cod}(\eta) = \operatorname{cod}(\xi)$ y de acuerdo al Corola-
rio 3.2 se tiene que la codimensión de $\xi$ coincide con la codi-
mensión de $\theta(v) + w$ por lo tanto $\operatorname{cod}(\eta) = \operatorname{cod}(\theta(v) + w)$
Luego entonces, $\operatorname{cod}(\eta) \geqslant 6$ si y sólo si,
$\operatorname{cod}(\theta(v) + w) \geqslant 6$ ; ésto último ocurre siempre y cuando la clase
de $\theta(v) + w$ coincide con la clase del cero en $W/\Delta(\theta(v) + w)$.
Esto equivale a afirmar que $\theta(v) + w = 0$ , es decir,
$w = -\theta(v)$ en otras palabras $(v, w)$ pertenece a la gráfica
de $-\theta$ entonces como $-\theta$ es un homomorfismo entre varieda-
des diferenciables se tiene que:

$$M_{-\theta} \text{ es una subvariedad de } V \times W \text{ de codimensión } 5 = \dim(w) \qquad 4.13(5)$$

Por consiguiente, de la Proposición 4.8 se infiere que el conjunto

$$\left\{ \eta \in M^2 \ / \ \text{rango}(\eta) = n-1 \quad \text{y} \quad \text{cod}(\eta) \geq 6 \right\}$$

forma un haz fibrado sobre $Q_{n-1}$ de codimensión uno en $I^2 = M^2/M^3$ con fibra $M_{-\theta}$ , ésta última tiene codimensión 5 en $V \times W \simeq M^3/M^8$ ( ver 4.13(5)); por lo tanto el haz fibrado tiene codimensión 6 en $I^7 = M^2/M^8$

Clasificación de Gérmenes con singularidades Umbilicales

En lo que resta de éste capítulo se clasifican los gérmenes de $I^7$ que pertenecen a $Q_{n-2} \times M^3/M^3$

A fin de simplificar la notación, sustitúyanse las variables $x_{n-1}$ y $x_n$ por "x" y "y" respectivamente; con éste cambio de coordenadas, es como debe ser interpretado el diagrama 4.1 para clasificar umbilicales; en tanto que en la clasificación de cúspides, debe interpretarse en el mismo diagrama 4.1 reemplazando $x$ por $x_n$ 4.13(6)

Por brevedad, a los gérmenes con singularidades umbilicales los denominaremos simplemente umbilicales.

Sea $\eta$ un germen en $M^2$ de rango $n-2$, entonces del Teorema de Reducción 4.9, se tiene que existe un germen $\xi$ en $M^2$ que satisface $\eta \sim \xi$ y $j^3(\xi) = Q + P$ donde $Q \in Q_{n-2}$ y $P$ es un polinomio homogéneo cúbico que depende exclusivamente de las variables escenciales $x = x_{n-1}$ y $y = x_n$

El Lema 4.14 nos asegura que solamente existen 5 órbitas a las cuales puede pertenecer el germen $\eta$ o equivalentemente el germen $Q + P = j^3(\xi)$ en el espacio de 3 jets $M^3/M^4$

El espacio vectorial $M^3/M^4_2$ es isomorfo al subespacio del anillo de factorización única $\mathcal{R}[x, y]$ que consta de todos los polinomios homogéneos de grado 3 en 2 variables, es decir,

$$M_2^3/M_2^4 \simeq \{ c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3 \quad \text{donde} \quad c_i \in \mathcal{R}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \} \qquad 4.13(7)$$

Este subespacio vectorial de $\mathcal{R}[x, y]$ claramente es isomorfo a $\mathcal{R}^4$ si se considera el isomorfismo

$$(c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3) \longrightarrow (c_1, c_2, c_3, c_4)$$

Como $\mathbb{R}[x, y]$ es un anillo de factorización única y sus factores irreducibles de grado menor o igual que 3 son polinomios, entonces cada polinomio homogéneo de grado 3 en 2 variables, es decir, cada elemento de $M_2^3 / M_2^4$ puede expresarse, en una y sólo una, de las 5 formas siguientes:

Antes de enunciar y demostrar este resultado, es necesario hacer las siguientes consideraciones:

$$c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3 = \begin{cases} \text{cero} \\ (a_1x + b_1y)^3 \\ (a_1x + b_1y)^2 (a_2x + b_2y) \\ (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y) \\ (a_3x + b_3y)(ax^2 + bxy + cy^2) \end{cases} \qquad 4.13(8)$$

Donde $a_ix + b_iy$ y $ax^2 + bxy + cy^2$ son irreducibles en $\mathbb{R}[x, y]$, $a_ix + b_iy$ y $a_jx + b_jy$ linealmente independiente $i \neq j$ y $a_i, b_i, c_j, a, b, c \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3, 4$.

Como $ax^2 + bxy + cy^2$ es irreducible en $\mathbb{R}[x, y]$ pero en $\mathbb{C}[x, y]$ puede expresarse en la forma $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\delta$ son números complejos ; como $a$, $b$, $c$ son reales, entonces necesariamente $\gamma = \bar{\alpha}$ y $\delta = \bar{\beta}$ por lo tanto:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = (\alpha x + \beta y)(\bar{\alpha} x + \bar{\beta} y) \qquad 4.13(9)$$

Para saber a cual de las 5 formas enumeradas en 4.13(8) pertenece al polinomio $c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3$ calcúlense las raíces del polinomio $c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = 0$ entonces existen 5 posibilidades:

1.- 3 raices iguales a cero

2.- 3 raices reales iguales

3.- 3 raices reales con una repetida

4.- 3 raices reales distintas

5.- 2 raices complejas y una real

para cada una de estas 5 posibilidades el polinomio será de la forma

$0$ , $(a_1x + b_1y)^3$ , $(a_1x + b_1y)^2 (a_2x + b_2y)$ ,

$(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$ y

$(\alpha x + \beta y)(\bar{\alpha} x + \bar{\beta} y)(a_3x + b_3y)$ respectivamente

El conjunto de raices de cada polinomio en el anillo $\mathcal{R}[x, y]$ de la forma $a_ix + b_iy$ corresponden a una recta en $\mathcal{R}^2$ que pasa por el orígen paralelo al vector $(b_i , -a_i)$. Recíprocamente, cada vector no nulo en $\mathcal{R}^2$ genera una recta que pasa por el orígen, la cual resulta ser el conjunto de raices de un polinomio irreducible en el anillo $\mathcal{R}[x, y]$ de la forma $a_ix + b_iy$ , por consiguiente:

> Los polinomios irreducibles $a_ix + b_iy$ y $a_jx + b_jy$ son linealmente independientes en $\mathcal{R}[x, y]$ siempre y cuando los vectores $(a_i , b_i)$ y $(a_j , b_j)$ son linealmente independientes en $\mathcal{R}^2$

4.13(10)

En efecto, obsérvese que $b_i \neq 0$ o $b_j \neq 0$ pues de lo contrario se anularía la independencia lineal en $\mathcal{R}[x, y]$

y en $\mathbb{R}^2$ ; luego entonces $a_i x + b_i y$ y $a_j x + b_j y$ son linealmente independientes , si y sólo si, $b_j(a_i x + b_i y) - b_i(a_j x + b_j y) = (a_i b_j - a_j b_i)\ x \neq 0$ ésto ocurre siempre y cuando $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ o equivalentemente $(a_i , b_i)$ y $(a_j , b_j)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$

análogamente:

Cualquier par de polinomios irreducibles del conjunto $\{a_1x + b_1y , a_2x + b_2y , a_3x + b_3y\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}[x, y]$ , si y sólo si, los determinantes $k_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ , $k_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$

y $k_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ son distintos de cero

4.13(11)

En este caso $(a_i , b_i)(a_j , b_j)$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}^2$ , $i \neq j$ , $1 \leq i \leq 3$ y $1 \leq j \leq 3$

Obsérvese que si $a_1$ $a_2$ $b_1$ y $b_2$ son números complejos que satisfacen $a_2 = \bar{a}_1$ , $b_2 = \bar{b}_1$ , $\mathrm{im}(a_1) \neq 0$ o $\mathrm{im}(b_1) \neq 0$ entonces el polinómio $a_1 \bar{a}_1 x^2 + (a_1\bar{b}_1 + \bar{a}_1 b_1)\ xy + b_1\bar{b}_1 y^2$ es irreducible en $\mathbb{R}[x, y]$ (véase 4.13(9)). En consecuencia si $a_3$ y $b_3$ son números reales entonces

$k_1 = -\bar{k}_2$ o equivalentemente $k_2 = -\bar{k}_1$ y

$k_3 = i.t$ para cierto número real t

4.13(12)

En efecto

$$k_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \end{vmatrix} = - \bar{k}_2$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{b}_1 \end{vmatrix} = a_1 \bar{b}_1 - \bar{a}_1 b_1 =$$

$$= a_1 \bar{b}_1 - \overline{(a_1 \bar{b}_1)} = 2i \,(\mathrm{im}\,(a_1 \bar{b}_1))$$

Por brevedad escribiremos $k_3 = i.t$ donde $t = 2\,\mathrm{im}\,(a_1 \bar{b}_1) \in \mathbb{R}$

Observación

Si $a_i$ y $b_i$ son números reales $\forall\, i = 1, 2, 3$ entonces la aseveración hecha en 4.13(11) sigue siendo válida, en éste caso, $i \neq j$ entonces las parejas $a_i x + b_i y$ , $a_j x + b_j y$ y $(a_i , b_i)$ , $(a_j , b_j)$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}[x, y]$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente

4.13(13)

El grupo de matrices invertibles en el campo de los numeros reales, el cual se denota como $Gl(2, \mathbb{R})$ induce una acciónen en $\mathbb{R}^4$

4.13(14)

En efecto, si $P(x, y) = c_1 x^3 + c_2 x^2 y + c_3 x y^2 + c_4 y^3$

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A \in Gl(2, \mathbb{R})$ entonces

$$A \ . \ p(x, y) = p(A(x, y)) = p(ax + by \ , \ cx + dy) =$$
$$= c_1(ax + by)^3 \ c_2(ax + by)^2 \ (cx + dy) +$$
$$+ \ c_3(ax + by)(cx + dy)^2 + c_4(cx + dy)^3$$

Como A induce en $\mathbb{R}^2$ un cambio lineal de coordenadas, entonces $p(A(x, y))$ nuevamente es un polinomio homogéneo de grado 3. Ahora bien si A es la matríz identidad, entonces claramente $A \ . \ p(x, y) = p(x, y)$ y $\forall$ $AB \in Gl(2, \mathbb{R})$ se tiene

$(AB) \ . \ p(x, y) = p((AB)(x, y)) = p(A(B)(x, y))$ por otra parte

$A \ . \ (B \ . \ p(x, y)) = A \ . \ p(B(x, y)) = p(A(B)(x, y))$
por consiguiente
$(AB) \ . \ p(x, y) = A \ . \ (B \ . \ p(x, y))$ por lo tanto $Gl(2, \mathbb{R})$ induce una acción en $M_2^3 / M_2^4$ y como $M_2^3 / M_2^4$ es isomorfo a $\mathbb{R}^4$ por el isomorfo que asocia a cada polinomio
$p(x, y) = c_1x^3 + c_2x^2y + c_3xy^2 + c_4y^3$ el punto
$(c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3 \ , \ c_4)$ de $\mathbb{R}^4$ entonces $Gl(2, \mathbb{R})$ induce una acción en $\mathbb{R}^4$; obsérvese que ésta acción asocia al polinomio:

$$A \ . \ p(x, y) = c_1(ax + by)^3 + c_2(ax + by)^2 \ (cx + dy) +$$
$$+ c_3(ax + by)(cx + dy)^2 + c_4(cx + dy)^3 \qquad 4.13(15)$$

el punto

$$c_1a^3 + c_2a^2c + c_3ac^2 + c_4c^3 \ , \ 3c_1a^2b + c_2(2abc + a^2d) +$$
$$+ c_3(2acd + bc^2) + 3c_4c^2d \ , \ 3c_1ab^2 + c_2 \ (b^2c + 2abd) +$$
$$+ c_3(ad^2 + 2bcd) + 3c_4cd^2 \ , \ c_1b^3 + c_2b^2d + c_3bd^2 +$$
$$c_4d^3 \qquad 4.13(16)$$

Para justificar ésta aseveración basta desarrollar la expresión dada en 4.13(15) y asociar términos semejantes.

Lema 4.14

En $\mathbb{R}^4$ existen 5 órbitas bajo el grupo $Gl(2, \mathbb{R})$ y como $\mathbb{R}^4$ es isomorfo al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado 3 en 2 variables, entonces cada punto de $\mathbb{R}^4$ es equivalente, a uno y sólo uno, de los 5 polinomios siguientes:

1.- El polinomio. idénticamente cero, cuya órbita es de dimensión cero y codimensión 4

2.- $x^3$ germen umbilical simbólico, cuya órbita es de dimensión 2 y de codimensión 2

3.- $x^2y$ germen umbilical parabólico, cuya órbita es de dimensión 3 y de codimensión 1

4.- $x^3 - xy^2$ germen umbilical elíptico, cuya órbita es de dimensión 4 y codimensión cero

5.- $x^3 + y^3$ germen umbilical hiperbólico, cuya órbita es de dimensión 4 y codimensión cero

Demostración

Como $\mathbb{R}[x, y]$ es un anillo de factorización única, entonces cada polinomio $p(x, y)$ homogéneo de grado 3 en $\mathbb{R}[x, y]$ puede expresarse, salvo constantes, en una y sólo una de las 5 formas siguientes:

1.- El polinomio idénticamente cero

2.- $(a_1x + b_1y)^3$ donde $a_1x + b_1y \neq 0$

3.- $(a_1x + b_1y)^2(a_2x + b_2y)$ donde $a_1x + b_1y$ y $a_2x + b_2y$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}[x, y]$

4.- $(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$ donde $a_ix + b_iy$ y $a_jx + b_jy$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}[x, y]$ si $1 \leq i < j \leq 3$

5.- $(ax^2 + bxy + cy^2)(a_3x + b_3y)$ donde $a_3x + b_3y \neq 0$ y $ax^2 + bxy + cy^2$ es irreducible en $\mathbb{R}[x, y]$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$(a_1 / k(a_1x - b_1y) + b_1 / k(a_1x + b_1y))^3 =$$

$$= ( 1 / k(a_1^2 + b_1^2)x + 1 / k(-a_1b_1 + b_1a_1)y)^3 =$$

$$= (k_x / k)^3 = x^3$$ por lo tanto $(a_1x + b_1y)^3$ es equivalente por la derecha con el polinomio $x^3$.

Caso 3

Como $a_1x + b_1y$ y $a_2x + b_2y$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}[x, y]$ entonces el determinante

$$k_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$ es distinto de cero y la matríz

$$\begin{pmatrix} b_2/ k_3 & - b_1/ k_3 \\ -a_2/ k_3 & a_1/ k_3 \end{pmatrix}$$ pertenece al grupo $GL(2, \mathbb{R})$ por

consiguiente $(x, y) \longrightarrow (( b_2x - b_1y)/ k_3 , (-a_2x + a_1y)/ k_3)$

es un cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{R}$ que satisface

$$a_1/ k_3(b_2x - b_1y) + b_1/ k_3(-a_2x + a_1y))^2(a_2/ k_3(b_2x - b_1y) +$$

$$+ b_2/ k_3(-a_2x + a_1y) =$$

$$= (1/ k_3(a_1b_2 - a_2b_1)x +$$

$$+ 1/ k_3(-a_1b_1 + b_1a_1)y)^2(1/ k_3(a_2b_2 - b_2a_2)x +$$

$$+ 1/ k_3(-a_2b_1 + a_1b_2)y) =$$

$$= (k_3x/ k_3)^2 (k_3y/ k_3) = x^2y$$

por lo tanto $(a_1x + b_1y)^2(a_2x + b_2y)$ es equivalente por la derecha con el polinomio $x^2y$

Caso 4

Si $1 \leq i < j \leq 3$ y $a_i$ , $b_i$ , $a_j$ , $b_j \in \mathcal{R}$

entonces los polinomios $a_ix + b_iy$ y $a_jx + b_jy$ son

linealmente independientes en $\mathcal{R}[x, y]$ y de acuerdo al apartado 4.13(13), se tiene que los determinantes $k_1$ , $k_2$ y $k_3$ son distintos de cero, en consecuencia la matríz

$$\begin{pmatrix} b_2 & k_2 & - & b_1 & k_1 \\ -a_2 & k_2 & & a_1 & k_1 \end{pmatrix}$$ pertenece al grupo $GL(2, \mathcal{R})$ ya que

$$\begin{vmatrix} k_2 & b_2 & - k_1 & b_1 \\ -k_2 & a_2 & k_1 & a_1 \end{vmatrix} = k_1 \; k_2 \begin{vmatrix} b_2 & - b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix} = k_1 \; , k_2 \; , k_3 \neq 0$$

por consiguiente

$$(u, v) \longrightarrow (b_2k_2u - b_1k_1v \; , \; -a_2k_2u + a_1k_1v) = (u' \; , \; v')$$

resulta ser un cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ que satisface:

$$a_i u' + b_i v' = a_i(b_2 k_2 u - b_1 k_1 v) + b_i(-a_2 k_2 u + a_1 k_1 v) =$$
$$= (a_i b_2 - a_2 b_i)\, k_2 u + (a_1 b_i - a_i b_1)\, k_1 v$$

entonces para $i=1, 2, 3$ se obtiene respectivamente que

a) $a_1 u' + b_1 v' = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k_2 u = k_2 k_3 u$

b) $a_2 u' + b_2 v' = (a_2 b_2 - a_2 b_1)\, k_1 v = k_1 k_3 v$

c) $a_3 u' + b_3 v' = (a_3 b_2 - a_2 b_3)\, k_2 u + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, k_1 v =$
$$= -k_1 k_2 u - k_2 k_1 v = -k_1 k_2\,(u + v)$$

4.14(1)

Sea $k \neq 0$ entonces la matríz $\begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix}$ induce el cambio de coordenadas $(x, y) \longrightarrow (k_x + k_y , k_x - k_y) = (u, v)$ en $\mathbb{R}^2$

por consiguiente la composición

$(x, y) \longrightarrow (u, v) \longrightarrow (u' , v')$ está definida por

el producto $\begin{pmatrix} b_2 k_2 & - b_1 k_1 \\ -a_2 k_2 & a_1 k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & k \\ k & -k \end{pmatrix}$ cuyo determinante es

$-2k^2\; k_1\, k_2\, k_3 \neq 0$ 4.14(2)

En consecuencia $(x, y) \longrightarrow (u' , v')$ resulta ser un cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{R}^2$

De los incisos (a), (b) y (c) la sustitución de

$u = k_x + k_y$ , $v = k_x - k_y$ y haciendo

$k = -1 \,/\, \sqrt[3]{2(k_1\, k_2\, k_3)^2}$ se obtiene que

$a_1(a_1u' + b_1v')(a_2u' + b_2v')(a_3u' + b_3v') =$

$= (k\, k_2\, k_3)(x + y)(k\, k_1\, k_3(x-y))(-2k\, k_1\, k_2)\, x =$

$= -2k_3(k_1\, k_2\, k_3)^2\, x(x + y)(x-y) = x(x + y + x - y) =$

$= x^3 - xy^2$

por lo tanto $(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$ es equivalente por la derecha con el polinomio $x^3 - xy^2$

Caso 5

La primera parte es análoga al Caso 4 con las siguientes consideraciones:

$a_1\,,\ b_1 \in \mathbb{C}\ ,\quad a_2 = \bar{a}_1\ ,\quad b_2 = \bar{b}_1 \quad y \quad a_3\,,\ b_3 \in \mathbb{R}$

entonces $(ax^2 + bxy + cy^2)(a_3x + b_3y) =$

$= (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y)$ (consulte 4.13(9)).

Como $a_ix + b_iy$ y $a_jx + b_jy$ son linealmente independientes en $\mathbb{C}[x, y]$ para $i \neq j$, entonces los determinantes $k_1$, $k_2$ y $k_3$ son distintos de cero, pero $k_1 = -\bar{k}_2$ o equivalentemente $k_2 = -\bar{k}_1$ y $k_3 = it$ donde $t \in \mathbb{R}$ (consulte 4.13(11) y 4.13(12)).

Luego entonces $b_1k_1 - b_2k_2 = b_1k_1 + \bar{b}_1\bar{k}_1 = 2\,\mathrm{re}(b_1k_1) \in \mathbb{R}$

Análogamente

$a_1k_1 - a_2k_2 \in \mathbb{R}$ y $i(b_1k_1 + b_2k_2) = i(b_1k_1 - \bar{b}_1\bar{k}_1) =$

$= i^2 = (2\ \mathrm{im}\ (b_1k_1)) = -2(\mathrm{im}(b_1k_1)) \in \mathbb{R}$

análogamente $-i(a_1k_1 + a_2k_2) \in \mathbb{R}$

además los determinantes

$$\begin{vmatrix} b_2k_2 & -b_1k_1 \\ -a_2k_2 & a_1k_1 \end{vmatrix} = k_1\ k_2\ k_3 = k_1k_2(it)\ ,\quad i\begin{vmatrix} k & ik \\ k & -ik \end{vmatrix} = -2ik^2$$

son distintos de cero, si $k \neq 0$ .

Por consiguiente, si se sustituye el producto de matrices que aparece en 4.14(2) por el producto siguiente

$$\begin{pmatrix} b_2k_2 & -b_1k_1 \\ -a_2k_2 & a_1k_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & ik \\ k & -ik \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(b_1k_1 - b_2k_2) & ik(b_1k_1 + b_2k_2) \\ k(a_1k_1 - a_2k_2 & -ik(a_1k_1 + a_2k_2) \end{pmatrix} \qquad 4.14(3)$$

se obtiene el siguiente cambio lineal de coordenadas en $\mathbb{R}^2$

$(u,\ v) \longrightarrow (u'\ ,\ v') = (-k(b_1k_1 - b_2k_2)\ u + ik(b_1k_1 + b_2k_2)\ v\ ,$

$k(a_1k_1 - a_2k_2)\ u - ik(a_1k_1 + a_2k_2)\ v\ )$ que satisface

$a_i(-k(b_1k_1 - b_2k_2)\ u + ik(\ b_1k_1 + b_2k_2)\ v) +$

$+ b_i(k(a_1k_1 - a_2k_2)\ u - ik(a_1k_1 + a_2k_2)v) =$

$= k(k_1(a_1b_i - a_ib_1) + k_2(a_ib_2 - a_2b_i)u) +$

$+ ik(k_1(a_i b_1 - a_1 b_i)v + k_2(a_i b_2 - a_2 b_i)v)$

entonces para $i = 1, 2, 3$ se obtiene respectivamente

$$a_1u' + b_1v' = k\,k_2\,k_3\,(u + iv)$$
$$a_2u' + b_2v' = k\,k_1\,k_3\,(u - iv)$$
$$a_3u' + b_3v' = -2k\,k_1\,k_2\,u$$

Luego entonces si $k = -1 / \sqrt[3]{(k_1\,k_2\,k_3)^2}$ entonces

$$(a_1u' + b_1v')(a_2u' + b_2v')(a_3u' + b_3v') = (u + iv)(u - iv)(2u) =$$
$$= 2u(u^2 + v^2) = 2(u^3 + uv^2) \text{ es decir}$$

$(ax^2 + bxy + cy^2)(a_3x + b_3y) \simeq 2(u^3 + uv^2)$ o equivalentemente

$$(au')^2 + bu'v' + c(v')^2\,(a_3u' + b_3v') \simeq 2(u^3 + uv^2) \qquad 4.14(4)$$

Obsérvese que $k \in \mathbb{R}$ ya que $k_1\,k_2 = -k_1\,\overline{k_1} \in \mathbb{R}$ y $k_3^2 = (i.t)^2 = -t^2 \in \mathbb{R}$ (consulte 4.13(11) y 4.13(12))

Ahora efectúese en $\mathbb{R}^2$ el siguiente cambio lineal de coordenadas $(u, v) \longrightarrow (u, \sqrt[2]{3}\ v)$ para obtener:

$$2(u^3 + uv^2) \simeq 2(u^3 + u(\sqrt{3}\ v^2)) = 2(u^3 + 3uv^2) =$$
$$= (2u^3 + 3(u^2v - u^2v) + 3uv^2 + (v^3 - v^3)) =$$
$$= (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) +$$
$$+ (u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3) = (u + v)^3 + (u - v)^3$$

El miembro derecho de ésta igualdad sugiere el último cambio lineal de coordenadas que hay que efectuar en $\mathbb{R}^2$

para obtener la equivalencia por la derecha de los polinomios $(ax^2 + bxy + cy^2)(a_3x + b_3y)$ y $x^3 + y^3$ éste cambio es

$(u, v) \longmapsto (u + v, \ u - v) = (x, y)$

Hasta el momento se ha demostrado que

$(0, GL(2, \mathbb{R}))$ , $(x^3, GL(2, \mathbb{R}))$ , $(x^2y, GL(2, \mathbb{R}))$ , $(x^3 - xy^2, GL(2. \mathbb{R}))$ y $(x^3 + y^3, GL(2, \mathbb{R}))$ es el número total de órbitas que se obtienen en $M_2^3 / M_2^4$

Al considerar la acción del grupo $GL(2, \mathbb{R})$ en $M_2^3 / M_2^4$ la dimensión de cada una de éstas órbitas está dada por la diferencia:

$$\dim( GL(2, \mathbb{R})) - \dim(H_p(2, \mathbb{R})) \qquad 4.14(5)$$

donde $p$ es un representante de la órbita y $H_p(2, \mathbb{R})$ es el estabilizador de $p$ , es decir, el subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ que consta de todas las matrices $A \in GL(2, \mathbb{R})$ tales que $A . p = p$ ; por brevedad se escribirá $H_p$ en vez de $H_p(2, \mathbb{R})$

Cálculo de Estabilizadores de los Polinomios
$0,\ x^3,\ x^2y,\ x^3 - xy^2$ y $x^3 + y^3$

Caso 1

Si $p$ es el polinomio idénticamente cero, entonces $\forall A \in GL(2,\mathbb{R})$ se tiene $A\ .\ 0 = 0$ por consiguiente $H_p = GL(2,\mathbb{R})$; luego entonces la dimensión de la órbita del polinomio idénticamente cero coincide con

$$\dim(\ GL(2,\mathbb{R})\ ) - \dim H_0 = 4 - 4 = 0$$

Caso 2

Si $p(x, y) = x^3$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matríz invertible que satisface $A\ .\ p(x, y) = x^3$ entonces de 4.13(15) y 4.13(16) se obtienen las 4 ecuaciones siguientes:

$$a^3 = 1$$
$$3a^2b = 0$$
$$3ab^2 = 0$$
$$b^3 = 0$$

que evidentemente tienen la solución $a=1$ y $b=0$ por consiguiente:

$$H_{x^3} = \left\{ A \in GL(2,\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

en consecuencia $\dim(\ H_{x^3}) = 2$ por lo tanto la dimensión de la órbita del polinomio $x^3$ es $4 - 2 = 2$ según se propone en 4.14(5).

Caso 3

Si $p(x, y) = x^2y$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matríz invertible que satisface $A \cdot p(x, y) = x^2y$ entonces de 4.13(15) y 4.13(16) se obtienen las 4 ecuaciones siguientes:

ec. 1 $a^2c = 0$

ec. 2 $2abc + a^2d = 1$

ec. 3 $b^2c + 2abd = 0$

ec. 4 $b^2d = 0$

ec. 2 $\longrightarrow a \neq 0$ pues $a(2bc + ad) = 1$ entonces

ec. 1 $\longrightarrow c = 0$

Sustituyendo $c=0$ en ec. 2 se obtiene $a^2d = 1$ si y sólo si, $d = 1/a^2$ es decir $d \neq 0$ ; finalmente, ec. 4 $\longrightarrow b = 0$ ya que $d \neq 0$ $b=c=0$ y $d = 1/a^2$ por lo tanto

$$\left\{ H_{x^2y} = A \in GL(2, \mathbb{R}) \;\Big/\; A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a^2 \end{pmatrix} \right\}$$

luego entonces $(\dim H_{x^2y} = 1)$ por lo tanto de acuerdo a 4.14(5) se tiene que la dimensión de la órbita del polinomio $x^2y$ es $4 - 1 = 3$

Caso 4

Si $p(x, y) = x^3 - xy^2$ entonces procediendo como en los casos 2 y 3, se obtienen las 4 ecuaciones siguientes:

ec. 1 $a^3 - ac^2 = 1$

ec. 2 $3a^2b - 2acd - bc^2 = 0$

ec. 3 $3ab^2 - ad^2 - 2bcd = -1$

ec. 4 $b^3 - bd^2 = 0$

de ec. 1 y ec. 4 se infiere que $(a \neq 0$ y $a \pm c \neq 0)$ y $(b = 0$ o $b \pm d = 0)$ ya que $1 = a(a+c)(a-c)$ y $0 = b((b+d)(b-d))$

$$b=0 \implies a=1 \quad , \quad c=0 \text{ y } d= \pm 1 \qquad 4.14(6)$$

En efecto, ec.3 $\longrightarrow -ad^2 = -1 \iff ad^2 = 1$ (ec. 3') $\iff ad \neq 0$

entonces ec. 2 $\longrightarrow c=0$ en consecuencia de ec. 1 y ec. 3' se concluye $a=1$ y $d= \pm 1$ $b \neq 0$ y $b = d$ $(b= -d)$ $\implies a = -1/2$

$$c= 3/2 \quad (c= -3/2) \text{ y } b=d= \pm 1/2 \quad (b= -d = \pm 1/2 \qquad 4.14(7)$$

En efecto, como $b=d$ $(b= -d)$ y $b \neq 0$ entonces al factorizar b en la ec. 2 se obtiene:

$3a^2 - 2ac - c^2 = a^2 - c^2 + 2a(a-c) = (a-c)(a+c+2a) =$

$= 0(3a^2 + 2ac - c^2 = a^2 - c^2 + 2a(a+c)= (a+c)(a-c+2a) =$

$= 0) \iff 3a + c = 0(3a-c = 0)$ ya que $a \pm c \neq 0$

en consecuencia $c = -3a$ $(c=3a)$ (ec. 2') sustituyendo éste valor de c en ec. 1 y ec. 3 se obtiene

$1 = a^3 - ac^2 = -8a^3 \qquad a = -1/2 \qquad y$

$-1 = b^2(3a - a - 2(-3a)) = 8ab^2 = -4b^2(-1) =$

$= b^2(3a - a + 2(3a) = 8ab^2 = -4b^2) \qquad b^2 =$

$= 1/4 \qquad b = \pm 1/2$

de ec. 2' se obtiene $c = 3/2 (c = -3/2)$ ; por consiguiente de 4.14(6) y 4.14(7) se infiere que

$$H_{x^3-xy^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

y como la demensión de $H_{x^3-xy^2}$ en $GL(2, \mathbb{R})$ es cero, entonces de acuerdo a 4.14(5) se tiene que la dimensión de la órbita del polinomio $x^3-xy^2$ es 4.

Caso 5

Si $p(x, y) = x^3 + y^3$ entonces procediendo como en el Caso 4, se obtienen las 4 ecuaciones siguientes:

ec, 1 $\quad a^3 + c^3 = 1$
ec. 2 $\quad 3(a^2b + c^2d) = 0$
ec. 3 $\quad 3(ab^2 + cd^2) = 0$
ec. 4 $\quad b^3 + d^3 = 1$

Recuérdese que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matríz invertible en-

tonces $ad - bc \neq 0$ ; luego

$1/3(a \cdot ec.\ 3 - b \cdot ec.\ 2) = acd^2 - bc^2 d = cd(ad - bc) = 0$

si y sólo si, $cd=0$ , como $ad - bc \neq 0$ entonces $c=0$ y $d=0$ no ocurren simultáneamente, en consecuencia $c=0$ o $d=0$.

Si $c=0$ entonces ecuaciones 1, 2 y 4 implican respectivamente $a=1$ , $b=0$ y $d=1$ ; en tanto que $d=0$ entonces ecuaciones 4, 3 y 1 implican respectivamente $b=1$ , $a=0$ y $c=1$. Por consiguiente, el estabilizador de $x^3 + y^3$ consta exclusivamente de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ por lo tanto, de acuerdo a 4.14(5)

se tiene que la dimensión de la órbita del polinomio $x^3 + y^3$ es 4 ya que $\dim( H_{x^3 + y^3})= 0$

$\square$

Observación 4.14(3)

Sean $r(x, y)$ y $s(x, y)$ polinomios con términos de grado mayor o igual que $k-2$ ; si $(x, y) \longrightarrow (u, v)$ es un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ donde $u = x-r(x, y)$ , $v = y-s(x, y)$ y $r(x, y) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x^{k-1-i} y^{i-1}$ $\forall\, k \geq 4$ entonces el polinomio $r(u, v)$ puede expresarse en la forma $r(x, y) + t(x, y)$ donde $t$ contiene exclusivamente a têrminos con monomios de grado estrictamente mayor que $k$ .

En efecto, $r(u, v)$ es por definición

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \,(x - r)^{k-1-i}\,(y - s)^{i-1}$$

Los factores $(x - r)^{k-1-i}$ y $(y - s)^{i-1}$ contienen a un sumando de la forma $x^{k-1-i}$ y $y^{i-1}$ respectivamente ; en consecuencia, el polinomio $r(u, v)$ puede expresarse en la forma $r(x, y) + t(x, y)$. Los términos que aparecen en lel polinomio $t(x, y)$ contienen productos de potencias de $x, y, r$ y $s$ ; por consiguiente, el grado de éste factor es mayor o igual que $1 + 1 + k - 2 + k - 2 = 2k - 2 > k$ por lo tanto

$$j^k\,(\,t(x, y)\,) = 0.$$

Lema 4.15

Sea $P(x, y)$ un polinomio en el anillo de factorización única $\mathbb{R}[x, y]$, si $k$ es mayor o igual que 4 y $j^{k-1}(P) = x^2y$ entonces existen 2 posibilidades:

El polinomio $P$ es equivalente por la derecha con el polinomio $x^2y \pm y^k$

o

$P$ es equivalente por la derecha con un polinomio $P'$ y $j^k(P') = x^2y$

Demostración

Por hipótesis, $j^{k-1}(P) = x^2y$ entonces el polinomio $P(x, y)$ es de la forma:

$$x^2y + ax^k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\, x^{k-i}\, y^i + by^k + (\text{términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que } k) \qquad 4.15(1)$$

Sea $r(x, y) = 1/2 \; {}_{i=1}\, a_i\, x^{k-1-i}\, y^{i-1}$. Como $k \geq 4$ entonces $r = r(x, y)$ resulta ser un polinomio de grado $k - 2 \geq 2$ que satisface

$$\frac{\partial r}{\partial x}(0) = \frac{\partial r}{\partial y}(0) = 0$$ en consecuencia

$$(x, y) \longrightarrow (x - r\,,\ y - ax^{k-2}) = (u, v) \qquad 4.15(2)$$

resulta ser un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0) = 0 .$$

Al aplicar éste cambio de coordenadas en 4.15(1), se obtiene un polinomio $P'$ en las variables $x$ y $y$ que es equivalente por la derecha con el polinómio $P$ definido de la siguiente manera:

$$P'(x, y) = u^2v + au^k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\, u^{k-i}v^i + bv^k + (\text{términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que } k)$$

4.15(3)

Como $r$ es un polinomio homogéneo de grado $k-2$ entonces:

$$(x-r)^2\,(y-ax^{k-2}) \equiv x^2y-2xyr-ax^k \pmod{I^k} \quad ,$$

$$(x-r)\,(y-ax^{k-2})\,(r+s) \equiv xyr \pmod{I^k} \quad ,$$

$$(x-r)^k = x^k + x^{k-1}\, r + \dots + r^k \equiv x^k \pmod{I^k}$$

análogamente

$(y - ax^{k-2})^k \equiv y^k \pmod{I^k}$ . Por consiguiente, de la observación 4.14(8) se deduce que

$$\begin{aligned} P'(x, y) = {} & (x-r)^2\,(y-ax^{k-2}) + a(x-r)^k + \\ & + 2(x-r)(y-ax^{k-2})(\, r(x, y) + s(x, y)\,) + \\ & + b(y-ax^{k-2})^k + (\text{términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que } k) = \\ & = x^2y - 2xyr + by^k + (\text{términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que } k) \end{aligned}$$

por lo tanto, $P'(x, y) = x^2y + by^k$ + (términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que $k$); y de acuerdo a los apartados 4.15(1), 4.15(2) y 4.15(3) se deduce que:

el polinomio P es equivalente por la derecha con el polinomio $P'(x, y) = x^2y + by^k$ + (términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que k)

4.15(4)

En consecuencia, si $b=0$ entonces $p \sim p'$ y $j^k(p') = x^2y$.

