UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPECTROS DE ANILLOS Y SOPORTES DE MODULOS

TESIS

que para su exámen profesional de

MATEMATICO

presenta

ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

MEXICO, D. F.

1967

A MIS PADRES

I N D I C E

INTRODUCCION

En el presente trabajo se desarrollan los temas "Espectros de Anillos", "Soportes de Módulos" y algunas nociones de "Módulos Proyectivos de Tipo Finito", basándonos para ello, en la exposición -- que de esos tópicos se hace en el segundo capítulo del libro ----- "Algèbre Commutative" de N. Bourbaki.

Se ha procurado en primer lugar, presentar los temas en la forma más clara posible, para lo que se han detallado las demostraciones de los resultados que en los mismos aparecen; y para hacer más rápido el análisis de este estudio se incluyeron individualmente, cuando ésto fué posible, en el lugar apropiado, los fundamentos necesarios para la elaboración de dichas demostraciones.

En segundo lugar, se ha tenido como finalidad allegarse el material necesario para la demostración de un teorema de Jean-Pierre Serre que aparece en las notas del Séminaire P. DUBREIL, M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT. MODULES PROJECTIFS ET ESPACES FIBRES A FIBRE VECTORIELLE par Jean-Pierre SERRE y que asienta lo siguiente:

"Si A es un anillo conmutativo, neteriano y con unitario tal que su -

espectro primo X es conexo, entonces, todo A-módulo proyectivo P es la suma directa de un A-módulo libre y de un A-módulo proyectivo de rango menor o igual que la dimensión de Ω ".

En lo que respecta a la notación, se ha tomado en este trabajo la misma que se utiliza en el libro y en las notas ya mencionados, a excepción de que el localizado de un A-módulo M con respecto a una parte multiplicativa S de A, se denota aquí por M_S y en el libro, por $S^{-1}M$.

Para finalizar, agradezco las facilidades que me han brindado el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México y el Instituto Nacional de la Investigación Científica. Asimismo quiero hacer presente mi profundo reconocimiento por la valiosa ayuda que para la preparación de este trabajo me prestaron gentilmente los señores doctores Roberto Vázquez García, Félix Recillas Juárez, muy especialmente, los señores doctores Humberto Cárdenas Trigos y Emilio Lluis Riera; bajo cuya dirección realicé la presente tésis.

I.-ESPACIOS IRREDUCIBLES

Definición 1.1. Un espacio topológico X es irreducible si la intersección de los miembros de cada familia finita de conjuntos abiertos de X, distintos del vacío, es no vacía.

Se sigue de la definición que todo espacio irreducible es distinto del vacío; ya que si X es un espacio irreducible, la intersección de los elementos de la familia vacía de conjuntos abiertos de X, distintos del vacío, es no vacía, y dicha intersección es igual a X.

Daremos una segunda definición.

Definición 1.2. Un espacio topológico X es irreducible, si X es no vacía y la intersección de cualesquiera dos conjuntos abiertos de X, no vacíos, es no vacía.

La equivalencia de las dos definiciones se obtiene haciendo uso de la afirmación que precede a la segunda definición y aplicando el proceso de inducción.

Observamos que pedir que un espacio topológico X satisfaga la segunda condición de la definición 1.2 es equivalente a exigir que en dicho espacio la unión de cualesquiera dos conjuntos cerrados distintos de X sea también distinta de X.

Por lo tanto, la definición 1.2 puede enunciarse de la siguiente - manera:

Definición 1.3. Un espacio topológico X es irreducible si es no vacío, y la unión de cualquier par de conjuntos cerrados distintos de X, es distinta de X.

La siguiente proposición nos permitirá caracterizar en otras formas a los espacios irreducibles.

Proposición 1.1. Sea X un espacio topológico no vacío. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) X es irreducible.

b) Todo conjunto abierto no vacío de X es denso en X.

c) Todo conjunto abierto de X es conexo.

Equivalencia de a) y b). Sean U y V dos conjuntos abiertos de X, no vacíos. Entonces

$$U \cap V \neq \emptyset$$

tanto cuando es válido a) como cuando lo es b).

Y que esta intersección sea distinta del vacío para ~~toda pareja~~ U, V, de abiertos no vacíos, implica que U es denso en X, y que X es irreducible .

c) implica a) (se demostrará que la negación de a) implica la negación de c)). Supongamos que X no es irreducible; es decir, existen dos conjuntos abiertos U_1 , U_2 de X, tales que

$U_1 \neq \emptyset$ $U_2 \neq \emptyset$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Entonces el conjunto abierto $U_1 \cup U_2$, de X no es conexo, puesto que es la unión de dos abiertos ajenos y no vacíos.

a) implica c) (se demostrará que la negación de c) implica la negación de a)). Sea U un abierto de X, no vacío y no conexo; o sea, existen dos abiertos U_1, U_2 de U tales que

$U = U_1 \cup U_2$ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ $U_1 \neq \emptyset$ $U_2 \neq \emptyset$

Los abiertos U_1 y U_2 son también abiertos de X debido a que U es abierto de X .

Por lo tanto, como son abiertos no vacíos de X, y su intersección es vacía, X no es irreducible.

Definición 1.4. Un conjunto E de un espacio topológico X, es irreducible, si con la topología relativa, el subespacio E es irreducible.

Es decir, E es irreducible; si E es disinto del vacío y para toda pareja U_E , V_E de abiertos de E distintos del vacío

$$U_E \cap V_E \neq \emptyset$$

Debido a que se considera la topología relativa, se sigue que para cualesquiera dos conjuntos abiertos U'_E y V'_E de E, existen -- abiertos U' y V' de X tales que

$U'_E = U' \cap E \qquad V'_E = V' \cap E$

Así si U'_E, V'_E y $U'_E \cap V'_E$ son no vacíos se tiene que U' , V' y $U' \cap V'$ son no vacíos e intersectan a E.

Recíprocamente, si U'y V' son no vacíos, y tanto ellos como $U' \cap V'$ intersectan a E, entonces U'_E y V'_E son no vacíos y se intersectan.

Por todo lo anterior, podemos afirmar que un conjunto E de un espacio topológico X es irreducible si y sólo si para toda pareja de - abiertos U, V de X que intersecten a E, se tiene que

$$U \cap V \cap E \neq \emptyset$$

Con base en esta condición necesaria y suficiente, podemos formular la siguiente:

un conjunto E de un espacio topológico X es irreducible si y sólo si para cualesquiera dos conjuntos cerrados F, G de X tales que

$E \subset F \cup G$ se tiene que $E \subset F$ o bien $E \subset G$.

Necesidad. Sean F, G dos cerrados de X tales que $E \subset F \cup G$.

Existen abiertos U V de X tales que

$$F = X - U \qquad G = X - V$$

por lo tanto

$$E \subset (X - U) \cup (X - V) = X - (U \cap V)$$

de donde

$$E \cap U \cap V = \emptyset$$

Así, puesto que, E es irreducible,

$$E \cap U = \emptyset \quad \text{o bien} \quad E \cap V = \emptyset$$

es decir

$$E \subset X - U = F \quad \text{o bien} \quad E \subset X - V = G$$

Suficiencia (por reducción al absurdo). Supongamos que no es -- irreducible, por consiguiente existen U, V abiertos de X tales que

$$U \cap E \neq \emptyset \quad V \cap E \neq \emptyset \quad y \quad U \cap V \cap E = \emptyset$$

De donde, podemos asegurar que existen dos cerrados F y G, de X tales que

$$(X - F) \cap E \neq \emptyset \qquad (X - G) \cap E \neq \emptyset$$

$$E \cap (X - F) \cap (X - G) = \emptyset$$

La igualdad implica que $E \subset F \cup G$ y las dos primeras desigualdades implican a su vez que $E \not\subset F$ y $E \not\subset G$. Lo que contradice a la hipótesis.

Este último resultado es un caso particular de la siguiente afirmación:

Un conjunto E de un espacio topológico X es irreducible, si y sólo si para toda familia $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de conjuntos cerrados de X tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, existe un índice i para el cual $E \subset F_i$.

La demostración de este resultado se puede realizar por inducción sobre n, y en nuestro caso lo tenemos ya probado para $n = 2$.

Antes de enunciar la siguiente proposición demostraremos el resultado auxiliar que a continuación se expresa.

Sea E un subconjunto del espacio topológico X; un conjunto abierto U de X intersecta a E si y sólo si U intersecta a $\overline{E}$.

$$\overline{E} = E \cup \delta(E) \quad \text{por lo tanto,}$$

$$U \cap \overline{E} = (U \cap E) \cup (U \cap \delta(E))$$

Necesidad. Si $U \cap E \neq \emptyset$ claramente $U \cap \overline{E} \neq \emptyset$.

Suficiencia. Si $U \cap \overline{E} \neq \emptyset$ entonces $U \cap E \neq \emptyset$ o bien $U \cap \delta(E) \neq \emptyset$

Supongamos que

$$U \cap \delta(E) \neq \emptyset$$

es decir, existe $p \in X$ tal que

$$p \in U \quad y \quad p \in \delta(E)$$

y por ser U abierto se sigue que U es vecindad de p, por lo tanto por la definición de δ (E) tenemos que

$$U \cap E \neq \emptyset$$

Proposición 1.2. Para que un conjunto E de un espacio topológico X, sea irreducible, es necesario y suficiente que $\overline{E}$ lo sea.

Por el resultado anterior, tenemos que para toda pareja de abiertos U, V de X

a) $U \cap E \neq \emptyset \quad V \cap E \neq \emptyset$ <=> b) $U \cap \overline{E} \neq \emptyset \quad V \cap \overline{E} \neq \emptyset$

c) $U \cap V \cap E \neq \emptyset$ <=> d) $U \cap V \cap \overline{E} \neq \emptyset$

Necesidad. Si E es irreducible, entonces

b) => a) => c) => d)

por lo tanto, $\overline{E}$ es irreducible.

Suficiencia. Si $\overline{E}$ es irreducible, entonces

a) => b) => d) => c)

por lo tanto, E es irreducible.

Proposición 1.3. Todo conjunto abierto no vacío U, de un espacio topológico irreducible X, es irreducible.

En virtud de la proposición 1.1, bastará probar que todo abierto no vacío V de U es denso en U.

Sea W cualquiera otro abierto no vacío de U. Puesto que U es -- abierto en X, también lo son V y W. Y ya que X es irreducible - se sigue de la proposición 1.2 que

$$V \cap W \neq \emptyset$$

por consiguiente V es denso en U.

<u>Proposición</u> 1.4. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta no vacía de un espacio topológico X, tal que sus miembros satisfacen que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ para toda pareja de índices (α, β). Si los conjuntos U_α son irreducibles, el espacio X también lo es.

Esta proposición también será demostrada empleando la proposición 1.1, haciendo ver que todo conjunto abierto no vacío V de X es denso en X.

Ya que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una cubierta de X existe, al menos, un índice $\gamma \in A$ tal que

$$V \cap U_\gamma \neq \emptyset$$

de donde, por la proposición 1.1, $V \cap U_\gamma$ es denso en U_γ. O sea

$$V \cap U_\alpha \cap W \neq \emptyset$$

para todo abierto W no vacío de U_α

Consideremos $W = U_\alpha \cap U_\gamma$ el cual es no vacío por hipótesis, entonces

$$V \cap U_\alpha \cap U_\gamma \neq \emptyset$$

por lo tanto

$$V \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

El índice α es cualquiera de los que pertenecen a A; por consiguiente, esta desigualdad es válida para toda $\alpha \in A$.

Como U_α es irreducible para toda $\alpha \in A$ $V \cap U_\alpha$ es denso en U_α para todo $\alpha \in A$

Consideremos ahora cualquier abierto no vacío U de X, entonces

$$U \cap U_\alpha \neq \emptyset \text{ para alguna } \alpha \in A$$

Y por lo expuesto anteriormente, concluímos que

$$(V \cap U_\alpha) \cap U \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

así

$V \cap U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ lo que implica que $V \cap U \neq \emptyset$, de donde V es denso en X.

<u>Proposición</u> 1.5. La imagen continúa de un conjunto irreducible, es un conjunto irreducible.

Sean $f: X \to Y$ y $E \subset X$, la función continua y el conjunto irreducible considerados.

Sean U, V dos conjuntos abiertos no vacíos de Y, tales que

$$U \cap f(E) \neq \emptyset \qquad V \cap f(E) \neq \emptyset$$

Por ser f continua , entonces, $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos de X.

Y por las condiciones sobre U y V, se sigue que

$f^{-1}(U) \neq \emptyset$, $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, $f^{-1}(U) \cap E \neq \emptyset$ y $f^{-1}(V) \cap E \neq \emptyset$

por consiguiente,

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap E = f^{-1}(U \cap V) \cap E \neq \emptyset$$

de donde

$$f(f^{-1}(U \cap V)) \cap f(E) \neq \emptyset$$

Y ya que $f(f^{-1}(U \cap V) \cap f(E) \subset U \cap V \cap f(E)$, concluímos que f(E) es irreducible.

<u>Definición</u> 1.5 . Toda parte irreducible máxima de un espacio topológico X, es una componente irreducible de dicho espacio.

<u>Proposición</u> 1.6. Sea X un espacio topológico . Toda parte irreducible de dicho espacio está contenida en una componente irreducible del mismo. Y la familia de componentes irreducibles de X es una cubierta cerrada de X.

Se demostrará que el conjunto $\mathfrak{J}$, formado por todas las partes irreducibles de X, está inductivamente ordenado por la relación de inclusión .

Claramente $\mathfrak{J}$ está parcialmente ordenado.

Sea $\mathfrak{C}$ una parte de $\mathfrak{F}$ totalmente ordenada. Demostraremos que posee una cota superior, a saber $E = \cup\{F/F \in \mathfrak{C}\}$

De la definición de E se sigue que es cota superior de $\mathfrak{C}$. Sólo - nos resta probar que E pertenece a $\mathfrak{F}$.

Para ello consideremos dos conjuntos U, V abiertos de X, tales -- que

$$U \cap E \neq \emptyset \quad V \cap E \neq \emptyset$$

Entonces existen en F_U y F_V tales que

$$U \cap F_U \neq \emptyset \quad V \cap F_V \neq \emptyset$$

Y ya que $\mathfrak{C}$ está totalmente ordenado entonces $F_U \subset F_V$ o bien, $F_V \subset F_U$.

Sea

$$F = \begin{cases} F_U \text{ si } F_V \subset F_U \\ \\ F_V \text{ si } F_U \subset F_V \end{cases}$$

entonces

$$U \cap F \neq \emptyset \text{ y } V \cap F \neq \emptyset$$

Y puesto que F es irreducible, entonces

$$U \cap V \cap F \neq \emptyset$$

de donde

$$U \cap V \cap E \neq \emptyset$$

Así, E es irreducible y $\mathfrak{J}$ está inductivamente ordenado.

El lema de Zorn nos asegura entonces que $\mathfrak{J}$ posee al menos un - elemento máximo. Resultado que implica la primera parte de la proposición.

Sea $p \in X$. $\{p\}$ es una parte irreducible de X; por lo tanto, existe una componente irreducible de X, que lo contiene. De donde X es la unión de sus componentes irreducibles.

Por último, sea P una componente irreducible de X. Entonces $P \subset \overline{P}$ y $\overline{P}$ es irreducible (por la proposición 1.2). Por consi-- guiente, $P = \overline{P}$.

<u>Corolario</u> 1.1. Toda componente conexa de un espacio topológico X, es la unión de componentes irreducibles.

Sea C cualquier componente conexa de X, para toda $p \in C$, consideremos la componente irreducible P_p que lo contiene.

P_p es un subespacio conexo de X por la proposición 1.1, de donde $p \in P_p \subset C$ para todo $p \in C$. Así

$$C \subset \bigcup_{p \in C} P_p \subset C \quad \text{por lo que} \quad \bigcup_{p \in C} P_p = C$$

<u>Proposición</u> 1.7. Sean X un espacio topológico, $\{P_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una cubierta cerrada de X, en donde P_i es irreducible para toda - $1 \leq i \leq n$. Entonces las componentes irreducibles de X son los ele-

mentos máximos de la familia $\{P_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Sea E cualquier conjunto de X, entonces $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

Si E es irreducible, se sigue de la definición de conjunto irreducible , que $E \subset P_i$ para alguna i .

Así, las componentes de X serán aquellos miembros máximos de la familia $\{P_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

<u>Corolario</u> 1.2. Sea $\{Q_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la familia de componentes irreducibles distintas, del subespacio E de X. Entonces la familia $\{\overline{Q_i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es la familia de las componentes irreducibles distintas de $\overline{E}$.

En virtud de la proposición anterior, bastará probar : a) la familia $\{\overline{Q_i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es una cubierta cerrada de $\overline{E}$, en donde cada $\overline{Q_i}$ es irreducible en $\overline{E}$ y b) $\overline{Q_i} \not\subset \overline{Q_j}$ para $i \neq j$.

Por la proposición 1.6 $E = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$, así

$\overline{E} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{Q_i}$, lo que implica que $\overline{Q_i} \subset \overline{E}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$, de donde

$$\overline{Q_i}^{E} = \overline{Q_i} \cap \overline{E} = \overline{Q_i} \text{ para toda } i,$$

con lo que se prueba que $\{\overline{Q_i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ es una cubierta cerrada de $\overline{E}$.

Demostraremos ahora que cada Q_i es irreducible en $\overline{E}$.

Sean $U_{\overline{E}}$ y $V_{\overline{E}}$ dos abiertos de $\overline{E}$ tales que

$$U_{\overline{E}} \cap Q_i \neq \emptyset \quad V_{\overline{E}} \cap Q_i \neq \emptyset$$

Existen entonces abiertos U, V de X tales que

$$U_{\overline{E}} \cap Q_i = U \cap \overline{E} \cap Q_i \qquad V_{\overline{E}} \cap Q_i = V \cap \overline{E} \cap Q_i$$

Así, puesto que

$U \cap \overline{E} \cap E \cap Q_i \neq \emptyset$ y $V \cap \overline{E} \cap E \cap Q_i \neq \emptyset$

tenemos

$$U \cap E \cap Q_i \neq \emptyset \quad y \quad V \cap E \cap Q_i \neq \emptyset$$

y ya que $U \cap E$ y $V \cap E$ son abiertos de E, concluímos que

$$U \cap V \cap E \cap Q_i \neq \emptyset$$

por lo tanto

$$U \cap V \cap \overline{E} \cap Q_i = U_{\overline{E}} \cap V_{\overline{E}} \cap Q_i \neq \emptyset$$

lo que significa que cada Q_i es irreducible en $\overline{E}$

Por la proposición 1.2 Q_i será irreducible en $\overline{E}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pero $\overline{Q_i}^{E} = \overline{Q_i} \cap \overline{E} = \overline{Q_i}$, así $\overline{Q_i}$ $1 \leqslant i \leqslant n$ son irreducibles en $\overline{E}$

Por último ya que $\overline{Q_i}$ es componente irreducible para cada

$1 \leqslant i \leqslant n$ tenemos que

$$Q_i = \overline{Q_i} \cap E \quad y \quad Q_i \not\subset Q_j \quad para \quad i \neq j$$

de donde se sigue

$$\overline{Q} \not\subset \overline{Q_j} \quad para \; i \neq j$$

<u>Nota</u>. Supongamos que X tiene un número finito de componentes irreducibles distintas X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; entonces $U_i = X - \bigcup_{j \neq i} X_j$ es abierto en X y denso en X_i; además las U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ son ---

abiertos no vacíos de X, irreducibles, ajenos dos a dos y su ---

unión es un conjunto denso en X.

Probaremos en primer lugar, que $U_i \neq \emptyset$, para toda i. En efecto supongamos que $U_i = \emptyset$, para alguna i, entonces $X_i \subset \bigcup_{j \neq i} X_j$ por lo tanto los abiertos

$$X - \bigcup_{\substack{k \neq \\ j \neq i}} X_j \quad \text{y} \quad X - X_{k'} \quad k' \neq i$$

son tales que

$$X_i \cap (X - \bigcup_{\substack{k \neq \\ j \neq i}} X_j) \cap (X - X_{k'}) = \emptyset$$

Así, por ser X_i irreducible se concluye que

$$X_i \cap (X - \bigcup_{\substack{k \neq \\ j \neq i}} X_j) = \emptyset \quad \text{o} \quad X_i \cap (X - X_{k'}) = \emptyset$$

es decir,

$$X_i \subset \bigcup_{\substack{k \neq \\ j \neq i}} X_j \quad \text{o bien} \quad X_i \subset X_{k'}$$

Si $X_i \subset X_{k'}$ hemos llegado a una contradicción ya que X_i es componente irreducible y por lo tanto, es un elemento máximo en el conjunto de partes irreducibles de X.

Si $X_i \subset \bigcup_{\substack{k \neq \\ j \neq i}} X_j$, entonces podemos llegar a la misma contradicción, repitiendo el proceso anterior.

Se probará ahora que U_i es un conjunto denso en X_i. Esta afirmación se sigue del hecho de que $U_i \subset X_i$ para toda i. Ya que entonces, $U_i \cap X_i = U_i$ y por consiguiente la proposición 1.1 nos pro--

porciona el resultado deseado. Es decir, para cada i se tendrá

$$\overline{U_i}^{X_i} = \overline{U_i} \cap X_i = X_i$$

por lo que

$$\overline{U_i} = X_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

de donde se sigue por la proposición 1.2 que U_i es un conjunto irreducible para toda i.

Además debido a que $U_i = X - \bigcup_{j \neq i} X_j$ y $U_k \subset X_k$ se tendrá que

$$U_i \cap U_k = \emptyset \quad \text{para } i \neq k .$$

Por último,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = X$$

Así, $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es denso en X.

<u>Proposición</u> 1.8. Sea U un conjunto abierto del espacio topológico X. Y sea f la función que asocia el conjunto $\overline{V}$ de X a cada subconjunto V de U. Entonces f es una biyección del conjunto de partes irreducibles de U, cerradas en U, sobre el conjunto de partes irreducibles de X, cerradas en X, que intersectan a U; y esta función restringida a las componentes irreducibles de U, es una biyección de este conjunto en el de componentes irreducibles de X que intersectan a U.

Sea V un conjunto irreducible y cerrado de U, demostraremos que -

el conjunto $f(V) = \overline{V}$, es irreducible en X e intersecta a U.

Por ser V cerrado en U se tiene que,

$$V = \overline{V}^{U} = \overline{V} \cap U.$$

De donde se sigue que $\overline{V}$ intersecta a U y que V es irreducible en X.

