M O D U L O S

C O N   U N   G R U P O   D E   O P E R A D O R E S

(V I S I O N   H O M O L O G I C A)

T E S I S

Q U E   P A R A   O B T E N E R   E L   T I T U L O   D E

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

J O R G E   M A R T I N E Z   S.

F A C .   C I E N C I A S   U N A M   1 9 7 1 .

a mis padres de siempre.

a mi actual Compañía.

P R O L O G O

D. G. Higman presenta, en su artículo intitulado "Modules with a Group of Operators", una serie de siete equivalencias que caracterizan a los G-Ω-módulos M que son sumandos directos de un G-Ω-módulo H del cual son submódulos de tal manera que M, considerado como S-Ω-módulo, es un sumando directo de H considerado de igual forma (en donde S es un subgrupo de índice finito del grupo G, y Ω un conjunto cualquiera).

La demostración de tales equivalencias, junto con algunas aplicaciones, son presentadas en el capítulo 2 de este trabajo, en la forma en que lo hace el autor del artículo. Posteriormente desarrollamos algunos puntos generales sobre Algebra Homológica Relativa, para sacar conclusiones en un caso particular (capítulos 3 y 4). Con esto hacemos ver, en el capítulo 5, que nuestro caso particular coincide con el de Higman, y lo que hemos hecho es encuadrarlo en un contexto más amplio. Salvo la condición (c) del Teorema 1 del artículo, que parece ser sólo un paso de transición en la demostración, todas las condiciones quedarán, pues, enunciadas en el contexto categorial a lo largo del capítulo 3.

- - - = = = - - -

Aprovecho para agradecer lo que significó para mi formación haber recibido la ayuda del Dr. Emilio Lluis, y para la consecusión de este trabajo y la clarificación de muchas ideas la del Dr. Humberto Cárdenas. Ojalá que ellos, mis profesores y, quizá sobre todo, mis compañeros puedan llegar a comprender lo que significa para mí contar con su amistad.

I N T R O D U C C I O N

Solamente mencionaremos, dado que lo usamos explícitamente, el enunciado del Teorema del Adjunto, sobre todo para aclarar la notación:

Sea $\bar{A}$ una categoría, $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos de $\bar{A}$. $\bar{I}(\mathcal{M})$ denotará a la clase de objetos de $\bar{A}$ que sean inyectivos relativos a $\mathcal{M}$, o $\mathcal{M}$-inyectivos.

Sea $\mathcal{E}$ una clase de epimorfismos de $\bar{A}$. $\bar{P}(\mathcal{E})$ denotará a la clase de objetos de $\bar{A}$ que sean proyectivos relativos a $\mathcal{E}$, o $\mathcal{E}$-proyectivos.

Sea $\bar{B}$ otra categoría, $F: \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ y $T: \bar{B} \longrightarrow \bar{A}$ dos functores. $\alpha: T \longrightarrow F: \alpha^{-1}$ denotará que el functor T es adjunto izquierdo de F.

Se dirá que el functor F es fiel si $F(f)=F(g)$ implica que $f=g$, con f y g morfismos de $\bar{A}$.

<u>Teorema del Adjunto</u>:

Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos categorías, $F: \bar{A} \longrightarrow \bar{B}$ y $T: \bar{B} \longrightarrow \bar{A}$ dos functores, y $\mathcal{E}$ una clase de epimorfismos de $\bar{B}$ tales que:

i) $\alpha: T \longrightarrow F: \alpha^{-1}$

ii) F es fiel.

iii) $\mathcal{E}$ es proyectivamente perfecta.

Entonces:

a) $F^{-1}(\mathcal{E})$ es una clase proyectivamente perfecta de epimorfismos de $\bar{A}$, en donde $f \in F^{-1}(\mathcal{E})$ si i sólo si $F(f) \in \mathcal{E}$.

b) $\bar{P}(F^{-1}(\mathcal{E}))$ está constituída por los objetos $T(B)$ y sus sumandos directos para todo $B \in \bar{P}(\mathcal{E})$.

PRESENTACION DEL ARTICULO

"MODULOS CON UN GRUPO DE OPERADORES"

(de D.G. Higman)

1. Sea G un grupo. Llamaremos G-módulo a un grupo M sobre el cual opera G, es decir, que para toda $g, g_1, g_2 \in G$, m, m_1, $m_2 \in M$, si G es multiplicativo y M aditivo, tenemos:

i) está definido un elemento $gm \in M$.

ii) $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$.

iii) $(g_1 + g_2)m = g_1 m + g_2 m$.

iv) $1m = m$, en donde 1 es el elemento idéntico de G.

Sea Ω un conjunto. Llamaremos G-Ω-módulo a un G-módulo M sobre el cual opera Ω, es decir, que para toda $\omega \in \Omega$, $m \in M$, $g \in G$,

i) está definido un elemento $m\omega \in M$.

ii) $g(m\omega) = (gm)\omega$.

2. Sea S un subgrupo de índice finito de G. Llamaremos M_s al G-Ω-módulo M considerado como S-Ω-módulo.

Sea $R = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un conjunto de representantes izquierdos de G sobre S, tal que $R \cap S = \{1\} = \{g_1\}$.

Induciremos un G-Ω-módulo N^G a partir de un S-Ω-módulo N, mediante sumas formales, de lasiguiente manera:

i) $N^G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i \circ n_i \ / \ g_i \in R,\ n_i \in N \right\}$,

con la operación + definida por

ii) $\sum g_i \circ n_i + \sum g_i \circ n_i' = \sum g_i \circ (n_i + n_i')$

y la operación por G y Ω definida por lo siguiente:

La multiplicación por $g \in G$ define una permutación τ en el conjunto de índices de los elementos de R, es decir,

$$gg_i = g_k s_i, \quad \text{con } k = \tau(i),\ g_k \in R,\ s_k \in S.$$

Así, definimos

iii) $g(\sum g_i \cdot n_i) = \sum g_k \cdot s_i n_i$

Por otra parte, para $w \in \Omega$, definimos

iv) $(\sum g_i \cdot n_i)w = \sum g_i \cdot n_i w$

Desde luego, esta construcción es independiente de la selección de representantes, pues si $R' = \{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$ es otro conjunto de representantes, y llamamos $N^{G'}$ al G-Ω-módulo inducido mediante él, el G-Ω-homomorfismo $h: N^G \longrightarrow N^{G'}$ inducido por la correspondencia $g_i \longmapsto g_i'$ resulta isomorfismo.

3. LEMA 1. <u>La función</u>

$$\beta : M \longrightarrow (M_s)_s^G$$

<u>definida por</u>

$$\beta(m) = \sum g_i \cdot g_i^{-1} m$$

<u>es un G-Ω-monomorfismo</u>. <u>Además</u>, $(\mathrm{Im}\ \beta)_s$ <u>es un sumando directo de</u> $(M_s)_s^G$.

