

" UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RETRACTOS ABSOLUTOS DE VECINDAD
TEOREMAS DE METRIZACION

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO
DE MATEMATICO PRESENTA
ALEJANDRO BRAVO
MOJICA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES, HERMANOS Y SOBRINOS.

A MIS MAESTROS Y COMPAÑEROS.

A GILBERTO GUEVARA.

A MARTHA.

Agradezco a todos mis maestros
la orientación que me brindaron
a lo largo de mi carrera y en
particular al Dr. Roberto Vázquez
García que dirigió el presente
trabajo.

INTRODUCTION.

En el primer capítulo de este trabajo se demuestran teoremas de metrización contenidos en los artículos "Théorie des Ensembles.- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{O}$). Note de MM. Paul Alexandroff et Paul Urysohn, présentée par M. Henri Lebesgue", "Distance functions and the metrization problem" de A. H. Frink y "Metrizability of decomposition spaces" de A. H. Stone; teoremas que se utilizan para demostrar entre otros resultados, que toda variedad topológica compacta es metrizable.

El segundo capítulo se refiere al teorema que M Mather demuestra en su artículo "Counting homotopy types of manifolds" y que afirma que el conjunto de tipos de homotopía de las variedades topológicas compactas es numerable. La demostración dada aquí de este teorema es distinta a la de su autor y el camino seguido para obtenerla combina el resultado, del primer capítulo, mencionado arriba con un teorema de J. M. Kister contenido en "Homotopy types of ANR'S, y con un teorema que Shih-Chen-Hu demuestra en su Theory of Retracts.

CAPITULO 1

EL ESPACIO DE LOS SUBCONJUNTOS

COMPACTOS DE UN ESPACIO

METRICO

TEOREMAS DE METRIZACION

Sea X un espacio métrico y d una métrica para X . Si x es un punto de X y r un real > 0 , $V_d(x, r)$ denotará la r -vecindad de x : $\{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. Si A es un subespacio de X , $V_d(A, r)$ denotará la r -vecindad de A : $\{y \in X \mid \exists a \in A \ni d(a, y) < r\} = \bigcup \{V_d(a, r) \mid a \in A\}$.

Sea Y la familia de los subconjuntos compactos no vacíos de X . Para A, B en Y y x de X , definamos $d'(A, x) = \inf \{d(a, x) \mid a \in A\}$, y $d''(A, B) = \sup \{d'(A, b) \mid b \in B\}$. entonces se tienen las siguientes propiedades :

- 1.- $d''(A, A) = 0$ para cada A de Y .
- 2.- Para $A \neq B$ en Y , $d''(A, B) > 0$ ó $d''(B, A) > 0$.
- 3.- Si A, B, C están en Y , $d''(A, C) \leq d''(A, B) + d''(B, C)$.

Para cada a de A , $d'(A, a) = 0 \therefore d''(A, A)$.

Si $A \neq B$, $A - B \neq \emptyset$ ó $B - A \neq \emptyset$, si $A - B \neq \emptyset$, sea a en $A - B$, ya que B es compacto, B es cerrado $\therefore d'(B, a) > 0$, de donde $d''(B, A) > 0$. Análogamente si $B - A \neq \emptyset$, $d''(A, B) > 0$.

Si A, B, C están en Y , para cada c de C y r positivo, existe b en B tal que : $d(b, c) < d'(B, c) + r$. Igualmente existe a en A tal que : $d(a, b) < d'(A, b) + r$.

$$\begin{aligned} d(a, c) &\leq d(a, b) + d(b, c) < d'(A, b) + d'(B, c) + 2r \\ \therefore d(a, c) &\leq d'(B, c) + d'(A, b) \leq d''(B, C) + d''(A, B) \\ \therefore d'(A, c) &\leq d''(B, C) + d''(A, B) \\ \therefore d''(A, C) &\leq d''(B, C) + d''(A, B). \end{aligned}$$

Proposición 1.— La función D de $Y \times Y$ en los reales no negativos definida por : $D(A,B) = \max (d''(A,B), d''(B,A))$, es una métrica.

- a) $D(A,A) = 0$ para cada A de Y por 1.
- b) Para $A \neq B$ en Y , $d(A,B) > 0$ por 2.
- c) Si A, B están en Y , $D(A,B) = D(B,A)$ por definición.
- d) $D(A,C) \leq D(A,B) + D(B,C)$ para A, B, C de Y por 3.

Definición.— Y es el espacio de los subconjuntos compactos de X .

Proposición 2.— Sean A, B en Y . Si $D(A,B) < r$, $A \subset V_d(B, r)$ y $B \subset V_d(A, r)$. Si $A \subset V_d(B, r)$ y $B \subset V_d(A, r)$, $D(A,B) \leq r$.

Si $D(A,B) < r$, $d''(A,B) < r \therefore$ para cada b de B $d'(A,b) < r \therefore$ existe a de A tal que $d(a,b) < r \therefore B \subset V_d(A, r)$; análogamente $A \subset V_d(B, r)$.

Si $A \subset V_d(B, r)$ y $B \subset V_d(A, r)$, para cada b de B existe a de A tal que $d(a,b) < r \therefore d'(A,b) < r \therefore d''(A,B) \leq r$, de la misma manera $d''(B,A) \leq r$ de donde $D(A,B) \leq r$.

Lema 1.— Si X es un espacio métrico separable, el espacio Y de los subconjuntos compactos de X es separable.

Demostración :

Sea S un conjunto que separa a X . Sea S' la familia de los subconjuntos finitos de S .

Sean A en Y y r positivo dados. La familia $\{V_d(a, r) \mid a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y por lo tanto existen $a_1, a_2, \dots, a_n$ en A tales que $\{V_d(a_k, r) \mid 1 \leq k \leq n\}$ cubre a A .

Como S es denso en X , para cada $1 \leq k \leq n$ existe b_k en $S \cap V_d(a_k, r)$. Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. $\therefore B \subset V_d(A, r) \subset V_d(A, 2r)$. Para cada a de A existe $1 \leq k \leq n$ tal que $a \in V_d(a_k, r)$. $\therefore d(b_k, a) < 2r \therefore A \subset V_d(B, 2r)$. $\therefore D(A, B) \leq 2r$ y S' es denso en Y y como es numerable separa a Y .

Definición.— Sea X un conjunto. Una pseudométrica definida en X , es una función d de $X \times X$ en los reales positivos tal que :

- 1) Para cada x de X , $d(x, x) = 0$.
- 2) Si x, y son dos puntos diferentes de X , $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, y) > 0$.
- 3) Si $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq 2 \max (d(x, y), d(y, z))$.

Proposición 3.— Toda pseudométrica d definida en un conjunto X define una topología en X .

Un subconjunto A de X es abierto si para cada a de A , existe un real positivo r tal que $\{x \in X \mid d(a, x) < r\} \subset A$. La demostración es la misma que para una métrica.