Por la proposición 1.2 concluímos que $\overline{V}$ es irreducible en X.

Consideremos ahora la función g definida para cada subconjunto Z de X, en la forma siguiente:

$$g(Z) = Z \cap U$$

Sea Z una parte cerrada irreducible de X y tal que $Z \cap U \neq \emptyset$

Probaremos que $Z \cap U$ es un conjunto cerrado e irreducible de U.

Por la proposición 1.3. $Z \cap U$ es irreducible en Z, ya que es un abierto no vacío de dicho subespacio, y aplicando la proposición - 1.1. se tendrá que $Z \cap U$ es denso en Z.

De la primera afirmación se sigue que $Z \cap U$ es irreducible en U; y de la segunda se obtiene la siguiente igualdad.

$$Z = \overline{Z \cap U}^{Z} = \overline{Z \cap U} \cap Z$$

de donde

$$Z = \overline{Z \cap U}, \text{ así } Z \cap U = \overline{Z \cap U} \cap U = \overline{Z \cap U}^{U}$$

es decir, $Z \cap U$ es un conjunto cerrado de U.

Para terminar la primera parte de la proposición, demostraremos que g es la función inversa de la función f.

En efecto, sea V un conjunto cerrado e irreducible de U, y Z un conjunto cerrado, e irreducible de X, tal que $Z \cap U \neq \emptyset$. Entonces,

$$g\,f\,(V) = g\,(\overline{V}) = \overline{V} \cap U = \overline{V}^{U} = V$$

$$f\,g\,(Z) = f\,(Z \cap U) = \overline{Z \cap U} = Z$$

Por lo que f es una biyección entre los conjuntos mencionados.

Sea P_U una componente irreducible de U, entonces $\overset{*}{\overline{f}}(P_U) = \overline{P_U}$.

$\overline{P_U}$, es por lo expuesto anteriormente un conjunto irreducible y cerrado del espacio X. Así sólo nos falta probar que es un elemento máximo en la clase de todos los conjuntos irreducibles de X.

Supongamos que existe un conjunto irreducible P de X tal que

$$\overline{P_U} \subset P$$

entonces

$$g\,(\overline{P_U}) \subset g\,(P),$$

o sea

$$P_U = \overline{P_U} \cap U \subset P \cap U \subset P$$

Así, P_U no sería componente irreducible de U, en contradicción a la hipótesis. Por consiguiente, tal P debe coincidir con $\overline{P_U}$.

Consideremos ahora una componente irreducible P de X que inter-secte a U, entonces $\overline{g}^{*}(P) = P \cap U$ es, un conjunto irreducible y -- cerrado de U.

Supongamos que $P \cap U$ no es una componente irreducible de U, - existe entonces un conjunto irreducible P_U de U tal que

$$P \cap U \subset P_U$$

en especial podemos considerar que P_U es la componente irreducible que contiene a $P \cap U$.

Así, $P = f(P \cap U) \subset f(P_U) = \overline{P_U}$, y $\overline{P_U}$ es un conjunto irreducible del espacio X, de donde, P no es un elemento máximo en la -- clase de los conjuntos irreducibles de X. Lo cual contradice la - hipótesis.

* $\overline{f}$ y $\overline{g}$ son restricciones de f y g a las clases de las componentes irreducibles de U y de las componentes irreducibles de X que intersectan a U; respectivamente.

II. ESPACIOS TOPOLOGICOS* NETERIANOS.

<u>Definición</u> 2.1. Un espacio topológico X es neteriano si toda familia, no vacía, de conjuntos cerrados de X, ordenados por la relación de inclusión, posee un elemento mínimo.

Sea $F = \{A/A$ cerrado de $X\}$ una familia no vacía de conjuntos cerrados de X, y definamos la siguiente familia F' de conjuntos abiertos de X, $F' = \{B_A / B_A \quad X-A,\ A \in F\}$. Ya que F es no vacía, F' no es vacía.

Análogamente, consideremos $G = \{C/C$ abierto de $X\}$ una familia no vacía de conjuntos abiertos de X, y definamos la familia G' de conjuntos cerrados de X, $G' = \{D_C / D_C \quad X-C,\ C \in G\}$, dicha familia es también no vacía.

Supongamos que F posee un elemento mínimo (es decir existe $A \in F$, tal que si $A' \in F$ y $A' \subset A$, entonces $A = A'$), entonces F' posee un elemento máximo.

En efecto, dicho elemento máximo es el abierto B_A correspondiente al elemento mínimo A, puesto que si $B_{A'} \in F'$ es tal que $B_A \subset B_{A'}$ entonces $X-A \subset X-A'$, y así $A' \supset A$ por lo que

* Término aceptado en el trabajo "Functores Hemiexactos" realizado por los doctores Humberto Cárdenas y Roberto Vázquez García.

$A = A'$ y por consiguiente $B_A = B_{A'}$.

Análogamente, si G posee un elemento máximo (es decir existe - $C \in G$ tal que si $C \subset C'$ y $C' \in G$, entonces $C = C'$), entonces - G' tiene un elemento mínimo.

Sea C el elemento máximo de G; entonces D_C es el elemento mínimo de G', porque si suponemos que existe $D_{C'}$ en G' tal que -- $D_C \supset D_{C'}$, resulta que $X-C' \subset X-C$, o sea $C \subset C'$, lo que implica que $C = C'$ y por lo tanto $D_C = D_{C'}$.

De estos dos hechos se sigue que un espacio topológico X es neteriano si y sólo si toda familia no vacía de conjuntos abiertos de - X, ordenada por la relación de inclusión, posee un elemento máximo.

Asimismo, de la definición se concluye que un espacio topológico X es neteriano si y sólo si toda cadena descendente de conjuntos - cerrados de X, es estacionaria.

De la condición necesaria y suficiente señalada con anterioridad,- se puede definir un espacio topológico neteriano X, como aquel en el que toda cadena ascendente de conjuntos abiertos, es estacionaria.

La siguiente proposición afirma que la propiedad de que un espa-- cio topológico sea neteriano es hereditaria.

Proposición 2.1. Todo subespacio de un espacio topológico neteriano, es neteriano.

Sean X un espacio neteriano y A un subespacio de X.

Sea

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots$$

Una cadena descendente de conjuntos cerrados de A; es decir de conjuntos tales que

$$F_i = \overline{F_i} \cap A \quad i = 1, 2, \ldots$$

Dichos conjuntos nos definen la cadena descendente

$$\overline{F}_1 \supset \overline{F_2} \supset \ldots$$

de conjuntos cerrados de X .

Así, existe un índice t para el cual

$$\overline{F}_t = \overline{F}_{t+1} = \ldots$$

de donde

$$F_t = F_{t+1} = \ldots$$

o sea la cadena original es estacionaria, y por lo tanto A es neteriana.

Proposición 2.2. Un espacio topológico X es neteriano, si existe una cubierta finita $\{A_i\}_{i \in I}$ de X, tal que cada subespacio A_i de X es neteriano.

Sea

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots$$

una cadena descendente de conjuntos cerrados de X.

Entonces para cada $i \in I$ queda determinada la siguiente cadena - descendente

$$G_1 \cap A_i \supset G_2 \cap A_i \supset \ldots$$

de conjuntos cerrados de A_i

Ya que cada subespacio A_i es neteriano, se tiene que para toda - $i \in I$ existe un índice t_i tal que

$$G_{t_i} \cap A_i = G_{t_i + 1} \cap A_i = \ldots$$

Siendo I un conjunto finito podemos determinar el elemento máximo del conjunto $\{ t_i / i \in I \}$, sea t dicho elemento.

Entonces

$$G_t \cap A_i = G_{t+1} \cap A_i = \ldots \quad \text{para toda } i \in I$$

Además por ser $\{A_i\}_{i \in I}$ cubierta de X, tenemos

$$G_j = \bigcup_{i \in I} (G_j \cap A_i) \quad j = 1, 2, \ldots$$

Así

$$G_t = \bigcup_{i \in I} (G_t \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} (G_{t+1} \cap A_i) = \ldots$$

O sea

$$G_t = G_{t+1} = \ldots$$

Por lo que X es un espacio neteriano.

<u>Lema</u> 2.1. Todo espacio topológico neteriano X, es compacto .

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X. Y consideremos la familia $F = \{ \bigcup_{i \in I'} U_i / I' \subset I \quad I' \text{ finito}\}$, cuyos elementos son uniones finitas de conjuntos de la cubierta. Esta familia F es no vacía; por lo tanto, F posee un elemento máximo V.

De la definición de elemento máximo, se sigue

$$V \cup U_i = V \quad \text{para toda } i \in I$$

Así

$$\bigcup_{i \in I} (V \cup U_i) = V$$

O sea

$$V \cup X = V \text{ y } V = X$$

Es decir, X es compacto.

<u>Proposición</u> 2.3. Un espacio topológico X es neteriano si y sólo si todo conjunto abierto de X es compacto.

La necesidad se sigue de la proposición 2.1 y del lema 2.1.

Supongamos que todo conjunto abierto de un espacio topológico X, es compacto. Y consideremos una cadena ascendente

$$U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

de conjuntos abiertos de X.

Sea $V = \bigcup_{n \geq 1} U_n$, entonces V es un abierto de X, y de la hipótesis tenemos que existe una subfamilia finita $\{U_n\}_{n \geq 1}$ que cubre a V. Y ya que $\{U_n\}_{n \geq 1}$ está totalmente ordenada, concluímos que -

existe un índice n_o tal que $V = U_{n_o}$, de donde

$$U_{n_o} = U_{n_o + 1} = \cdots$$

Por lo que X es neteriano.

<u>Lema</u> 2.2. (Principio de inducción neteriana). Sea E un conjunto ordenado, en el que todo subconjunto no vacío, posee un elemento - mínimo. Sea F un subconjunto de E con la siguiente propiedad: si $a \in E$ es tal que $x < a$ implica $x \in F$, entonces $a \in F$. Entonces -- $F = E$.

Supongamos F E; entonces $E - F \neq \emptyset$, así E-F posee un elemento mínimo b .

Así, si $x \in E$ y $x < b$ tenemos que $x \in F$; de donde $b \in F$, lo que - contradice el hecho de que $b \in E - F$.

Por consiguiente,

$$E - F = \emptyset \text{ , o sea } F = E.$$

<u>Proposición</u> 2.4. El conjunto de componentes irreducibles de un - espacio topológico X, es finito, si X es un espacio neteriano.

Sean E la familia de conjuntos cerrados de X, ordenada por la relación de inclusión, y F la familia de uniones de un número finito de conjuntos cerrados irreducibles de X.

Mostraremos que E y F satisfacen las condiciones del lema anterior.

Todo conjunto no vacío de E posee un elemento mínimo, por ser - X neteriano.

$F \subset E$, por ser los elementos de F uniones finitas de conjuntos - cerrados.

Además, si $Y \in E$ es tal que $Y' \subsetneq Y$ implica $Y' \in F$, entonces - $Y \in F$.

En efecto, si Y es irreducible $Y \in F$.

Y si Y no es irreducible, existen dos cerrados Y_1 y Y_2 contenidos propiamente en Y tales que $Y_1 \cup Y_2 = Y$. Así $Y_1 \in F$ y -- $Y_2 \in F$, y de la definición de F se sigue entonces que $Y \in F$.

Por lo que el lema 2.2 nos asegura que $E = F$. Por consiguiente, X es igual a la unión de un número finito de cerrados irreducibles. Entonces la proposición se obtiene de la número 1.7 .

De la proposición anterior y del corolario 1.1 , tenemos :

Corolario 2.1. El número de componentes conexas de un espacio neteriano, es finito.

Definición 2.2. Sean X un espacio topológico neteriano, y Y un -- subespacio cerrado de X. Si Y es irreducible la altura de Y (que - se denotará por ht(Y)), es el supremo (finito o infinito) de los enteros n tales que, existe una cadena $Y = Y_n \subset \ldots \subset Y_o$ de subconjuntos cerrados e irreducibles de X, tales que $Y_i \neq Y_{i+1}$.

Si Y no es irreducible ht(Y) es el ínfimo de los ht(Y'), donde Y' pertenece a la familia de subespacios cerrados irreducibles de Y. $ht(\emptyset)=\infty$

<u>Definición</u> 2.3. Sean X un espacio topológico neteriano y F la familia de todos los subespacios cerrados de X. La dimensión de X es el supremo de los ht(Y) con Y en F .

<u>Proposición</u> 2.5. Si Y y Y' son dos subespacios cerrados de un espacio neteriano X, tales que $Y \subset Y'$. Entonces $ht(Y) \geq ht(Y')$.

Si $Y = Y'$ la proposición es obvia. Así demostraremos la proposición en el caso en que Y está contenida propiamente en Y'.

i) Supongamos que Y y Y' son conjuntos irreducibles de X.

Sean

$$F_Y = \{n \in \mathbb{Z} / Y = Y_n \subset \ldots \subset Y_o \quad Y_i \neq Y_{i+1} \text{ , } Y_i \text{ cerrado irreducible de X}\}$$

$$F_{Y'} = \{n \in \mathbb{Z} / Y' = Y'_n \subset \ldots \subset Y'_o \quad Y'_i \neq Y'_{i+1} \quad Y'_i \text{ cerrado irreducible de X}\}$$

Cada cadena

$$Y' = Y'_n \subset Y'_{n-1} \quad \ldots \subset Y'_o$$

de cerrados irreducibles de X, tales que $Y'_i \neq Y'_{i+1}$ nos determina la cadena .

$$Y = Y_{n+1} \subset Y' = Y'_n = Y_n \subset Y'_{n-1} = Y_{n-1} \subset \cdots \subset Y'_o = Y_o$$

de cerrados irreducibles de X, tales que $Y_i \neq Y_{i+1}$.

O sea si $n \in F'$ entonces $n+1 \in F$, por lo que: $\sup F \geq n+1 > n$, para cada $n \in F'$. Así $\sup F \geq \sup F'$, es decir $ht(Y) \geq ht(Y')$.

ii) Supongamos que Y no es irreducible y que Y' es un conjunto irreducible de X.

Sea $G_Y = \{ Z \subset Y / Z$ cerrado irreducible de $Y \}$.

Si $Z \in G_Y$, entonces Z es un cerrado irreducible de X, y puesto que $Z \subset Y \subset Y'$, se sigue de i) que $ht(Z) \geq ht(Y')$ para toda $Z \in F$.

Así

$$ht(Y) = \inf \{ ht(Z) / Z \in G_Y \} \geq ht(Y').$$

iii) Supongamos que Y es un conjunto irreducible de X y que Y' no lo es.

Ya que $Y \subset Y'$, Y es un cerrado irreducible de Y'; por lo tanto,

$$ht(Y) \geq \inf \{ ht(Z') / Z' \text{ cerrado irreducible de } Y' \}$$

es decir,

$$ht(Y) \geq ht(Y')$$

iv) Supongamos que Y y Y' no son conjuntos irreducibles de X.

Sea $G_Y = \{ Z / Z$ cerrado irreducible de $Y \}$.

Todo $Z \in G_Y$ es cerrado irreducible de X, tal que $Z \subset Y \subset Y'$ de iii) se sigue entonces que

$$ht(Z) \geq ht(Y') \quad \text{para toda } Z \in G_Y$$

Por lo tanto,

$$ht(Y) = \inf \{ht(Z)/Z \in G_Y\} \geq ht(Y')$$

<u>Proposición</u> 2.6. Sean X un espacio topológico neteriano, Y un subespacio cerrado de X y $\mathfrak{C}_Y$ la familia de todas las componentes -- irreducibles de Y. Entonces $ht(Y) = \inf \{ht(C_Y)/C_Y \in \mathfrak{C}_Y\} =$

$$\text{mínimo } \{ht(C_Y)/C_Y \in \mathfrak{C}_Y\}$$

Si Y es un conjunto irreducible de X la proposición es inmediata, - ya que entonces la única componente irreducible de Y, es Y misma. Supongamos ahora que Y no es irreducible de X. De la proposición 1.6 concluímos que toda componente irreducible de Y es cerrado - en X, por lo que

$$ht(C_Y) \geq ht(Y) \quad \text{para toda } C_Y \in \mathfrak{C}_Y$$

Así

$$\inf \{ht(C_Y)/C_Y \in \mathfrak{C}_Y\} \geq ht(Y)$$

Por otro lado, de las proposiciones 2.1, 2.4 y 1.6 se sigue que $\mathfrak{C}_Y$ es un conjunto finito, y $Y = \bigcup_{C_Y \in \mathfrak{C}_Y} C_Y$. Por lo tanto, todo con-- junto cerrado e irreducible Y' de Y está contenido en algún C_Y de $\mathfrak{C}_Y$

Entonces por la proposición 2.5

$$\mathrm{ht}(Y') \geq \mathrm{ht}(C_Y) \text{ para alguna } C_Y \in \mathbb{C}_Y$$

Por consiguiente,

$\mathrm{ht}(Y') \geq \inf \{\mathrm{ht}(C_Y)/C_Y \in \mathbb{C}_Y\}$ para todo conjunto cerrado e irreducible Y' de Y.

De donde

$$\mathrm{ht}(Y) = \inf \{\mathrm{ht}(Y')/Y' \subset Y \text{ cerrado irreducible}\} \geq$$

$$\inf \{\mathrm{ht}(C_Y)/C_Y \in \mathbb{C}_Y\}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{ht}(Y) = \inf \{\mathrm{ht}(C_Y)/C_Y \in \mathbb{C}_Y\}$$

Además,

$$\inf \{\mathrm{ht}(C_Y)/C_Y \in \mathbb{C}_Y\} = \text{mínimo } \{\mathrm{ht}(C_Y)/C_Y \in \mathbb{C}_Y\}$$

debido a que $\mathbb{C}_Y$ es un conjunto finito.

En la siguiente proposición $\mathbb{C}_Y$ y $\mathbb{C}_{Y'}$ denotarán a las clases de todas las componentes irreducibles de Y y Y', respectivamente.

<u>Proposición</u> 2.7. Sean Y y Y' dos subespacios cerrados de un espacio topológico neteriano X. Si $Y \subset Y'$ y $\mathrm{ht}(Y) = \mathrm{ht}(Y') = r$(entero), entonces existen $C_Y \in \mathbb{C}_Y$ y $C_{Y'} \in \mathbb{C}_{Y'}$, tales que $C_Y = C_{Y'}$ y $\mathrm{ht}(C_Y) = \mathrm{ht}(C_{Y'}) = r$.

i) Supongamos que Y y Y' son conjuntos irreducibles de X. Entonces $\mathbb{C}_Y = \{Y\}$ y $\mathbb{C}_{Y'} = \{Y'\}$

Sean

$F_Y = \{n / Y = Y_n \subset Y_{n-1} \subset \ldots \subset Y_0 \quad Y_i \neq Y_{i+1} \quad Y_i$ cerrado irreducible de $X\}$

$F_{Y'} = \{n / Y' = Y'_n \subset Y'_{n-1} \subset \ldots \subset Y'_0 \quad Y'_i \neq Y'_{i+1} \quad Y'_i$ cerrado irreducible de $X\}$

Supongamos que $Y' \subsetneq Y$. Puesto que $\sup F_{Y'} = r$, debe existir una cadena

$$Y' = Y'_r \subset \ldots \subset Y'_0$$

de cerrados irreducibles de X y distintos.

Ya que si así no fuera, r-1 sería el supremo de $F_{Y'}$, en contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto, dicha cadena existe y determina la siguiente

$$Y = Y_{r+1} \subset Y' = Y'_r = Y_r \subset \ldots \subset Y'_0 = Y_0$$

donde cada Y_i es un cerrado irreducible de X, y $Y_i \neq Y_{i+1}$

Por lo que, $\sup F_Y \geq r+1 > r$, contra la hipótesis de que $ht(Y) = r$

Así, $Y = Y'$, y de la hipótesis $ht(Y) = ht(Y') = r$.

ii) Sean Y un conjunto irreducible de X y Y' un subconjunto no irreducible de X. Entonces, $\mathfrak{C}_Y = \{Y\}$

Las proposiciones 2 1, 2.4, 1.6 y la definición de conjunto -- irreducible, nos aseguran la existencia de $C'_{Y'} \in \mathfrak{C}_{Y'}$ tal que

$$Y \subset C'_{Y'}$$

De donde, $r = ht(Y) \geq ht(C'_{Y'})$

Pero $r = \min \{ht(C_{Y'})/C_Y \in \mathfrak{C}_Y\} = ht(Y')$, así:

$$r = ht(Y) = ht(C'_{Y'})$$

Y ya que Y y $C'_{Y'}$ son cerrados irreducibles de X, se sigue de i) - que

$$Y = C'_{Y'}$$

iii) Si Y es un conjunto no irreducible de X y Y' un conjunto irreducible de X. Entonces, $\mathfrak{C}_{Y'} = \{Y'\}$.

Sea $C'_Y \in \mathfrak{C}_Y$, tal que $ht(C'_Y) = \min \{ht(C_Y)/C_Y \in \mathfrak{C}_Y\} = r$

De donde

$$ht(C'_Y) = ht(Y'),\ C'_Y \subset Y \subset Y'$$

y tanto C'_Y como Y' son oonjuntos cerrados irreducibles de X.

De i) se sigue

$$C'_Y = Y'$$

iv) Sean Y y Y' conjuntos cerrados no irreducibles de X.

Sea $C'_Y = \min \{ht(C'_Y)/C'_Y \in \mathfrak{C}_Y\} = r$. Así

$$ht(C'_Y) = ht(Y') = r \ \text{ y } \ C'_Y \subset Y \subset Y'$$

Por consiguiente, por ii) , existe $C'_{Y'} \in \mathfrak{C}_{Y'}$, tal que $C'_Y = C'_{Y'}$.

III. E S P E C T R O   P R I M O   D E   U N   A N I L L O .

Todos los anillos considerados en este y los siguientes capítulos, serán supuestos conmutativos y con elemento unitario.

Sean A un anillo, X el conjunto de todos los ideales primos de A y $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(X)$ las clases (ordenadas por la relación de inclusión) de todos los conjuntos de A y de X respectivamente.

a) El funtor V

Consideremos la función $V: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, que asocia a cada sub-- conjunto M de A el subconjunto V (M) de X, consistente de todos -- los ideales primos de A que contienen a M.

Esta función V es decreciente, ya que si $M \in \mathcal{P}(A)$, $N \in \mathcal{P}(A)$ y $N \subset M$, entonces todo ideal de A que contiene a M, contiene a N. Y por consiguiente, $V(M) \subset V(N)$.

