

U. N. A. M.

FACULTAD DE CIENCIAS

EL LEMA DE DEHN

TESIS PRESENTADA POR:

Ma. de Lourdes Esteva Peralta

Para obtener el Título de

MATEMÁTICO

ESTEVA PERALTA MA. DE LOURDES S/A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A JAVIER

EL LEMA DE DEHN

1. Introducción.

Todo se estudiará en la categoría de los espacios p.l.

Referencia: Bourke y Sanderson [R].

Sea X un espacio topológico. Un lazo en X es una función continua $L: S^1 \rightarrow X$ donde S^1 es la esfera de dimensión 1.

Un lazo se llama simple si L es inyectiva.

Un disco D en X es la imagen $f(\Delta)$ de una función continua no degenerada $f: \Delta \rightarrow X$ siendo Δ un simplejo de dimensión 2. D se llama singular si f no es inyectiva.

Naturalmente el mismo disco D puede ser la imagen de varias funciones continuas. Nosotros estamos interesados en modificar el disco D y esto lo hacemos de dos maneras. Unas veces cambiamos la función, manteniendo la imagen igual, pero alterando algunas de sus propiedades que proceden de la función particular (cortes de Dehn). Otras veces cambiaremos la imagen; como se ve en ocasiones es conveniente hablar de un disco (D, f) , entendiendo por tal el disco D y una determinada función $f: \Delta \rightarrow D$.

Lema de Dehn

Sea M una variedad de dimensión 3, compacta y con frontera no vacía (no necesariamente conexa, ni orientable) y sea D un disco en M tal que $D \cap \partial M = \partial D$ es la imagen de un lazo simple no contractible en ∂M ; entonces existe un disco D' no singular tal que $D' \cap \partial M = \partial D' = \partial D$.

Un disco singular que cumpla las hipótesis del lema de Dehn se llamará un disco de Dehn.

Este teorema fue enunciado y falsamente probado por Dehn [1] en 1910. Papakyriakopoulos probó correctamente el teorema en 1957 [4]. Papakyriakopoulos había probado poco antes el teorema del lazo [5] e inmediatamente el lema de Dehn probó el teorema de la esfera bajo hipótesis restrictivas. Whitehead y Shapiro probaron este último teorema con toda generalidad confirmando una sospecha de Fox [math Review] referente al uso de aplicaciones cubrientes dobles. Stallings [6] reunió en una sola exposición el lema del lazo y el de Dehn. Whitehead [8] y Waldhausen [7] presentaron diversas generalizaciones del tema. Más tarde se han hecho estudios del problema tanto en dimensiones altas como en dimensión 3, pero sustituyendo un disco por una superficie de género arbitrario.

En lo referente a este trabajo, se expondrán, en las primeras dos secciones, resultados referentes a posición normal. En las secciones 5, 6, 7 y 8 se verán las aportaciones que dió Johanson [2], [3] al tema a saber: realización de un diagrama de Johanson. La prueba que dió Papakyriakopoulos se discutirá con detalle en las secciones 9 y 10. Y por último en la sección 11 se expondrá la demostración del lema dada por Montesinos.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Dr. José Ma. Montesinos y al Dr. Francisco González Acuña bajo cuya dirección me fue posible realizar este trabajo.

{ 2 Disminución del conjunto de singularidades de D.

Sea (f, D) un disco de Dehn contenido en M . En esta sección se probará que el conjunto de singularidades de D puede ser disminuido por medio de isotopías en M . Primero se probarán resultados para el caso $M = \mathbb{R}^2$ por medio de triangulaciones y movimientos de vértices; segundo, cubriremos D por medio de cartas en M y aplicaremos inductivamente los resultados de $\mathbb{R}^2$ a cada carta.

Definiciones.-

1.- Una función continua

$$F: X \times I \longrightarrow Y \times I$$

preserva niveles si

$$F(x, t) \in Y \times t \text{ para cada } t \in I$$

2.- Una isotonía de Y es un homomorfismo

$$H: Y \times I \longrightarrow Y \times I$$

que preserva niveles y tal que $H_0 = \text{id}$. A H_1 lo llamaremos el homeomorfismo final de la isotopía. Decimos que H_1 es isotópica a la identidad.

3.- Una isotopía de X en Y es una inmersión que preserva niveles

$$F: X \times I \longrightarrow Y \times I$$

Decimos que F_0 y F_1 son isotópicas.

4.- Una isotopía deja fijo un subconjunto $U \subset X$ si $F/U \times I = F_0 \times \text{id}/U \times I$.

5.- Una isotopía F tiene soporte en U si F fija $X - U$. También diremos que F es mod V si F fija a V .

6.- Sea Y un espacio métrico. Una homotopía

$$f: X \times I \longrightarrow Y \text{ es una } \epsilon\text{-homotopía si para cada}$$

$$(x, t) \in X \times I, d(f(x, 0), f(x, t))$$

Una isotopía $F: Y \times I \longrightarrow Y \times I$ es una ϵ -isotopía si la composición

$$\pi F: X \times I \longrightarrow Y \text{ es una } \epsilon\text{-homotopía.}$$

7.- El conjunto de singularidades de una función continua

$f: X \rightarrow Y$ denotado por $S(f) \subset X$, está definido como

$$cl\{x/ x \in X, \#f^{-1}(x) \neq x\}$$

Sea $\mathcal{E}_i(f) = f^{-1}(S(f))$ donde $S(f) = \{x/ x \in X, \#f^{-1}(x) \neq x\}$.

A los puntos en $\mathcal{E}_1(f)$ los llamaremos puntos rama, en $\mathcal{E}_2(f)$ puntos dobles, en $\mathcal{E}_3(f)$ puntos triples, etc..

Podemos descomponer $S(f)$ en una unión ajena $S(f) = \bigcup S_i(f)$.

Proposición 2.1. Sean B^n, C^n bolas y $h_0, h_1: B^n \rightarrow C^n$ homeomorfismos los cuales coinciden en la frontera ∂B^n , entonces h_0, h_1 son isotópicos en el ambiente mod ∂B^n .

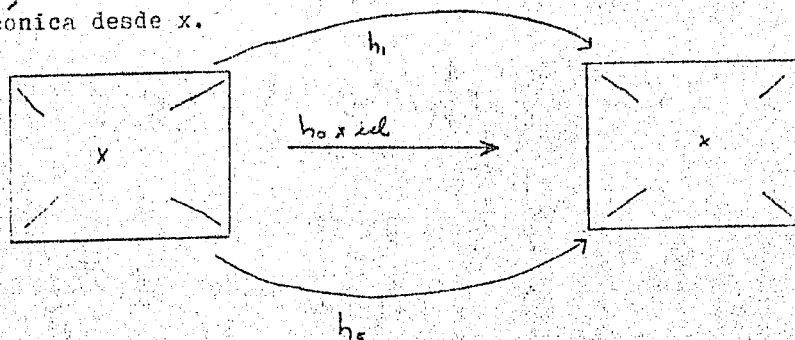
Dem. Podemos tomar $B^n = C^n = I^n$ y construir el homeomorfismo

$H: I^n \times I \rightarrow I^n$ como sigue

$$H_s = h_0, H_1 = h_1, H/I^n \times I = (h_0/I^n \times Id)$$

Sea $x = (0, 1/2) \in I^n \times I$ y tomemos

$H(x) = x$ y $H/I^n \times I$ la definimos como la extensión cónica desde x .



Proposición 2.2 Sea (f, D) un disco de Dehn en R^3 . Entonces existe un par (f', D') que cumple:

- i) Dada $\epsilon > 0$ existe una ϵ -isotopía H con soporte compacto la cual termina en $h_i: R^3 \rightarrow R^3$ con $h_i(D) = D'$.
- ii) $\dim S(f') \leq 1$.
- iii) $\dim S_i(f') = 0$ para $i \neq 2$.

Dem.

Sea K una triangulación de D y supongamos que $v_1, \dots, v_s$ son los vértices de K contenidos en $Bd D$ y $v_{s+1}, \dots, v_n$ los vértices contenidos en $D - Bd(D)$. Para cada vértice v_i con $s+1 \leq i \leq n$ tomemos una vecindad compacta N_i tal que $st v_i \subset N_i$ y definamos un $\mathcal{E}/t$ homeomorfismo con $t = n - (s+1)$, moviendo v_i un poco y extendiendo linealmente a su estrella. Hemos reemplazado v_i por un nuevo vértice al cual llamaremos w_i y lo escogeremos de tal modo que se cumplan las con

diciones:

- a) Que w_s no esté en ningún subespacio de dimensión menor que 3 generado por vértices $v_0, \dots, v_s, \dots, v_n$, con $s+1 \leq i-1$.
- b) En el caso $n=3$, w_s no esté en ninguna línea que intersecte al interior de cada tres distintos 1-simplejos generados por los otros vértices.

El movimiento lineal que hemos definido es la identidad fuera de N y por la proposición 2.1 es el final de una isotopía H con soporte en $\text{cl } N$, la cual podemos extender por medio de la identidad.

Sea $f': \Delta \rightarrow R^3$ la función simplicial cuyos valores en los vértices son $v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_n$ y sea $D' = f'(\Delta)$. Solamente falta probar que (f', D') cumplen las condiciones i), ii), iii). Para demostrar i) tomemos la isotopía

$H: R^3 \times I \rightarrow R^3 \times I$ definida como

$$H(x, t) = \sum_{A \in \Delta} H_A(v, t) \quad \text{donde } x = \sum_{A \in \Delta} \lambda_A v_A \text{ y } \lambda_A \in (0, 1, \dots, n) \\ (H_A = \text{id si } \lambda_A = 0, \dots, s)$$

y $H(x, t) = (x, t)$ para $x \in R^3 - D$

Es obvio que H es una ξ -isotopía

ii) Se sigue de la condición a)

iii) Se sigue de la condición b) . (Ver Fig. 2.1)



Fig. 2.1

Lo siguiente es una generalización de la proposición 2.1.

Proposición 2.2 Sea M una variedad de dimensión tres y D un disco de Dehn en M , entonces existe (f', D') que cumple las condiciones i), ii), iii).

Dem Sea B_i $i=0, \dots, t$ una cubierta de D consistente de bolas de dimensión tres. Sea $D_r = \bigcup_{i=0}^r D \cap B_i$. Entonces $D_t = D$.

La demostración se hará por inducción.

Para $i=0$ tenemos $D_0 = D \cap B_0$. Sea U una vecindad de B_0 homeomorfa a R^3 ($U = B_0 \cup$ un collar). Aplicando la proposición 2.1 a D_0 y U queda demostrado el primer paso.

Supongamos que la hipótesis es verdadera para $r-1$. Como antes tomemos una vecindad U de B_r homeomorfa a R^3 y sea $A = D \cap B_r$.

Escogamos, por inducción, una $\varepsilon/2$ isotopía H' de M que lleve a D en $H'_1(D)$ y tal que $H'_1(A) \subset U$. Apliquemos el resultado anterior a $H'_1(A)$ y obtenemos una $\varepsilon/2$ isotopía H'' de U y una pareja $(g, H'_1 H''_1(A))$ que cumple las propiedades ii) y iii). Extendamos a M por medio de la identidad. Componiendo las dos isotopías obtenemos el resultado deseado.

Transversalidad. Supongamos que tenemos un disco que cumple las condiciones de la proposición anterior y en el que los puntos dobles y triples localmente se vean como intersección de planos de dimensión 2 como se muestra en las figuras 2.2a y b. A esta propiedad se le llama transversalidad. La definición es la siguiente:

Decimos que $f: X \rightarrow Y$ es transversa en el punto doble (o triple) $y \in Y$ si existen hiperplanos $A_1, \dots, A_3$ $2 \leq i \leq 3$ que pasan por el 0 y $\dim A_j = 2$, una vecindad N de y en Y y una inmersión $h: K \rightarrow R^3$ con $h(y) = 0$ y tal que hf lleva a una vecindad de x_j $f''(y)$ en una vecindad del 0 en A_j .

Proposición 2.4 Sea D un disco de Dehn contenido en M , entonces existe (f', D') con D y D' isotópicos y f' transversa en los puntos dobles y triples.

Dem Supongamos que $y \in D$ es un punto en el cual no se cumple la transversalidad. Localmente y se ve como la intersección tangencial de dos planos como se observa en la figura 2.3.

Tomemos una triangulación K de D que tenga a y como vértice y

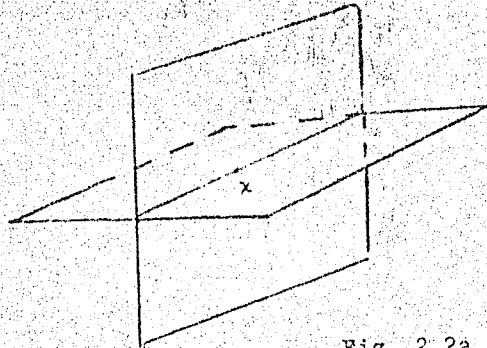


Fig. 2.2a punto doble transversal

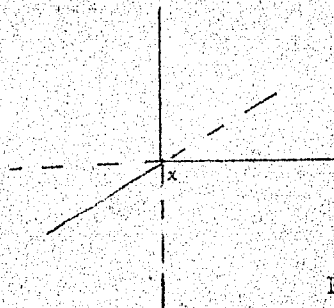


Fig. 2.2b punto triple transversal

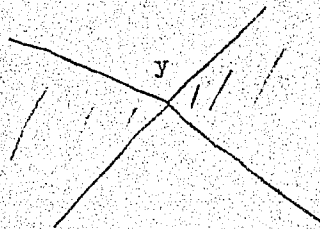


Fig. 2.3a

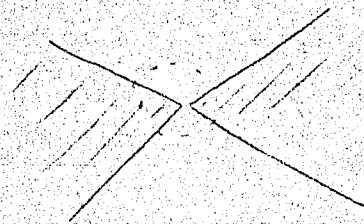


Fig. 2.3b

Sea V una vecindad de y tal que $\text{sty} \subset V$. Sustituimos y por dos nuevos puntos y' y y'' de tal manera que al extender este movimiento a sty no se introduzcan nuevas singularidades. Por la proposición 2.1 este movimiento es el final de una isotopía con soporte compacto. Procediendo de igual manera para los puntos triples en los cuales f no sea transversa obtenemos un disco $D' = f'(\Delta)$ tal que f' cumple transversalidad y una isotopía de M que lleva a D en D' .