Si $b \neq 0$ entonces

$x^2y + by^k \sim x^2y \pm y^k$ esta equivalencia se obtiene al efectuar el siguiente cambio de coordenadas

$(x, y) \longrightarrow (x / \sqrt[2k]{|b|}, \sqrt[k]{|b|}\, y)$ pero

$x^2y \pm y^k$ es k-determinado, según se muestra en 4.16(1); y del Corolario 4.10 se deduce que $j^k(p')$ es equivalente por la derecha con el polinomio $x^2y \pm y^k$.

Finalmente, de 4.15(3) se concluye que el polinomio p es equivalente por la derecha con el polinomio $x^2y \pm y^k$.

$\square$

Proposición 4.16

Sea $\eta = q + p$ donde $q \in$ [illegible]$_{n-2}$,

$p(x, y) = x^2y$ + (términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que 3), entonces hay 3 posibilidades:

1.- $\eta \sim q + x^2y \pm y^4$ en éste caso $\mathrm{cod}(\eta) = 4$

2.- $\eta \sim q + x^2y \pm y^5$ en éste caso $\mathrm{cod}(\eta) = 5$

3.- $\eta$ pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

Demostración

El Lema 4.15 afirma que el polinomio $p(x, y) = x^2y$ + (términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 3) satisfacen, una y sólo una, de las 3 posibilidades siguientes:

1.- $p \sim x^2y \pm y^4$

2.- $p \sim x^2y \pm y^5$

3.- $p \sim x^2y \pm y^k$ , $k \geq 6$ siempre y cuando el polinomio p sea finitamente determinado, en caso contrario, del Corolario 3.2 se deduce que el germen $\eta = q + p$ no es finitamente determinado y por tanto pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

Ahora bien, el ideal Jacobiano de $x^2y \pm y^k$ está generado por

$\langle 2xy \, , \, x^2 \pm k(y^{k-1}) \rangle$ es decir

Proposición 4.16

Sea $\eta = q + p$ donde $q \in Q_{n-2}$,
$p(x, y) = x^2y +$ (términos que contienen monomios de grado estrictamente mayor que 3), entonces hay 3 posibilidades:

1.- $\eta \sim q + x^2y \pm y^4$ en éste caso $\operatorname{cod}(\eta) = 4$

2.- $\eta \sim q + x^2y \pm y^5$ en éste caso $\operatorname{cod}(\eta) = 5$

3.- $\eta$ pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

Demostración

El Lema 4.15 afirma que el polinomio $p(x, y) = x^2y +$ + (términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 3) satisfacen, una y sólo una, de las 3 posibilidades siguientes:

1.- $p \sim x^2y \pm y^4$

2.- $p \sim x^2y \pm y^5$

3.- $p \sim x^2y \pm y^k$, $k \geq 6$ siempre y cuando el polinomio p sea finitamente determinado, en caso contrario, del Corolario 3.2 se deduce que el germen $\eta = q + p$ no es finitamente determinado y por tanto pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

Ahora bien, el ideal Jacobiano de $x^2y \pm y^k$ está generado por

$$\langle 2xy\ ,\ x^2 \pm k(y^{k-1}) \rangle$$ es decir

$$\Delta(x^2y \pm y^k) = \langle xy \, , \, x^2 \pm ky^{k-1} \rangle$$

Obsérvese que $x^{s+2}$ , $x^s y^t$ y $y^{k-1+s}$ pertenecen al ideal $\Delta(x^2y \pm y^k)$ $\forall s \geq 1$ y $\forall t \geq 1$ . En efecto, $x^{s+2} = x^s(x^2 \pm ky^{k-1}) \mp kx^{s-1} y^{k-2} xy$ , $x^s y^t = x^{s-1} y^{t-1} xy$ y $y^{k+s-1} = -1/k \; xy^{k+s-1} xy + 1/k \; y^s(x^2 \pm ky^{k-1})$ . Por consiguiente

$$\Delta(x^2y \pm y^k) \supset \langle x^{s+2} \, , \, x^s y^t \, , \, y^{k+s-1} \, , \, x^2 \pm ky^{k-1} \rangle$$

$\forall s \geq 1$ y $\forall t \geq 1$

Esto significa que $(M_2)^{k+1} \subset (M_2)^2 \; \Delta(x^2y \pm y^k)$ y de acuerdo al Teorema 1.19 II se tiene que

el polinomio $x^2y \pm y^k$ es k-determinado 4.16(1)

Ahora bien, del Corolario 3.2 se infiere que la codimensión de $\eta$ coincide con la codimensión de $x^2y \pm y^k$ , en consecuencia si $\xi \in M_2$ entonces

$\xi = j^k(\xi) + \mu$ donde $\mu \in M_2^{k+1}$ y la clase de $\xi$ en el espacio vectorial $M_2/\Delta(x^2y \pm y^k)$ está generada por las clases de los monomios $x, x^2, y, \ldots, y^{k-2}$ ya que $x^2 + y^{k-1} \in \Delta(x^2y \pm y^k)$ . Además

si $a_1x + a_2x^2 + \sum_{j=1}^{k-2} a_{2+j} \, y^j = 0 \; (\mathrm{mod}\; \Delta(x^2y \pm y^k))$

entonces necesariamente $a_i = 0 \quad \forall \; i=1, \ldots, k$

4.16(2)

Para justificar ésta aseveración, basta aplicar los operadores $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{k-2}}{\partial y^{k-2}}$ a la igualdad anterior y evaluar en cero, por lo tanto,

$$\left\{ x,\ x^2\ ,\ y\ ,\dots,\ y^{k-2} \right\} \quad \text{es una base de } M_2 / \Delta(x^2y \pm y^k)$$

es decir $\operatorname{cod}(x^2y \pm y^k) = k$ o equivalentemente $\operatorname{cod}(q + x^2y \pm y^k) = k$ . Por consiguiente

1.- Si $k=4$ entonces $\eta \sim q + x^2y \pm y^4$ y $\operatorname{cod}(\eta) = 4$

2.- Si $k=5$ entonces $\eta \sim q + x^2y \pm y^5$ y $\operatorname{cod}(\eta) = 5$

3.- Si $k \geqslant 6$ entonces el germen $\eta$ pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

(consulte 3.3(2) y Teorema 3.4).

$\square$

Proposición 4.17

Sea $\eta = q + p$ donde $q \in Q_{n-2}$ y

$P(x, y) = x^3 +$ (términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 3) entonces

1.- $\eta \underset{o}{\sim} q + x^3 \pm y^4$ y $\operatorname{cod}(\eta) = 5$

2.- El germen $\eta$ pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

Demostración

Como $P(x, y) = x^3 +$ (términos que contienen a los monomios de grado mayor o igual que 4) entonces el polinomio P es de la forma:

$$P(x, y) = x^3 + a_0 x^4 + a_1 x^3 y + a_2 x^2 y^2 + a_3 x y^3 + a_4 y^4 + \text{(términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 4)} \qquad 4.17(1)$$

Supóngase que $a_4 \neq 0$ entonces al efectuar el siguiente cambio lineal de coordenadas $(x, y) \longrightarrow (x, v)$ donde $v = ax + y$ y $a = a_3/4a_4$, se tiene que el polinomio P puede expresarse en la forma:

$P(x, y) = x^3 + 3x^2 r(x, v) + a_4 v^4 +$ (términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 4) donde

$r(x, v) = b_0 x^2 + b_1 xv + b_2 v^2$,

$b_0 = 1/3(a_0 - aa_1 + a^2 a_2 + a^4 a_4)$, $b_1 = 1/3(a_1 - 2aa_2 + 4a^3 a_4)$

y $b_2 = 1/3\, a_2 - 2a^2 a_4$ $\qquad$ 4.17(2)

Como $r(x, v)$ es un polinomio homogéneo de grado 2
y $(x+r)^3 = x^3 + 3x^2r + 3xr^2 + r^3 \equiv x^3 + 3x^2r \pmod{I^4}$
entonces al efectuar en 4.17(2) el siguiente cambio de coordenadas $(x, v) \longrightarrow (u, bv)$ donde $u = x+r$, $r$ como se propone en 4.17(2) y $b = 1/\sqrt[4]{|a_4|}$ se tiene que

$u^3 + a_4v^4$ + (términos que contienen a los monomios de grado estrictamente mayor que 4) es equivalente por la derecha con $u^3 \pm v^4$ + (términos que contienen a los monomios de grado. estrictamente mayor que 4)
4.17(3)

Como $u^3 \pm v^4$ es equivalente por la derecha con $x^3 \pm y^4$ y como éste último es 4 determinado (consulte 4.17(9)) entonces de 4.17(2) y 4.17(3), se tiene que $j^4(p)$ es equivalente por la derecha con $x^3 \pm v^4$ por lo tanto

1.- El germen $\eta$ es equivalente por la derecha con $q + x^3 \pm y^4$ ; de acuerdo al Corolario 3.2, $\operatorname{cod}(\eta) = \operatorname{cod}(x^3 \pm y^4)$ y como $\operatorname{cod}(x^3 \pm y^4) = 5$ según se muestra en el apartado 4.17(9) entonces $\operatorname{cod}(\eta) = 5$

En caso de que $a_4 = 0$ entonces 4.17(1) se transforma en

$$j^4(p) = x^3 + a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 =$$
$$= x( x^2 + a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3) \qquad 4.17(4)$$

Obsérvese que el germen $x^2 + a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$ tiene rango uno y pertenece al ideal $M_2^2$ , entonces si se aplica el Teorema de Reducción 4.9, se obtiene un germen $\xi$ en $M_2^2$ que satisface:

$$(x^2 + a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3) \circ \gamma = \xi$$

$$\text{y} \quad j^3(\xi) = x^2 + by^3 \qquad 4.17(5)$$

De 4.17(4) y 4.17(5) se infiere que $j^4(p) \sim x^3 + bxy^3$ por consiguiente $j^4(p) \sim x^3$ si $b=0$ ; en éste caso, $\text{cod}(p) = \text{cod}(\eta) = \infty$ y $j^4(p) \sim x^3 + xy^3$ si $b \neq 0$ . Absorbiendo b en y mediante $\sqrt[3]{b}$ , en éste caso $\text{cod}(\eta) = \text{cod}(x^3 + xy^3) = 6$ según se muestra posteriormente en 4.17(10), en ambos casos.

2.- El germen $\eta$ pertenece a la variedad real algebráica $\Sigma_6^7$

$\square$

Sublema 4.17(6)

Si $\eta$ es un germen finitamente determinado, entonces las clases de los monomios $x^\alpha$ donde $|\alpha| \leq k$ y $k = \det(\eta)$ generan al espacio vectorial $M/\Delta(\eta)$; en consecuencia, la codimensión de $\eta$ coincide con el número de vectores linealmente independientes de dichas clases.

Demostración

Por hipótesis $k = \det(\eta)$, entonces del Teorema 1.19(II) se tiene que $M^{k+1} \subset M\Delta(\eta)$, como $M\Delta(\eta) \subset \Delta(\eta)$ entonces $M^{k+1} \subset \Delta(\eta)$ por consiguiente, si $\mu \in M^{k+1}$ entonces la clase de $\mu$ coincide con la clase del cero en el espacio $M/\Delta(\eta)$.

Ahora bien, todo germen $\xi$ en $M$ puede expresarse en la forma $\xi = j^k(\xi) + \mu$ donde $\mu \in M^{k+1}$; por consiguiente, la clase de $\xi$ coincide con la clase de $j^k(\xi)$ en $M/\Delta(\eta)$ y como $j^k(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a^\alpha x^\alpha$ (consulte 1.9(6) y ol.9(7)). Entonces la clase de los monomios $x^\alpha$ generan al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M/\Delta(\eta)$; el número de vectores linealmente independientes de éstas clases es la dimensión de $M/\Delta$, es decir, la codimensión de $\eta$.

Cálculo de Codimensión de los Gérmenes
$x^3 + y^3$ , $x^3 - xy^2$ , $x^3 \pm y^4$ y $x^3 + xy^3$

$$\operatorname{cod}(x^3 + y^3) = 3 \quad y \quad \det(x^3 + y^3) = 3 \qquad 4.17(7)$$

En efecto $\quad \Delta(x^3 + y^3) = \langle 3x^2 , 3y^2 \rangle = \langle x^2 , y^2 \rangle$

entonces

$$M_2^2 \ \Delta(x^3 + y^3) = \langle x^2 , xy , y^2 \rangle \langle x^2 , y^2 \rangle \supset$$
$$\supset \langle x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4 \rangle = M_2^4$$

De acuerdo al Teorema 1.19, el germen $x^3 + y^3$ tiene determinación menor o igual que 3. Por el Corolario 1.25 $es(x^3 + y^3) = 3 \leq \det(x^3 + y^3)$ de donde la determinación es exactamente 3.

Ahora bien, del Sublema 4.17(6) se tiene que una base de $M_2 / \Delta(x^3 + y^3)$ está formada por las clases de los monomios $x$, $y$, $xy$, por lo tanto, $\operatorname{cod}(x^3 + y^3) = 3$

$$\operatorname{cod}(x^3 - xy^2) = 3 \quad y \quad \det(x^3 - xy^2) = 3 \qquad 4.17(8)$$

en efecto

$$\Delta(x^3 - xy^2) = \langle 3x^2 - y^2 , 2xy \rangle = \langle 3x^2 - y^2 , xy \rangle$$

como

$x^4 = 1/3\, x^2 (3x^2 - y^2) + 1/3\, xy(xy)$ ,

$x^3y = x^2 (xy)$ , $x^2y^2 = xy(xy)$ ,

$xy^3 = y^2(xy)$ y $y^4 = -y^2 (3x^2 - y^2) + 3xy (xy)$

entonces

$$M_2^2 \Delta(x^3 - xy^2) = \langle x^2 , xy , y^2 \rangle \langle 3x^2 - y^2 , xy \rangle \supset$$
$$\supset \langle x^4 , x^3y , x^2y^2 , xy^3 , y^4 \rangle$$

y de acuerdo al Teorema 1.19(I) y al Corolario 1.25 se tiene que $es(x^3 - xy^2) = 3 \leq det(x^3 - xy^2) = 3$ por lo tanto $det(x^3 - xy^2) = 3$

Ahora, del Sublema 4.17(6) se tiene que un conjunto de generadores de $M_2 / \Delta(x^3 - xy^2)$ está formado por las clases de $x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$ ; de éstos, los linealmente independientes en $M_2 / \Delta(x^3 - xy^2)$ únicamente son las clases de $x, y, x^2$ por lo tanto $cod(x^3 - xy^2) = 3$

$$cod(x^3 \pm y^4) = 5 \quad y \quad det(x^3 \pm y^4) = 4 \qquad 4.17(9)$$

En efecto $\Delta(x^3 \pm y^4) = \langle 3x^2 , \pm 4y^3 \rangle = \langle x^2, y^3 \rangle$

entonces

$$M_2^2 \Delta(x^3 \pm y^4) = \langle x^2, xy, y^2 \rangle \langle x^2, y^3 \rangle \supset$$
$$\supset \langle x^4, x^3y, x^2y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle \supset M_2^5$$

Del Teorema 1.19 y el Corolario 1.25, se tiene que $det(x^3 \pm y^4) = 4$ ; del Sublema 4.17(6) y procediendo como en los apartados 4.17(7) y 4.17(8), se tiene que una base de $M_2 / \Delta(x^3 \pm y^4)$ está formada por las clases de los monomios $x, y, xy, xy^2, y^2$ por lo tanto $cod(x^3 \pm y^4) = 5$

$$cod(x^3 + xy^3) = 6 \quad y \quad det(x^3 + xy^3) = 4 \qquad 4.17(10)$$

En efecto, $\det(x^3 + xy^3) = 4$ según se muestra en el ejemplo 2 del Capítulo 1 apartado 1.25(5) ; ahora

$$\Delta(x^3 + xy^3) = \langle 3x^2 + y^3 , 3xy^2 \rangle \supset \langle x^3 , xy^2 , 3x^2 + y^3 \rangle$$

Por consiguiente, del Sublema 4.17(6) se tiene que las clases de $x, y, xy, x^2, y^2, x^2y$ forman una base de $M_2 / \Delta(x^3 + xy^3)$ ésto significa que $\operatorname{cod}(x^3 + xy^3) = 6$

NOTA: La independencia lineal en 4.17(7) - 4.17(10), se prueba siguiendo un procedimiento análogo al hecho en 4.16(2).

Del Lema 4.14 y de las Proposiciones 4.16 y 4.17, se deduce que si $\eta$ es un germen de rango $n-2$ de codimensión menor o igual que 5 que pertenece al ideal $M^2$ entonces:

$$\eta \sim q + \left\{ \begin{array}{lcc} & \operatorname{cod}(\eta) & \det(\eta) \\ x^3 + y^3 & 3 & 3 \\ x^3 + xy^2 & 3 & 3 \\ x^2y + y^4 & 4 & 4 \\ x^2y - y^4 & 4 & 4 \\ x^2y + y^5 & 5 & 5 \\ x^2y - y^5 & 5 & 5 \\ x^3 + y^4 & 5 & 4 \\ x^3 - y^4 & 5 & 4 \end{array} \right\}$$

4.17(11)

donde $q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{n-2} x_j^2 \in Q_{n-2}$

En consecuencia, todo germen en $I^7$ de rango $n-2$ e índice $n-2-\sigma$ de codimensión menor que 6, pertenece, a una y sólo una, de las 8 órbitas siguientes:

| ORBITAS | Codimensión en $I^7$ (ver Teorema 3.7) |
|---|---|
| $(Q + x^3 + y^3 \ , \ G^7)$ | 3 |
| $(Q + x^3 + xy^2 \ , \ G^7)$ | 3 |
| $(Q + x^2y + y^4 \ , \ G^7)$ | 4 |
| $(Q + x^2y - y^4 \ , \ G^7)$ | 4 |
| $(Q + x^2y + y^5 \ , \ G^7)$ | 5 |
| $(Q + x^2y - y^5 \ , \ G^7)$ | 5 |
| $(Q + x^3 + y^4 \ , \ G^7)$ | 5 |
| $(Q + x^3 - y^4 \ , \ G^7)$ | 5 |

4.17(12)

Como el índice varía entre cero y $n-2$ , entonces en $I^7$ tenemos $8(n-1)$ órbitas que corresponden a los gérmenes de rango $n-2$ y codimensión menor o igual que 5.

CAPITULO V

TEOREMA DE PREPARACION

El principal resultado de este capítulo, es el Teorema de Preparación. En la demostración de éste Teorema se utiliza el Teorema de División, que a su vez se deduce del Teorema de División Polinomial, éste último se demuestra con la ayuda de una generalización al Teorema de Cauchy, en tanto que los tres corolarios del Teorema de Borel junto con el Lema de Extensión de Niremberg se utilizan para completar la demostración del teorema de División. Para finalizar éste capítulo, se da una generalización del Teorema de Preparación así como un corolario del mismo.

Teorema 5.1 ( TEOREMA DE DIVISION )

Sea $D: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función $C^\infty$ en una vecindad del cero tal que: $D(t,0) = d(t)t^k$, donde d es una función $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface $d(0) \neq 0$. Entonces para cualquier función $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sea $C^\infty$ en una vecindad del cero, existen funciones $Q$ , $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ambas $C^\infty$ en una vecindad del cero tales que:

1.- E coincide con $QD + R$ en una vecindad del cero

2.- $R(t,x) = \sum_{i=1}^{k} r_i(x)t^{k-i}$ donde $r_i$ es $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$.

Considérese el polinomio $P_k: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ definido de la siguiente manera, si $z \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{C}^k$ entonces

$$P_k(z, \lambda) = z^k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{k-i} \quad \text{donde} \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \qquad 5.1(1)$$

k= 1, 2, ...

$$P_0(z, \lambda) \equiv 1 \qquad 5.1(2)$$

En particular si $z=t$ y $\lambda_i$ son reales, entonces

$$P_k(t, \lambda) = t^k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i t^{k-i}$$

Un polinomio $P_k$ definido de esta manera satisface las 2 siguientes igualdades:

$$P_k(z, \lambda) = \lambda_k + zP_{k-1}(z, \lambda') \quad \text{donde} \quad \lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}) \qquad 5.1(3)$$

$$P_k(z, \lambda) - P_k(w, \lambda) = (z-w) \sum_{i=1}^{k} P_{i-1}(z, \overset{i-1}{\lambda}) w^{k-i}$$

$$k = 1, 2, \ldots \qquad \overset{i-1}{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}) \qquad 5.1(4)$$

En efecto $P_k(z, \lambda) = z^k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{k-i} =$

$$= z\left(z^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i z^{k-i-1}\right) + \lambda_k =$$

$$= \lambda_k + zP_{k-1}\ z\ \lambda',$$

$$\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$$

verificándose así 5.1(3).

Ahora se demuestra 5.1(4) por inducción sobre K. Para $k=1$ el miembro izquierdo de 5.1(4) es

$$P_1(z, \lambda) - P_1(w, \lambda) = (z + \lambda_1) - (w + \lambda_1) = z-w$$

y el miembro derecho es:

$$(z-w) \sum_{i=1}^{k} P_{i-1}(z, \lambda) w^{1-i} = (z-w) P_0(z, \lambda) w^0 = (z-w)$$

ya que por definición $\quad P_0(z, \lambda) \equiv 1$

Supóngase inductivamente que

$$P_{k-1}(z, \lambda') - P_{k-1}(w, \lambda') = (z-w) \sum_{i=1}^{k-1} P_{i-1}(z, \overset{i-1}{\lambda}) w^{k-1-i}$$

al multiplicar por w esta igualdad se obtiene

$$wP_{k-1}(z, \lambda') - wP_{k-1}(w, \lambda') = (z-w) \sum_{i=1}^{k-1} P_{i-1}(z, \overset{i-1}{\lambda}) w^{k-i}$$

al simar en esta igualdad el factor $(z-w)P_{k-1}(z, \lambda')$, el miembro derecho de la misma se transforma en:

$$(z-w)\left(\sum_{i=1}^{k-1} P_{i-1}(z, \overset{i-1}{\lambda})\, w^{k-1-i} + P_{k-1}(z, \lambda')\right) =$$

$$= (z-w) \sum_{i=1}^{k} P_{i-1}(z, \overset{i-1}{\lambda})\, w^{k-i}$$

Ésta es precisamente el miembro derecho de 5.1(4); en tanto que en el miembro izquierdo se obtiene:

$$(z-w)\ P_{k-1}(z, \lambda') + wP_{k-1}(z, \lambda') - wP_{k-1}(w, \lambda') =$$

$$= zP_{k-1}(z, \lambda') - wP_{k-1}(w, \lambda') =$$

$$= (\lambda_k + zP_{k-1}(z, \lambda') - (\lambda_k + wP_{k-1}(w, \lambda') =$$

$$= P_k(z, \lambda) - P_k(w, \lambda)$$

en el último paso de estas igualdades se aplicó 5.1(3), como éste es el miembro izquierdo de 5.1(4) entonces ésta igualdad es válida para todo número natural k; verificándose de ésta manera la igualdad propuesta en 5.1(4).

Teorema 5.2 (TEOREMA DE DIVISION POLINOMIAL)

Sea $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función $C^\infty$ en una vecindad del cero, entonces existen funciones $Q$ y $R$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ que son $C^\infty$ en una vecindad del cero tales que:

1.- $E(t,x) = Q(t,x,\lambda)\, P_k(t,\lambda) + R(t,x,\lambda)$

donde

2.- $R(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} r_i(x,\lambda)\, t^{k-i}$

y cada $r_i$ es función $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. Más aún, si $E$ es $\mathbb{R}$-valuada entonces también las funciones $Q$ y $R$ se pueden elegir $\mathbb{R}$-valuadas.

Nótese que si $E$ es $\mathbb{R}$-valuada entonces la parte imaginaria de $E(t,x)$ es nula, y bastaría considerar únicamente las partes reales de $Q(t,x,\lambda)$ y $R(t,x,\lambda)$ y entonces en el miembro derecho de la ecuación 1 del Teorema 5.2 tendríamos sumas y productos de numeros reales.

El Teorema de División Polinomial 5.2 implica el Teorema de División 5.1

En efecto, por hipótesis $D$ y $E$ son funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. La observación precedente y el Teorema 5.2 garantizan la existencia de funciones $C^\infty$ $Q_D$, $R_D$, $Q_E$ y $R_E$ tales que:

$D = Q_D P_k + R_D$ y $E = Q_E P_k + R_E$ donde

$$R_D(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} r_{i,D}(x,\lambda)\, t^{k-i} \quad \text{y}$$

$$R_E(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} r_{i,D}(x,\lambda)\, t^{k-i} \qquad 5.2(1)$$

En primer lugar se prueba que la función $Q_D$ es distinta de cero en una vecindad del cero y la función $R_D$ se anula en el orígen de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$. 5.2(2)

En efecto de 5.2(1) se tiene que:

$$D(t,0) = Q_D(t,0,\lambda)\, P_k(t,\lambda) + R_D(t,0,\lambda) \qquad 5.2(3)$$

entonces para $\lambda = 0$ se tiene

$$D(t,0) = Q_D(t,0,0)t^k + \sum_{i=1}^{k} r_{i,D}(t,0)t^{k-i}$$ ya que

$P_k(t,0) = t^k$ (consulte 5.1(1)).

Ahora bien, por hipótesis $D(t,0) = d(t)t^k$ con $d(0) \neq 0$, por consiguiente al sustituir este valor en la igualdad anterior se obtiene

$$d(t)t^k = Q_D(t,0,0)t^k + \sum_{i=1}^{k} r_{iD}(0,0)t^{k-i}$$

Al igualar coeficientes en ésta última igualdad se obtiene que $r_{iD}(0,0) = 0 \quad \forall\ i=1,\dots,k$ y $d(t) = q_D(t,0,0)$ como $q_D(0,0,0) = d(0) \neq 0$ entonces por continuidad se tiene que la función $q_D$ es distinta de cero en una vecindad del orígen, justificándose así la aseveración hecha en 5.2(2).

El siguiente paso es aplicar el Teorema de la Función Implícita a la función que asocia:

$(x, \lambda) \longrightarrow \left( r_{1D}(x, \lambda), \dots, r_{kD}(x, \lambda) \right)$. En 5.2(2) se probó que $(0,0) \longrightarrow (0,\dots,0)$.

A continuación se demuestra que $\left( \dfrac{\partial r_{iD}}{\partial \lambda_j}(0) \right)$

es una matríz invertible. En efecto, sea $Si(\lambda) = r_{iD}(0, \lambda)$ entonces en alguna vecindad del cero se tiene

$$d(t)t^k = D(t,0) = q_D(t,0,\lambda) \cdot \left[ t^k + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i t^{k-i} \right] + \sum_{i=1}^{k} Si(\lambda) t^{k-i} \qquad \text{(compare con 5.2(3))}.$$

Al derivar ésta igualdad con respecto a $\lambda_j$ y evaluar en $\lambda = 0$ se obtiene:

$$0 = \frac{\partial q_D}{\partial \lambda_j}(t,0,0)t^k + q_D(t,0,0)t^{k-j} + \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial Si}{\partial \lambda_j}(0)t^{k-i}. \qquad 5.2(4)$$

De ésta igualdad se concluye que el coeficiente de $t^{k-j}$

es $0 = \Omega_D(t,0,0) + \frac{\partial S_j}{\partial \lambda_j}(0)$ o equivalentemente

$\frac{\partial S_i}{\partial \lambda_i}(0) = -\Omega_D(0,0,0)$. En tanto que si $i$ es mayor que $j$ entonces el coeficiente de $t^{k-i}$ es cero, es decir

$$\frac{\partial S_i}{\partial \lambda_j}(0)=0 \qquad \forall\, i > j \qquad 5.2(5)$$

En efecto, la primera de estas aseveraciones se deduce al igualar términos semejantes en 5.2(4)..

La segunda aseveración hecha en 5.2(5) es una consecuehcia de los 2 hechos siguientes:

1.- $\Omega_D(t,0,0) = \Omega_D(0,0,0) + tG(0,0,0)$

2.- Aplíquese el perador $\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}$ a la igualdad 5.2(4) y evalúese en $t=0$ para $k-i < k-j$

De 5.2(5) se infiere que $\left(\frac{\partial S_i}{\partial \lambda_j}(0)\right)$

es una matríz triangular inferior cuyo determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir,

$$\left| \frac{\partial S_i}{\partial \lambda_j}(0) \right| = \left( - q_D\ (0,0,0) \right)^k. \qquad \text{como}$$

$q_D\ (0,0,0) \neq 0$ según se muestra en 5.2(2), entonces

$$\left| \frac{\partial S_i}{\partial \lambda_j}(0) \right| \neq 0\ .$$ En estas condiciones el Teorema de la Función Implícita asegura la existencia de funciones $C^\infty$

$\theta_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $i=1,\ldots,k$ que satisfacen:

a) $r_{jD}\ (x,\ \theta\ (x)) = 0$

b) $\theta\ (0)=0$ donde $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ 5.2(6)

(véase 5.2(2)). Con 5.2(6) es posible expresar a las funciones $q_D$ y $p_k$ en la forma:

$$\overline{\Pi}\ (t,x) = q_D\ (t,x,\ \theta\ (x)) \quad \text{y} \quad p(t,x) = p_k\ (t,\ \theta\ (x)) \qquad 5.2(7)$$

entonces después de sustituír 5.2(7) en la primera de las ecuaciones que aparecen en 5.2(1) y aplicar el inciso a de 5.2(6) se obtiene

$$q_D(t,x,\ \theta\ (x))\ p_k(t,\ \theta\ (x)) + R_D\ (t,x,\ \theta\ (x)) = \overline{q}(t,x)\ p(t,x) =$$

$$= D\ (t,x)$$

es decir

$$D(t,x) = \bar{\Omega}(t,x)\, p\,(t,x) \qquad 5.2(8)$$

Como $\bar{\Omega}$ y $\Omega_D$ coinciden en el origen, entonces nuevamente por continuidad y por 5.2(2) se tiene que $\bar{\Omega}(t,x) \neq 0$ en una vecindad del cero esto permite, al menos localmente, despejar a $p(t,x)$ en 5.2(8) de la siguiente manera:

$$p\,(t,x) = \frac{D\,(t,x)}{\bar{\Omega}\,(t,x)}$$

Sustituyendo éste valor en la segunda igualdad en 5.2(1) y aplicando 5.2(6)(a) en 5.2(7) se obtiene:

$$E\,(t,x) = \Omega_E\,(t,x,\ \theta\,(x))\, p\,(t,x) + R_E\,(t,x,\ \theta\,(x)) =$$

$$\frac{\Omega_E\,(t,x,\ \theta\,(x))}{\bar{\Omega}\,(t,x)}\, D(t,x) + R_E\,(t,x,\ \theta\,(x)) \qquad 5.2(9)$$

Finalmente sea

$$r_i(x) = r_{iE}\,(x,\ \theta\,(x)) \quad \text{y} \quad Q(t,x) = \frac{\Omega_E\,(t,x,\ \theta\,(x))}{\bar{\Omega}\,(t,x)}$$

éste cociente tiene sentido en una vecindad del cero, entonces 5.2(9) se transforma en

$E(t,x) = \Omega\,(t,x)\, D\,(t,x) + R\,(t,x)$ donde

$$R(t,x) = \sum_{i=1}^{K} r_i(x)\, t^{k-i}$$

Concluyendo así la implicación del Teorema de División 5.1 a partir del Teorema de División Polinomial.

A fin de demostrar el Teorema de Dovisión Polinomial necesitamos antes demostrar el Lema 5.3 que es una generalización de la fórmula de Cauchy.

Sea $G: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , $G = u + iv$ ;

$u,v: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

Si $z = x + iy$ , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ya que $x = 1/2\,(z + \bar z)$ $y = 1/2i\,(z - \bar z)$

es un cambio de coordenadas. Similarmente

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial G}{\partial \bar z} = \frac{\partial u}{\partial \bar z} + i\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) \tag{5.2(10)}$$

21 $\dfrac{\partial G}{\partial \bar z} = i\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial G}{\partial y}$ 5.2(11)

1 $i\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial G}{\partial y} = i\dfrac{\partial}{\partial x}(u+iv) - \dfrac{\partial}{\partial y}(u+iv) =$

$$= i\frac{\partial u}{\partial x} + i^2\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) -$$

$$-(-i^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= i\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) =$$

$$= 2i\frac{\partial G}{\partial \bar z}$$

$dz \wedge d\bar z = -2i\, dx \wedge dy$ 5.2(12)

En efecto:

$$dz \wedge d\bar z = (dx + i dy) \wedge (dx - i dy)$$
$$= dx \wedge dx + dx \wedge -i dy + i dy \wedge dx + i dy - i dy$$
$$= -i dx \wedge dy - i dx \wedge dy$$
$$= -2i dx \wedge dy$$

Lema 5.3

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función $C^{\infty}$ considerada como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Si $\gamma$ es una curva cerrada simple y U= interior de $\gamma$ entonces para toda $w \in U$ se tiene:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\iint_{U} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z}$$

NOTA: Si f es holomorfa entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ y la ecuación anterior se reduce a la conocida fórmula de Cauchy para integrales.

Demostración

Fíjese $w$ en $U$ entonces el $\min\left\{ |z-w| / z \in \gamma \right\}$ existe y es mayor que cero, pues $z \longrightarrow |z-w|$ es una función positiva de un compacto $\gamma$ a $\mathbb{R}$. Sea $0 < \varepsilon < \min\left\{ |z-w| / z \in \gamma \right\}$.