Puede verificarse de lo expuesto anteriormente, que si considera- mos a $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(X)$ como categorías , en donde los morfismos ' entre sus elementos están definidos en la forma siguiente:

Para $B \in \mathcal{P}(A)$ y $C \in \mathcal{P}(A)$

Mor $(B, C) = i_{B,C}$ (inclusión de B en C) si $B \subset C$

Mor $(B, C) = \emptyset$ si $B \not\subset C$

Para $Y \in \mathcal{P}(X)$ y $Z \in \mathcal{P}(X)$

Mor $(Y, Z) = i_{Y, Z}$ (inclusión de Y en Z) si $Y \subset Z$

Mor $(Y, Z) = \emptyset$ si $Y \not\subset Z$

la función V es entonces un funtor contravariante de la categoría $\mathcal{P}(A)$ en la categoría $\mathcal{P}(X)$

Sea $M \in \mathcal{P}(A)$, entonces M y el ideal $\mathfrak{a}$ generado por M tienen la -- misma imagen bajo V.

En efecto, $M \subset \mathfrak{a}$ y todo ideal de A que contiene a M contiene a . Así,

$$V(M) = V(\mathfrak{a})$$

De la misma manera, si $\mathfrak{a}$ es un ideal y $r(\mathfrak{a})$ es su raíz, en-- tonces

$$V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$$

A partir de la definición de los conjuntos V (M), con $M \in \mathcal{P}(A)$, se tienen las siguientes igualdades.

3.1) i) $V(0) = X$ ii) $V(M) = \emptyset \iff = A$, donde es el ideal generado por M .

3.2) $$V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$

para toda familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A.

3.3) $$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

para toda pareja de ideales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ de A.

La fórmula 3.1) i) es inmediata al igual que la suficiencia de 3.1 ii) y la primera igualdad de 3.2). Para probar la necesidad de - 3.1) ii) basta tener en cuenta que todo ideal de A distinto de A - está contenido en un ideal primo

Consideremos ahora un ideal primo p tal que $p \in \bigcap_{i \in I} V(M_i)$, en-- tonces $M_i \subset p$ para toda $i \in I$. Así,

$$\bigcup_{i \in I} M_i \subset p$$

es decir

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) \subset V(\bigcup_{i \in I} M_i)$$

Inversamente

$$M_i \subset \bigcup_{i \in I} M_i \quad \text{para toda } i \in I$$

por consiguiente,

$$V(M_i) \supset V(\bigcup_{i \in I} M_i) \text{ para toda } i \in I$$

por lo tanto,

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) \supset V(\bigcup_{i \in I} M_i)$$

de donde

$$V(\bigcup_{i \in I} M_i) = V(\sum_{i \in I} M_i) = \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$

Por último, sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de A. Entonces, y todo ideal primo de A que contiene al producto contiene a su vez a alguno de ellos, y así a su intersección. Por lo que

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \quad \text{y} \quad V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

Además si un ideal de A contiene a o entonces contiene a de donde

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \supset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

es decir,

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$$

De las fórmulas anteriores se concluye que la familia de conjuntos V(M) de X es cerrada bajo uniones finitas e intersecciones arbitrarias. Por lo que X puede ser considerada como espacio topológico, definiendo en él la topología que tiene por conjuntos cerrados a los conjuntos de la forma V(M) con $M \in \mathcal{P}(A)$, topología que recibe el nombre de topología de Zariski.

<u>Definición</u> 3.1. Sea A un anillo. El espectro primo de A, denotado por Spec(A), es el conjunto X de todos los ideales primos de A, con la topología de Zariski.

<u>Definición</u> 3.2. El subespacio Ω de Spec (A), llamado espectro máximo de A, es el subespacio formado por todos los ideales' --

máximos de A.

De la primera definición obtenemos que Spec (A) = $\emptyset$ si y sólo si $A = 0$.

Sean A un anillo y X su espectro primo, para cada $f \in A$ definamos el conjunto $X_f \in \mathcal{P}(X)$ como aquel subconjunto de X consistente de todos los ideales primos de A que no contienen a f, es decir,

$$X_f = X - V(f)$$

Por lo que para toda $f \in A$, X_f es un conjunto abierto de X.

La familia $\{X_f\}_{f \in A}$ es una base de la topología de X.

En efecto sean U un abierto de X y $g \in U$, existe entonces un cerrado $V(M)$ tal que

$$U = X - V(M)$$

Por otra parte,

$$M = \bigcup_{f \in M} \{f\}$$

La fórmula 3.2 nos afirma que,

$$V(M) = V\Big(\bigcup_{f \in M} \{f\}\Big) = \bigcap_{f \in M} V(f)$$

por lo que,

$$U = X - \bigcap_{f \in M} V(f) = \bigcup_{f \in M} (X - V(f)) = \bigcup_{f \in M} X_f$$

Entonces

$$g \in X_f \subset U \quad \text{para alguna } f \in M$$

es decir, $\{X_f\}_{f \in A}$ es una base de la topología de X.

De la definición de estos conjuntos y de las fórmulas 3.1-3.3 se siguen las igualdades

3.5) i) $X_0 = \emptyset$ ii) $X_f = X \iff f$ es un elemento invertible de A.

3.6) $X_{fg} = X_f \cap X_g$ para toda pareja f, g de elementos de A.

3.5) i) es inmediata.

3.5) ii) $X - V(f) = X \iff V(f) = \emptyset \iff fA = A \iff f$ es invertible.

3.6) $(fA)(gA) = (fg)A$, así $V((fA)(gA)) = V((fg)A)$.

Por la fórmula 3.3

$$V((fA)(gA)) = V(fA) \cup V(gA).$$

de donde

$$X - (V(fA) \cup V(gA)) = X - V((fg)A)$$

por lo que,

$$X - V(fA) \cap X - V(gA) = X - V((fg)A)$$

O sea,

$$X_f \cap X_g = X_{fg}$$

b) El funtor $\mathcal{J}$.

Sean A un anillo, X el conjunto de todos los ideales primos de A, y $\mathcal{P}(X)$ y F las clases (ordenadas por la relación de inclusión) de todos los subconjuntos de X y de todos los ideales de A respectivamente.

Sea $\mathfrak{I}: \mathcal{P}(X) \longrightarrow F$ la función que asocia el ideal $\mathfrak{I}(Y) = \bigcap \{p / p \in Y\}$ de A a cada subconjunto Y de X.

Esta función es también decreciente. Ya que

$\mathfrak{I}(Y) = \bigcap \{p/p \in Y\} \subset \bigcap \{p/p \in Y'\}$ para toda pareja Y, Y' de subconjuntos de A, tales que $Y' \subset Y$.

Es decir,

$$\mathfrak{I}(Y) \subset \mathfrak{I}(Y') \quad \text{si} \quad Y' \subset Y.$$

Considerando a $\mathcal{P}(X)$ como categoría en la forma ya expuesta, y F como subcategoría de la categoría $\mathcal{P}(A)$. La función $\mathfrak{I}$ resulta - ser un funtor contravariante, de $\mathcal{P}(X)$ en F.

De la definición de $\mathfrak{I}$ se siguen

3.7) $\mathfrak{I}(\emptyset) = A$

3.8) $\mathfrak{I}(\bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} (Y_\lambda)$

Sea $Y = \{m\}$ siendo m un ideal máximo de A. Entonces, $\emptyset \subset Y$, así $\mathfrak{I}(\emptyset) \supset \mathfrak{I}(m) = m$

Como $\mathfrak{I}(\emptyset)$ es un ideal y m es máximo, concluímos que

$$\mathfrak{I}(\emptyset) = A$$

Demostraremos ahora la igualdad 3.8).

$$\mathfrak{J}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big) = \bigcap \{p/p \in Y \quad \text{para alguna } \lambda \in L\}$$

y

$$\bigcap_{\lambda\in L} \mathfrak{J}(Y_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in L}\big(\bigcap \{p/p \in Y_\lambda\}\big) = \bigcap \{p/p \in Y \quad \text{para alguna } \lambda \in L\}$$

O sea

$$\mathfrak{J}\Big(\bigcup_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in L} \mathfrak{J}(Y_\lambda)$$

Sean A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal de A y Y un subconjunto de X = Spec(A)

Proposición 3.1. $\mathfrak{J}(Y)$ es un ideal de A, tal que $r(\mathfrak{J}(Y)) = \mathfrak{J}(Y)$.

$r(\mathfrak{J}(Y)) = \bigcap \{p/p \in X, p \supset \mathfrak{J}(Y)\}$, $\mathfrak{J}(Y) = \bigcap \{p/p \in Y\}$

Por consiguiente,

$$\mathfrak{J}(Y) \subset p \text{ para todo } p \in Y$$

de donde

$$r(\mathfrak{J}(Y)) \subset \mathfrak{J}(Y)$$

Además,

$$\mathfrak{J}(Y) \subset r(\mathfrak{J}(Y))$$

Por lo tanto,

$$r(\mathfrak{J}(Y)) = \mathfrak{J}(Y)$$

Proposición 3.2. $\mathfrak{J}(V(\mathfrak{a}))$ es igual a la raíz de $\mathfrak{a}$ y $V(\mathfrak{J}(Y))$ es la cerradura de Y en X.

$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = \bigcap \{p / p \in V(\mathfrak{a})\} = \bigcap \{p / p \in X, \; p \supset \mathfrak{a}\}$ y

$$r(\mathfrak{a}) = \bigcap \{p / p \in X, \; p \supset \mathfrak{a}\}$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$$

para probar que $V(\mathfrak{I}(Y)) = \overline{Y}$, demostraremos que $V(\mathfrak{I}(Y))$ es el mínimo conjunto cerrado de X que contiene a Y.

Claramente

$$Y \subset V(\mathfrak{I}(Y))$$

Sea $M \in \mathcal{P}(A)$ tal que $Y \subset V(M)$, o sea $M \subset p$ para todo $p \in Y$. Entonces

$$M \subset \mathfrak{I}(Y)$$

de donde

$$V(M) \supset V(\mathfrak{I}(Y))$$

Por lo tanto,

$$V(\mathfrak{I}(Y)) = \overline{Y}$$

De estas proposiciones se obtiene

Proposición 3.3 . Sean $\overline{\mathfrak{I}}$ y $\overline{V}$ las restricciones de $\mathfrak{I}$ y V a las clases de los conjuntos cerrados de X y de los ideales de A que -- coinciden con su raíz, respectivamente. Entonces $\overline{V}\,\overline{\mathfrak{I}} = id_{(X)}$ y $\overline{\mathfrak{I}}\,\overline{V} = id_{(A)}$.

Sea Y un conjunto cerrado de X. $\overline{\mathfrak{I}}(Y) = \mathfrak{I}(Y)$ es un ideal que --

coincide con su raíz.

$$\overline{V}\,\overline{\mathfrak{I}}(Y) = V\mathfrak{I}(Y) = \overline{Y} = Y$$

Así,

$$\overline{V}\,\overline{\mathfrak{I}} = id_{\wp(X)}$$

Por otra parte, sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A tal que $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$. $\overline{V}(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$, es entonces un conjunto cerrado de X.

$$\overline{\mathfrak{I}}\,\overline{V}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{I}V(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a}) =$$

De donde

$$\overline{\mathfrak{I}}\,\overline{V} = id_{\wp(A)}$$

Es decir $\overline{\mathfrak{I}}$ es una biyección de la clase de los conjuntos cerrados de X en la clase de los ideales de A que coinciden con su raíz. Y análogamente $\overline{V}$ es una biyección de este último conjunto en el primero.

<u>Corolario</u> 3.1. Sea $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos cerrados de X, entonces la raíz de la suma de los ideales $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$, es el --- ideal $\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda)$.

Sea $F = \{\mathfrak{a} \subset A / r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \quad \mathfrak{a} \supset \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ para toda $\lambda \in L\}$

De la proposición 3.1., $\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda)$ es un ideal de A, igual a su --- raíz. Y además,

$$\mathfrak{I}(Y_\lambda) \subset \mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda \in L} Y)$$

por ser $\mathfrak{I}$ decreciente.

Hechos de los que se concluye que

$$\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda) \in F$$

Por otro lado, supongamos que existe $\mathfrak{a}_0$ en F tal que

$$\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda)$$

Por estar $\mathfrak{a}_0$ en F tenemos

$$V(\mathfrak{a}_0) \subset V(\mathfrak{I}(Y_\lambda)) \quad \text{para toda } \lambda\in L$$

De la proposición 3.2 , se sigue

$$\overline{Y_\lambda} = Y_\lambda \supset V(\mathfrak{a}_0) \quad \text{para toda } \lambda\in L$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda \supset V(\mathfrak{a}_0)$$

Entonces

$$\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda) \subset \mathfrak{I}(V(\mathfrak{a}_0))$$

Y de la proposición 3.2

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a}_0)) = r(\mathfrak{a}_0)$$

Además, ya que $\mathfrak{a}_0$ en F, sabemos que

$$r(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0$$

Por consiguiente,

$$\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda) \subset \mathfrak{a}_0$$

Es decir, el ideal $\mathfrak{I}(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda)$ es el elemento mínimo de la familia F.

El ideal $r(\sum_{\lambda\in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)) \in F$, de lo que resulta ,

$$r\Big(\sum_{\lambda\in L}(Y_\lambda)\Big) \subset \mathfrak{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big)$$

Además,

$$\sum_{\lambda\in L}(Y_\lambda) \subset \mathfrak{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big)$$

Y, por lo tanto,

$$r\Big(\sum_{\lambda\in L}(Y_\lambda)\Big) \subset r\Big(\mathfrak{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big)\Big) = \mathfrak{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big)$$

O sea,

$$r\Big(\sum_{\lambda\in L}\mathfrak{I}(Y_\lambda)\Big) = \mathfrak{I}\Big(\bigcap_{\lambda\in L} Y_\lambda\Big)$$

Corolario 3.2. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos ideales de A. Las condiciones siguientes son equivalentes.

i) $r(\mathfrak{b}) \subset r(\mathfrak{a})$

ii) $\mathfrak{b} \subset r(\mathfrak{a})$

iii) $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$

i) implica ii). Sabemos que $\mathfrak{b} \subset r(\mathfrak{b})$, por lo que si se cumple - i) tendremos que $\mathfrak{b} \subset r(\mathfrak{a})$.

ii) implica iii). Si $\mathfrak{b} \subset r(\mathfrak{a})$, entonces $V(r(\mathfrak{a})) \subset V(\mathfrak{b})$. Y ya que $V(r(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$, se satisface ii).

iii) implica i). Si $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$, entonces,

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{b})) \subset \mathfrak{I}(V(\mathfrak{a}))$$

Así por la proposición 3.2.

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a}) \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}(V(\mathfrak{b})) = r(\mathfrak{b}).$$

O sea,

$$r(\mathfrak{b}) \subset r(\mathfrak{a})$$

Corolario 3.3. Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in L}$ una familia de elementos de A. Para todo $g \in A$ $X_g \subset \bigcup_{\lambda\in L} X_{f_\lambda}$ si y sólo si existe un entero positivo n tal que g^n pertenece al ideal $\mathfrak{a}$ generado por los elementos f_λ.

$X_g \subset \bigcup_{\lambda\in L} X_{f_\lambda} \Longleftrightarrow V(g) = V(gA) \supset \bigcap_{\lambda\in L} V(f_\lambda) = V(\mathfrak{a})$

Y por el corolario anterior

$$V(gA) \supset V(\mathfrak{a}) \Longleftrightarrow gA \subset r(\mathfrak{a})$$

Por último,

$gA \subset r(\mathfrak{a}) \Longleftrightarrow$ existe un entero positivo n tal que $g^n \in \mathfrak{a}$.

Como caso especial de este corolario podemos afirmar que una familia $\{f_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de elementos de A, es tal que $X = X_1 = \bigcup_{\lambda\in L} X_{f_\lambda}$ si y sólo si la familia $\{f_\lambda\}_{\lambda\in L}$ genera al ideal A.

Corolario 3.4. Sean f y g elementos de A. $X_f = X_g$ si y sólo si existen dos enteros positivos m y n tales que $f^m \in gA$ y $g^n \in fA$.

El corolario resulta de aplicar dos veces el corolario anterior, una a la familia $\{g\}$ y al elemento f y otra al elemento g y a la familia $\{f\}$.

Corolario 3.5. Sea $f \in A$. Para que el abierto X_f sea igual al vacío es necesario y suficiente que f sea nilpotente.

Para demostrar el corolario es suficiente aplicar el corolario anterior, teniendo en cuenta que $X_0 = \emptyset$.

Corolario 3.6. Sea $p \in X = \mathrm{Spec}(A)$. El subconjunto $\{p\}$ de X - es cerrado en X, si y sólo si p es un ideal máximo de A.

Probaremos que $\overline{\{p\}} = V(p)$.

Por la proposición 3.2

$$V(\mathfrak{I}(\{p\})) = \overline{\{p\}}$$

pero

$$V(\mathfrak{I}(\{p\})) = V(p)$$

Así

$$V(p) = \overline{\{p\}}$$

Claramente, $p = V(p)$ si y sólo si p es un ideal máximo de A.

Resultado del que se sigue el corolario.

Corolario 3.7. Si A es un anillo neteriano, entonces $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ es un espacio neteriano .

Consideremos una cadena descendente

$$V(M_1) \supset V(M_2) \supset \ldots$$

de conjuntos cerrados de X.

Sean $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ los ideales generados por $M_1, M_2, \ldots$ respectivamente.

Puesto que $V(M_i) = V(\mathfrak{A}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots$ tendremos la cadena descendente ,

$$V(\mathfrak{A}_1) \supset V(\mathfrak{A}_2) \supset \ldots$$

Por el corolario 3.2 esta cadena determina la cadena ascendente

$$r(\mathfrak{A}_1) \subset r(\mathfrak{A}_2) \subset \ldots$$

de ideales de A.

Entonces, puesto que A es un anillo neteriano , existe un índice t para el cual

$$r(\mathfrak{A}_t) = r(\mathfrak{A}_{t+1}) = \ldots$$

Y aplicando nuevamente el corolario 3.2 , tendremos

$$V(\mathfrak{A}_t) = V(\mathfrak{A}_{t+1}) = \ldots$$

es decir,

$$V(M_t) = V(M_{t+1}) = \ldots$$

O sea, X es un espacio topológico neteriano.

Proposición 3.4. Sea $f \in A$. El conjunto abierto X_f es compacto.

Supongamos que existe una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de abiertos de X tal que $X_f \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$.

Por consiguiente, para todo $x \in X_f$ existe U_λ tal que $x \in U_\lambda$. Y ya que la familia $\{X_g\}_{g \in A}$ es una base de la topología de X, para cada $x \in U_\lambda$ existe X_{g_λ} tal que $x \in X_{g_\lambda} \subset U_\lambda$

Por lo que

$$X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda} \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$$

Entonces sólo es necesario demostrar, que existe una subfamilia finita $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ de la familia $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, tal que

$$X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L'} X_{g_\lambda}$$

Lo que implicará que X_f es compacto, ya que entonces

$$X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L'} U_\lambda$$

Por el corolario 3.3 la relación $X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L} X_{g_\lambda}$ implica que existe un entero positivo n tal que f^n pertenece al ideal generado por la familia $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$, y así f^n pertenece al ideal generado por una subfamilia finita $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L' \subset L}$

Por el mismo corolario se sigue que

$$X_f \subset \bigcup_{\lambda \in L'} X_{g_\lambda}$$

De la igualdad $X = X_1$, concluímos que

Corolario 3.8. El espectro primo de cualquier anillo es compacto.

Proposición 3.5. Sean A, A' dos anillos, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$ y h un homomorfismo de A en A'. La función asociada al homomorfismo h, ${}^a h: p' \longrightarrow h^{-1}(p')$ de X' en X es continua.

Sea $M \in \mathcal{P}(A)$.

$$({}^a h)^{-1}(V(M)) = \{p' \in X' / {}^a h(p') \in V(M)\} = \{p' \in X' / h^{-1}(p') \supset M\}$$

Entonces,

$({}^{a}h)^{-1}(V(M)\ ) = \{ p' \in X'/p' \supset h(M) \} = V(h(M)\ )$

de donde, ${}^{a}h$ es continua.

Si S es una parte multiplicativa de un anillo A. Denotaremos al localizado del anillo A, con respecto a S por A_S, h_S será el homomorfismo canónico de A en A_S, y X', X^S serán el Spec (A_S) y el subconjunto $\{ p \in X/p \cap S = \emptyset \}$ de $X = \mathrm{Spec}(A)$, respectivamente.

<u>Lema</u> 3.1. Sea $f' \in A_S$. Existe $f \in A$ tal que $X'_{f'} = X'_{(f/1)}$.

Ya que $f' \in A_S$, existen $f \in A$ y $s \in S$, tales que $f' = (f/s)$. Entonces $f' = (f/1)\cdot(1/s)$.

De la fórmula 3.6 tenemos

$$X'_{f'} = X'_{(f/1)} \cap X'_{(1/s)}$$

Además, ya que $s \in A \cap S$, se sigue que $(1/s)$ es un elemento invertible de A_S. Por consiguiente, la fórmula 3.1 ii) nos asegura que

$$X'_{(1/s)} = X'$$

por lo que

$$X'_{f'} = X'_{(f/1)}$$

<u>Lema</u> 3.2. Sea $(f/1)$ un elemento de A_S. Un ideal primo p' de A_S pertenece a $X_{(f/1)}$ si y sólo si ${}^{a}h_S\ (p')$ pertenece a X_f.

El lema anterior es equivalente a la siguiente afirmación:

Un elemento $(f/1)$ pertenece a p' si y sólo si f pertenece a ${}^a h_S(p') = h_S^{-1}(p')$.

Y esta última afirmación se sigue inmediatamente de la definición del homomorfismo h_S.

<u>Lema</u> 3.3. Si p' es un ideal primo de A_S, entonces ${}^a h_S(p') = h^{-1}(p')$ pertenece a X^S. Y aún más, ${}^a h_S(X') = X^S$.