Nótese que de esta manera hemos eliminado puntos dobles y triples aislados o sea que los puntos dobles transversales se encuentran formando curvas dobles las cuales pueden ser abiertas o cerradas y los puntos triples transversales están en la intersección de dichas curvas.

Ahora supongamos que tenemos un punto rama $p \in D$. Por definición p es un punto no singular, pero toda vecindad de p contiene puntos singulares. Un punto rama resultará ser el extremo de un arco doble como se muestra en la figura 2.4. Un punto rama se reconoce por lo siguiente: Si se toma una pequeña esfera S con centro en p , la intersección de ésta con D será una curva no singular.

En general si tenemos un punto $x \in D$ y tomamos una 2-esfera S con centro en x y llamamos L a $D \cap S$ se pueden presentar las situaciones siguientes:

- 1) L es una curva no singular o L es una sola curva singular, en el primero de los casos x es un punto no singular (Fig 2.5a) y en el segundo un punto rama.
- 2) L esta formada por la unión de dos curvas singulares que se intersectan entre si. En este caso x es un punto doble (Fig. 2.5b)
- 3) L esta formada por 3 curvas no singulares ajenas entre si.
- 4) Varias curvas singulares las cuales se intersectan entre si.

Por medio de movimientos lineales como los que se han llevado a cabo anteriormente el caso 2) se puede reducir al caso 1) obteniendo entonces un disco isotópico al original. Del mismo modo el caso 3) (Fig 2.5c) en el cual x es un punto triple se puede reducir al caso 2) y por lo tanto al caso 1). Por medio de inducción y el caso 3) el caso general o sea 4) es reducido al caso 1) desapareciendo de esa manera los puntos de $\Sigma(f)$ para $n \geq 3$ (Ver fig. 2.5d) y siempre el nuevo disco que obtenemos será isotópico a D .

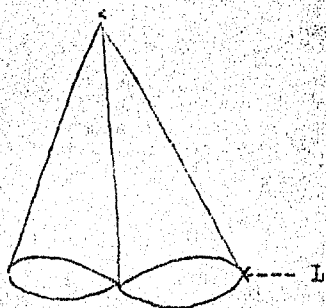


Fig. 2.4

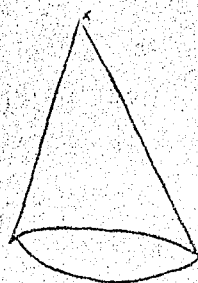


Fig 2.5a

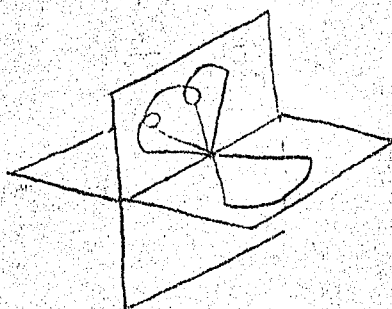


Fig. 2.5b

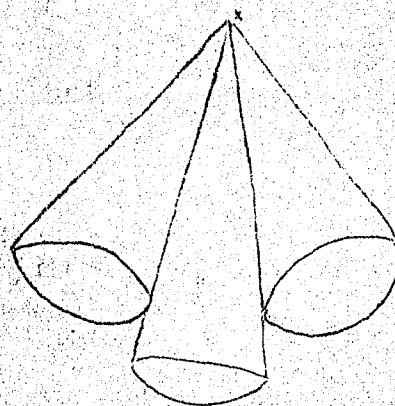


Fig. 2.5c

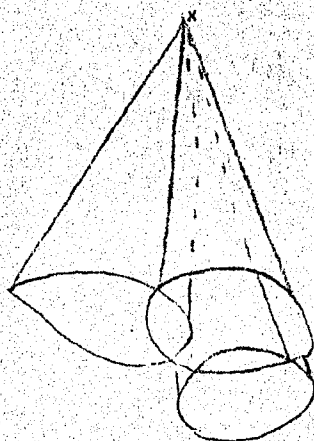


Fig. 2.5d

Utilizando esto último y los resultados de las proposiciones anteriores se concluye la siguiente proposición:

Proposición 2.5 Dado un disco de Dehn contenido en M , existe un par (f', D') tal que las únicas singularidades en D' son dobles líneas transversales, puntos triples transversales y puntos rama.

Un disco con las características anteriores se dice que está en posición normal. Podemos suponer que cualquier disco D contenido en M está en posición normal.

{ 3 Reducción de un punto rama.

Cortes de Dehn.-

Dada la transversalidad de las singularidades en un disco D en posición normal, no bastan movimientos isotópicos para eliminarlas y por lo tanto será necesario aplicar otros métodos. El método que usaremos se denomina "cortes de Dehn" lo cual consiste en cambiar las singularidades transversales por unas de tipo tangencial. Este cambio altera las propiedades de $f: \Delta \rightarrow D$ pero no la imagen $f(\Delta)$.

Un corte de Dehn a lo largo de un segmento ab contenido en una curva doble de D consiste en lo siguiente:

Supongamos que $a'b' \cup a''b'' = f'(ab)$. Observemos que ab está en la frontera de cuatro pequeños rectángulos x, y, z, w y $a'b' \subset f''(xoy)$ y $a''b'' \subset f''(zow)$. Al cortar xoy y zow a lo largo de ab , hemos cortado $f'(xoy)$ y $f''(zow)$ obteniendo en lugar de $a'b'$ y $a''b''$ cuatro segmentos $c' \subset f''(x)$, $d' \subset f''(y)$, $c'' \subset f''(w)$ y $d'' \subset f''(z)$ los cuales identificaremos de alguna de las siguientes maneras:

- i) c' con d' y d'' con c'' . (Fig. 3.2a)
- ii) c' con c'' y d' con d'' . (Fig 3.2b)

Al aplicar f obtenemos un nuevo disco en el cual la transversalidad ha sido sustituida por tangencia.

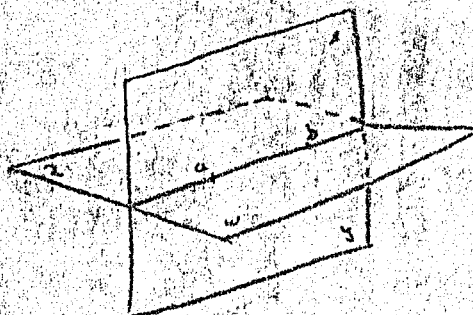


Fig. 3.1a

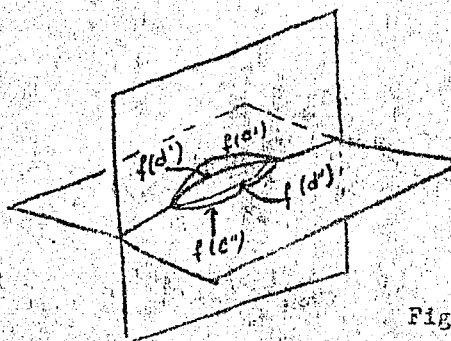


Fig. 3.1b

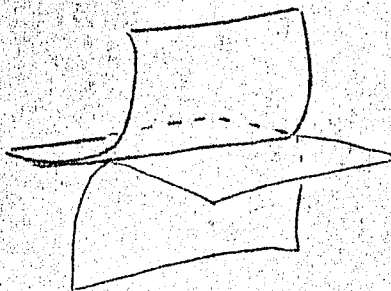


Fig. 3.2a

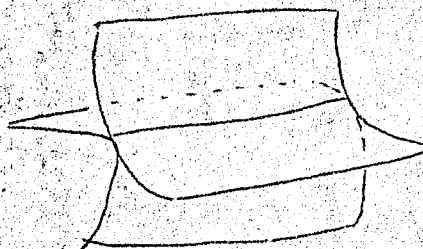


Fig 3.2b

Supongamos p es un punto rama de D . Sea una pequeña esfera con centro en p , entonces $L \cap \partial D$ es una curva cerrada no simple.

El número de singularidades de L es la multiplicidad de p y se denota $m(p)$.

Supongamos que $m(p) > 1$. Tomemos B una bola de dimensión 3 con centro en p . Hagamos un corte que empiece en p y termine en un punto $p' \in B$, como se muestra en la figura 3.3 e identifiquemos $\bar{op}$ con $\bar{oq}$. Obtenemos un nuevo disco D' el cual no está en posición normal pero aplicando los resultados de la sección anterior obtenemos un nuevo disco D'' en posición normal y que cumple las siguientes condiciones:

i) $m(p') = 1$

ii) En vez de p obtenemos dos puntos p'' y p''' tales que $m(p'') < m(p)$ y $m(p''') < m(p)$. (Ver Fig. 3.4)

iii) D'' es una deformación de D .

Propiedades i) y ii) son obvias, para demostrar iii) tomemos $A \subset B$ un cono con vértice en p y que contenga a p' en su interior.

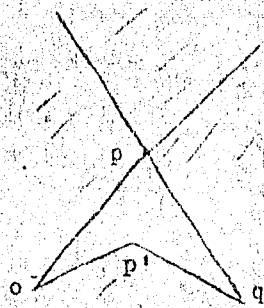
Sea A' otro cono con $\text{int} A \subset A'$. Tomemos la homotopía que contrae a A al punto p y extendámosla linealmente a $A' - A$ de tal manera que en la $B \cap A'$ sea la identidad. Extendamos la homotopía a todo M por medio de la identidad y así queda probado que D es una deformación de D' . Tomando la homotopía inversa y componiendo con la isotopía de D' a D'' obtenemos el resultado deseado.

Aplicando el mismo proceso a $p'', p''', \dots$, etc., se demuestra el siguiente:

Lema 3.1 Dado un disco D en posición normal existe un disco D_0 en posición normal el cual es obtenido por deformación de D y en el que todos sus puntos rama tienen multiplicidad 1.

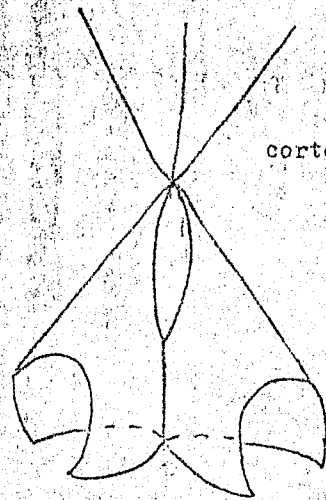
Para finalizar esta sección procederemos a eliminar puntos rama cuya multiplicidad sea 1. Supongamos que tenemos una curva doble $\tilde{L} \subset D$ cuyos extremos finales son puntos rama p y e con $m(p) = m(e) = 1$. Si $\tilde{L}$ contiene puntos triples (Ver Fig. 3.5) empecemos a cortar por uno de los extremos a lo largo de $\tilde{L}$ y paremos hasta que se haya cortado a través de todos los puntos triples e identifiquemos como se muestra en la Fig. 3.6.

Una vez eliminados los puntos triples sigue habiendo una curva doble $\tilde{L}'$ con puntos rama p' y e resp. Empecemos otro cor-



corte en Δ

Fig. 3.3



corte en D

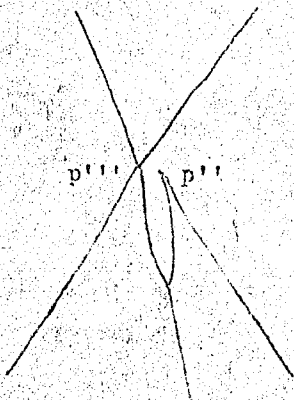


Fig. 3.4

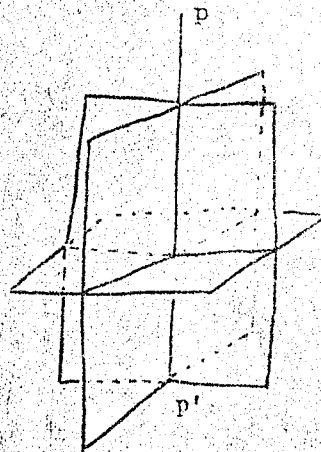


Fig. 3.5

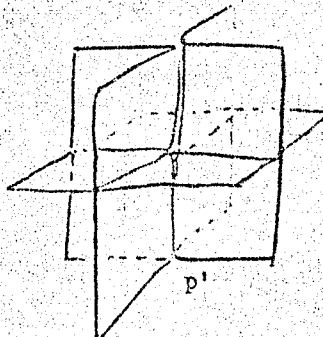


Fig. 3.6

te a lo largo de $\tilde{L}'$ continuándolo hasta e . Obtenemos cuatro arcos $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2$ en Δ (Ver Fig. 3.7). Identifiquemos γ_1 con β_1 y γ_2 con β_2 y obtendremos dos superficies, una de ellas sin frontera y la otra un disco D' con menos puntos rama que D .

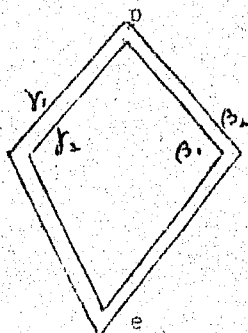


Fig. 3.7

Repetiendo el mismo proceso para todos los puntos rama de D obtenemos un disco D^* en posición normal tal que $BdD^* = BdD$ y D^* no tiene puntos rama. O sea hemos demostrado el siguiente

Lema 3.2 Dado un disco de Dehn en posición normal D existe un disco D^* con $BdD = BdD^*$ y tal que sus únicas singularidades son curvas dobles y puntos triples.

Un disco que este en posición normal y que no tenga puntos rama se llamara canónico.

§ 4 Eliminación de curvas dobles que no se cortan a si mismas

Sea (f, D) un disco de Dehn canónico en una 3-variedad M . En esta sección procederemos a eliminar por medio de cortes curvas dobles en D que no tengan puntos triples. Como por hipótesis BdD es simple dichas curvas son cerradas.

