

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**INTEGRACION NUMERICA DEL MODELO
BAROTROPICO PARA EL FLUJO
ATMOSFERICO SOBRE LA
REPUBLICA MEXICANA**

T E S I S
Que Para Obtener el Título de
F I S I C O
P r e s e n t a

GABRIELA DEL SOCORRO ALVAREZ GARCIA

México, D. F.

1978



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi Esposo: Claudio.

A mis hijos: Adriana y Juan Pablo.

A mis padres:

Alfonso y María Julia.

IV

R E C O N O C I M I E N T O S

Quiero expresar mi agradecimiento sincero al Fis. Tomás Morales - Acoltzi por su acertada dirección y colaboración prestada en la - realización de este trabajo.

También deseo manifestar mi reconocimiento al M. en C. Enrique - Buendía Carrera por el estímulo constante que me dió en el transcurso del trabajo realizado.

Así mismo agradezco a los M. en C. Sergio Serra Castelan, Liborio Cruz López y al Fis. Walter Ritter Ortiz por aceptar participar - en la Comisión Dictaminadora.

Los diagramas del campo isohéptico fueron elaborados por Marcelo Estrada Gasca.

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I	ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y ENERGIA	1
I-1	Sistemas de Referencia.	1
I-2	Ecuaciones de Movimiento sobre la Tierra Rotando.	3
I-3	Transformación de las Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Esféricas.	6
I-4	Principios Termodinámicos.	10
I-5	Conservación de la Masa.	14
I-6	Análisis de Escala. Análisis de Escala de las Ecuaciones de Movimiento.	17
CAPITULO II	COORDENADAS ISOBARICAS Y ECUACION DE VORTICIDAD	22
II-1	Coordenadas Isobáricas.	22
II-2	Circulación y Vorticidad.	26
II-3	Ecuación de Vorticidad.	30
II-4	Análisis de Escala de la Ecuación de Vorticidad .	33
CAPITULO III	FILTRADO DE ONDAS	37
III-1	Ondas en la Atmósfera.	37
III-2	Ondas de Seno.	38
III-3	Ondas de Rossby.	39
III-4	Ondas de Gravedad.	43
III-5	Filtrado.	48
CAPITULO IV	MODELO BARTROPICO	51
IV-1	Ecuación Fundamental.	52
IV-2	Diferencias Finitas y Método de Relajación	54
CAPITULO V	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	63

VI

APENDICE I	APROXIMACION DE DERIVADAS EN FORMA DE DIFERENCIAS FINITAS.	74
APENDICE II	PROYECCIONES DE MAPAS.	76
BIBLIOGRAFIA.		80

INTRODUCCION

Los procesos Meteorológicos ocurren en un amplio espectro espacio-temporal. El espectro temporal de esas oscilaciones puede ser dividido en los siguientes intervalos:

- 1) Oscilaciones Micrometeorológicas con período en el tiempo de -- fracciones de segundo a un minuto.
- 2) Oscilaciones Mesometeorológicas con períodos desde un minuto a -- una hora.
- 3) Oscilaciones Sinópticas con períodos de horas a varios días.
- 4) Oscilaciones Globales con períodos de días a meses.

Estos son algunos de los intervalos de oscilación existentes.

En este trabajo se presenta la formulación de un modelo para -- una Atmósfera Barotrópica, Adiabática, sobre una región limitada -- (región IV), para la escala sinóptica, cuyo rango espacial es del -- orden de 100 a 10 000 Km.

El desarrollo del modelo se presenta en cinco capítulos, los -- cuales se describen a continuación:

En el primer capítulo se presentan los principios y conceptos básicos como son: Conservación de Momento, Energía y Masa, con esto se obtiene la ecuación de movimiento que rige a una cierta muestra de aire, se aplica el análisis de escala para desprestigiar términos de menor magnitud obteniendo así la aproximación geostrófica -- hidrostática y las ecuaciones de pronóstico aproximadas.