Definición.— Un espacio topológico X es un espacio pseudométrico, si existe una pseudométrica definida en X , que define la topología de X .

Todo espacio métrico es un espacio pseudométrico como se ve de la definición. Veremos más adelante que toda pseudométrica induce una métrica equivalente (en el sentido de que ambas determinan la misma topología). Sin embargo, no toda pseudométrica es una métrica como se ve en el siguiente ejemplo :

Sea $X = \{a, 0\} \cup \{1/n \mid n \text{ es natural}\}$ y d definida de la siguiente manera :

$$d(x, y) = \begin{cases} |1/n - 1/m| & \text{si } x = 1/n, y = 1/m. \\ 1/n & \text{si } x = 1/n, y = 0. \\ 2 & \text{si } x = 1/n, y = a. \\ 1 & \text{si } x = a, y = 0. \end{cases}$$

Es claro que d es una pseudométrica y $\{x \in X \mid d(a, x) < 3/2\} = \{a, 0\}$ no es abierto, ya que si r es un real positivo, $\{x \in X \mid d(0, x) < r\}$ contiene puntos de la forma $1/n$.

Proposición 4.— Sean d una métrica y d' una pseudométrica definidas en un conjunto X . Si existen M, N números reales tales que para x, y en X , $d(x, y) \leq Md'(x, y)$ y $d'(x, y) \leq Nd(x, y)$. Entonces d y d' determinan la misma topología.

Demostración :

Sea A un abierto de X según d y a en A . $\therefore$ existe r positivo tal que $\{x \in X \mid d(a, x) < r\} \subset A$.

$\therefore \{x \in X \mid d'(a, x) < r/m\} \subset A$. $\therefore A$ es abierto según d' .

Análogamente si A es abierto según d' , lo es según d .

Lema 2 (Chittenden).— Sea d una pseudométrica definida en un conjunto X . Si $a, x_1, x_2, \dots, x_n$ están en X , $d(a, b) \leq 2d(a, x_1) + 4d(x_1, x_2) + 4d(x_2, x_3) + \dots + 4d(x_{n-1}, x_n) + 2d(x_n, b)$.

Demostración :

Por inducción sobre n .

$$\begin{aligned} \text{Si } n = 1, d(a, b) &= 2 \max(d(a, x_1), d(x_1, b)) \\ &\leq 2d(a, x_1) + 2d(x_1, b) \end{aligned}$$

Supongamos que la afirmación vale para $k < n$.

Si $d(a,b) \leq 2d(a,x_1)$ ó $d(a,b) \leq 2d(x_n,b)$,

$d(a,b) \leq 2d(a,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \dots + 2d(x_n,b)$.

Si $d(a,b) > 2d(a,x_1)$ y $d(a,b) > 2d(x_n,b)$,

$d(a,b) \leq 2d(x_1,b)$ y $d(a,b) \leq 2d(a,x_n)$.

Sea k el máximo tal que $d(a,b) \leq 2d(x_k,b)$. Entonces

$1 \leq k < n$ y $d(a,b) > 2d(x_{k+1},b)$. .

$d(a,b) \leq 2d(a,x_{k+1})$, de donde $d(a,b) \leq d(a,x_{k+1}) + d(x_k,b)$.

Por hipótesis de inducción :

$d(a,x_{k+1}) \leq 2d(a,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \dots + 2d(x_k,x_{k+1})$ y

$d(x_k,b) \leq 2d(x_k,x_{k+1}) + 4d(x_{k+1},x_{k+2}) + \dots + 2d(x_n,b)$,

de donde :

$d(a,b) \leq 2d(a,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \dots + 2d(x_n,b)$.

Corolario 1.— $d(a,b) \leq 4(d(a,x_1) + d(x_2,x_3) + \dots + d(x_n,b))$.

Teorema 1.— Toda pseudométrica induce una métrica equivalente.

Demostración:

Sea X con una pseudométrica d , definamos

$d': X \times X \longrightarrow R$ de la siguiente manera:

$$d'(a,b) = \inf \left\{ d(a,x_1) + d(x_1,x_2) + \dots + d(x_n,b) \right\}$$

 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.

Claramente d' es no negativa y para a y b en X

1) $d'(a,b) \geq 1/4 d(a,b)$ por el corolario 11.

2) $d(a,b) \geq d'(a,b)$.

De donde:

- a) $d'(a,a) = 0$ para cada a de X por 2.
 b) Para $a \neq b$ en X , $d'(a,b) > 0$ por 1.
 c) d' es simétrica ya que d lo es.
 d) Para cada a, b, c de X y r positiva, existen $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$, en X , tales que

$$d(a, x_1) + \dots + d(x_n, b) < d'(a, b) + r.$$

$$d(b, y_1) + \dots + d(y_m, c) < d'(b, c) + r, \text{ como:}$$

$$d'(a, c) \leq d(a, x_1) + \dots + d(x_n, b) + d(b, y_1) + \dots + d(y_m, c),$$

$$d'(a, c) < d'(a, b) + d'(b, c) + 2r,$$

$$\therefore d'(a, c) \leq d'(a, b) + d'(b, c); \text{ y } d \text{ y } d' \text{ son equivalentes por 1 y 2.}$$

Ahora veremos bajo qué condiciones un espacio topológico es pseudométrico.

Teorema 2.— Una condición necesaria y suficiente para que un espacio topológico X sea metrizable, es que para cada natural n , exista una cubierta S_n de X tal que:

- a) Si dos elementos U y V de S_{n+1} se traslapan, existe W en S_n que contiene a U y a V , para $n = 1, 2, \dots$
 b) Para cualesquiera dos elementos diferentes x, y de X , existe m tal que ningún elemento de S_m contiene a x y a y a la vez.
 c) Para cada x de X , $\{St(x, S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de vecindades.

Demostración:

Necesidad: Si X es métrico y S_n es la familia de vecindades esféricas de los puntos de X de radio $1/2^n$, se cumplen a, b, y c.

Suficiencia: veremos que hay pseudométrica para X .

Los siguientes resultados nos serán útiles:

1) S_{n+1} refina a S_n para $n = 1, 2, \dots$, ya que si U en S_{n+1} es no vacío, 2 implica que existe V en S_n que contiene a U , de donde se tiene que:

2) Si x, y están en X , ningún elemento de S_m contiene a x y a y a la vez, y $n \geq m$, entonces ningún elemento de S_n contiene a x y a y a la vez.

3) Si $n \geq m$ y U en S_n y V en S_m se traslapan, existe U' en S_m que contiene a U $\therefore U' \cap V \neq \emptyset$ $\therefore$ existe W en S_{m-1} que contiene a U' y V y por lo tanto a U .