Obviamente, β es un Ω-homomorfismo. Ahora, si $g \in G$, $m \in M$, dado que si

$$gg_i = g_k s_i,$$

tenemos

$$g = g_k s_i g_i^{-1}$$
$$g_k^{-1} g = s_i g_i^{-1}$$

podemos comprobar que

$$g(\beta(m)) = g\sum g_i\cdot g_i^{-1}m = \sum g_k\cdot s_i g_i^{-1}m = \sum g_k\cdot g_k^{-1}gm = \beta(gm)$$

Es decir, β es, efectivamente, un G-Ω-homomorfismo.

Ahora bien: sea $m \in M$ tal que $\beta(m) = 0$. Esto quiere decir que

$g_i^{-1}m = 0$ para toda $g_i \in R$.

En particular, $1m = m = 0$, y β es un G-Ω-monomorfismo.

Consideremos ahora al Ω-submódulo M' de todos los elementos de $(M_s)^G$ en los cuales $m_1 = 0$. Demostraremos que

$(M_s)_s^G = (\mathrm{Im}\beta)_s \oplus M'$:

i) Puesto que si $s \in S$, $sg_i = g_k s_i$,

$s\sum g_i\cdot m_i = \sum g_k\cdot s_i m_i$

Para $g_k=1$, analicemos $s_i m_i$:

Si τ es lapermutación definida por s, vemos que

$sg_1 = s1 = 1s = g_1 s$, es decir, $\tau(1)=1$, y esto nos implica que, si $sg_1 = 1s_i$, $g_i=1$.

Por tanto, si $m_1=0$, $s_1m_1=0$, y $s\sum g_i\cdot m_i \in M'$.

Es decir, M' es un S-Ω-submódulo.

ii) Sea $g_i\cdot m_i \in (M_s)^G$. Podemos escribir

$\sum g_i\cdot m_i = \sum g_i\cdot m + \sum g_i\cdot m_i'$

con $g_i\cdot m_i' \in M'$, y $g_i\cdot m \in \mathrm{Im}\,\beta$, en donde

$m=m_1$ y $m_i'=m_i-m$.

iii) Sea $\sum g_i\cdot m_i \in \mathrm{Im}\beta \cap M'$. Entonces,

$\sum g_i\cdot m_i = \beta(m)$,

es decir,

$m_i = g_i^{-1}m$

O sea,

$g_i m_i = m$ para toda i.

Como en particular $m_1=0$, $m=0$, y

$\sum g_i \cdot m_i = \beta(0) = 0 \in (M_s)^G$.

4. LEMA 1'. <u>La función</u>

$\beta' : (M_s)^G \longrightarrow M$

<u>definida por</u>

$$\beta'(\sum g_i \circ m_i) = \sum g_i m_i$$

<u>es un G-Ω-epimorfismo.</u> <u>Además,</u> $(\mathrm{Ker}\,\beta')_s$ <u>es un sumando directo de</u> $(M_s)_s^G$.

Obviamente, β' es un Ω-homomorfismo. Ahora, si $g \in G$, - $\sum g_i \cdot m_i \in (M_s)^G$,

$$g\,\beta'(\sum g_i \cdot m_i) = g \sum g_i m_i = \sum g g_i m_i = \sum g_k s_i m_i =$$
$$= \beta'(\sum g_k \cdot s_i m_i) = \beta'(g \sum g_i \circ m_i),$$

y β' es un G-Ω-homomorfismo.

Ahora bien, para cualquier $m \in M$, podemos dar $1 \cdot m \in (M_s)^G$ tal que $\beta'(1 \cdot m) = 1m = m$.

Es decir, es un G-Ω-epimorfismo.

Consideremos ahora al Ω-submódulo M^+ de todos los elementos de la forma $1 \cdot m$, con $m \in M$. Demostraremos que $(M_s)_s^G = (\mathrm{Ker}\,\beta')_s \oplus M^+$.

i) Puesto que, si $s \in S$, $m \in M$, $s1=1s$,

$s(1 \circ m) = 1 \circ sm$,

y M^+ es un S-Ω-submódulo.

ii) Sea $\sum g_i \cdot m_i \in (M_s)^G$. Podemos escribir

$$\sum g_i \cdot m_i = \sum g_i \cdot m_i' + 1 \cdot m,$$

con $1 \cdot m \in M^+$ y $\sum g_i \cdot m_i' \in \mathrm{Ker}\,\beta'$, si

$$m = \sum g_i m_i, \quad m_1' = m_1 - m, \quad m_i' = m_i \text{ para toda } i>1.$$

Entonces,

$$\beta'(\Sigma g_i \cdot m_i') = \Sigma g_i m_i' = m_1 - \Sigma g_i m_i + \sum_2^n g_i m_i = 0.$$

iii) Sea $1\cdot m \in \mathrm{Ker}\beta' \cap M^+$.

Entonces, $\beta'(1\cdot m) = m = 0$ (*).

5. Sea M un G-Ω-módulo, S un subgrupo de G de índice finito. Entonces,

TEOREMA 1. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Para todo G-Ω-módulo K, si M es un G-Ω-submódulo de K tal que M_s es un sumando directo de K_s, entonces M es un sumando directo de K.

(b) La $\mathrm{Im}\beta$ es un sumando directo de $(M_s)^G$ (β definida en el lema 1).

(c) Existe un sumando directo $M^+ \simeq M$ de $(M_s)^G$.

(d) Existe un S-Ω-endomorfismo α de M tal que $\Sigma g_i \cdot \alpha g_i^{-1} = 1$ en el anillo de endomorfismos de M.

TEOREMA 1'. Las siguientes condiciones se implican mutuamente, y son equivalentes a las condiciones del Teorema 1:

(a') Para cada G-Ω-módulo K, si M^+ es un G-Ω-submódulo de K tal que $M \simeq K/M^+$ y M_s^+ es un sumando directo de K_s, entonces M^+ es un sumando directo de K.

(b') El $\mathrm{Ker}\beta'$ es un sumando directo de $(M_s)^G$ (β' definida en el lema 1').

(*) El autor hace notar aquí que otra construcción isomorfa a N^G se logra mediante funciones de G en N con ciertas características. Nosotros trataremos el caso más adelante.

Demostración del Teorema 1:

1) (a) implica (b):

Dado el lema 1, (b) es un caso particular de (a), si hacemos $K = (M_s)^G$, $M = \mathrm{Im}\,\beta$.

2) (b) implica (c):

Puesto que β es monomorfismo, podemos hacer $M^+ = \mathrm{Im}\,\beta \simeq M$

3) (c) implica (d):

Sea $\sum g_i \cdot m_i \in (M_s)^G$.

i) Sea $\gamma: (M_s)^G \longrightarrow (M_s)^G$ definida por

$$\gamma(\sum g_i \cdot m_i) = 1 \cdot m_1$$

Entonces,

A) Si $s \in S$, $sg_i = g_k s_i$, y

$$\gamma(s \sum g_i \cdot m_i) = \gamma(\sum g_k \cdot s_i m_i) = 1 \cdot sm_1 = s(1 \cdot m_1) = $$
$$= s\gamma(\sum g_i \cdot m_i).$$

Por lo tanto, $\gamma \in \mathrm{End}_S((M_s)^G)$.