Considérese $U_{\varepsilon} = U - V$, donde $V$ es la vecindad centrada en $w$ y radio $\varepsilon$. Si $\gamma_{\varepsilon}$ es la frontera de $U_{\varepsilon}$ entonces

$\gamma_{\varepsilon} = \gamma \cup C_{\varepsilon}$ donde $C_{\varepsilon}$ denota la frontera de $V$

La función $G(z) = \dfrac{f(z)}{z-\omega}$ es $C^\infty$ en $\overline{U}_\varepsilon$ pues por una parte f es $C^\infty$ y por otra $1/z-w$ es holomorfa en $\overline{U}_\varepsilon$ de ahí que la función $\dfrac{\partial G}{\partial \bar z}$ coincide con $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z} \cdot \dfrac{1}{z-\omega}$

Por consiguiente si $G = u + iv$ entónces

$$\int_{\gamma_\varepsilon} G(z)\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} (\,G\,dx + iG\,dy\,)$$

por el Teorema de Green esto es igual a

$$\iint_{\overline{U}_\varepsilon} \left(i\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

por 5.2(11) esto coincide con

$$\iint_{\overline{U}_\varepsilon} 2i\,\frac{\partial G}{\partial \bar z}\, dx \wedge dy$$

finalmente, por 5.2(12) esto es igual a

$$-\iint_{\overline{U}_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \bar z}(-2i)\, dx \wedge dy = -\iint_{\overline{U}_\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \bar z}\, dz \wedge d\bar z$$

por lo tanto al sustituir G y $\dfrac{\partial G}{\partial \bar z}$ y aplicar 5.3(1)

se tiene que

$$-\iint_{\overline{U}_\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z)}{z-\omega}\, dz \wedge d\bar z = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz - \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-\omega}\, dz \qquad 5.3(2)$$

Estas últimas igualdades són consecuencia del hecho siguiente:

$\gamma_\varepsilon = \gamma \cup C_\varepsilon$ esto implica $\int_{\gamma_\varepsilon} = \int_{\gamma - C_\varepsilon} = \int_\gamma - \int_{C_\varepsilon}$

Ahora bien, si se parametriza $z = w + \varepsilon e^{i\theta}$ se obtiene:

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \int_0^{2\pi} i f(w + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

esto implica que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} i f(w + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} i f(w)\, d\theta = i f(w) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(w)$$

Ahora bien, la medida de $\bar{U}_\varepsilon$ se aproxima a la medida de $\bar{U}$ conforme $\varepsilon$ tiende a cero (consulte el párrafo previo a 5.3(1)).

Por otra parte $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ es integrable en U y $U_\varepsilon$ pues por hipótesis f es $C^\infty$.

Por otro lado $\dfrac{1}{z-w}$ también es integrable en U y $\bar{U}_\varepsilon$, ésta última aseveración se justificará al final de ésta demostración. Como el producto de funciones integrables es nuevamente una función integrable, entonces es posible aplicar el límite en la ecuación 5.3(2) cuando $\varepsilon$ tiende a cero para obtener:

$$-\iint_U \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz - 2\pi i f(w)$$

por lo tanto

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathcal{U}} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z}$$

$\square$

Para probar que $\displaystyle\iint_{\mathcal{U}} \frac{1}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z}$ existe,

será suficiente probar que $\displaystyle\iint_{V} \frac{1}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z}$

existe, ya que $\dfrac{1}{z-w}$ es holomorfa en $U_{\varepsilon}$ $\forall\, \varepsilon > 0$

y por tanto integrable (véase 5.3(1)).

En primer lugar obsérvese que si

$z = (a + x) + i\,(b + y)$ entonces $dz \wedge d\bar{z} = -2i\; dx \wedge dy$

ya que la derivada de una constante es cero (compare con 5.2(12)).

Ahora bien, cada elemento de $V$ puede expresarse en la forma $z = w + t\, e^{i\theta}$ donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq t \leq \mathcal{E}$ en consecuencia

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{t\, e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{t} = \left(\frac{\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{t}\right)$$

como el determinante de la matríz que induce el cambio de coordenadas $t\cos\theta + it \operatorname{sen}\theta \longrightarrow (t\cos\theta,\ t\operatorname{sen}\theta$ es $t)$ entonces

$$\iint_{\overline{V}} \frac{1}{z-w}\, dz \wedge d\bar{z} =$$

$$= \int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left(-2it\left(\frac{\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta}{t}\right)\right) d\theta\, dt =$$

$$= -2i \int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta\, dt =$$

$$= -2i\int_0^{\varepsilon}\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta\right) dt - 2\int_0^{\varepsilon}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\right) dt$$

Como el coseno y el seno son integrables en $[0, 2\pi]$ entonces se concluye que $\dfrac{1}{z-w}$ es integrable en V.

Demostración

Para probar el Teorema 5.2 se mostrará que existen funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero Q y R de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ a $\mathbb{C}$ cuyas restricciones al conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ satisfacen los requisitos que se piden en la conclusión del Teorema de División Polinomial, es decir:

$$E(t,x) = Q(t,x,\lambda)\, P_k(t,\lambda) + R(t,x,\lambda) \quad \text{y}$$

$$R(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} r_i(x,\lambda)\, t^{k-i} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{y} \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^k$$

Para conseguir este objetivo es necesario extender a la función E en una función $\bar{E} : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ de clase $C^\infty$ para posteriormente construir las funciones Q y R a partir de esta extensión $\bar{E}$. La existencia de $\bar{E}$ se justificará más adelante en el Lema de Extensión de Niremberg (Lema 5.4); por consiguiente, en la primera parte de esta demostración únicamente se construirán las funciones Q y R con las características anotadas anteriormente asumiendo la existencia de la función $\bar{E}$. Así pues, supóngase que $\bar{E}: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ es una función $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface:

$$\bar{E}(t,x,\lambda) = E(t,x) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \ \text{y} \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^k \qquad 5.3(3)$$

Si al fijar $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ se obtienen funciones $\bar{E}(z)$, $P(z)$ y $P_{i-1}(z)$ con la siguiente regla de correspondencia

pondencia:

$$\overline{E}(z) = \overline{E}(z,x,\lambda) \ , \quad P(z) = P_k(z,\lambda) \ \text{ y } \ P_{i-1}(z) = P_{i-1}(z,\lambda)$$

5.3(4)

del apartado 5.1(4) se obtiene que

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{P(\omega)}{(z-\omega)\,P(z)} + \sum_{i=1}^{k} \frac{P_{i-1}(z)\,\omega^{k-i}}{P(z)}$$

5.3(5)

Para justificar ésta igualdad escríbase $\dfrac{1}{z-\omega}$

en la forma $\dfrac{P(z)}{z-\omega}\,\dfrac{1}{P(z)}$ y con el auxilio de 5.1(4)

exprésese a $\dfrac{P(z)}{z-\omega}$ como

$$\frac{P(\omega)}{z-\omega} + \sum_{i=1}^{k} P_{i-1}(z)\,\omega^{k-i}$$

Ahora bien, por una parte $\overline{E}$ es de clase $C^{\infty}$ y por otra, siempre es posible encontrar una curva $\gamma$ (como se propone en la demostración del Lema 5.3) que no contenga ceros $p(z) = P_k(z, \lambda)$. Entonces después de aplicar el Lema 5.3 a la función $\bar{E}(z) = \bar{E}(z, x, \lambda)$ se tiene que $\forall\, w \in U = \mathrm{int}(\gamma)$

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\bar{\varepsilon}(z)}{z-\omega}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathcal{U}} \frac{\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z)}{z-\omega}\, dz \wedge d\bar{z}$$

Al sustituir en esta expresión $\dfrac{1}{z-\omega}$ como se propone en 5.3(5) y aplicar las propiedades lineales de la integral se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(\omega) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{\bar{\varepsilon}(z)\,P(\omega)}{(z-\omega)\,P(z)} + \sum_{i=1}^{K}\frac{\bar{\varepsilon}(z)\,P_{i-1}(z)\,\omega^{K-i}}{P(z)}\right) dz \,+ \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z)\frac{P(\omega)}{(z-\omega)P(z)} + \sum_{i=1}^{K}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z)\,\frac{P_{i-1}(z)\,\omega^{K-i}}{P(z)}\right) dz \wedge d\bar{z} = \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma}\frac{\bar{\varepsilon}(z)}{(z-\omega)P(z)}\, dz + \iint_{\mathcal{U}}\frac{\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z)}{(z-\omega)P(z)}\, dz \wedge d\bar{z}\right)\right] P(\omega) \,+ \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{K}\left(\int_{\Gamma}\frac{\bar{\varepsilon}(z)\,P_{i-1}(z)}{P(z)}\, dz + \iint_{\mathcal{U}}\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z)\,\frac{P_{i-1}(z)}{P(z)}\, dz \wedge d\bar{z}\right)\omega^{K-i}
\end{aligned}$$

5.3(6)

Escribase ahora

$$Q(w,x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left( \int_{\Gamma} \frac{\bar{\varepsilon}(z,x,\lambda)}{(z-w)P_k(z,\lambda)}\,dz + \iint_{\mathcal{U}} \frac{\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}}(z,x,\lambda)}{(z-w)P_k(z,\lambda)}\,dz \wedge d\bar{z} \right)$$

$$y \quad R_i(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\left( \int_{\Gamma} \frac{\bar{\varepsilon}(z,x,\lambda)\,P_{i-1}(z,\lambda)}{P_k(z,\lambda)}\,dz + \right.$$

$$\left. + \iint_{\mathcal{U}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{z}} \frac{(z,x,\lambda)\,P_{i-1}(z,\lambda)}{P_k(z,\lambda)}\,dz \wedge d\bar{z} \right)$$

5.3(7)

Entonces de 5.3(4), 5.3(6) y 5.3(7) se infiere que

$\bar{E}(w,x,\lambda) = Q(w,x,\lambda)\, P_k(w,\lambda) + R(w,x,\lambda) \qquad \forall\, w \in U$

y de 5.3(3) se deduce que

$E(t,x) = Q(t,x,\lambda) P_k(t,\lambda) + R(t,x,\lambda) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}^k$

El Teorema de División Polinomial quedará completamente demostrado una vez que se pruebe la diferenciabilidad de cualquier orden de las funciones Q y R , para ello es indispensable probar que las integrales que aparecen en 5.3(7) están bien definidas y hacen de Q y $R_i$ funciones $C^{\infty}$ . La primera de estas integrales que aparece en ambas funciones Q y $R_i$ estará bien definida siempre y cuando los ceros del polinomio $P_k(z, \lambda)$ no se encuentren sobre la curva $\Gamma$, para toda $\lambda$ en una vecindad del orígen de $\mathbb{C}^K$; una curva con estas características siempre es posible escogerla gracias al Corolario del Teorema de Rouche (véase (*) ), el cual menciona que para polinomios que poseen coeficientes cercanos les corresponden raíces cercanas, éstas últimas ordenadas adecuadamente. Lo que no es posible evitar, es que el interior de $\Gamma$, U contenga ceros del polinomio $P_k$; por esta razón y debido a que los integrandos están acotados se requiere que las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{z}}$ se anulen en los ceros del polinomio $P_k$ y también cuando la parte imaginaria de z sea idénticamente cero.

Como veremos más adelante, ésto será suficiente para garantizar que las funciones Q y R están bien definidas y sean funciones $C^{\infty}$.

Este será el tema a desarrollar en los 4 resultados siguientes.

Teorema 5.4
Corolario 5.5
" 5.6
y " 5.7

Antes de entrar en materia daremos la notación que se empleará en los lemas siguientes:

Si $\alpha$ es un multiíndice de n coordenadas, es decir

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad \text{donde} \qquad \alpha_i = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces :

(*) Tromba Marsden.- Basic Complex Analysis.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n , \quad \alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n! ,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sea A el conjunto de multiíndices $\alpha$ de la forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ donde $\alpha_i$ es un entero no negativo. Este conjunto es equivalente al producto cartesiano de los naturales k veces y como es un producto finito de conjuntos numerables, entonces A así mismo es numerable y

por tanto existe una biyección $\sigma : A \longrightarrow \mathbb{N}$ que asocia a cada multiíndice $\alpha$ un único número natural $\sigma(\alpha)$ luego entonces la expresión $\sum_{\alpha=0}^{\infty}$ significará en realidad $\sum_{\sigma(\alpha)=0}^{\infty}$

5.3(9)

Recuérdese así mismo que $E_{n+k}$ y $E_n$ denotan los anillos de gérmenes en cero de funciones $C^\infty$ que van de

$$\mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

respectivamente (ver Capítulo 1). Por último

$E_n \left[\left[ y_1 , \ldots , y_k \right]\right]$ denotará el anillo de series formales con coeficientes en el anillo $E_n$ , es decir los elementos de $E_n \left[\left[ y_1 , \ldots , y_k \right]\right]$ son de la forma $\sum_{\alpha} \eta_{\alpha} \frac{y^{\alpha}}{\alpha !}$ donde $\eta_{\alpha}$ es un germen de $E_n$ , $y \in \mathbb{R}^k$ y

$$\alpha = ( \alpha_1 , \ldots , \alpha_k ) \qquad 5.3(a)$$

Teorema 5.4 (E. BOREL)

La función $\theta : E_{n+k} \longrightarrow E_n[[y_1, \ldots, y_k]]$ que asocia a cada germen $\eta$ del anillo $E_{n+k}$ la serie formal de potencias $\sum_{\alpha} \eta_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!}$ es lineal y suprayectiva donde

$$\eta_\alpha = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^\alpha}\right|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \quad \text{esto es} \quad \eta_\alpha(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^\alpha}(x,0)$$

, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ . $x \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^k$

Demostración

$E_{n+k}$ es el conjunto de gérmenes de funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}$ . Entonces para todo multiíndice $\alpha$ $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ la restricción de $\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^\alpha}$ al conjunto $\mathbb{R}^n \times 0$ es un germen del anillo local $E_n$ y como las parciales de $\eta$ son únicas, entonces la serie formal de potencias $\sum_{\alpha} \eta_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!}$ es única donde

$$\eta_\alpha(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^\alpha}(x,0) \; , \quad \eta_\alpha \in \mathcal{E}_n \, .$$

Por lo tanto la función que asigna a cada germen $\eta$ del anillo local $E_{n+k}$ la serie $\sum_{\alpha} \eta_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!}$ está bien definida.

Ahora, el que $\theta$ sea lineal es una consecuencia de la linealidad del operador $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}$

En efecto, si $\eta$ y $\xi$ son gérmenes de $E_{n+k}$ y r y s son reales entonces:

$$\theta(r\eta + s\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}(r\eta + s\xi)\Big|_{\mathbb{R}^n\times 0} \frac{y^\alpha}{\alpha!}$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}(r\eta)\Big|_{\mathbb{R}^n\times 0} + \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^\alpha}(s\xi)\Big|_{\mathbb{R}^n\times 0}\right)\frac{y^\alpha}{\alpha!}$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} r\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^\alpha}(y=0)\right)\frac{y^\alpha}{\alpha!} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} s\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\xi}{\partial y^\alpha}(y=0)\right)\frac{y^\alpha}{\alpha!} =$$

$$= r\theta(\eta) + s\theta(\xi)$$

Ahora, el siguiente paso es probar que $\theta$ es suprayectiva, para ello mostraremos que si $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \eta_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!}$ es cualquier elemento del anillo $E_n[[y]]$ entonces existe un germen $\eta$ en el anillo $E_{n+k}$ que satisface:

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial y^{\alpha}}\right|_{\mathbb{R}^n\times 0} \equiv \eta_\alpha$$ para todo multíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Afirmamos que existe $\{\mu_\alpha\}$ que crece suficientemente rápido a $\infty$ y una función $\rho : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ $C^\infty$ en una vecindad del cero con las cuales es posible definir al germen $\eta$ en la forma

$$\eta(x,y) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \eta_\alpha(x)\,\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y) \qquad 5.4(1)$$

Justificación de la existencia de un germen $\eta$ en el anillo $E_{n+k}$ con las características anotadas en 5.4(1).

Para todo multíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ elíjanse representantes $f_\alpha$ de $\eta_\alpha$ con soporte compacto $U \overset{c}{\subset} \mathbb{R}^n$ en la vecindad de radio uno con centro en el orígen, esto siempre es posible, ya que si $g_\alpha$ es cualquier otro representante de $\eta_\alpha$ entonces al considerar $f_\alpha = g_\alpha \cdot g$ donde $g$ es una función $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le 1/2 \\ 0 & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}$$

entonces por construcción $f_\alpha$ y $g_\alpha \cdot g$ coinciden en la vecindad de radio $1/2$ con centro en el orígen y $f_\alpha(x) = 0$ si $|x| \ge 1$.

Sea $\rho : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$ una función $C^\infty$ que satisface

$$\rho(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |y| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |y| \geq 1 \end{cases} \qquad 5.4(2)$$

Sea $\mu$ un número estrictamente mayor que 1 y $V$ la vecindad de radio $\frac{1}{2\mu}$ con centro en el orígen de $\mathbb{R}^K$ entonces para cualquier sucesión $\{\mu_\alpha\}$ que crece suficientemente rápido a $\infty$ existe un multiíndice $\alpha_0$ que satisface $\mu_\alpha \geq \mu$ para toda $\alpha$ tal que $|\alpha| \geq |\alpha_0|$ por consiguiente:

1.- La función $\rho$ se comporta en $V$ como la función constante uno.

2.- Si $y_0$ es un punto fijo en $\mathbb{R}^K$ entonces $\rho(\mu_\alpha \, y_0) = 0$ para casi todo término de la sucesión $\{\mu_\alpha\}$ excepto para un número finito de ellos. 5.4(3)

En efecto, como $\mu > 1$ entonces $\frac{1}{2\mu} \leq \frac{1}{2}$ luego si $y$ pertenece a $V$ entonces $|y| \leq 1/2$ por consiguiente $\rho(y) = 1 \quad \forall \, y \in V$

Como $\{\mu_\alpha\}$ es una sucesión creciente, entonces existe un multiíndice $\gamma$ tal que $|\alpha| \geq |\gamma|$ entonces

$\mu_\alpha |y_0| \geq 1$ por consiguiente $\rho(\mu_\alpha y_0)=0$

satisfaciéndose así las condiciones 1 y 2 dadas en 5.4(3).

Ahora bien, la función $f_\alpha \dfrac{y^\alpha}{\alpha!}$ y $\rho(\mu_\alpha y)$

son $C^\infty$ en una vecindad del cero, entonces el producto

$f_\alpha(x) \dfrac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha y)$ también resultan ser una función $C^\infty$ en una vecindad del cero: por consiguiente el producto

$$\frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\rho(\mu_\alpha y)\right)$$

es una función diferenciable en una vecindad del cero para todo par de multiíndices $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ y $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$

Sea $V_\gamma = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \;/\; |y| < \dfrac{1}{2\mu_\gamma} \right\}$ si

$y \in V_\gamma$ y $|\alpha| \leq |\gamma|$ entonces $\mu_\alpha \leq \mu_\gamma$

en consecuencia

$$\mu_\alpha |y| \leq \frac{\mu_\alpha}{2\mu_\gamma} \leq \frac{1}{2} ;$$

esto significa que $\rho(\mu_\alpha y) = 1 \quad \forall y \in V_\gamma$

y para toda $\alpha$ tal que $|\alpha| \leq |\gamma|$ por lo tanto

$$\frac{\partial^{|\gamma-\alpha|}}{\partial y^{\gamma-\alpha}}\left(\rho(\mu_\alpha\, y)\right) \equiv \begin{Bmatrix} 1 & si & \gamma-\alpha=0 \\ 0 & si & \gamma-\alpha\neq 0 \end{Bmatrix} \qquad 5.4(4)$$

Por otra pârte de 1.7(1) se tiene que

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\rho(\mu_\alpha\, y)\right) = \sum_{|\sigma|=0}^{|\gamma|} C^\gamma_\sigma \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial y^\sigma}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\right)\frac{\partial^{|\gamma-\sigma|}}{\partial y^{\gamma-\sigma}}\rho(\mu_\alpha\, y) =$$

$$= \sum_{\substack{|\sigma|=0 \\ \sigma_i \leq \alpha_i}}^{|\gamma|} C^\gamma_\sigma \frac{y^{\alpha-\sigma}}{\sigma!}\frac{\partial^{|\gamma-\sigma|}}{\partial y^{\gamma-\sigma}}\rho(\mu_\alpha\, y) \qquad 5.4(5)$$

Al evaluar esta suma en y=0 se tiene que

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\rho(\mu_\alpha\, y)\right)\Bigg|_{y=0} = C^\gamma_\alpha \frac{\partial^{|\gamma-\alpha|}}{\partial y^{\gamma-\alpha}}\rho(\mu_\alpha\, y)\Bigg|_{y=0}$$

ya que de 1.7(2) se infiere que en y=0

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial y^{\sigma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\right)\Bigg|_{y=0} = \begin{Bmatrix} 1 & si & \alpha=\sigma \\ 0 & si & \alpha\neq\sigma \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, de ésta última expresión y la dad en 5.4(4)

se tiene que

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\rho(\mu_\alpha\, y)\right)\Bigg|_{y=0} \equiv \begin{Bmatrix} 1 & si & \gamma=\alpha \\ 0 & si & \gamma\neq\alpha \end{Bmatrix} \qquad 5.4(6)$$

Como las derivadas parciales de cualquier orden del producto $f_\alpha(x)\,\dfrac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha v)$ existe en $U \times V$, entonces para todo par de multiíndices $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ tiene sentido definir:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x)\,\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y)\right) \qquad 5.4(7)$$

Luego, si se prueba que cada una de éstas series converge uniformemente en una vecindad compacta del orígen, entonces se concluiría que la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_\alpha(x)\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y)\right)$$

es de clase $C^\infty$ en una vecindad del cero y en consecuencia diferenciable término a término, esto es:

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_\alpha(x)\,\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y)\right)\right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x)\,\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y)\right) \qquad 5.4(8)$$

En particular si $\beta = 0$ de ésta última expresión y de 5.4(6) se obtendría:

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_{\alpha}(x)\frac{y^{\alpha}}{\alpha!}\rho(\mu_{\alpha} y)\right)\Bigg|_{y=0} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_{\alpha}(x)\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^{\alpha}}{\alpha!}\rho(\mu_{\alpha} y)\right)\Bigg|_{y=0} \equiv f_{\gamma}(x)$$

Por consiguiente, al traducir éstos últimos resultados al lenguaje de gérmenes se concluiría que el germen definido en 5.4(1) en efecto resulta ser un elemento del anillo $E_{n+k}$ con las características ahí anotadas.

Luego entonces la demostración de 5.4 qu dará concluída una vez que se demuestre la convergencia uniforme de la serie definida em 5.4(7).

Convergencia uniforme de la serie dada en 5.4(7)

En primer lugar obsérvese que para todo punto fijo $(x_0, y_0)$ en $U \times V$ la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_{\alpha}(x_0)\frac{y_0^{\alpha}}{\alpha!}\rho(\mu_{\alpha} y_0)$$ es una suma finita,

ya que el factor $\rho(\mu_{\alpha} y_0)$ es idénticamente cero para casi todo término de la sucesión $\{\mu_{\alpha}\}$ (consulte 2 en 5.4(3)).

Ahora para toda $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ defínase la función $h_\alpha : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h_\alpha(y) = \mu_\alpha \frac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha y)$$

Es claro que el producto $f_\alpha \cdot h_\alpha$ es $C^\infty$ en una vecindad del cero, ésto significa que sus derivadas parciales de cualquier orden existen, son contínuas y por consiguiente están acotadas en cualquier vecindad compacta contenida en $U \times V$. Por lo tanto, el supremo de cada una de estas funciones existe en cualquier conjunto compacto $K$ que contenga al orígen y que esté contenido en $U \times V$.

Como los conjuntos

$$\left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \text{ tal que } |\beta| + |\gamma| \leq s \quad \forall\, s \in \mathbb{N} \right\} \text{ y}$$

$$\left\{ \delta = (\delta_1, \dots, \delta_k) \text{ tal que } |\delta| < |\alpha| \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \right\}$$

son finitos (consulte 5.3(a)).

Entonces es posible definir las sucesiones $\{ s_\alpha \}$ y $\{ m_\alpha \}$ para todo número natural $s$ y para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ de la siguiente manera:

$$\cdot\ S_\alpha = \max\left\{ \sup\left\{ \left| \frac{\partial^{|\beta|} S_\alpha}{\partial x^\beta}(x)\, \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \right| \ \forall (x,y)\in K \right\}\right.$$

$$\forall \beta=(\beta_1,\dots,\beta_n),\quad \forall \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \text{ tal que}$$

$$\left. |\beta|+|\gamma| \le s, \quad s\in N \right\}$$

$$\cdot\ M_\alpha = \max\left\{ S_\alpha,\ S_\delta \quad \forall \delta=(\delta_1,\dots,\delta_k) \text{ tal que}\right.$$

$$\left. |\delta| < s \qquad s=|\alpha| \right\}$$

5.4(9)

Ambos máximos existen, pues el conjunto de multiíndices de norma menor o igual que $s$ es finito para todo número natural $s$.

Obsérvese que si $s$ es menor que $t$ entonces $S_\alpha$ es menor o igual que $t_\alpha$ para todo multiíndice

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ 5.4(10)

Luego si $|\delta| < |\alpha|$ entonces $|\delta_\gamma| \le |\alpha_\gamma|$ $\forall\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ y en consecuencia $M_\delta \le M_\alpha$

Por consiguiente $\forall (x, v)$ en una vecindad del cero y para cualquier par de multiíndices $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ se tiene

$$\left| \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \right| \leq \begin{cases} S_\alpha & \text{si } |\alpha| \leq |\beta| + |\gamma| \text{ donde } s = |\beta| + |\gamma| \\ H_\alpha & \text{si } |\alpha| > |\beta| + |\gamma| \end{cases}$$

5.4(11)

Como $f_\alpha(x) \dfrac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha y)$ coincide con $\dfrac{1}{\mu_\alpha} f_\alpha(x) h_\alpha(y)$ para todo multiíndice $\alpha$ y $\forall (x, y)$ en una vecindad del cero, entonces las series definidas en 5.4(7) adoptan la forma

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_\alpha} f_\alpha(x) h_\alpha(y) \qquad y$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_\alpha} \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \qquad 5.4(12)$$

Para probar la convergencia uniforme de la primera de estas series, será suficiente probar que para cualquier par de multiíndices $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ y $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, la segunda de estas series converge absolutamente, es decir, se probará que la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_\alpha} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \right|$$

es convergente $\forall (x, y)$ en una vecindad del cero.

Para conseguir este objetivo, aplíquese a cada sumando de ésta última serie, la expresión dada en 5.4(11) a fin de obtener las dos sumas siguientes:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{|\beta|+|\gamma|} \frac{1}{\mu_\alpha} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \right| +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|+|\gamma|+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_\alpha} \left| \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|} h_\alpha}{\partial y^\gamma}(y) \right| \leq \sum_{|\alpha|\leq s}^{s=|\beta|+|\gamma|} \frac{S_\alpha}{M_\alpha} + \sum_{|\alpha|=|\beta|+|\gamma|+1}^{\infty} \frac{M_\alpha}{\mu_\alpha}$$

La primera suma que aparece en ambos miembros de ésta desigualdad tiene un número finito de sumandos, los cuales no influyen en el análisis de la convergencia uniforme de la segunda serie dada en 5.4(12).

Por consiguiente, si se prueba que la serie

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|+|\gamma|+1}^{\infty} \frac{M_\alpha}{\mu_\alpha}$$ es convergente, entonces al mismo tiempo se estará probando que la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\beta|} f_\alpha}{\partial x^\beta}(x) \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\,\rho(\mu_\alpha y)\right)$$

converge absolutamente (compare con 5.4(7) y 5.4(12)).

Esto se consigue definiendo a la sucesión $\{\mu_\alpha\}$ de la siguiente manera:

Sea $\{\varepsilon_\alpha\}$ una sucesión de números positivos con la propiedad de que la serie $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \varepsilon_\alpha$ converge a $\varepsilon$, entonces basta pedir que para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ el término $\alpha$-ésimo de la sucesión $\{\mu_\alpha\}$ sea mayor que $\dfrac{M_\alpha}{\varepsilon_\alpha}$

5.4(13)

Para conseguir que la serie $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \dfrac{M_\alpha}{\mu_\alpha}$ sea convergente, pues por definición $\dfrac{M_\alpha}{\mu_\alpha} \leq \varepsilon_\alpha$ para todo multiíndice $\alpha$ ; por lo tanto la primera serie que aparece en 5.4(12) converge uniformemente y de 5.4(7) se concluye que la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f_\alpha(x) \frac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha y) \quad \text{es } C^\infty \text{ en}$$

una vecindad del cero. Concluyendo así la demostración del Teorema de Borel.

$\square$

Corolario 5.5 ( E. BOREL)

Sea $\{f_i\}$ una sucesión de funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$, $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para toda $i$. Entonces existe una función $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface:

$$\frac{\partial^i F}{\partial t^i}(x, 0) = f_i(x) \qquad \forall \; i = 0, 1, \ldots$$

Demostración

Sea $\eta_i$ el germen de la función $f_i$ (consulte definición en 1.0(1)), entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i \frac{t^i}{i!}$ pertenece al anillo de series formales $\mathbb{R}\langle E_n, t\rangle$ y de acuerdo al Teorema de Borel, existe un germen $\eta$ en el anillo local $E_{n+1}$ que satisface

$$\left.\frac{\partial^i \eta}{\partial t^i}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} \text{ coincide con el germen } \eta_i$$

$\forall \; i = 0, 1, \ldots$ por consiguiente, si

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un representante del germen $\eta$, entonces existe una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, en la cual la función $F$ es $\infty$ y la función

$$\left.\frac{\partial^{|i|} F}{\partial t^{i}}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0}$$

coincide con la función $f_i$ $\forall$ $i = 0, 1, \ldots$ es decir,

$$\frac{\partial^{|i|} F}{\partial t^{i}}(x, 0) = f_i(x) \qquad \forall\, x \quad \text{en una vecindad}$$

del origen de $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Una función $F$ con las características anotadas anteriormente, según se muestra en la prueba del Teorema 5.4, es de la forma:

$$F(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \frac{t^i}{i!} \rho(\mu_i t) \qquad 5.5(1)$$

donde $\rho$ es la función $C^{\infty}$ definida en 5.4(2) y $\{\mu_i\}$ es una sucesión que crece suficientemente rápido a $\infty$, la cual permite que la función $F$ sea $C^{\infty}$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (compare con 5.4(9) y 5.4(13)).

Corolario 5.6

Sean $V$ y $W$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ cuya suma coincide con $\mathbb{R}^n$. Si $g$ y $h$ son funciones $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ en una vecindad del cero, con la particularidad de que para todo multiíndice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ las funciones

$$\frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^\beta} \quad y \quad \frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}$$ coinciden

en $V \cap W$. Entonces existe una función $F$ de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $C^\infty$ en una vecindad del cero tal que:

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^\beta}(x) & si \quad x \in V \\ \dfrac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}(x) & si \quad x \in W \end{cases} \quad \forall\, \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Demostración

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que una de las funciones, digamos $h$, es idénticamente cero; ya que si $F_1$ es la función que extiende a $(g-h)$ y cero, entonces al definir $F = F_1 + h$ se encontraría la existencia deseada para $g$ y $h$.

En efecto, $g-h$ y la función idénticamente cero son funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$ pues por hipótesis $g$ y $h$ lo son y por ende su diferencia también lo es.

Luego si $F_1$ es la función $C^\infty$ que satisface:

$$\frac{\partial^{|\beta|} F_1}{\partial x^\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\beta|}(g-h)}{\partial x^\beta}(x) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \in W \end{cases}$$

entonces al considerar la función $F = F_1 + h$ y aprovechar la linealidad del operador $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}$ se obtiene:

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^\beta}(x) = \frac{\partial^{|\beta|} F_1}{\partial x^\beta}(x) + \frac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^\beta}(x) - \dfrac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}(x) + \dfrac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}(x) & \text{si } x \in V \\ 0 + \dfrac{\partial^{|\beta|} h}{\partial x^\beta}(x) & \text{si } x \in W \end{cases}$$

Como $V + W = \mathbb{R}^n$ entonces es posible elegir un sistema de coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de modo que los subespacios $V$ y $W$ estén caracterizados por las condiciones $x_1 = \dots = x_j = 0$ y $x_{j+1} = \dots = x_k = 0$ respectivamente, es decir,

$$V = 0 \times \mathbb{R}^{n-j} = \{ x \in \mathbb{R}^n / x = (0, \dots, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) \}$$

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n / x = (x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \}$$

Como $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^j \times \mathbb{R}^{n-j}$ entonces si $E = (y_1, \ldots, y_j)$ y $u = (u_{j+1}, \ldots, u_n)$ denotan a las variables en $\mathbb{R}^j$ y $\mathbb{R}^{n-j}$ respectivamente, entonces

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = (0, \ldots, 0, u) \text{ donde } u \in \mathbb{R}^{n-j} \}$$
$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = (y, 0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n, \ y \in \mathbb{R}^j \}$$
$$\text{y} \quad V \cap W = \{ x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = (0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n) \}.$$

5.6(1)

Ahora bien, para todo multiíndice $\alpha$ de la forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, 0, \ldots, 0)$ defínase la función:

$g_\alpha : \mathbb{R}^{n-j} \longrightarrow \mathbb{R}$ como la restricción al conjunto $V = 0 \times \mathbb{R}^{n-j}$ de la función $\dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}$ es decir $g_\alpha(u) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial y^\alpha}(0, u)$, $u \in \mathbb{R}^{n-j}$ ; el símbolo $y^\alpha$ debe interpretarse como $y_1^{\alpha_1}, \ldots, y_j^{\alpha_j}$ puesto que $\alpha_i = 0 \quad \forall i > j$

5.6(2)

Entonces

$\{ g_\alpha$ : donde $g_\alpha$ recorre todos los multiíndices de la forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, 0, \ldots, 0) \}$ resulta ser una sucesión de funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero, pues por hipótesis la función $g$ es $C^\infty$.

Nuevamente las consideraciones hechas en 5.4(1) y 5.4(2), se tiene que existe una sucesión $\{\mu_\alpha\}$ que crece suficientemente rápido a $\infty$ y una función $C^\infty$, $\rho : \mathbb{R}^j \longrightarrow \mathbb{R}$ que garantizan la existencia de una función $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$ $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(y, u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left( \frac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha |y|^2) g_\alpha(u) \right)$$

Como $F$ es $C^\infty$ entonces para todo multiíndice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ se tiene:

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^\beta} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} \left( \frac{y^\alpha}{\alpha!} \rho(\mu_\alpha y) g_\alpha(u) \right)$$

5.6(3)

Ahora de 5.6(1) se tiene que el perador $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}$ coincide con $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^\gamma}\left(\frac{\partial^{|\delta|}}{\partial u^\delta}\right)$ donde $\gamma$ y $\delta$ es el par de multiíndices que satisfacen

$$\gamma_i = \beta_i \quad \forall i \leq j, \qquad \gamma_i = 0 \quad \forall i > j,$$

$$\delta_i = 0 \quad \forall i \leq j \quad \text{y} \quad \delta_i = \beta_i \quad \forall i > j$$

Por lo tanto 5.6(3) puede expresarse en la forma

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}(F)\right)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^{\alpha}}{\alpha!}\rho\,(\mu_{\alpha}y)\frac{\partial^{|\sigma|}g_{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}(u)\right)$$

5.6(4)

Obsérvese que la función $\frac{\partial^{|\sigma|}g_{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}$ es por definición

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^{\alpha}}\bigg|_{0\times\mathbb{R}^{n-j}}\right)$$ pero ésta

última coincide con

$$\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial y^{\alpha}}\right)\right)\bigg|_{0\times\mathbb{R}^{n-j}}\equiv\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}(g)\right)\bigg|_{0\times\mathbb{R}^{n-j}}$$

ya que por hipótesis g es $C^{\infty}$; por lo tanto

$$\frac{\partial^{|\sigma|}g_{\alpha}}{\partial u^{\sigma}}\equiv\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^{\alpha}}\frac{\partial^{|\sigma|}g}{\partial u^{\sigma}}\right)\bigg|_{0\times\mathbb{R}^{n-j}}$$

5.6(5)

Ahora bien, en una vecindad del cero, la función $\rho(\mu_\alpha y)$ se comporta como la función constante uno, de ahí que

$$\frac{\partial^{|\gamma'|}}{\partial y^{\gamma'}}\rho(\mu_\alpha y) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma' = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma' \neq 0 \end{cases}$$

(consulte 5.4(4)); por consiguiente, de 1.7(1) se infiere que en ésta misma vecindad

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\right)\rho(\mu_\alpha y) \equiv \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\dfrac{y^\alpha}{\alpha!} & \text{si } \gamma_i \leq \alpha_i \quad \forall i,\ i \in [1,n] \\ 0 & \text{si } \gamma_i > \alpha_i \text{ para alguna } i,\ i \in [1,n] \end{cases} \qquad 5.6(6)$$

Por lo tanto, de 5.6(5) y 5.6(6) se tiene que en una vecindad del cero la serie dada en 5.6(4) es de la forma

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial \mu^{\sigma}}(F)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|=|\gamma| \\ \alpha_i \geq \gamma_i}}^{\infty} \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^\alpha}{\alpha!}\right)\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|} g}{\partial \mu^{\sigma}}\right)\right)\Bigg/_{0 \times R^{n-j}}$$

5.6(7)

Por lo tanto, si x pertenece a W entonces de 5.6(1) se tiene $x = (y, 0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)$. Luego al evaluar 5.6(3) o equivalentemente 5.6(7) en $x = (y, 0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ se tiene que cada sumando de dicha serie contiene un factor de la forma

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}(g)(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^{\beta}}(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

Pero, por hipótesis las parciales de cualquier orden de las funciones g y $h \equiv 0$ coinciden en $V \cap W$ y como un punto de la forma $(0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ pertenece a $V \cap W$ entonces éste factor es cero, por consiguiente,

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^{\beta}}(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \text{ está en } W.$$

Ahora si x está en V, entonces x es de la forma (0, u) (véase 5.6(1)).