Considerese una orientación para Δ y la orientación inducida en $f(\Delta)$. Supongamos que J es una curva cerrada en D , existen dos posibilidades:

- i) $f^{-1}(J)$ tiene dos componentes J_1 y J_2 .
- ii) $f^{-1}(J)$ es conexa.

En el caso i) tenemos dos discos D_1, D_2 con $BdD_1 = J_1$. El caso i) se divide en dos: ia) $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y ib) $D_1 \subset \text{int } D_2$.

Como J_1 es homotópicamente nula y f/J_1 es un homeomorfismo, entonces la trayectoria descrita por J es homotópica a 0 y por lo tanto preserva orientación. Entonces i) se da tanto en variedades orientables como no orientables.

En el caso ii) J se obtiene de identificar antipodalmente puntos de una sola curva cerrada simple. Sea T una vecindad regular de J en M ; localmente T es homeomorfa a $B^2 \times I$ y $T \cap J$ a la intersección de dos planos en $B^2 \times I$ (Fig 4.1). Como J es cerrada debemos identificar $B^2 \times \{0\}$ con $B^2 \times \{1\}$. Investigando las diferentes formas en que se puede llevar a cabo dicha identificación de tal manera que $D \cap T$ resulte ser la imagen bajo f de una vecindad de $f^{-1}(J)$, vemos que esencialmente hay dos: una de ellas la que identifica el segmento $\overline{ab}$ con $\overline{bd}$ y $\overline{bd}$ con $\overline{ac}$ y la otra la que identifica $\overline{ac}$ con $\overline{bd}$ y $\overline{bd}$ con $\overline{ca}$.

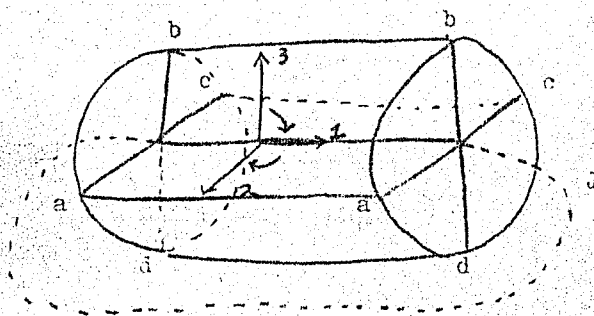


Fig. 4.2

Sea Δ un triedro orientado en T y transportémoslo a lo largo de J de tal manera que $\hat{\Gamma}$ continúe siempre sobre J y la orientación inducida por el triedro en cada hoja sea la misma que se induce desde Δ . Entonces es fácil ver que en el primer caso la identificación preserva la orientación en D pero cambia la de T , y en el segundo la orientación de D es cambiada. Como D es orientable este último caso no se puede dar y además se tiene que ii) sólo es posible en las variedades no orientables.

Proposición 4.1 Dado un disco de Dehn canónico (f, D) , existe otro disco (f', D') sin curvas cerradas simples.

Dem.

Caso 1a) Supongamos que J es una curva doble en D con $f^{-1}(J) = J_1 \cup J_2$

y $J_1, J_2 = \emptyset$. Hagamos un corte a lo largo de J como se muestra en la figura 4.3. Despues de hacer los dos tipos de identificaciones una de ellas corresponde a un disco singular (Fig. 4.4a) y la otra da como resultado un toro como se muestra en la Fig. 4.4b.

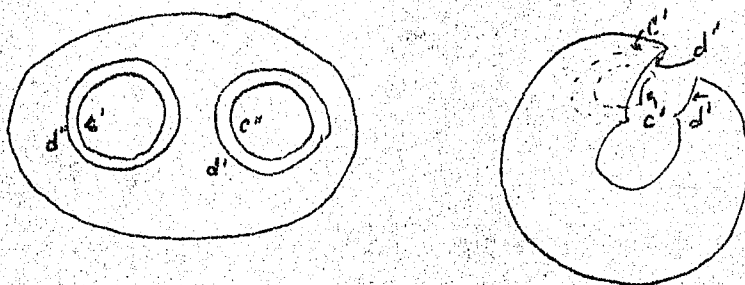


Fig. 4.3

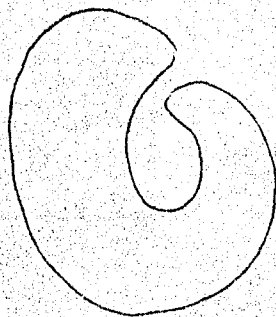


Fig. 4.4a

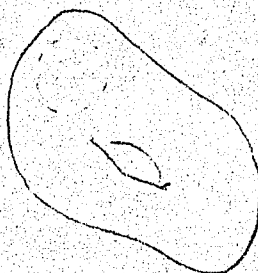
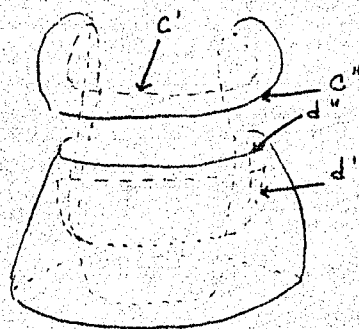
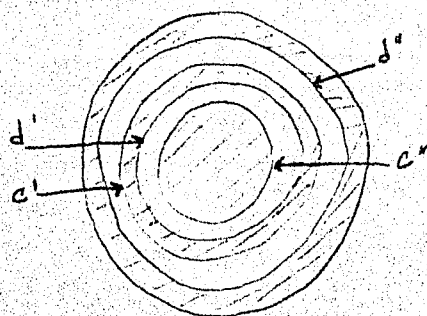


Fig. 4.4b

Caso ib) Como en el caso anterior hacemos un corte a lo largo de J solamente que ahora al identificar de las dos maneras obtenemos un disco (Ver Figs. 4.6 a y b)



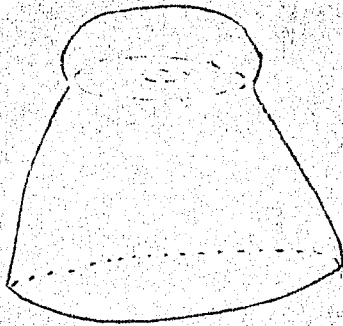


Fig. 4.6a

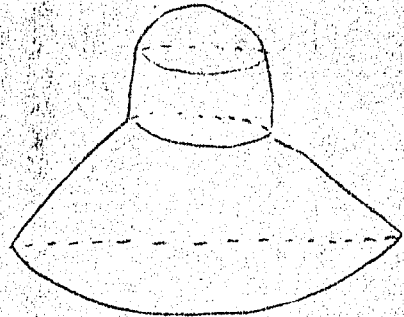


Fig. 4.6b

Caso ii) Supongamos que J es la imagen de una sola curva cerrada simple J' . Al cortar a lo largo de J obtenemos dos componentes de D , A y A' (Fig. 4.7). Sean $f: A' \rightarrow A$ una rotación de 180° en sentido positivo, identifiquense BdA' con $(BdA - Bd)$ y aplíquese f . Es claro que f es compatible con la identificación, y que de esta manera la curva singular desaparece.

Notese que en los tres casos $BdD = BdD'$.

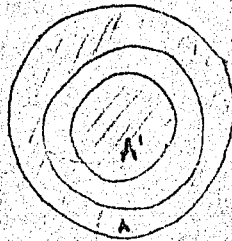
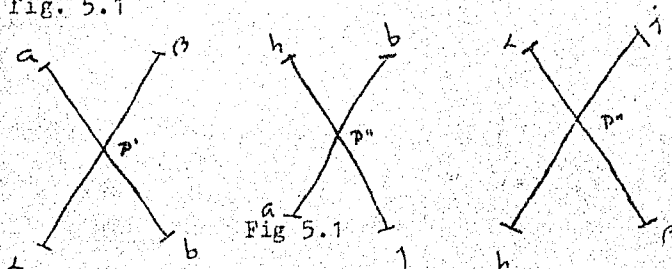


Fig. 4.7

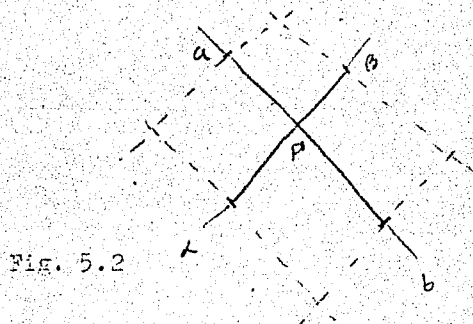
5 Diagramas de Johanson.

Sea (f, D) un disco de Dehn canónico carente de curvas dobles y llamemos $J=J_1 \cup J_2 \dots \cup J_n$ al sistema de curvas dobles de D . Existe entonces $f: \Delta \dashrightarrow D$ tal que:

- La preimagen de J está formada por un sistema de curvas (no necesariamente simples) $H=H_1 \cup \dots \cup H_n$ y f identifica H_i con H_j (pudiendo ser $i=j$).
- Si dos curvas de H se cortan lo hacen transversalmente y en puntos dobles, que designaremos con letras mayúsculas.
- Sobre cada curva de H hay al menos un punto doble.
- En consecuencia la preimagen de un punto triple P de D consta de tres puntos P', P'', P''' en Δ . Las identificaciones de las curvas de H en las cercanías de P', P'' y P''' están sugeridas en la fig. 5.1



Llamaremos diagrama de Johanson a un disco Δ con un sistema de curvas $H=H_1 \dots H_n$, que cumplen las condiciones a)...d) etiquetadas del modo sugerido por la Fig 5.1. Los puntos a, b, h, j, i, β se llaman adyacentes. Curvas paralelas a H que pasan por los puntos adyacentes se llaman vecinales. En la fig. 5.2 las curvas punteadas son vecinales.



La figura 5.3 nos muestra una parte típica de un diagrama de Johanson

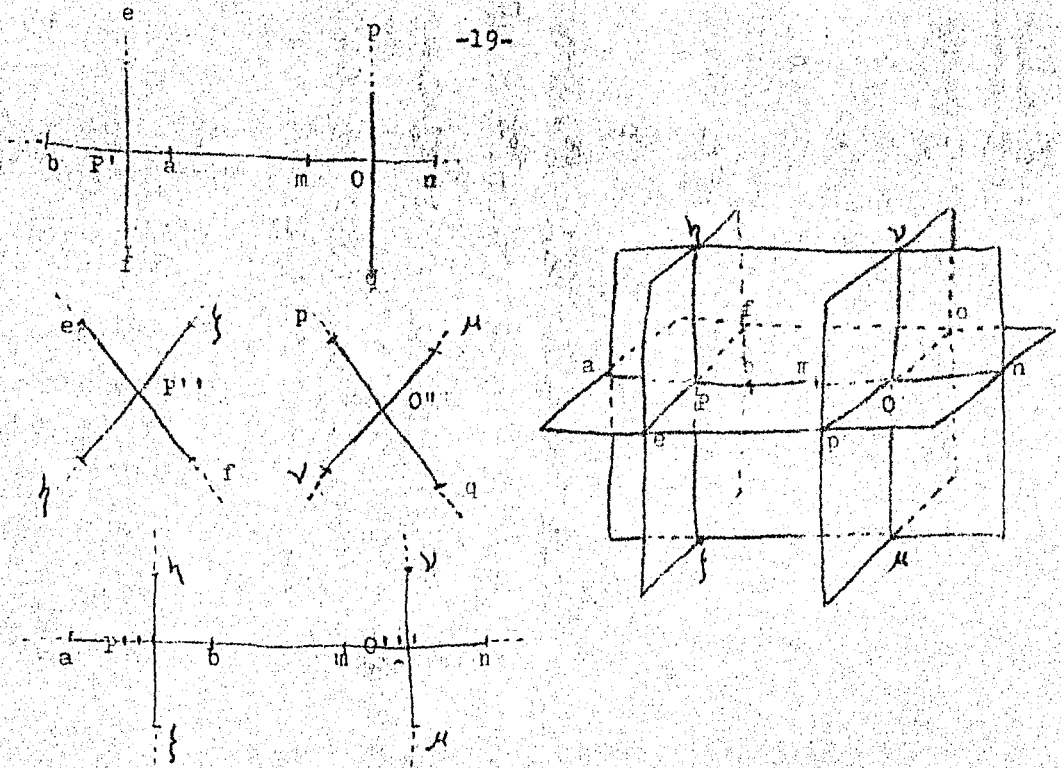


Fig. 5.3

Un diagrama de Johanson que corresponde a un disco singular en una variedad se llama realizable.

Dehn creyó que su teorema era falso porque dió un diagrama al cual no se le pueden quitar las singularidades, pero Johanson demostró que ese diagrama no era realizable. En la figura 5.4 mostramos el diagrama que dió Dehn como posible contraejemplo al lema.

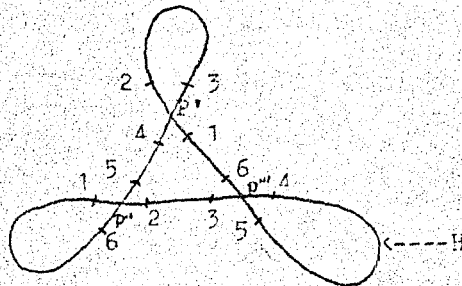


Fig. 5.4

En este ejemplo las singularidades no se pueden remover por medio de cortes de Dehn. Empezamos un corte por uno de los bucles, por ejemplo por el que contiene al 4 y al 5 (Ver Figs 5.5a y b). Después del corte si efectuamos las distintas identificaciones nunca obtendremos un disco singular sino lo que obtendremos será un toro.

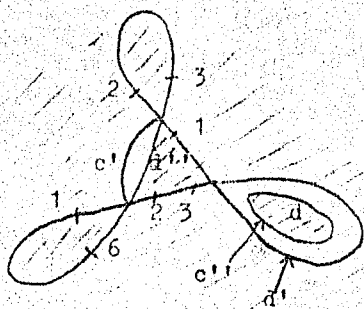


Fig. 5.5a

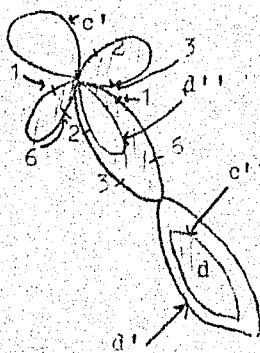


Fig. 5.5b

{ 6 Posibilidad de Realización de un diagrama de Johanson

Sea (Δ, f, D) un disco de Dehn canónico.