B) Sean g_i, $g_j \in R$ tales que

$$g_j^{-1} g_i = g_k s_i \quad \text{con } g_k = 1.$$

Entonces,

$$g_i = g_j g_k s_i = g_j s_i$$

Y por tanto,

$s_i = 1$, y

$g_i = g_j$, es decir, $i = j$.

C) De lo anterior se desprende que, si $g_j^{-1} g_i = g_k s_i$,

$$g_j \gamma g_j^{-1}(\sum g_i \cdot m_i) = g_j \gamma(\sum g_k \cdot s_i m_i) = g_j(1 \cdot m_j) = g_j \cdot m_j$$

de forma que

$$\sum g_j \gamma g_j^{-1}(\sum g_i \cdot m_i) = \sum g_j \cdot m_j = \sum g_i \cdot m_i$$

Es decir,

$$\sum g_i \gamma g_i^{-1} = 1_{(M_s)^G}$$

ii) Por la condición (c), existe un G-Ω-endomorfismo - μ de $(M_s)^G$ tal que Imμ=M^+ y $\mu n = n$ para toda $n \in M^+$.

Sea α el S-Ω-endomorfismo de M^+ inducido por el S-Ω-endomorfismo $\mu\gamma\mu$ de $(M_s)^G$. Entonces, si $n \in M^+$,

$$n = \mu \Sigma g_i \; g_i^{-1}\mu(n) = \Sigma g_i \mu\gamma\mu g_i^{-1}(n) = \Sigma g_i \alpha \, g_i^{-1} \; (n)$$

Dado que $M^+ \cong M$, (c) implica (d).

4) (d) implica (a):

Supóngase que M es un G-Ω-submódulo de un G-Ω-módulo K tal que M_s es un sumando directo de K_s. Entonces existe un S-Ω-endomorfismo σ de K tal que Im $\sigma \subseteq M$(*), y $\sigma(m) = m$ para toda -- $m \in M$. Debemos demostrar que que (d) implica la existencia de - un G-Ω-endomorfismo τ de K con las mismas propiedades.

Verificaremos que $\tau = \Sigma g_i \alpha\sigma g_i^{-1}$ cumple con lo requerido, si α es el S-Ω-endomorfismo de la condición (d):

i) Puesto que σ: $K \to M$ y α: $M \to M$ son S-Ω-homomorfismos, $\alpha\sigma$: $K \to M$ es un S-Ω-homomorfismo.

Además, si $g \in G$, $g_i \in R$, $gg_i = g_k s_i$, y por tanto $s_i = g_k^{-1} g g_i$, o sea, $s_i g_i^{-1} = g_k^{-1} g$. Entonces,

$$gg_i \alpha\sigma g_i^{-1} = g_k s_i \alpha\sigma g_i^{-1} = g_k \alpha\sigma s_i g_i^{-1} = g_k \alpha\sigma g_k^{-1} g$$

Por tanto, si $u \in K$,

$$g\tau(u) = g \Sigma g_i \alpha\sigma(g_i^{-1}u) = \Sigma g_k \alpha\sigma(g_k^{-1}gu) = \tau(gu),$$

y τ es un G-Ω-endomorfismo cuya imagen está contenida en M.

ii) Dado que σ restringido a M es la identidad, si $m \in M$,

(*) Dehecho, el autor sólo explicita esto, pero evidentemente - la propiedad que sigue de inmediato implica que Im σ = M.

$g_i^{-1} \in M$, y

$$m = \sum g_i \alpha(g_i^{-1}m) = \sum g_i \alpha\sigma(g_i^{-1}m) = \tau(m).$$

Demostración del Teorema 1':

1) (a') implica (b'):

Dado el lema 1', (b') es un caso particular de (a'), -- puesto que otra redacción de (a') es:

La sucesión siguiente es exacta (1^er Teorema de Isomor-- fismo):

$$0 \longrightarrow M^+ \xrightarrow{f} K \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

y la sucesión siguiente se escinde:

$$0 \longrightarrow M_s^+ \xrightarrow{f_s} K_s \xrightarrow{\bullet} M_s \longrightarrow 0.$$

Con esto, haciendo $M^+ = \operatorname{Ker}\beta'$, $K = (M_s)^G$, queda el caso particular de

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\beta' \longrightarrow (M_s)^G \xrightarrow{\beta'} M_s \longrightarrow 0$$

como sucesión exacta, y

$$0 \longrightarrow (\operatorname{Ker}\beta')_s \longrightarrow (M_s)^G_s \xrightarrow{\beta'_s} M_s \longrightarrow 0$$

como sucesión que se escinde.

2) (b') implica (c) del Teorema 1:

La sucesión que se escinde

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\beta' \longrightarrow (M_s)^G \xrightarrow{\beta'} M \longrightarrow 0$$

implica la existencia de un sumando directo de $(M_s)^G$ isomorfo a M.

Sabemos que (c) implica (d). Demostraremos por último - que

3) (d) implica (a'):

Supóngase (d), y sea M^+ un G-Ω-submódulo de un G-Ω-mó- dulo K tal que $M \simeq K/M^+$ y $K_s = M_s^+ \oplus N$. Entonces existe un -

S-Ω-endomorfismo σ de K tal que $\sigma(M^+) = 0$ y $\sigma(n) = n$ para toda $n \in N$.

i) Puesto que

$$M_s \simeq K_s/M_s^+ \simeq N,$$

el S-Ω-endomorfismo α de la condición (d) induce un S-Ω-endomorfismo de N, que también llamaremos α, y tal que, si $u \in K$, - $\sum g_i \alpha\sigma g_i^{-1}(u) = \bar{u}$, la clase de equivalencia de u módulo M^+ (*).

ii) Consideremos $\tau = \sum g_i \alpha\sigma g_i^{-1}$:

A) Análogamente al paso 4.i de la demostración del Teorema 1, τ es un G-Ω-endomorfismo de K.

B) Sea $v \in M^+$. E tonces, $g_i^{-1}v \in M^+$, $\sigma(g_i^{-1}v) = 0$, y

$$\tau(v) = \sum g_i \alpha\sigma(g_i^{-1}v) = 0.$$

iii) Consideremos $(1 - \tau) \in End_G(K)$:

A) Para $m \in M$, $(1 - \tau)(m) = \bar{m} - \bar{m} = 0$.

B) Para $v \in M^+$, $(1 - \tau)(v) = v$

Es decir, M^+ es sumando directo de K.