Demostraremos:

i) si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A entonces $\mathfrak{a} \cap S = \emptyset$ si y sólo si $\mathfrak{a} A_S = A_S$

ii) si p es un ideal primo de A, entonces $p \cap S = \emptyset$ si y sólo si $p = h_S^{-1}(h_S(p)A_S)$

iii) $h_S^{-1}(p') \in X^S$ para todo $p' \in X'$.

iv) ${}^a h_S(X') = X^S$

i) Supongamos que $x \in \mathfrak{a} \cap S$; entonces $(1/x) \in A_S$ y, por lo tanto, $1 \in A_S$. Es decir, $\mathfrak{a} A_S = A_S$

Inversamente, supongamos que $\mathfrak{a} A_S = A_S$. Entonces, $(1/1) = a(a'/s)$ con $a \in \mathfrak{a} (a'/s) \in A_S$. Así existe $t \in S$ tal que -- $ts = taa'$.

Por consiguiente, como $ts \in S$ y $taa' \in \mathfrak{a}$, se concluye que

$$S \cap \mathcal{A} = \emptyset$$

ii) supongamos que $p \cap S = \emptyset$ y $h_S^{-1}(h_S(p)A_S) \not\subset p$.

Entonces $p \subset A-S$ y existe $a \in A$ tal que

$$a \notin p \quad \text{y} \quad h_S(a) \in h_S(p)A_S$$

Es decir, existen $q \in p$, $a' \in A$ y $s \in S$ tales que

$(a/1) = q(a'/s)$.

Por lo tanto, existe $t \in S$, tal que $tsa = tqa'$

Así ya que $p \subset A-S$ y $a \notin p$, se tiene que $a \notin A-S$, por lo que

$a \in S$.

Y tsa es entonces un elemento de S.

Y debido a que $q \in p$ tenemos $tqa' \in p$.

Por lo que

$$p \cap S \neq \emptyset$$

Contradiciendo la hipótesis. Así,

si $p \in X$ y $p \cap S = \emptyset$ entonces, $h_S^{-1}(h_S(p)A_S) \subset p$.

Y ya que

$$p \subset h_S^{-1}(h_S(p)) \subset h_S^{-1}(h_S(p)A_S)$$

se sigue

$$p = h_S^{-1}(h_S(p)A_S)$$

Inversamente, si $p \in X$ y $p = h_S^{-1}(h_S(p)A_S)$

Entonces si $p \cap S \neq \emptyset$ concluímos por i) que

$$h_S(p)A_S = pA_S = A_S$$

Por consiguiente,

$$p = h_S^{-1}(A_S) = A$$

contradiciendo la hipótesis de que p es ideal primo de A.

iii) sea $p' \in X'$, entonces $h_S^{-1}(p')$.

Supongamos que $h_S^{-1}(p') \notin X^S$, así

$$h_S^{-1}(p') \cap S \neq \emptyset$$

Siguiéndose de i) y ii) que

$$p' = h_S(h_S^{-1}(p')) = A_S \quad h_S^{-1}(p')A_S = A_S$$

lo que contradice la hipótesis de que $p' \in X'$.

Por lo tanto, $h_S^{-1}(p') \cap S = \emptyset$; es decir, $h_S^{-1}(p') \in X^S$ para todo $p' \in X'$.

iv) sea $p \in X^S$ y consideremos el ideal primo $h_S(p)A_S = pA_S$ de A_S. Por ii) $p = h_S^{-1}(h_S(p)A_S)$: por lo tanto, ${}^ah_S$ es suprayectiva. O - sea ${}^ah_S(X') = X^S$.

<u>Proposición</u> 3.6. La función ${}^ah_S$ es un homeomorfismo del espectro primo X' en el subespacio X^S de X .

La continuidad de la función se afirma en la proposición 3.5, en -- tanto que la función es suprayectiva en virtud del lema 3.3.

Demostraremos que ${}^ah_S$ es una función i) inyectiva , y ii) abierta.

i) supongamos que p X' y p' X' son tales que

$${}^ah_S(p) = {}^ah_S(p')$$

Por los lemas 3.1 y 3.2 tenemos que para todo $f' = (f/s) \in A'$

$$p \notin X'_{f'} \iff p \notin X'_{(f/1)} \iff {}^a h_S(p) \notin X'_f$$

$$^a h_S(p) \notin X'_f \iff {}^a h_S(p') \in X'_f \iff p' \in X'_{(f/1)} = X'_{f'}$$

Es decir, $f' \in p$ si y sólo si $f' \in p'$. De donde $p = p'$.

ii) bastará con demostrar que la imagen de todo abierto básico de X' es un conjunto abierto de X^S.

Sea entonces $X'_{f'}$ uno de tales conjuntos abiertos, con $f' = (f/s)$, $f \in A$ y $s \in S$.

$$^a h_S(X'_{f'}) = \{ {}^a h_S (p')/p' \in X'_{f'} \}$$

Por el lema 3.1

$$^a h_S (X_{f'}) = \{ {}^a h_S(p')/p' \in X'_{(f/1)} \}$$

Del lema 3.2

$$^a h_S (X'_{f'}) = \{ {}^a h_S(p')/ {}^a h_S(p') \in X_f \}$$

O sea

$$^a h_S(X'_{f'}) = X_f \cap {}^a h(X') = X_f \cap X^S$$

es decir, $^a h_S (X'_{f'})$ es un abierto de X^S.

<u>Proposición</u> 3.7. Sea A un anillo. Para que un subconjunto Y de Spec (A) sea irreducible es necesario y suficiente que el ideal $\mathfrak{J}(Y) = p$ sea primo.

Como resultado auxiliar demostraremos que para todo elemento -- $f \in A$, el afirmar que $f \in p$ es equivalente a asegurar que $Y \subset V(f)$.

En efecto,

$$f \in p \iff f \in p' \text{ para todo } p' \in Y$$

$$f \in p' \text{ para todo } p' \in Y \iff p' \in Y \text{ es tal que } p' \in V(f) ,$$

$$\text{o sea, si } Y \subset V(f) .$$

Supongamos que Y es irreducible y sean $f \in A$ y $g \in A$ tales que - $fg \in p$.

Por el resultado anterior tendremos

$$Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g) .$$

Por consiguiente de la caracterización de los conjuntos irreduci-- bles, dada en el Capítulo I , se sigue que

$$Y \subset V(f) \quad o \quad Y \subset V(g)$$

Por lo que,

$$f \in p \quad o \quad g \in p$$

Por lo tanto, p es un ideal primo de A

Supongamos ahora que p es un ideal primo de A. Entonces,

$$p = \mathfrak{I}(\{p\})$$

Por la proposición 3.2

$$\overline{Y} = V(p) = V(\mathfrak{I}(\{ p\})) = \overline{\{p\}}$$

Como $\{p\}$ es un conjunto que solo consta de un punto, $\{p\}$ es - irreducible. Y la proposición 2.1 nos asegura entonces que $\overline{\{p\}}$ también lo es .

Debido a lo cual, Y es un conjunto irreducible, y la misma proposición 2.1 nos oonduce a la afirmación requerida.

<u>Corolario</u> 3.9. Sea A un anillo. $X = \text{Spec}(A)$ es irreducible si y sólo si el cociente de A con respecto a su nilradical R es un anillo entero.

Si X es irreducible, $\mathfrak{I}(X)$ es un ideal primo. Y ya que $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(V(0))$, concluímos que, $\mathfrak{I}(X) = r(0) = R$.

De donde el nilradical R es un ideal primo y así A/R es un anillo entero .

Inversamente, si A/R es un anillo entero, $\mathfrak{I}(X) = R$ es un ideal primo; es decir, X es un conjunto irreducible.

En forma más general, podemos afirmar que

<u>Corolario</u> 3.10. Un conjunto cerrado M de $X = \text{Spec}(A)$ es irreducible si y sólo si $M = V(p)$, donde $p \in \text{Spec}(A)$.

Si M es un conjunto cerrado e irreducible de X, tenemos por la proposición anterior que

$$\mathfrak{I}(M) = p \quad \text{para } p \in \text{Spec}(A)$$

Y por la proposición 3.2

$$M = \overline{M} = V(\mathfrak{I}(M)) = V(p) \quad \text{para } p \in \text{Spec}(A)$$

Supongamos ahora que $M = V(p)$ con $p \in \text{Spec}(A)$. Entonces

$$\mathfrak{I}(V(p)) = r(p) = p \quad \text{con } p \in \operatorname{Spec}(A)$$

Y la proposición anterior nos asegura en este caso que $M = V(p)$ es un conjunto irreducible de X.

El corolario anterior se puede enunciar como sigue:

V restringida a la subclase de $\mathcal{P}(A)$ constituída por todos los ideales primos de A, es una biyección sobre la clase de conjuntos cerrados e irreducibles de X.

Como resultado inmediato del corolario anterior, tenemos

<u>Corolario</u> 3.11. Toda componente irreducible de X es de la forma $V(p)$, donde $p \in \operatorname{Spec}(A)$.

<u>Corolario</u> 3.12. Las componentes irreducibles de un conjunto cerrado Y de X son los conjuntos $V(p)$, siendo p un elemento máximo del conjunto de ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{I}(Y)$.

Toda componente irreducible de Y, es un conjunto cerrado e irreducible de X, por lo que las componentes irreducibles de Y, serán aquellos elementos máximos de la familia

$$F = \{ V(p) / V(p) \subset Y, \; p \in \operatorname{Spec}(A) \}$$

Claramente,

$$V(p) \subset Y \text{ si y sólo si } p \supset \mathfrak{I}(Y)$$

Entonces,

$$F = \{ V(p)/p \supset \mathfrak{J}(Y),\ p \in \mathrm{Spec}(A) \}$$

Afirmamos que los elementos máximos de F son los conjuntos $V(p)$ donde p es un elemento mínimo de la familia

$$F' = \{ p/p \supset \mathfrak{J}(Y),\ p \in \mathrm{Spec}\,(A) \}$$

En efecto, si p es un elemento mínimo de F', entonces siempre que $V(p) \subset V(p')$ para algún $p' \in F'$, se tendrá

$$p = \mathfrak{J}(V(p)) \supset \mathfrak{J}(V(p')) = p'$$

Por lo que

$$p \supset p'$$

Y por consiguiente,

$$p = p' \text{ y } V(p) = V(p')$$

Es decir, $V(p)$ es un elemento máximo de F .

Recíprocamente sea $V(p)$ un elemento máximo de F, y supongamos que

$$p' \subset p \quad \text{y} \quad p' \in F'$$

Entonces,

$$V(p') \supset V(p)$$

por lo que

$$V(p') = V(p) \text{ y } p' = p$$

es decir, p' es un elemento máximo de F'

<u>Corolario</u> 3.13. Si A es un anillo neteriano el conjunto de ideales

primos mínimos de A es finito.

De la proposición 3.7. se tiene que $X = \text{Spec}(A)$ es neteriano, por lo que la proposición 2.4 nos afirma que X sólo tiene un número finito de componentes irreducibles.

Por el corolario anterior, las componentes irreducibles de X serán los oonjuntos $V(p)$, donde p es un elemento mínimo de la familia $F = \{p/p \supset \mathcal{J}(X),\ p \in \text{Spec}(A)\}$. Y $F = \{p/p \supset \mathcal{J}(V(0)) = r(0)$ $p \in \text{Spec}(A)\}$.

O sea, $F = \{p/p \in \text{Spec}(A)\} = X$.

Y como el conjunto de componentes irreducibles es finito, sólo puede existir un número finito de elementos mínimos de esta familia.

<u>Lema</u> 3.4. Si e, f son dos idempotentes de un anillo A, tales que $r(eA) = r(fA)$, entonces $e = f$.

Ya que

$$e \in r(eA) = r(fA) \quad y \quad f \in r(fA) = r(eA),$$

existen dos enteros no negativos m y n tales que,

$$e^m \in fA \quad y \quad f^n \in eA$$

Por otro lado, $e^m = e$ y $f^n = f$, por ser e y f idempotentes.

Existen entonces, dos elementos x, y del anillo A, tales que

$$e = xf \quad y \quad f = ye$$

Por lo que,

$ef = xf^2 = xf = e$, $ef = ye^2 = ye = f$,

Así, $e = f$

Proposición 3.8. Sean A un anillo , I un conjunto finito, E la clase de familias ortogonales $\{e_i\}_{i \in I}$ de idempotentes de A distintos de cero, y tales que $\sum_{i \in I} e_i = 1$, P la clase de todas las particiones abiertas $\{U_i\}_{i \in I}$ de $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ y S la clase de las familias $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ de ideales de A distintos de A, y tales que $A = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{a}_i$

i) sea σ la función que asocia la familia $\sigma(\{e_i\}_{i \in I}) = \{Ae_i\}_{i \in I}$ de ideales de A a cada elemento $\{e_i\}_{i \in I}$ de E. Dicha función es una biyección de E en S.

ii) sea ω la función que asocia la familia $\omega(\{e_i\}_{i \in I}) = (V(A(1-e_i)))_{i \in I}$ de conjuntos cerrados de X, a cada elemento $\{e_i\}_{i \in I}$ de E. Dicha función es una biyección de E en P.

i) demostraremos: a_i) $\sigma(E) \subset S$, b_i) σ es inyectiva , y c_i) σ es suprayectiva.

a_i) sea $\{e_i\}_{i \in I}$ un elemento de la clase E; entonces, $\sigma(\{e_i\}_{i \in I}) = (Ae_i)_{i \in I}$ y $A = \sum_{i \in I} Ae_i$, ya que $\sum_{i \in I} e_i = 1$

Supongamos, ahora, que $0 = \sum_{i \in I} a_i e_i$.

Para cada $e_i \in \{e_i\}_{i \in I}$ se tendrá entonces que $e_i \sum_{i \in I} a_i e_i =$ $a_i e_i^2 = a_i e_i = 0$

O sea, $A = \bigoplus_{i \in I} Ae_i$ para todo elemento $\{e_i\}_{i \in I}$ de E. Por lo que $\sigma(E) \subset S$.

b_i) supongamos que $\{e_i\}_{i \in I}$ y $\{e_i'\}_{i \in I}$ son elementos de E tales que, $\sigma(\{e_i\}_{i \in I}) = \sigma(\{e_i'\}_{i \in I})$.

Por consiguiente, para cada e_i de $\{e_i\}_{i \in I}$ existe e_j' en $\{e_i'\}_{i \in I}$ tal que, $Ae_i = Ae_j'$

Por lo que, $r(Ae_i) = r(Ae'_j)$.

Siguiendose del lema anterior la igualdad $e_i = e'_j$.

Por lo tanto,

$$\{e_i\}_{i \in I} = \{e_i'\}_{i \in I}$$

c_i) sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ un elemento de S; es decir $A = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{A}_i$

Lo que implica que existen $e_i \in \mathfrak{A}_i$ $i \in I$ tales que $1 = \sum_{i \in I} e_i$

Si $i \neq j$, entonces,

$$e_i e_j \in \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{A}_j = 0$$

Y para toda $j \in I$, se tendrá

$$e_j = e_j \sum_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} e_j e_i = e_i^2$$

O sea que $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortogonal de idempotentes de A, tales que

$$1 = \sum_{i \in I} e_i, \quad e_i \neq 0 \text{ para todo } i \in I$$

Por lo tanto $\{e_i\}_{i \in I} \in E$

Además, $Ae_i \subset \mathfrak{a}_i$ para cada $i \in I$.

Por otro lado, ya que $1 = \sum_{i \in I} e_i$ tenemos que

$$A = \sum_{i \in I} Ae_i$$

Sea $x_i \in \mathfrak{a}_i$; entonces,

$$x_i = \sum_{i \in I} a_i e_i \text{, con } a_i \in A \text{ para toda } i \in I$$

Puesto que $a_i e_i \subset \mathfrak{a}_i$ para toda $i \in I$, y $A = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ se sigue que $a_j e_j = 0$ para todo índice $j \neq i$, y $x_i = a_i e_i$.

Por lo que, $\mathfrak{a}_i \subset Ae_i$.

Así

$$\mathfrak{a}_i = Ae_i \text{ para cada } i \in I$$

Es decir, la familia $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ es la imagen del elemento $\{e_i\}_{i \in I}$ de S, bajo σ.

ii) Se probará: a_{ii}) $\omega(E) \subset P$, b_{ii}) ω es inyectiva y c_{ii}) ω es suprayectiva.

a_{ii}) sea $\{e_i\}_{i \in I}$ un elemento de E., Denotaremos por Y_i - al conjunto cerrado $V(A(1-e_i))$ para cada $i \in I$.

Si $i \neq j$, entonces,

$1 = 1-e_i + e_i(1-e_j)$ y $1-e_i + e_i(1-e_j) \in A(1-e_i) + A(1-e_j)$

Así,

$$1 \in A(1-e_i) + A(1-e_j)$$

Por consiguiente, si $i \neq j$

$Y_i \cap Y_j = V(A(1-e_i)) \cap V(A(1-e_j)) = V(A)$, o sea

$$Y_i \cap Y_j = \emptyset$$

Además, por la fórmula 3.1 se tiene

$$\bigcup_{i \in I} Y_i = V\Big(\prod_{i \in I} A(1-e_i)\Big)$$

Y puesto que,

$$\prod_{i \in I}(1-e_i) = 1 - \sum_{i \in I} e_i = 0$$

se tiene que

$$\bigcup_{i \in I} Y_i = V(0) = X$$

Los dos hechos implican que $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una partición de X.

Así sólo nos falta probar que cada Y_i es un conjunto abierto de X, lo cual se concluye a partir de que I es finito y de que

$$X = \bigcup_{i \in I} Y_i \quad Y_i \cap Y_j = \emptyset$$

ya que entonces

$$Y_i = X - \bigcup_{i \neq j} Y_j \quad \text{para cada } i \in I$$

Es decir, cada Y_i es el complemento de un conjunto cerrado, a saber $\bigcup_{i \neq j} Y_j$.

Por lo tanto, $\omega(E) \subset P$.

b_{ii}) supongamos que $\{e_i\}_{i \in I}$ y $\{e'_i\}_{i \in I}$ son dos elementos de E, tales que, $\omega(\{e_i\}_{i \in I}) = \omega(\{e'_i\}_{i \in I})$.

Entonces, para cada $e_i \in \{e_i\}_{i\in I}$ existe $e'_j \in \{e'_i\}_{i\in I}$ tal que, $V(A(1-e_i)) = V(A(1-e'_j))$. Lo que equivale, por el corolario 3.2, a $r(A(1-e_i)) = r(A(1-e'_j))$.

Y ya que tanto $1-e_i$, como $1-e'_j$ son idempotentes, el lema 3.4 es aplicable. Por lo que

$$1-e_i = 1-e'_j, \quad e_i = e'_j$$

Es decir, $\{e_i\}_{i\in I} = \{e'_i\}_{i\in I}$.

c_{ii}) sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un elemento de P. Para cada $i \in I$, definamos el conjunto cerrado y abierto siguiente:

$$Z_i = X - U_i .$$

Puesto que, U_i y Z_i son conjuntos cerrados, existen dos ideales $\mathfrak{a}_i$ y $\mathfrak{b}_i$ de A tales que.

$$U_i = V(\mathfrak{a}_i) \quad Z_i = V(\mathfrak{b}_i)$$

Además, $U_i \cap Z_i = \emptyset$, lo que implica

$$V(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i) = V(\mathfrak{a}_i) \cap V(\mathfrak{b}_i) = \emptyset$$

Es decir, $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i = A$.

De lo que resulta, que existen $a_i \in \mathfrak{a}_i$ y $b_i \in \mathfrak{b}_i$, tales que

$$a_i + b_i = 1$$

Demostraremos: c'_{ii}) $U_i = V(Aa_i^p)$, $Z_i = V(Ab_i^p)$, siendo p un entero positivo tal que $(a_i b_i)^p = 0$, c''_{ii}) $A = Aa_i^p \oplus Ab_i^p$

c'_{ii}) sabemos que,

$$V(0) = X \text{ y } X = U_i \cup Z_i = V(\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i)$$

Del corolario 3.2 tenemos entonces, $\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_i \subset r(0)$, lo que implica que existe un entero positivo p tal que

$$(a_i b_i)^p = 0, \text{ es decir } a_i^p \cdot b_i^p = 0 .$$

Por otro lado,

$$\mathfrak{a}_i \supset Aa_i \quad \text{y} \quad \mathfrak{b}_i \supset Ab_i$$

Entonces,

$$U_i = V(\mathfrak{a}_i) \subset V(Aa_i) \quad \text{y} \quad Z_i = V(\mathfrak{b}_i) \subset V(Ab_i)$$

Y ya que $Aa_i^p \subset Aa_i$, $Ab_i^p \subset Ab_i$, concluímos que

$U_i = V(\mathfrak{a}_i) \subset V(Aa_i) \subset V(Aa_i^p)$ y $Z_i = V(\mathfrak{b}_i) \subset V(Ab_i) \subset V(Ab_i^p)$

Además, sea q un ideal primo de A tal que, $Aa_i^p \subset q$, entonces $a_i^p \subset q$, por lo que $a_i \in q$. Así $Aa_i \subset q$.

Análogamente, si $q \in V(Ab_i^p)$, entonces $q \in V(Ab_i)$

Es decir,

$$V(Aa_i^p) \subset V(Aa_i) \quad \text{y} \quad V(Ab_i^p) \subset V(Ab_i)$$

Resumiendo :

$U_i \subset V(Aa_i) = V(Aa_i^p)$ y $Z_i \subset V(Ab_i) = V(Ab_i^p)$

Por lo que,

$$V(Aa_i^p + Ab_i^p) = V(Aa_i^p) \cap V(Ab_i^p) = V(Aa_i) \cap V(Ab_i) =$$

$$V(Aa_i + Ab_i) = V(1) = \emptyset$$

Por consiguiente, si $q \in V(Aa_i^p)$ entonces, $q \notin U_i$.

Ya que si suponemos que $q \in X - U_i = Z_i$, resulta que $q \in V(Ab_i)$, y así $q \in V(Aa_i^P) \cap V(Ab_i^P)$, lo que contradice la igualdad anterior.

En forma análoga, podemos concluír que $V(Ab_i^P) \subset Z_i$.

c''_{ii}) además, puesto que $V(Aa_i^P + Ab_i^P) = \emptyset$, tenemos

$$Aa_i^P \cap Ab_i^P = A$$

por lo que, existen $x_1 \in A$, $x_2 \in A$ tales que $1 = x_1 a_i^P + x_2 b_i^P$

Por otra parte, supongamos que

$$x \in Aa_i^P \cap Ab_i^P$$

Entonces existen $y_1 \in A$, $y_2 \in A$ tales que, $x = y_1 a_i^P + y_2 b_i^P$

Por lo tanto,

$x = xx_1 a_i^P + xx_2 b_i^P = y_2 x_1 a_i^P b_i^P + y_1 x_2 a_i^P b_i^P = 0$

Es decir, $A = Aa_i^P \oplus Ab_i^P$.