Definición.— Entenderemos por una hoja $\mathcal{H}$ la imagen de una vecindad regular N en Δ de un circuito cerrado k contenido en Δ que puede ser no simple. La imagen de k se llama ánima de la hoja y la denotaremos por $\mathcal{H}(A)$. Esta curva preserva la orientación de M pues es contractible en M .

Una indicatriz $J(\mathcal{C}, \uparrow)$ está formada por un círculo orientado $\mathcal{C}$ sobre D con centro en J , y una flecha $\uparrow$ en D con su origen en el centro de $\mathcal{C}$, tal que:

- a) el centro de $f^{-1}(\mathcal{C})$ y el origen de $f^{-1}(\uparrow)$ son distintos.
- b) La punta de $f^{-1}(\uparrow)$ está en una curva vecinal
- c) Si el origen de $f^{-1}(\uparrow)$ es un punto doble entonces la punta es un punto adyacente.

Transporte de una indicatriz a lo largo de una hoja. Sea una indicatriz $J(\mathcal{C}, \uparrow)$ con el círculo sobre la hoja $\mathcal{H}$, transportamos la indicatriz a lo largo de $\mathcal{H}$ cuando lo hacemos de modo que $\mathcal{C}$ no salga de $\mathcal{H}$, recorriendo todo el circuito $\mathcal{H}(A)$. El centro de $f^{-1}(\mathcal{C})$ recorre entonces el circuito $k \subset \Delta$; y el origen $f^{-1}(\uparrow)$ recorre los segmentos de H que junto con k se identifican para dar

$\mathcal{H}(A)$ (Ver figs. 5.1 a y b). Nótese que $f'(\uparrow)$ despues del transporte no puede volver revertido si el diagrama es realizable pues $\mathcal{H}(A)$ preserva la orientación de M .

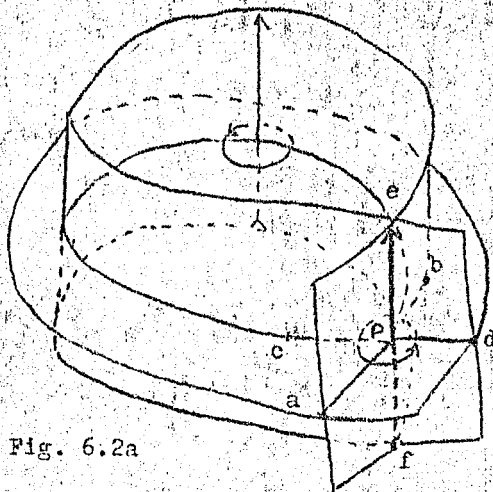


Fig. 6.2a

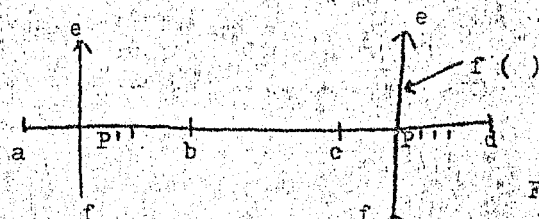
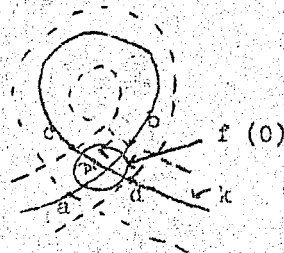


Fig 6.2b



El transporte de una indicatriz define una relacion de equivalencia en el conjunto R de puntos adyacentes del siguiente modo: dos puntos adyacentes son equivalentes si y solo si hay una hoja $\mathcal{H}$ y una indicatriz $J(\mathcal{H}, \uparrow)$ sobre J tal que al transportar a lo largo de $\mathcal{H}$, la punta de $f'(\uparrow)$ pasa por esos dos puntos adyacentes. Nótese que dos puntos adyacentes con misma denominación son claramente equivalentes.

Por ejemplo en la figura 6.2 hay dos clases de equivalencia mientras que en la figura 5.5 (el contraejemplo de Dehn) habrá solo una. En ejemplos más complejos podemos distinguir más de dos clases.

Unicamente hay que verificar la propiedad transitiva y para ello basta demostrar que la unión de hojas que resulte conexa, es una hoja. Como la unión es conexa, entonces sera la imagen de vecindades regulares de curvas cerradas del diagrama que se cortan

entre si y por lo tanto será una hoja.

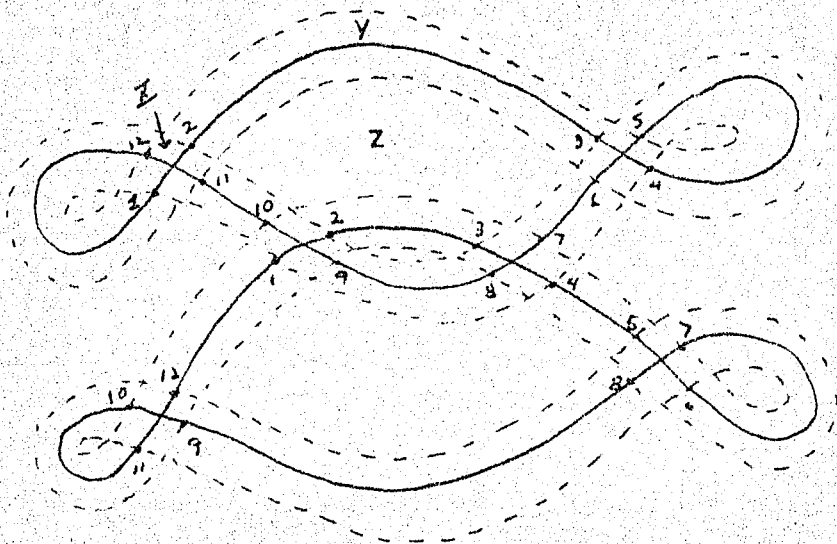


Fig 6.2

Las clases son $[1,4,5,8,9,12]$ y $[2,3,6,7,10,11]$

Teorema 6.1 Una condición necesaria y suficiente para que un diagrama sea realizable es que una clase no contenga puntos adyacentes opuestos.

Necesidad: Supongamos que haya puntos adyacentes opuestos a y b en una misma clase, entonces por definición existe una indicatriz $J(C, \uparrow)$ tal que al transportarla a lo largo de Δ la punta de $\uparrow$ pasa por $f(a)$ y $f(b)$, esto significa que $\uparrow$ vuelve revertida lo cual es imposible.

Suficiencia Supongamos que una clase no contiene puntos adyacentes opuestos. Lo que se quiere demostrar es que existe una 3-variedad U en la cual podemos sumergir Δ realizando el diagrama. Se procederá a construir dicha variedad por medio de un algoritmo que se dará a continuación y que ilustraremos en el diagrama de la figura 6.2.

Las curvas vecinales a las curvas de H dividen a Δ en tres tipos de regiones X, Y, Z que son descritas como sigue:

1) Las regiones triples X son vecindades de los puntos de inter-

sección de las curvas de H .

2) regiones dobles Y , vecindades de trozos de curvas de H comprendidas entre puntos adyacentes consecutivos.

3) regiones simples $z = \Delta - XY$.

La frontera de estas regiones es igual al borde de Δ y a la reunión de las curvas vecinales.

Sea $\Delta \times I$ el producto de Δ con el intervalo $I = [-1, 1]$, entonces $\Delta \subset \Delta \times I$. En $\Delta \times I$ tendremos también las regiones IX, IY y IZ que corresponden respectivamente a $X \times I, Y \times I$ y $Z \times I$. A la tapa de $\Delta \times I$ la llamaremos Δ' y a la base Δ'' . A las proyecciones de IX, IY y IZ en la tapa las llamaremos X', Y' y Z' resp. y a las proyecciones en la base X'', Y'' y Z'' resp. Así mismo llamaremos IX', IY' y IZ' a las regiones comprendidas entre X y X', Y y Y', Z y Z' , y IX'', IY'' y IZ'' a las regiones comprendidas entre X y X'', Y y Y'', Z y Z'' . A cada punto x en la intersección de dos curvas de H le corresponderán ahora 6 puntos adyacentes: los 4 puntos adyacentes comprendidos en Δ más dos nuevos puntos adyacentes situados uno en Δ' y otro en Δ'' resp. A estos dos puntos adyacentes les asignaremos los símbolos que faltaban, así por ejemplo en el diagrama que estamos considerando a el punto que tiene como puntos adyacentes en Δ el 11, 12, 1 y 2 se le agregan el 9 y 10. Para determinar que punto debe estar en Δ' y cual en Δ'' lo que se hará será reunir puntos de la misma clase en la misma superficie tapa o base. En el diagrama de la fig. 6.2 la clase $\{1, 4, 5, 8, 9, 12\}$ estará en la tapa y la clase $\{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$ en la base. Para distinguirlos a los puntos de la tapa les asignaremos $*$ y a los de la base $**$.

Extenderemos f a $\Delta \times I$ de tal manera que las regiones IX e IY se identifiquen entre si como se indica a continuación:

a) En las regiones triples puntos adyacentes con misma denominación se identifican entre si lo mismo que las curvas adyacentes comprendidas entre dichos puntos. Entonces si IX', IX'' e IX''' son regiones triples con $P' \in X', P'' \in X'', P''' \in X'''$ y $f(P') = f(P'') = f(P''')$, IX', IX'', IX''' se identifican como se muestra en la figura 6.3.

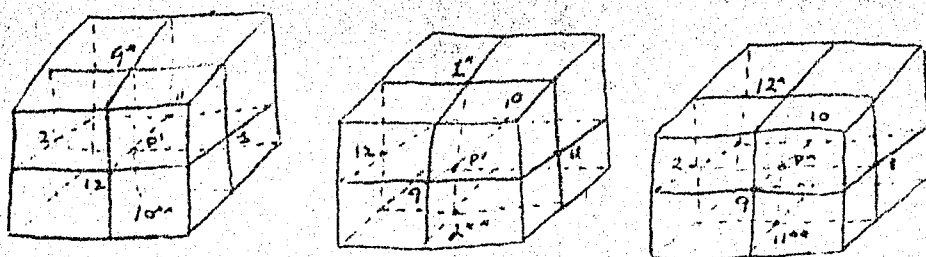


Fig. 6.3

b) En las regiones dobles IV la identificación se hace del siguiente modo:

Tomemos una curva vecinal V_i que una a los puntos a_i y a_j . A las proyecciones $V_i' \subset \Delta'$ y $V_i'' \subset \Delta''$ las denominaremos $a_i a_j^*$ y $a_i a_j^{**}$ resp. donde a_i^* y a_j^{**} son los puntos adyacentes cerca de a_i que están en Δ' y Δ'' resp. En la figura 6.3 V es la curva que une a 11 con 6. Entonces V' es denominada $(11)1^*$ y V'' $(11)2^{**}$; las mismas curvas podrían haberse denominado 64^* y 63^{**} resp. pero para evitar ambigüedades si una curva está orientada de a_i a a_j las curvas respectivas serán denominadas $a_i a_j^*$ y $a_i a_j^{**}$ resp.

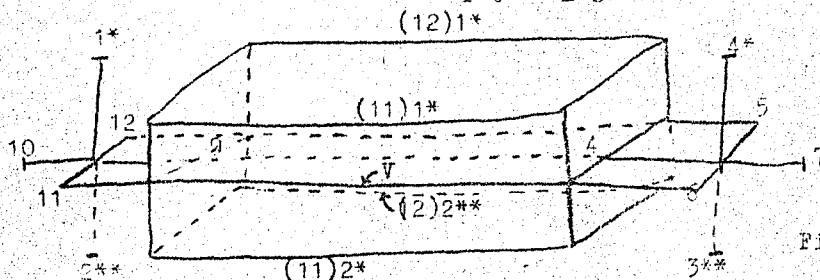


Fig 6.4

La curva $a_i a_j^*$ se identificará con la curva $a_j a_i^*$ ó $a_j a_i^{**}$ (dependiendo de que clase pertenezca a_i). Extendamos a la frontera de IV de tal modo que curvas con misma denominación se identifiquen. Esto puede hacerse porque dos cualesquiera aristas que están sobre una misma cara de borde en IV pasan por puntos adyacentes opuestos y tienen asociadas dos aristas con igual propiedad en el prisma correspondiente. Por ejemplo en la figura 6.6 las curvas se identifican del siguiente modo: 54^* con 45^* , 64^* con 46^* , 63^{**} con 36^{**} y 53^{**} con 35^* . Al extender esta identificación al int. de las regiones IV estas se identifican de dos en dos tras rotaciones de 90° (seguidas en el caso más general

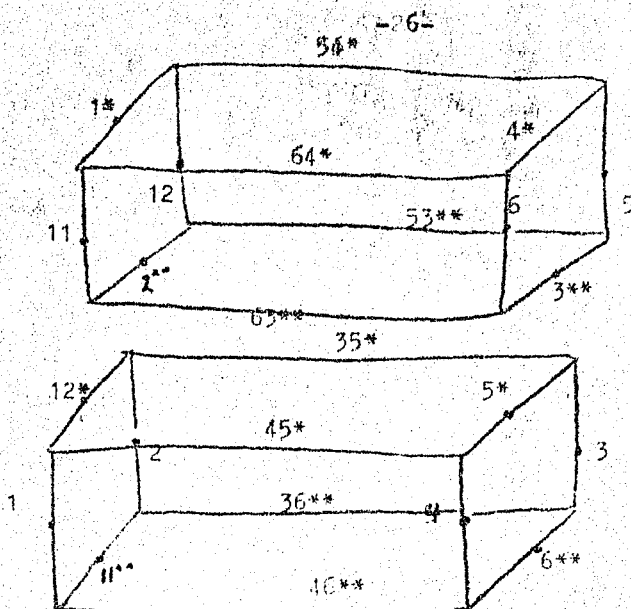


Fig. 6.6

c) Las regiones simples no se identifican.