Si hacemos $S_0 = \{X\}$, para cada y, x de X existe m con la propiedad de que existe U en S_m tal que $x, y \in U$. Por (b) y (2) a partir de cierto rango, S_n no tiene la propiedad anterior. Sea $m(x, y)$ el máximo natural que tiene dicha propiedad.

Definamos:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1/2^{m(x, y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Entonces por definición tenemos que:

a) $d(x, x) = 0$ para toda x de X .

b) Si x, y están en X , $d(x, y) = d(y, x)$.

c) Para $x \neq y$ en X , $d(x, y) > 0$, y

d) $d(x, z) \leq 2 \max(d(x, y), d(y, z))$ para x, y, z de X , ya que Si $d(x, y) = 1$ ó $d(y, z) = 1$, $d(x, z) \leq 2 \max(d(x, y), d(y, z))$.

Si $d(x, y) < 1$ y $d(y, z) < 1$, existen U en $S_{m(x, y)}$, V en

$S_{m(y, z)}$ tales que $x, y \in U$ y $y, z \in V$ $\therefore U \cap V \neq \emptyset$, si

$m(x, y) \leq m(y, z)$ por (3) existe W en $S_{m(x, y)-1}$ que contiene a U y a V y por lo tanto a x y a z $\therefore$

$d(x,z) \leq 1/2^{m(x,y)-1} = 2^{-m(x,y)}$. Análogamente si $m(y,z) \leq m(x,y)$, $d(x,z) \leq 2^{-m(y,z)}$ $\therefore d$ es pseudométrica.

Teorema 3 (Frink).— Un espacio topológico es metrizable, si y sólo si, para cada x de X existe una sucesión $\{W(n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades abiertas de x tal que:

- 1) $W(n+1,x) \subset W(n,x)$, para $n = 1, 2, \dots$
- 2) $\{W(n,x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local de vecindades en x .
- 3) $\bigcap \{W(n,x) \mid n = 1, 2, \dots\} = \{x\}$.
- 4) Para cada x de X , existe una función $\bar{x}$ de los naturales en los naturales, tal que:

Si $W(\bar{x}(n), y) \cap W(\bar{x}(n), x) \neq \emptyset$, $W(\bar{x}(n), y) \subset W(n, x)$.

Demostración:

Necesidad: Si X es métrico, para cada x de X y n natural tomamos como $W(n,x)$ la vecindad de x de radio $1/2^n$, se cumplen (1), (2) y (3) como se sabe y $\bar{x}(n) = n + 2$ satisface (4).

Suficiencia: Por (1) podemos suponer que $\bar{x}(n) > n$, de donde se sigue que $\bar{x}^m(n) > n$ y que $\bar{x}^n(1) > n$.

Para cada x de X y n natural, sea $U_n(x) = W(\bar{x}^n(1), x)$. Las cubiertas $S_n = \{U_n(x) \mid x \in X\}$ cumplen (a), (b), (c) del teorema 2, como se hace ver enseguida.

i) Dos elementos de la familia S_{n+1} son de la forma $W(\bar{y}^{n+1}(1), y)$, $W(\bar{x}^{n+1}(1), x)$, si no son ajenos y $n \geq 1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bar{y}^{n+1}(1) \geq \bar{x}^{n+1}(1)$. Por (1) $W(\bar{y}^{n+1}(1), y) \subset W(\bar{x}^{n+1}(1), y)$ y por (4) $W(\bar{x}^{n+1}(1), y) \subset W(\bar{x}^n(1), x) \therefore W(\bar{y}^{n+1}(1), y) \subset W(\bar{x}^n(1), x)$.

Como $W(\bar{x}^{n+1}(1), x) \subset W(\bar{x}^n(1), x)$, este último es un elemento de la familia S_n que contiene a los dos elementos dados de la familia S_{n+1} .

ii) Si x, y son dos puntos diferentes de X , por (3) existe n tal que $y \notin W(n, x)$, como $\bar{x}^n(1) > n$ por (1) $y \notin W(\bar{x}^n(1), x)$. Si U está en $S_{\bar{x}^{n+1}(1)}$ es de la forma $W(\bar{z}^{\bar{x}^{n+1}(1)}(1), z)$. Si x está en U , ya que $\bar{z}^{\bar{x}^{n+1}(1)}(1) > \bar{x}^{n+1}(1)$, $U \subset W(\bar{x}^{n+1}(1), z) \subset W(\bar{x}^n(1), x)$ y $y \notin U$.

iii) Dado que cada $St(x, S_n)$ es una unión de abiertos, cada $St(x, S_n)$ es abierto y como cada una contiene a x , basta ver que existe una subfamilia de $\{St(x, S_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que refina a la base local $\{W(n, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} St(x, S_{\bar{x}^{n+1}(1)}) &= \bigcup \left\{ W(\bar{y}^{\bar{x}^{n+1}(1)}(1), y) \mid \text{contienen a } x \right\} \\ &\subset \bigcup \left\{ W(\bar{x}^{n+1}(1), y) \mid \text{contienen a } x \right\} \subset W(\bar{x}^n(1), x) \\ &\subset W(n, x). \end{aligned}$$

Teorema 4 (Stone).— Sea f una función continua y cerrada de un espacio métrico X sobre un espacio topológico Y . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- a) Y satisface el primer axioma de numerabilidad.
- b) Para cada y de Y , $f^{-1}(y)$ tiene frontera compacta.
- c) Y es metrizable.

Ya que f es sobre y cerrada, para cada y de Y $\{y\}$

es cerrado, por ser de la forma $f(\{x\})$; de donde se sigue $F_y = f^{-1}(y)$ es cerrado para toda y de Y .

Demostración :

(a) $\Rightarrow$ (b).

Sea $\{W_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable de vecindades abiertas de y de Y . Si la frontera de F_y : $\text{Fr}(F_y)$ no es compacta, existe una sucesión a_n de puntos de $\text{Fr}(F_y)$ sin puntos de acumulación en $\text{Fr}(F_y)$ que es cerrada en X , y por lo tanto sin puntos de acumulación en X . $f^{-1}(W_n(y))$ es un conjunto abierto que contiene a F_y y como F_y es cerrado, $a_n \in F_y \subset f^{-1}(W_n(y))$ y existe b_n en $X - F_y$ tal que, $b_n \in f^{-1}(W_n(y))$ y $d(a_n, b_n) < 1/n$, donde d es una distancia que define la topología de X . Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, B es cerrado en X puesto que no tiene puntos de acumulación (por ser equivalente a $\{a_n\} \cup \{b_n\}$). Por lo tanto, $f(B)$ es cerrado en Y . Como $y \notin f(B)$ por construcción y cada $W_n(y)$ intersecciona a $f(B)$ en $f(b_n)$, $f(B)$ no es cerrado, lo que es una contradicción.

(b) $\Rightarrow$ (c) .