Como $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}} \frac{y^{\alpha}}{\alpha!}$ se anula en $y=0$ para todo multiíndice $\gamma \neq \alpha$ y $\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{y^{\alpha}}{\alpha!}\right)(0)=1$ si $\gamma = \alpha$ (consulte 1.7(2) y 5.4(6)).

Entonces al evaluar la serie dada en 5.6(7) en un punto de la forma $x = (0, u)$ se tiene que el único sumando distinto de cero en dicha serie, es el que corresponde al multiíndice $\gamma = \alpha$, es decir

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}(F)\right)(0,u) = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial u^{\sigma}}(g)\right)(0,u)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^{\beta}}(0,\ u) = \frac{\partial^{|\beta|} g}{\partial x^{\beta}}(0,\ u)$$

(consulte el párrafo previo a 5.6(1)').

Por lo tanto, las parciales de cualquier orden de las funciones F y g coinciden en el subespacio $V = 0 \times \mathbb{R}^{n-j}$.

$\square$

Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función $C^\infty$ en una vecindad del cero y X es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes complejos, entonces la función:

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad c_i \in \mathbb{C}$$ resulta ser nuevamente una función, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$, $C^\infty$ en una vecindad del cero; en consecuencia es posible definir a $X^{k+1}(f)$ como $X(X^k(f))$ $\forall$ $k = 1, 2, \ldots$ y a $X^0$ como el operador identidad, es decir, $X^0(f) = f$.

5.6(8)

Observación

Todo campo vectorial $X = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes complejos, puede ser considerado como un campo vectorial en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la siguiente manera:

Si $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función $C^\infty$ en una vecindad del cero, entonces:

$$X(F) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad 5.6(9)$$

Corolario 5.7

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $C^\infty$ definida en una vecindad del cero de $\mathbb{R}^n$, si $X$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes complejos, entonces existe una función $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface:

a) La restricción de F en $0 \times \mathbb{R}^n$ coincide con la función f

b) En una vecindad del orígen de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ las derivadas parciales de cualquier orden de las funciones $\frac{\partial F}{\partial t}$ y $X(F)$ coinciden en el conjunto $0 \times \mathbb{R}^n$

Demostración

De las hipótesis del Corolario 5.7 y del apartado 5.6(A), sededuce que para toda $k = 0, 1, \ldots$ la función $X^k(f) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, es $C^\infty$ en una vecindad del cero, en consecuencia existen funciones $g_k$ y $h_k$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisfacen:

$$\chi^{k}(f) = g_k + i\, h_k \qquad 5.7(1)$$

Obsérvese que si $k=0$ entonces $f = g + ih$ (consulte 5.6(9). Como las sucesiones $\{g_k\}$ y $\{h_k\}$ satisfacen las hipótesis del Corolario 5.5, entonces la conclusión del mismo afirma que existen funciones $G$ y $H$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ $C^{\infty}$ en una vecindad del cero con la siguiente propiedad:

En una vecindad del cero y para toda $k = 0, 1, \ldots$ se tiene que:

$$\left.\frac{\partial^{k} G}{\partial t^{k}}\right|_{0 \times \mathbb{R}^n} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial^{k} H}{\partial t^{k}}\right|_{0 \times \mathbb{R}^n}$$

coinciden con $g_k$ y $h_k$ respectivamente $\qquad$ 5.7(2)

Si se define la función $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ como $F = G + iH$ entonces $F$ resulta ser una función $C^{\infty}$ en una vecindad del cero y de 5.7(1) y 5.7(2) se infiere que $F(0, x) = G(0, x) + iH(0, x) = g(x) + ih(x) = f(x)$: verificándose así el inciso a del Corolario 5.7.

Como $F(t, x)$ es $C^{\infty}$ entonces para todo número natural $k$ y para todo multiíndice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ se tiene:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x^\beta}\right) \equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial^k F}{\partial t^k}\right)$$

Además la restricción en $0 \times \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial^k F}{\partial t^k}\right) \text{ coincide con } \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\left.\frac{\partial^k F}{\partial t^k}\right|_{0 \times \mathbb{R}^n}\right)$$

Por consiguiente

$$\left.\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right)\right)\right|_{0 \times \mathbb{R}^n} \equiv$$

$$\equiv \left.\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\right)\right)\right|_{0 \times \mathbb{R}^n} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\left.\frac{\partial^{k+1} F}{\partial t^{k+1}}\right|_{0 \times \mathbb{R}^n}\right) \equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\mathcal{X}^{k+1}(f)\right)$$

En el último paso de éstas identidades se aplicó la condición dada en 5.7(2) expresando a $F$ como $G + iH$ y a $\chi^k(f)$ como $g_k + ih_k$ (consulte 5.7(1)).

Por otra parte

$\frac{\partial^K}{\partial t^K}(X(F))$ coincide con $X\left(\frac{\partial^K F}{\partial t^K}\right)$ ya que

$X = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (consulte 5.6(9)) y los operadores

$\frac{\partial^K}{\partial t^K}$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ conmutan ; por consiguiente

$$\left(\frac{\partial^K}{\partial t^K}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\overline{X}(F)\right)\right)\right)\Big|_{0\times\mathbb{R}^n} \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial^K}{\partial t^K}\left(\overline{X}(F)\right)\right)\right)\Big|_{0\times\mathbb{R}^n} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\overline{X}\left(\frac{\partial^K F}{\partial t^K}\right)\right)\Big|_{0\times\mathbb{R}^n} \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\overline{X}\left(\frac{\partial^K F}{\partial t^K}\Big|_{0\times\mathbb{R}^n}\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\overline{X}\left(\overline{X}^K(f)\right)\right) \equiv \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}\left(\overline{X}^{K+1}(f)\right)$$

Por lo tanto, la aseveración hecha en el inciso b del Corolario 5.7 también es verdadera.

□

En virtud del isomorfismo que existe entre $\mathcal{R}^{2k}$ y $\mathcal{C}^{k}$ es posible dar las dos versiones siguientes del Corolario anterior.

Primera versión del Corolario 5.7

Sea $H: \mathcal{C} \times \mathcal{R}^{n} \times \mathcal{C}^{k-1} \longrightarrow \mathcal{C}$ una función $C^{\infty}$ en una vecindad del cero, si X es un campo vectorial en $\mathcal{C} \times \mathcal{R}^{n} \times \mathcal{C}^{k-1}$ con coeficientes complejos, entonces existe una función $G: \mathcal{C} \times \mathcal{R}^{n} \times \mathcal{C}^{k} \longrightarrow \mathcal{C}$ que es $C^{\infty}$ en una vecindad del cero y que satisface:

a) $G(z, x, \lambda', 0) = H(z, x, \lambda')$

b) Las derivadas parciales de cualquier orden de las funciones $\dfrac{\partial G}{\partial \bar{\mu}}$ y X (G) coinciden en el conjunto

$$\left\{(z, x, \lambda', \mu) / _{\mu=0} \ z \in \mathcal{C},\ x \in \mathcal{R}^{n},\ \lambda' \in \mathcal{C}^{k-1},\ \mu \in \mathcal{C}\right\}. \qquad 5.7(3)$$

Segunda versión del Corolario 5.7

Sea $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $C^\infty$ en una vecindad del cero y X un campo vectorial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ con coeficientes complejos, entonces existe una función $C^\infty$ $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface:

c) $F / \mathrm{Im}\, z=0$ coincide con la función H el conjunto $\{(z, x, \lambda) / \mathrm{Im}\ z=0\ \lambda \in \mathbb{C}^k, z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n\}$

d) Las derivadas parciales de las funciones

$\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ y X (F) coinciden en

$\{(z, x, \lambda) / \mathrm{Im}\ z=0, u=0\ \ \lambda \in \mathbb{C}^k, z \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^n\}$

5.7(4)

La demostración de 5.7(3) es análoga a la que se hizo para demostrar el Corolario 5.7. La demostración de 5.7(4) es una combinación del Corólario 5.7 y la primera versión del mismo.

En ambos casos como $X^i$ o H es $C^\infty$ entonces es posible elegir una sucesión $\{\mu_i\}$ que crece suficientemente rápido a $\infty$ y una función $\rho$ de manera que las funciones F y G, mencionadas en 5.7(3) y 5.7(4), puedan ser definidas en la forma:

$$F(z, x, \lambda', u)= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{u}^i}{i!} X^i(H(z, x, \lambda')) \rho(\mu_i |\bar{u}|^2) \qquad 5.7(5)$$

(compare con 5.5(1)).

Lema 5.8 (DE EXTENSION DE NIREMBERG)

Sea $E: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función $C^\infty$ en una vecindad del cero. Entonces existe una función $\overline{E}: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^K \to \mathbb{C}$ que es $C^\infty$ en una vecindad del cero, tal que cualquier punto $(s, x, \lambda)$ en dicha vecindad satisface:

1.- $\overline{E}(s, x, \lambda) = E(s, x)$ $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}^K$ y las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{z}}$ se anulan en los conjuntos

2.- $\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, \operatorname{Im} z = 0 \right\}$

3.- $\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, P_k(z, \lambda) = 0 \right\}$

Demostración

La prueba de éste Lema se hará por inducción sobre el grado del polinomio $P_k$ definido en 5.1(1); en el primer paso de inducción, se probará que una aplicación del Corolario 5.7 es suficiente para garantizar la existencia de una función $\overline{E}$ con las características anotadas en la conclusión de dicho Lema. Haciendo uso del siguiente paso inductivo, se deduce la existencia de una función $F$, con la ayuda de ésta se construye otra función $G$, ambas $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^K$, para finalmente, al aplicar el Corolario 5.6 a estas dos funciones se obtenga una función $\overline{E}$ con las propiedades pedidas en el Lema de Niremberg.

Así pues, a reserva de justificar ésta aseveración más adelante, supóngase que existen funciones $F$ y $G : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^K \longrightarrow \mathbb{C}$ que son $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisfacen:

1') Las derivadas parciales de cualquier orden de las funciones $F$ y $G$ coinciden en el conjunto
$$\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, P_k(z, \lambda) = 0 \right\}$$

2') La función $F$ es una extensión de la función $E$

3') Las derivadas parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto
$$\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, \operatorname{Im} z = 0 \right\}$$

4') Si $H$ es la restricción de $F$ en $\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, P_k(z, \lambda) = 0 \right\}$ entonces las derivadas parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto
$$\left\{ (z, x, \lambda') \,/\, \frac{\partial P_k}{\partial z}(z, \lambda') = 0 \quad \lambda' \in \mathbb{C}^{k-1} \right\}$$

5') Las derivadas parciales de la función $\dfrac{\partial G}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto
$$\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, P_k(z, \lambda) = 0 \right\}$$

5.8(1)

Con éste par de funciones F y G es posible probar la existencia de una función $\overline{E}$ que extiende la función $E$ que posee las condiciones 1 y 2 establecidas en el Lema 5.8.

En efecto, sean $u = P_k(z, \lambda)$ y $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1})$ entonces la función que asocia $(z, \lambda', \lambda_k) \longrightarrow (z, \lambda', u)$ tiene rango $k+1$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}$ (la matríz Jacobiana de ésta función, resulta ser una matríz triangular inferior con unos en la diagonal principal); obsérvese que ésta función es casi la identidad excepto en la última coordenada, por lo que para obtener su Jacobiano basta calcular:

$$\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, k \quad \text{en} \quad z=0$$

de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^k + \sum_{i=1}^{k} z^{k-i}\lambda_i\right) = k z^{k-1} + \sum_{i=1}^{k} (k-i)\lambda_i z^{k-i-1}$$

entonces $$\frac{\partial u}{\partial z}(0) = \lambda_{k-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}(z^k) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(\lambda_j \cdot z^{k_i}\right) = z^{k-j}$$

entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \lambda_j}\right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j=1, \ldots, k-1 \\ 1 & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

Este cambio de coordenadas está dado por un difeomorfismo local y aplicando el Teorema de la Función Inversa se puede decir que con estas nuevas coordenadas

el conjunto $\{ (z, \lambda) / P_k (z, \lambda) = 0 \}$ está dado por la condición $u = 0$ 5.8(2)

Sea $V = \{ (z, x, \lambda', u) / \operatorname{Im} z = 0 \}$ y $W = \{ (z, x, \lambda', u) / u = 0 \}$ donde $z, u \in \mathcal{C}$, $x \in \mathcal{R}^n$ y $\lambda' \in \mathcal{C}^{k-1}$, entonces V y W se intersectan transversalmente en $\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^{k-1} \times \mathcal{C}$, es decir

$V + W = \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^{k-1} \times \mathcal{C}$ y $V \cap W =$

$$= \{ (z, x, \lambda', u) / \operatorname{Im} z = 0 \ \text{y} \ u = 0 \}$$

Como $V \cap W$ está contenido en W, entonces de 1' y 5' en 5.8(1) se deduce que las parciales de cualquier orden de las funciones F y G coinciden en $V \cap W$.

Con la ayuda del isomorfismo que existe entre $\mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^{k-1} \times \mathcal{C}$ y $\mathcal{R}^{2k+2+n}$

es posible aplicar el Corolario 5.6 a las funciones F y G en los subespacios V y W para obtener una función $C^\infty$ en una vecindad del cero, $\bar{E}: \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^{k-1} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

cuyas derivadas parciales de cualquier orden coinciden con:

las derivadas parciales de $F$ en el subespacio $V$,
es decir, en el conjunto $\left\{ (z, x, \lambda', u) \,/\, \mathrm{Im}\ z=0 \right\}$. 5.8(3)

y

las derivadas parciales de $G$ en el subespacio $W$,
es decir, en el conjunto $\left\{ (z, x, \lambda', u) \,/\, u=0 \right\}$. 5.8(4)

Si se considera a $\bar{E}$ como una función de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^k$ en $\mathbb{C}$ y se escribe a $z$ como $z = s + it$ entonces de 5.8(3) y (2') en 5.8(1) se deduce que $\bar{E}(s, x, \lambda) = F(s, x, \lambda)$ y $F(s, x, \lambda) = E(s, x)$ y por transitividad se concluye que $\bar{E}(s, x, \lambda) = E(s, x)$ ; satisfaciéndose así la propiedad 1 del Lema de Niremberg.

Nuevamente por transitividad se concluye (de 5.8(3) y 3' en 5.8(1)) y (5.8(2), 5.8(4) y 5' en 5.8(1)) que las derivadas parciales de la función $\dfrac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los conjuntos $\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, \mathrm{Im}\ z=0 \right\}$ y en el conjunto $\left\{ (z, x, \lambda) \,/\, p_k(z, \lambda) = 0 \right\}$ respectivamente. Verificándose así las propiedades 2 y 3 del Lema 5.8.

Por lo tanto la función $\bar{E}$ es una extensión de la función $E$ con los requisitos que exige el Lema de Extensión de Niremberg.

La demostración de éste Lema se dará por concluída una vez que se pruebe la existencia de las funciones F y G, para ello, resulta indispensable probar la validez de la argumentación inductiva sobre el grado del polinomio $P_k$.

En el primer paso de inducción, como se verá más adelante, resulta innecesaria la presencia de las funciones F y G.

Primer paso de inducción

Si $k=0$ entonces $P_0(z, \lambda) = 1$ (consulte 5.1(2))

por consiguiente

el conjunto $\{(z, \lambda) / P_0(z, \lambda) = 0\}$ es vacío. 5.8(5)

En éste caso se requiere de una función $\bar{E} : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisfaga:

1.- $\bar{E}(s, x) = E(s, x)$ $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

2.- Las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto $\{(z, x) / \operatorname{Im} z=0\}$

Con respecto a la propiedad 3 del Lema 5.8, no hay nada que verificar debido a la consideración hecha en 5.8(5).

NOTA: $\bar{E}$ puede ser considerada como una función de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ en virtud del isomorfismo de $\mathbb{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$ que asocia a $z = s + it$ con la pareja $(t, s)$.

Sea $z = s + it$ y considérese a $X$ como el campo vectorial en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definido por $X = i \dfrac{\partial}{\partial s}$ entonces $X$ y la función $E$ satisfacen las hipótesis del Corolario 5.7: por consiguiente, existe una función

$\bar{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface:

1.- $\bar{E}(0, s, x) = E(s, x)$

2.- Las parciales de cualquier orden de las funciones $\dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t}$ y $i \dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial s}$ coinciden en el conjunto $\{(s + it, x) / t = 0\}$ 5.8(6)

Obsérvese que las condiciones (1) en 5.8(6) y 1 del Lema 5.8 son las mismas, en consecuencia, únicamente queda por verificar que las condiciones (2) en 5.8(6) y 2 del Lema 5.8 son equivalentes. En efecto, en 5.2(11) se justificó la identidad

$$2i \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{z}} \equiv i \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t}$$ por consiguiente del

(2) en 5.8(6) se deduce que las parciales de cualquier orden de la diferencia $i \dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial s} - \dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial t}$ se anulan en el conjunto

$$\left\{ (s + it, x) \;/\; t = 0 \right\}$$ el cual es equivalente al conjunto $\left\{ (z, x) \;/\; \operatorname{Im} z = 0 \right\}$. Por lo tanto, las derivadas parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto $\left\{ (z, x) \;/\; \operatorname{Im} z = 0 \right\}$.

Verificándose así la condición 2 del Lema de Niremberg; ésto concluye el primer paso de Inducción.

Supóngase inductivamente que el Lema ha sido probado hasta orden k-1, esto es $\forall\; i = 0, \ldots, k-1$ existe una función $\bar{E}_i : \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^i \longrightarrow \mathcal{C}$ $C^\infty$ en una vecindad del cero que satisface:

1.- $\bar{E}_i (s, x, \lambda) = E(s, x) \quad s \in \mathcal{R}, \; x \in \mathcal{R}^n,$
$\lambda \in \mathcal{C}^i$

Las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial \bar{\mathcal{E}}_i}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los conjuntos

2.- $\left\{ (z, x, \lambda) \;/\; \operatorname{Im} (z) = 0 \right\}$

3.- $\left\{ (z, x, \lambda) \;/\; P_i (z, \lambda) = 0 \right\}$ 5.8(7)

Existencia de las Funciones $F$ y $G$

Se demostrará la existencia de la función $G$ suponiendo que la función $F$ existe y posteriormente se justifica la existencia de la función $F$.

En las coordenadas $(z, \lambda', u)$ $z \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \mathcal{C}^{k-1}$, $u \in \mathcal{C}$ : el operador $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \left(\overline{\frac{\partial P}{\partial z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}}\right) \qquad 5.8(8)$$

donde $P$ es el polinomio $P_k$ definido en 5.1(1).

En efecto, el plano tangente a la carta en los complejos $(z, \lambda', u)$ está generado por

$$\frac{\partial}{\partial z} = (1, 0, 0, \ldots, 0)\ , \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots,$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{k-1}} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0) \quad \frac{\partial}{\partial u} = (0, \ldots, 0, 1)$$

entonces el Jacobiano de éste cambio de coordenadas, aplicado a $\dfrac{\partial}{\partial z}$ será

$$\left(1, 0, 0, \ldots, \frac{\partial P}{\partial z}\right) = (1, 0, \ldots, 0) + \frac{\partial P}{\partial z}(0, 0, \ldots, 0, 1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

Si recordamos que $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\overline{\dfrac{\partial}{\partial z}}\right)$ entonces claramente $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ se transforma en $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} + \left(\overline{\dfrac{\partial P}{\partial z}}\right)\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}}$

Si suponemos que la función $F$ existe, entonces con éstas coordenadas necesitamos una función $G: \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{C}^{K-1} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que satisfaga:

1' .- Las parciales de cualquier orden de las funciones $F$ y $G$ coinciden en el conjunto $\{(z, x, \lambda', u) / u = 0\}$

5' .- Las parciales de cualquier orden de la función $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \overline{\frac{\partial P}{\partial z}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\right)(G)$ se anulan en el conjunto $\{(z, x, \lambda', u) / u = 0\}$

(compare con 5.8(1) y 5.8(2)).

Una manera de obtener una función $G$ con estas propiedades es la siguiente. Considérese $X$ el campo vectorial dado por $\left(-\overline{\frac{\partial P}{\partial z}}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ y sea $H$ la restricción de $F$ en $u=0$, entonces $H$ resulta ser una función $C^{\infty}$ en una vecindad del cero

Ahora, si aplicamos la primera versión del Lema 5.7 a $H$ y $X$ (ver 5.7(3)), obtendremos una función $G$ $C^{\infty}$ que satisface:

a) $G(z, x, \lambda', 0) = H(z, x, \lambda')$

b) Las parciales de cualquier orden de las funciones $\frac{\partial G}{\partial \bar{u}} / u=0$ y $X(G / u=0)$ coinciden en el conjunto $\{(z, x, \lambda', u) / u=0\}$

Al final de ésta demostración se probará que la función $G$ satisface el inciso 1' de 5.8(1), pues para hacerlo resulta indispensable saber como está definida la función $F$.

Por otra parte, de 5.8(8) se deduce que el inciso b y 5' son equivalentes.

Ahora se prueba la existencia de $F$ en coordenadas $(z, x, \lambda', u)$ es decir, requerimos de una función $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que sea $C^\infty$ en una vecindad del cero con las siguientes propiedades:

2' .- $F(s, x, \lambda', u) = E(s, x)$ $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda' \in \mathbb{C}^{k-1}$, $u \in \mathbb{C}$.

3' .- Las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto $\{(z, x, \lambda') \ / \ \operatorname{Im} z = 0\}$

4' .- Si $H = F / u=0$ entonces las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto $\left\{(z, \lambda') \ / \ \dfrac{\partial P_k}{\partial z}(z, \lambda') = 0, \ \lambda' \in \mathbb{C}^{k-1}\right\}$

Por hipótesis de inducción existe una función $\bar{E}_{k-1}: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ que es $C^\infty$ en una vecindad del cero tal que:

1) $\bar{E}_{k-1}$ es una extensión de $E$

2) Las parciales de cualquier orden de la función

$\dfrac{\partial \bar{E}_{k-1}}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los cojuntos

$\{ (z, x, \lambda) \ / \ \mathrm{Im} \ z=0 \}$

3) $\{ (z, x, \lambda') \ / \ P_{k-1} \ (z, \lambda') = 0 \}$

Si consideramos $u=0$ entonces el cambio de coordenadas que asocia $\lambda'$ con $\lambda''$ donde

$$\lambda' = (\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots, \lambda_{k-1}) \ \text{ y } \ \lambda'' = \left( \frac{\lambda_1}{k-1}, \frac{\lambda_2}{k-2}, \ldots, \frac{\lambda_{k-1}}{1} \right)$$

establece un isomorfismo en $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{k-1}$

que asocia a $(z, x, \lambda')$ con $(z, x, \lambda'')$. Esto nos permite pensar a $\bar{E}_{k-1}$ como una función $H$ en las coordenadas $(z, x, \lambda'')$ y reescribir las propiedades de $\bar{E}_{k-1}$ en términos de $H$, de la siguiente manera. $H$ es una función $C^{\infty}$ en una vecindad del cero que va de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que:

I) $H(s, x, \lambda'') = E(s, x)$ $s \in \mathbb{R}$ , $x \in \mathbb{R}^n$ , $\lambda'' \in \mathbb{C}^{k-1}$

Las derivadas parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}}$ se anulan en los conjuntos

II) $\{ (z, x, \lambda'') \ / \ \mathrm{Im} \ z=0 \}$

III) $\left\{ (z, x, \lambda'') \;/\; P_{k-1}(z, \lambda'') = 0 \right\}$

A fin de aplicar la segunda versión del Corolario 5.7 al campo vectorial $X = \left( - \dfrac{\overline{\partial \rho}}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ y a la función H, considérese a ésta última como una función $C^{\infty}$, pero en las variables $(z, x, \lambda')$ que difiere de la anterior por un difeomorfismo, entonces con estas coordenadas obtenemos una función $F(z, x, \lambda', u)$ tal que

c) Las funciones F y H coinciden en el conjunto

$$\left\{ (z, x, \lambda', u) \;/\; \mathrm{Im}\ z=0 \ \text{ y } \ u=0 \right\}$$

d) Las derivadas de cualquier orden de la función

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \;/\; \mathrm{Im}\ z=0 \quad \text{y} \quad X(F) \;/\; \mathrm{Im}\ z=0$$

coinciden en el conjunto

$$\left\{ (z, x, \lambda', u) \;/\; \mathrm{Im}\ z=0 \ \text{ y } \ u=0 \right\}$$

(consulte 5.7(4)).

Del inciso c y I se tiene que la función F es una extensión de la función E, satisfaciéndose así 2' en 5.8(1). De 5.8(B) se infiere que el inciso d y 3' en 5.8(1) son equivalentes.

Por último, de III se tiene que en $u=0$ F coincide con H y como

$$\begin{aligned} k\,(P_{k-1}(z, \lambda')) &= kz^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} k\,\lambda_i\, z^{k-i-1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} z^{k} + \sum_{i=1}^{k-1} k\,\frac{\lambda_i}{k-i}\,\frac{\partial}{\partial z} z^{k-i} = \\ &= \frac{\partial P_{k-1}}{\partial z}(z, k\,\lambda'') \end{aligned}$$

Por lo tanto las parciales de cualquier orden de la función $\dfrac{\partial H}{\partial \bar{z}}$ se anulan en el conjunto

$$\left\{ (z,\ k\,\lambda'') \;/\; \frac{\partial P_k}{\partial z}(z,\ k\,\lambda'') \equiv 0 \right\}$$

verificándose así 4' en 5.8(1).

Justificación de 1' en 5.8(1).-

Como $H$ es la restricción de $F$ y $G$ en el conjunto $\left\{ (z,\ x,\ \lambda',\ u) \;/\; u=0 \right\}$ entonces del modo en que se definió el campo vectorial $X$ y de los apartados 5.7(1)-5.7(5) se tiene que para todo número natural $j$

$\dfrac{\partial^j F}{\partial \bar{u}^j}$ y $\dfrac{\partial^j G}{\partial \bar{u}^j}$ coinciden con $X^j(H)$ en el conjunto

$$\left\{ (z,\ x,\ \lambda',\ u) \;/\; u=0 \right\}$$

Como $F$ y $G$ son $C^\infty$ en una vecindad del cero, entonces $\forall\ i,\ j \in \mathbb{N}$, $\forall\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $\forall\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})$ se tiene que:

$$\left(\frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{j} F}{\partial \bar{u}^{j}}\right)\right)\right)\right)\Bigg/_{u=0} \quad y$$

$$\left(\frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{j} G}{\partial \bar{u}^{j}}\right)\right)\right)\right)\Bigg/_{u=0}$$

coinciden con

$$\frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{j} F}{\partial \bar{u}^{j}}\Bigg/_{u=0}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\underline{X}^{j}(H)\right)\right)\right) \quad y$$

$$\frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\frac{\partial^{j} G}{\partial \bar{u}^{j}}\Bigg/_{u=0}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial^{i}}{\partial \bar{z}^{i}}\left(\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial \lambda'^{\gamma}}\left(\overline{X}^{j}(H)\right)\right)\right)$$

respectivamente. Por lo tanto, la condición dada en 1' de 5.8(1) también es verdadera.

Esto completa la prueba del Lema 5.8, así como la prueba del Teorema de División Polinomial, pues las consideraciones posteriores a 5.3(7) así lo establecen.

$\square$

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el principal resultado de éste Capítulo, pero antes recordaremos algunos conceptos que nos ayudarán a conseguir éste propósito.

$E_n$ es un anillo local cuyo ideal maximal es $M_n$ (consulte Teorema 1.3).

Si $f: \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^t$ es una función $C^\infty$ en una vecindad del cero con $f(0)=0$ entonces $f$ induce un homomorfismo de anillos $f^*: E_t \longrightarrow E_s$ definida como $f^*(\eta) = \eta \circ f$ 5.8(9)

Más aún $f^*$ resulta ser un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras (consulte Proposición 1.17).

Sea $f: A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y $M$ un $B$-módulo, entonces $M$ tiene inducida una estructura de $A$-módulo. 5.8(10)

En efecto, si $a \in A$, $m \in M$ definimos $am = f(a)m$, éste producto tiene sentido ya que $f(a) \in B$ y $M$ es un $B$-módulo (la justificación es análoga a la hecha en la Proposición 1.17).

Sea $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ la proyección sobre el segundo factor, entonces $p$ induce un homomorfismo de anillos $p^*: E_s \longrightarrow E_{n+s}$ donde $p^*(\eta) = \eta \circ p$ 5.8(11)

(consulte 1.17(1)).

Si M es un $E_{n+s}$ módulo, entonces $\underline{M}$ denotará al mismo conjunto M pero visto como un $E_s$-módulo con la estructura inducida por el homomorfismo $n^*$ 5.8(12)

(consulte 1.17(2).

Teorema 5.9 (DE PREPARACION)

Supóngase que:

1.- $M$ es un módulo finitamente generado sobre el anillo $E_{n+s}$

2.- $M / p^* (M_s) M$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$.

Conclusión: $\underline{M}$ es un módulo finitamente generado sobre el anillo $E_s$.

Demostración

Se hace en dos pasos:

Paso 1:

Sean $t: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ y $p_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ las proyecciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^s$ respectivamente

5.9(1)

En primer lugar se probará el Teorema para $n=1$, en cuyo caso $M$ será un $E_{s+1}$ módulo finitamente generado. Si se escribe $p=p_1$ entonces $M / p^* (M_s) M$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión finita; con éstas hipótesis probaremos que $\underline{M}$ es un $E_s$-módulo finitamente generado.

Considérese una base de $M / p^* (M_s) M$ $\left\{ \underline{b_1}, \underline{b_2}, \ldots, \underline{b_q} \right\}$ entonces $b_1, \ldots, b_q$ generan a $M$ como $E_{s+1}$-módulo. 5.9(2)

En efecto, sea $N$ el $E_{s+1}$-módulo generado por $b_1, b_2, \ldots, b_q$. Como $p^* : E_s \longrightarrow E_{s+1}$ es un homomorfismo de anillos, entonces $p^* (M_s) \subset M_{s+1}$, ésto implica que $M \subset N + M_{s+1} M$ ya que por hipótesis $M = N + p^* (M_s) M$ pero $M$ y $N$ son $E_{s+1}$-módulos, ambos finitamente generados y $M_{s+1}$ es el ideal maximal del anillo local $E_{s+1}$, entonces del Lema de Nakayama 1.18 se concluye que $M=N$.

Ahora bien como $\left\{ \underline{b_1}, \underline{b_2}, \ldots, \underline{b_q} \right\}$ es una base de $M / p^* (M_s) M$ entonces cualquier elemento del módulo $M$ puede expresarse en la forma

$\underline{b} = \sum_{j=1}^{q} aj \, \underline{bj} = \underline{\sum_{j=1}^{q} aj \, bj}$ ésto significa que

$b - \sum_{j=1}^{q} aj \, bj \in p^* (M_s) M$ en consecuencia

$b = \sum_{j=1}^{q} aj \, bj + \sum_{j=1}^{q} \alpha j \, bj$ donde $aj \in \mathbb{R}$ y $\alpha j \in p^*(M_s)$

5.9(3)

Esto es $\alpha_j = p^*(\eta_j) = \eta_j \circ p$ para algún $\eta_j \in M_s$ esto implica que $\eta_j(0)=0$ por lo tanto

$$\alpha_j(t, 0) = 0 \qquad 5.9(4)$$

Ahora bien, el germen de la proyección t definido en 5.9(1) pertenece al anillo $E_{s+1}$, como M es un $E_{s+1}$ módulo y $b_i$ pertenece a M entonces $tb_i \in M$ $\forall$ i=1, 2 ,..., q y por 5.9(3) se tiene que

$$tb_i = \sum_{j=1}^{q} ( a_{ij} + \alpha_{ij} ) b_j \qquad 5.9(5)$$

Considérese la matríz de q x q

$$A = tI - ( a_{ij} ) - ( \alpha_{ij} ) \qquad 5.9(6)$$

entonces existe una matríz B de q x q tal que BA= (det A) I

En efecto sea f el polinomio característico de A, entonces f(A) = 0 esto implica que:

$A^q + C_{q-1} A^{q-1} + \dots + C_1 A + DI = 0$ donde D = det A entonces $(\det A) I = -(A^{q-1} + \dots + C_1 I) A = BA$ o bien

$$DI = BA \qquad 5.9(7)$$

Si b denota al vector columna $(b_1, \dots, b_q)$

($b_i$ como en 5.9(2)); entonces de 5.9(6) se deduce que $Ab$ es el vector cero, pues cada una de sus coordenadas es de la forma

$$tb_i - \sum_{j=1}^{q} ( a_{ij} + \alpha_{ij} ) b_j$$

Luego de 5.9(7) se deduce que

$DIb = B ( Ab ) = b (0) = 0$ ; en consecuencia $DM = 0$ ésto significa que $DE_{s+1}$ es un ideal del anillo $E_{s+1}$, en consecuencia el cociente $E_{s+1} / DE_{s+1}$ es un anillo.

Afirmamos que M tiene una estructura de $E_{s+1} / DE_{s+1}$ módulo finitamente generado. En efecto, si $\alpha \in E_{s+1}$ y $\underline{\alpha}$ es su clase en el cociente $E_{s+1} / DE_{s+1}$ entonces definimos $\underline{\alpha}\, m = \alpha\, m$ donde $m$ $M$. Este producto está bien definido ya que si $\underline{\alpha}\, m = \underline{\beta}\, m$ entonces $\alpha - \beta \in DE_{s+1}$, $( \alpha - \beta )m=0$ de donde $\alpha m = \beta\, m$

Este producto induce en M una estructura de módulo sobre el anillo $E_{s+1} / DE_{s+1}$ y como M es finitamente generado sobre $E_{s+1}$, entonces M también es finitamente generado como $E_{s+1} / DE_{s+1}$ módulo. De hecho, el conjunto de generadores en ambos casos es el mismo.

Al restringir el polinomio característico de la matríz A al conjunto $\mathcal{R} \times 0$ se transforma en el polinomio característico de la matríz $tI - (a_{ij})$ ya que

$\alpha_{ij} (t, 0) = 0$ (vea 5.9(4)).

Al desarrollar pormenores se tiene que el polinomio característico de $tI - (a_{ij})$ puede expresarse en la forma $f(t) = t^q + \dots + C_1 t + C_0$ como $D = \det(A)$ entonces $D/_{\mathbb{R}\times 0}$ resulta ser un polinomio mónico de orden $q$.