Por ser σ biyectiva para cada $U_i = V(Aa_i^P)$ y su complemento $Z_i = V(Ab_i^P)$, existen dos idempotentes f_i y e_i de A tales que $Af_i = Aa_i^P$, $Ae_i = Ab_i^P$, $1 = e_i + f_i$ y $e_i f_i = 0$

Consideremos la familia ortogonal $\{e_i\}_{i \in I}$ de idempotentes de A, que están determinados en esa forma.

Si $i \neq j$, entonces,

$$V(0) = X = Z_i \cup Z_j = V(Ae_i) \cup V(Ae_j)$$

o sea,

$$r(0) = V(Ae_i\, e_j)$$

Y debido a que $e_i\, e_j$ es un idempotente de A, se sigue del lema 3.4 que $e_i\, e_j = 0$ para $i \neq j$.

Es decir, la familia $\{e_i\}_{i \in I}$ es una familia ortogonal de idempotentes de A, tales que,

$e_i \neq 0$ para toda $i \in I$, $U_i = V(Af_i) = V(A(1-e_i))$ para cada $i \in I$

Así sólo nos falta probar que $\sum_{i \in I} e_i = 1$

Sea $e = \sum_{i \in I} e_i$ el cual es claramente un idempotente de A y $e_i\, e = e_i$ para toda $i \in I$.

O sea, $e_i \in Ae$. Por lo que,

$$V(Ae) \subset V(Ae_i) = Z_i \quad \text{para toda } i \in I$$

De lo que resulta,

$$V(Ae) \subset \bigcap_{i \in I} Z_i$$

Pero, $\bigcap_{i \in I} Z_i = \emptyset$. Por lo tanto,

$$V(Ae) = \emptyset = V(A1)$$

Siguiéndose entonces del lema 3.4 la igualdad $e = 1$.

Así, ω es suprayectiva.

<u>Corolario</u> 3.14 . Sea A un anillo. Para que $X = \operatorname{Spec}(A)$ sea conexo es necesario y suficiente que los únicos idempotentes de A sean 1 y 0.

Supongamos que existe un idempotente e de A tal que $e \neq 0$ y $e \neq 1$, -- entonces, $1-e$ es también un idempotente de A, y distinto de 0 y de 1.

Tenemos así, que $\{e, 1-e\}$ es una familia ortogonal de idempotentes de A, distintos de cero y tales que $e + (1-e) = 1$.

La proposición anterior nos asegura en este caso, que V(Ae) es un conjunto abierto de X.

Y por el lema 3.4 tenemos que

$$V(Ae) \neq X \quad y \quad V(Ae) \neq \emptyset$$

Por lo que existe un conjunto cerrado y abierto de X distinto de X y del vacío; por lo tanto, X no sería conexo.

Inversamente, supongamos que X no es conexo. Existen entonces, U_1 y U_2 abiertos de X tales que

$$X = U_1 \cup U_2 \ , \ U_1 \cap U_2 = 0 \ y \ U_1 \neq X, \ U_1 \neq \emptyset$$

Por la proposición anterior, existe una familia ortogonal de idempotentes, distintos de cero, de A $\{e_1, e_2\}$ tales que

$1 = e_1 + e_2$ y $U_1 = V(A(1-e_1))$, $U_2 = V(A(1-e_2))$

Como $e_1 \neq \substack{0\\1}$ y $e_2 \neq \substack{0\\1}$, 1 y 0 no serían los únicos idempotentes de A.

<u>Corolario</u> 3.15. Si A es un anillo entero, entonces X= Spec (A) es conexo.

Supongamos que existe a A tal que

$$a^2 = a, \ a \neq 0 \ \ y \ \ a \neq 1$$

Entonces $1-a = 0$ y $a(1-a) = 0$. Así a es un divisor de 0, contradiciendo la hipótesis de que A es un anillo entero.

Por consiguiente, los únicos idempotentes de A son 1 y 0. Siguiendose del corolario anterior que $X = \mathrm{Spec}(A)$ es conexo.

Corolario 3.16. Si A es un anillo local, $X = \mathrm{Spec}(A)$ es conexo.

Sea m el ideal máximo de A. Y supongamos que e es un idempotente distinto de 0 y de 1.

Entonces, $e(1-e) = 0$, así tanto e como $(1-e)$ no son elementos invertibles de A, y por consiguiente, $Ae \neq A$ y $A(1-e) \neq A$.

Y ya que todo ideal de un anillo A distinto de A, está contenido en algún ideal máximo, tenemos

$$Ae \subset m \quad y \quad A(1-e) \subset m$$

Así,

$$1 = e + (1-e) \subset m \quad \text{es decir,} \quad A = m.$$

Lo que contradice la hipótesis de que m es un ideal máximo de A.

De donde los únicos idempotentes de A son en este caso 0 y 1 y el corolario se sigue entonces del corolario 3.14

Corolario 3.17. Sea A un anillo. Para todo $p \in X = \mathrm{Spec}(A)$ $X' = \mathrm{Spec}(A_p)$ es conexo.

En virtud del corolario anterior, sólo es necesario demostrar que el anillo A_p es un anillo local para todo $p \in X$. Y para ello basta aplicar la proposición 3.6 .

En efecto, si $q' \in \text{Spec}(A_p)$, por la proposición antes mencionada se tiene

$$h_p^{-1}(q') \cap (A-p) = \emptyset$$

es decir,

$$h_p^{-1}(q') \subset p$$

Entonces,

$$q' = q' A_p = h_p(h_p^{-1}(q')) A_p \subset h_p(p) A_p = pA_p$$

O sea todo ideal primo de A_p está contenido en el ideal primo pA_p , por lo que pA_p es el único ideal máximo de A_p . Lo que -- significa que A_p es un anillo local.

IV. SOPORTE DE UN MODULO.

Tanto en este como en el siguiente capítulo, se supondrá, que los homomorfismos de anillos considerados, transforman al elemento unitario en el elemento unitario. Y por comodidad llamaremos -- simplemente homomorfismos a los módulo-homomorfismos.-

<u>Definición</u> 4.1. Sean A un anillo y M un A - módulo. El soporte de M, es el subconjunto Supp (M) de Spec (A), constituído por todos los ideales primos p de A, para los cuales $M_p \neq 0$.

<u>Lema</u> 4.1. Sean A un anillo, M un A -módulo y para todo $m \in \Omega$ $h_m : M \longrightarrow M_m$ el homomorfismo canónico. El homomorfismo - $h : M \longrightarrow \prod_{m \in \Omega} M_m$ que asocia a cada $x \in M$ el elemento $h_m(x)$ de $\prod_{m \in \Omega} M_m$, es inyectivo.

Sea x un elemento del kernel de h, es decir, x es tal que $h_m(x) = 0$ para todo $m \in \Omega$. Entonces para cada $m \in \Omega$ existe $t_m \in A$-m tal - que $t_m x = 0$.

Así si F denota a la familia formada por dichos elementos, se tendrá $F \subset \mathrm{Ann}(\{x\})$. Esto implica que el ideal $\mathrm{Ann}(\{x\})$ no - está contenido en ningún ideal máximo de A, y por lo tanto

$Ann(\{x\}) = A$, lo que equivale a afirmar que $x = 0$

Por consiguiente, $\ker(h) = 0$, o sea h es un homomorfismo inyectivo.

<u>Proposición</u> 4.1. Sean A un anillo y M un A módulo. Entonces $Supp(M) = \emptyset$ si y sólo si $M = 0$.

Supongamos que $Supp(M) = \emptyset$, entonces para todo ideal máximo - m de A, $M_m = 0$. Por consiguiente, $\prod_{m \in \Omega} M_m = 0$. Por lo que, $M = 0$ en virtud del lema anterior.

Inversamente, si $M = 0$, claramente tendremos que $M_p = 0$ para todo $p \in Spec(A)$. Es decir, $Supp(M) = \emptyset$.

<u>Proposición</u> .2. Sea $\mathfrak{a}$ un ideal de un anillo A. Entonces $V(\mathfrak{a}) = Supp(A/\mathfrak{a})$.

Sea $p \in Spec(A)$, tal que $p \notin V(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{a} \not\subset p$, y por el lema 3.3 i) concluímos que $\mathfrak{a} A_p = A_p$.

Además ya que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

es exacta, y puesto que A es un A módulo plano. La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}A_p \longrightarrow A_p \longrightarrow (A/\mathfrak{a})_p \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por consiguiente,

$$A_p / \mathfrak{a} = (A/\mathfrak{a})_p$$

Así por la primera afirmación tenemos que $(A/\mathfrak{a})_p = 0$. Es decir, Spec (A) - $V(\mathfrak{a}) \subset$ Spec (A) - Supp $(A/\mathfrak{a})$, lo que equivale a que $V(\mathfrak{a}) \supset$ Supp $(A/\mathfrak{a})$.

Inversamente si $p \in V(\mathfrak{a})$, entonces, $\mathfrak{a} \cap (A-p) = \emptyset$, por lo que el lema 3.3 i) nos asegura que $\mathfrak{a} A_p \neq A_p$.

Por lo tanto,

$$0 \neq A_p / \mathfrak{a} A_p = (A/\mathfrak{a})_p$$

De donde, $p \in$ Supp $(A/\mathfrak{a})$. por lo tanto $V(\mathfrak{a}) \in$ Supp $(A/\mathfrak{a})$.

Entonces, $V(\mathfrak{a}) =$ Supp $(A/\mathfrak{a})$.

Proposición 4.3. Sean A un anillo, M un A-módulo y N un submódulo de M. Entonces,

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}(N) \cup \text{Supp}(M/N)$$

Ya que la sucesión

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

es exacta, y puesto que A_p es un A-módulo plano para todo p Spec(A) concluímos que la sucesión

$$0 \longrightarrow N_p \longrightarrow M_p \longrightarrow (M/N)_p \longrightarrow 0$$

es exacta.

Así, si $M_p = 0$, entonces, $N_p = 0$ y $(M/N)_p = 0$. O sea Spec (A) - Supp (M) $\subset$ Spec(A) - (Supp (N) $\cup$ Supp (M/N)), por lo que

$$\operatorname{Supp}(M) \supset \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N).$$

Inversamente, si tanto N_p como $(M/N)_p$ son iguales a 0, se sigue de la exactitud de la sucesión anterior, que $M_p = 0$. Es decir, $\operatorname{Spec}(A) - \operatorname{Supp}(M) \supset \operatorname{Spec}(A) - (\operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N))$, por lo que, $\operatorname{Supp}(M) \subset \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N)$.

Por lo tanto,

$$\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N).$$

Proposición 4.4. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si M es la suma de una familia $\{N_i\}_{i \in I}$ de sub-módulos de M. Entonces,

$$\operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Supp}(N_i)$$

Para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$ y toda $i \in I$ sea $\mathfrak{a}_i^{(p)}$ el A_p -módulo generado por $h_p(N_i)$.

Entonces, si $M = \sum_{i \in I} N_i$ tendremos que $M_p = \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i^{(p)}$

Así, $M_p \neq 0$ si y sólo si $\mathfrak{a}_i^{(p)} \neq 0$ para alguna $i \in I$

Y, $\mathfrak{a}_i^{(p)} \neq 0$ si y sólo si $(N_i)_p \neq 0$.

O sea, para que $M_p \neq 0$ es necesario y suficiente que $(N_i)_p \neq 0$ para alguna $i \in I$.

Por lo que,

$$\operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Supp}(N_i)$$

Corolario 4.2 . Sean A un anillo, M un A-módulo, $\{m_i\}_{i\in I}$ un sistema de generadores de M y $\mathfrak{a}_i$ el anulador de m_i . Entonces,

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i).$$

Sea $f_i : A \dashrightarrow Am_i$ para cada $i \in I$ el epimorfismo tal que, $f_i(a) = am_i$, entonces $\ker(f_i) = \mathfrak{a}_i$. Por lo tanto, $A/\mathfrak{a}_i = Am_i$ para cada $i \in I$.

De la proposición 4.1 obtenemos ,

$$V(\mathfrak{a}_i) = \text{Supp}(A/\mathfrak{a}_i) \text{ para cada } i \in I$$

Así,

$$V(\mathfrak{a}_i) = \text{Supp}(Am_i) \text{ para toda } i \in I$$

Y como $M = \sum_{i\in I} Am_i$, se sigue de la proposición anterior que

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i\in I} \text{Supp}(Am_i)$$

Es decir,

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$$

Proposición 4.5. Sean A un anillo , M un A-módulo de tipo finito su anulador. Entonces,

$$\text{Supp}(M) = V(\mathfrak{a})$$

Sea $\{m_i\}_{i\in I}$ la familia de generadores de M. Y para cada m_i sea $\mathfrak{a}$ su anulador.

Claramente,

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}$$

Por lo que,

$$V(\mathfrak{a}) = V(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a})$$

Por la fórmula 3.3 concluímos que,

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{a})$$

Y por el corolario anterior

$$\text{Supp}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{a})$$

De donde

$$V(\mathfrak{a}) = \text{Supp}(M)$$

Corolario 4.3. Sean A un anillo, y M un A-módulo de tipo finito. Un elemento a de A pertenece a la intersección de los ideales -- primos de Supp (M) si y sólo si existe un entero positivo k tal que - $a^k M = 0$.

Sea $\mathfrak{a}$ el anulador de M, entonces por la proposición anterior

$$\text{Supp}(M) = V(\mathfrak{a})$$

Por consiguiente,

$$\bigcap \{p/p \quad \text{Supp}(M)\} = \mathfrak{J}(V(\mathfrak{a}))$$

Así de la proposición 3.2, se sigue

$$\mathfrak{J}(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$$

Por lo tanto, un elemento a de A es tal que

$a \in \bigcap \{ p/p \quad \text{Supp}(M)\}$ si y sólo si $a \in r(\mathfrak{a})$.

Es decir, que para que un elemento a del anillo A pertenezca a la intersección de los ideales de Supp (M) es necesario y suficiente - que exista un entero positivo k tal que $a^k \in \mathfrak{a}$.

Y, $a^k \in \mathfrak{a}$ si y sólo si $a^k M = 0$

De donde se sigue el corolario .

Corolario 4.4. Sean A un anillo neteriano, M un A-módulo de tipo finito y $\mathfrak{a}$ un ideal de A. Para que Supp (M) $\subset V(\mathfrak{a})$ es necesario y suficiente que exista un entero positivo k tal que $a^k M = 0$.

Sea $\mathfrak{b}$ el anulador de M. Por la proposición 4.5 tenemos entonces que Supp (M) $= V(\mathfrak{b})$.

Por otra parte, ya que A es un anillo neteriano concluímos que - $\mathfrak{a}$ es un ideal de tipo finito. Sea entonces $\{x_i\}_{i \in I}$ la familia de generadores de $\mathfrak{a}$.

Supongamos que Supp(M) $\subset V(\mathfrak{a})$. El corolario 3.2 nos asegura en este caso que $\mathfrak{a} \subset r(\mathfrak{b})$. Por lo tanto, para cada x_i existe - un entero positivo h_i tal que $x_i^{h_i} \in \mathfrak{b}$.

Sea $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{h_i \in \mathbb{Z}/h_i > 0,\ x_i^{h_i} \in \mathfrak{b}\}$.

Probaremos que el entero positivo k nh es tal que $a^k \subset \mathfrak{b}$, es decir, que $a^k M = 0$.

En efecto, sea x un elemento de $\mathfrak{a}$, entonces x es una suma finita de productos de la forma $\prod_{j=1}^{nh} a_j$ con $a_j \in \mathfrak{a}$.

Y puesto que $a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; x_i$, $a_{ij} \in A$ $1 \leq i \leq n$ $1 \leq j \leq nh$, x resulta - ser una suma finita en donde cada término es de la forma

$$ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \text{ con } a \in \mathfrak{a} \text{ y } \sum_{i=1}^{n} k_i = nh$$

Demostraremos que para cada uno de estos productos existe un - índice i tal que $x_i^{k_i} \in \mathfrak{a}$ y $1 \leq i \leq n$. Por lo que x pertenecerá a .

Supongamos que para uno de esos productos $k_i \leq h-1$ para $1 \leq i \leq n$.

Entonces, $\sum_{i=1}^{n} k_i \leq n(h-1) < nh$.

Hecho que contradice el que $\sum_{i=1}^{n} k_i = nh$.

Por lo tanto, para cada producto $ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ existe tal índice.

Por consiguiente, $\mathfrak{a} M = 0$.

Inversamente, supongamos que existe un entero positivo k tal que $\mathfrak{a} M = 0$. Entonces, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ y puesto que para todo elemento - x $\mathfrak{a}$ el elemento x pertenece al ideal $\mathfrak{a}$, se sigue que $\mathfrak{a} \subset r(\mathfrak{b})$.

Y el corolario 3.2 nos afirma entonces que

$$\text{Supp}(M) = V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$$

Lema 4.2. Sean A un anillo, $\mathfrak{a}$ un ideal contenido en el radical de A y M un A-módulo de tipo finito. Si $\mathfrak{a} M = M$, entonces, - $M = 0$.

Sea $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un conjunto de generadores de M.

Puesto que $\mathfrak{a} M = M$, concluímos que

$$x_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \ , a_i \in \mathfrak{a}$$

Entonces,

$$(1-a_1)\, x_1 = a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

Probaremos que $1-a_1$ es un elemento invertible del anillo A.

En efecto, supongamos que $1-a_1$ no es un elemento invertible de A. Entonces el ideal $(1-a_1)\,A$ es distinto de A, por consiguiente, existe $m \in \Omega$ tal que $(1-a_1)\,A \subset m$. Por lo que $1-a_1 \in m$.

Y ya que $\mathfrak{a} \subset m$ para todo $m \in \Omega$, entonces $a_1 \in m$.

Es decir, $1 = (1-a_1) + a_1 \in m$. Contradiciendo el hecho de que m es un ideal máximo de A.

Por lo tanto, $1-a_1$ es un elemento invertible de A, o sea existe $b_1 \in A$ tal que $(1-a_1)\, b_1 = 1$.

Así,

$$(1-a_1)\, b_1 x_1 = x_1 = b_1 a_2 x_2 + \ldots + b_1 a_n x_n \ , \ b_1 a_i \in \mathfrak{a}$$

Por lo que M está generado por los elementos $x_2, \ldots, x_n$.

Por lo tanto si repetimos el proceso podemos concluír que M está generado por un sólo elemento, a saber el 0. De donde $M = 0$.

<u>Lema</u> 4.3. Sean A un anillo local, m su ideal máximo y M un A-módulo de tipo finito. Si $A/m \otimes_A M = 0$ entonces $M = 0$.

Ya que $A/m \otimes_A M = M/mM$, la hipótesis implica que $M = mM$.

Y el lema se sigue entonces del anterior.

Lema 4.4. Sean A un anillo entero, y E y F dos A-módulos libres, de tipo finito. Entonces, $x \otimes y = 0$ $x \in E$ $y \in F$, implica $x = 0$ o bien $y = 0$.

Sean $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{y_j\}_{1 \leq j \leq m}$ las bases de E y F respectivamente.

Para toda $x \in E$ y $y \in F$ tendremos

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \text{ y } y = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j$$

Supongamos que, $x \otimes y = 0$. Entonces,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \otimes \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \otimes b_j y_j \Big) = \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j x_i \otimes y_j \Big)$$

Por consiguiente, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_j x_i = 0$ para $1 \leq j \leq m$.

Y ya que, $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una base del A-módulo E se tiene

$$a_i b_j = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$$

Supongamos que $x = 0$, entonces, existe i_0 tal que $a_{i_0} \neq 0$, $1 \leq i_0 \leq n$.

Y debido a que A es un anillo entero y $a_{i_0} b_j = 0$ para $1 \leq j \leq m$, concluímos que $b_j = 0$ para $1 \leq j \leq m$.

Es decir, $y = 0$.

De la misma manera se puede demostrar que si $y \neq 0$ entonces $x = 0$.

Lema 4.5. Sean B un anillo local, E y F dos B-módulos de tipo finito. Si E y F son distintos de 0, entonces $E \otimes_B F \neq 0$.

Sea m el ideal máximo de B y denotemos por k al campo residual B/m.

Del lema 4.3 , y de las hipótesis sobre E y F se concluye que

$k \otimes_B E \neq 0$ y $k \otimes_B F \neq 0$.

Y ya que k es un campo y $k \otimes_B E$ y $k \otimes_B F$ son k-módulos libres se sigue del lema anterior que

$$(k \otimes_B E) \otimes_k (k \otimes_B F) \neq 0$$

Por otra parte, puesto que el producto tensorial es conmutativo,- tenemos que

$$(k \otimes_B E) \otimes_k (k \otimes_B F) \cong (E \otimes_B k) \otimes_k (k \otimes_B F)$$

Y de la asociatividad del producto tensorial se sigue

$$(E \otimes_B k) \otimes_k (k \otimes_B F) \cong (E \otimes_B (k \otimes_k (k \otimes_B F)))$$

Así,

$$0 \neq (k \otimes_B E) \otimes_k (k \otimes_B F) \cong E \otimes_B ((k \otimes_k k) \otimes_B F) \cong E \otimes_B (k \otimes_B F)$$

Y,

$$0 \neq E \otimes_B (k \otimes_B F) = (k \otimes_B F) \otimes_B E \cong k \otimes_B (F \otimes_B E)$$

Por consiguiente,

$$0 \neq k \otimes_B (F \otimes_B E) \cong k \otimes_B (E \otimes_B F)$$

De donde,

$$E \otimes_B F \neq 0$$

<u>Lema</u> 4.6. Sean A un anillo, S una parte multiplicativa de A y M un A-módulo .

i) si M es de tipo finito M_S es un A_S -módulo de tipo finito.

ii) si M es de presentación finita, entonces M_S es un A_S -módulo de presentación finita.

El lema se obtiene haciendo uso de los siguientes resultados

a) si $\{N_i\}$ es una familia de submódulos del A-módulo M tal que M es la suma de dicha familia, entonces para toda parte multiplicativa S de A, se tiene que el A_S -módulo M_S es la suma de la familia $\{\mathfrak{a}\}$, donde cada $\mathfrak{a}$ es el A_S -módulo generado por $h_M^S(N)$

b) para toda familia $\{M_i\}_{i \in I}$ de A-módulos y toda parte multiplicativa S de A existe un isomorfismo canónico de $\bigoplus_{i \in I} (M_i)_S$ en $(\bigoplus_{i \in I} M_i)_S$.