Para esto veremos que las hipótesis

del teorema de Mrs. Frink se cumplen.

Para cada y de Y y n natural, sean: $N_y^n = V(\text{Fr}(F_y), 1/n)$, $U_y^n = N_y^n \cup \text{Int}(F_y)$, $V_y^n = \bigcup \{F_x \mid F_x \subset U_y^n\}$ y $W(n, y) = f(V_y^n) = \{x \in Y \mid F_x \subset U_y^n\}$. Entonces tenemos que $W(n, y) = Y - f(X - U_y^n)$; y como U_y^n es abierto y f cerrada, $W(n, y)$ y $V_y^n = f^{-1}(W(n, y))$ son abiertos. Como $F_y \subset V_y^n \subset U_y^n$, $y \in W(n, y)$. Ya que $V(\text{Fr}(F_y), 1/n) \supset V(\text{Fr}(F_y), 1/(n+1))$,

$U_y^n \supset U_y^{n+1}$, $V_y^n \supset V_y^{n+1}$, $W(n,y) \supset W(n+1,y)$, (1) vale.

Para probar (2), sea G una vecindad abierta de $y \in Y$.

Los conjuntos $\text{Fr}(F_y)$, $X - f^{-1}(G)$, son cerrados y ajenos, y ya que $\text{Fr}(F_y)$ es compacto, $d(\text{Fr}(F_y), X - f^{-1}(G)) = r > 0$. #

Sea n natural tal que $1/n < r$, entonces, $N_y^n \subset f^{-1}(G)$. ∴

$f^{-1}(G) \supset U_y^n \supset V_y^n$. ∴ $G \supset W(n,y)$.

Como Y es de Fréchet, (2) $\Rightarrow$ (3).

Para probar (4), sean n natural y $y \in Y$. Si $\text{Int}(F_y) \neq \emptyset$, sea $a_y \in \text{Int}(F_y)$ fijo, y $\bar{y}(n) = m$, tal que:

I) $m > 2n$.

II) Si $\text{Fr}(F_y) \neq \emptyset$, $d(\text{Fr}(F_y), X - V_y^{2n}) > 2/m$.

III) Si $\text{Int}(F_y) \neq \emptyset$, $V(a_y, 1/m) \subset F_y$.

Supongamos que $W(m,x)$ intersecta a $W(m,y)$ en z , y que $x \neq y$.

Sea $w \in F_z \subset V_x^m \cap V_y^m \subset U_x^m \cap U_y^m$. Si $w \in \text{Int}(F_x)$, F_x intersecta a V_y^m . ∴ $F_x \subset V_y^m \subset V_y^{2n}$. Si $w \notin \text{Int}(F_x)$, como $w \in U_x^m = N_x^m \cup \text{Int}(F_x)$, $w \in N_x^m$. Si $w \in \text{Int}(F_y)$, a_y existe y F_y intersecta a V_x^m , de donde, $F_y \subset V_x^m$, entonces $a_y \in V_x^m \subset \text{Int}(F_x) \cup N_x^m$, como $a_y \notin F_x$, tenemos que $a_y \in N_x^m$, lo que contradice (III).

Entonces $w \in N_x^m \cap N_y^m$, y existen $y' \in \text{Fr}(F_y)$, $x' \in \text{Fr}(F_x)$, tales que $d(w, y') < 1/m$ y $d(w, x') < 1/m$. ∴ $d(x', y') < 2/m$, y por (II), $x' \in V_y^{2n}$; y como F_x intersecta a V_y^{2n} , tenemos que $F_x \subset V_y^{2n}$. ∴ $F_x \subset U_y^{2n} = N_y^{2n} \cup \text{Int}(F_y)$, y entonces,

En esta demostración, $d(A, B)$ tiene el sentido usual,

$$d(A, B) = \inf \{ d(a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

$F_x \subset N_y^{2n}$. Sea z en U_x^m , por lo tanto existe x'' en F_x tal que $d(z, x'') < 1/m < 1/2n$ por (I). Como $x'' \in N_y^{2n}$, existe $y'' \in Fr(F_y)$ tal que $d(y'', x'') < 1/2n$, de tal manera que $d(y'', z) < 1/n \therefore z \in N_y^n \subset U_y^n \therefore U_x^m \subset U_y^n$ si $y \neq x$, pero si $y = x$, por (I) $U_x^m \subset U_y^n \therefore V_x^m \subset V_y^n$ de donde se tiene que; $W(m, x) \subset W(n, y)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) es un hecho bien conocido.

Corolario 2.— Si X es un espacio métrico compacto, Y un espacio de Hausdorff y f una función continua de X sobre Y , Y es metrizable.

Si A es cerrado de X , A es compacto $\therefore f(A)$ es compacto y por lo tanto cerrado en Y , pues Y es de Hausdorff, por lo tanto f es cerrada.

$Fr(F_y)$ es compacta para cada y de Y , por ser cerrada de un compacto.

Definición. Un espacio topológico localmente metrizable, es un espacio topológico tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad metrizable.

Proposición 5.— Un espacio compacto y de Hausdorff localmente metrizable, es metrizable.

Demostración;

Sea X compacto y de Hausdorff, localmente metrizable. Ya que X es compacto y de Hausdorff, es regular. Para cada x de X , sea U_x una vecindad de x metrizable; por lo tanto existe U'_x vecindad cerrada de x ,

contenida en U_x , por ser cerrada es compacta y es metrizable por estar contenida en U_x que es metrizable.

$\{ \text{Int}(U'_x) \mid x \in X \}$ es una cubierta abierta de X , y por lo tanto existen $x_1, x_2, \dots, x_n$ en X tales que:

$\{ \text{Int}(U'_{x_k}) \mid 1 \leq k \leq n \}$ cubre a X ; de donde se tiene que $X = \bigcup \{ W_k \mid 1 \leq k \leq n \}$ donde $W_k = U'_{x_k}$ para $1 \leq k \leq n$.

Para cada $1 \leq k \leq n$ sea V_k una copia de W_k , y al punto correspondiente a x en W_k llamémosle x^k .

Si Y es la suma topológica ajena de $V_1, V_2, \dots, V_m$, Y es métrico y compacto.

Sea f de Y en X tal que $f(x^k) = x$, f es suprayectiva y continua, ya que si A es cerrado de X , $f^{-1}(A) \cap V_k = \{ x^k \in V_k \mid x \in W_k \cap A \}$ que es cerrado en V_k ; y las hipótesis del corolario 2 se cumplen.

Definición.— Un espacio localmente euclideo, es un espacio tal que, cada uno de sus puntos tiene una vecindad que es homeomorfa a un espacio euclideo.

De la definición se sigue que, todo espacio localmente euclideo es localmente metrizable.

Definición.— Una variedad topológica, es un espacio topológico de Hausdorff localmente euclideo.