Llamemos V al espacio obtenido mediante las identificaciones a), b) y c), y sea $F: \Delta \times I \rightarrow V$ la proyección natural. Es inmediato que V es una 3-variedad compacta la cual puede ser o puede no ser orientable según que las identificaciones a), b) y c) preserven o no la orientación. La $BdV = F(\text{lados laterales de } \Delta I) \cup F(\text{regiones } Z' \text{ y } Z'')$ ya que tanto X', X'' como Y', Y'' se identifican con regiones en el $\text{int} \Delta \times I$. Se tiene entonces que $BdD \subset BdV$ y que $\text{int} D \subset \text{int} V$. Con esto queda demostrada la segunda parte del teorema.

Nótese que V es una vecindad regular de D y que por lo tanto D es un retracto por deformación de V .

§ 7 Reducción al caso en que M sea orientable.

Sea D un disco singular en una 3-variedad M y H el diagrama asociado a él. Consideremos una vecindad V de D como la que se construyó en la sección anterior ($V = F(\Delta \times I)$ donde I es un intervalo de longitud ε). Como hemos visto V puede ser orientable o no, en esta sección veremos que si el lema de Dehn se cumple para las variedades orientables también se cumple para las que no lo son. Para esto se procederá a construir una variedad U orientable con la propiedad de ser una cubierta doble de V y en la cual habrá un disco D^* con menos singularidades que D .

Sea J una curva doble en D y $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ las hojas que se intersectan en J , entonces sobre J tenemos dos indicatrices como se muestra en la fig. 7.1, la indicatriz en la cual el círculo se encuentra sobre $\mathcal{H}$ y esa que el círculo se encuentra sobre $\mathcal{H}'$.

Definición. - Una curva se llama principal si al rotar una de las dos hojas 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, las dos indicatrices coinciden. Una curva es secundaria si las dos indicatrices no coinciden. (Ver figs. 7.2a y b)

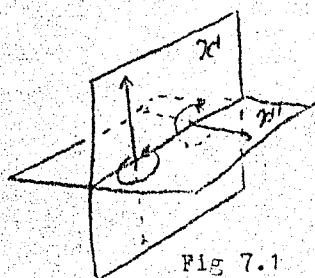


Fig 7.1

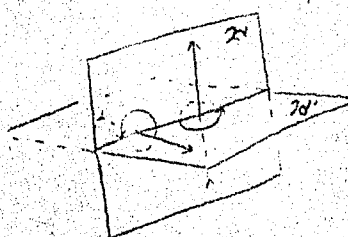


Fig 7.2a curva principal

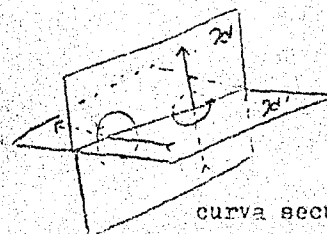


Fig 7.2b

curva secundaria

Sea P un punto triple en D ; en P coinciden tres hojas, cada una con una indicatriz de orientación. Examinando como coinciden estas últimas en P vemos que solo hay dos casos:

- 1) Todas las indicatrices coinciden,
- 2) dos coinciden y una no.

En el primer caso el punto es llamado principal y en el segundo secundario (figs. 7.3 a y b)

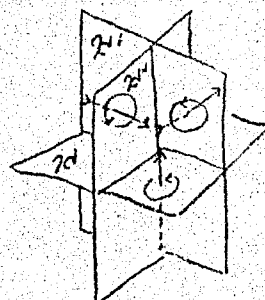
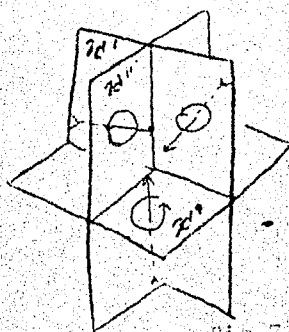


Fig. 7.3b
Punto secundario

Proposición 7.1 Por un punto principal pasan tres curvas principales y por uno secundario 2 curvas secundarias y una principal.

Dem. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ las hojas que se intersectan en P . Si P es principal, entonces las indicatrices de las tres hojas coinciden y por lo tanto las curvas respectivas son principales. Si P es secundario entonces la indicatriz de una de las hojas, digamos $\mathcal{X}$ no coincide con la de las hojas $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$, por lo tanto $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ son curvas secundarias, mientras que $\mathcal{X}$ es curva principal.

Supongamos que transportemos una indicatriz a lo largo de una curva principal de tal manera que $\mathcal{C}$ esté sobre $\mathcal{X}$, y al llegar a un punto secundario continuamos a lo largo de una curva secundaria de tal manera que $\mathcal{C}$ salte a la hoja $\mathcal{X}'$ induciendo en ésta la misma orientación que $\mathcal{C}$ desde Δ , entonces $\uparrow$ se revierte, o sea que las curvas secundarias cambian la orientación de V .

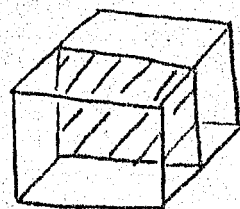
Proposición 7.2. Si V es no orientable entonces en D hay curvas principales y curvas secundarias.

Dem. Por la proposición 7.1 todo punto triple es atravesado por al menos una curva principal. Si solamente hubiera curvas principales, en D no habría circuitos que cambiaran la orientación de V y por lo tanto en esta última tampoco debido a que D es un retracts de V , pero esto implicaría que V es orientable lo cual es una contradicción.

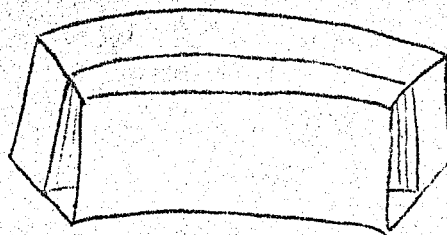
Definición.- Un subconjunto H' de H es un subdiagrama de H si las curvas contenidas en el forman un diagrama.

De la proposición 4.1 se sigue que el subconjunto H' de curvas principales es un subdiagrama de H .

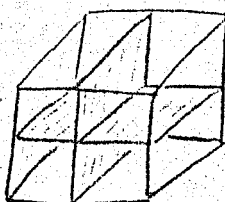
Sea $R=F(IX)$, $S=F(IY)$, y $T=F(IZ)$, entonces V es la unión de las regiones R, S y T . Las regiones S son vecindades de curvas dobles en las cuales se intersectan dos hojas. Si la curva es secundaria tomemos dos copias S' y S'' homeomorfas a S y cada una de las copias conteniendo una de las hojas como se muestra en la fig. 7.4. Las regiones R son vecindades de puntos triples P . Si P es secundario tomemos dos copias R' y R'' de tal manera que R' contenga a la hoja cuya indicatriz no coincide y R'' las dos hojas restantes como se muestra en la Fig. 7.5.



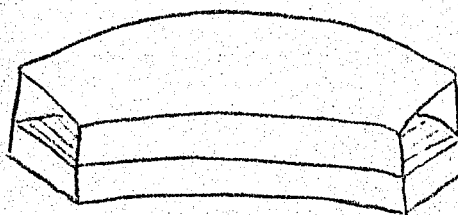
R'



S'



R''



S''

Fig. 7.4

Fig. 7.5

Sea $U =$ unión ajena de regiones S, T, R igual que en V sólo que si R contiene un punto secundario tomamos $R' \cup R''$ y si S contiene una curva secundaria tomamos $S' \cup S''$. Es fácil ver que V es una 3-variedad compacta orientable en la cual hay un disco (f', D') el cual tiene asociado el subdiagrama H' de curvas principales y que U cubre doblemente ciertas partes de V con la identificación $p: U \rightarrow V$ que cumple: $p(S' \cup S'') = S$, $p(R' \cup R'') = R$, $p(T) = T$, $p(S) = S$ y $p(R) = R$. Se tiene también que $p(D') = D$.

Supongamos que el lema de Dehn se cumple para las variedades orientables, entonces a partir de D' por medio de cortes de Dehn obtenemos un disco D^* no singular contenido en U . Entonces la proyección $p(D^*)$ será un disco en V en el cual habrán desaparecido las curvas principales y con $Bd(p(D^*)) = Bd(D)$. Por la proposición 7.1 todos los puntos triples también habrán desaparecido quedando en $p(D^*)$ únicamente curvas secundarias cerradas y sin singularidades las cuales se eliminan por medio de cortes quedando entonces un disco D^{**} no singular contenido en V y con $Bd D^{**} = Bd D$.

Entonces ha quedado demostrado el siguiente lema:

Lema 7.1 Si el lema de Dehn es válido para las variedades orientables también lo es para las que no lo son.

8 Realización de un diagrama de Johanson en una variedad orientable.

Sea (f, D) un disco de Dehn canónico y H el diagrama de Johanson asociado a él. Como se vió en § 6 los puntos adyacentes de H son clasificados en clases de equivalencia de acuerdo al siguiente principio:

a) Dos puntos adyacentes son equivalentes si y solo si existe una hoja $\mathcal{H}$ y una indicatriz $J(\mathcal{C}, \uparrow)$ sobre J de tal manera que al transportarla a lo largo de $\mathcal{H}$ $f'(\uparrow)$ toca a a y b .

En vez de la indicatriz $J(\mathcal{C}, \uparrow)$ consideraremos un triedro orientado cíclicamente (Fig. 8.1) de tal manera que:

- i) Una flecha $\uparrow_i$ (en la figura $\uparrow_i = \uparrow_1$) descansa sobre J y la punta de las otras flechas $\uparrow_j, \uparrow_k$ esté en curvas vecinas.
- ii) El origen de $f'(\uparrow_j \uparrow_i)$ y $f'(\uparrow_k \uparrow_i)$ sea diferente.
- iii) Si el origen de las tres flechas descansa sobre un punto triple, entonces $f'(\uparrow_i), f'(\uparrow_j)$ y $f'(\uparrow_k)$ tocan a puntos adyacentes.
- iv) $\uparrow_i \uparrow_j \uparrow_k$ induzcan las mismas orientaciones que f desde Δ en las hojas respectivas.

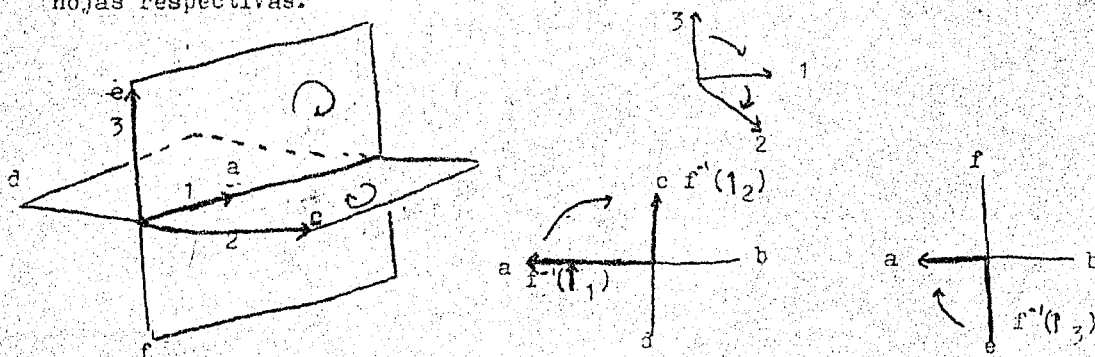


Fig. 8.1

El transporte de un triedro orientado a lo largo de una trayectoria compuesta de tramos de curvas dobles se hace de tal manera que $\uparrow_i$ siga siempre en la misma trayectoria, aunque puede cambiar de sentido, pero $\uparrow_j, \uparrow_k$ pueden girar siempre que $\uparrow_i \uparrow_j \uparrow_k$

sigan cumpliendo i), ii), iii) y iv). Nótese que si M es orientable, entonces todas las trayectorias cerradas preservan orientación y el triedro vuelve a su posición inicial de dos modos posibles: a) y b) como se muestra en las figuras 8.2a y b. Analizando las demás posibilidades vemos como se muestra en las figuras 8.2 c, d f, i que el triedro no cumple la condición iv) o la cumple pero la orientación del triedro es revertida como se muestra en las figs 8.2 e y h lo cual es posible sólo si suponemos que M no es orientable.