<u>Proposición</u> 4.6. Sean A un anillo y M y N dos A-módulos de tipo finito. Entonces,

$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A N) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N)$$

Por el lema anterior, M_p y N_p son A_p -módulos de tipo finito - para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$, y por el corolario 3.17 el anillo A_p es un anillo local para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$.

Supongamos que $p \in \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N)$, es decir p es tal que $M_p \neq 0$ y $N_p \neq 0$.

Se sigue entonces del lema 4.5 que $M_p \otimes_{A_p} N_p \neq 0$

Además,

$$0 \neq M_p \otimes_{A_p} N_p = (M \otimes_A A_p) \otimes_{A_p} (N \otimes_A A_p) \cong (M \otimes_A A_p) \otimes_{A_p} (A_p \otimes_A N)$$

Entonces,

$$0 \neq (M \otimes_A (A_p \otimes_{A_p} A_p) \otimes_A N) \cong M \otimes_A (A_p \otimes_A N)$$

Por consiguiente,

$$0 \neq (M \otimes_A N) \otimes_A A_p = (M \otimes_A N)_p$$

es decir, $p \in \operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$.

Inversamente, si $p \in \operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$, entonces,

$$M_p \otimes_{A_p} N_p \cong (M \otimes_A N)_p \neq 0$$

Por lo que, $M_p \neq 0$ y $N_p \neq 0$.

Es decir, $p \in \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N)$. Así,

$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A N) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N)$$

<u>Corolario</u> 4.5. Sean A un anillo, $\mathfrak{b}$ el anulador del A-módulo de tipo finito M. Entonces, para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A se tiene

$$\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})$$

Sabemos que, $M/\mathfrak{a}M = M \otimes_A A/\mathfrak{a}$ y así, por ser M y $A/\mathfrak{a}$ módulos de tipo finito se obtiene de la proposición anterior la igualdad

$$\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M) = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{a})$$

Así, la afirmación se sigue de las proposiciones 4.2 y 4.5

<u>Lema</u> 4.7. Sean A y B dos anillos locales, $\rho: A \to B$ un homomorfismo local y E un A-módulo de tipo finito. Si $E \neq 0$ entonces $E \otimes_A B \neq 0$.

Sean m y n los ideales máximos de A y B respectivamente. Denotemos por k al campo residual A/m y consideremos a B como un A-módulo, al través del homomorfismo ρ.

Sabemos que, $B\otimes_A k \cong B/mB$, $mB = \rho(m)B$ y que $\rho(m) \subset n$.

Por consiguiente,

$$mB = \rho(m)\,B \subset nB \neq B$$

de donde, $B/mB \neq 0$.

Así, puesto que

$$(E\otimes_A B)\otimes_A k \cong E\otimes_A (B\otimes_A k) \cong E\otimes_A (k\otimes_k (B\otimes_A k))$$

se tiene que,

$$(E\otimes_A B)\otimes_A k \cong (E\otimes_A k)\otimes_k (B\otimes_A k)$$

Y ya que E es un A-módulo de tipo finito se sigue del lema 4.3 que $E\otimes_A k \neq 0$.

Entonces, debido al lema 4.4

$$(E\otimes_A k)\otimes_k (B\otimes_A k) \neq 0$$

Así, $(E\otimes_A B)\otimes_A k \neq 0$. Lo que implica que

$$E\otimes_A B \neq 0$$

Proposición 4.7. Sean A y B dos anillos y ϕ: $A \to B$ un homomorfismo. Entonces, para todo A-módulo M,

$$\mathrm{Supp}\,(M\otimes_A B) \subset {}^{a}\phi^{-1}(\mathrm{Supp}\,(M))$$

Y si M es de tipo finito, los dos conjuntos son iguales .

Sean $q \in \mathrm{Supp}(M \otimes_A B)$ y $p = \phi^{-1}(q)$. Entonces,

$0 \neq (M \otimes_A B)_q = (M \otimes_A B) \otimes_B B_q \cong M \otimes_A B_q$

Y ya que $\phi(p) = \phi\phi^{-1}(q) \subset q$, existe un homomorfismo

$\phi_q : A \longrightarrow B$ que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ h_p \downarrow & & \downarrow h'_q \\ A_p & \xrightarrow{\phi_q} & B_q \end{array}$$

Entonces, B_q puede ser considerado como A_p -módulo al través del homomorfismo ϕ_q y $(M \otimes_A A_p) \otimes_{A_p} B_q \cong M \otimes_A B_q$

Por consiguiente, $M_p \otimes_{A_p} B_q \neq 0$. Y así, $M_p \neq 0$.

Es decir, $p \in \mathrm{Supp}(M)$

De donde,

$${}^a\phi(q) = \phi^{-1}(q) = p \in \mathrm{Supp}(M)$$

Quedando probada la contensión .

Para probar la segunda afirmación, demostraremos que ϕ_q es un homomorfismo local para todo $q \in \mathrm{Spec}(A)$.

Sea $q \in \mathrm{Spec}(A)$, entonces,

$\phi_q(pA_p) = \phi_q(h_p(p)A_p) \subset \phi_q(h_p(p))B_q =$

$= (h'_q(\ (p)\ ))B_q \subset h'_q(q)B_q = qB_q$

Por otra parte, el lema 4.6 nos afirma que M_p es un A_p -módulo de tipo finito para todo $p \in \mathrm{Spec}(A)$.

Por todo lo cual, si $q \in {}^a\phi^{-1}(\mathrm{Supp}(M))$, el lema anterior nos -

permite afirmar que $M_p \otimes_{A_p} B_q \neq 0$.

Y puesto que,

$$M_p \otimes_{A_p} B_q \cong (M \otimes_A B)_q$$

concluímos que $(M \otimes_A B)_q \neq 0$. Y por lo tanto,

$$q \in \operatorname{Supp}(M \otimes_A B)$$

Por lo que si M es de tipo finito se tiene la igualdad deseada.

●

V. MODULOS PROYECTIVOS DE TIPO FINITO.

LOCALIZACION CON RESPECTO A UN ELEMENTO.

Sea A un anillo. Para cada elemento f de A, sea S_f la parte multiplicativa de A, consistente de todos los elementos de la forma f^n, con n en el conjunto de los enteros no negativos.

<u>Definición</u> 5 1. El anillo A_{S_f}, es el localizado del anillo A con respecto al elemento f de A.
A este anillo se le denotará por A_f.

<u>Definición</u> 5.2. Sea A un anillo. El localizado de un A-módulo M con respecto a un elemento f de A, es el A_f -módulo M_{S_f}.
A dicho módulo se le denotará por M_f.

<u>Proposición</u> 5.1. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si f es un elemento nilpotente de A, entonces, $M_f = 0$. Y si f es un elemento invertible del anillo A, entonces, M_f se identifica canónicamente con M.

Supongamos que existe un entero positivo k tal que $f^k = 0$. Y sea x un elemento de M.

Entonces, existen $m \in M$ y $f^n \in S_f$ tales que $x = (m/f^n)$.

Y ya que, $f^k \in S_f$ y $f^k m = 0$, se sigue que $x = 0$.

Por lo que, $M_f = 0$.

Supongamos ahora, que f es un elemento invertible del anillo A, es decir, existe $g \in A$ tal que $fg = 1$.

Sea h^f_M el homomorfismo canónico de M en M_f .

Demostraremos que, h^f_M es en este caso un isomorfismo .

Sea x un elemento de M_f , o sea existen $m \in M$ y $f^n \in S_f$ tales que , $x = (m/f^n)$.

Entonces,

$$x = (m/f^n) = (mg^n/1) \text{ y } h^f_M(mg^n) = (mg^n/1) = x.$$

Por lo tanto, h^f_M es suprayectiva.

Por otro lado, supongamos que el elemento m M es tal que $h^f_M(m) = 0$.

Entonces, $(m/1) = 0$, es decir existe $f^n \in S_f$ tal que $f^n m = 0$.

Así, $g^n f^n m = 0$.

Y ya que, $g^n f^n = 1$, concluímos que $m = 0$.

Por consiguiente, h^f_M es inyectiva.

<u>Proposición</u> 5.2. Sean f y g dos elementos de un anillo A . A_{fg} se identifica canónicamente con $(A_f)_{(g/1)}$

Sea h_f el homomorfismo canónico de A en A_f .

Puesto que, $h_f(S_g) = S'_{(g/1)}$ (parte multiplicativa de A generada por g/1), existe un único isomorfismo j tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h_f} & A_f \\ {\scriptstyle h_{fg}}\downarrow & & \downarrow \\ A_{fg} & \xrightarrow{j} & (A_f)_{(g/1)} \end{array}$$

es conmutativo

Corolario 5.1. Sean f y g dos elementos de un anillo A, M y N dos A-módulos y $u : M \longrightarrow N$ un homomorfismo. Entonces M_{fg} se identifica canónicamente con $(M_f)_{(g/1)}$ y $u_{fg} = u \otimes 1_{A_{fg}}$ donde $u \otimes 1_{A_{fg}} : M_{fg} \longrightarrow N_{fg}$, con $(u_f)_{(g/1)} = u \otimes 1_{(A_f)_{(g/1)}}$ donde $u \otimes 1_{(A_f)_{(g/1)}} : (M_f)_{(g/1)} \longrightarrow (N_f)_{(g/1)}$

Sabemos que, $M_{fg} = M \otimes_A A_{fg}$ y $(M_f)_{(g/1)} = M_f \otimes_{A_f} (A_f)_{(g/1)}$

Así,

$(M_f)_{(g/1)} = M_f \otimes_{A_f} (A_f)_{(g/1)} \cong (M \otimes_A A_f) \otimes_{A_f} (A_f)_{(g/1)} =$
$M \otimes_A (A_f \otimes_{A_f} (A_f)_{(g/1)}) \cong M \otimes_A (A_f)_{(g/1)}$

Y debido a la proposición anterior,

$$M \otimes_A (A_f)_{(g/1)} \cong M \otimes_A A_{(fg)} = M_{fg}$$

Es decir, $(M_f)_{(g/1)} \cong M_{fg}$

Y la segunda afirmación del corolario se sigue entonces inmediatamente.

Proposición 5.3. Sean f un elemento de un anillo A y $h_f : A \longrightarrow A_f$ el homomorfismo canónico. La función

h_f : Spec $(A_f) \longrightarrow$ Spec (A) , es un homeomorfismo de Spec(A_f) sobre el subespacio abierto X_f de Spec (A)

La proposición es un caso particular de la número 3.6 . Ya que el subespacio X^S es en este caso el subespacio abierto X_f .

Lema 5.1. Sean A un anillo , M y N dos A-módulos y $u : M \longrightarrow N$ un homomorfismo . Si $R = \ker(u)$ y $Q = \operatorname{coker}(u)$, entonces para toda parte multiplicativa S de A $R_S = \ker(u_S)$ y $Q_S = \operatorname{coker}(u_S)$.

En efecto, ya que las sucesiones

$$0 \to R \to M \xrightarrow{u} N$$

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} Q \longrightarrow 0$$

son exactas, y puesto que, A_S es un A-módulo plano, tenemos que las sucesiones

$$0 \longrightarrow R_S \longrightarrow M_S \xrightarrow{u_S} N_S$$

$$M_S \xrightarrow{u_S} N_S \xrightarrow{v_S} Q_S \longrightarrow 0$$

son exactas.

Por lo que, $R_S = \ker(u_S)$ y $\operatorname{coker}(u_S) = \ker(v_S)$

Pero, $\ker(v_S) = Q_S$.

Así, $\operatorname{coker}(u_S) = Q_S$.

En las siguientes dos proposiciones A denotará a un anillo, M y N serán dos A-módulos y, $u : M \longrightarrow N$ un homomorfismo.

Proposición 5.4. Sea p un ideal primo de A. Si

$u_p = u \otimes 1_{A_p}^{\cdot} M_p \longrightarrow N_p$ es suprayectivo y N es de tipo finito, entonces existe $f \in A-p$ tal que el homomorfismo

$u_f = u \otimes 1_{A_f}^{\cdot} M_f \longrightarrow N_f$ es suprayectivo.

Puesto que N es de tipo finito, el A-módulo coker (u) = N/u(M) = Q también es de tipo finito. Y ya que u_p es suprayectivo, tenemos que $Q_p = 0$.

Ahora bien, el localizado de un A'-módulo M' de tipo finito con respecto a una parte multiplicativa S', es igual a 0, si y sólo si existe un elemento $s' \in S'$ tal que $s'M = 0$.

Por lo tanto, existe $f \in A-p$ tal que, $fQ = 0$, y así $Q_f = 0$. Es decir, u_f es un homomorfismo suprayectivo.

Proposición 5.5. Sea p un ideal primo de A. Si M y N son de tipo finito y de presentación finita respectivamente y

$u_p : M_p \longrightarrow N_p$ es biyectivo, existe entonces $f \in A-p$ tal que el homomorfismo $u_f : M_f \longrightarrow N_f$ es biyectivo.

Ya que todo módulo de presentación finita es de tipo finito, la proposición anterior nos asegura la existencia de un elemento $f' \in A-p$ tal que $u_{f'} : M_{f'} \longrightarrow N_{f'}$ es suprayectivo.

Entonces, si R denota al kernel de u, la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow R_{f'} \longrightarrow M_{f'} \longrightarrow N_{f'} \xrightarrow{u_{f'}} 0$$

es exacta.

Además, en virtud de las hipótesis sobre M y N concluímos que $M_{f'}$ y $N_{f'}$ son $A_{f'}$-módulos de tipo finito y de presentación finita respectivamente.

Así, el que la sucesión sea exacta implica que $R_{f'}$ es un $A_{f'}$-módulo de tipo finito.

Por otra parte, si $h_R^{f'}$ es el homomorfismo canónico de R en $R_{f'}$, entonces $(R_{f'})_{pA_{f'}} = (R_{f'})_{h_R^{f'}(p)}$. Y ya que $f' \in A-p$ tenemos que $S_{f'}(A-p) = (A-p)$. Por consiguiente, existe un isomorfismo k que identifica canónicamente a R_p con $(R_{f'})_{pA_{f'}}$, a saber el que hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & R & \xrightarrow{h_R^{f'}} & R_{f'} & \\ h_R^p & \downarrow & & \downarrow & h_{R_{f'}}^{h_R^{f'}(p)} \\ R_p & R_{pf'} & \xrightarrow{k} & (R_{f'})_{h_R^{f'}(p)} = (R_{f'})_{pA_{f'}} & \end{array}$$

Y puesto que, $R_p = 0$, resulta que $(R_{f'})_{pA_{f'}} = 0$. Y como habíamos hecho notar, esto será posible si y sólo si existe $f_1 \in A - pA$, tal que $f_1 R_{f'} = 0$.

Es decir, existen $f'' \in A-p$ y $f'^n \in S_{f'}$ tales que

$f_1 = (f'' / f'^n)$ y $(f'' / f'^n) R_{f'} = 0$.

Por otra parte, debido a que f' es invertible en $R_{f'}$, se tendrá que f'^n es también invertible en $R_{f'}$, por consiguiente,

$(f'' / 1) R_{f'} = 0$.

Y ya que, $R_{f'}$ es de tipo finito y $(f''/1) \in S'_{(f''/1)}$ se sigue de la razón ya expuesta que, $(R_{f'})_{(f''/1)} = 0$.

Así, por el corolario 5.1 , $(R_{f'f''}) = 0$.

Definamos $f = f' \; f''$.

Entonces, $f \in A\text{-}p$ y $R = 0$.

Además,

$$Q_f = Q_{f'\,f''} = (Q_{f'})_{(f''/1)} \quad y \quad Q_{f'} = 0.$$

Por lo que, $Q_f = 0$.

De donde, f es el elemento deseado.

Corolario 5.2. Sean M un A-módulo de presentación finita y p un ideal primo de A. Si M_p es un A_p -módulo libre de rango n, existe $f \in A\text{-}p$ tal que M_f es un A_f -módulo libre de rango n .

Sea $\{x'_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base del A_p -módulo M_p . Entonces existen dos familias $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de M y de A-p respectivamente, tales que $x'_i = (x_i/s_i)$ $1 \leq i \leq n$.

Puesto que cada elemento de la familia $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es invertible en A_p , se concluye que la familia $\{x_i/1\}_{1 \leq i \leq n}$ es también una base del A_p -módulo libre N_p .

Sea $u: A^n \longrightarrow M$ el homomorfismo definido como $u(e_i) = x_i$ $1 \leq i \leq n$, donde $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es la base canónica de A^n .

Entonces, $u \otimes 1: A^n \otimes_A A_p \longrightarrow M \otimes_A A_p = M_p$, es biyectiva.

Además, debido a que A^n y M son A-módulos de tipo finito y --
presentación finita respectivamente, tenemos por el lema 4.6 que los A_p -módulos $(A^n)_p$ y M_p son de tipo finito y de presentación finita respectivamente.

De la proposición anterior, concluímos entonces que existe $f \in A-p$ tal que el homomorfismo $u_f : A^n \otimes_A A_f \longrightarrow M \otimes_A A_f = M_f$ es biyectivo.

Es decir, M_f es un A_f -módulo libre del mismo rango del A_f -módulo $(A^n)_f$, o sea de rango n .

<u>Proposición</u> 5.6. Sean A un anillo y $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia finita - de generadores de A. El anillo $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ es entonces un A-módulo fielmente plano .

Puesto que cada A_{f_i} es un A-módulo plano , así también lo es - B.

Por otra parte, sea $p \in Spec(A)$.

Por el comentario que se hizo después del corolario 3.3 sabe-- mos que $p \in X_{f_i}$ para alguna $i \in I$. Es decir, existe f_i tal que $f_i \notin p$.

Por lo tanto, $p \cap S_{f_i} = \emptyset$. Lo que implica $p_{f_i} = pA_{f_i} \neq A_{f_i}$

Así,

$$pB \subset pA_{f_i} \times \prod_{j \neq i} A_{f_j} \subsetneqq B$$

Es decir, $pB \neq B$ para todo $p \in \mathrm{Spec}(A)$. En especial $mB \neq B$ para todo $m \in \Omega$.

<u>Proposición</u> 5.7. Sean A un anillo y $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia finita de generadores de A. Entonces,

i) un A-módulo M es de tipo finito si y sólo si para toda $i \in I$ el A_{f_i}-módulo M_{f_i} es de tipo finito.

ii) para que un A-módulo M sea de presentación finita es necesario y suficiente que para todo $i \in I$ el A_{f_i}-módulo M_{f_i} sea de -- presentación finita.

Las primeras afirmaciones de ambos incisos se siguen del lema 4.6. Por otra parte, sean $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ y $N = \prod_{i \in I} M_{f_i}$.

i) supongamos que para cada $i \in I$ el A_{f_i}-módulo M_{f_i} es de tipo finito. Entonces debido a que I es finito el B-módulo N es de - tipo finito

Además, $N = M \otimes_A \prod_{i \in I} A_{f_i} = M \otimes_A B$.

Y ya que B es un A-módulo fielmente plano , tenemos que M es un A-módulo de tipo finito.

ii) supongamos que para cada $i \in I$ el A_{f_i}-módulo M_{f_i} es de presentación finita. Entonces, M_{f_i} es un A_{f_i} módulo de tipo finito - para toda $i \in I$, así por el inciso anterior M es de tipo finito. Es decir, existe un entero positivo n tal que la sucesión

$$A^n \xrightarrow{u} M \to O$$

es exacta.

Por consiguiente, si $R = \ker(u)$ la sucesión ,

$$0 \longrightarrow R \to A^n \xrightarrow{u} M \longrightarrow 0$$

es exacta.

Y por el lema 5.1 tendremos que para cada i I la sucesión

$$0 \to R_{f_i} \longrightarrow A^n_{f_i} \xrightarrow{u_{f_i}} M_{f_i} \longrightarrow 0$$

es exacta.

Así, debido a que M_{f_i} es de presentación finita y $A^n_{f_i}$ es de tipo finito para toda $i \in I$ se concluye que R_{f_i} es un A_{f_i}-módulo de tipo finito para toda $i \in I$.

Por lo tanto el inciso anterior nos asegura que R es un A-módulo de tipo finito. O sea, existe un entero positivo m tal que la sucesión

$$A^m \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

es exacta.

De donde, la sucesión

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es exacta.

Y puesto que, A^m y A^n son A-módulos libres de tipo finito, M resulta ser un A-módulo de presentación finita.

Lema 5.2. Sean A un anillo, M y N dos A-módulos y $u: M \to N$ un homomorfismo. Si $u_m : M_m \to N_m$ es biyectivo - para todo $m \in \Omega$, entonces u es biyectivo.

i) (u es inyectiva). Supongamos que el elemento x de M es tal que $u(x) = 0$. Entonces $u_m(x/1) = u(x)/1 = 0$ para todo $m \in \Omega$; y ya que u_m es inyectivo para todo ideal máximo m de A, se sigue que $x/1 = 0$ en M_m para todo $m \in \Omega$. Es decir, $h_m(x) = 0$ para todo ideal máximo. .

Por lo tanto, $x = 0$ (ver demostración del lema 4.1).

ii) (u es suprayectiva). Sea $\overline{n} \in N$, entonces para cada $m \in \Omega$, -- existen $x' \in M$ y $t'_m \in A-m$ tales que, $(u(x')/t'_m)) = \overline{n}/1$. Por -- consiguiente, existe $t''_m \in A-m$ tal que $u(t''_m x') = t''_m t'_m \overline{n}$.

Para cada $m \in \Omega$, sean $x = t''_m x'$ y $t''_m t'_m = t_m$, entonces, $x \in M$ y $t_m \in A-m$ para cada $m \in \Omega$ y $u(x) = t_m \overline{n}$.

Sea $E_{\overline{n}}$ el subconjunto de A formado por tales elementos t_m.

Resultará entonces que $E_{\overline{n}}$ no está contenido en ningún ideal máximo de A. Por lo tanto, el ideal generado por $E_{\overline{n}}$ es el ideal A.

Así, existe una familia finita $\{t_{m_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de E tal que $\sum_{i=1}^{n} a_i t_{m_i} = 1$, donde $a_i \in A$ para $1 \leq i \leq n$.

De donde, $\overline{n} = \sum_{i=1}^{n} a_i t_{m_i} \overline{n}$

Y ya que, $t_{m_i} \overline{n} = u(x_i)$ con $x_i \in M$ para $1 \leq i \leq n$, tenemos que - $\overline{n} = \sum_{i=1}^{n} a_i u(x_i)$; o sea $\overline{n} = u(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)$.