Toda variedad topológica compacta, es metrizable, puesto que satisface las hipótesis de la proposición 2.

CAPÍTULO 2

RETRACTOS Y EXTENSORES ABSOLUTOS

RETRACTOS Y EXTENSORES

ABSOLUTOS DE VECINDAD

RETRACTOS Y EXTENSORES ABSOLUTOS

DE VECINDAD PARA LA CLASE DE LOS

ESPACIOS METRICOS COMPACTOS

Definición.- Una clase $\mathcal{F}$ de espacios topológicos se llama débilmente hereditaria y completa, si todo subespacio cerrado de un espacio de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$, y si todo espacio homeomorfo a alguno de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$.

Puesto que la normalidad es una propiedad topológica y débilmente hereditaria, la clase de todos los espacios normales, es una clase débilmente hereditaria y completa. De hecho la clase de todos los espacios que tienen una propiedad débilmente hereditaria y topológica fija, es una clase débilmente hereditaria y completa. Por ejemplo la clase de los espacios métricos, la clase de los espacios compactos y la clase de los espacios métricos compactos.

Definición.- Sea $\mathcal{F}$ una clase débilmente hereditaria y completa de espacios topológicos. Un espacio Y de $\mathcal{F}$ es un:

a) Retracto absoluto "RA" (retracto absoluto de vecindad "RAV") para la clase $\mathcal{F}$, si para cada X de $\mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f:A \longrightarrow Y$ homeomorfismo, existe una extensión continua de f a X (a una vecindad de a en X).

b) Extensor absoluto "EA" (extensor absoluto de vecindad "EAV") para la clase $\mathcal{F}$, si para cada X de $\mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f:A \longrightarrow Y$ continua, existe una extensión continua de f a X (a una vecindad de A en X).

c) Extensor absoluto de vecindad local, si cada punto de Y tiene una vecindad EAV.

Es inmediato de las definiciones anteriores que un espacio es EA (EAV, RA, RAV) si y sólo si cada espacio

homeomorfo a él es EA (EAV, RA, RAV). Y que todo EA es EAV; todo EAV, RAV; todo EA, RA, y todo RA, RAV.

Proposición 1.— Para un espacio Y de $\mathcal{F}$ son equivalentes:

a) Y es RA (RAV).

b) Cada vez que un espacio A homeomorfo a Y , es subespacio cerrado de un espacio X de $\mathcal{F}$, A es retracto de X (de una vecindad de A en X).

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sea Y RA (RAV), X en $\mathcal{F}$ y A subespacio cerrado de X homeomorfo a Y . Sea $f:A \longrightarrow Y$ un homeomorfismo $\therefore$

existe $\bar{f}:X \longrightarrow Y$ (U vecindad de A en X y $\bar{f}:U \longrightarrow Y$)

continua, que extiende a $f \therefore \bar{f}f^{-1}:X \longrightarrow A$

($\bar{f}f^{-1}:U \longrightarrow A$) es una retracción de X en A (de U en A).

(b) $\Rightarrow$ (a)

Supongamos que Y cumple (2), sea X en $\mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f:A \longrightarrow Y$ homeomorfismo $\therefore$ existe $r:X \longrightarrow A$ (U vecindad de A en X y $r:U \longrightarrow A$) retracción $\therefore fr:X \longrightarrow Y$ ($fr:U \longrightarrow Y$) es una función que extiende a f .

Teorema 1.— Si $\{X_j \mid j \in J\}$ es una familia de EA y $\prod X_j = \prod \{X_j \mid j \in J\}$ está en $\mathcal{F}$, $\prod X_j$ es EA.

Demostración:

Sea X en $\mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f:A \longrightarrow \prod X_j$ continua. Si llamamos p_j a la proyección de $\prod X_j$ en X_j , $p_j f:A \longrightarrow X_j$ tiene una extensión continua $\bar{f}_j$ a X , y $\prod \{f_j \mid j \in J\}:X \longrightarrow \prod X_j$ extiende a f .

Teorema 2.— Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son EAV y $\bigcap X_j \in \mathcal{F}$,
 $\bigcap X_j$ es EAV.

Demostración:

Sea $X \in \mathcal{F}$, A cerrado de X y $f: A \rightarrow \bigcap X_j$
 continua, para cada $1 \leq j \leq n$, $p_j f: A \rightarrow X_j$ es continua,
 y por lo tanto existe una vecindad U_j de A en X y
 $\bar{f}_j: U_j \rightarrow X_j$ continua, que extiende a $p_j f$, entonces,
 $U = \bigcap \{U_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ es una vecindad de A en X y
 $\bigcap \bar{f}_j: U \rightarrow \bigcap X_j$ extiende a f .

El teorema de extensión de Tietze, afirma que I , el
 intervalo cerrado $[0,1]$ de los números reales con la
 topología usual, es EA para la clase de los espacios
 normales, y ya que I es métrico y compacto, y todo es-
 pacio métrico es normal, I es EA para la clase de espa-
 cios métricos y para la clase de espacios métricos com-
 pactos. Por el teorema 1, $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$
 que es homeomorfo a I^n , es EA para las tres clases
 mencionadas, ya que I^n es métrico y compacto. En parti-
 cular, todo espacio localmente euclidiano es EAV local,
 ya cada uno de sus puntos tiene una vecindad homeomorfa
 a E^n , para alguna n , que es EA y por lo tanto EAV, para
 alguna de las clases anteriores si, y sólo si esta en
 la clase correspondiente. Por lo tanto las variedades
 topológicas compactas, son EAV locales, para las clases
 anteriores.

Teorema. 3.- Todo subespacio abierto de un EAV para una clase $\mathcal{F}$, es un EAV para $\mathcal{F}$.

Demostración:

Sea Y un EAV para $\mathcal{F}$, U subespacio abierto de Y , $X \in \mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f: A \rightarrow U$ continua.

Sea $i: U \rightarrow Y$ la inclusión de U en Y , entonces $if: A \rightarrow Y$ es continua y existe V vecindad de A en X y $\tilde{f}: V \rightarrow Y$ continua que extiende a if , $\tilde{f}^{-1}(U)$ es una vecindad de A en X $\therefore \tilde{f} \upharpoonright \tilde{f}^{-1}(U): \tilde{f}^{-1}(U) \rightarrow U$, es una función continua que extiende a f .

Para la clase de los espacios normales, puesto que I es EA, es EAV y por teorema anterior el intervalo abierto $(0,1)$ de los números reales que es abierto en I , es EAV. Por el teorema 2, R^n que es homeomorfo a $(0,1)^n$, es EAV, y aplicando nuevamente el teorema 3, todo subespacio abierto de un espacio euclideo es EAV.

Teorema 4.- Todo retracto de un EA (EAV) para una clase $\mathcal{F}$, es EA (EAV) para $\mathcal{F}$.