Ahora bien $\frac{\partial^q D}{\partial t^q}(t, 0) = q!$ que es diferente

de cero, lo que significa que $D$ es una función k-regular para $k \leq q$, ésto nos permite expresar a $D$ como sigue:
$D(t,0) = d(t)\, t^k$ donde $d(0) \neq 0$ y tanto $d$ como $D$ son funciones $C^\infty$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^{s+1}$ respectivamente.

Por último mostraremos que $E_{s+1} / DE_{s+1}$ está finitamente generado sobre el anillo $E_s$. En efecto, sea $e \in E_{s+1}$, como $e$ es $C^\infty$ de acuerdo con el Teorema de División 5.1, tenemos

$$e = QD + \sum_{i=0}^{k-1} r_i t_i \text{ , donde } Q \in E_{s+1} \text{ y}$$

$r_i \in E_s$, entonces al considerar sus clases en el anillo $E_{s+1} / DE_{s+1}$ se tiene

$$\underline{e} = \underline{QD} + \sum_{i=0}^{k-1} \underline{r_i}\, \underline{t^i} = \sum_{i=0}^{k-1} \underline{r_i\ t^i} \qquad \text{ya que}$$

$DQ \in DE_{s+1}$ esto significa

$\underline{t_0}, \underline{t_1}, \dots, \underline{t_{k-1}}$ generan a $E_{s+1} / DE_{s+1}$ como un $E_s$ módulo.

Sintetizando tenemos que $\underline{M}$ es un $E_{s+1} / DE_{s+1}$ módulo finitamente generado y $E_{s+1} / DE_{s+1}$ es un módulo finitamente generado sobre $E_s$, entonces por transitividad se tiene que $\underline{M}$ es finitamente generado como $E_s$ módulo.

Paso 2

Factorícese la proyección $p: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ como composición de n-proyecciones de la siguiente manera para $i=1, 2, \ldots, n$, considérese

$P_{i+1} : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^i$ ésto es

$P_{i+1}(x_1, \ldots, x_{s+i+1}) = (x_1, \ldots, x_{s+i})$ entonces

la composición $P_{i+1} \circ \ldots \circ P_n$ es la proyección de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^i$ 5.9(8)

En consecuencia de 5.8(11) se tiene que

el homomorfismo de anillos

$(P_{i+1} \circ \ldots \circ P_n)^* : E_{s+i} \longrightarrow E_{s+n}$

induce sobre M una estructura de $E_{s+i}$ módulo 5.9(9)

Obsérvese que el homomorfismo $(P_{i+1} \circ P_{i+2})^*$ coincide con la composición de homomorfismos $P_{i+2}^* \circ P_{i+1}^*$ 5.9(10)

En efecto, si $\eta$ pertenece al anillo $E_{s+i}$ entonces $P_{i+1}^*(\eta) = \eta \circ P_{i+1}$ es un germen del anillo $E_{s+i+1}$ (consulte 5,8(11)).

Luego, tiene sentido la composición $P_{i+1}^*(\eta) \circ P_{i+2}$, ésto justifica las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(P_{i+1} \circ P_{i+2})^*(\eta) &= \eta \circ (P_{i+1} \circ P_{i+2}) = \\
&= (\eta \circ P_{i+1}) \circ P_{i+2} = \\
&= P_{i+2}^*(\eta \circ P_{i+1}) = P_{i+2}^*(P_{i+1}^*(\eta)) = \\
&= (P_{i+2}^* \circ P_{i+1}^*)(\eta)
\end{aligned}
$$

Si se hace $i=0$ entonces en 5.9(8) se obtiene la proyección original $p: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$ como la composición de todas las proyecciones, ésto es, $p = P_1 \circ \ldots \circ P_n$ y de 5.9(9) se tiene que el homomorfismo $p^* = (P_1 \circ \ldots \circ P_n)^*$ induce sobre M una estructura de $E_s$ módulo.

Por lo tanto, únicamente queda por demostrar que M es finitamente generado sobre el anillo $E_s$. La demostración se hace por inducción decreciente sobre $n-i$, es decir, $\forall$ $i = 0, 1, \ldots, n$ se probará que M es un módulo finitamente generado sobre el anillo $E_{s+n-i}$.

En efecto, para $i=0$ la hipótesis uno del Teorema 5.9 afirma que M es un módulo finitamente generado sobre el anillo $E_{s+n}$.

Ahora supóngase inductivamente que M es un $E_{s+i+1}$ módulo finitamente generado y que para $\pi = P_1 \circ \cdots \circ P_{i+1}$ el cociente $M/\pi^*(M_s)M$ es un $\mathcal{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Con éstas hipótesis se desea probar que M es un $E_{s+i}$ módulo finitamente generado; para conseguirlo, procédase de la siguiente manera:

Obsérvese en primer lugar que el homomorfismo $P_{i+1}^*: E_{s+i} \longrightarrow E_{s+i+1}$ induce sobre M una estructura de $E_{s+i}$ módulo (véase 5.9(9)).

Por otro lado, la imágen del ideal $M_{s+j}$ bajo el homomorfismo $P_{j+1}^*$ está contenida en el ideal maximal $M_{s+j+1}$ $\forall$ $j = 0, 1 \ldots$ , simbólicamente:

$$P_{j+1}^*(M_{s+j}) \subset M_{s+j+1} \qquad 5.9(11)$$

Ahora de 5.9(10) se tiene que el homomorfismo $\pi^*$ puede factorizarse en la forma $P_{i+1}^* \circ (P_1 \circ \cdots \circ P_i)^*$.

Luego al aplicar i-veces 5.9(11) se tiene que $(P_1 \circ \cdots \circ P_i)^*(M_s) \subset M_{s+i}$ y al aplicar el homomorfismo $P_{i+1}^*$ en ambos lados de ésta contención, s e concluye que $(P_{i+1}^* \circ (P_1 \circ \cdots \circ P_i)^*)(M_s = \pi^*(M_s) \subset P_{i+1}^*(M_{s+i}))$ por consiguiente, el $E_s$ módulo $\pi(M_s)M$ está contenido en el $E_{s+i}$ módulo $P_{i+1}^*(M_{s+i})M$. Por lo tanto, el $\mathcal{R}$-espacio vectorial $M/\pi^*(M_s)M$ se proyecta sobre el $\mathcal{R}$- espacio vectorial $M/P_{i+1}^*(M_{s+i})M$ ,ésto significa que la dimensión de éste último es menor o igual que la dimensión del primero, pero la dimensión de $M / \mathcal{P}^{\psi}(N_s)M$ es finita por hipótesis de inducción; luego resulta que $M / P_{i+1}{}^{\psi}(N_{s+i})M$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Sintetizando, $M$ es un $E_{s+i+1}$ módulo finitamente generado, $M / P_{i+1}{}^{\psi}(N_{s+i})M$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $M$ también es un $E_{s+i}$ módulo vía el homomorfismo $P_{i+1}{}^{*}$

Estas son precisamente las hipótesis que se requieren para aplicar el paso uno; después de hacerlo, es posible considerar a $M$ como un $E_{s+i}$ módulo finitamente generado, ésto completa el paso inductivo, así como la prueba del Teorema, ya que para $i=0$ se obtiene la conclusión del Teorema 5.9.

$\square$

Para la formulación del Corolario 5.10, considérense las 5 hipótesis siguientes:

1.- A es un $E_s$ módulo finitamente generado

2.- B es un $E_{n+s}$ módulo

3.- C es un $E_{n+s}$ módulo finitamente generado

4.- $\alpha : A \longrightarrow C$ es un homomorfismo de grupos

5.- $\beta : B \longrightarrow C$ es un $E_{n+s}$ homomorfismo de módulos

5.9(12)

Definición

Sea $\alpha : A \longrightarrow C$ un homomorfismo de grupos, A y C como en 1 y 3 de 5.9(12), si $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ es la proyección sobre el segundo factor, entonces se dice que $p^*: E_s \longrightarrow E_{s+n}$ es un homomorfismo mezclado de tipo finito o una mezcla si $\alpha(\eta a) = p^*(\eta)\alpha(a)$ para $\eta \in E_s$ y a A

5.9(13)

Esta definición puede sintetizarse con el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] & C \\
E_s \arrow[u] \arrow[r, "p^*"'] & E_{n+s} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Por sconsiguiente, $\alpha$ es un homomorfismo mezclado sobre $p^*$ siempre y cuando el diagrama anterior sea conmutativo, en otras palabras,

$$\alpha(\eta a) = p^*(\eta)\,\alpha(a)$$

Corolario 5.10

Con las hipótesis formuladas en 5.8(11) y 5.9(12), supóngase que el módulo C satisface la igualdad
$C = \alpha(A) + \beta(B) + p^{*}(M_s)\, C$ entonces
$C = \alpha(A) + \beta(B)$.

Demostración.

Probaremos que

el módulo $C' = C / \beta(B)$ está finitamente generado sobre $E_{n+s}$ 5.10(1)

y que

$C' / p^{*}(M_s)\, C'$ es un espacio vectorial de dimensión finita 5.10(2)

entonces por el Teorema de Preparación 5.9, se deducirá que el módulo $C'$ está finitamente generado sobre el anillo $E_s$ ; la conclusión final será una consecuencia del Lema de Nakayama.

Justificación de 5.10(1)

De 2 y 5 en 5.9(12) se tiene que $\beta(B)$ es un submódulo de $C$ entonces el cociente $C / \beta(B)$ es un $E_{n+s}$ módulo.

Sea $\rho : C \to C' = C / \beta(B)$ el epimorfismo canónico, entonces por la hi_pótesis 3 en 5.9(12) existen k-elementos $C_1, \ldots, C_k$ en $C$ tales que cada elemento del módulo $C$ tiene una expresión de la forma:

$C = \sum_{i=1}^{k} \xi_i C_i$ donde $\xi_i \in E_{n+s}$ en consecuencia

$$\rho(C) = \rho\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_i C_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \rho(\xi_i C_i) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \rho(C_i)$$

ésto significa que $\rho(C_1), \ldots, \rho(C_k)$ generan a $C'$ como un $E_{n+s}$ módulo ; justificando así la aseveración hecha en 5.10(1).

Ahora de 5.8(11) se tiene que el homomorfismo $p^*: E_s \longrightarrow E_{n+s}$ induce una estructura sobre $C'$ de $E_s$ módulo (denotaremos a $C'$ con la estructura de $E_s$ módulo como $\underline{C'}$ (véase 5.8(12)) , entonces

$$p^*(M_s)\, C' \text{ es isomorfo con } M_s \underline{C'} \tag{5.10(3)}$$

Por hipótesis $C = \alpha(A) + \beta(B) + p^*(M_s)\, C$ y como $\rho$ es un homomorfismo de $E_{n+s}$ módulos entonces

$$\begin{aligned}
\rho(C) &= \rho\,(\alpha(A) + \beta(B) + p^*(M_s)\, C\,) = \\
&= \rho(\alpha(A)) + \rho(\beta(B)) + \rho\,(\,p^*(M_s)\, C\,) = \\
&= \rho\,(\alpha(A)) + p^*(M_s)\, \rho(C) = \\
&= \rho\,(\alpha(A)) + p^*(M_s)\, C'
\end{aligned}$$

$\{ c_i \}$ generan a $\underline{C}' / M_s \underline{C}'$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

En consecuencia, de 5.10(3) se tiene que $C' / p^*(M_s) C'$ también es un espacio vectorial de dimensión finita, ésta última aseveración y la hecha en 5.10(1), satisfacen las hipótesis del Teorema de Preparación. Por lo tanto, $\underline{C}'$ es un $E_s$ módulo finitamente generado.

Finalmente, es posible aplicar el Lema de Nakayama 1.18 a la igualdad 5.10(4) $\underline{C}' = \rho(\alpha(\underline{A})) + M_s\underline{C}'$ ya que $\rho(\alpha(A))$ y $\underline{C}'$ son $E_s$ módulos, éste último finitamente generado, para obtener $\underline{C}' = \rho(\alpha(\underline{A}))$ ; pero si consideramos en ésta igualdad a $\underline{C}'$ como $E_{n+s}$ módulo tenemos $C' = \rho(\alpha(A))$ , es decir, $C / \beta(B) = \rho(\alpha(A))$ como $\beta(B)$ es el núcleo del epimorfismo $\rho$ entonces

$(C = \alpha(A)) \bmod \beta(B)$ por lo tanto

$C = \alpha(A) + \beta(B)$ .

$\square$

nota.- La página 293, se encuentra entre la pág. 299 y 298 por error de engargolado

Teorema 5.11

Sea $f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^t$ una función $C^\infty$ en una vecindad del cero tal que $f(0)=0$ ; supóngase que $M$ es un $E_s$ módulo finitamente generado, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $M$ es un $E_t$ módulo finitamente generado

b) $M / f^*(M_t)M$ es un espacio vectorial de dimensión finita

Demostración

$a \Rightarrow b$

En primer lugar obsérvese que todo germen $\eta$ del anillo local $E_t$ puede expresarse en la forma

$\eta(0) + (\eta - \eta(0))$ donde $\eta(0)$ es la parte constante del germen $\eta$ en el origen, y en consecuencia

$\eta - \eta(0) \in M_t$ .

Por otra parte, $M$ es un $E_t$ módulo finitamente generado, entonces existe un conjunto finito de generadores $\{ m_1 , \ldots, m_p \}$ tales que cualquier elemento de m puede expresarse en la forma $\sum_{i=1}^{p} \eta_i m_i$ donde $\eta_i \in E_t$ $m_i \in M$ o bien $\sum_{i=1}^{p} \eta_i(0)\, m_i + \sum_{i=1}^{p} (\eta_i - \eta_i(0))m_i$ .

Por consiguiente, si se considera a M como un $E_t$ módulo con la estructura inducida por el homomorfismo $f^*$ (consulte 5.8(9)) entonces cada elemento del cociente $\dfrac{M}{f^*(M_t)M}$

puede expresarse en la forma :

$\sum_{i=1}^{p} f^* \eta_i(0) \{ m_i \}$ ya que

$f^*( \eta_i - \eta_i(0)) \in f^*(M_t)$ por lo tanto $\dfrac{M}{f^*(M_t)}$

resulta ser un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

b $\Rightarrow$ a

Como cualquier función de $\mathbb{R}^s$ en $\mathbb{R}^t$ puede expresarse como la composición de una inmersión de $\mathbb{R}^s$ en $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ seguida de la proyección sobre el segundo factor, entonces será suficiente demostrar la generalización del Teorema 5.9 para inmersiones, ya que el problema para proyecciones nos lo resuelve el Teorema 5.9. Luego entonces, únicamente probaremos que M es un $E_{s+t}$ módulo finitamente generado y que $M / p^*(M_t) M$ es un espacio vectorial de dimensión finita para concluír que M es un ${}_F E_t$ módulo finitamente generado.

Sea $F: \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ la inmersión de f definida como $F(x) = (x, f(x))$ es decir

$$F = Id \times f \qquad 5.11(1)$$

la función $F$ definida de ésta manera es $C^{\infty}$ en una vecindad del cero, ya que por hipótesis $f$ es $C^{\infty}$ y la identidad en $\mathbb{R}^s$ también lo es. Obsérvese que si $p: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^t$ es la proyección sobre el segundo factor entonces:

$$f = p \circ F \qquad 5.11(2)$$

Ahora bien de 5.8(9) se tiene que el homomorfismo de anillos $F^*: E_{s+t} \longrightarrow E_s$ dado por

$$F^*(\eta) = \eta \circ F = \eta \circ (\, Id \times f \,) \qquad 5.11(3)$$

induce sobre $M$ una estructura de $E_{s+t}$ módulo. Luego, para probar que con ésta estructura $M$ es un módulo finitamente generado, considérese el homomorfismo $P_s^*: E_s \longrightarrow E_{s+t}$ donde $P_s$ es la proyección de $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ en $\mathbb{R}^s$ sobre el primer factor (consulte 5.8(11)) y obsérvese que
$P_s^*(\xi) = \xi \circ P_s$ es un germen del anillo $E_{s+t}$ $\forall \xi \in E_t$
entonces de 5.11(3) se tiene que

$$F^*(P_s^*(\xi)) = (\xi \circ P_s) \circ (Id \times f) = \xi \circ Id = \xi \qquad 5.11(4)$$

(ésto prueba que $F^*$ es un epimorfismo)

Por consiguiente si $\{M_1, \dots, M_k\}$ es un conjunto de generadores del módulo $M$ sobre el anillo $E_s$ entonces

Finalmente, de la hipótesis dada en el inciso b de 5.11(6) se tiene que $M / F^{\not{}}(p^{\not{}}(M_t))M = M / f^{\not{}}(M_t)M$ es un $\mathcal{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, el cual es isomorfo según 5.11(5) al cociente $M / p^{\not{}}(M_t)M$ ; en consecuencia, éste último también resulta ser un $\mathcal{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Por lo tanto, como se aseguró en un principio, es posible aplicar el Teorema de Preparación 5.9 al $E_{s+t}$ módulo $M$ finitamente generado y al $\mathcal{R}$-espacio vectorial de dimensión finita $M / p^{\not{}}(M_t)M$ para concluír que $M$ es un $E_t$ módulo finitamente generado.

$\square$

nota.- La página 298, se encuentra entre las pág 293 y 300. por error de engargolado.

Pues por una parte el núcleo de $\rho$ es por definición $\beta(B)$ y por la otra, de 5.10(3) se tiene que $\rho(p^{*}(M_s)C) = p^{*}(M_s)\rho(C) = p^{*}(M_s)C'$ ; por consiguiente $C' = \rho(\alpha(A) + p^{*}(M_s)C'$ y al considerar a $C'$ como $E_s$ módulo vía el homomorfismo $p^{*}$, de 5.10(3) se obtiene:

$$\underline{C}' = \rho(\alpha(\underline{A}) + M_s\,\underline{C}' \qquad 5.10(4)$$

Por hipótesis, $A$ es un $E_s$ módulo finitamente generado (consulte 1 en 5.9(12)) entonces el cociente $\underline{C}'/M_s\underline{C}'$ es un $E_s$ módulo finitamente generado. Los generadores de $A$, generan a $\rho(\alpha(A))$ y éstos últimos generan a $\underline{C}'$ ( mod $M_s\underline{C}'$ ) por consiguiente es posible dseleccionar un conjunto finito de generadores $\{C_i\}_{i=1}^{r}$ del $E_s$ módulo $\underline{C}'/M_s\underline{C}'$ con el cual puede expresarse a cada elemento de $\underline{C}'/M_s\underline{C}'$ en la forma:

$C = \sum_{i=1}^{r} \eta_i \cdot C_i$ módulo $M_s\underline{C}'$ donde $\eta_i \in E_s$ como

$\eta_i = \eta_i(0) + (\eta_i - \eta_i(0))$ claramente

$\eta_i - \eta_i(0) \in M_s$ entonces

$$C = \sum_{i=1}^{r} \eta_i(0)\,.\,C_i + \sum_{i=1}^{r} \eta_i - \eta_i(0)\,C_i + \eta\, C'$$

donde $\eta \in M_s$ y $c' \in \underline{C}'$ . Como $\eta_i - \eta_i(0)C_i + \eta C'$ es un elemento de $M_s\underline{C}'$ y $\eta_i(0) \in \mathbb{R}$ entonces $C = \sum \eta_i(0)C_i$ módulo $M_s\underline{C}'$ , ésto significa que las de 5.11(4) se tiene que cualquier elemento de $M$ puede expresarse en la forma

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i m_i = \sum_{i=1}^{k} F^*(p_s^*(\xi_i))\, m_i$$

(el miembro izquierdo como $E_s$ módulo y el miembro derecho como $E_{s+t}$ módulo) por lo tanto $M$ es un $E_{s+t}$ módulo finitamente generado.

Por otra parte:

el homomorfismo $F^*$ establece un isomorfismo entre el $E_t$ módulo $p^*(M_t)M$ y el $E_{s+t}$ módulo $F^*(p^*(M_t))M$ 5.11(5)

En efecto, de 5.8(9) y 5.8(11) se infiere que los homomorfismos $f^*$ y $p^*$ inducen sobre $M$ una estructura de $E_t$ módulo.

Luego si $\mu$ pertenece al ideal $M_t$ entonces $p^*(\mu) = \mu \circ p$ es un germen del ideal $M_{s+t}$. En consecuencia,
$F^*(p^*(\mu)) = (\mu \circ p) \circ (\mathrm{Id} \times f) = \mu \circ f = f^*(\mu)$ es un germen en el ideal maximal $M_s$ debido a que por hipótesis la función $f$ se anula en el orígen; por consiguiente,
$p^*(M_t)$ es isomorfo a

$$F^*(\,p^*(M_t)\,) = f^*(M_t) \qquad 5.11(6)$$

ésto justifica 5.11(5).

# CAPITULO VI

## DESDOBLES

En el presente capítulo se estudian aquellos gérmenes que pertenecen a los anillos $E_{n+s}$ cuyas restricciones en $\mathbb{R}^n \times 0$ coinciden con un germen dado del anillo de gérmenes $E_n$. A dichos gérmenes los llamaremos desdobles de un germen fijo de $E_n$.

La Definición 6.1(3) y 6.1(4) nos permite introducir los conceptos de Desdobles Universales y Desdobles Isomorfos.

Para gérmenes que pertenecen al ideal $M^2 = M_n^2$ se construye otro germen denominado "Prolongación Natural del Germen", cuyo k-jet es transversal a la imágen de $M\Delta$ en el espacio de k-jets donde $M$ denota el ideal maximal de $E_n$ y $\Delta$ el ideal Jacobiano del germen.. Dicho germen está suficientemente próximo a nuestro germen original. Siendo éste el objetivo de la Proposición 6.2.

Con la generalización de éste concepto a desdobles, se introduce la noción de desdobles k-transversales. La Proposición 6.4 nos proporciona un criterio para determinar cuando un desdoble es k-transversal.

En tanto que el Corolario 6.5 nos garantiza la existencia de desdobles k-transversales para gérmenes de determinación finita; ésta será la hipótesis en todos los resultados subsecuentes.

La Proposición 6.8 establece que todo desdoble universal es k-transversal y al mismo tiempo proporciona una cota inferior para el número de parámetros del desdoble; las condiciones bajo las cuales dos desdobles son isomorfos nos las proporcionan la

Proposición 6.7 y el Teorema 6.9.

La equivalencia de desdoble universal y desdoble k-transversal la exhibe el Teorema 6.10.

Finalmente, la tesis del último resultado de éste capítulo es la existencia de un desdoble universal con el mínimo número posible de parámetros, a saber el número que corresponde a la codimensión del germen de nuestra hipótesis original.

Definición

Sea $\eta$ un germen en cero de una función en $\to$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ entonces diremos que $(r, f)$ es un desdoble de $\eta$ con $r$ parámetros si $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ es un germen en cero con la propiedad de que $f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con $\eta$. 6.0(1)

La notación $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ que estaremos usando a lo largo de éste capítulo formalmente significa que $f$ es un elemento del anillo de gérmenes $E_{n+r}$, esto es, un germen en cero de una función en $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R})$. 6.0(2)

Usualmente diremos que $(r, f)$ es un desdoble de $\eta$ omitiendo la frase "con r parámetros", pues resulta reiterativo.

Observación

Si $\eta$ es cualquier germen de $E_n$ siempre existen desdo_bles de $\eta$, por ejemplo:

$f(x, y) = \eta(x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$

A un desdoble con éstas características se le denómina Desdoble Trivial del germen $\eta$. Un desdoble no trivial del germen $\eta$ a un parámetro es el siguiente:

$g(x, t) = (1-t)\,\eta(x)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

Claramente las restricciones de $f$ y $g$ en $\mathbb{R}^n \times 0$ coinciden con el germen $\eta$.

Si fijamos al germen $\eta$ podemos construir la categoría de desdobles de $\eta$ cuyos objetos serán los desdobles de $\eta$ y los morfismos entre los objetos se definen como sigue:

**Definición 6.1**

Sean $(s, g)$ y $(r, f)$ desdobles de $\eta$, un morfismo entre los objetos $(r, f)$ y $(s, g)$ al cual denotaremos como $(\Phi, \phi, \varepsilon) : (s, g) \longrightarrow (r, f)$ es una terna de gérmenes en cero

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \qquad \phi : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^r \qquad \varepsilon : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfacen

1.- $\Phi /_{\mathbb{R}^n \times 0}$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$

2.- $p_r \circ \Phi = \phi \circ p_s$ donde $p_r$ y $p_s$ son los gérmenes de las proyecciones de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ respectivamente.

3.- $g = f \circ \Phi + \varepsilon \circ p_s$

En realidad $\Phi /_{\mathbb{R}^n \times 0}$ es el germen de la inclusión natural de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ que por brevedad diremos que es la identidad en $\mathbb{R}^n$.

Observación

Hay un morfismo identidad para cada objeto de la categoría de desdobles de $\eta$ y la composición de los morfismos de la categoría es nuevamente un morfismo de dicha categoría. 6.1(1)

En efecto, en la Definición 6.1 hacemos $\Phi$ = Id. en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, $\phi$ = Id. en $\mathbb{R}^r$ y $\mathcal{E}$ el germen constante cero, por construcción $\Phi\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$ (Propiedad 1).

$$2.-\quad p_r \circ \Phi(x, y) = y = \phi(y) = \Phi\left(p_r(x, y)\right)$$

satisfaciéndose así la propiedad 2 y claramente:

$$f = f \circ \Phi + 0 \circ p_r$$

Por lo tanto el morfismo $(\Phi, \phi, 0) : (r, f) \longrightarrow (r, f)$ es en verdad el morfismo identidad del objeto $(r, f)$.

Sean $(r, f)$, $(s, g)$ y $(t, h)$ desdobles de $\eta$ y

$(\Xi, \xi, \mathcal{E}_1) : (t, h) \longrightarrow (s, g)$ y

$(\Phi, \phi, \mathcal{E}_2) : (s, g) \longrightarrow (r, f)$ dos morfismos,

entonces

$$(\Phi \circ \Xi,\ \phi \circ \xi,\ (\mathcal{E}_2 \circ \xi + \mathcal{E}_1)) : (t, h) \longrightarrow (r, f)$$

es un morfismo de la categoría de desdobles de $\eta$. 6.1(2)

En efecto, por definición

En efecto por definición:

$$\Xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s , \quad \Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$$

de aquí que la composición $\Phi \circ \Xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ tenga sentido. Debido a que $\Xi/_{\mathbb{R}^n \times 0}$ y $\Phi/_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coinciden con la identidad en $\mathbb{R}^n$ se tiene que la composición $\Phi \circ \Xi/_{\mathbb{R}^n \times 0}$ también coincide con la identidad en $\mathbb{R}^n$, satisfaciéndose así la propiedad 1 de 6.1.

Por otra parte, por definición $\xi : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^s$ y $\phi : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^r$ entonces la composición $\phi \circ \xi : \mathbb{R}^t \longrightarrow \mathbb{R}^r$ tiene sentido; además, si $P_r$, $P_s$ y $P_t$ son las proyecciones exigidas por la definición 6.1, entonces se tiene por hipótesis que $P_s \circ \Xi = \xi \circ P_t$ y $P_r \circ \Phi = \phi \circ P_s$ de aquí que

$$\begin{aligned} P_r \circ \Phi \circ \Xi &= (P_r \circ \Phi) \circ \Xi = (\phi \circ P_s) \circ \Xi = \\ &= \phi \circ (P_s \circ \Xi) = \phi \circ (\xi \circ P_t) = \\ &= (\phi \circ \xi) \circ P_t \end{aligned}$$

satisfaciéndose así la propiedad 2 de 6.1.

Por hipótesis se tiene que $h = g \circ \Xi + \mathcal{E}_1 \circ P_t$ y $g = f \circ \Phi + \mathcal{E}_2 \circ P_s$, $P_s \circ \Xi = \xi \circ P_t$

Luego entonces

$$\begin{aligned} h = g \circ \Xi + \mathcal{E}_1 \circ P_t &= (f \circ \Phi + \mathcal{E}_2 \circ P_s) \circ \Xi + \mathcal{E}_1 \circ P_t = \\ &= f \circ \Phi \circ \Xi + \mathcal{E}_2 + \Xi_s \circ \Xi + \mathcal{E}_1 \circ P_t = \\ &= f \circ (\Phi \circ \Xi) + \mathcal{E}_2 \circ (\xi \circ P_t) + \mathcal{E}_1 \circ P_t = \\ &= f \circ (\Phi \circ \Xi) + ((\mathcal{E}_2 \circ \xi) + \mathcal{E}_1) \circ P_t . \end{aligned}$$

Por lo tanto la propiedad 3 también se satisface como deseaba demostrarse, es decir,

$$h = f \circ (\Phi \circ \Xi) + (\xi_2 \circ \zeta + \xi_1) \circ p_t$$

Definición

Se dice que un desdoble (r, f) de un germen $\eta$ en $\mathcal{E}_n$ es universal si para cualquier otro desdoble (s, g) de $\eta$ existe un morfismo $(\Phi, \phi, \xi)$ del desdoble (s, g) al desdoble (r, f).

6.1(3)

Definición

Un morfismo $(\Phi, \phi, \xi)$ entre dos desdobles de un germen $\eta$ (s, g) y (r, f) se dice que es un isomorfismo si tiene un inverso.

6.1(4)

Es decir, si existe un morfismo

$(\Xi, \zeta, \sigma) : (r, f) \longrightarrow (s, g)$ tal que:

$(\Phi \circ \Xi, \phi \circ \zeta, (\xi \circ \zeta + \sigma))$ es el morfismo identidad para el desdoble (r, f) y

$(\Xi \circ \Phi, \zeta \circ \phi, (\sigma \circ \phi + \xi))$ es el morfismo identidad para el desdoble (s, g).

Nótese, que en ésta definición se requiere necesariamente que r=s y que $\Phi$, $\Xi$, $\phi$, $\zeta$ sean gérmenes de difeomorfismos. Si hacemos $\Xi = \Phi^{-1}$, $\zeta = \phi^{-1}$ y $\sigma = \xi \circ \phi^{-1}$ entonces el morfismo:

( $\Phi^{-1}$ , $\phi^{-1}$ , $-\mathcal{E}\circ\phi^{-1}+\delta$ ) sería un inverso del

6.1(5)

morfismo ( $\Phi$ , $\phi$ , $\mathcal{E}$ ).

Para verificar ésta aseveración basta realizar las composiciones correspondientes en la forma descrita por la expresión 6.1(2); tomando al desdoble (t, h) como el desdoble (r, f).

PROLONGACION DE UN GERMEN

Sea $\eta$ un germen en el ideal $m^2$ y $Z = j^k(\eta)$ su k-jet.

($j^k : m \longrightarrow m / m^{k+1}$ es un homomorfismo entre ideales maximales)(véase teorema 1.9 y apartado 1.9(5)).

Sea e cualquier representante de la clase de $\eta$, por definición $e \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ entonces $\mathbb{R}^n$ opera en e por traslación de la siguiente manera: para todo $w \in \mathbb{R}^n$, defínase la función $\tilde{w}(e) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con la regla de correspondencia que asocia $x \longrightarrow e(w+x)$.

Obsérvese que la gráfica de la función $\tilde{w}(e)$ es la misma gráfica que la de la función e , pero trasladada del orígen al punto $(w, e(w))$.

Observación

En virtud del Corolario 1.15, $\tilde{w}(e)$ y la función $w(e)$ que asocia $x \longrightarrow e(w+x) - e(w)$ tienen gérmenes cuyas parciales generan al mismo ideal Jacobiano y si uno de éstos gérmenes es k-determinado, también lo es el otro.

6.1(6)

Por construcción, la segunda de éstas funciones se anula en cero, de ahí que su germen correspondiente se encuentre en el ideal maximal $M$.

Denótese como $\mathcal{T}e$ la función de $\mathbb{R}^n \longrightarrow M_n$ cuya regla de correspondencia asocia a cada $w$ el germen en cero de $\{ w(e). \}$

Luego para toda $w$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathcal{T}\eta(w)$ denotará el germen de $M_n$ con la regla de correspondencia:

$$x \longrightarrow \eta(w+x) - \eta(w) \qquad 6.1(7)$$

De ésta definición se deduce que $(\mathcal{T}\eta)$ coincide con el germen $\eta$ en $w = 0$.

En la primera parte de la Proposición 6.2 se prueba que no hay ambigüedad alguna en la definición del germen $\mathcal{T}\eta$

Al germen $\mathcal{T}\eta$ lo llamaremos "la prolongación natural del germen $\eta$ " 6.1(8)

Defínase $\mathcal{T}^k\eta$ como

$$\mathcal{T}^k\eta = j^k \circ \mathcal{T}\eta \qquad (j^k : M \longrightarrow M / M^{k+1})$$

Sea $j^k$ la proyección usual que lleva al ideal maximal $M$ en el espacio de k-jets.

$\mathcal{T}^k\eta$ la denominaremos "el k-jet de la prolongación natural de $\eta$ ". 6.1(9)

Proposición 6.2

Sea $\eta$ un germen k-determinado del ideal $M^2$
$j^k : M \xrightarrow{\eta} M/M^{k+1}$ , $Z = j^k(\eta)$ y $\Delta$
el ideal Jacobiano del germen $\eta$ , entonces

I.- La prolongación natural del germen $\eta$ y su k-jet están unívocamente determinados por el germen $\eta$ es decir la definición de $\pi\eta$ y $\pi^k\eta$ es independiente de los representantes del germen $\eta$

II.- $\left\{ j^k \dfrac{\partial\eta}{\partial x_i} \quad i=1, \dots, n \right\}$ generan al espacio tangente en Z de la imágen de $\mathbb{R}^n$ bajo la derivada de $\pi^k\eta$ en el orígen, éste espacio vectorial es transversal en $j^k(\Delta)$ a la imágen de $M\Delta$ bajo $j^k$

III.- $\pi^k\eta$ es el germen de un encaje de $(\mathbb{R}^n, 0)$ al espacio de k-jets $J^k$

Demostración

I.- Supóngase que e y e' son dos representantes de la clase de $\eta$, entonces por definición e y e' coinciden en alguna vecindad U del cero en $\mathbb{R}^n$ (véase 1.0(1)).

Luego, si w está en U entonces existe una vecindad V del orígen contenida en U que satisface:

si $x \in V$ entonces $x + w \in U$, por consiguiente,
$e(w + x) = e'(w + x)$ lo cual significa que en dicha vecindad V, w(e) coincide con w(e').

Por lo tanto la función $\tilde{\pi}\eta$ está bien definida y en consecuencia también lo está $\tilde{\pi}^{k}\eta$, pues éste último es por definición $j^{k}\circ\tilde{\pi}\eta$ (véase 6.1(9)).

II.- En primer lugar obsérvese que para toda w en una vecindad del orígen, el germen
$$\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}\left(\tilde{\pi}\eta(\omega)\right)\right)$$
es por definición el germen que tiene la regla de correspondencia
$$x \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\eta(\omega + x - \eta(\omega)\right) \quad \text{donde} \quad x \in \mathbb{R}^n$$
y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (ver 6.1(7)). Este germen coincide con
$$\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}\eta}{\partial x^{\alpha}}(w \quad x)\right)$$
ya que $\eta(w)$ no depende de la variable x ; como $\eta$ es $C^{\infty}$ (ver 1.2(5)) entonces la expresión anterior coincide con

Afirmamos que éste $\mathbb{R}$-espacio vectorial es transversal a $j^k(M\Delta)$ en $j^k(\Delta)$. En efecto, cualquier germen del ideal $\Delta$ se puede expresar en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad \text{donde}$$

$$a_i = \xi_i(0) \quad \text{y} \quad \mu_i = \xi_i - a_i$$

Entonces $\Delta \subset \mathbb{R}\Delta + M\Delta$ donde $\mathbb{R}\Delta$ es $\Delta$ visto como un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $E_n$.