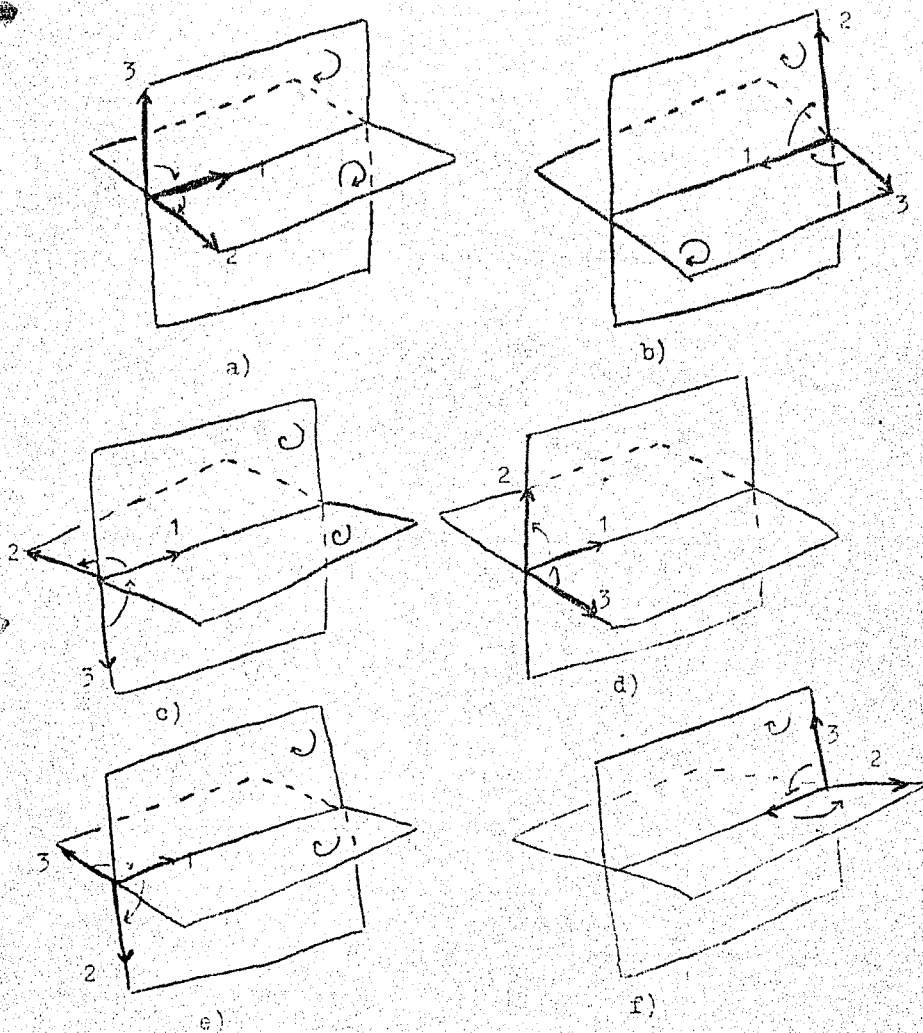
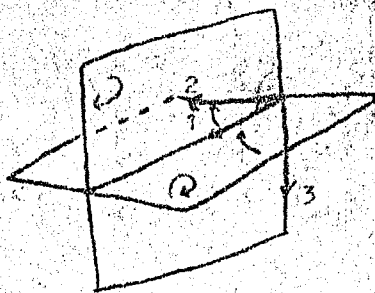
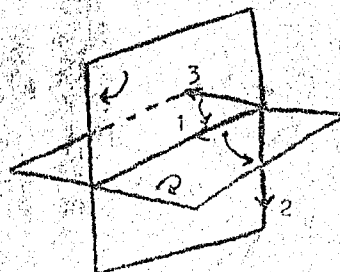


Fig 8.2



8.2h



8.2i

El hecho de que el triedro se pueda desplazar con mas libertad, nos permite introducir otro criterio para clasificar puntos adyacentes y de esta manera agrupar varias clases de equivalencia en una sola llamada clase gruesa. El criterio es el siguiente: Dos puntos adyacentes a y b son equivalentes si y solo si

- Existe una trayectoria cerrada y un triedro orientado de tal manera que al transportar este por la trayectoria, a y b son alcanzados por alguna de las flechas $f^{-1}(\uparrow_j)$, $f^{-1}(\uparrow_k)$. Claramente lo anterior es una clase de equivalencia.

Corolario

- Puntos equivalentes segun el criterio a) lo siguen siendo con el criterio b)
- Entonces las viejas clases se agrupan en clases gruesas.

Notese que los puntos z, β de la figura 8.3a son equivalentes lo mismo que λ, χ . Esto significa que el punto vecino situado a la izquierda (resp. derecha) de $\vec{ab}$ en H' es equivalente al punto situado a la derecha (resp. izquierda) de $\vec{ab}$ en H'' (Ver fig. 8.3b)

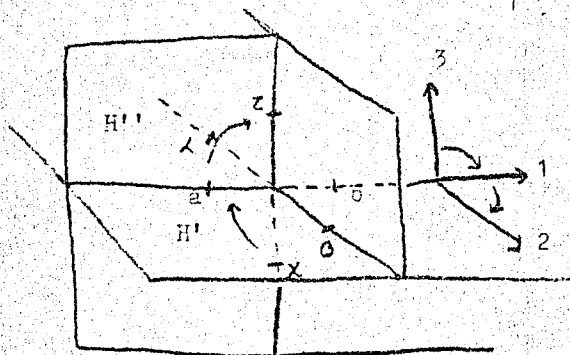


Fig. 8.3a

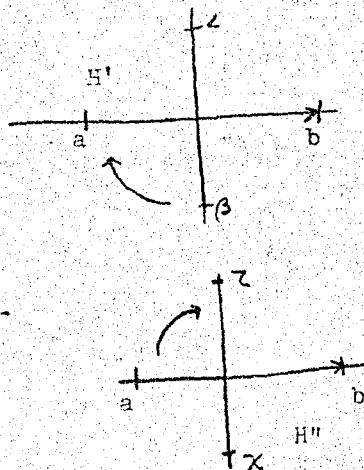


Fig. 8.3b

Proposición 8.1 Una condición necesaria y suficiente para que un diagrama H sea realizable en una variedad orientable M es que puntos adyacentes opuestos no pertenezcan a una misma clase gruesa.

Dem.

Necesidad: La necesidad resulta del hecho de que M es orientable y que por lo tanto el triedro orientado sólo puede regresar a su posición inicial de la manera a) ó b) y en ambos casos ninguna de las flechas toca puntos adyacentes opuestos.

Suficiencia: La realización del diagrama se hace como en { 6 } teniendo cuidado de agrupar las clases antiguas que estén en una misma clase gruesa en la tapa (o en la base). Solamente hace falta demostrar que M es orientable; como D es un retracto por deformación de M , es suficiente demostrar que en D no hay trayectorias cerradas que cambien orientación, esto es, en D no hay curvas secundarias. Supongamos que existiera una curva secundaria J en D , entonces en J hay un punto triple secundario P y una curva principal que cruza a J en P . Al transportar el triedro a lo largo de J de tal manera que al llegar a P siga a lo largo de la curva principal $f'(1_j)$ y $f'(1_k)$ tocan puntos adyacentes opuestos como se muestra en la figura 8.4 pero esto contradice la hipótesis y por lo tanto D no tiene curvas secundarias y por lo tanto M es orientable.

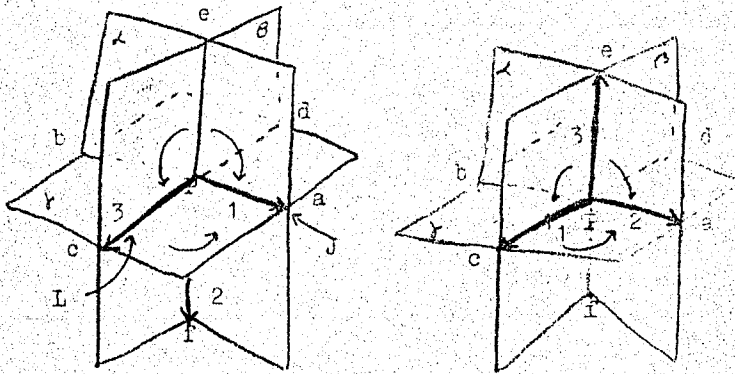


Fig. 8.4

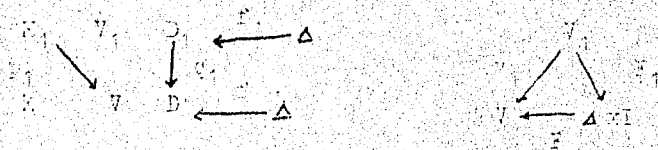
En las siguientes secciones se verá que, en el caso en que Δ es orientable, los resultados [4] de el libro de Dehn para las variedades orientables. En dicha demostración se utilizan propiedades de D de la álgebra que se deducen por inducción.

1. Lema. Sea (F, D) un disco de Dehn con ∂F una variedad orientable y sea (Δ, X) el diagrama de Dehn asociado a D . Sea $\alpha(D)$ el número de curvas simples α y $i(D)$ el número de puntos triles. Sea $\alpha(V)$ y $i(V)$ análogos del regular de D como la construido en la sección 6.

Sea $p_1: F_1 \rightarrow F$ la cubierta universal de F , sea $F_1: \Delta \rightarrow F_1$ y $H_1: \Delta \times I \rightarrow F_1$ cubren platos de F_1 y F resp. Entonces $p_1(\Delta)$ es un tipo de Dehn canónico de F que induce la relación de Dehn en D , por lo tanto existe una curva α de D . $F_1(\Delta \times I)$ es una variedad regular de D .

Sean H' y H'' en H tales que $f(H') = f(H'')$, entonces H'/H'' es un tipo de Dehn orientable. Se tiene entonces que $f_1(H') = f_1(H'')$ o $f_1(H') \neq f_1(H'')$. En el último caso existe una única transformación Z que lleva a una curva en la otra. Recíprocamente si H' es una curva simple en D , entonces $p_1(H')$ es una curva simple en F y por lo tanto existen H'' y H''' en H tales que $f_1(H'') = f_1(H''')$. De lo anterior se concluye que el conjunto de curvas $H' \in H$ con $f_1(H') = f_1(H'')$ forman un subdiagrama H_1 de H y que D_1 es un subdisco.

Sean $\alpha = \alpha_1/D_1$ y $\gamma = \gamma_1/V_1$. El siguiente diagrama en D tiene una torre elemental sobre $D \cup V \cup \Delta$.



Notese que $\alpha(D) \leq \alpha(D)$. Si V es simplemente conexo entonces $H_1 = F_1$, $D_1 = D$ y $H = H_1$, $\alpha_1 = \alpha$ y $\gamma_1 = \gamma$, son isomorfismos de la identidad y $\alpha = \alpha_1$, $\gamma = \gamma_1$. Por lo tanto $\alpha(D) = \alpha(D)$.

Proposición 1.1. Supongamos que V es simplemente conexo, entonces $p_1(D)$ es conexo.

Dem. Del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (p^{-1}(D)) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}_1(M_1) \\
 p_* \mathcal{H}_1(p^{-1}(D)) \downarrow & & \downarrow 0 \\
 \mathcal{H}_1(D) & \xrightarrow{\quad \approx \quad} & \mathcal{H}_1(V)
 \end{array}$$

se sigue que $\mathcal{H}_1(p^{-1}(D))=0$ y $\therefore p^{-1}(D)$ es simplemente conexo y por lo tanto conexo.

Por la proposición anterior y el hecho que $\mathcal{H}_1(V)$ sea diferente de 0 existe una transformación cubriente Z , tal que $D_1 \cap Z(D_1) \neq \emptyset$. Entonces $D_1 \cap Z(D_1)$ consiste de un numero finito de curvas cerradas ya que $pt=p$. Si T_1 es una de dichas curvas, entonces $p_1(T_1)$ es una curva doble en D ya que $pt(T_1)=p(T_1)$. Por lo tanto $T_1=f_1(J)$ donde $J \in H-H'$. Por lo tanto se tiene la desigualdad $d(D_1) < d(D)$. De lo anterior se concluye el lema;

Lema 9.1 Si V es simplemente conexa, entonces $d(D_1)=d(D)$ y $d(D_1) < d(D)$ si V no lo es.

El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M_m \supset V_m \supset D_m & \xleftarrow{f_m} & \Delta \\
 \downarrow p_m & & \downarrow q_m \\
 M_{m-1} \supset V_{m-1} \supset D_{m-1} & \xleftarrow{f_{m-1}} & \Delta \\
 \downarrow p_{m-1} & & \downarrow q_{m-2} \\
 M_{m-2} \supset V_{m-2} \supset D_{m-2} & \xleftarrow{f_{m-2}} & \Delta \\
 \vdots & & \vdots \\
 M_1 \supset V_1 \supset D_1 & \xleftarrow{f_1} & \Delta \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow q_1 \\
 M \supset V \supset D & \xleftarrow{f} & \Delta
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 V_m & \xleftarrow{F_m} & \Delta \\
 \downarrow v_m & & \downarrow \\
 V_{m-1} & \xleftarrow{F_{m-1}} & \Delta \times I \\
 \downarrow v_{m-1} & & \downarrow \\
 V_{m-2} & \xleftarrow{F_{m-2}} & \Delta \times I \\
 \vdots & & \vdots \\
 V_1 & \xleftarrow{F_1} & \Delta \times I \\
 \downarrow v_1 & & \downarrow \\
 V & \xleftarrow{F} & \Delta
 \end{array}$$

se llama una torre sobre D y se construye como sigue:

El diagrama m es una torre elemental sobre $D_{m-1} \leftarrow V_{m-1} \leftarrow M_{m-1}$, para $m=1..$

Por el lema 9.4 $d(D) \geq d(D_1) \geq d(D_2) \geq \dots \geq 0$ y por lo tanto existe n para la cual $d(D_{i-1}) < d(D_i)$ si $i < n$ y $d(D_j) = d(D_n)$ para $j \geq n$ y por lo

tanto V_n es simplemente conexa pero D_{n-1} no. El número es llamado la altura de la torre.

Nótese que cada disco D_i tiene asociado un diagrama H_i y $H \rightarrow H_1 \rightarrow \dots \rightarrow H_n$.

Lema 3.2 Si V es una 3-variedad simplemente conexa, entonces las componentes de BdV son esferas de dimensión 10s.

Dem. $H_1(V)=0$ por hipótesis. Por dualidad $H^1(V)=0$. Por la dualidad de Poincaré $H_2(V, \partial V) \cong H^1(V)$ y por lo tanto igual a 0. Finalmente al considerar la sucesión exacta para $(V, \partial V)$

$$H_2(V, \partial V) \rightarrow H_1(\partial V) \rightarrow H_1(V, \partial V)$$

se tiene que $H_1(\partial V)=0$. Por lo tanto las componentes de V tienen género 0 y por lo tanto son esferas de dimensión 2.

Supongamos ahora que la altura de una torre sobre D es n y que $d(D_n)=0$ y $d(D_{n-1})>0$.

Lema 3.3 El conjunto Φ de transformaciones cubrientes Z de p_n diferentes de 1 y que cumplen $Z^{-1}(D_n) \cap D_n \neq \emptyset$ es no vacío.

Dem. Como $\pi_1(V_{n-1}) \neq \emptyset$ entonces existe $Z \neq 1$. Como $p_n^{-1}(D_{n-1})$ es conexo existe Z tal que $Z(D_n) \cap D_n \neq \emptyset$.

Como D_{n-1} es canónico y p_n aplicación cubriente, entonces $Z^{-1}(D_n) \cap D_n$ consta de un número finito de curvas. Sea T' una de ellas. Entonces $Z(T')=T''$ es una curva cerrada simple en $Z(D_n) \cap D_n$ y $q_n(T')=q_n(T'')$. llamemos T_n al conjunto de curvas T' , T'' en D_n tales que $T''=Z(T')$ con $Z \in \Phi$. Es fácil ver que T_n es un diagrama de Johanson y D_{n-1} su realización, y por lo tanto existe un homeomorfismo $g_n: T_n \rightarrow H_{n-1}$ compatible con q_n y f_{n-1} .