Demostración:

Sea Y EA (EAV) para $\mathcal{F}$, B subespacio de Y . $r: Y \rightarrow B$ retracción, $X \in \mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f: A \rightarrow B$ continua. Sea $i: B \rightarrow Y$ la inclusión de B en Y . $if: A \rightarrow Y$ es continua y existe $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ (V vecindad de A en X y $\tilde{f}: V \rightarrow Y$) continua que extiende a if $\therefore r\tilde{f}: X \rightarrow B$ ($r\tilde{f}: V \rightarrow B$) es una extensión continua de f .

Definición.— Sea X un espacio topológico y $\{U_j \mid j \in J\}$ una cubierta abierta de X , una reducción de $\{U_j \mid j \in J\}$, es una cubierta abierta $\{W_j \mid j \in J\}$ de X , tal que para cada j de J $\overline{W}_j \subset U_j$.

Lema 1.— Si X es un espacio normal, toda cubierta abierta finita de X tiene una reducción.

Demostración:

Sea X normal, y $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ una cubierta abierta de X . Como $X = U_1 \cup (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n)$, $X - (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n)$ es un cerrado de X contenido en U_1 , $\therefore$ existe W_1 abierto de X , tal que:
 $X - (U_2 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n) \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset U_1$, y por lo tanto, $\{W_1, U_2, \dots, U_n\}$ cubre a X .

supongamos que existen $W_1, W_2, \dots, W_k$ abiertos de X , tales que, $\{W_1, \dots, W_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$ cubre a X , y que $\overline{W}_j \subset U_j$ para $1 \leq j \leq k$. Repitiendo el argumento usado para U_1 , existe W_{k+1} abierto de X , tal que $\overline{W}_{k+1} \subset U_{k+1}$ y $\{W_1, W_2, \dots, W_{k+1}, U_{k+2}, \dots, U_n\}$ cubre a X . Por lo tanto, $\{U_1, \dots, U_n\}$ tiene una reducción.

Lema 2.— Sea $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ una cubierta abierta de un espacio normal X , A un subespacio cerrado de X . Si $U_j = V_j \cap A$ para $j = 1, 2, \dots, n$ existe H vecindad cerrada de A en X , y $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ cubierta cerrada de H , tal que:

a) $H_j \cap A \subset U_j$ para $1 \leq j \leq n$.

b) $H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap \dots \cap H_{j_m} \neq \emptyset \implies$

$U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_m} \neq \emptyset$.

Demostración:

Dado que X es normal existe una reducción $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ de $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Para cada x de X , diremos que x es admisible, si:

$$x \in \bar{W}_{j_1} \cap \bar{W}_{j_2} \cap \dots \cap \bar{W}_{j_m} \Rightarrow U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_m} = \emptyset.$$

Si $x \in A$ y $x \in \bar{W}_{j_1} \cap \bar{W}_{j_2} \cap \dots \cap \bar{W}_{j_m}$, ya que $\bar{W}_j \subset U_j$ para $1 \leq j \leq n$, a es admisible.

Si x es admisible y $\bar{W}_{j_1}, \bar{W}_{j_2}, \dots, \bar{W}_{j_q}$ son los elementos de $\{\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_n\}$ que no contienen a x , $X - (\bar{W}_{j_1} \cup \bar{W}_{j_2} \cup \dots \cup \bar{W}_{j_q})$ es una vecindad de x de puntos admisibles; por lo tanto, los puntos admisibles forman un conjunto abierto que contiene a A .

Como X es normal y A cerrado de X , existe una vecindad cerrada, H de A , de puntos admisibles. Para cada $1 \leq j \leq n$ sea $H_j = \bar{W}_j \cap H$, entonces $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ es una cubierta cerrada de H tal que $H_j \subset V_j$ para $1 \leq j \leq n$, y por lo tanto ;

(a) $H_j \cap A \subset V_j \cap A = U_j$ para $1 \leq j \leq n$.

Si $H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap \dots \cap H_{j_m} = \emptyset$ sea $x \in H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}$ como cada H_j está contenida en $\bar{W}_j$, $x \in \bar{W}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{W}_{j_m}$ y ya que x es admisible, $U_{j_1} \cap \dots \cap U_{j_m} = \emptyset$.

Lema 3.— Sea A un subespacio cerrado de un espacio X y $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ una cubierta cerrada de A . si pa-

ra cada $1 \leq j \leq n$, B_j es una vecindad de $X_j \cap A$ en X_j ;
 $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ es una vecindad de A en X .

Demostración;

Para cada $1 \leq j \leq n$ existe U_j abierto en X tal que $A \cap X_j \subset U_j \cap X_j \subset B_j$. Sea a un elemento de A , si $a \in X_{j_1} \cap \dots \cap X_{j_s}$ y $a \notin X_{j_{s+1}} \cup \dots \cup X_{j_n}$,
 $U = (X - (X_{j_{s+1}} \cup \dots \cup X_{j_n})) \cap U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_n}$
 es un conjunto abierto que contiene a a . Si $x \in U$,
 $x \in X_{j_i}$ para alguna $1 \leq i \leq s$ $\therefore x \in U_{j_i} \cap X_{j_i} \subset B_{j_i} \subset B$.
 De donde se sigue que B es una vecindad de A .

Lema 4.— Sean A y X' subconjuntos cerrados de un espacio normal X . Si B' es una vecindad cerrada de $X' \cap A$ en X' , existe una vecindad cerrada B de A en X , tal que $B' = X' \cap B$.

Demostración;

Sea U' una vecindad abierta de $X' \cap A$ en X' contenida en B' , $X' - U'$ y A son cerrados y ajenos, y por lo tanto existe una vecindad cerrada V de A en X , tal que $V \cap (X' - U') = \emptyset$, de donde se tiene que $V \cap X' \subset U' \subset B'$.

Sea $B = B' \cup V$, como V es una vecindad de A en X , B es vecindad de A en X . Puesto que V y B' son cerrados en X , B es cerrado en X , y como $V \cap X' \subset B'$, tenemos que $B' = X' \cap B$.

Por lo tanto podemos escribir: $B = B' \cup B^\#$, donde $B^\# \subset X - X'$.

Teorema.5.- Todo EAV local para la clase $\mathcal{F}$ de los espacios métricos compactos, es EAV para $\mathcal{F}$.

Demostración:

Sea Y EAV local para $\mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$, A subespacio cerrado de X y $f: A \longrightarrow Y$ continua.

Cada punto $y \in Y$, tiene una vecindad EAV para $\mathcal{F}$, y por el teorema 3, una vecindad abierta (el interior de la vecindad dada) $N_y^!$, EAV para $\mathcal{F}$. Puesto que Y es compacto, existen $y_1, y_2, \dots, y_n$, tales que $\{N_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ cubre a Y , donde $N_j = N_{y_j}$ para $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto si $U_j = f^{-1}(N_j)$ para $1 \leq j \leq n$, $\{U_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ es una cubierta abierta de A .