6. OBSERVACIONES:

(1) La condición (d) del Teorema 1 es independiente de - la selección de representantes izquierdos, pues si α es cual--- quier S-endomorfismo de M, $\{g_1', g_2', \ldots, g_n'\}$ un conjunto de representantes izquierdos distinto de I,

$$g_i' = g_k s_k ,$$

y así,

(*) Como se ve, el autor está de hecho identificando M con K/M^+ mediante el isomorfismo. Lo haremos también, ya en nuestra explicitación de la demostración, en el punto (iii A).

$$\sum g_i'\alpha(g_i')^{-1} = \sum g_k s_k \alpha(g_k s_k)^{-1} = \sum g_k s_k \alpha s_k^{-1} g_k^{-1} =$$
$$= \sum g_k s_k s_k^{-1} \alpha g_k^{-1} = \sum g_k \alpha g_k^{-1}$$

Más aún: si $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es un conjunto de representantes derechos, f_i^{-1} es un representante izquierdo, y

$$\sum g_i \alpha g_i^{-1} = \sum f_i^{-1} \alpha f_i$$

(2) Una prueba directa de que (d) implica (b), usando solamente la primera parte del lema 1, es la siguiente:

Supongamos (d). $\beta : M \longrightarrow (M_s)^G$ es un monomorfismo, con $\beta(m) = \sum g_i \cdot g_i^{-1} m$. Entonces, el hecho de que el Ω-homomorfismo $\alpha^+ : (M_s)^G \longrightarrow M$ definido por $\alpha^+(\sum g_i \cdot m_i) = \sum g_i \alpha(m_i)$ es un G-Ω-homomorfismo se sigue de que, si $gg_i = g_k s_i$,

$$\alpha^+(g \sum g_i \cdot m_i) = \alpha^+(\sum g_k \cdot s_i m_i) = \sum g_k \alpha(s_i m_i) =$$
$$= \sum g_k s_i \alpha(m_i) = \sum g \alpha(m_i) = g\alpha^+(\sum g_i \cdot m_i).$$

Por (d), $\alpha^+\beta(m) = \alpha^+ \sum g_i \cdot g_i^{-1} m = \sum g_i \alpha(g_i^{-1} m) = m$, es decir, $\alpha^+\beta = 1$, lo cual implica que

$$(M_s)^G = \operatorname{Im}\beta \oplus \operatorname{Ker}\alpha^+$$

Fácilmente se encuentra una prueba directa similar de que (d) implica (b'), considerando $\alpha^x : M \longrightarrow (M_s)^G$ definida por $\alpha^x(m) = \sum g_i \cdot \alpha(g_i^{-1} m)$. Claramente, α^x es un G-Ω-homomorfismo, y

$$\beta'\alpha^x(m) = \beta'(\sum g_i \cdot \alpha(g_i^{-1} m)) = \sum g_i \alpha(g_i^{-1} m) = m.$$

Entonces, tenemos que

$$(M_s)^G = \operatorname{Ker}\beta' \oplus \operatorname{Im}\alpha^x$$

Cabe hacer notar que, en caso de que α sea un G-Ω-automorfismo de M, $\alpha^+ = \alpha\beta'$, y así $\operatorname{Ker}\alpha^+ = \operatorname{Ker}\beta'$.

(3) Aplicando la última nota de la observación anterior, si en particular la multiplicación por $n=[G:S]$, el índice de S en G, define un automorfismo en M, entonces la condición (d) es satisfecha por el inverso de este automorfismo, pues, como obviamente es un G-Ω-automorfismo,

$$\sum g_i n^{-1} g_i^{-1}(m) = \sum n^{-1}(g_i g_i^{-1})(m) = n^{-1}nm = m.$$

Entonces se cumple la nota mencionada, y tenemos el siguiente

COROLARIO: <u>Si la multiplicación por</u> $[G:S]$ <u>define un automorfismo del</u> G-Ω-<u>módulo</u> M, <u>entonces</u> M <u>tiene la propiedad (a) del Teorema 1, y</u> $(M_S)^G = \operatorname{Im}\beta \oplus \operatorname{Ker}\beta'$.

7. Sea G un grupo finito, F un campo de característica p. Usaremos ahora el término G-F-módulo para aquellos módulos que corresponden a representaciones de G por matrices con coeficientes en F, es decir, que son G-F-módulos en el sentido de las secciones precedentes, y además son espacios vectoriales de dimensión finita sobre F.

Supóngase que el subgrupo S de G contiene un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces, dado que el índice de S en G es primo relativo a p, la multiplicación por $[G:S]$ define un automorfismo en todo módulo (espacio vectorial) sobre F, y por tanto en todo G-F-módulo. Así, por la observación (3), tenemos:

TEOREMA 2. <u>Si</u> S <u>contiene un</u> p-<u>subgrupo de Sylow de</u> G, <u>todo</u> G-F-<u>módulo</u> M <u>tiene las siguientes propiedades</u>:

(a) Si M es un G-F-submódulo de un G-F-módulo K, M es un sumando directo de K si y sólo si M_s es un sumando directo de K_s.

(b) $(M_s)^G = \operatorname{Im} \beta \oplus \operatorname{Ker} \beta'$, en donde β es el G-F-monomorfismo definido en el lema 1, y β' el G-F-epimorfismo definido en el lema 1'.

3

DESARROLLO GENERAL DE LA TEORIA

1. En este capítulo, como dijimos en la introducción, desarrollaremos un aspecto general del comportamiento que sostienen tres functores con ciertas características. Posteriormente aplicaremos esta teoría a tres functores particulares.

Mencionaremos primero una serie de propiedades, que estarán siempre presentes a lo largo del capítulo:

Sean $\bar{A}$ y $\bar{B}$ dos categorías, F un functor de $\bar{A}$ en $\bar{B}$, T y H dos functores de $\bar{B}$ en $\bar{A}$.

Supóngase que

i) T es adjunto izquierdo de F, es decir, $\xi : T \longrightarrow F : \xi^{-1}$

ii) F es adjunto izquierdo de H, es decir, $\sigma : F \longrightarrow H : \sigma^{-1}$

iii) H es isomorfo a T con un isomorfismo η natural.

iv) Si M es un objeto de $\bar{A}$,

$\bar{\beta}$ un monomorfismo de M en HFM, y

β' un epimorfismo de TFM en M,

el siguiente diagrama conmuta:(*)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(FM,FM) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\xi^{-1}"'] \arrow[ddr, dashed, "\nu"] & \mathrm{Hom}\,(M,HFM) \arrow[d, "{(1,\eta)}"] \\
\mathrm{Hom}\,(TFM,M) \arrow[d, "{(\eta,1)}"'] & \mathrm{Hom}\,(M,TFM) \arrow[d, "{(1,\beta')}"] \\
\mathrm{Hom}\,(HFM,M) \arrow[r, "{(\bar{\beta},1)}"] & \mathrm{Hom}\,(M,M)
\end{tikzcd}$$

(*) Sea $f: M \longrightarrow N$, $g: P \longrightarrow M$, $h: N \longrightarrow P$. Llamamos
Hom (P,f) o bien (1,f) a la aplicación $g \longmapsto fg$, y
Hom (f,P) o bien (f,1) a la aplicación $h \longmapsto hf$.