Sea P un punto triple en D_{n-1} y P', P'' y P''' sus imágenes inversas bajo q_n . Entonces $P' \in S'' \cap T'$, $P'' \in T' \cap L'$, $P''' \in L' \cap S'$. Si σ, τ y λ son transformaciones cubrientes tales que $\sigma(S')=S''$, $\tau(T')=T''$, $\lambda(L')=L''$ entonces $\tau(P')=P''$, $\tau(P'')=P'''$ y $\sigma(P''')=P'$ y por lo tanto $\sigma \tau Z(P')=P'$. Esto quiere decir que $\sigma \tau Z = id$. Puede suceder que $T' \cap T'' \neq \emptyset$ y que $P' \in T' \cap T''$, entonces $T''=S''$ y $S'=T'$ y por lo tanto $Z^{-2}=\lambda$. Puede suceder también que $T'=S'=L'$ y $T''=S''=L''$ con lo cual se tiene que $Z^3=1$. Por lo tanto tenemos el siguiente lema:

Lema 3.4 Si existen T' y T'' en T_n con $Z(T')=T''$ y $T' \cap T'' \neq \emptyset$ entonces existen L' y L'' con $\lambda(L')=L''$ y $\lambda=Z^{-2}$.

Lema 9.5 Supongamos que $d(D_n)=0$ y $d(D_{n-1})>0$ y que existen T' y $T'' \in T_n$ con $Z: T' \rightarrow T''$ y orden $Z = \infty$. Entonces existen L' y $L'' \in T_n$ simples cerradas y ajenas entre sí.

Dem. Supongamos que $T' \cap T'' \neq \emptyset$, entonces por el lema 9.4 existen L' y L'' y $\lambda = Z^{-1}$. Si $L' \cap L'' \neq \emptyset$, entonces ya está demostrado el lema. Si no, entonces existen L'_1 y L''_1 con $\lambda_1 = \lambda^{-1} = Z^{n-1}$. Si $L'_1 \cap L''_1 \neq \emptyset$ entonces ya está. Si no, continuamos. Supongamos que hemos obtenido L'_m y L''_m con $\lambda_m = Z^{m-1}$. Si $L'_m \cap L''_m \neq \emptyset$ ya está, si $L'_m \cap L''_m = \emptyset$ entonces existen L'_{m+1} , L''_{m+1} con $\lambda_{m+1} = \lambda_m^{-1} = Z^{m-2}$, etc. Si suponemos que nunca vamos a obtener dichas curvas, como T_n es finito deben haber curvas L'_p , L''_p y L'_q , L''_q con $L'_p = L'_q$, $L''_p = L''_q$ y $p < q$. Entonces $Z^{p-1} \lambda = \lambda_q = Z^{q-1}$

$$\frac{Z^{p-1} \lambda}{Z^{q-1} \lambda} = \frac{Z^{p-1} \lambda}{Z^{q-1} \lambda} = 1$$

Lo cual contradice que orden $Z = \infty$.

{ 10. Demostración del lema de Dehn para las variedades orientables.

Sea (f, D) un disco de Dehn canónico contenido en una 3-variedad M orientable con $BdD=C$ y sea V una vecindad regular de D .

Lema 10.1 Si $H_1(D)=0$, entonces existe $D_* \subset M$ no singular y con $BdD_* = C$.

Dem. Si $H_1(D)=0$, entonces V es simplemente conexa. Por el lema 9.2 las componentes de BdV son esferas de dimensión 2. Como por hipótesis $C \subset BdV$, entonces C estará en una esfera y por lo tanto es frontera de un disco no singular $D' \subset BdV$ el cual está formado por $F(Z'_0)$ digamos (donde Z_0 es la región simple de Δ que contiene a O), por algunas de las $F(Z'_1)$ y $F(Z''_1)$ (donde Z_1 corresponden también a regiones simples $i=1, \dots, n$) y una pequeña banda $f(I')$, o sea

$$D' = F(Z'_0) \cup_{A \in \Delta} F(Z'_1) \cup_{B \in \Delta} F(Z''_1) \cup F(I')$$

donde A y B son subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$.

Afirmamos que no existe i para la cual $F(Z'_1)$ y $F(Z''_1)$ estén en D' . Supongamos que $F(Z'_1)$ y $F(Z''_1)$ están en D' ; sea P la 3-variedad que se obtiene pegando bolas de dimensión 3 a BdV . Entonces P es simplemente conexa porque V lo es y podemos entonces tomar un lazo K que cruce a través de Z'_1 , Z_1 y Z''_1 y considerar el número de enlaces de K y C en P , $lk(K, C)$. Como éste es independiente de la superficie que se tome se tiene que

$$\text{int}(K, C) = \text{lk}(K, C) = \text{int}(K, D')$$

donde int es el número de intersecciones de K en P . Pero $\text{int}(K, D) \equiv 1 \pmod{2}$ e $\text{int}(K, D') \equiv 0 \pmod{2}$ y por lo tanto la igualdad de arriba es una contradicción y por lo tanto la afirmación se cumple.

Sea $D_* = F(Z_0) \cup F(Z_1) \cup F(Z_2)$
entonces D_* es un disco no singular por la afirmación anterior y por lo tanto el lema ha quedado demostrado.

Supongamos ahora que $H_1(D) \neq \emptyset$. Construyamos una torre sobre $D \subset V$ de altura n , entonces tenemos $D_n \subset V_n$ un disco singular.

Supongamos que $d(D_n) > 0$, como V_n es simplemente conexa, por el lema 10.1 se sigue que que existe D'_n con $d(D'_n) = 0$, o sea D'_n es no singular. Consideremos $D_n - D'_n$ y consideremos también las componentes de Δ - las curvas correspondientes al diagrama V_n y llamemos W_0 la cerradura de la componente que contiene a Z_0 . Como podemos suponer que en D_n no hay curvas simples cerradas y ajenas entre sí (si las hay las eliminamos), entonces en $f_n(W_0)$ debe existir un punto triple P , entonces $P \in D_n - D'_n$ y por lo tanto $d(D_*) = d(p_1 \dots p_n(D'_n)) < d(p_1 \dots p_n)(D_n) = d(D)$.

Supongamos que $d(D_n) = 0$. Entonces $d(D_{n-1}) > 0$.

Lema 10.2 Existen curvas T' y $T'' \in T_n$ las cuales son simples cerradas y ajenas entre sí.

Dem. Es sólo necesario demostrar que existe $\mathbb{Z}$ transformación cubriente con orden $\mathbb{Z} = \infty$ y aplicando el lema 9.3 obtendremos el resultado deseado. Pero para esto necesitaremos los siguientes dos lemas:

Lema 10.3 Si al menos una de las componentes de BdV_{n-1} no es una esfera, entonces existe $\mathbb{Z}$ transformación cubriente con orden $\mathbb{Z} = \infty$ y $\mathbb{Z}(D_n) \cap D_n \neq \emptyset$.

Dem. Sea $\phi: \pi_1(V_{n-1}) \rightarrow H_1(V_{n-1})$ el homomorfismo natural y $\psi: \Theta \rightarrow \pi_1(V_{n-1})$ el isomorfismo entre el conjunto de transformaciones cubrientes de p_n y $\pi_1(V_{n-1})$. Como al menos una de las componentes de BdV_{n-1} no es una 2-esfera, entonces $\text{Tor } H_1(V_{n-1}) \neq H_1(V_{n-1})$. Sea $(\psi\phi)^{-1}(\text{Tor } H_1(V_{n-1})) = \Lambda \subset \Theta$. Como $p_n^{-1}(D_{n-1})$ es conexo y es igual a

$$p_n^{-1}(D_{n-1}) = [\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda(D_n)] \cup [\bigcup_{\sigma \in \Theta} \sigma(D_n)]$$

entonces existen $\lambda \in \Lambda$ y $\sigma \in \Theta$ tales que $\lambda(D_n) \cap \sigma(D_n) \neq \emptyset$.

Sea $\mathbb{Z} = \lambda^{-1}\sigma$. Entonces $\mathbb{Z}(D_n) \cap D_n \neq \emptyset$. Vamos a demostrar que orden $\mathbb{Z} = \infty$. Supongamos que $\mathbb{Z}^m = 1$, entonces $\lambda^m \sigma^m = 1$ lo cual implica que $(\psi\phi)(\lambda^m \sigma^m) = 0$ y por lo tanto

$$-\pi\psi\phi(\lambda) + \pi\psi\phi(\sigma) = 0$$

pero $\psi\phi(\lambda) \in \text{Tor } H_1(V_{n-1})$ y $\psi\phi(\sigma) \notin \text{Tor}(H_1(V_{n-1}))$
entonces $\pi=0$ y se tiene el resultado que se quería.

Lema 10.4 Al menos una de las componentes de V_{n-1} no es una 2-esfera.

Dem. Supongamos que la frontera de V_{n-1} está compuesta de un número finito de esferas de dimensión 2. Sean A_i $i=1, \dots, n$ las cerraduras de las componentes de $M_{n-1} - V_{n-1}$. Sea N una vecindad regular de V_{n-1} tal que $\text{Bd} V_{n-1}$ sea un retracts por deformación de $N \cap \bigcup A_i$.

Entonces $H_1(N \cap \bigcup A_i) = 0$ y de la sucesión de Mayer-Vietoris para N y A_i

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{0} H_1(N \cap \bigcup A_i) \xrightarrow{0} H_1(N) + H_1(\bigcup A_i) \xrightarrow{0} H_1(M_{n-1}) \xrightarrow{0} \end{array}$$

se sigue que $H_1(N) = 0$ y por lo tanto $H_1(V_{n-1})$ también lo cual es una contradicción, por lo tanto el lema se cumple.

El lema 10.2 se sigue a partir de los lemas 9.5, 10.3 y 10.4.

Así tenemos T' y T'' T_n curvas simples cerradas y ajenas entre sí las cuales son llevadas por medio de $\alpha_n: D_n \rightarrow D_{n-1}$ a una curva sin singularidades. Haciendo un corte a lo largo de dicha curva obtenemos un disco D_{n-1}' con $d(D_{n-1}') < d(D_{n-1})$ y

$\therefore D_n = p_{n-1} \dots p_1(D_{n-1}')$ es un disco en M con $d(D_n) < d(D)$.

Usando el lema 10.1 y los resultados anteriores queda demostrado el siguiente

Lema 10.5 Sea D un disco de Dehn canónico contenido en una 3-variedad M orientable, si $d(D) > 0$, entonces existe D_* con $d(D_*) < d(D)$ y $\text{Bd} D = \text{Bd} D_*$.

Ahora consideremos el conjunto de discos de Dehn canónicos contenidos en M y con frontera C . Definamos un orden como sigue: $D_i \leq D_{i+1}$ si $d(D_i) \leq d(D_{i+1})$. Sea D_0 el elemento mínimo de dicho conjunto, entonces por el lema 10.5 se sigue que $d(D_0) = 0$ y por lo tanto el lema de Dehn queda demostrado.

{ 11 Algoritmo de Montesinos para llevar a cabo cortes en curvas con singularidades contenidas en un disco D de M . Con M orientable.

Sea (f, D) un disco de Dehn canónico contenido en una 3-varie-

dad orientable M , H su diagrama de Johanson y V una vecindad regular de D .

Definición Llamaremos la complejidad de un disco D al numero de trozos de curvas dobles comprendidas entre puntos triples y lo denotaremos como $\#D$.

Supongamos que D no tiene curvas dobles sin singularidades. Sea H' un subdiagrama de H y D' su realización en M , entonces $\#D' \leq \#D$.

Sea S el subconjunto de todos los subdiagramas de H , entonces S es no vacío porque H es un subdiagrama de sí mismo. S está ordenado por la inclusión. Sea H_0 el elemento minimal de S y D_0 su realización en M .

Lema 11.1 $H_1(D_0) = 0$

Dem: Supongamos que $H_1(D_0) \neq 0$. Sea V_0 una vecindad regular de D_0 , entonces V_0 no es simplemente conexa pues de lo contrario D_0 lo sería y por lo tanto $H_1(D_0) = 0$. Entonces podemos construir una torre elemental sobre $D_0 \subset V_0$, entonces tendremos un disco $D_1 \subset M_1$ al cual corresponde un diagrama H_1 con $H_1 \subset H_0$ lo cual contradice que H_0 sea minimal. Por lo tanto $H_1(D_0) = 0$.

Como $H_1(D_0) = 0$, entonces V_0 es simplemente conexa y por lo tanto las componentes de BdV_0 son esferas de dimension 2 y $C = BdD_0$ se encuentra en una de dichas componentes.

Hagamos un corte a lo largo de las curvas de H_0 , esto nos da como consecuencia un corte a lo largo de la proyección de dichas curvas en la frontera de V_0 . Identifiquemos las curvas $a_i a_j^*$ con las curvas $a_j a_i^*$ como se indica en la segunda parte del teorema 6.1. De esta manera regiones simples Z' y Z'' de Δ' y Δ'' quedan unidas después de la identificación.