Para cada $1 \leq j \leq n$, sea $V_j^!$ abierto en X , tal que $U_j = V_j^! \cap A$, si para cada $1 \leq j \leq n$, $V_j = V_j^! \cup (X - A)$, $\{V_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ es una cubierta abierta de X tal que $V_j \cap A = U_j$. Por el lema 2, existe H vecindad cerrada de A en X , y $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ cubierta cerrada de H , tal que:

$$a) H_j \cap A \subset U_j \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

$$b) H_{j_1} \cap H_{j_2} \cap \dots \cap H_{j_m} \neq \emptyset \implies$$

$$U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_m} \neq \emptyset.$$

Sea K el nervio de $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$. Ya que K es finito, si para cada simplejo $s \in K$, denotamos con $\dim(s)$ la dimensión de s , podemos definir, $p(s)$
 $p(s) = \max \{ \dim(s') - \dim(s) \mid s' \supset s \}$, se sigue de esta definición, que si s es cara propia de s' :

$$(1) p(s') < p(s).$$

Para cada simplejo $s \in K$, cuyos vértices corresponden a los índices $j_0, j_1, \dots, j_m$, sean :

$$C_s = (H_{j_0} \cap H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m}) - (H_{j_{m+1}} \cup H_{j_{m+2}} \cup \dots \cup H_{j_n})$$

$$\text{y } A_s = C_s \cap A.$$

Entonces $\{C_s \mid s \in K\}$ es una cubierta ajena de H , y

$\{A_s \mid s \in K\}$ es una cubierta ajena de A . Sean :

$$C_{\text{St}(s)} = \bigcup \{C_{s'} \mid s' \supset s\} \text{ y}$$

$$A_{\text{St}(s)} = C_{\text{St}(s)} \cap A = \bigcup \{A_{s'} \mid s' \supset s\}.$$

Puesto que si $j_0, j_1, \dots, j_m$, son los índices correspondientes a s :

$$(2) C_{\text{St}(s)} = H_{j_0} \cap H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_m},$$

$\{C_{\text{St}(s)} \mid s \in K\}$ es una cubierta cerrada finita de H .

Si los índices correspondientes a un simplejo $s \in K$ son $j_0, j_1, \dots, j_m$, sea

$$N_s = N_{j_0} \cap N_{j_1} \cap \dots \cap N_{j_m}.$$

Puesto que N_s es abierto en N_{j_0} , que es EAV para $\overline{F}$, N_s es EAV para $\overline{F}$.

Si $s' \supset s$, es claro que:

$$(3) N_{s'} \subset N_s,$$

y para cada $s \in K$:

$$(4) f(A_s) \subset N_s.$$

Construiremos una extensión de f a una vecindad de A en X , dando para cada $s \in K$, un conjunto B_s y una función continua $g_s: B_s \longrightarrow Y$, tales que:

$$(5) A_s \subset B_s \subset C_s.$$

$$(6) g_s|_{A_s} = f|_{A_s}.$$

$$(7) \quad g_s(B_s) \subset N_s.$$

Puesto que los conjuntos C_s son ajenos, por (5), los conjuntos B_s serán ajenos. Si definimos

$B_{St(s)} = \bigcup \{ B_{s'} \mid s' \supset s \}$, y $g_{St(s)}: B_{St(s)} \longrightarrow Y$, tal que $g_{St(s)}|_{B_{s'}} = g_{s'}$, para cada $s' \supset s$, pediremos que se cumplan:

(8) $B_{St(s)}$ es una vecindad de $A_{St(s)}$ en $C_{St(s)}$.

(9) $B_{St(s)}$ es cerrado en H .

(10) $g_{St(s)}$ es continua.

La demostración, por inducción sobre $p(s)$.

Si $p(s) > 0$ podemos suponer que B_s , y g_s , están definidas y cumplen de (5) a (10) para toda s' tal que $p(s') < p(s)$, en particular, ya que (1) vale, para toda s' de la cual s es cara propia.

Sean:

$$A'_s = \bigcup \{ A_{s'} \mid s \text{ es cara propia de } s' \}.$$

$$B'_s = \bigcup \{ B_{s'} \mid s \text{ es cara propia de } s' \}.$$

$$C'_s = \bigcup \{ C_{s'} \mid s \text{ es cara propia de } s' \}.$$

Tenemos entonces que $A'_s \subset B'_s \subset C'_s$, y que para $p(s) = 0$, $A'_s = B'_s = C'_s = \emptyset$.

Definamos $g'_s: B'_s \cup A_s \longrightarrow Y$, tal que $g'_s|_{A_s} = f|_{A_s}$ y $g'_s|_{B_{s'}} = g_{s'}$, para cada $s' \in K$ de la cual s es cara propia. Entonces $g'_s|_{A_{St(s)}} = f|_{A_{St(s)}}$ y $g'_s|_{B_{St(s')}} = g_{St(s')}$, para cada $s' \in K$ de la cual s es cara propia. Por (10), $g_{St(s')}$ es continua y como los conjuntos $B_{St(s')}$ tales que s es cara propia de s' , junto con $A_{St(s)}$ forman una cubierta cerrada de $B'_s \cup A_s$, g'_s es continua.

Por (3), (4) y (7), tenemos que:

$$(11) \ g'_s(B'_s \cup A_s) \subset N_s.$$

Puesto que $\{C_{St(s')} \mid s' \text{ es cara propia de } s\}$ es una cubierta cerrada de C'_s ;

$$(12) \ C'_s \text{ es cerrado en } H.$$

Análogamente:

$$(13) \ B'_s \text{ es cerrado en } H, \ A'_s \text{ es cerrado en } H.$$

Como A'_s es cerrado en C'_s , $\{C_{St(s')} \mid s' \text{ es cara propia de } s\}$ es una cubierta cerrada finita de C'_s y $B_{St(s')}$ es una vecindad de $A_{St(s')} = C_{St(s')} \cap A'_s$ en $C_{St(s')}$ por (8), aplicando el lema 3, tenemos que:

$$(14) \ B'_s \text{ es una vecindad de } A'_s \text{ en } C'_s.$$

Aplicando el lema 4 a $C_{St(s)}$, sus subespacios cerrados $A_{St(s)}$, C'_s y la vecindad cerrada B'_s de $A'_s = C'_s \cap A_{St(s)}$, existe una vecindad cerrada de $A_{St(s)}$ en $C_{St(s)}$ de la forma:

$$B'_s \cup B_s^\#, \text{ donde } B_s^\# \subset C_s = C_{St(s)} - C'_s.$$

Como cerrado de $C_{St(s)}$, y por lo tanto de X , $B'_s \cup B_s^\# \neq \emptyset$, y puesto que $B'_s \cup A_s = B'_s \cup A_{St(s)}$ es cerrado en $B'_s \cup B_s^\#$ por (13), y N_s es EAV para $\mathcal{F}$, (11) implica que g'_s tiene una extensión;

$$h_s: B'_s \cup B_s \longrightarrow N_s$$

a alguna vecindad, que podemos suponer que cerrada, dado que todo espacio métrico es normal, $B'_s \cup B_s$ de $B'_s \cup A_s$ en $B'_s \cup B_s^\#$, donde $B_s \subset B_s^\#$, así queda definido B_s . Sea

$$g_s: B_s \longrightarrow Y, \text{ definida por } g_s = h_s|_{B_s}.$$

Como $A_s \subset B'_s \cup A_s \subset B'_s \cup B_s$ y $B'_s \cap A_s = \emptyset$, se tiene que $A_s \subset B_s$, y ya que $B_s \subset B_s^\# \subset C_s$, (5) vale, es decir $A_s \subset B_s \subset C_s$.