Por lo tanto, como $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in M$, concluímos que para cada $\bar{n} \in N$ existe $x \in M$, tal que $u(x) = \bar{n}$.

CARACTERIZACION LOCAL DE LOS MODULOS PROYECTIVOS DE TIPO FINITO .

Definición 5.3. Sea A un anillo . Un A -módulo P es proyectivo de tipo finito si es sumando directo de un A-módulo libre de tipo finito .

Teorema 5.1. Sean A un anillo y P un A-módulo . Las propiedades siguientes son equivalentes.

a) P es un módulo proyectivo de tipo finito .

b) P es un módulo de presentación finita y para todo $m \in \Omega$, P_m es un A_m -módulo libre.

c) P es un módulo de tipo finito y P_p es un A_p -módulo libre para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$. Y si r_p es el rango de P_p , entonces la función $p \longrightarrow r_p$ de Spec (A) en los enteros , es localmente constante

d) existe una familia finita $\{f_i\}_{i \in I}$ de generadores de A, tal -- que para toda $i \in I$, el A_{f_i} -módulo P_{f_i} es libre de tipo finito .

e) para todo ideal máximo m de A, existe $f \in A-m$ tal que, P_f es un A_f -módulo libre de tipo finito .

a) implica b) . Por ser P proyectivo de tipo finito, P es sumando directo de un A-módulo libre de tipo finito L . Por consiguiente, la sucesión

$$L \xrightarrow{u} P \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sea $R = \ker(u)$, entonces R es sumando directo de L , es decir, existe un A-módulo R_1 tal que $R \oplus R_1 = L$. Entonces, $R \cong L/R_1$ debido a lo cual R es de tipo finito.

Así, existe un entero positivo n tal que la sucesión

$$A^n \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por consiguiente, la sucesión

$$A^n \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

es exacta .

Concluímos entonces, que P es un A-módulo de presentación finita Por lo tanto, para todo $m \in \Omega$ P_m es un A_m -módulo de presentación finita (Lema 4.6) .

Por otra parte, ya que existe un A -módulo P tal que, $L = P \oplus P'$ tendremos que

$$L \otimes_A A_m \cong (P \otimes_A A_m) \oplus (P' \otimes_A A_m) = P_m \oplus P'_m \text{ para todo}$$

$m \in \Omega$.

Y debido a que L es libre tenemos que $L \otimes_A A_m$ es un A_m -módulo libre para todo $m \in \Omega$.

Por todo lo cual P_m es un A_m-módulo proyectivo de presentación finita.

Y ya que, A_m es un anillo local para todo $m \in \Omega$ (ver demostración del corolario 3.7), se sigue que P_m es libre.

b) implica e). Se sigue inmediatamente del corolario 5.2.

e) implica d). Sea E el conjunto de elementos f del anillo A, tales que, P_f es un A_f-módulo libre de tipo finito.

Debido a que para cada $m \in \Omega$, existe $f \in (A-m) \cap E$, concluímos que E no puede estar contenido en ningún ideal máximo de A.

Por consiguiente, el ideal generado por E es el anillo A; es decir, existe una familia finita $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de E tales que, $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, $a_i \in A$.

Por lo tanto, $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ genera al anillo A, y P_{f_i} es un A_{f_i}-módulo libre de tipo finito para $1 \leq i \leq n$.

d) implica c). De la proposición 5.7 i) tenemos que P es un módulo de tipo finito.

Por otro lado, por corolario 3.3 para cada $p \in \operatorname{Spec}(A)$ existe un índice $i \in I$ tal que, $p \in X_{f_i}$. Por consiguiente,

$P_p = (P_{f_i})_{pA_{f_i}}$ (ver demostración de la proposición 5.4).

Así, el rango de P_p es igual al rango de P_{f_i}, y ya que este es finito también lo es el de P_p.

Y para todo $p \in X_{f_i}$ la función $p \longrightarrow r_p$ es constante. Es decir, dicha función es localmente constante.

d) implica a). Consideremos el anillo $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ y el B-módulo $M = \prod_{i \in I} P_{f_i} = P \bigotimes_A B$.

En virtud de las hipótesis, para cada $i \in I$ existe un entero positivo n_i tal que $P_{f_i} = A_{f_i}^{n_i}$.

Sea $n = \max_{i \in I} \{n_i\}$, y definamos para cada $i \in I$ el A_{f_i} módulo libre de tipo finito $L_i = A_{f_i}^n$.

Entonces, cada P_{f_i} es sumando directo del correspondiente A_{f_i}-módulo L_i. Por consiguiente, $L = \prod_{i \in I} L_i$ es un B-módulo libre de tipo finito y M es sumando directo de L.

Es decir, M es un B-módulo proyectivo de tipo finito. Y ya que B es un A-módulo fielmente plano, concluímos que P es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

c) implica e). Sea m un ideal máximo de A y supongamos que $r_m = n$

Sea $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base del A_m -módulo P_m, entonces para $1 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i = (p_i / t_i)$ con $p_i \in P$ y $t_i \in A-m$; y ya que $(t_i / 1) \in A_m$ para $1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{p_i / 1\}$ es también una base de P_m.

Sea entonces $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ la base canónica del A-módulo A^n y consideremos el homomorfismo $u: A^n \longrightarrow P$ tal que $u(e_i) = p_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Y para todo $p \in X_{f_i}$ la función $p \longrightarrow r_p$ es constante. Es decir, dicha función es localmente constante.

d) implica a) . Consideremos el anillo $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ y el B-módulo $M = \prod_{i \in I} P_{f_i} = P \bigotimes_A B$.

En virtud de las hipótesis, para cada $i \in I$ existe un entero positivo n_i tal que $P_{f_i} = A_{f_i}^{n_i}$.

Sea $n = \max_{i \in I} \{n_i\}$, y definamos para cada $i \in I$ el A_{f_i} módulo libre de tipo finito $L_i = A_{f_i}^{n}$.

Entonces, cada P_{f_i} es sumando directo del correspondiente A_{f_i}-módulo L_i . Por consiguiente, $L = \prod_{i \in I} L_i$ es un B-módulo libre de tipo finito y M es sumando directo de L.

Es decir, M es un B-módulo proyectivo de tipo finito. Y ya que B es un A-módulo fielmente plano, concluímos que P es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

c) implica e). Sea m un ideal máximo de A y supongamos que $r_m = n$

Sea $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base del A_m -módulo P_m, entonces para $1 \leq i \leq n$ tenemos que $x_i = (p_i / t_i)$ con $p_i \in P$ y $t_i \in A - m$; y ya que $(t_i / 1) \in A_m$ para $1 \leq i \leq n$, el conjunto $\{p_i / 1\}$ es también una base de P_m .

Sea entonces $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ la base canónica del A-módulo A^n y consideremos el homomorfismo $u: A^n \longrightarrow P$ tal que $u(e_i) = p_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Así, tenemos que $u_p : A_p^n \longrightarrow P_p$ es suprayectivo ; y ya que P es de tipo finito, se sigue de la proposición 5.4 que existe $f' \in A$-m tal que $u_{f'} : A_{f'}^n \rightarrow P_{f'}$ es suprayectivo .

Sean $g' \in A$ y $Q = \operatorname{coker}(u)$, por el lema 5.1 concluímos que $\operatorname{coker}(u_{f'g'}) = Q_{f'g'} = (Q_{f'})_{(g'/1)}$.

Y debido a que $Q_{f'} = 0$, se tiene que $\operatorname{coker}(u_{f'g'}) = 0$. Es decir, para todo elemento $g' \in A$ el homomorfismo $u_{f'g'} : A_{f'g'}^n \rightarrow P_{f'g'}$ es suprayectivo .

Por otra parte, c) nos afirma la existencia de una vecindad V_m de m tal que si $p \in V_m$ entonces, $r_p = n$. Y puesto que $\{X_g\}_{g \in A}$ es una base de la topología de Spec (A) , existe $g \in A$ tal que $m \in X_g \subset V_m$. Por lo tanto, $g \in A$-m, y para todo $p \in X_g$ el rango r_p es igual a n .

Definamos $f = f'g$. Entonces, $f \in A$-m y u_f es un homomorfismo suprayectivo. Además, si $p \in X_f$, se sigue de la fórmula 3.6 que $p \in X_g$, es decir, $r_p = n$. Por lo tanto, $u_p : A_p^n \longrightarrow P_p$ es un homomorfismo suprayectivo, y P_p y A_p^n son A_p -módulos libres del mismo rango para todo $p \in X_f$. Por consiguiente, u_p es un isomorfismo para todo $p \in X_f$.

Por otra parte, si q es un ideal primo de A_f y $p = h_f^{-1}(q)$, entonces $(A_f^n)_q = A_p^n$, $(P_f)_q = P_p$ y $(u_f)_q$ se identifica con u_p (ver - demostración de la proposición 5.5). De donde, $(u_f)_q$ es biyectivo y en especial $(u_f)_{m'}$ es biyectivo para todo ideal máximo m' de A_f ; así, del lema 5.2 se concluye que u_f es biyectivo, lo que - implica que P_f es libre de rango n .

Corolario 5.3 . Sean P un A-módulo proyectivo de tipo finito y m un entero positivo tal que para toda familia $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de P, existe una familia $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de A, - no todos divisores de 0, y para los cuales $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$. Entonces, para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$, se tiene que $r_p < m$.

Sean $p \in \operatorname{Spec}(A)$ y $r = r_p$. Sea $\{y_j\}_{1 \leq j \leq r}$ una base del A_p -módulo libre P_p .

Existen familias $\{x'_j\}_{1 \leq j \leq r}$ y $\{s_j\}_{1 \leq j \leq r}$ de elementos de P y de A-p respectivamente, tales que, $y_j = (x'_j / s_j)$ para $1 \leq j \leq r$.

Sea $s = \prod_{i=1}^{r} s$. Entonces,

$$y_j = (x'_j s / s_j s) = (x'_j \prod_{i \neq j} s_i / s) \text{ para } 1 \leq j \leq r .$$

Definamos $x_j = x'_j \prod_{i \neq j} s_i$ para $1 \leq j \leq r$. Entonces, $y_j = (x_j / s)$ donde $x_j \in P$.

Sea r' tal que $1 \leq r' \leq r$, y consideremos la familia $\{x_j\}_{1 \leq j \leq r'}$ de elementos de P.

Para toda familia $\{a_j\}_{1 \leq j \leq r'}$ de elementos de A tales que $\sum_{j=1}^{r'} a_j x_j = 0$, tendremos entonces que $\sum_{j=1}^{r'} (a_j / 1)(x_j / s) = 0$, es decir, $\sum_{j=1}^{r'} (a_j / 1) y_j = 0$.

Así, $(a_j/1) = 0$ para $1 \leq j \leq r'$. Por lo que, existe una familia $\{t_j\}_{1 \leq j \leq r'}$ de elementos de A-p tales que $t_j . a_j = 0$ para $1 \leq j \leq r'$. O sea, todos los elementos de la familia $\{a_j\}_{1 \leq j \leq r'}$ son divisores de 0.

Por consiguiente, m no puede ser menor o igual que r.

<u>Corolario</u> 5.4. Todo módulo plano de presentación finita es proyectivo.

Sean A un anillo y P un A-módulo plano de presentación finita. Entonces, para todo $m \in \Omega$, P_m es un A_m-módulo plano y de presentación finita (lema 4.6).

Y ya que A_m es un anillo local, P_m resulta ser un A_m-módulo libre.

Por lo tanto, el teorema 5.1 nos asegura que P es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

RANGO DE LOS MODULOS PROYECTIVOS.

<u>Definición</u> 5.4. Sea P un A-módulo proyectivo de tipo finito. Para todo $p \in \mathrm{Spec}(A)$, el rango del A_p-módulo libre P_p es llamado el rango de P en p. Y se le denotará por $rg_p(P)$.

<u>Proposición</u> 5.8. Sean A un anillo y P un A-módulo proyectivo de tipo finito. La función $f: \mathrm{Spec}(A) \rightarrow Z$, que asocia el entero

rg_p (P) a cada $p \in Spec(A)$, es continua .

Sean $p \in Spec(A)$ y $V_{f(p)}$ cualquier vecindad en Z de f (p) . Por el teorema 5.1 (a) implica c)) , se sigue la existencia de una vecindad V_p en X de p, tal que, para todo $q \in V_p$ el entero -- rg_q (P) = f (q) es igual al entero rg_p (P) = f (p) .

Por lo tanto, f (V_p) $\in V_{f(p)}$. O sea, f es continua para toda - $p \in$ Spec (A) .

<u>Corolario</u> 5.5 . Sean A un anillo y P un A-módulo proyectivo de tipo finito. Si X = Spec (A) es conexo, entonces, $f: X \longrightarrow Z$ es constante .

Ya que la imagen continua de un espacio conexo es conexa , se tiene que f (X) es un subespecio conexo de Z.

Por otra parte, supongamos que existen p y q en Spec (A) tales que $f(p) \neq f(q)$. Entonces, $\{f(p)\} \neq \emptyset$ y $\{f(p)\} \neq f(X)$. Y puesto que, $\{f(p)\}$ es un conjunto cerrado y abierto de f (X) para todo - $p \in$ Spec (A), concluímos que f (X) no es un subespacio conexo de Z; lo que contradice nuestra primera afirmación .

Por lo tanto, f (p) = f (q) para todo p y q de Spec (A) .

<u>Corolario</u> 5.6. Sean A un anillo y P un A-módulo proyectivo de - tipo finito. Si p y q están en la misma componente conexa de

Spec (A), entonces, $rg_p(P) = rg_q(P)$.

<u>Corolario</u> 5.7. Sea A un anillo entero o un anillo local. Entonces, para todo A-módulo proyectivo P la función $f: \text{Spec}(A) \longrightarrow Z$ es constante.

El corolario se sigue de los corolarios 3.5, 3.6 y 5.5.

<u>Definición</u> 5.5. Sean n un entero no negativo y P un A-módulo proyectivo de tipo finito. El entero n es el rango de P si $rg_p(P) = n$ para todo $p \in \text{Spec}(A)$.

Haremos ver que si existe un entero no negativo n tal que $rg_p(P) = n$ para todo $p \in \text{Spec}(A)$, entonces ese entero es único.

Sean A un anillo y P un A-módulo proyectivo de tipo finito. Para todo $p \in \text{Spec}(A)$ el A_p-módulo P_p es libre de tipo finito; por consiguiente, el A_p-módulo $P_p \otimes_{A_p} (A_p/pA_p)$ es libre de tipo finito y el rango de dicho módulo es igual al rango de P_p.

Por otra parte, $(P_p/pP_p) \cong P_p \otimes_{A_p} A_p/pA_p)$ para todo $p \in \text{Spec}(A)$.

Y debido a que pA_p es el ideal máximo de A_p, tenemos que P_p/pP_p es un espacio vectorial sobre el campo A_p/pA_p para cada $p \in \text{Spec}(A)$.

Así,

$$\text{rango}\,(P_p \otimes_{A_p} (A_p/pA_p)) = [P_p/pP_p : A_p/pA_p]$$

Concluímos entonces que,

$$rg_p(P) = \left[P_p/pP_p \; : \; A_p/pA_p \right] \quad \text{para todo } p \in \operatorname{Spec}(A)$$

Por consiguiente, si existe n tal que $rg_p(P) = n$ para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$, entonces $n = \left[P_p/pP_p \; : \; A_p/pA_p \right]$ para todo $p \in \operatorname{Spec}(A)$.

Y ya que para cada $p \in \operatorname{Spec}(A)$ el entero $\left[P_p/pP_p \; : \; A_p/pA_p \right]$ está determinado de manera única, se sigue que n es único. Y a dicho entero se le denota por $rg(P)$.

Teorema 5.2. Sean P un A-módulo y n un entero no negativo. Las propiedades siguientes son equivalentes.

a) P es proyectivo de tipo finito.

b) P es de tipo finito y para todo $m \in \Omega$ el A_m-módulo P_m es libre de rango n.

c) P es de tipo finito y para todo ideal $p \in \operatorname{Spec}(A)$ el A_p-módulo P_p es libre de rango n.

d) Para todo ideal $m \in \Omega$, existe $f \in A-m$ tal que el A_f-módulo P_f es libre de rango n.

a) equivale a c). Se sigue del teorema 5.1 y de la definición 5.5.

b) implica c). Sean $p \in \operatorname{Spec}(A)$ y m el ideal de Ω tal que $p \subset m$. Además, sea $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base de P_m, entonces como ya hemos observado, podemos suponer que $x_i = (p_i /1)$ con $p_i \in P$ para $1 \leq i \leq n$. Sea entonces, $u: A^n \longrightarrow P$ el homomorfismo tal que, $u(e_i) = p_i$ $1 \leq i \leq n$, donde $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es la base canónica de A^n .

Así, $u_m : A^n_m \longrightarrow P_m$ es biyectivo .

Por otra parte, si $S = (A-p)$, $T = (A-m)$ y $T' = (A_m - pA_m)$, entonces, $ST = S$. De donde, existe un isomorfismo j de A_S en $(A_T)_{(T'}$; a saber aquel que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h_A^T} & A_T \\ {\scriptstyle h_A^S = h_A^{ST}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle h_{A_T}^{T'}} \\ A_S \quad A_{ST} & \xrightarrow{j} & (A_T)_{T'} \end{array}$$

Por lo que, $A_p = (A_m)_{pA_m}$ $P_p = (P_m)_{pA_m}$ y $u_p : A^n_p \longrightarrow P_p$ se identifica canónicamente con

$(u_m)_{pA_m} : (A^n_m)_{pA_m} \longrightarrow (P_m)_{pA_m}$

Por lo tanto, como u_m es biyectivo, $(u_m)_{pA_m}$ también lo es ; lo que implica que u_p es un homomorfismo biyectivo. Es decir, P_p es libre de rango n .

c) implica d) . Por teorema 5.1, para cada $m \in \Omega$ existe $f \in A-m$ tal que, P_f es un A_f -módulo libre de tipo finito.

Para cada $m \in \Omega$ consideremos tal elemento f .

Como ya se ha observado $P_m = (P_f)_{mA_f}$, por consiguiente, -

puede deducirse la implicación en forma análoga a la resolución del inciso anterior.

d) implica b). Por el teorema 5.1 d) implica que P es un A-módulo de presentación finita, y por lo tanto, de tipo finito.

Por otro lado, para cada $m \in \Omega$ existe $f \in A-m$ tal que P_f es libre de rango n y $(P_f)_{mA_f} = P_m$, de donde P_m es de rango - n .

Proposición 5.9. Sean A un anillo y E y F dos A-módulos proyectivos de tipo finito. Entonces, E F es un A-módulo proyectivo de tipo finito y $rg_p (E \otimes_A F) = rg_p (E) \cdot rg_p (F)$ para todo $p \in Spec(A)$

Ya que E es proyectivo de tipo finito, existen dos A-módulos M y E', siendo M libre de tipo finito, tales que $M = E \oplus E'$.

Análogamente, existen N y F', siendo N libre de tipo finito, tales que $N = F \oplus F'$.

Entonces,

$M \otimes_A N \cong (E \otimes_A F) \oplus (E \otimes_A F') \oplus (E' \otimes_A F) \oplus (E' \otimes_A F')$

Y debido a que $M \otimes_A N$ es un A-módulo libre que tiene por base a $\{x_i \otimes y_j\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; siendo $\{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ y $\{y_j\}_{1 \leq j \leq n}$ las bases de M y N respectivamente, se sigue que $E \otimes_A F$ es un A-módulo proyectivo de tipo finito.

Además, si $p \in \operatorname{Spec}(A)$, entonces,

$$(E \otimes_A F)_p = (E \otimes_A F) \otimes_A A_p \cong A_p \otimes_A (E \otimes_A F) \cong E_p \otimes_A F$$

y

$$E_p \otimes_A F \cong E_p \otimes_{A_p} (A_p \otimes_A F) = E_p \otimes_{A_p} F_p$$

Así, el rango del A_p -módulo libre $(E \otimes_A F)_p$ es igual al rango - del A_p -módulo $E_p \otimes_{A_p} F_p$. Y,

$$\operatorname{rango}(E_p \otimes_{A_p} F_p) = \operatorname{rango}(E_p) \cdot \operatorname{rango}(F_p)$$

O sea,

$$rg_p (E \otimes_A F) = rg_p (E) \cdot rg_p (F)$$

En adelante, A denotará a un anillo conmutativo, con unitario y neteriano. Y P será un A-módulo proyectivo de tipo finito.

Sea m un ideal máximo de A, P (m) denotará al A/m-módulo P/mP. Y para todo $s \in P$, $s(m)$ será la imagen canónica de s en P (m).

<u>Definición</u> 5.6. Los elementos $s_1, \ldots, s_h$ de P, son linealmente independientes en $m \in \Omega$, si los elementos $s_i(m)$ son li-- nealmente independientes en el espacio vectorial P(m) .

<u>Lema</u> 5.3. Sean $m_1, \ldots, m_n$ elementos de Ω , dos a dos - distintos y sean $v_i \in P(m_i)$ $1 \leq i \leq n$. Entonces existe un elemento s P tal que $s(m_i) = v_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Sea $\mathfrak{a}_i = \prod_{i \neq j} m_j$, entonces no existe ningún ideal máximo de A que contenga a todas las $\mathfrak{a}_i$; ya que los únicos ideales primos que pueden contener al producto $\mathfrak{a}_i$, son aquellos que pertenecen a dicho producto, es decir, los ideales $m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n$ y para cada uno de estos existe $\mathfrak{a}_j$ tal que $\mathfrak{a}_j \not\subset m_j$ $i \neq j$. Por lo que, $\sum_{i=1} \mathfrak{a}_i = A$. Así existen $e_i \in \mathfrak{a}_i$ $1 \leq i \leq n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$

Por otra parte, para cada $1 \leq i \leq n$ elijamos $s_i \in p$ tal que $s_i(m_i) = v_i$; y sea $s = \sum_{i=1}^{n} e_i s_i$.

Entonces, para cada m_j se tiene que

$$s(m_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i(m_j)\, s_i(m_j)$$

Probaremos que,

$$e_i(m_j) = \begin{cases} \overline{0} & \text{si } i \neq j \\ \overline{1} & \text{si } i = j \end{cases}$$

En efecto, $e_i \in \mathfrak{a}_i \quad \prod_{i \neq j} m_j \subset m_j$ para toda $i \neq j$, es decir, $e_i(m_j) = \overline{0}$; y $\overline{1} = 1(m_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j(m_i) = e_i(m_i)$

Por lo tanto, $s(m_j) = s_i(m_i) = v_i$ para $1 \leq i \leq n$.