Para ilustrar lo anterior tomemos como ejemplo el diagrama de la figura 11.1; en este diagrama es claro que si eliminamos las curvas A' y A'' el resto de las curvas siguen formando un diagrama el cual está representado en la figura 11.2 y es claro también que este diagrama es minimal. En el diagrama de la figura 11.2 hemos denominado cada curva por su nombre. En las figuras 11.3a y 11.3b se ilustra como quedan las superficies de Δ' y Δ'' después del corte y como han de identificarse entre sí. Debido a que C está en una esfera, bordea un disco no singular el cual es la imagen bajo F de algunas de las regiones simples Z' y Z'' cuyas fronteras han

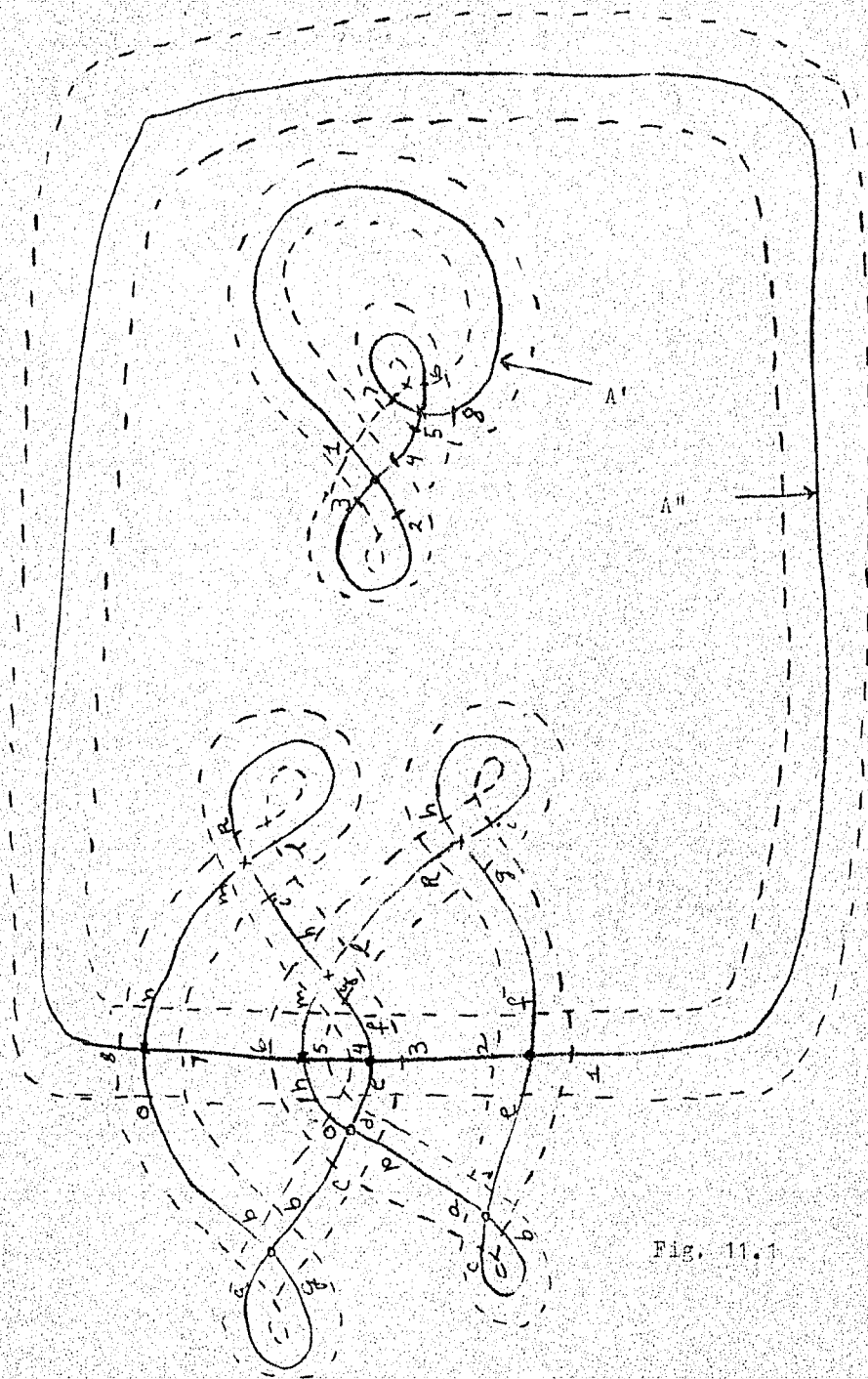
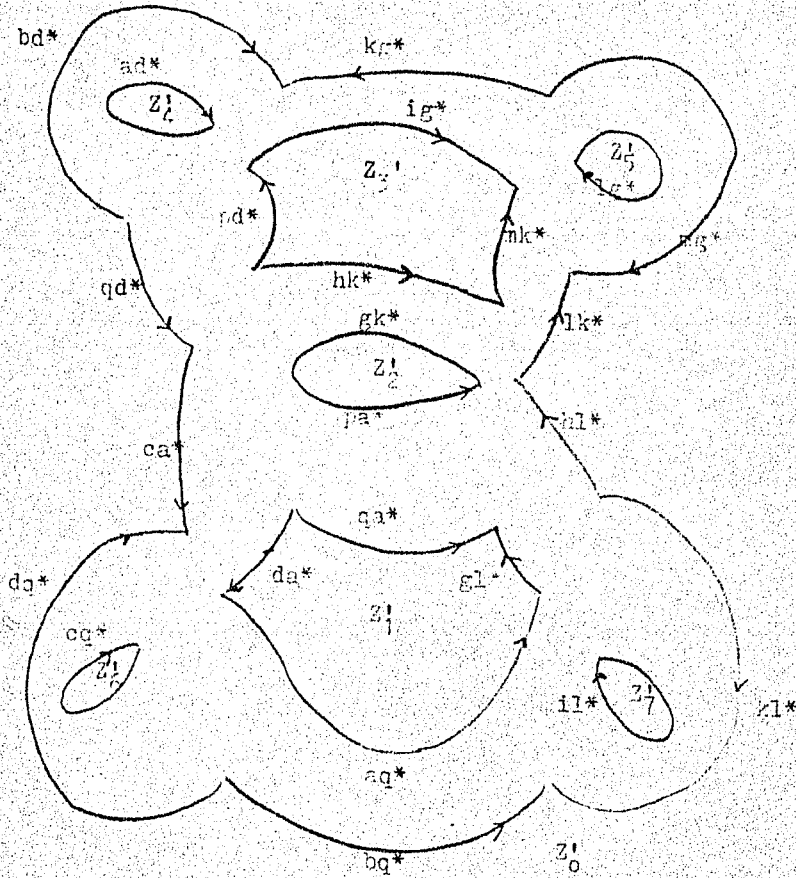


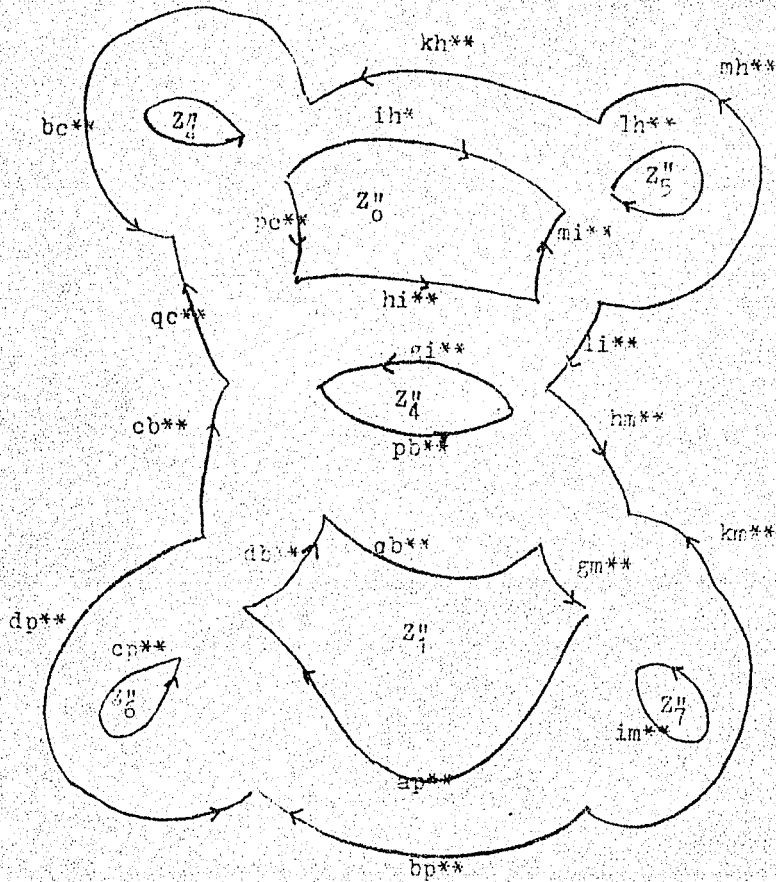
Fig. 11.1

Fig 11.3a



$\Delta' = \text{taps de } \Delta \text{ xi}$

Fig. 11.3b



$\Delta'' = \text{base de } \Delta xI$

sido identificadas previamente. O sea el disco D' esta formado por $F(Z_0')$ (por ejemplo), donde como ya sabemos, Z_0 es la región simple que contiene a $E\partial\Delta$ y por $\bigcup_{i=1}^n F(Z_i')$ y $\bigcup_{j=1}^n F(Z_j'')$ con A y B subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, y por una pequeña banda $F(I')$ que corresponde a $F(\text{pared lateral de } \Delta \times I \text{ comprendida entre } A' \text{ y } A'')$.

En el ejemplo que estamos viendo, al hacer la identificación obtenemos dos superficies esféricas y dos discos con frontera C los cuales son:

$$F(I') \cup F(Z_0') \cup F(Z_1'') \cup F(Z_2') \cup F(Z_4'') \cup F(Z_5') \\ \text{y } F(I'') \cup F(Z_0'') \cup F(Z_2'') \cup F(Z_3') \cup F(Z_3'') \cup F(Z_7')$$

Por la afirmación del lema 10.1 no existe i para la cual $F(Z_1')$ y $F(Z_1'')$ están en D' y por lo tanto

$$D^* = F(Z_0') \cup_{i \in A} F(Z_i') \cup_{j \in B} F(Z_j'')$$

es un disco singular cuyas singularidades son aquellas curvas dobles que proceden de $H-H_0$. Como en D_0 había puntos triples y han desaparecido las curvas que los contenían, entonces $\#D^* < \#D$. En la figura 11.4 se ve el diagrama correspondiente al disco D^* en nuestro ejemplo.

Supongamos que $d(D^*) > 0$. Eliminemos por procedimientos de corte las curvas dobles sin singularidades contenidas en D^* y sea D_1 el disco que obtengamos (D_1 puede ser igual a D^* obviamente). Si $d(D_1) > 0$, entonces $\#D_1 > 0$ porque solamente tenemos curvas dobles con singularidades. Consideremos el diagrama H_1 asociado a D_1 y S_1 el conjunto de subdiagramas de H_1 . Sea H_1 el diagrama minimal y D_1 su realización. Apliquemos el proceso anterior nuevamente y obtendremos un disco D_2^* con $\#D_2^* < \#D_1 < \#D$. Quitemos las curvas dobles sin singularidades a D_2^* y obtendremos D_2 con $\#D_2 < \#D$. En nuestro ejemplo D^* solo tiene curvas sin singularidades y por lo tanto D_1 sera un disco no singular y el proceso se termina allí.

Como la complejidad de un disco de Dehn canónico es finita, entonces, repitiendo el algoritmo anterior cuantas veces sea necesario obtendremos al final un disco D_n con $\#D_n = 0$. Si $d(D_n) > 0$ significa entonces que D_n tiene curvas dobles simples y apenas entre sí. Eliminando estas por medio de cortes obtendremos entonces un disco D' con $E\partial D' = C$ lo cual demuestra el lema de Dehn.

El algoritmo anterior fue inventado por José Ma. Montesinos. Dicho algoritmo nos da una demostración del lema de Dehn mas sencilla y sin tener que recurrir a tantos métodos algebraicos como se hizo en las dos secciones pasadas.

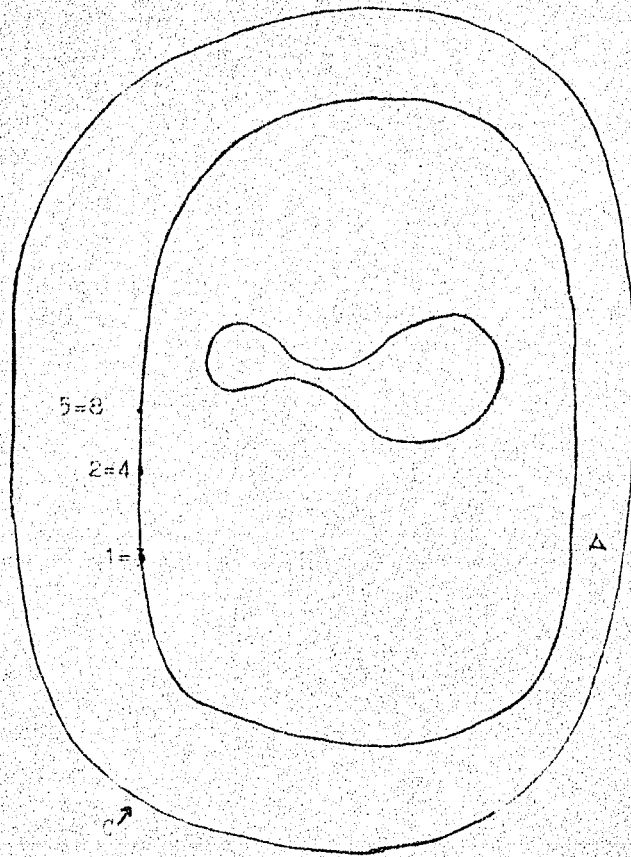


Fig. 11.4

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. DEHN, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, Math. Ann., 69 (1910), 137-168.
- [2] I. JOHANSSON, Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma, Math. Ann. 110 (1935), 312-320.
- [3] _____, Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma II, Math. Ann. 115 (1938), 658-669.
- [4] C.D. PAPA KYRIAKOPOULOS, On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math. 66 (1957), 1-26.
- [5] _____, On solid tori, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 281-299.
- [6] J. STALLINGS, On the Loop Theorem, Ann. of Math. 72 (1960), 12-19.
- [7] WALDHAUSEN F., Eine verallgemeinerung des schleifenatzes, Topology 6 (1967), 501-504.
- [8] J.H.C. WHITEHEAD & A. SHAPIRO, A proof and extension of Dehn's Lemma, Mathematical Works of J.H.C. Whitehead, Pergamon Press, New York, V. I/, (1963) 255-259.
- [9] SPANIER, E., Algebraic Topology. McGraw Hill 1966.