Puesto que $g_s|_{A_s} = g'_s|_{A_s} = f|_{A_s}$, (6) se cumple.

Dado que h_s toma valores en N_s , (7) se satisface.

(9) es inmediato del hecho de que $B_{St(s)} = B'_s \cup B_s$ es cerrado.

Ya que $B_{St(s)}$ es vecindad de $A_{St(s)}$ en $B'_s \cup B_s^\#$ que es vecindad de $A_{St(s)}$ en $C_{St(s)}$, $B_{St(s)}$ es vecindad de $A_{St(s)}$ en $C_{St(s)}$, es decir (8) vale.

Como $g_{St(s)} = h_s|_{B_{St(s)}}$, $g_{St(s)}$ es continua, lo que verifica (10).

Sea $B = \bigcup \{B_s \mid s \in K\}$ y $g: B \longrightarrow Y$ tal que $g|_{B_s} = g_s$.

Como $\{C_{St(s)} \mid s \in K\}$ es una cubierta cerrada finita de H , (8) y el lema (3) muestran que B es una vecindad de A en H .

Por (10) $g|_{B_{St(s)}} = g_{St(s)}$ es continua, y ya que $\{B_{St(s)} \mid s \in K\}$ es una cubierta cerrada finita de B , g es continua.

Puesto que $g|_{A_s} = g_s|_{A_s} = f|_{A_s}$ y $\{A_s \mid s \in K\}$ cubre a A , $g|_A = f$.

Corolario 1.— Las variedades topológicas compactas son EAV para $\mathcal{F}$.

Teorema 6.— El conjunto de tipos de homotopía de los espacios RAV para la clase $\overline{F}$, de los espacios métricos compactos, es numerable.

Supongamos que existe una colección no numerable de de RAV para $\overline{F}$, $\{A_j \mid j \in J\}$, tal que si $i \neq j$, A_i tiene tipo de homotopía distinto del de A_j . Para cada $j \in J$, puesto que A_j es métrico y compacto, podemos suponer que A_j es un subespacio del cubo de Hilbert, I^W . Como cada A_j es RAV para $\overline{F}$, A_j es retracto de alguna vecindad de A_j en I^W , porque $I^W \in \overline{F}$; como A_j es compacto, existe $r_j > 0$ tal que la r_j -vecindad de A_j , está contenida en la vecindad de la cual A_j es retracto. Por lo tanto, A_j es retracto de su r_j -vecindad U_j . Sea $R_j: U_j \longrightarrow A_j$ una retracción. Como $\{r_j \mid j \in J\} = \bigcup \{ \{r_j \mid r_j > 1/n\} \mid n \text{ es natural} \}$, podemos suponer que existe $r > 0$ tal que $r_j \geq r$ para cada $j \in J$.

Sea d la distancia que define la topología de I^W . Si f, g son dos funciones continuas de un espacio X en A_j , tales que para cada $x \in X$ $d(f(x), g(x)) < r$, f y g son homotópicas ($F(x, t) = R_j((1-t)f(x) + tg(x))$), es una homotopía entre f y g). Ya que A_j es compacto, para cada $j \in J$ existe $s_j > 0$, tal que $d(R_j(x), x) < r/2$, para toda x en la s_j -vecindad de A_j . Nuevamente podemos suponer que existe $s > 0$ tal que $s_j \geq s$ para toda $j \in J$.

Puesto I^W es separable, el espacio de los subconjuntos compactos de I^W es separable, y ya que es métrico, satis-

face el segundo axioma de numerabilidad. Entonces el conjunto no numerable $\{A_j \mid j \in J\}$, tiene un punto de acumulación, y por lo tanto existen $i \neq j$ en J tales que $D(A_i, A_j) < s$. Por la proposición del capítulo 1, A_i está contenido en la s -vecindad de A_j en I^W , y A_j está contenido en la s -vecindad de A_i en I^W . $(R_i|_{A_j})(R_j|_{A_i}): A_i \longrightarrow A_i$ es homotópica a la identidad en A_i , puesto que:

$$d((R_i|_{A_j})(R_j|_{A_i})(x), x) \leq d((R_i|_{A_j})(R_j|_{A_i})(x), (R_j|_{A_i})(x)) + d((R_j|_{A_i})(x), x) < r.$$

Análogamente, $(R_j|_{A_i})(R_i|_{A_j})$ es homotópica a la identidad en A_j . Por lo tanto A_i y A_j son del mismo tipo de homotopía, lo cual es una contradicción.

Hasta aquí se ha demostrado que el conjunto de tipos de homotopía es a lo más numerable, pero como todas las esferas son variedades compactas de diferente tipo de homotopía y son EAV para $\mathcal{F}$ (corolario 1), son RAV para $\mathcal{F}$, el conjunto de tipos de homotopía de RAV para $\mathcal{F}$, es pues numerable.

Corolario 2.— El conjunto de tipos de homotopía de las variedades topológicas compactas es numerable.

Toda variedad topológica compacta es EAV para $\mathcal{F}$, y por lo tanto RAV para $\mathcal{F}$.

B I B L I O G R A F I A.

1. P. Alexandroff y P. Urysohn, Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe ($\mathcal{L}$) soit une classe ($\mathcal{Q}$), C. R. Acad Sci Paris Sér A 117 (1923) p. 1274.
2. A. H. Frink, Distance functions and the metrization problem, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937) p. 133-142.
3. J. M. Kister, Homotopy types of ANR'S, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) p. 195.
4. M. Mather, Counting homotopy types of manifolds, Topology 4 (1965) p. 92-93.
5. A. H. Stone, Metrizability of decomposition spaces, 7 (1956) p. 690-700.
6. Hu-Shih-Chen, Theory of Retracts, Detroit, Wayne State Univ. 1965.
7. F. Hausdorff, Set Theory, New York, N. Y. Chelsea Publishing Company, 1957.