La otra contención es obvia, ya que si r es un real y $\mu$ es un germen de M entonces

$$r \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad \text{pertenece a } \Delta$$

Por lo tanto $\Delta = \mathbb{R}\Delta + M\Delta$ y aprovechando la linealidad de $j^k$ tenemos que

$$j^k(\Delta) = j^k(\mathbb{R}\Delta) + j^k(M\Delta) = \mathbb{R}\, j^k(\Delta) + j^k(M\Delta) \tag{6.2(3)}$$

Ahora de 6.2(2) se tiene que $\mathbb{R}\, j^k(\Delta)$ coincide con la imágen de $\mathbb{R}^n$ bajo la derivada en cero de $\pi^k \eta$, ya que ambos espacios vectoriales tienen los mismos generadores; luego entonces el plano tangente en z de la imágen de $\mathbb{R}$ bajo la derivada en cero de $\pi^k \eta$ es transversal a $j^k(M\Delta)$ en $j^k(\Delta)$.

III.- Nuestro objetivo es demostrar que $\pi^k \eta$ tiene rango máximo y concluír, por el Teorema de Inmersión, que es una inmersión local.

Para conocer el rango de $\pi^k \eta$ basta saber cual es la dimensión de la derivada de $\pi^k \eta$ aplicada a $\mathbb{R}^n$. Es decir, la dimensión de $\mathbb{R}\, j^k(\Delta)$ ya que de II, $\Delta$ y $m(\Delta)$ son transversales en $J^k$.

Por hipótesis $\eta$ es k-determinada entonces $m^{k+1} \subset m\Delta \subset \Delta$ (consulte Teorema 1.19); de ahí que tenga sentido considerar los cocientes

$m\Delta / m^{k+1}$ y $\Delta / m^{k+1}$.

Por una parte
$$\frac{\Delta}{M\Delta} \cong \frac{\Delta / M^{k+1}}{M\Delta / M^{k+1}} = \frac{j^k(\Delta)}{j^k(M\Delta)}$$
y de acuerdo al Lema 3.8 $\dim(\Delta / m\Delta) = n$.

Por otra parte de 6.2(3) se tiene que

$j^k(\Delta) = \mathbb{R}\, j^k(\Delta) + j^k(m\Delta)$. Además, en la demostración de II se probó que $\mathbb{R}\, j^k(\Delta) \cap j^k(m\Delta) = 0$ entonces

$$\frac{j^k(\Delta)}{j^k(M\Delta)} = \frac{\mathbb{R}\, j^k(\Delta) + j^k(M\Delta)}{j^k(M\Delta)} \cong \mathbb{R}\, j^k(\Delta)$$

Por lo tanto la dimensión de $\mathbb{R}\, j^k(\Delta)$ es $n$, es decir, $\mathcal{G}^{-k}\eta$ es de rango máximo y por tanto una inmersión 1 a 1 local y es un encaje de $(\mathbb{R}^n, 0)$ al espacio de k-jets.

Concluyendo así la demostración de III y del Lema 6.2.

$\square$

Sea $(r, F)$ un desdoble de $\eta$ (en éste párrafo, $\eta$ puede ser cualquier germen del anillo $E_n$).

Considérese $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_r)$ sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^r$ respectivamente. Si $\bar{f}$ es un representante de $f$ entonces para toda $j = 1, \ldots, r$.

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_j} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$ es una función de clase $C^\infty$

De ahí que tenga sentido hablar del germen de la función:

$$\left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_j}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \left.\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_j}\right|_{0}$$ al cual denotamos como

$d_j(f)$. 6.2(4)

Por construcción $d_j(f)$ es un germen que pertenece al ideal maximal $M$ visto éste último como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial se tiene que $d_1(f), \ldots, d_r(f)$ genera un subespacio vectorial de $M$ al cual denotamos como $V_f$.

6.3

Prolongación k-jet de un desdoble

Un procedimiento análogo al utilizado en la definición de prolongación k-jet de un germen, nos permite hacer la siguiente construcción. Sea $(r, f)$ un desdoble de un germen $\eta \in M^2$ (ésta misma construcción puede hacerse para cualquier germen del anillo $E$ ) y sea: $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow J^k)$ el germen en cero de la función que asigna a cada $w, y$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ el k-jet en cero del germen $\pi_r f\ (w, y)$ donde:

$$\pi_r f\ (w, y)(x) = f\ (w + x, y) - f\ (w, y) \qquad 6.3(1)$$

( $\pi_r f\ (w, y)$ pertenece al ideal maximal $M$ ). En otras palabras:

$F = j^k \circ \pi_r f$ . Al germen $F$ se le denomina "la prolongación k-jet del desdoble $(r, f)$". Brevemente, la prolongación k-jet de $(r, f)$.

6.3(2)

La restricción en $\mathbb{R} \times 0$ del germen $\pi_r f$ coincide con $\pi \eta$ y

$$F\ (0, 0) = j^k\ (\ \eta\ ) = z \qquad 6.3(3)$$

En efecto, como $(r, f)$ es un desdoble de $\eta$ entonces de 6.3(1) y 6.1(7) se tiene que para toda $w$ en una vecindad del cero

$$\pi_r f(w, 0)(x) = f(w + x, 0) - f(w, 0) = \eta(w + x) - \eta(w) =$$
$$= \pi\eta(w)$$

(consulte 6.1(7)). Ahora de 6.3(2) se infiere que $F(0, 0) = j^k \circ \pi_r f(0, 0)$; por el argumento anterior, éste último germen coincide con $j^k(\pi\eta(0))$.

Finalmente de 6.1(7) se concluye que $j^k(\pi\eta(0)) = j^k(\eta)$. Justificándose así la aseveración hecha en 6.3(3).

Al desarrollar la expresión dada en 6.3(2) se tiene:

$$F(w, y) = \sum_{|\alpha|=1}^{k} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left(\pi_r f(w, y)\right)\Big|_{x=0} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \tag{6.3(4)}$$

(consulte 1.9(3)-1.9(7)).

Entonces las funciones coordenadas del germen $F$ son de la forma $\left.\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \pi_r f\right|_{x=0}$ ; por consiguiente:

Observación

La derivada de $F$ en el orígen está determinada por

$$\left.\frac{\partial F}{\partial w_i}\right|_{y=0} = j^k\left(\frac{\partial}{\partial w_i}(\pi\eta)\right) \quad \text{y}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y_j}\right|_{w=0} = j^k(d_j(f)), \quad \forall\ i=1, \dots, n \quad \text{y}$$

$\forall \quad j=1, \ldots, r$ 6.3(5)

En efecto, de 6.3(4) se tiene que las funciones coordenadas de $\left.\dfrac{\partial F}{\partial \omega_i}\right|_{y=0}$ son de la forma

$$\left.\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\pi_r f(\omega, 0)\right)\right)\right|_{x=0}$$

; por 6.3(3) éste germen es $\left.\dfrac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\pi\,\eta(\omega)\right)\right)\right|_{x=0}$, como

$|\alpha| \leq k$, entonces de 6.1(9) y 6.3(4) se concluye que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \omega_i}\right|_{y=0} \cong \frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\pi^k \eta\right).$$

Nuevamente de 6.3(4) se tiene que las funciones coordenadas del germen $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y_j}\right|_{\omega=0}$ tienen la forma

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\pi_r f(0, y)\right)\right)\right|_{x=0}$$

, como las derivadas parciales conmutan, pues $(r, f)$ es $C^\infty$ (ver 6.0(2)) entonces éste germen coincide con

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\pi_r f(0, y)\right)\right)\right|_{x=0}$$

; pero

$\dfrac{\partial}{\partial y_j}\left(\pi_r f(0, y)\right)$ es por definición

$$\lim_{t \to 0} \left( \frac{\pi_r f(0, t y_j) - \pi_r f(0,0)}{t} \right)$$

Por 6.3(1) éste límite asigna a cada

$$x \longrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x, t y_j) - f(0, t y_j) - f(x,0) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x, t y_j) - f(x,0)}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t y_j) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(0, 0) \quad ;$$ en consecuencia, de 6.2(4) y 6.3 se deduce que

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \pi_r f(0, y) \right) \right) \Bigg|_{x=0} \cong \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} (d_j(f))$$

Por lo tanto de 6.3(2) y 6.3(4) se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} \Bigg|_{\omega=0} \cong j^k(d_j(f)) \; .$$

Definición

Se dice que un desdoble $(r, f)$ del germen $\eta \in m^2$ es k-transversal si la prolongación k-jet de $(f, f)$ es transversal a la órbita de $z$ bajo el grupo de k-jets de difeomorfismos en el espacio de k-jets.

6.3(6)

Esto es:

$$T_z\left(D(F)_0\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r\right)\right) + T_z(z, 0^k) \times T_z(J^k)$$

Observación

$D(F)_{(x,\ 0)} = D(j^k\ \eta)$ $\qquad D_y(F)\Big|_{(x,0)}$ donde

$D_y(F)\Big|_{(x,0)}$ está determinado por $j^k \circ d_j(f)$

$j=1, \ldots, r$ y $d_j(f)$ como se definió en 6.3 $\qquad$ 6.3(7)

De ésta definición, la dada en 6.3 y la observación hecha en 6.3(5) se obtiene la siguiente:

Proposición 6.4

Un desdoble (r, f) de un germen $\eta \in m^2$ es k-transversal si y sólo si $M$ coincide con $\Delta + V_f + m^{k+1}$ ; donde $\Delta$ es el ideal Jacobiano de $\eta$ y $V_f$ el espacio vectorial definido en 6.3.

Demostración

Por 6.3(3) y la observación hecha en 6.3(5) se tiene que

$$T_z\left( D_{(x,0)} F \quad (\mathbb{R}^n \times 0)\right) = T_z\left( D_0 \ \pi^k \eta \, (\mathbb{R}^n)\right) .$$

Ahora, en el espacio de k-jets ($J^k$ , es decir, los gérmenes módulo $m^{k+1}$) el espacio tangente de la órbita de $z$ bajo la acción de k-jets de difeomorfismos coincide con $j^k(m\,\Delta)$ según lo establece el Lema 1.21.

Simbólicamente $\quad T_z(z, G^k) = T_z\ (\ j^k(m\,\Delta\ )\ )$

En virtud de la Proposición 6.2, éstos dos espacios tangentes son transversales en $j^k(\ \Delta\ )$ , es decir:

$$\begin{aligned} T_z(z, G^k) + T_z\left(D \quad (\pi^k \eta)(\mathbb{R}^n)\right) &= \\ = T_z \ \ j^k(m\,\Delta\ ) + T_z\left(D\,(\pi^k \eta\ (\ \mathbb{R}^n\ )\right) &= \\ = T_z \ \ j^k(\ \Delta\ ) & \qquad 6.4(1) \end{aligned}$$

Ahora bien, por 6.3 y la observación 6.3(5) se tiene que

$$T_z\left(D_{(0,\,y)}\,F\,(0\times\mathbb{R}^n)\right)\cong\quad T_z\left(D_0\,d_j(f)(\,\mathbb{R}^n)\right)$$

en consecuencia $T_z\,(V_f)$ coincide con el albho tangente en $z$ de la derivada de $F$ en la dirección de $y$ 6.4(2)

Por consiguiente, un desdoble $(r,\,f)$ será k-transversal si el germen $F$ es transversal a la órbita $(z,\,G^k)$ en el espacio de k-jets. Esto es , si

$$T_z\,(z,\,G^k)+\;T_z\left(D\left(F\,(\,\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\,)\right)\right)\;=\;T_z\,(\,J^k\,)$$

Si aplicamos 6.4(1) y 6.4(2) a ésta expresión se tiene

$$T_z\left(j^k\,(\,\Delta\,)\right)+T_z\,(\,V_f\,)\;=\;T_z\,(\,J^k\,)$$

Por consiguiente $(r,f)$ es k-transversal, siempre y cuando $\Delta+V_f$ generen a $M$ módulo $M^{k+1}$ como $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, ésto sucede si y sólo si

$$\Delta\;+\;V_f\;+\;M^{k+1}\;=M$$

Esto concluye la demostración de la Proposición 6.4.

$\square$

Corolario 6.5

Sea $\eta$ un germen finitamente determinado, entonces existe un desdoble $(c, f)$ que es k-transversal $\forall\ k > 0$ donde $c$ es la codimensión de $\eta$.

Demostración

Como $\eta$ es un germen de determinación finita así mismo lo es su codimensión, según lo afirma la Proposición 3.1; por definición, $\operatorname{cod}(\eta) = \dim(M / \Delta) = c$ (ver 3.0(1)), entonces es posible elegir $c$ gérmenes en el ideal $M$ digamos $u_1, \ldots, u_c$ de modo que sus imágenes en el cociente $M/\Delta$ formen una base de éste espacio vectorial. Defínase $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$f(x, y) = \eta(x) + \sum_{j=1}^{c} y_j u_j(x)$ ; es claro que $f$ es un desdoble de $\eta$ con $c$ parámetros, ya que $f(x, 0) = \eta(x)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$

Además por construcción $\dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ coincide con $u_j$ $j=1, \ldots, c$. más aún:

$$d_j(f) = \left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{0}$$

también coincide con $u_j$ . Entonces por 6.3 y el modo que se eligieron los gérmenes $u_j$ se tiene que $d_1(f), \dots, d_c(f)$ generan al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ es decir $m = \Delta + V_f$ y como $m^{k+1} \subset m$ $\forall\ k > 0$ se tiene que $m$ es igual a $\Delta + V_f + m^{k+1}$ y en virtud de la Proposición 6.4, ésto sucede si y sólo si el desdoble $(c, f)$ es k-transversal $\forall\ k > 0$.

Verificándose así la afirmación hecha en el Corolario 6.5.

$\square$

Observación

Sea $\eta$ un germen k-determinado, un desdoble $(r, f)$ de un germen $\eta$ es k-transversal si y sólo si $m = \Delta + V_f$

6.5(1)

En efecto, como $(r, f)$ es k-transversal, entonces de la Proposición 6.4 se tiene

$$m = \Delta + V_f + m^{k+1}$$

Ahora, como $\eta$ es k-determinado, entonces del Teorema 1.19(II) se tiene $m^{k+1} \subset m\Delta \subset \Delta$ ; de éstas dos contenciones se concluye que $m = \Delta + V_f$

El recíproco es inmediato ya que

$m^{k+1} \subset m = \Delta + V_f$ (consulte observación 1.6(1)). Por lo tanto

$$m = \Delta + V_f + m^{k+1}$$

En otras palabras, la observación 6.5(1) afirma que:

El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ está generado por las imágenes de los gérmenes $d_1(f), \dots, d_r(f)$ bajo el epimorfismo que lleva el ideal maximal $m$ en el cociente $m/\Delta$.

6.5(2)

Sublema

$M_s \; E_{n+s}$ consta de aquellos gérmenes del anillo $E_{n+s}$ que se anulan en el eje $\mathbb{R}^n$. 6.5(3)

Demostración

Sea $\xi$ un germen en el ideal maximal $M_s$ del anillo de gérmenes $E_s$ entonces $\xi$ se puede expresar $\sum_{j=1}^{s} \mu_j y_j$ donde $\mu_j$ es un germen del anillo $E_s$ y $y_j$ es el germen de la j-ésima proyección de $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$

Del Capítulo 1, concretamente del Corolario 1.5, sabemos que $M_s$ está generado por las $y_j$, las cuales se anulan en el orígen de $\mathbb{R}^s$. Por lo tanto, si $\eta$ es un germen del anillo $E_{n+s}$ tendremos que:

$$\xi\eta = \eta \sum_{j=1}^{s} \mu_j y_j \quad \text{de donde}$$

$$\xi(0)\,\eta(x,0) = \sum_{j=1}^{s} \mu_j(0)\, y_j(0)\, \eta(x,0) = 0 \cdot \eta(x,0) = 0$$

$$\forall \; x \in \mathbb{R}^n$$

Para mostrar la otra contención, considérese un germen $\eta$ en el anillo $E_{n+s}$ que se anule en el eje $\mathbb{R}^n$, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo tendremos que:

$$\eta(x, y) - 0 = \eta(x, y) - \eta(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, ty)\, dt$$

por la regla de la cadena ésta expresión coincide con:

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \eta}{\partial y_j}(x,\ t\ y)\ y_j\ dt$$

Por linealidad ésto es igual

$$\sum_{j=1}^{s} y_j \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial y_j}(x,\ t\ y)\ dt = \sum_{j=1}^{s} y_j\ \xi_j\ (x,\ y)$$

donde $\quad \xi_j\ (x,\ y) = \int_0^1 \frac{\partial \eta}{\partial y_j}\ (x,\ t\ y)\ dt$

Claramente $\xi_j$ es un germen del anillo $E_{n+s}$ y $y_j \in M_s$ $\forall$ $j=1,\ldots,s$, entonces

$\eta = \sum_{j=1}^{s} y_j\ \xi_j$ es un germen que pertenece a $M_s\ E_{n+s}$ : que es lo que se deseaba demostrar.

$\square$

El próximo párrafo está dedicado a la construcción de una mezcla (definida en el párrafo previo al Corolario 5.10) que nos permitirá enunciar el Lema 5; con el cual concluiremos la demostración de la Proposición 6.6. Para conseguir éste objetivo requeriremos de las dos siguientes observaciones.

Observación

Cada elemento de un módulo libre $A$ en $t$ variables finitamente generado sobre el anillo $E_s$ tiene una expresión única en términos de sus coordenadas.

6.5(4)

En efecto, como $A$ es un $E_s$- módulo libre en $t$ variables, entonces existen $t$ generadores de $A$ con los cuales es posible expresar en forma única cada elemento de $A$, es decir, $\forall\ a \in A$ existen $t$ gérmenes únicos $\eta_1, \ldots, \eta_t$ en el anillo $E_s$ que satisfacen: $a = \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_t a_t$ por consiguiente:

es posible expresar a cada elemento de $A$ en la forma:

$$a = (\eta_1, \ldots, \eta_t) \qquad 6.5(5)$$

Observación

Sea $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un germen en $(0, t_0)$ de clase $C^\infty$. Si $A$ es un $E_{r+1}$-módulo libre, en $r+1$ variables finitamente generado y $C$ es un $E_{n+r+1}$-módulo, entonces la función $\alpha : A \longrightarrow C$ definida por la siguiente regla de correspondencia

$$\alpha(a) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \cdot Y + Z \qquad (\text{donde } y = (Y_1, \dots, Y_r),$$

$Y_j, Z \in E_{r+1}$ y $a = (Y, Z)$ consulte 6.5(5))

resulta ser homomorfismo dl de módulos ; más aún, es una mezcla sobre $P^*$ 6.5(6)

(consulte la definición 5.9(13)).

En efecto, si $(Y, Z) = (Y_1, \dots, Y_r)$ y $(Y', Z') = (Y'_1, \dots, Y'_r, Z')$ ssan las coordenadas de $a$ y $a'$ y $W \in E_{r+1}$, entonces las coordenadas de la suma $Wa + a'$ son

$$W(Y, Z) + (Y', Z') = (WY), (WZ) + (Y', Z') = (WY + Y', WZ + Z')$$

donde $WY = (WY_1, \dots, WY_r)$ luego entonces

$\alpha(Wa + a')$ es por definición

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}(WY + Y') + WZ + Z' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} WY + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} Y' + $$

$$+ WZ + Z' = W\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} Y' + Z\right) + $$

$$+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} Y' + Z' = W \alpha(a) + \alpha(a')$$

En las dos últimas igualdades, considérese a $W$ como un germen del anillo $E_{n+r+1}$ vía el homomorfismo $\beta^*$ esto es, $\alpha(Wa) = p^*(W)\,\alpha(a)$, recuérdese que $p^*(W) = W \circ p$.

En la demostración de la Proposición 6.6 se hace alusión de la siguiente notación:

El símbolo $f \cong g$ (léase f isomorfo a g) significa que existe un isomorfismo entre los desdobles $(r, f)$ y $(r, g)$ como se propone en la definición 6.1(4).

Si $\Phi$ es un germen de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ entonces el símbolo $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathbb{R}^n, 0$ significa que el germen $\Phi$ se anula en la fibra $\mathbb{R}^n \times 0$ es decir $\Phi(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

6.5(7)

Proposición 6.6

Sean $(r, f)$ y $(r, g)$ dos desdobles k-transversales de un germen $\eta$, si $\eta$ es k-determinado y si las imágenes $d_j(f)$ y $d_j(g)$ ($[d_j(f)]$ y $[d_j(g)]$) coinciden en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ $\forall$ $j=1, \ldots, r$, entonces los desdobles $(r, f)$ y $(r, g)$ son isomorfos.

Demostración

La demostración de la Proposición 6.6 se hace en 5 Lemas, en la primera parte hasta el Lema 4 es una copia de la que se hizo en la prueba del Teorema 1.19. En tanto que en su parte fi- nal, para probar el Lema 5, se utilizará el Teorema de Preparación enunciado y demostrado en el Capítulo V.

Defínase una homotopía $E^t$ entre los gérmenes f y g de la siguiente manera:

$$E^t = (1 - t)\, f + tg \qquad 6.6(1)$$

Por hipótesis,. $\left[d_j(f)\right] = \left[d_j(g)\right]$ entonces por linealidad tendremos:

$$\left[d_j(E^t)\right] = (1-t)\left[d_j(f)\right] + t\left[d_j(g)\right] = \left[d_j(f)\right]$$

y de acuerdo con 6.5(1) y 6.5(2) sabemos que el germen $E^t$ es k-transversal para toda $t$ tal que $0 \leq t \leq 1$ ; en consecuencia tenemos una familia $(r, E^t)$ de desdobles (a un parámetro $t$ ) k-transversales que conectan al germen $f$ con el germen $g$.

El siguiente Lema nos muestra que ésto es suficiente para que los desdobles $(r, f)$ y $(r, g)$ sean isomorfos.

Lema 1

Si $t_0$ es un número fijo en $[0, 1]$ entonces para toda $t$ en alguna vecindad de $t_0$ existe un isomorfismo $(\Phi^t, \phi^t, \mathcal{E}^t) : (r, E^{t_0}) \longrightarrow (r, E^t)$

El Lema 1 implica a la Proposición 6.6

En efecto, la compasidad y conexidad de $[0, 1]$ nos permite seleccionar $t_0, t_1, \ldots, t_n$ números en $[0, 1]$ y $N_0, N_1, \ldots, N_n$ vecindades con centro en $t_i$ para $i=0, \ldots, n$ de la siguiente manera:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1 \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=0}^{n} N_i \supset [0, 1]$$

De la conexidad del intervalo $[0, 1]$ se tiene que $N_{i-1} \cap N_i \neq \phi$, luego entonces el Lema 1 nos asegura la existencia de isomorfismos para toda $t \in N_{i-1} \cap N_i$ definidos de la siguiente manera:

$$(r,\ E^{t}i-1) \xrightarrow{(\Xi^{t}_{i}\ \xi^{t}_{i}\ \delta^{t})} (r,\ E^{t}) \xrightarrow{(\Phi^{t}_{i}\ \phi^{t}_{i}\ \varepsilon^{t})} (r,\ E^{t}i)$$

Como la composición de isomorfismos es nuevamente un isomorfismo se tiene que el morfismo:

$(\Phi^{i}, \phi^{i}, \varepsilon^{i}) : (r, E^{t}i-1) \longrightarrow (r, E^{t}i)$ es un isomorfismo donde

$$\Phi^{i} = \Xi^{t} \circ \Phi^{t} \quad , \quad \phi^{i} = \xi^{t} \circ \phi^{t} \quad y \quad \varepsilon^{i} = \delta^{t} - \varepsilon^{t} \circ \phi$$

(consulte 6.1(2)). Por lo tanto las desdobles (r, f) y (r, g) resultan ser isomorfos por efecto de una composición de n isomorfismos.

Lema 2

Existen gérmenes en $(0, t_0)$

$$\Phi : \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{r} \times \mathbb{R}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{r}, 0$$

$$\phi : \mathbb{R}^{r} \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{r} \times 0$$

y $\quad \varepsilon : \mathbb{R}^{r} \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, 0$

que satisfacen las tres condiciones siguientes:

1) $\Phi^{t_0}$ y $\phi^{t_0}$ coinciden con las identidades en $\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{r}$ y $\mathbb{R}^{r}$ respectivamente, además $\varepsilon^{t_0} \equiv 0$

2) Para toda $t$ en una vecindad de $t_0$ ,

$\bar{\Phi}^t \Big/_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con la identidad en
$\mathbb{R}^n$, $\bar{\Phi}^t$ y $\phi^t$ conmutan con la proyección de
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en $\mathbb{R}^r$ esto es
$p_r \circ \bar{\Phi}^t = \phi^t \circ p_r$

3) $E^t \circ \bar{\Phi}^t + \mathcal{E}^t \circ p_r$ coincide con $E^{t_0}$ es decir

$E(x', v', t) + \mathcal{E}(v, t) = E(x, v, t_0)$ donde

$\bar{\Phi}^t (x, v) = \bar{\Phi}(x, v, t) = (x', v')$

Deducción del Lema 1 a partir del Lema 2

Para toda $t \in [0, 1]$ considérese

$\bar{\Phi}^t = \Phi \Big/_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times t}$

$\phi^t = \phi \Big/_{\mathbb{R}^r \times t}$ y $\mathcal{E}^t = \mathcal{E} \Big/_{\mathbb{R}^r \times t}$

Mostraremos que el morfismo

$(\bar{\Phi}^t, \phi^t, \mathcal{E}^t) : (r, E^{t_0}) \longrightarrow (r, E^t)$ es el isomorfismo al que alude el Lema 1.

En efecto, la propiedad 1 nos dice que $\bar{\Phi}^{t_0}$ y $\phi^{t_0}$ son los gérmenes en $t_0$ de las identidades en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}^r$ respectivamente.

Ahora bien, como el conjunto de difeomorfismos $C^\infty$ es abierto en el espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r)$

pues corresponden a mapas de rango máximo (véase demostración del Lema 1.19).

Entonces existe una vecindad $N_1$ de Id. en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ ($N_2$ de la Id. en $\mathbb{R}^r$) que consta únicamente de difeomorfismos y asociada a dicha vecindad existen $\delta_1$ ($\delta_2$) tal que las imágenes inversas de $N_1$ (de $N_2$) bajo la función continua que asocia $t \longrightarrow \Phi^t$ ($t \longrightarrow \phi^t$) contiene al intervalo abierto $(t_0 - \delta_1 , t_0 + \delta_1)$ ($(t_0 - \delta_2 , t_0 + \delta_2)$).

Sea $\delta = \min \{\delta_1 , \delta_2\}$, entonces para toda $t \in (t_0 - \delta , t_0 + \delta)$ se tiene por construcción que $\Phi^t$, $\phi^t$ son en realidad gérmenes de difeomorfismos. En consecuencia, al reescribir las propiedades 2 y 3 en términos de $\Phi^t$, $\phi^t$, $\mathcal{E}^t$ obtenemos:

$$\Phi^t \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} = Id \text{ en } \mathbb{R}^n , \quad P_r \circ \Phi^t = \phi^t \circ P_r$$

y $\mathcal{E}^{t_0} = \mathcal{E}^t \circ \Phi^t + \mathcal{E}^t \circ P_r$ ; éstas corresponden a las propiedades 1, 2 y 3 de la definición 6.1 que nos aseguran que $(\Phi^t, \phi^t, \mathcal{E}^t)$ es un morfismo y como $\Phi^t$, $\phi^t$ son gérmenes de difeomorfismos, entonces dicho morfismo es en realidad un isomorfismo; completando así la prueba del Lema 1.

Lema 3

Con las mismas hipótesis del Lema 2 puede reemplazarse la ecuación 3 en la conclusión del mismo por la siguiente ecuación

$$4)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i'}(x',y',t)\cdot\frac{\partial x_i'}{\partial t}(x,y,t) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_j'}(x',y',t)\cdot\frac{\partial y_j'}{\partial t}(y,t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x',y',t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(y,t) = 0$$

$$\text{donde } (x',y') = \Phi(x,y,t)$$

Una manera de comprobar que la ecuación 4 del Lema 3 puede reemplazar la ecuación 3 del Lema 2 es la siguiente:

Al derivar la ecuación 3 con respecto a $t$ y utilizando la regla de la cadena en el miembro izquierdo de dicha igualdad se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x'}(x',y',t)\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}(x,y,t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y'}(x',y',t)\cdot\frac{\partial y'}{\partial t}(y,t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x',y',t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(y,t) \qquad 6.6(?)$$

en tanto que el miembro derecho de la misma igualdad es idénticamente caro; ya que $E(x, y, t_0)$ es una función que no depende de la variable $t$. Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x, y, t_0) \equiv 0$$

La ecuación 6.6(2) corresponde a la ecuación 4) escrita en forma vectorial.

Ahora deducimos la ecuación 3 partiendo de la ecuación 4. Si la ecuación 4 es cierta, entonces tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{E}^{t} \circ \Phi^{t} + \mathcal{E}^{t}\right) \equiv 0$$

ésto sognifica que la función $\mathcal{E}^{t} \circ \Phi + \mathcal{E}^{t}$ es constante en toda una vecindad del punto $(0, t_0)$.

Por lo tanto, para descubrir docha constante basta evaluar ésta función en el punto $(0, t_0)$ y como $\Phi^{t} = \mathrm{Id.}$ en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{E}^{t_0} \equiv 0$ (por la propiedad 1 del Lema 2) se tiene que:

$$E\left(\Phi(x, y, t_0), t_0\right) + \mathcal{E}(y, t_0) = E(x, y, t_0) = E^{t_0}(x, y)$$

Pof lo tanto $E^{t} \circ \Phi^{t} + \mathcal{E}^{t} = E^{t_0}$ que es la ecuación 3 del Lema 2.

Lema 4

Existen 3 gérmenes en $(0, t_0)$

$X : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R})$ a $(\mathbb{R}^n, 0)$ ,
$Y : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R})$ a $(\mathbb{R}^r, 0)$ y de
$Z : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}, 0 \times \mathbb{R})$ a $(\mathbb{R}, 0)$ que satisfacen la ecuación

$$5) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}(x, y, t) \cdot X(x, y, t) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y_j}(x, y, t)\, Y(y, t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x, y, t) + Z(y, t) = 0$$

para toda $x$, $y$, $t$ en una vecindad de $(0, t_0)$

Reescribimos 5 en forma vectorial como:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} X + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} Y + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + Z = 0$$

6.6(3)

Prueba de que el Lema 4 implica el Lema 3

Como $X$ y $Y$ son diferenciables, el Teorema de Existencia y Unicidad nos garantiza la existencia de soluciones únicas:

$(x', y') = \Phi(x, y, t)$ y $y' = \phi(y, t)$ de los sistemas de ecuaciones diferenciales $\dfrac{\partial x'}{\partial t} = X(x', y', t)$ y

$\dfrac{\partial y'}{\partial t} = Y(y', t)$ con condiciones iniciales $x = x'$ y

$y = y'$ en $t = t_0$ respectivamente. ... 6.6(4)

Defínase al germen $\mathcal{E}$ de la siguiente manera:

Sea
$$\mathcal{E}(y, t) = \int_{t_0}^{t} Z\left(\phi(y,s), s\right) ds$$

entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(y, t) = Z(y', t) - Z(0, t) = Z(y', t) \quad \text{pues}$$

por hipótesis el germen $Z$ se anula en $0 \times \mathbb{R}$

En la ecuación 5 sustitúyase $X_i$, $Y_j$ y $Z$ por sus valores correspondientes tomando en cuenta que:

$$\frac{\partial' x_i'}{\partial t}(x, y, t) = X_i(x', y', t) \qquad \text{(ver 6.6(4))}.$$

Obteniendo así:

$$\sum_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x'_i}(x', y', t) \cdot X_i(x', y', t) +$$

$$+ \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y'_j}(x', y', t) \cdot Y_j(y', t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x', y', t) +$$

$$+ Z(y', t) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x'_i}(x', y', t) \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial t}(x, y, t) +$$

$$+ \sum_j \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y'_j}(x', y', t) \cdot \frac{\partial y'_j}{\partial t}(y, t) +$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x', y', t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(y, t) = 0$$

Esta corresponde a la ecuación 4 del Lema 3 o equivalentemente a la ecuación 3 del Lema 2: por consiguiente, únicament resta por verificar las propiedades 1 y 2 del Lema 2. Para ello obsérvese que en $t = t_0$, $x' \equiv x$ y $y' \equiv y$ entonces

$$(x', 0) = \Phi(x, 0, t_0) = (x, 0) \quad y \quad y' = \phi(y, t_0) = y$$

Por lo tanto $\Phi^{t_0}$ y $\phi^{t_0}$ coinciden con las identidades en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^r$ respectivamente y además

$$\mathcal{E}^{t_0}(y) = \mathcal{E}(y, t_0) = \int_{t_0}^{t_0} Z\Big(\phi(y, s), s\Big)\, ds = 0$$

es decir $\mathcal{E}^{t_0}$ es la función idénticamente cero, verificándose así la propiedad 1 del Lema 2 .

Ahora bien de 6.6(4) se tiene que si $P_r$ es la proyección que aparece en la Definición 6.1 entonces:

$$\phi^t\left(P_r(x, y)\right) = \phi(y, t) = y' = P_r(x', y') = P_r\left(\bar{\Phi}^t(x, y)\right)$$

Finalmente como $X(x', 0, t) = 0$ y $Y(0, t) = 0$ ; entonces al restringir el sistema dado en 6.6(4) en la fibra $\mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R}$ se obtiene la solución constante $(x', 0) = \bar{\Phi}(x, 0, t)$ para toda t en una vecindad de $t_0$ y como $\bar{\Phi}(x, 0, t_0) = (x, 0)$ se concluye que $\bar{\Phi}^t(x, 0) = x$ .

Satisfaciéndose así la Propiedad 2 del Lema 2 y al mismo tiempo la implicación del Lema 3 a partir del Lema 4.

Para justificar éstas aseveraciones, consulte las observaciones hechas en 6.5(4), 6.5(5) y 6.5(6).

Lema 5

Con las 5 hipótesis dadas en 6.6(5), se tiene que el módulo $C$ puede expresarse en la forma

$$\alpha(A) + \beta(B) + p^*(M_{r+1})C.$$

Prueba del Lema 4 a partir del Lema 5

Con las 5 hipótesis del Lema 5 es posible aplicar el Corolario 5.10 a la igualdad

$C = \alpha(A) + \beta(B) + p^*(M_{r+1})C$ para obtener

$C = \alpha(A) + \beta(B)$ , como $\alpha$ y $\beta$ son homomorfismos de módulos, entonces:

$$M_r C = M_r\,\alpha(A) + M_r\,\beta(B) = \alpha(M_r A) + \beta(M_r B) \tag{6.6(6)}$$

Para arribar al miembro derecho de ésta última igualdad, obsérvese que $A$, $B$ y $C$ tienen estructuras de $E_r$-módulos inducidos por las proyecciones de

$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^r$ para A y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^r$ para B y C.

Ahora de 6.6(1) se tiene que:

$\mathcal{E} = (1-t)\, f + tg$ es un germen del anillo $E_{n+r+1}$ (recuérdese que f y g son desdobles del germen $\eta$, $\eta \in E_n$).

Entonces el germen $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ coincide con la diferencia $g - f$.

Ahora las restricciones de f y g en $\mathbb{R}^n \times 0$ coinciden con el germen $\eta$, en consecuencia, $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ se anula en $\mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R}$; y en virtud del Sublema 6.5(3) se infiere que el germen $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ pertenece a $M_r \cdot E_{n+r+1}$.

Por la hipótesis 2, C es un $E_{n+r+1}$-módulo y $M_r \cdot E_{n+r+1}$ está contenido en el ideal $M_r$, por consiguiente $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \in M_r C$ y por 6.6(6)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \in \alpha\,(M_r A) + \beta\,(M_r B).$$

En consecuencia, existen gérmenes $X = (X_1, \ldots, X_n)$ en $M_r B$ y un par de gérmenes $Y = (Y_1, \ldots, Y_r)$ y Z en $M_r A$ que satisfacen:

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} X + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} Y + Z$$

(consulto hipótesis 3, 4 y 5 en 6.6(5)).