Con estos presupuestos, demostraremos los siguientes tres teoremas:

2. TEOREMA: $F\bar{\beta}$ divide, y $F(\mathrm{Im}\,\bar{\beta})$ es sumando directo de FHFM.

a) Para demostrar que $F\bar{\beta}$ divide, considérese el diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}\,(FM,FM) & \xleftarrow{\ \delta^{-1}\ } & \mathrm{Hom}\,(M,HFM) \\
(F\bar{\beta},1)\uparrow & /// & \uparrow(\bar{\beta},1) \\
\mathrm{Hom}\,(FHFM,FM) & \xleftarrow[\ \delta^{-1}\ ]{} & \mathrm{Hom}\,(HFM,HFM)
\end{array}
$$

Dado que

$$\delta(1_{FM}) = H1_{FM}\bar{\beta} = \bar{\beta},$$

tenemos que

$$\delta^{-1}(\bar{\beta}) = 1_{FM}.$$

Entonces,

$$\delta^{-1}(\bar{\beta},1)(1_{HFM}) = \delta^{-1}(1_{HFM}\bar{\beta}) = \delta^{-1}(\bar{\beta}) = 1_{FM}$$

y, por la naturalidad de δ,

$\delta^{-1}(1_{HFM})$ es tal que

$$\delta^{-1}(1_{HFM})(F\bar{\beta},1) = 1_{FM},$$

es decir,

$$\delta^{-1}(1_{HFM})F\bar{\beta} = 1_{FM}.$$

b) Dado lo anterior, $FHFM = F(\mathrm{Im}\,\bar{\beta}) \oplus \mathrm{Ker}\left[\delta^{-1}(1_{HFM})\right]$.

3. TEOREMA: $F\beta'$ divide, y $F(\mathrm{Ker}\,\beta')$ es un sumando directo de FTFM.

a) Para demostrar que $F\beta'$ divide, considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}\,(TFM,TFM) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "(1,\beta')"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathrm{Hom}\,(FM,FTFM) \arrow[d, "(1,F\beta')"] \\
\mathrm{Hom}\,(TFM,M) \arrow[r, "\xi"'] & \mathrm{Hom}\,(FM,FM)
\end{tikzcd}$$

Tenemos:

$\xi(1,\beta')(1_{TFM}) = \xi\beta' 1_{TFM} = \xi\beta' = \beta'(1_{FM}\ i) = 1_{FM}$.

Por la naturalidad de ξ,

$\xi(1_{TFM})$ es tal que

$(1,F\beta')\ (1_{TFM}) = 1_{FM}$,

es decir,

$F\beta'\xi(1_{TFM}) = 1_{FM}$.

b) Dado lo anterior, $FTFM = \mathrm{Im}\left[\xi(1_{TFM})\right] \oplus F(\mathrm{Ker}\beta')$.

4. TEOREMA: Las siguientes tres condiciones son equiva-- lentes:

i) $\bar{\beta}$ divide.

ii) β' divide.

iii) Existe un endomorfismo α de FM tal que $\nu(\alpha) = 1_M$, -- con la aplicación ν definida por la composición en el diagrama conmutativo expuesto en el primer párrafo.

1) Que $\bar{\beta}$ divide quiere decir que existe un morfismo ---- β_*: HFM $\to$ M tal que $\beta_*\bar{\beta} = 1_M$, lo cual es decir que la aplicación $\mathrm{Hom}(\bar{\beta},M)$ asocia a β_* con 1_M.

2) Dado que η y ξ son biyecciones, β_* proviene de un morfismo de Hom(TFM,M), que a su vez tiene imagen inversa α en --- Hom(FM,FM). Es decir, lo anterior (punto 1) resulta equivalente a afirmar que existe $\alpha \in$ Hom(FM,FM) tal que

$(\bar{\beta},1)(\eta^{-1},1)\,\delta\,(\alpha) = \nu(\alpha) = 1_M$.

3) Por la conmutatividad del diagrama, esto resulta lo -

mismo que el hecho de que

$$(1,\beta')(1,\eta)\delta(\alpha) = 1_M$$

Lo cual es decir que β' divide pues, si llamamos

$$\beta'_* = (1,\eta)\delta(\alpha),$$

β'_* es tal que

$$(1,\beta')\beta'_* = \beta'\beta'_* = 1_M,$$

e inversamente, dado que η y δ son biyecciones.

A la aplicación ν le llamamos la <u>Norma</u> de un morfismo.

Supóngase ahora que, además de las propiedades enunciadas en el párrafo 1, tenemos que

v) F es fiel, es decir, que si f_1 y f_2 son morfismos, $F(f_1) = F(f_2)$ implica $f_1 = f_2$.

5. Sea $\mathcal{M}'$ la clase de los monomorfismos de $\bar{B}$ que dividen. Sea $\mathcal{M} = F^{-1}(\mathcal{M}') \in \bar{A}$. Desde luego, $\mathcal{M}'$ es inyectivamente perfecta, todos los objetos de $\bar{B}$ son inyectivos relativos a $\mathcal{M}'$, y tenemos el siguiente

LEMA: <u>Decir que $\bar{\beta}$ divide es equivalente a decir que</u> M <u>es inyectivo relativo a</u> $\mathcal{M}$.

1) Supongamos que M es inyectivo relativo a $\mathcal{M}$. Por aplicación directa de la definición, existe $\bar{\beta}_*$: $HFM \to M$ tal que $\bar{\beta}_*\bar{\beta} = 1_M$, como se observa en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "1_M"'] & HFM \arrow[dl, "\bar{\beta}_*"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\bar{\beta}$ divide.

2) Supongamos ahora que $\bar{\beta}$ divide.

Dada la propiedad (v) y las especificaciones puestas al principio de este párrafo, se cumplen las hipótesis del Teorema del Adjunto (Dual), y tenemos que $FM \in \bar{I}(\mathcal{M}')$. Entonces,

$$H(FM) \in \bar{I}(F^{-1}(\mathcal{M}')) = \bar{I}(\mathcal{M}).$$

Puesto que $\bar{\beta}$ divide, M es sumado directo de HFM, y, por el mismo teorema, $M \in \bar{I}(\mathcal{M})$.

6. Sea ahora $\mathcal{E}'$ la clase de los epimorfismos de $\bar{B}$ que dividen. Sea $\mathcal{E} = F^{-1}(\mathcal{E}') \in \bar{A}$. Desde luego, $\mathcal{E}'$ es proyectivamente perfecta, todos los objetos de $\bar{B}$ son proyectivos relativos a $\mathcal{E}'$, y tenemos el siguiente

LEMA: <u>Decir que</u> β' <u>divide es equivalente a decir que</u> M es proyectivo relativo a $\mathcal{E}$.

Como se ve, este lema es el dual del anterior, y la demostración enteramente similar:

1) Supongamos que M es proyectivo relativo a $\mathcal{E}$. Por aplicación directa de la definición, existe β'_x, morfismo de M en TFM tal que $\beta'\beta'_x = 1_M$, como se observa en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\exists \beta'_x"'] \arrow[d, "1_M"] & \\ TFM \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es decir, β' divide.

2) Supongamos que β' divide.

Dado que se cumplen las hipótesis del Teorema del Adjunto, tenemos que $FM \in \bar{P}(\mathcal{E}')$,

lo cual implica que

$$TFM \in \bar{P}(F^{-1}(\mathcal{E}')) = \bar{P}(\mathcal{E}).$$

7. Con lo anterior, queda demostrado el principal teorema de nuestro estudio, que enunciamos a continuación:

TEOREMA: <u>Las siguientes tres propiedades son equivalentes (bajo las hipótesis del capítulo)</u>:

i) M <u>es inyectivo relativo a</u> $\mathcal{M}$.

ii) M <u>es proyectivo relativo a</u> $\mathcal{E}$.

iii) <u>Existe un morfismo</u> α Hom(FM,FM) <u>tal que</u> $\nu(\alpha) = 1_M$.