<u>Lema</u> 5.4. Sean R un anillo, M un R-módulo libre de tipo finito y $\{b_j\}_{1 \leq j \leq s}$ una base de M. Sea $m \in \Omega$. Los elementos de la familia $\{m_i = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} b_j\}_{1 \leq i \leq n}$ son linealmente independientes en m si y sólo si la matriz de $n \times s$ $(\overline{\alpha_{ij}})$ es de rango n.

Para $1 \leq i \leq n$ tenemos que

$$\overline{p_i} = p_i + mM = \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} b_j + mM = \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha_{ij}}\, \overline{b_j} .$$

Por consiguiente, cada $\overline{p}_i$ está representada por los coeficientes

$(\overline{\alpha}_{i1}, \ldots, \overline{\alpha}_{is})$ $1 \leq i \leq n$

Por lo tanto, $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n$ son linealmente independientes

si y sólo si el rango de $(\overline{\alpha}_{ij}) = n$.

<u>Lema</u> 5.5. Si $s_1, \ldots, s_h$ son elementos de P, el conjunto

F formado por las $x \in \Omega$ tales que $s_1, \ldots, s_h$ son linealmente dependientes en x, es cerrado en Ω .

Existen dos A-módulos L y Q tales que $L = P \oplus Q$ siendo L libre de tipo finito.

Sea $\{f_j\}$ $1 \leq j \leq r$ una base de L. Entonces,

$s_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} f_j$ $1 \leq i \leq h$

Para cada $x \in \Omega$, el lema anterior nos asegura que el rango de la matriz de $h \times s$ $(\overline{\alpha}_{ij})$ es menor que h . Por consiguiente, para cada submatriz de $h \times h$ A de $(\overline{\alpha}_{ij})$, se tiene que

$\det(A) \equiv 0 \pmod{x}$; o sea, para cada submatriz A de $n \times n$ de (α'_{ij}) debe tenerse que $\det(A) \in x$.

Sean $A_1, \ldots, A_t$ todas las submatrices de $n \times n$ de $(\overline{\alpha}_{ij})$, entonces, si $\mathfrak{a}$ es el ideal generado por la familia $\{\det(A_k)\}$ $1 \leq k \leq t$, claramente se concluye que $\mathfrak{a} \subset x$ si y sólo si $x \in F$. De donde, $F = V(\mathfrak{a})$.

Lema 5.6 . Sean R un anillo y $M \supset N \supset F$ R-módulos . Si F es sumando directo de M, entonces, F es sumando directo de N

En efecto, se tiene que, existe un R-módulo F tal que

$M = F \oplus F'$.

Entonces, para cada $n \in N$ existen $f \in F$ y $f' \in F'$ tales que, $n = f + f'$. Y ya que, $N \supset F$, se sigue que $n - f \in N$; por consiguiente, $f' \in N$.

Así, $N = F + (F' \cap N)$. Y por otra parte,

$$F \cap (F' \cap N) \subset F \cap F' = 0$$

Por lo que, $N = F \oplus (F' \cap N)$

Lema 5.7. Sea $s \in P$. Para que la aplicación $a \longrightarrow as$ de A en P identifique a A con un factor directo de P, es necesario y suficiente que $s(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$.

Necesidad . Por hipótesis existe un A-módulo P' tal que, $P = As \quad P'$, además, supongamos que $s(x) = 0$ para alguna $x \in \Omega$. Entonces, $s = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad x_i \in x,\ p_i \in P$ para $1 \leq i \leq n$.

Por lo tanto, $s = \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i s + p'_i)$ con $a_i \in A$ y $p'_i \in P'$.

Por lo que $s = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i s$, y así $(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i a_i) s = 0$.

Y debido a que la aplicación es biyectiva concluímos que $1 = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$; lo que contradice la hipótesis de que x es un ideal máximo de A.

Suficiencia . Por ser P proyectivo de tipo finito existen F A-módulo libre de tipo finito y P' A-módulo, tales que, $F = P \oplus P$.

Sea $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base de F. Entonces, $u_i = p_i + p'_i$ con $p_i \in P$ y $p'_i \in P'$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo que,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p'_i \quad \text{con } \alpha_i \in A \text{ para } 1 \leq i \leq n .$$

Y en virtud de que la expresión de un elemento de F en términos de los elementos de P y P', es única se tiene que $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$.

Y ya que, $s(x) \in xP$ para todo $x \in \Omega$, concluímos que el ideal generado por los α_i es el anillo A. Debido a lo cual, existen - $\beta_i \in A$ $1 \leq i \leq n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha \beta_i = 1$.

Consideremos un elemento $v \in P$ y tomemos el A-módulo $Av \oplus F$, el cual es un A-módulo libre de tipo finito que tiene por base a la siguiente familia: $\{v, u_1, \ldots, u_n\}$.

Probaremos que $\{u_1 - \beta_1 v, \ldots, u_n - \beta_n v, v\}$ es también - una base de $Av \oplus F$.

En efecto, supongamos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(u_i - \beta_i v) + a_{n+1} v = 0 \quad \text{con } a_i \in A \quad 1 \leq i \leq n$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i + (a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i) v = 0$$

de donde, $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = 0$

Es decir, dicha familia es libre .

Por otro lado, si $x \in Av \oplus F$, entonces,

$x = av + f = av + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ con $a_i \in A \quad 1 \leq i \leq n$.

Y puesto que cada $u_i = \beta_i v + (u_i - \beta_i v)$, se sigue que,

$x = av + \sum_{i=1}^{n} a_i (\beta_i v + (u_i - \beta_i v)) = (a + \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i) v + \sum_{i=1}^{n} (u_i - \beta_i v)$

O sea, la familia $\{u_1 - \beta_1 v, \ldots, u_n - \beta_n v, v\}$ genera al A-módulo $Av \oplus F$.

Se demostrará ahora que la familia $\{u_1 - \beta_1 v, \ldots, u_n - \beta_n v, p\}$ es otra base de $Av \oplus F$.

En primer término, demostraremos que dicha familia es libre .

Supongamos que,

$\sum_{i=1}^{n} a_i (u_i - \beta_i v) + a_{n+1} p = 0$ con $a_i \in A$ para toda i.

Entonces,

$\sum_{i=1}^{n} a_i (u_i - \beta_i v) + a_{n+1} p = \sum_{i=1}^{n} a_i (u_i - \beta_i v) + a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0.$

De donde,

$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{n+1} \alpha_i) u_i + \sum_{i=1}^{n} - a_i \beta_i v = 0$.

Por lo tanto, de la afirmación anterior se tiene que

$$a_i + a_{n+1} \alpha_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = 0 .$$

Así, $a_i = -a_{n+1} \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n$.

Por consiguiente,

$$a_{n+1} = a_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{n} -a_i \beta_i = 0 .$$

Por lo que, $a_i = -a_{n+1} \alpha_i = 0, \ 1 \leq i \leq n$.

Es decir, la familia es libre.

Por otra parte, $v = \sum_{i=1}^{n} -\alpha_i(u_i - \beta_i v) + p$ y $u_j = \beta_j\ v\ + u_j - \beta_j v$

De la segunda igualdad y por la expresión de v se tiene que

$$u_j = \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} -\alpha_i(u_i - \beta_i v) + p\right) + u_j - \beta_j v$$

De donde,

$$u_j = \sum_{i \neq j} -\alpha_i\beta_j (u_i - \beta_i v) + \beta_j p + (-\alpha_j\beta_j + 1)(u_j - \beta_j v)$$

Debido a esta igualdad y a la primera de que se hizo mención se concluye que la familia $\{u_1 - \beta_1 v, \ldots, u_n - \beta_n v, p\}$ genera al A-módulo $Av \oplus F = G$.

Por lo que, $A v \oplus F = Ap \oplus A'$, A' es el A-módulo generado por la familia $u_i - \beta_i v \quad 1 \leq i \leq n$.

Por lo tanto, Ap es sumando directo de G y como $G \supset F \supset Ap$, se sigue del lema anterior que Ap es sumando directo de F.

<u>Teorema</u> 5.3. Sean F un conjunto cerrado de Ω, $x_1, \ldots, x_n$ elementos de F, distintos dos a dos y $v_i \in P(x_i)$. Sean además, $s_1, \ldots, s_h$ elementos de P, y linealmente independientes para todo $x \in \Omega - F$. Si existe un entero no negativo k tal que $h + k \leq rg_x(P)$ para todo $x \in \Omega$, entonces existen $s \in P$ y un conjunto cerrado F' de Ω, tales que:

i) $s(x_i) = v_i \quad 1 \leq i \leq n$.

ii) $s_1, \ldots, s_h$ y s son linealmente independientes en todo

$x \in \Omega - (F \cup F')$

iii) $ht(F') \geq k$

Dado que A es un anillo neteriano, Ω es un espacio neteriano (corolario 3.7 y proposición 2.1), así todo subespacio de Ω es neteriano (proposición 2.1).

El teorema será probado por inducción sobre k.

Si $k = 0$, escojamos $F' = \Omega$ y $s \in P$ el elemento cuya existencia nos afirma el lema 5.3.

Entonces,

i) $s(x_i) = v_i \quad 1 \leq i \leq n$.

ii) $s_1, \ldots, s_h$ y s son linealmente independientes en todo $x \in \Omega - F'$; por vacuidad.

iii) $ht(\Omega) \geq 0$ ya que la altura de todo cerrado es mayor o igual que 0.

Supongamos que existe $k \geq 1$ tal que, $h + k \leq rg_x(P)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces, $h + (k-1) < h + k \leq rg_x(P)$ para todo $x \in \Omega$.

Por las hipótesis de inducción existen entonces $u \in P$ y G cerrado de Ω, tales que,

i') $u(x_i) = v_i \quad 1 \leq i \leq n$.

ii') $s_1, \ldots, s_h$ y u son linealmente independientes en todo $x \in \Omega - (F \cup G)$.

iii') $ht(G) \geq k-1$.

Sea L el conjunto de ideales máximos de A para los cuales $s_1, \ldots, s_h$ y u son linealmente dependientes . Claramente $L \subset F \cup G$.

Por la proposición 2.4 L sólo tiene un número finito de componentes irreducibles; así si G' es la unión de las componentes irreducibles (las cuales son conjuntos cerrados por la proposición 1.6) de L que no están contenidas en F, entonces G' es un conjunto cerrado de L. Por otra parte, se sigue del lema 5.5 que L es un -- conjunto cerrado de Ω , por consiguiente , G' es un conjunto cerrado de Ω

Por la caracterización de los conjuntos irreducibles tenemos que - toda componente irreducible de L que no está contenida en F, está contenida en G. ; por consiguiente, $G' \subset G$.

Y ya que L es la unión de sus componentes irreducibles (proposición 1.6) se tiene que $L \subset F \cup G'$.

En virtud de estos resultados podemos afirmar que G' es un cerrado de Ω tal que:

ii') $s_1, \ldots, s_h$ y u son linealmente independientes en todo - $x \in \Omega - (F \cup G')$

Ya que si $x \in \Omega - (F \cup G')$, entonces, $x \in \Omega - L$.

iii'') $ht(G') \geq k-1$.

Puesto que $G \supset G'$, la proposición 2.5 nos asegura que la condición iii'') se satisface.

Entonces, por la proposición 2.6 toda componente irreducible de G'(las cuales serán, por la proposición 1.7, algunas de las que -- forman a la unión G') tiene altura mayor o igual que $k-1$. Si todas ellas tienen altura mayor que $k-1$, se sigue de la misma proposi-- ción que $ht(G') \geq k$; por lo que el teorema quedaría demostrado Supongamos así que no todas las componentes irreducibles de G' tienen altura mayor que $k-1$ y sean $G'_1, \ldots, G'_m$ las componentes irreducibles de G' tales que $ht(G'_\alpha) = k-1$ para $1 \leq \alpha \leq m$.

Para cada α escojamos un ideal máximo y_α tal que

$y_\alpha \in G'_\alpha - (F \cup \bigcup_{\beta \neq \alpha} G')$. Entonces, ya que para toda α $y_\alpha \notin F$, se tiene por una de las hipótesis del teorema que los elementos $s_i(y_\alpha)$ $1 \leq i \leq h$ son linealmente independientes en $P(y_\alpha)$ para toda α . Y puesto que, $y_\alpha \in G' \subset L$ para toda α , entonces, por la definición de L, concluímos que $u(y_\alpha)$ es combinación lineal de los elementos $s_i(y_\alpha)$ para cada $1 \leq \alpha \leq m$.

Por otra parte, $h < h + k \leq rg_{y_\alpha}(P)$ para toda α , por lo tanto, para cada $1 \leq \alpha \leq m$, existe un elemento $w_\alpha \in P(y_\alpha)$, tal que $s_1(y_\alpha), \ldots, s_h(y_\alpha)$ y w_α son linealmente independientes en $P(y_\alpha)$.

Consideremos el conjunto cerrado $F \cup G'$ y los elementos

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ pertenecientes a esa unión, y

los $h+1$ elementos $s_1, \ldots, s_h, u$ de P. Además, para cada

x_i escojamos $v_i \in P(x_i)$ igual a 0 y para cada $1 \leq \alpha \leq m$ sea

$v_\alpha \in P(y_\alpha)$ igual a w_α.

Mostraremos que estos elementos y el entero $k-1$ satisfacen las hipótesis del teorema.

En efecto, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, por hipótesis; $x_i \neq y_\alpha$ para toda pareja (i, α), ya que $x_i \in F$ y $y_\alpha \notin F$ y finalmente $y_\alpha \neq y_\beta$ si $\alpha \neq \beta$, puesto que $y_\alpha \in G'_\alpha$ y $y_\beta \notin G'_\alpha$ si $\alpha \neq \beta$.

Ahora bien, si $x \in \Omega - (F \cup G')$ se sigue de ii') que

$s_1, \ldots, s_h$ y u son linealmente independientes en $P(x)$

Y por último, $(h+1)+(k-1) = h+k \leq rg_x(P)$ para todo $x \in \Omega$

Así, por la hipótesis de inducción existen $t \in P$ y un cerrado H de Ω tales que:

i''') $t(x_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$ $\quad t(y_\alpha) = w_\alpha$ $\quad 1 \leq \alpha \leq m$.

ii''') $s_1, \ldots, s_h$, u y t son linealmente independientes en todo $x \in \Omega - (F \cup G' \cup H)$.

iii''') $ht(H) \geq k-1$.

Sea L' el conjunto cerrado de Ω, que consta de los ideales máximos de A, para los cuales $s_1, \ldots, s_h, u, t$ son linealmente -

dependientes . Entonces, $L \subset F \cup G' \cup H$.

Sea H' la unión de las componentes irreducibles de L' que no están contenidas en $F \cup G'$; entonces, por las mismas razones dadas para G', se tiene que H' es un conjunto cerrado de Ω tal que:

ii^{iv}) $s_1, \ldots, s_h$, u y t son linealmente independientes en todo $x \in \Omega - (F \cup G' \cup H')$.

iii^{iv}) $ht(H') \geq k-1$.

Entonces, existen componentes irreducibles de H' que tienen altura igual a k-1 , o bien u y H' satisfacen las condiciones i), ii), iii) (este último hecho se puede observar de manera análoga a como se hizo para G').

Si la primera posibilidad se realiza, consideremos las componentes irreducibles $H'_1, \ldots, H'_r$ de H' que tienen altura igual a k-1 .

Para cada $1 \leq \beta \leq r$, sea $z_\beta \in H'_\beta - (F \cup G' \cup \bigcup_{\beta \neq \gamma} H'_\gamma)$. Entonces, para todo β se tiene que $s_1(z_\beta), \ldots, s_h(z_\beta)$ y $u(z_\beta)$, son linealmente independientes en $P(z_\beta)$, ya que, $z_\beta \notin (F \cup G')(ii')$) y $t(z_\beta)$ es combinación lineal de los elementos $s_1(z_\beta), \ldots, s_h(z_\beta)$ y $u(z_\beta)$, por ser z_β elemento de L' . Así, para cada $1 \leq \beta \leq r$ existe $\lambda_\beta \in A(z_\beta)$ tal que :

$$t(z_\beta) = \lambda_\beta u(z_\beta) \bmod (s_1(z_\beta), \ldots, s_h(z_\beta))$$

Aplicando el lema 5.3 al A-módulo A y a los elementos

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_r$;

$-1 = v_i \in P(x_i)$ $1 \leq i \leq n$, $0 = v_\alpha \in P(y_\alpha)$ $1 \leq \alpha \leq m$ y

$\lambda_\beta \neq \lambda'_\beta \in P(z_\beta)$, $1 \leq \beta \leq r$, concluímos que existe un elemento $f \in A$ tal que:

iv) $f(x_i) = -1$ $1 \leq i \leq n$, $f(y_\alpha) = 0$ $1 \leq \alpha \leq m$ y $f(z_\beta) = \lambda'_\beta$ para $1 \leq \beta \leq r$.

Definamos $s = t - fu$, entonces, $s \in P$.

Por otro lado, si K es el conjunto cerrado que consiste de todos los ideales máximos de A para los cuales $s_1, \ldots, s_h$ y s son linealmente dependientes, entonces, $K \subset F \cup G' \cup H'$. Y por las mismas razones dadas anteriormente, si $\{K_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es la familia de componentes irreducibles de K que no están contenidas en F, entonces, Γ es un conjunto finito y si $F' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} K_\gamma$, entonces, F' es un conjunto cerrado de Ω tal que, $F' \subset G' \cup H'$ y $K \subset F \cup F'$.

Probaremos que F' y s satisfacen las condiciones i), ii), iii).

Por ii''') y iv) se tiene que

$$s(x_i) = u(x_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

Así, de i') se sigue

$$\text{i) } s(x_i) = v_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Sea $x \in \Omega - (F \cup F')$, entonces, $x \in \Omega - K$. Así, de la definición de K concluímos

ii) $s_1, \ldots, s_h$ y s son linealmente independientes en todo $x \in \Omega - (F \cup F)$.

Probaremos que toda componente irreducible de F' (que por la proposición 1.7 será alguna de las K_γ) tiene altura mayor o igual que k, lo que implicará

$$\text{iii) } ht\,(F') \geq k$$

Ya que $ht\,(F') \geq k-1$, entonces, $ht(K_\gamma) \geq k-1$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Supongamos que $ht\,(K_{\gamma_0}) = k-1$ para alguna $\gamma_0 \in \Gamma$ Entonces - puesto que $K_{\gamma_0} \subset F'$ tenemos que $K_{\gamma_0} \subset G' \cup H'$.

Así, la proposición 2.7 nos asegura que K_{γ_0} es alguna de las componentes irreducibles de $G' \cup H'$, las cuales por las observacio- - nes hechas anteriormente, son de la forma G'_α o H'_β

a) Supongamos que $K_{\gamma_0} = G'_\alpha$ para alguna α. Entonces $y_\alpha \in K_{\gamma_0}$ y por consiguiente, tenemos

$$s(y_\alpha) = t(y_\alpha) - f(y_\alpha)\, u(y_\alpha) = w_\alpha$$

y debido a que $s_1(y_\alpha), \ldots, s_h(y_\alpha)$ y w_α son linealmente - independientes, se contradice la definición de K.

b) Supongamos que $K_{\gamma_0} = H'_\beta$ para alguna β. Entonces, $z_\beta \in K_{\gamma_0}$

y

$$s(z_\beta) = t(z_\beta) - f(z_\beta)\, u(z_\beta)$$

Por lo que,

$$s(z_\beta) \equiv \lambda_\beta u(z_\beta) - \lambda'_\beta u(z_\beta) \bmod (s_1(z_\beta), \ldots, s_h(z_\beta))$$

Así, por iv)

$$s(z_\beta) \not\equiv 0 \bmod (s_1(z_\beta), \ldots, s_h(z_\beta))$$

Lo que contradice la definición de K .

Por consiguiente, ht $(K_\gamma) > k-1$, para toda $\gamma \in \Gamma$. Por lo tanto, ht $(F') \geq k$.

<u>Teorema</u> 5.4. Sea A un anillo tal que su espectro primo es conexo. Todo A-módulo proyectivo P es la suma directa de un A-módulo libre y de un A-módulo proyectivo de rango menor igual que la dimensión de Ω .

El teorema será demostrado por inducción sobre el rango r de P. Si $r = 0$ claramente se satisface el teorema.

Supongamos que $r \geq 1$, entonces, a) $r \leq \dim \Omega$ o bien b) $r > \dim \Omega$.

a) si $r \leq \dim \Omega$, entonces podemos tomar al A-módulo 0 y al A-módulo proyectivo P como los A-módulos que satisfacen el teorema.

b) si $r > \dim \Omega$. Aplicamos el teorema anterior al conjunto cerrado $F = \emptyset$, tomando $h = 0$ y $k = r$.

Así, existen $s \in P$ y un conjunto cerrado F' de Ω tales que:

ii) $s(x) \neq 0$ para toda $x \in \Omega - F'$.

iii) $ht(F') \geq r$.

En virtud de la hipótesis iii) no puede darse a menos que $F' = \emptyset$.

Por lo tanto, $s(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Por consiguiente, el lema 5.7 nos asegura que P se identifica con la suma directa de A y de un A-módulo proyectivo P'.

Ya que el rango de P' es r-1 , se sigue de la hipótesis de inducción que $P' = L \oplus P''$ donde L es un A-módulo libre y P'' es un A-módulo proyectivo de rango menor o igual que la dimensión de Ω .

Concluímos así, que $P = A \oplus L \oplus P''$.

Claramente $A \oplus L$ es un A-módulo libre, por lo que el teorema ha quedado demostrado.

BIBLIOGRAFIA

I . N. Bourbaki — Algèbre Commutative (Fascicule XXVII) Hermann.

II . N. Bourbaki — Algèbre (Fascicule VI). Hermann.

III . Oscar Zariski and Pierre Samuel — Commutative Algebra (Volume I). D. Van Nostrand Company, Inc.

IV . Serge Lang — Algebra. Addison-Wesley Publishing Co, Inc.

V . Yukitoshi Hinohara — Proyective Modules Over Weakly Noetherian Rings. J. Math. Soc. Japan. Vol. 15 No 1 1963.

VI . Jean-Pierre Serre — Modules Projectifs et Espaces - Fibrés a Fibre Vectorielle. Séminarire P. Dubreil. M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot (Algebre et Théorie des Nombres) Année 1957/58.