Esta es justamente la ecuación 5 del Lema 4. Ahora $X \in M_r B$ es equivalente a decir que $X_i \in M_r E_{n+r+1}$ (ver hipótesis 4 y 5 en 6.6(5)) y de acuerdo al Sublema 6.5(3) se concluye que $X_i$ se anula en $\mathbb{R}^n \times 0 \times \mathbb{R}$ $\forall$ $i=1,\dots,n$ por lo tanto el germen $X$ también se anula en la fibra $\mathbb{R}^n \times 0$.

Análogamente, los gérmenes $(Y, Z)$ se anulan en la fibra $0 \times \mathbb{R}$ ya que $Y_j$ y $Z$ pertenecen al subespacio $M_r E_{r+1}$, por lo tanto, los gérmenes $X$, $Y$ y $Z$ satisfacen las hipótesis y la conclusión del Lema 4.

Prueba del Lema 5 y en consecuencia de la Proposición 6.6

De las 5 hipótesis del Lema 5 (ver 6.6(5)) se infiere que $\alpha(q) + \beta(q) + p^*(M_{r+1})C \subset C$ ya que cada uno de los sumandos está contenido en C.

Por hipótesis C es un módulo finitamente generado sobre el anillo $E_{n+r+1}$, entonces existe un conjunto finito. de generadores en $C$ con los cuales es posible expresar en forma única a cada elemento de dicho módulo; por consiguiente, las coordenadas con respecto a dicho conjunto de generadores determinan a cada elemento del módulo $C$, luego entonces, para exhibir la otra contensión será suficiente probar que para todo elemento $\Xi$ del módulo $C$ existe un elemento $\mu$ en $C$ que satisface:

a) $\mu \in \alpha(A) + \beta(B)$

b) $\Xi - \mu$ pertenece a $p^*(m_r + 1)C$

Del inciso a y b se concluye que el germen $\Xi = \mu + \Xi - \mu$ pertenece a la suma $\alpha(A) + \beta(B) + p^*(m_r + 1)C$ ; ésto significa que el módulo $C$ está contenido en $\alpha(A) + \beta(B) + p^*(m_{r+1})C$

por lo tanto $C = \alpha(A) + \beta(B) + p^*(m_r + 1)C$

Justificación del inciso a

Como $C$ es finitamente generado, entonces existen $s$ generadores en el módulo $C$ con los cuales es posible expresar a cada elemento $\Xi$ en la forma:

$$\Xi\,(x, y, t) = \sum_{i=1}^{s} \xi_i\,(x, y, t)\; C_i \qquad 6.6(7)$$

donde $\xi_i \in E_{n+r+1}$

En la observación 6.5(1) se mostró que el germen $E^t = f + t\,(g - f)$ es k-transversal (consulte 6.6(1)) . $\forall\; t \in [0, 1]$ entonces de 6.5(2) se tiene que $m_n = \Delta + V_{E^{t_0}}$ de donde

$$E_n = \Delta + V_{E^{t_0}} + \mathcal{R} \qquad 6.6(8)$$

Obsérvese que el germen $\eta$ coincide con la restricción del germen $E$ en $\mathbb{R}^n \times 0 \times t_0$ pues $f$ y $g$ son desdobles del germen $\eta$ y por definición

$E = f + t\,(g - f)$

Por consiguiente si $\xi(x) = \Xi(x, 0, t_0)$ entonces de 6.6(7) y 6.6(8) se tiene que cada germen $\xi_i$ puede expresarse en la forma:

$$\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \bar{x}_i + \sum_{j=1}^{T} D_j(\varepsilon^{t_0})\, \bar{Y}_j + S \qquad \text{donde}$$

$$\bar{x}_i \in E_n \quad \text{y} \quad \bar{Y}_j\, ,\, S \in \mathbb{R} \qquad 6.6(9)$$

Sea

$$\mu(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}(x, y, t)\, X_i(x, y, t) + \sum_{j=1}^{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_j}(x, y, t)\, Y_j(y, t) - \sum_{j=1}^{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_j}(0, 0, t_0)\, Y_j(0, t_0) + S$$

donde $X_i(x, 0, t_0) = \bar{X}_i(x)$ y $Y_j(0, t_0) = \bar{Y}_j$

Si se define el germen $Z(x, y, t)$ como

$$- \sum_{j=1}^{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y_j}(0, 0, t_0)\, Y_j(0, t_0) + S$$

entonces la expresión anterior tiene la forma:

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} X + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} Y + Z$$

esto significa que el germen $\mu$ pertenece a la suma

$\alpha(q) + \beta(q)$ (consulte 3 y 5 en 6.6(5)) lo cual

justifica la aseveración hecha en el inciso a.

Para justificar el inciso b, obsérvese que la restricción en $\mathbb{R}^n \times 0 \times t_0$ de $\mu$ coincide con

$\xi = \Xi\big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\} \times t_0}$ , ya que $E$ es un des-

doble de $\eta$ y $Y_j$ de $E^{t_0}$ es por definición

$$\frac{\partial \mathcal{E}^{t_0}}{\partial y_j}\bigg|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \frac{\partial \mathcal{E}^{t_0}}{\partial y_j}\bigg|_{(0,0)}$$

(consulte 6.3 y 6.6(9)). Por consiguiente $\Xi - \mu$ se anulan en la fibra $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \{t_0\}$ ; luego entonces del Sublema 6.5(3) y de las ecuaciones 6.6(7) y 6,6(9) se concluye que la diferencia $\xi_i - \mu_i$ pertenece al ideal $M_{r+1}E_{n+r+1}$ , por lo tanto

$\Xi - \mu \in p^*(M_{r+1})C.$

Esto concluye la demostración del Lema 5 y al mismo tiempo la prueba de la Proposición 6.6.

$\square$

Proposición 6.7

Supóngase que el germen $\eta$ es k-determinado. Si $(r, f)$ y $(r, g)$ son desdobles de $\eta$ k-transversales entonces estos deben de ser isomorfos.

Demostración

Vamos a construir un desdoble $(r, h)$ del germen $\eta$ y probar que existen desdobles de $\eta$ $(r, h')$ y $(r, h'')$ tales que:

1.- $h' \cong h$ y $h'' \cong h$ (ver 6.5(7))

2.- $\left[d_j(h')\right] = \left[d_j(f)\right]$ y

$$\left[d_j(h'')\right] = \left[d_j(g)\right] \quad \forall\ j=1, \ldots, r \tag{6.7(1)}$$

Luego entonces, en virtud de la Proposición 6.6 tendremos que $(r, f)$ isomorfo a $(r, g)$. En efecto, por hipótesis $(r, f)$ es k-transversal y como $\left[d_j(f)\right] = \left[d_j(h')\right]$ para toda $j$ ; entonces de 6.5(1) , 6.5(2) y la Proposición 6.6 se tiene que $(r, h)$ es k-transversal y por consiguiente

$f \cong h'$. Análogamente $h'' \cong g$ ; luego por transitividad $f \cong h' \cong h \cong h'' \cong g$ es decir $f \cong g$.

Construcción de un desdoble k-transversal $(r, h)$ del germen $\eta$

Elíjanse $u_1, \ldots, u_c \in m$ de modo que sus clases $[u_1], \ldots, [u_c]$ formen una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ , recuérdese que $C$ es la codimensión de $\eta$ , además $C < \infty$ ya que por hipótesis la determinación de $\eta$ es finita (Teorema 3.1).

Sea $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{r-c} \longrightarrow \mathbb{R}$

un germen definido de la siguiente manera:

$$h(x, v, w) = \eta(x) + \sum_{j=1}^{c} v_j u_j(x) = \eta + v \cdot u$$

$$v = (v_1, \ldots, v_c) \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_c \end{pmatrix}$$

6.7(2)

Las variables $w = w_1, \ldots, w_{r-c}$ las llamaremos "coordenadas desconectadas de control" , de ellas hablaremos con más detalle en el párrafo que precede al Teorema 6.9.

Ahora construímos un germen $h' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$ y un isomorfismo $(\Phi, \phi, \mathcal{E}) : (r, h') \longrightarrow (r, h)$ de la siguiente manera:

Por hipótesis $(r, f)$ es k-transversal entonces de 6.3, 6.5(1) y 6.5(2) se tiene que:

$$d_j(f) \in M \quad \text{y} \quad M = \Delta + V_f \quad \text{en consecuencia}$$

$$[d_j(f)] = \sum_{s=1}^{c} a_{js} [u_s] \quad \text{donde} \quad a_{js} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ya que} \quad M/\Delta = \langle [u_1, \dots, u_c] \rangle . \qquad 6.7(3)$$

Sea $A = (a_{js})$ la matriz asociada de las clases $[d_1(f)], \dots, [d_r(f)]$ con respecto a la base $[u_1], \dots, [u_c]$ 6.7(4)

A resulta ser una matríz de $r \times c$ de rango $c = \dim (M / \Delta)$ (consulte 6.7(3)).

Considérese ahora a una matríz B de $r \times r{-}c$ tal que sus $r{-}c$ columnas junto con las c columnas de A formen una base de $\mathbb{R}^r$. Si AB denota a la matríz de $r \times r$ formada con las c columnas de A y las $r{-}c$ columnas de

$B$ entonces por construcción

$AB$ resulta ser una matríz no singular .

6.7(5)

Defínanse los gérmenes $\Phi$ , $\phi$ , $h'$ de la siguiente manera:

$$\phi\ (y) = (\ yA\ ,\ yB\ )$$

$$\Phi\ (x,\ y) = (\ x,\ yA\ ,\ yB\ )$$

$h' = h \circ \Phi$ Esto es $h'\ (x,\ y) = \eta(x) + yAu$ (compare con 6.7(2)) $x \in \mathbb{R}^n$ , $y \in \mathbb{R}^{r(G)}$, , $A$ como en 6.7(4) y $u$ como en 6.7(2) .

6.7(6)

Entonces el morfismo $(Id.\ \times \phi\ ,\ \phi\ ,\ 0):(r,h') \to (r,h)$ dado por $(x,\ y) \longrightarrow (x,\ yA\ ,\ yB\ ) \longrightarrow (\ \eta\ (x) + yAu)$ es claramente un isomorfismo.

En efecto $\Phi \equiv Id.\ \times \phi$ entonces

38

$$\Phi\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \equiv Id \text{ en } \mathbb{R}^n$$

$$\Phi \circ P_r \equiv (Id \times \phi) \circ P_r \equiv \phi \equiv P_r \circ \phi$$

$$h' = h \circ \Phi + 0$$

Satisfaciéndose así las tres propiedades de la Definición 6.1. Además el morfismo $(\Phi, \phi, 0)$ tiene un inverso, pues tanto $\Phi$ como $\phi$ son invertibles. Para ello basta observar que la matríz AB es no singular (consulte 6.7(5)), entonces de 6.7(6) se tiene que el germen $\phi$ establece un isomorfismo en

$$\mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^{r-c}$$

Por lo tanto si $\phi^{-1}$ es el inverso de $\phi$ entonces el inverso del morfismo $(Id. \times \phi, \phi, 0)$ será $(Id. \times \phi^{-1}, \phi^{-1}, 0)$; satisfaciéndose así la condición uno propuesta en 6.7(1).

Unicamente queda por justificar la aseveración hecha en 2 de 6.7(1) es decir $[d_j(h')] = [d_j(f)]$

En primer lugar obsérvese que de 6.3 y 6.7(2) se tiene que

$$d_j(h) = \begin{cases} u_j(x) & \text{si} \quad j \leq c \\ 0 & \text{si} \quad j > c \end{cases}$$

entonces de 6.6(6) y 6.3 se deduce que

$$d_j(h') = d_j\,(\,\eta + yAu\,) = d_j\,(yAu)$$

Ahora por definición

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(yAu) = \left(\sum_{i=1}^{T} y_i \cdot (A_i \cdot u)\right)(x) = A_j u(x) = \sum_{s=1}^{c} a_{js} u_s(x)$$

donde $A_i$ es el vector que corresponde al renglón $i$ de la matríz $A$. Por lo tanto de 6.7(3) se concluye que

$$\left[d_j(h')\right] = \sum_{s=1}^{c} a_{js} \left[u_j\,(x)\right] = \left[d_j(f)\right]$$

Una construcción semejante nos proporciona el germen $h''$ definido como $h''(y, v) = \eta\,(x) + yCu$ donde $C$ es la matríz asociada a

$$\left[d_1(g)\right], \ldots, \left[d_r(g)\right] \qquad \text{con respecto a}$$

$$\left[u_1\right], \ldots, \left[u_c\right] \qquad \text{(compare con 6.7(4)).}$$

En éste caso el isomorfismo será $\Phi = \mathrm{Id.} \times \phi$ donde $\phi\,(y) = (yC\,,\, yD)$ donde $(C, D)$ es una matríz no singular (compare con 6.7(3) - 6.7(6)).

Con ésta herramienta también es posible demostrar que $h'' \cong h$ y $\left[d_j(h'')\right] = \left[d_j(g)\right]$ $1 \leq j \leq r$. Concluyendo de ésta manera la demostración de la Proposición 6.7.

$\square$

Proposición 6.8

Supóngase que $\eta$ es un germen del anillo $E_n$ finitamente determinado. Si $(r, f)$ es un desdoble universal de $\eta$ entonces $(r, f)$ es k-transversal para todo $k > 0$ y la codimensión del germen $\eta$ es menor o igual que $r$.

Demostración

Sea $c = \mathrm{cod}(\eta)$ y $(c, g)$ el desdoble de $\eta$ que garantiza el Corolario 6.5, el cual sabemos que es k-transversal para toda $k > 0$. Por definición de universalidad existe un morfismo $(\Phi, \phi, \mathcal{E}) : (c, g) \longrightarrow (r, f)$ que nos permite expresar al germen g como $f \circ \Phi + \mathcal{E} \circ p_c$ 6.8(1)

(propiedad 3 de la definición 6.1) y a

la función $\Phi$ en la forma

$(p_n \circ \Phi, p_r \circ \Phi) = (p_n \circ \Phi, \phi \circ p_c)$ . 6.8(2)

Por la propiedad 1 de 6.1 se tiene que:

$f \circ \Phi \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con la función $F \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$

y como F es un desdoble de $\eta$ entonces

$$\left( f \circ \Phi \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \right) \equiv \eta$$

6.8(3)

La función $\mathcal{E} \circ p_c$ es independiente de la variable x en $\mathbb{R}^n$, por consiguiente:

$$\mathcal{E} \circ p_c \Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \mathcal{E} \circ p_c \Big|_0 \equiv 0$$

6.8(4)

Ahora si se utiliza la linealidad del operador $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$ así como la regla de la cadena, entonces de 6.8(1) - 6.8(4) se deduce que:

$$d_j(g) = \frac{\partial g}{\partial y_j}\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial g}{\partial y_j}\Big|_0 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \Phi + \mathcal{E} \circ p_c)\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ \Phi + \mathcal{E} \circ p_c)\Big|_0 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\left(f \circ \Phi\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}\right) - \left(f \circ \Phi\Big|_0\right)\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\left(\mathcal{E} \circ p_c\right)\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \left(\mathcal{E} \circ p_c\right)\Big|_0\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f \circ \Phi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}\right)\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}\right) - \left(\frac{\partial f \circ \Phi}{\partial x_i}\, \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}\Big|_0\right) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r}\left(\frac{\partial f \circ \Phi}{\partial y_h}\, \frac{\partial \Phi_h}{\partial y_j}\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0}\right) - \frac{\partial f \circ \Phi}{\partial y_h}\Big|_0\, \frac{\partial \Phi_h}{\partial y_j}\Big|_0 \;\pm$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y_j}\Big|_0 +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r}\left(\frac{\partial f}{\partial y_h}\Big|_{\mathbb{R}^n \times 0} - \frac{\partial f}{\partial y_h}\Big|_0\right) \frac{\partial \phi_h}{\partial y_j}\Big|_0$$

Recuérdese que $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ (consulte 6.8(2)).

Como se está suponiendo que el germen $\eta$ pertenece al ideal $M^2$ y como $F$ es un desdoble de $\eta$, entonces de 6.8(3) se tiene que:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_0 \equiv \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (\eta(0) = 0)$$

Por lo tanto $\forall \; j = 1, \dots, r$ se tiene que

$$d_j(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} + \sum_{h=1}^{r} d_h(f) \left.\frac{\partial \phi_h}{\partial y_j}\right|_0$$

En ésta última expresión, la primera suma pertenece al ideal $\Delta = \Delta(\eta)$ ya que $\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_j}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ es un germen del anillo $E_n$.

En tanto que la segunda suma se encuentra en $V_f$ pues $\frac{\partial \phi_h}{\partial y_j}(0) \in \mathbb{R}$

Luego entonces $V_g$ está contenido en $\Delta + V_f$ y por tanto $\Delta + V_g$ está contenido en $\Delta + V_f$ pero $(c, g)$ es k-transversal para $k > 0$ ; entonces por la Proposición 6.4 y la observación 6.5(1) y 6.5(2) se concluye que $m = \Delta + V_g$ y en consecuencia $M$ está contenido en $\Delta + V_f$.

Por otra parte es claro que $\Delta + V_f \subset M$ ya que $\Delta \subset M$ y $V_f \subset M$. Por lo tanto $M = \Delta + V_f$. Y de acuerdo a la Proposición 6.4 se tiene que $(r, f)$ es k-transversal para toda $k > 0$.

Nuevamente, de la observación 6.5(1) y 6.5(2) se tiene que $[d_1(f)], \dots, [d_r(f)]$ generan al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$. Esto significa que

$\operatorname{cod}(\eta) \leq \dim (H / \Delta) \leq \mathbb{R}$

Concluyendo así la prueba de la Proposición 6.8.

$\square$

Definición

Sea $\eta$ un germen en el anillo $E_n$ y $(r, f)$ un desdoble de $\eta$ $(f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0)$. Se dice que $(r + d, g)$ es un desdoble trivial de $(r, f)$ con $d$ controles desconectados, si $g(x, y, w) = f(x, y)$ para todo $(x, y, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$ 6.8(5)

Observación

Es claro que si $(r + d, g)$ es un desdoble trivial de $f$ y éste último es un desdoble de $\eta$, entonces el primero también es un desdoble de $\eta$ ya que

$$g\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} \quad \text{coincide con} \quad f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0}. \tag{6.8(6)}$$

Los dos hechos siguientes son una consecuencia inmediata de la definición anterior..

Sublema

Sea $\eta$ un germen en el ideal $M^2 = M_n^2$ , $(r, f)$ un desdoble de $\eta$ y $(r + d, g)$ un desdoble trivial de $(r, f)$ con d controles desconectados. 6.8(7)

entonces:

I.- $(r, f)$ es un desdoble universal del germen $\eta$ si y sólo si $(r + d, g)$ también es un desdoble universal de $\eta$.

II.- Si $(r, f)$ es k-transversal así mismo lo es $(r + d, g)$.

Justificación de I

Sea $\Pi$ el germen de la inclusión natural de $\mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$ , ésto es, $\Pi(v) = (v, 0)$ y considérense $P, P_r, P_{r+d}$ los gérmenes de las proyecciones definidos de la siguiente manera

$P(y, w) = y$ , $P_r(x, v) = y$ , $P_{r+d}(x, v, w) = (v, w)$

para toda $(x, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d$

Luego si Id. es el germen de la identidad en $\mathbb{R}^n$ entonces los gérmenes $Id \times P$ e $Id \times \Pi$ que asocian $(x, y, w) \longrightarrow (x, v) \longrightarrow (x, v, 0)$ respectivamente, tienen la propiedad que al restringirlos en $\mathbb{R}^n \times 0$ ambos coinciden con la identidad en $\mathbb{R}^n$ (1).

tienen la propiedad que al restringirlos en $\times 0$ ambos coinciden con la identidad en $\mathbb{R}^n$ (1)

$$P_r\left(\mathrm{Id}\times P\,(x,\ y,\ w)\right) = P_r\,(x,\ y) = y = P\,(y,\ w) =$$
$$= P\left(P_{r+d}\,(x,\ y,\ w)\right) \quad \text{y}$$

$$P_{r+d}\left(\mathrm{Id}\times Q\,(x,\ y)\right) = P_{r+d}\,(x,\ y,\ 0) = (y,\ 0) =$$
$$= Q\,(y) = Q\left(P_r\,(x,\ y)\right)$$

para todo $(x,\ y,\ w)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^d$ es decir

$$(2)\qquad P_r\circ\mathrm{Id}\times P\equiv P\circ P_{r+d} \quad \text{y}$$
$$P_{r+d}\circ(\mathrm{Id}\times Q) = Q\circ P_r$$

Ahora bien, por ser $(r+d,\ q)$ un desdoble trivial de $f$ se tiene que $g(x,\ y,\ w) = f(x,\ y)$ ; por consiguiente podemos expresar a $g$ en términos de $f$ y $f$ en términos de $g$ de la siguiente manera:

$$g(x,\ y,\ w) = f\left(\mathrm{Id}\times P(x,\ y,\ w)\right)+0 = f(x,\ y) \quad \text{y}$$

$f(x,\ y) = g\left(\mathrm{Id}\times Q(x,\ y)\right)+0 = g(x,\ y,\ 0)$ pues en particular $g(x,\ y,\ 0) = f(x,\ y)$ , ésto significa que:

$$(3)\qquad g = f\circ(\mathrm{Id}\times P)+0 \quad \text{y} \quad f = g\circ(\mathrm{Id}\times Q)+0$$

Estas son las tres propiedades de la definición 6.1 que nos aseguran la existencia de los siguientes morfismos:

Teorema 6.9

Sea $\eta$ un germen de $M^2$ finitamente determinado y supóngase que (r, f) y (r, g) son desdobles universales de $\eta$. Entonces ambos desdobles deben ser isomorfos.

Demostración

Si (r, f) y (r, g) son desdobles universales de $\eta$ entonces la Proposición 6.8 nos asegura que son k-transversales $\forall$ k > 0 y esa corresponde a una de las hipótesis de la Proposición 6.7 ; la otra hipótesis de la misma proposición también se satisface ya que $\eta$ es finitamente determinado. Significa que existe alguna $k \in \mathbb{N}$ tal que $\eta$ es k-determinado ; como ambas hipótesis de la Proposición 6.7 se satisfacen, la conclusión deseada es que (r, f) y (r, g) son isomorfos.

Concluyendo así la demostración del Teorema 6.9.

$\square$

Teorema 6.10

Si $\eta \in m^2$ es un germen k-determinado, entonces un desdoble $(r, f)$ de $\eta$ será universal si y sólo si $(r, f)$ es k-transversal.

Demostración

La implicación hacia la derecha es precisamente la Proposición 6.8.

Suficiencia

Mostraremos que si $(r, f)$ es un desdobles k-transversal de $\eta$, existe un morfismo que va de $(s, g) \longrightarrow (r,f)$ donde $(s, g)$ es cualquier desdobles de $\eta$.

Como $\eta$ es finitamente determinado, entonces la codimensión de $\eta$ es finita, por la Proposición 3.1 sea $c = \text{cod}(\eta)$, como se hizo en el Corolario 6.5, elíjanse $u_1, \dots, u_c$ generadores del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ como sigue: defínase $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^c \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$h(x, y, v) = g(x, y) + \sum_{j=1}^{c} v_j u_j(v).$$

Por construcción $\left[ d_j(h) \right]$ $j=1, \dots, c$ generan al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $m/\Delta$ de aquí que

$m = \Delta + V_h$ , es decir, $(s + c, h)$ es un desdoble de $\eta$ k-transversal de acuerdo a los apartados 6.5(1) y 6.5(2).

Considérense enteros $d$ y $d'$ tales que $s + c + d = r + d'$ , uno de éstos enteros bien podría ser cero. Recuérdese que $c \leq r$ (ver Proposición 6.8)

Sea $(s + c + d, h')$ un desdoble trivial de $(s + c, h)$ con $d$ controles desconectados y $(r + d', f')$ un desdoble trivial de $(r, f)$ con $d'$ controles desconectados, por II del Sublema 6.8(7) ambos desdobles triviales son k-transversales ya que $(s + c, h)$ y $(r, f)$ son k-transversales y al aplicar la Proposición 6.7 a éstos desdobles triviales obtenemos un isomorfismo entre ellos, pues ambos son desdobles k-transversales $\forall\ k \geqslant \det(\eta)$. Es decir;

$$(\Phi, \phi, g) : (s + c + d, h') \longrightarrow (s + d', f')$$

finalmente, componiendo los siguientes morfismos obtendremos un morfismo $(s, g) \longrightarrow (r, f)$.

$$(Id \times \Omega_1, \Omega_1, 0) : (s, g) \longrightarrow (s + c, h)$$
$$(Id \times \Omega_2, \Omega_2, 0) : (s + c, h) \longrightarrow (s + c + d, h')$$
$$(\Phi, \phi, g) : (s + c + d, h') \longrightarrow (r + d', f')$$
$$(Id \times P_r, P_r, 0) : (r + d', f') \longrightarrow (r, f)$$

donde $\Omega_1$ y $\Omega_2$ son los gérmenes de las inclusiones obvias y $P_r$ el germen de la proyección : $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^r$

Hemos construído un morfismo entre $(s, o)$ y $(r, f)$ lo cual nos muestra que en efecto $(r, f)$ es un desdoble universal de $\eta$.

$\square$

Teorema 6.11

Si $\eta$ es un germen en $M^2$ finitamente determinado, entonces $\eta$ tiene un desdoble universal $(c, f)$ donde $c$ es la codimensión de $\eta$. Más aún, ésta es la dimensión mínima para la cual existe tal desdoble universal.

Demostración

Por el Corolario 6.5 sabemos que existe un desdoble $(c, f)$ el cual es k-transversal $\forall\, k > 0$; en particular, para toda k mayor o igual que la determinación de $\eta$, pues por hipótesis $\eta$ es finitamente determinada y en virtud del Teorema 6.10 $(c, f)$ es un desdoble universal de $\eta$.

Ahora bien, al aplicar la Proposición 6.8 vemos que si $(r, g)$ es cualquier otro desdoble universal de $\eta$ entonces $r \geqslant c$ es decir $c$ es la dimensión mínima para la cual existe tal desdoble universal del germen $\eta$.

$\square$

## CAPITULO VII GERMENES DE CATASTROFES

El próposito de éste Capítulo, es clasificar los gérmenes de catástrofes que corresponden a gérmenes del ideal $M^2$ de codimensión menor o igual que cinco y rangos n-1 y n-2. Con el Teorema 6.11 se prueba que para obtener ésta clasificación, es decir, las once catástrofes elementales mencionadas en el Corolario 7.10, basta analizar los desdobles universales con r parámetros, donde r es menor o igual que cinco que corresponden a gérmenes de codimensión menor o igual que cinco; ya que de éste tipo de desdobles, se construyen los denominados "Gérmenes de Catástrofes". Como es costumbre en éste Capítulo, sólo se considerán gérmenes que pertenecen al ideal $M^2$ y los resultados harán alusión solamente a gérmenes finitamente determinados y en consecuencia de codimensión finita.

Las Proposiciones 7.1 y 7.2, proporcionan un criterio para calcular gérmenes de catástrofes.

La Proposición 7.3; el Corolario 7.4 así como las Proposiciones 7.5 y 7.6 establecen una relación de equivalencia entre gérmenes de catástrofes que corresponden a desdobles de un germen fijo.

La Proposición 7.7 se encarga de extender el concepto de relación de equivalencia a gérmenes que son equivalentes por la derecha.

El Teorema 7.8 asegura la unicidad de la clase de equivalencia de gérmenes de catástrofes.

Los Corolarios 7.9 y 7.10 formalizan el concepto de catástrofe elemental.

Definición

Sean $S$ y $T$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, si p ès un punto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ entonces se dice que $S$ es equivalente en el punto p si existe una vecindad $N$ de p que coincide con la intersección $S \cap T$, es decir, $N = S \cap T$.

7.0(1)

Esta definición establece una relación de equivalencia entre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en cada punto $p$. A la clase de equivalencia se le denomina "El germen en p de subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$".

La justificación es análoga a la que se hizo en el apartado 1.0(1).

Sea $\eta$ un germen que pertenece al ideal $M^2$. Supóngase que $(r, f)$ es un desdoble de $\eta$, ésto es $f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \eta$

donde $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ (consulte definición 6.1 y apartado 6.5(7)).

Si $\bar{f}$ es un representante de $f$ entonces al germen de singularidades de $\bar{f}$ al cual denotamos $M_{\bar{f}}$ lo definimos como el subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ que consta de aquellos puntos para los cuales:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_n} \equiv 0$$

Definición

Sean $S$ y $T$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, si $p$ es un punto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ entonces se dice que $S$ es equivalente en el punto $p$ si existe una vecindad $N$ de $p$ que coincide con la intersección $S \cap T$, es decir, $N = S \cap T$.

7.0(1)

Esta definición establece una relación de equivalencia entre los subconjuntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en cada punto $p$. A la clase de equivalencia se le denomina "El germen en p de subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$".

La justificación es análoga a la que se hizo en el apartado 1.0(1).

Sea $\eta$ un germen que pertenece al ideal $M^2$. Supóngase que $(r, f)$ es un desdoble de $\eta$, ésto es $f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} = \eta$ donde $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ (consulte definición 6.1 y apartado 6.5(7)).

Si $\bar{f}$ es un representante de $f$ entonces al germen de singularidades de $\bar{f}$ al cual denotamos $M_{\bar{f}}$ lo definimos como el subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ que consta de aquellos puntos para los cuales:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_n} \equiv 0$$

Simbólicamente:

$$M_f = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \Big| \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(x, y)=0 \\ i = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$$

Observación

$M_{\bar{f}}$ es no vacío pues al menos contiene al cero, la razón de ésta afirmación es que el germen $\eta$ pertenece a $M^2$ y por consiguiente:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbb{R}^n \times 0} \quad \text{coincide con} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_i}$$

y éste germen está en el ideal maximal $M$ de donde se desprende que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(0, 0) = \frac{\partial e}{\partial x_i}(0) = 0$$

donde $e$ es un representante de $\eta$.

De la definición 7.0(1) se deduce que la clase de equivalencia de $M_{\bar{f}}$ coincide con el conjunto de singularidades de $f$ en el orígen a la cual denotamos como $M_f$ es decir

$$M_f \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_i} - (x, y) = 0 \quad i = 1, \ldots, n \right\} \qquad 7.0(2)$$

Para justificar ésta aseveración considérense $\bar{f}$ y $\bar{\bar{f}}$ dos representantes de f que mandan $0 \longrightarrow 0$, de la observación anterior se tiene que $M_{\bar{f}}$ y $M_{\bar{\bar{f}}}$ contienen al cero y por ser ambos representantes de f se tiene $\bar{f}$ y $\bar{\bar{f}}$ coinciden en alguna vecindad del cero. Por consiguiente:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \text{ coinciden } \frac{\partial \bar{\bar{f}}}{\partial x_i} \text{ en dicha vecindad}$$

Esto significa que $M_{\bar{f}}$ y $M_{\bar{\bar{f}}}$ pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Definición

Sea (r, f) un desdoble de un germen $\eta \in M^2$; el germen catástrofe de un desdoble (r, f) al cual denotamos como $X_f$, se define como el germen en cero de $X_{\bar{f}}$, en donde $X_{\bar{f}}$ es la composición de la inclusión de $M_{\bar{f}}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ seguida de la proyección natural de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en el factor $\mathbb{R}^r$ y $\bar{f}$ es un representante de f. 7.0(3)

Simbólicamente:

$X_{\overline{f}} \doteq p_r \circ i$ donde $p_r$ es la proyección de $\mathbb{R}^r$ e $i$ la inclusión de $m_{\overline{f}}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$, y en términos de gérmenes

$$X_f = p_r \circ i : m_f \longrightarrow \mathbb{R}^r \qquad 7.0(4)$$

Nuevamente $X_f$ es independiente de la elección del representante de $f$, pues de las observaciones previas se tiene que $m_f$ está bien definido y como el cero es un elemento de $m_f$ tiene sentido definir el germen en cero de $X_{\overline{f}}$.

Proposición 7.1

Considérese $\eta$ un germen en el ideal $M^3$ y sea $c$ la codimensión de $\eta$ entonces existe un desdoble de $\eta$ , $(c, f)$ , el cual es universal tal que $M_f$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^c$ y en consecuencia el germen catástrofe de $f$ es decir $X_f$ resulta ser el germen en cero de un encaje de $( \mathbb{R}^c , 0 )$ a $( \mathbb{R}^c , 0 )$.

Demostración

Por hipótesis $c = \operatorname{cod} ( \eta ) = \dim ( M / \Delta )$ , entonces es posible seleccionar $c$ gérmenes en el ideal maximal $M$ cuyas clases en $M / \Delta$ formen una base de éste espacio vectorial , sean $u_1 , \ldots , u_c$ tales gérmenes , es más , puede suponerse desde un principio que:

$$u_j(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x_j & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n \\ \text{un monomio de grado mayor o igual} & \\ \text{que } 2 \quad \text{si} & n < j \leq c \end{array} \right\} \qquad 7.1(1)$$

ésto se debe a que $\eta$ pertenece a $M^3$ entonces su ideal Jacobiano está contenido en $M^2$, en consecuencia existen n elementos en $M$ que no pertenecen a $\Delta$ y estos son precisamente los gérmenes de las proyecciones $x_1, \ldots, x_n$, si acaso $n$ fuese menor que $c$ entonces todavía pueden seleccionarse $c-n$ gérmenes, pero ahora en el ideal $M^2$ el cual está generado por los monomios homogéneos de grado 2 (consulte Corolario 1.6) que junto con los n anteriores serán los generadores de $M \bmod \Delta$ visto éste como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Defínase $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x, y) = \eta(x) + \sum_{j=1}^{c} y_j U_j(x). \qquad 7.1(2)$$

Claramente $f/_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con $\eta$, ésto es, f resulta ser un desdoble de $\eta$ a $c$ parámetros; como cod($\eta$) es finita, entonces la Proposición 3.1 afirma que det($\eta$) también es finita. Por construcción, el ide-

al $M$ puede expresarse en la forma $\delta + V_f$.
(consulte 6.5(1) , 6.5(2) y 7.1(1)).

De la Proposición 6.4 se infiere que el desdoble (c, f) es ktransversal; finalmente del Teorema 6.10, se concluye que (c, f) es un desdoble universal del germen $\eta$.

Ahora bien $M_f$ es por definición el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c$ en donde $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ se anula $\forall\ i = 1, \ldots, n$.

Por 7.1(1) y 7.1(2) se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left( \eta + \sum_{j=1}^{n} Y_j X_j + \sum_{j=n+1}^{c} Y_j U_j \right) =$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + Y_i + \sum_{j=n+1}^{c} Y_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ si y sólo si

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + Y_i + \sum_{j=n+1}^{c} Y_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv 0$$

Esto significa que:

$M_f$ está determinado por el conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \;\middle|\; Y_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x) - \sum_{j=n+1}^{c} Y_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i=1, \ldots, n \right\} \qquad 7.1(3)$$

Si se define al germen $\xi$ como

$$\xi_i = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \sum_{j=n+1}^{c} y_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \forall \; i=1, \ldots, n$$

entonces de 7.1(1) se infiere que el germen

$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ resulta ser un polinomio en las variables $(x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}, \ldots, y_c)$ ; y de 7.1(3) se deduce que $m_f$ es isomorfo a la gráfica del germen $\xi$ la cual está contenida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{c-n} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c$

Pero la gráfica de $\xi$ es una variedad encajada de dimensión $c = n + c-n$ por tanto es difeomorfa a $\mathbb{R}^c$

De la definición 7.0(3) y 7.0(4) se concluye que el germen catástrofe de $f$ , $X_f$ resulta ser un encaje de $\mathbb{R}^c$ en $\mathbb{R}^c$ que manda cero en cero.