La demostración es corolarial, uniendo el resultado del párrafo 4 con los de los párrafos 5 y 6.

4

LOS FUNCTORES F, T y H

1. Para aplicar la teoría desarrollada en el capítulo anterior, definiremos tres functores y dos morfismos particulares.

Comenzaremos por precisar las categorías en que trabajaremos.

LEMA: La clase de todos los G-módulos,(*) junto con los G-homomorfismos, forma una Categoría.

Llamaremos ${}_G\bar{M}$ a esta categoría.

2. Sea G un grupo, S un subgrupo de índice finito n en G.

Definición: Llamaremos F al functor que asocia a cada G-módulo M el S-módulo que resulta de "olvidar" la actuación de G en M y considerar sólo la de S, y análogamente con los G-homomorfismos.

Definición: Llamaremos T al functor que asocia a cada S-módulo N el G-módulo definido en el capítulo 2 como N^G. Si h es un morfismo de Hom(N,N'), Th queda definido, si $\sum g_i \cdot n_i \in TN$, por

$$Th\ (\sum g_i \cdot n_i) = \sum g_i \cdot h(n_i).$$

Definición: Llamaremos H al functor que asocia a cada S-módulo N el G-módulo inducido por las funciones de G en N y tales que, si $g \in G$, $s \in S$, $f \in HN$, entonces $f(sg) = sf(g)$.

La operación por G queda definida como sigue: sean g_1, -

(*) Para la definición de G-módulo, véase el capítulo 2 (G es un grupo).

$g_2 \in G$, $f \in HN$; definimos

$$g_1 f(g_2) = f(g_2 g_1).$$

Además, si $h \in Hom(N,N')$, Hh queda definido, si $f \in HN$, por

$$Hh(f) = hf.$$

<u>Definición</u>: Llamaremos $\bar{\beta}$ al morfismo de $Hom(M,HFM)$ definido por

$$\bar{\beta}(m) = f_m,$$

en donde $m \in M$, y $f_m: G \to FM$ es tal que, si $g \in G$,

$$f_m(g) = gm.$$

<u>Definición</u>: Llamaremos β' al morfismo de $Hom(TFM,M)$ definido como sigue: sea $\sum g_i . m_i \in TFM$. Entonces,

$$\beta'(\sum g_i . m_i) = \sum g_i m_i \text{ (*)}.$$

En los siguientes párrafos comprobaremos que se cumplen los presupuestos del capítulo anterior.

3. TEOREMA: <u>El functor</u> T <u>es adjunto izquierdo de</u> F, <u>es decir</u>, $\xi : T \dashrightarrow F : \xi^{-1}$.

Tenemos que demostrar que, si M es un objeto de ${}_G\bar{M}$, N un objeto de ${}_S\bar{M}$, existe una biyección natural

$$\xi : Hom(TN,M) \to Hom(N,FM).$$

1) Considérese la composición ξ

$$N \xrightarrow{1i} TN \xrightarrow{h} N.$$

Es decir, si $h \in Hom(TN,M)$,

(*) Es decir, β' es esencialmente el mismo del capítulo 2 (2.4).

$\xi(h) = h\circ(1\circ i).$

Explícitamente, si $n \in N$,

$\xi h(n) = h(1\cdot n).$

ξh es un S-homomorfismo, pues si $n \in N$, $s \in S$,

$$\xi h(sn) = h(1\cdot sn) = h(s(1\cdot n)) = sh(1\cdot n) = s\xi h(n).$$

2) Considérese ahora la composición ξ^{-1}

$$TN \xrightarrow{Th'} TFM \xrightarrow{\beta'} M$$

Es decir, si $h' \in Hom(N,FM)$,

$\xi^{-1}(h') = \beta' Th'.$

Explícitamente,

$$\xi^{-1}h'(\Sigma g_i\cdot n_i) = \beta' Th'(\Sigma g_i\cdot n_i) = \beta'\Sigma g_i\cdot h'(n_i) =$$
$$= \Sigma g_i h'(n_i).$$

$\xi^{-1}h'$ es un G-homomorfismo, pues si $g \in G$, $gg_i = g_k s_i$, y

$$\xi^{-1}h'(g\Sigma g_i\cdot n_i) = \xi^{-1}h'(\Sigma g_k\cdot s_i n_i) = \Sigma g_k h'(s_i n_i) =$$
$$= \Sigma g_k s_i h'(n_i) = \Sigma gg_i h'(n_i) =$$
$$= g\Sigma g_i h'(n_i) = g\xi^{-1}h'(\Sigma g_i\cdot n_i).$$

3) Efectivamente,

i) Sea $h \in Hom(TN,N)$, $\Sigma g_i\circ n_i \in TN$. Entonces,

$$\xi\xi^{-1}h(\Sigma g_i\cdot n_i) = \Sigma g_i\xi h(n_i) = \Sigma g_i h(1\cdot n_i) = \Sigma h(g_i\cdot n_i) =$$
$$= h(\Sigma g_i\cdot n_i).$$

Es decir,

$\xi\xi^{-1} = 1_{Hom(TN,M)}$

ii) Sea $h' \in Hom(N,FM)$, $n \in N$. Entonces,

$$\xi^{-1}\xi h'(n) = \xi^{-1}h'(1\circ n) = 1h'(n) = h'(n).$$

Es decir,

$\xi^{-1}\xi = 1_{Hom(N,FM)}$

4) Demostraremos ahora que ξ es natural, es decir, que los diagramas siguientes conmutan:

Sean M y M' dos objetos de ${}_G\bar{M}$.

Sean N y N' dos objetos de ${}_s\bar{M}$.

i)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(TN,M) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "{(Tl,1)}"'] & \mathrm{Hom}(N,FM) \arrow[d, "{(l,1)}"] \\
\mathrm{Hom}(TN',M) \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}(N',FM)
\end{tikzcd}$$

en donde $l \in \mathrm{Hom}(N,N')$, y

ii)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(TN,M) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "{(1,l')}"'] & \mathrm{Hom}(N,FM) \arrow[d, "{(1,Tl')}"] \\
\mathrm{Hom}(TN,M') \arrow[r, "\xi"] & \mathrm{Hom}(N,FM')
\end{tikzcd}$$

en donde $l' \in \mathrm{Hom}(M',M)$.

Sea $h \in \mathrm{Hom}(TN,M)$. Tenemos que:

i) $\mathrm{Hom}(l,FM)\xi h = \mathrm{Hom}(l,FM)h(1\cdot i) = h(1\cdot i)l = h(1\cdot(il)) =$

$= h(1\cdot li) = hTl(1\cdot i) = \xi hTl = \xi\mathrm{Hom}(Tl,M)h.$

ii) $\mathrm{Hom}(N,Tl')\xi h = l'h(1\cdot i) = \xi(TN,l')h.$

4. TEOREMA: <u>El functor</u> F <u>es adjunto izquierdo de</u> H, <u>es decir</u>, $\delta : F \longrightarrow H : \delta^{-1}$.