$\square$

Observación 7.1(4)

Obsérvese que el conjunto de singularidades $M_f$ no siempre resulta ser una variedad.

Por ejemplo si $n=1$ y $\eta(x) = x^5/5$ entonces el Jacobiano de $\eta$ está generado por

$$\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}(x^5) = x^4 \quad \text{es decir} \quad \Delta(\eta) = \langle x^4 \rangle$$

En la primera parte del Capítulo 1 y en el ejemplo 1 que está al final del mismo, se probó que la determinación del germen $\eta$ es 5.

Ahora, un desdoble universal como el que pide 7.1 es de la forma $x^5/5 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3$. En éste caso ya sabemos que $M_f$ es una variedad de dimensión 3.

Sin embargo si $f(x, y) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}yx^3$ a pesar de ser un desdoble del germen $\eta$, $(1, f)$ no es un desdoble universal, ya que si éste fuese el caso por el Teorema 6.10 se tendría que $(1, f)$ tendría que ser k-transversal para toda $k \geq 5$, pero ésto nos conduciría a contradecir la Proposición 6.4, la cual establece que el ideal maximal coincide con $\Delta + V_f + M^{k+1}$ que en el caso $k \geq 5$ y tomando en cuenta que $\Delta = \langle x^4 \rangle$ y

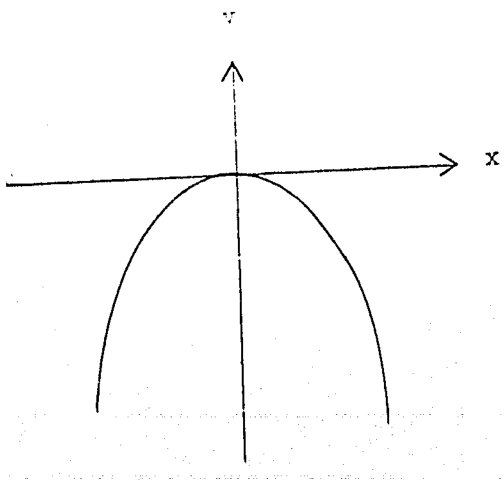
$V_f = \langle x^3 \rangle$ (consulte apartado 6.3). Esta suma se cred[illegible] con $M = \langle x, y \rangle = \langle x^4 \rangle + \langle x^3 \rangle + r^c$ igualdad q[illegible] es imposible de lograr.

Ahora bien, $M_f$ está descrito por $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ que es igual $x^4 - yx^2 = x^2 (x^2 - y) = 0$ si y sólo si $x^2 = 0$ en cuyo caso $x=0$ o $x^2 - y = 0$.

Por lo tanto $M_f$ puede expresarse como

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x=0 \right\} \cup \left\{ (x, y) \;\middle|\; x^2 - y = 0 \right\}$$

Estos dos conjuntos en $\mathbb{R}^2$ representan el eje "y" y una parábola que se intersectan en un punto como se muestra en la figura 7.1(5). Por ésta razón $M_f$ no es una variedad.




7.1(5)

Recuérdese que gracias a la Proposición 4.6 y al Teorema de Reducción 4.9, todo germen de rango $\rho$ e índice $\sigma$ que pertenece al ideal $M^2$ puede expresarse en la forma

$$\eta(x) = x_1^2 + \dots + x_\sigma^2 - x_{\sigma+1}^2 - \dots - x_\rho^2 + P(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$$

Brevemente $\eta = Q + P$ $\quad Q = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{\sigma+1}^{\rho} x_j^2$ ,

$P = P(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ y el grado del polinomio P es mayor o igual que 3

7.1(6)

El siguiente resultado nos proporciona un criterio para construir un desdoble universal de un germen (como el que se describe en 7.1(6)) a partir de un desdoble universal del polinomio P, éste último es fácil de calcular si se aplica la Proposición 7.1. Este mismo resultado, también nos dicen que los conjuntos de singularidades de ambos desdobles universales son isomorfos y en consecuencia sus gérmenes catástrofes son iguales módulo un difeomorfismo. Esto nos sugiere la existencia de una relación de equivalencia entre gérmenes de catástrofes, la cual se formaliza en el Teorema 7.8.

Proposición 7.2

Sea $\eta = Q + P$ un germen finitamente determinado donde $Q(x_1, \ldots, x_\rho) = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2$ y $P$ es un polinomio de grado mayor o igual que 3 que depende exclusivamente de las variables esenciales $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$

Si $(r, f)$ es un desdoble universal del polinomio $P$ y $g = Q + f$ entonces $(r, g)$ resulta ser un desdoble universal del germen $\eta$ ; y los gérmenes catástrofes de los desdobles $f$ y $g$ son los mismos, es decir, $X_f$ coincide con $X_g$

Demostración

El Corolario 3.2, afirma que la determinación del polinomio $P$ es finita pues ésta coincide con la determinación del germen $\eta = Q + P$ ($Q$ y $P$ como en 7.1(6)); luego de la Proposición 6.8 se infiere que $(r, f)$ resulta ser un desdoble k-transversal del polinomio $P$.

Ahora, del apartado 3,2(2) se tiene que el ideal maximal $M$ puede expresarse en la forma:

$$M = M_\rho + M_\lambda \quad \text{donde} \quad M_\rho = \langle x_1, \ldots, x_\rho \rangle$$

$$, \quad M_\lambda = \langle x_{\rho+1}, \ldots, x_n \rangle \qquad 7.2(1)$$

Por consiguiente, de la Proposición 6.4 se deduce que

$m_\lambda = \Delta(p) + V_f + m_\lambda^{k+1}$ ( pero el polinomio p depende exclusivamente de las variables $x_{\rho+1}, \dots, x_n$ entonces $\Delta p \subset m_\lambda$ ). En consecuencia en la igualdad anterior se puede cancelar $m_\lambda^{k+1}$ ya que según lo establecido en el Teorema 1.19 II

$m_\lambda^{k+1} \subset m_\lambda \Delta(p) \subset \Delta(p)$ : por lo tanto

$$m_\lambda = \Delta(p) + V_f \qquad 7.2(2)$$

Por hipótesis

$\eta(x) = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^2 - \sum_{j=\sigma+1}^{\rho} x_j^2 + p(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ entonces el ideal Jacobiano de $\eta$ está generado por

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_s} = \left\{ \begin{array}{lll} \pm 2x_s & \text{si} & s \leq \rho \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_s} & \text{si} & s > \rho \end{array} \right\}$$

por consiguiente

$$\Delta(\eta) = \Delta(q) + \Delta(p) = \langle x_1, \dots, x_\rho \rangle + \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_{\rho+1}}, \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right\rangle =$$

$= m_\rho + \Delta(p)$ (compare con apartado 3.2(1))

Es decir

$$\Delta(\eta) = m_p + \Delta(P) \qquad 7.2(3)$$

Por otra parte $g = Q + f$ implica $g\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} =$

$$= Q\big|_{\mathbb{R}^n \times 0} + f\big|_{\mathbb{R}^n \mathcal{r}_{\times 0}} =$$

$$= Q + P = \eta$$

ya que por hipóteis: f es un desdoble de P; luego entonces g resulta ser un desdoble de $\eta$ con r parámetros. Además

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{\partial Q}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial y_j}$$ pues Q es

independiente de las variables $v_1, \ldots, v_r$ $j=1, \ldots, r$

En consecuencia

$V_f$ coincide con $V_g$ ya que $d_j(f) = d_j(g)$
$j = 1, \ldots, r$ 7.2(4)

(consulte 6.2(4) y 6.3).

De 7.2(1), 7.2(2) y 7.2(3) se deduce que $m = \Delta(\eta) + V_f$ ; y al sustituir $V_f$ por $V_g$ se infiere que $m = \Delta(\eta) + V_g = \Delta(\eta) + V_g + m^{k+1}$ $\forall\ k \geq 0$ (ver 7.2(4) y observación 1.6(1)).

Finalmente, de la Proposición 6.4 y del Teorema 6.10 se concluye que $(r, g)$ es un desdoble universal del germen $\eta$.

Ahora bien, $\varphi(x_1, \dots, x_\rho) = \sum_{i=1}^{\rho} \pm x_i^2$ implica

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \pm 2x_i \qquad i=1, \dots, \rho$$

Como f es un desdoble del polinomio $P(x_{\rho+1}, \dots, x_n)$ entonces f es independiente de las variables $x_1, \dots, x_\rho$ en consecuencia $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ para $1 \leq i \leq \rho$

por lo tanto $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = \pm 2x_i$

para $1 \leq i \leq \rho$. Obsérvese que éstas parciales se anulan en los puntos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ de la forma

$(0, \dots, 0, x_{\rho+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$ en tanto que si $i > \rho$

$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Esta se anula en el conjunto de puntos de la forma

$(x_1, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$ tales que $x_{\rho+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r \in M_f$.

De la intersección de los dos conjuntos descritos anteriormente, se sigue que los puntos de $M_g$ son de la forma $(0, \dots, 0, x_{\rho+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$ tales que

$x_{\rho+1}, \ldots, x_n$, $v_1, \ldots, v_r$ pertenecen a $M_f$; ésto significa que $M_g$ coincide con $0 \times M_f$ (el cero de $0 \times M_f$ es el origen de $\mathbb{R}^{\rho}$). Y en consecuencia, el germen de la inclusión de $M_g$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ coincide con el germen de la inclusión de $M_f$ en $\mathbb{R}^{n-\rho} \times \mathbb{R}^r$ aunque formalmente ambos gérmenes tienen dominios distintos; ésto no ofrece dificultad alguna ya que $M_f$ y $M_g$ son variedades de dimensión $c = \det(\eta)$, según lo establece la Proposición 7.1. Por lo tanto el germen catástrofe de $f$ coincide con el germen catástrofe de $g$ ésto es:

$$\chi_g = p_r \circ i_g = p_r \circ (0 \times i_f) = p_r \circ i_f$$

donde $i_f$ e $i_g$ son los gérmenes de las inclusiones de $M_f$ y $M_g$ en $\mathbb{R}^{n-\rho} \times \mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ respectivamente.

7.2(5)

(consulte 7.0(4)).

□

Proposición 7.3

Sean $(s, g)$ y $(r, f)$ dos desdobles de un germen $\eta$
y supóngase que existe un morfismo
$(\Phi, \phi, \varepsilon) : (s, g) \longrightarrow (r, f)$ entonces el
conjunto de singularidades de $g$ coincide con la imágen
inversa del conjunto de singularidades de $f$ bajo $\Phi$,
es decir, $M_g = \Phi^{-1}(M_f)$ y el germen catástrofe de
$g$ es el "pull back" del germen catástrofe de $f$ bajo
$\Phi$ y $\phi$: ésto significa que el siguiente diagrama
es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_g \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X_g"] & M_f \arrow[d, "X_f"] \\
\mathbb{R}^s \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^r
\end{tikzcd}$$

Demostración

De la definición 6.1 se infiere que si
$(\Phi, \phi, \varepsilon)$ es un morfismo entre $(s, g)$ y $(r, f)$
entonces:

Para toda $(x, y)$ en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ se tiene:

1.- $\Phi\,(x, 0) = x$

2.- $P_r\,(\,\Phi\,(x, y)) = \phi\,(P_s(x, y)) =$
$= \phi\,(y) \longrightarrow \Phi\,(P_n \circ \Phi\,, \phi \circ P_s)$

3.- $g(x, y) = f(\,\Phi\,(x, y)) + \mathcal{E}\,(P_s(x, y))$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "P_s"] & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r) \arrow[d, "P_r"] \\
\mathbb{R}^s \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^r
\end{tikzcd}
$$

7.3(1)

Si se fija "y" en $\mathbb{R}^s$ entonces $\phi\,(y)$ y $\mathcal{E}\,(y)$ son constantes en $\mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.

Como $\Phi\big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con la identidad en $\mathbb{R}^n$ entonces para toda "y" suficiéntemente próxima al orígen de $\mathbb{R}^s$ se tiene por continuidad que:

$\Phi^y = \Phi\big|_{\mathbb{R}^n \times y}$ es el germen de un difeomorfismo local en $\mathbb{R}^n$, por consiguiente la derivada de $\Phi^y$ resulta ser un isomorfismo. 7.3(2)

(consulte la deducción del Lema 1 a partir del Lema 2 de la Proposición 6.6).

En consecuencia $f \circ \Phi^y$ y $g^y = f \circ \Phi^y + \mathcal{E}(y)$ resultan ser gérmenes de funciones de clase $C^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$; ésto significa que

$$D(g^y)(x = D(f)(\Phi^y(x))\, D(\Phi^y)(x).$$

Pero $D(\Phi^y)$ es un isomorfismo (ver 7.3(2)), entonces:

$$\frac{\partial g^y}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x, y) = 0 \quad \text{si y sólo si}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i'}(\Phi^y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x_i'}(\Phi(x, y)) = 0$$

(compare con 7.3(1)).

Por lo tanto de la definición dada en 7.0(2) se tiene que un punto $(x, y)$ se encuentra en la variedad $M_g$ siempre y cuando $\Phi(x, y)$ pertenezca a la variedad $M_f$, es decir:

$$\Phi(M_g) = M_f \quad \text{o bien} \quad M_g = \Phi^{-1}(M_f) \qquad 7.3(3)$$

De la definición dada en 7.0(3) para los gérmenes catástrofes de f y g se obtienen los dos diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd} M_g \arrow[r, "i_g"] \arrow[dr, "\chi_g"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \arrow[d, "p_s"] \\ & \mathbb{R}^s \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \arrow[d, "p_r"] \arrow[r, "i_f"] & M_f \arrow[dl, "\chi_f"] \\ \mathbb{R}^r & \end{tikzcd}$$

donde $i_f$ e $i_g$ son los gérmenes de las inclusiones de $M_g$ y $M_f$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ respectivamente.

Finalmente al combinar 7.3(1) y 7.3(3) con éstos dos diagramas, se obtienen los dos diagramas conmutativos siguientes:

$$\begin{tikzcd} M_g \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\chi_g"] & M_f \arrow[d, "\chi_f"] \\ \mathbb{R}^s \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

$$\chi_f \circ \Phi = \phi \circ \chi_g$$

$$\begin{tikzcd} \Phi^{-1}(M_f) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "x_g"] & M_f \arrow[d, "x_f"] \\ \mathbb{R}^s \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

7.3(4)

La conmutatividad del diagrama 7.3(1), nos garantiza la conmutatividad de éstos dos diagramas. Concluyendo así la prueba de la Proposición 7.3.

$\square$

Con la siguiente definición y el Corolario 7.4 se introduce una relación de equivalencia para gérmenes de catástrofes que pertenecen a desdobles de un germen fijo y que tengan el mismo número de parámetros.

Definición

Sean $M_1$ , $M_1'$ , $M_2$ y $M_2'$ variedades $C^\infty$ de dimensiones $p_1$ , $p_1'$ , $p_2'$ y $p_2'$ respectivamente . Si

$\zeta_1 : M_1 \longrightarrow M_1'$ y $\zeta_2 : M_2 \longrightarrow M_2'$

son gérmenes de clase $C^\infty$ entonces se dice que $\zeta_1$ es equivalente a $\zeta_2$ si y sólo si existen gérmenes de difeomorfismos $\lambda_1$ y $\lambda_2$ que hacen conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\zeta_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] & M_1' \arrow[d, "\lambda_2"] \\ M_2 \arrow[r, "\zeta_2"'] & M_2' \end{tikzcd}$$

es decir $\lambda_2 \circ \zeta_1 = \zeta_2 \circ \lambda_1$ 7.3(5)

Es claro que ésta es una relación de equivalencia.

Para exhibir la reflexividad basta considerar a $\lambda_1$ y $\lambda_2$ como los gérmenes de las identidades en $M_1$ y $M_1'$ respectivamente y hacer $\zeta_1 = \zeta_2$ para obtener:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\zeta_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] & M_1' \arrow[d, "\lambda_1"] \\ M_1 \arrow[r, "\zeta_1"'] & M_1' \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\zeta_1$ es equivalente con $\zeta_2$

La simetría se sigue del hecho de que $\lambda_1^{-1}$ y $\lambda_2^{-1}$ son gérmenes de difeomorfismos que hacen conmutativo al siguiente diagrama (por supuesto partiendo de la hipótesis de que $\zeta_1$ equivalente $\zeta_2$ )

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\zeta_2"] \arrow[d, "\lambda_1^{-1}"] & M_2' \arrow[d, "\lambda_2^{-1}"] \\ M_1 \arrow[r, "\zeta_1"'] & M_1' \end{tikzcd}$$

es decir $\zeta_1 \circ \lambda_1^{-1} = \lambda_2^{-1} \circ \zeta_2$

por lo tanto $\zeta_2$ equivalente $\zeta_1$

Para justificar la transitividad supóngase que

$\tau_1$ equivalente $\tau_2$ implica
$\lambda_2 \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \lambda_1$ y $\tau_2$ equivalente $\tau_3$
implica $\lambda_3 \circ \tau_2 = \tau_3 \circ \lambda_4$

Y de acuerdo a la definición tenemos los dos diagramas conmutativos siguientes:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\lambda_1"] & M_1' \arrow[d, "\lambda_2"] \\
M_2 \arrow[r, "\tau_2"'] & M_2'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M_2 \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "\lambda_3"] & M_2' \arrow[d, "\lambda_4"] \\
M_3 \arrow[r, "\tau_3"'] & M_3'
\end{tikzcd}$$

Dada la conmuta_tividad de éstos dos diagramas, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\zeta_1"] \arrow[d, "\lambda_3 \circ \lambda_1"] & M'_1 \arrow[d, "\lambda_4 \circ \lambda_2"] \\
M_3 \arrow[r, "\zeta_3"'] & M'_3
\end{tikzcd}$$

Esto significa que $\zeta_1$ equivalente . $\zeta_3$ verificándose así la transitividad.

$\square$

Corolario 7.4

Sea $(\Phi, \phi, \varepsilon)$ un isomorfismo entre dos desdobles $(r, g)$ y $(r, f)$ de un germen $\eta \in M^2$ finitamente determinado, entonces sus gérmenes de catástrofes $X_f$ y $X_g$ son equivalentes, es decir, $X_f \circ \Phi = \phi \circ X_g$

Demostración

Como $M_f$ y $M_g$ son variedades $C^\infty$, ambas de dimensión finita, entonces de la Proposición 7.3 se deduce que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_g \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "X_g"] & M_f \arrow[d, "X_f"] \\ \mathbb{R}^r \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^r \end{tikzcd}$$

(compare con 7.3(4))

Por hipótesis $(\Phi, \phi, \varepsilon): (r, g) \longrightarrow (r, f)$ es un difeomorfismo entonces $\Phi$ y $\phi$ son gérmenes de difeomorfismos; por consiguiente, de acuerdo a la definición anterior se tiene que los gérmenes catástrofe de $f$ y $g$ son equivalentes. Esto es $X_f \circ \Phi = \phi \circ X_g$

$\square$

Proposición 7.5

Sea $\eta$ un germen finitamente determinado, si $(r, f)$ y $(r, g)$ son dos desdobles universales de un germen $\eta$ entonces sus gérmenes de catástrofes $X_f$ y $X_g$ son equivalentes.

Demostración

Las hipótesis que poseen al germen $\eta$ y los desdobles $(r, f)$ y $(r, g)$ nos permiten aplicar al Teorema 6.9 para obtener un isomorfismo $(\Phi, \phi, \varepsilon)$ entre ambos desdobles universales.

Ahora el Corolario 7.4 se encarga de exhibir la equivalencia entre $X_f$ y $X_g$.

$\square$

Proposición 7.6

Sea $\eta$ un germen finitamente determinado. Supóngase que $(r, f)$ y $(s, g)$ son dos desdobles universales de $\eta$
Si $s > r$ entonces los gérmenes catástrofes de $f$ y $g$ difieren por un producto; ésto es $X_g$ es equivalente $X_f \times Id$
donde $Id: \mathbb{R}^{s-r} \longrightarrow \mathbb{R}^{s-r}$

Demostración

Sea $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ el germen dado por $f'(x, y, w) = f(x, y)$ para todas $(x, y, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s-r}$
$f'$ definido de ésta manera es un desdoble trivial de $f$ con $s-r$ controles desconectados.

Ahora, por hipótesis $(r, f)$ es universal entonces $(s, f')$ también resulta ser un desdoble universal según se muestra en el Sublema 6.8(7). Luego entonces tenemos dos desdobles universales de $\eta$ con igual número de parámetros, a saber $(s, f')$ y $(s, g)$ ; en consecuencia de la Proposición 7.5 se tiene que

$$X_g \quad \text{es equivalente} \quad X_f, \qquad 7.6(1)$$

Por otra parte $f'(x, y, w) = f(x, y)$ implica

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(x, y, w) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = 0 .$$

En otras palabras $(x, y) \in M_f$ si y sólo si $(x, y, w) \in M_{f'}$ para toda $w \in \mathbb{R}^{s-r}$. Esto significa que $M_{f'} = M_f \times \mathbb{R}^{s-r}$. Esta última igualdad induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_{f'} \arrow[r, "Id^{n+s}"] \arrow[d, "X_{f'}"] & M_f \times \arrow[d, "X_f \times Id^{s-r}"] \\ \mathbb{R}^s \arrow[r, "Id^s"] & \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s-r} \end{tikzcd}$$

Luego entonces de 7.0(3) y 7.0(4) se infiere que:

( $(x, y, w) \in M_{f'}$ si y sólo si $X_{f'}(x, y, w) = (y, w) =$

$= ( X_f (x, y), w )$ esto es si y sólo si

$(x, y, w) \in M_f \times \mathbb{R}^{s-r}$). Por consiguiente

$X_{f'} = X_f \times Id^{s-r}$.

Finalmente como $X_g$ equivalente $X_{f'}$, según se muestra en 7.6(1); entonces por transitividad se concluye que $X_g$ es equivalente a $X_f \times Id^{s-r}$

$\square$

Proposición 7.7

Sea $\eta$ un germen finitamente determinado, supóngase que el germen $\eta$ es equivalente por la derecha a un germen $\eta'$. Si $(r, f)$ y $(r, f')$ son dos desdobles universales de $\eta$ y $\eta'$ respectivamente, entonces sus gérmenes de catástrofes $X_f$ y $X_{f'}$ son equivalentes.

Demostración

El que $\eta$ sea equivalente por la derecha con $\eta'$ significa que existe $\gamma \in G$ ( G es el grupo gérmenes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que se anulan en cero) (consulte 1.10(1) y 1.10(2)) tal que $\eta' = \eta \circ \gamma$. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ defínase $g(x, y) = f(\gamma(x), y)$ es decir $G = f \circ (\gamma \times Id^r)$ ; por brevedad escribiremos Id en vez de $Id^r$.

En consecuencia, la igualdad anterior se transforma en $G = f \circ (\gamma \times Id$ ; de ésta igualdad se obtiene el siguiente morfismo entre los desdobles $(r, g)$ y $(r, f)$

$$( \gamma \times Id , Id , 0 )$$

Como $\gamma$ es el germen de un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $\gamma^{-1}$ también pertenece a G . En consecuencia $\gamma \times Id$ y $\gamma^{-1} \times Id$ son gérmenes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ en sí mismo.

Esto nos garantiza que:

$$(\gamma \times Id, Id, 0): (r, g) \longrightarrow (r, f)$$

es un isomorfismo 7.7(1)

Ahora, por el Corolario 7.4 se deduce que los gérmenes catástrofe de f y g son equivalentes, es decir,

$$X_f \cong X_g \qquad 7.7(2)$$

Ahora bien (r, f) es por hipótesis un desdoble de $\eta$ y $\eta$ equivalente por la derecha con $\eta'$ y como $g = f \circ (\gamma \times Id)$ entonces

$$g(x, 0) = f(\gamma(x), 0) = \eta(\gamma(x)) =$$
$$= \eta \circ \gamma(x) = \eta'(x)$$

Esto significa que (r,g) es un desdoble del germen $\eta'$ y como (r, f) es un desdoble universal, entonces por el isomorfismo dado en 7.7(1) se infiere que (r, g) resulta ser un desdoble universal del germen $\eta'$.

Ahora en virtud de la Proposición 7.5 se deduce que $X_g$ es equivalente a $X_f$, pues (r, g) y (r, f') son desdobles universales de $\eta'$. Pero $X_g$ equivalente $X_f$ según se muestra en 7.7(2).

Luego entonces por transitividad se concluye que $X_f$ es equivalente con $X_f$,

$\square$

Teorema 7.8

Sea $\eta$ un germen en $M^2$ de determinación finita y $X_f$ su germen de catástrofe, entonces la clase de equivalencia de $X_f$ únicamente depende de la clase de equivalencia del germen $\eta$. Más aún, ésta clase está unívocamente determinada por las coordenadas esenciales de $\eta$.

Demostración

En virtud del Teorema 6,11 se infiere que:

el germen $\eta$ tiene un desdoble universal, (c, f) donde $c = \text{cod}(\eta)$ es el mínimo número de parámetros posible

7.8(1)

Luego si $\rho$ igual al rango de $\eta$, entonces por el Corolario 4.10 se tiene que:

$\eta$ es equivalente por la derecha al germen $\eta' = Q + P$ donde $Q = x_1^2 + \ldots + x_\sigma^2 - x_{\sigma+1}^2 - \ldots - X_\rho$ y $P$ es un polinomio de grado mayor o igual que 3 que depende exclusivamente de las variables $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$

7.8(2)

y como el ideal Jacobiano de $\eta$ es independiente de un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$ (consulte 1.13(2)) , entonces de la definición dada en 3.0(1) se obtiene que

$$\operatorname{cod}(\eta) = \operatorname{cod}(\eta') = c \qquad 7.8(3)$$

De la Proposición 1.13 se deduce que el germen $Q + P$ tiene determinación finita, más aún, el Corolario 3.2 afirma que $\det(Q+P) = \det(P)$ y $\operatorname{cod}(Q+P) = \operatorname{cod}(P) = c$

La Proposición 7.2 afirma que $X_{f'}$ coincide con $X_{g'}$ donde $(c, f')$ es un desdoble universal de $\eta'$, $f' = Q+g'$ y $(c, g')$ es un desdoble universal del polinomio P

7.8(4)

Como $(c,f)$ y $(c, f')$ son desdobles universales de $\eta$ y $\eta'$ respectivamente (consulte 7.8(1), 7.8(2) y 7.8(4), entonces la Proposición 7.7 se encarga de exhibir la equivalencia entre los gérmenes catástrofes de $f$ y $f'$ es decir

$$X_f \text{ es equivalente a } X_{f'} = X_{g'} \qquad 7.8(5)$$

Ahora bien, si $(r, g)$ es cualquier otro desdoble universal de $\eta$ , entonces del Teorema 6.11 se tiene que $r \geq c$. Si $r=c$ , la Proposición 7.5 asegura que $X_g$ es equivalente a $X_f$ , en tanto que si $r > c$ entonces por la Proposición 7.6 se tiene que $X_g$ es equivalente a $X_f \times Id^{r-c}$. En ambos casos, haciendo uso de 7.8(5) y la propiedad transitiva se tiene que

$$X_g \text{ equivalente } X_{f'} = X_{g'} \qquad 7.8(6)$$

Luego entonces si $\left[X_f\right]$ denota la clase de equivalencia del germen catástrofe de f, entonces de 7.8(1) a 7.8(6) se tiene que $\left[X_f\right]$ coincide con $\left[X_{g'}\right]$ es decir la clase de equivalencia del germen catástrofe de f es independiente de la manera en que se escogió al germen $\eta$. De 7.8(1) a 7.8(4) se sigue claramente que la clase de equivalencia del germen catástrofe de f está unívocamente determinada por las coordenadas escenciales del germen $\eta$, es decir $x_{\rho+1}, \dots, x_n$; concluyendo así la demostración del Teorema 7.8.

□

Observación 7.8(7)

Existe una función que va de las órbitas de gérmenes de codimensión finita a las clases de equivalencias de gérmenes de catástrofes de desdobles universales, que asigna a cada órbita la clase de equivalencia del germen catástrofe de f donde (r, f) es un desdoble universal de un elemento de la órbita.

Esta función está bien definida ya que si $\eta$ es equivalente por la derecha con $\xi$ entonces de 1.10(2) y 1.10(3) se tiene que $(\eta, G) = (\xi, G)$. Más aún, existe un elemento en la órbita de $\eta$ de la forma $\eta' = Q+P$ el cual posee un desdoble universal (c, f') con las características descritas en 7.8(2).

Ahora bien, si (r, f) es un desdoble universal del germen $\eta$ entonces de 7.8(6) se infiere que (x, f) es equivalente con (x, f') y por consiguiente, el germen catástrofe de f es un representante de $[X_{f'}]$. Por lo tanto, $[X_f] = [X_{f'}]$

Finalmente como $[X_{f'}]$ está unívocamente determinada por las coordenadas escenciales del germen $\eta$, según se muestra en el Teorema 7.8, entonces la función $(\eta, G) \longrightarrow [X_{f'}]$ está bien definida donde $\eta$ equivalente Q+P y (c, f') es un desdoble universal de Q+P (consulte 7.8(1) a 7.8(4)).

Observación 7.8(8)

Si P es un polinomio en $M^3$ que depende exclusivamente de las variables escenciales $x_{p+1}, \dots, x_n$ entonces +P y -P determinan el mismo conjunto de singularidades $M_f$ y por consiguiente el mismo germen catástrofe $X_f$ (f es un desdoble del polinomio P ).

En efecto, sea (r, f) un desdoble universal de $\eta$ entonces por definición $f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con P y $-f\big|_{\mathbb{R}^n \times 0}$ coincide con -P

Además si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = 0$ implica $-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y)=0$

Por lo tanto al conjunto de singularidades de f coincide con el conjunto de singularidades de -f y en consecuencia sus gérmenes de catástrofes son los mismos.

Corolario 7.9

Existen solamente 11 clases de equivalencia en el conjunto de gérmenes de catástrofes que corresponden a desdobles de gérmenes del ideal $M^2$ de codimensión menor o igual que 5 y mayor o igual que uno.

Demostración

Sea $\eta$ un germen de codimensión c donde $1 \leq c \leq 5$ entonces de la Proposición 3.1, se infiere que el germen $\eta$ es finitamente determinado; y del Corolario 4.10, se deduce que $\eta$ es equivalente por la derecha con un germen de la forma Q+P , Q y P como en 7.8(2). Por consiguiente del Teorema 7.8, se concluye que si (r, f) es un desdoble de $\eta$ entonces la clase de equivalencia de (x, f) está unívocamente determinada por las coordenadas escenciales del germen $\eta$ .

Luego, si existen más de dos coordenadas escenciales de $\eta$ , ésto es, si el rango de $\eta$ es menor o igual que n-3, entonces en virtud de la Proposición 4.11, se tiene que la codimensión de $\eta$ es mayor o igual que 6 y por tanto cod( $\eta$ ) > 5.

Luego entonces ésta consideración está fuera de lugar pues contradice nuestra hipótesis original a saber cod ( $\eta$ ) $\leq$ 5. Por lo tanto el número de coordenadas escenciales debe ser menor o igual que 2. Entonces si se tiene una sola coordenada escencial, de la Proposición 4.12 y la observación 7.8(8), se deduce que los gérmenes de codimensión menor o igual que 5 en $M^2$ que proporcionan distintas clases de equivalencia son:

$$x^3 \ , \ x^4 \ , \ x^5 \ , \ x^6 \ y \ x^7 \qquad 7.9(1)$$

En tanto que si se tienen dos coordenadas escenciales - entonces de la Proposición 4,14 y de la Proposición 4.17, se in-- fiere que los gérmenes de codimensión menor o igual que 5 en $M^2$ que proporcionan gérmenes de catástrofes no equivalentes son :

$$x^3 + xy^2, \ x^3 - xy^2 \ , \ x^2y + y^4 \ , \ x^3 + y^4 \ , \ x^2y + y^5, \ x^2y - y^5 \qquad 7.9(2)$$

El número total de éstas clases de equivalencia es 11.

Sólo resta por justificar porque se sustituye en ésta - lista al germen $x^3 + xy^2$ por el germen $x^3 + y^3$ (Proposición 4.14) y el porqué se excluyen de la misma a los gérmenes $x^2y - y^4$ y al- germen $x^3 - y^4$ . Las razones son las siguientes:

Sea $P(x, y) = x^2y + y^4$ entonces

$-(P(x,-y)) = -(x^2(-y)) + (-y)^4 = x^2y - y^4$

Pero si $P(x, y) = x^3 + y^4$ entonces

$-P(-x, y) = -((-x)^3 + y^4) = x^3 - y^4$

Finalmente en el párrafo posterior al apartado 4.14 se- probó que $2(x^3 + x^2y)$ es equivalente por la derecha con $x^3 + y^3$; por consiguiente $x^3 + y^3$ , $x^2y + y^4$ y $x^3 + y^4$ son equivalen -- tes por la derecha a los gérmenes $x^3 + xy^2$ ,

$x^2y - y^4$ y $x^3 - y^4$ . Y de acuerdo a la Proposición 7.7 los desdobles universales de éstos gérmenes generan gérmenes de catástrofes equivalentes.

□

Definición

Se dice que la clase de equivalencia de un germen de catástrofe $X_f$ es una catástrofe elemental si $[X_f]$ es una de la_s 11 clases de equivalencia enumeradas en los apartados 7.9(1) y 7.9(2) del Corolario 7.9.

7.9(3)

Corolario 7.10

Sea $\eta$ un germen finitamente determinado si $(r, f)$ es un desdoble universal de $\eta$ y $r \leq 5$ entonces la clase de equivalencia del germen catástrofe de $f$, $[X_f]$ es una catástrofe elemental.

Demostración

Por el Corolario 4.10, se tiene que $\eta$ es equivalente por la derecha al germen $Q+P$ donde $Q$ es una cuadrática que depende de las primeras $\rho$ variables y $P$ es un polinomio perteneciente al ideal $M^3$ dependiente de las variables escenciales $x_{\rho+1}, \ldots, x_n$ (consulte 7.8(2)).

Sea $c = \mathrm{cod}(\eta) = \mathrm{cod}(Q+P) = \mathrm{cod}(P)$ (consulte Corolario 3.2). La Proposición 6.8 afirma que $r \geq c$ entonces $c \leq 5$ ya que a su vez $r \leq 5$, luego entonces por el Corolario 7.9, $P$ es uno de los 11 gérmenes que se enumeran en los apartados 7.9(1) y 7.9(2).

Si se aplica la Proposición 7.1 al polinomio $P$ se obtiene un desdoble universal $(c, g)$ del polinomio $P$ ; y de la definición 7.9(3), se deduce que la clase de equivalencia del germen cat'strofe de $g$ resulta ser una catástrofe elemental. Usese la Proposición 7.2 para construír un desdoble universal $(c, f')$ del germen $\eta$ $f' = Q+g$ .

Entonces el germen catástrofe de $f'$ coincide con el germen catástrofe de $g$ y en virtud de la Proposición 7.6

se infiere que $X_f$ es equivalente $X_{f'} \times Id^{r-c}$ ; ésto significa que el germen catástrofe de $f$, $X_f$ pertenece a la clase de equivalencia del germen catástrofe de $g$ , es decir, $\left[ X_f \right]$ es una catástrofe elemental.

$\square$

Bibliografía.


1.- Bierstone Edward.- An Introduction to Singularities Smooth Functions.

2.- Warner Frank.- Foundation Differentiable Mani -- folds and Liegroups.

3.- Wassermann Gordon.- Stability of Unfoldings.-Lecture notes in Mathematics número 393.

4.- Zeeman E. C..- Catastrophe Theory.-Selected Pa-- pers 1972 - 1977.- Página 501 - 561 .