Tenemos que demostrar que, si M es un objeto de ${}_G\bar{M}$, N un objeto de ${}_s\bar{M}$, existe una biyección natural

$\delta : \mathrm{Hom}(FM,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,HN)$.

Considérese la composición

$M \xrightarrow{\bar{\beta}} HFM \xrightarrow{Hh} HN.$

Esto es, si $h \in \mathrm{Hom}(FM,N)$,

$\delta(h) = Hh\bar{\beta}$

$\delta h(m) = Hh\bar{\beta}(m) = Hhf_m = hf_m.$

Entonces,

1) δh es un G-homomorfismo, pues si $m \in M$, $g \in G$,

$\delta h(gm) = Hh\bar{\beta}(gm) = Hhf_{gm}$,

y si $g' \in G$,

$$\delta h(gm)(g') = Hhf_{gm}(g') = Hh(g'gm) = Hhf_m(g'g) =$$
$$= Hhgf_m(g') = gHhf_m(g') = gHh\,\bar{\beta}(m)(g') =$$
$$= g\delta h(m)(g').$$

Es decir,

$\delta h(gm) = g\delta h(m).$

2) δ es inyectiva, pues si h_1, $h_2 \in Hom(FM,N)$ tales que -- $\delta(h_1) = \delta(h_2)$, para toda $g \in G$, $m \in M$,

$Hh_1\bar{\beta}(m) = Hh_2\bar{\beta}(m)$,

y

$Hh_1f_m(g) = Hh_2f_m(g)$,

o sea,

$h_1(gm) = h_2(gm)$.

Por tanto, si en particular $g=1$,

$h_1(m) = h_2(m)$,

y

$h_1 = h_2$.

3) δ es suprayectiva, pues si $h' \in Hom(M,HN)$, $m \in M$, llamemos $h'(m) = f^m\colon G \longrightarrow N$.

Obsérvese que, por ser h' G-homomorfismo,

$h'(gm) = f^{gm} = gh'(m) = gf^m.$

Consideremos un morfismo $h \in HOm(FM,N)$ tal que

$h(m) = f^m(1).$

Entonces, para toda $m \in M$, $g \in G$,

$$\delta h(m)(g) = Hh\bar{\beta}(m)(g) = Hhf_m(g) = h(gm) = f^{gm}(1) =$$
$$gf^m(1) = f^m(g) = h'(m)(g).$$

Por tanto,

$\delta h = h'$.

Es decir, δ es biyectiva.

4) Demostraremos ahora que δ es natural, es decir, que los diagramas siguientes conmutan:

Sean M, M' dos objetos de ${}_G\tilde{M}$.

Sean N, N' dos objetos de ${}_S\tilde{M}$.

i) Sea $l \in Hom(N,N')$

$$\begin{array}{ccc} Hom(FM,N) & \xrightarrow{\delta} & Hom(M,HN) \\ {\scriptstyle (1,l)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1,Hl)} \\ Hom(FM,N') & \xrightarrow{\delta} & Hom(M,HN') \end{array}$$

y

ii) Sea l' $Hom(M',M)$

$$\begin{array}{ccc} Hom(FM,N) & \xrightarrow{\delta} & Hom(M,HN) \\ {\scriptstyle (Fl',1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (l',1)} \\ Hom(FM',N) & \xrightarrow{\delta} & Hom(M',HN) \end{array}$$

Sea $h \in Hom(FM,N)$. Tenemos que:

i) $Hom(M,Hl)\delta h = Hom(M,Hl)Hh\bar{\beta} = HlHh\bar{\beta} = lh\bar{\beta} = H(lh)\bar{\beta} =$

$$= \delta\, lh = \delta\, Hom(FM,l)h.$$

ii) $Hom(l',HN)\delta h = Hom(l',HN)Hh\bar{\beta} = Hh\bar{\beta}l' = h\bar{\beta}l'$

Por otra parte,

$\delta Hom(Fl',N)h = \delta hFl' = H(hFl')\bar{\beta} = hFl'\bar{\beta}$

Ahora: si $m' \in M'$, $g \in G$,

$h\bar{\beta}l'(m')(g) = hf_{l'(m)}(g) = h(gl'(m)) = hl'(gm') =$

$$= hl'f_{m'}(g) = hFl'f_{m'}(g) = hFl'\overline{\beta}(m')(g).$$

5. TEOREMA: <u>El functor</u> H <u>es isomorfo al functor</u> T <u>con un isomorfismo</u> η <u>natural</u>.

Sea N un objeto de ${}_s\overline{M}$.

Sea η : HN $\longrightarrow$ TN definida por

$\eta(f) = \sum g_i \cdot f(g_i^{-1})$,

con $f \in HN$, $g_i \in I$ (véase el capítulo 1).

Tenemos que:

1) η es isomorfismo, pues

i) Si $g \in G$, $gg_i = g_k s_i$, en donde $k = \varepsilon(i)$, la permuta -- ción en los índices definida por g. Así,

$g = g_k s_i g_i^{-1}$,

y

$g_k^{-1} g = s_i g_i^{-1}$.

Tenemos entonces que

$$g\,\eta(f) = g \sum g_i \cdot f(g_i^{-1}) = \sum g_k \cdot s_i f(g_i^{-1}) = \sum g_k \cdot f(s_i g_i^{-1}) =$$
$$= \sum g_k \cdot f(g_k^{-1} g) = \sum g_k \cdot gf(g_k^{-1}) = \eta(gf).$$

ii) η es monomorfismo, pues si $f \in HN$ y es tal que $\eta(f)=0$, o sea, $\sum g_i \cdot f(g_i^{-1}) = 0$, esto implica que $f(g_i^{-1}) = 0$, para toda - $g_i^{-1} \in I^{-1}$, sistema de representantes derechos, y entonces,

$f = 0$.

iii) η es epimorfismo:

Sea $\sum g_i \cdot n_i \in TN$.

Definamos $f \in HN$ tal que $f(g_i^{-1}) = n_i$, es decir, para toda $g_i^{-1} \in G$,

$$f(g_i^{-1}) = f(s_j^{-1} g_j^{-1}) = s_j^{-1} f(g_j^{-1}) = s_j^{-1} n_j.$$

Entonces,

$$\eta(f) = \Sigma\, g_i \circ f(g_i^{-1}) = \Sigma g_i \cdot n_i$$

2) Demostraremos ahora que η es natural, es decir, que el siguiente diagrama conmuta:

Sean N, N' objetos de ${}_S\bar{M}$. Sea $h \in Hom(N,N')$. Sea $f \in HN$.

$$\begin{tikzcd}
HN \arrow[r] \arrow[d, "Hh"'] & TN \arrow[d, "Th"] \\
HN' \arrow[r] & TN'
\end{tikzcd}$$

Tenemos que

$$Th\eta f = Th\eta\Sigma g_i \circ f(g_i^{-1}) = \Sigma\, g_i \circ hf(g_i^{-1}) = \Sigma\, g_i \cdot Hhf(g_i^{-1}) =$$
$$= \eta\, Hhf.$$

6. TEOREMA: <u>El siguiente diagrama conmuta:</u>

$$\begin{tikzcd}
Hom(FM,FM) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\xi^{-1}"'] \arrow[ddr, dashed, "\nu"] & Hom(M,HFM) \arrow[d, "(1{,}\eta)"] \\
Hom(TFM,M) \arrow[d, "(\eta{,}1)"'] & Hom(M,TFM) \arrow[d, "(1{,}\beta')"] \\
Hom(HFM,M) \arrow[r, "(\bar{\beta}{,}1)"'] & Hom(M,M)
\end{tikzcd}$$

Sea $h \in Hom(FM,M)$. Sea $m \in M$. Tenemos que:

$$Hom(M,\beta')Hom(M,\eta)\sigma(h) = \beta'\eta Hh\bar{\beta}(m) = \beta'\eta\, hf_m = \beta'\Sigma g_i \circ hf_m(g_i^{-1}) =$$
$$= \beta'\, Th\, \Sigma g_i \circ f_m(g_i^{-1}) = \beta' Th\eta f_m =$$
$$= \beta' Th\eta\bar{\beta}(m) =$$
$$= Hom(\bar{\beta},1)Hom(\eta,1)\xi^{-1}(h).$$

Explícitamente, la norma de h queda:

$$\nu(h)(m) = \beta'\Sigma\, g_i \cdot hf_m(g_i^{-1}) = \Sigma\, g_i h(g_i^{-1})(m).$$

A esta norma concreta es usual denotarla por N. Queda, pues,

$$N(h) = \Sigma g_i \cdot h g_i^{-1}$$

7. LEMA: F <u>es fiel.</u>

(Trivial).

Consideremos a la clase $\mathcal{M}'$ de los S-monomorfismos que dividen. Entonces,

i) Todo objeto de ${}_S\bar{M} \in \bar{I}(\mathcal{M}')$.

ii) $\mathcal{M}'$ es inyectivamente perfecta.

Consideremos también a la clase $\mathcal{E}'$ de los S-epimorfismos que dividen. Entonces,

i) Todo objeto de ${}_S\bar{M} \in \bar{P}(\mathcal{E}')$.

ii) $\mathcal{E}'$ es proyectivamente perfecta.

Con esto, podemos enunciar en concreto los teoremas del capítulo anterior, aplicados en particular a los elementos del presente. En este caso,

- $\mathcal{M}$ es la clase de los G-monomorfismos que, como S-monomorfismos, dividen.

- $\mathcal{E}$ es la clase de los G-epimorfismos que, como S-epimorfismos, dividen.

5

APLICACION AL ARTICULO DE HIGMAN

Solamente nos resta hacer ver el paralelismo entre los capítulos 2 y 4, es decir, entre los resultados del artículo presentado y las conclusiones particulares de la teoría desarrollada.

Como se ve, el functor F es precisamente la asociación del módulo M con el módulo M_S, y el functor T es la inducción de G-módulos a partir de S-módulos utilizada en el capítulo 2.

El isomorfismo con el functor H nos hace ver que prácticamente seguimos hablando de lo mismo.

Claramente, por tanto, podemos considerar como "iguales" al monomorfismo $\beta: M \longrightarrow (M_S)^G$ y al monomorfismo $\bar{\beta}: M \longrightarrow HFM$, por medio de dicho isomorfismo. Ya hicimos notar, también, el mismo tipo de "igualdad" entre los epimorfismos denominados incluso con la misma letra $\beta': (M_S)^G \longrightarrow M$ y $\beta': TFM \longrightarrow M$.

Desde luego, en 3.2 y 3.3, ya aplicados en la concreción del capítulo 4, están demostrados los lemas 2.3 y 2.4, base de la demostración de los teoremas principales del artículo (2.5). Sin embargo, el capítulo 4 llega a la demostración misma de los teoremas. Para ver esto, basta recordar que el hecho de que un módulo sea sumando directo de otro es equivalente a la existencia de una sucesión que se escinda, en la cual los sumandos del módulo intermedio son la imagen del primero bajo el monomorfismo y la imagen del segundo bajo el divisor (monomorfismo también) del epimorfismo dado.

Consideremos la condición (a) de 2.5: "Para todo G-Ω-módulo K, si M es un G-Ω-submódulo de K tal que M_s es un sumando directo de K_s, entonces M es un sumando directo de K".

Podemos olvidarnos, desde luego, de la operación del conjunto Ω, dado que el autor la considera sólo en vistas a futuros resultados, más allá del enunciado de los dos teoremas en cuestión.

"Traduciendo" la condición enunciada, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\sigma} K \xrightarrow{\varepsilon} M' \longrightarrow 0 \qquad (A),$$

la cual (o una isomorfa), si como S-sucesión se escinde, se escinde como G-sucesión.

Recordemos ahora la propiedad (i) de 3.7: "El G-módulo M es inyectivo relativo a $\mathcal{M}$, la clase de G-monomorfismos que, como S-monomorfismos, dividen".

Ahora bien: si σ en la sucesión (A) es un elemento de $\mathcal{M}$, o sea, si como S-monomorfismo divide, la S-sucesión se escinde, divide como G-monomorfismo, y la G-sucesión se escinde. Salvo isomorfismos, hemos repetido la condición 2.5(a).

Dualmente tenemos la equivalencia entre (a') de 2.5 y (ii) de 3.7:

2.5 (a'): "Para cada G-Ω-módulo K, si M^+ es un G-Ω-submódulo de K tal que $M \simeq K/M^+$ y M_s^+ es un sumando directo de K_s, entonces M^+ es un sumando directo de K".

3.7(ii): "El G-módulo M es proyectivo relativo a $\mathcal{E}$, la clase de G-epimorfismos que, como S-epimorfismos, dividen".

(a') quiere decir que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M^{+} \xrightarrow{\sigma} K \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0 \qquad \text{(B)},$$

la cual (o una isomorfa), si como S-sucesión se escinde, se escinde como G-sucesión.

Otra forma de decir lo anterior: $\varepsilon \in \mathcal{E}$ y M $\bar{P}(\mathcal{E})$.

Por otra parte, la condición 2.5(d) es precisamente la propiedad 3.7(iii).

Del mismo modo, puesto que el teorema 3.4 nos indica que lo anterior es equivalente a que $\bar{\beta}$ y β' dividan, tenemos los puntos 2.5(b) y 2.5(b') expresados en 3.4(i) y 3.4(ii) respectivamente, ya que, en particular,

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\beta} (M_s)^G \longrightarrow \operatorname{Ker}\beta \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\beta' \longrightarrow (M_s)^G \xrightarrow{\beta'} M \longrightarrow 0$$

se escinden.

De esta manera, hemos llegado a la conclusión de nuestro trabajo, al demostrar en una visión más general del álgebra homológica los teoremas 1 y 1' del artículo presentado.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS.

HIGMAN, D.G. Modules with a Group of Operators. Duke Mathematical Journal. Vol. 21, 1954. pp. 369-373.

EILENBERG, Samuel - MOORE, J.C. Foundations of Relative Homological Algebra. American Mathematical Society. Memoires. No. 55, 1965.