En el segundo capítulo se transforman las ecuaciones de movimiento de coordenadas cartesianas a coordenadas isobáricas, además se trata la circulación y la vorticidad como medidas del giro o rotación de un fluido, se deriva la ecuación de vorticidad que gobierna

VIII

na a la muestra de aire y se hace un análisis de escala.

En el capítulo tres se analizan los tipos de soluciones que da la ecuación de vorticidad observando sus propiedades físicas con el objeto de filtrar las soluciones que no son de tipo meteorológico.

En el capítulo cuatro se describe la región de integración y se restringe el modelo a una Atmósfera Barotrópica, Adiabática, obteniendo así la ecuación de vorticidad barotrópica la cual se resuelve por el método de diferencias finitas y método de relajación; y finalmente en el capítulo cinco se presentan y analizan los resultados. Además se anexan dos apéndices que complementan al capítulo cuatro.

CAPITULO I

ECUACIONES DE MOVIMIENTO Y ENERGIA

En este capítulo se estudiará el comportamiento de la atmósfera, para esto, se aplicarán los principios y conceptos básicos de la Física como son: Conservación de momento, Energía y Masa, los cuales están representados por las leyes de movimiento de Newton; con esto, se obtendrá la ecuación de movimiento que regirá a una cierta muestra de aire ubicada en alguna región de la atmósfera.

I-1 SISTEMAS DE REFERENCIA.

Un sistema de referencia, es un sistema de coordenadas con respecto al cual se llevan a cabo las mediciones. Existen dos tipos de sistemas de referencia; los sistemas de referencia inerciales y los sistemas de referencia no-inerciales. Se define como sistema de referencia inercial, aquel sistema que cumple con la primera ley de Newton, esto es, que la cantidad de movimiento se conserva en ausencia de fuerzas externas; y se define como sistema de referencia no-inercial, aquel sistema donde no se cumple la condición de ser inercial.

Para estudiar los movimientos que ocurren en la atmósfera, tomaremos como sistema de referencia a la tierra rotando; este sistema es un sistema de referencia no-inercial, ya que cualquier partícula moviéndose con respecto a la tierra parecerá que esta acelera. Entonces para aplicar las leyes de Newton a este tipo de sistemas de referencia, se toman en cuenta los efectos de esta aceleración introduciendo las llamadas fuerzas aparentes o pseudofuerzas en la segunda ley de Newton.

Para un sistema de referencia como la tierra rotando, intervienen dos pseudofuerzas: la fuerza de Coriolis y la fuerza Centrifuga.

La fuerza Centrífuga se manifiesta como el empuje que siente cualquier partícula hacia afuera, perpendicular al eje de rotación de la tierra; y su expresión matemática es $m \Omega^2 \bar{R}$ donde m es la masa de la partícula, Ω es la velocidad angular de rotación de la tierra y R la distancia al eje de rotación de la partícula.

La fuerza de Coriolis actúa sobre una partícula que se mueve sobre un sistema rotando, desviándola en dirección opuesta al sistema de coordenadas rotando en una trayectoria curva. Esta fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula; la expresión matemática de la fuerza de Coriolis, para una partícula que se mueve sobre una superficie plana que gira alrededor de un eje central normal a la superficie es $2m\Omega V$, donde m es la masa de la partícula, Ω la velocidad angular y V la velocidad de la partícula. Pero para el caso de la tierra que es aproximadamente una esfera rotando; el movimiento de una partícula sobre la superficie de la esfera rotando alrededor de un eje vertical es función de la latitud ϕ ; por lo tanto, la expresión general para la fuerza de Coriolis en cualquier punto sobre la superficie de la tierra es;

$$2m\Omega V \sin \phi$$

y a la expresión $2\Omega \sin \phi$ se le denomina parámetro de Coriolis y se denota por f .

I-2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO SOBRE LA TIERRA ROTANDO.

En la sección anterior se hizo referencia a tomar a la tierra rotando como sistema de referencia; este sistema es un sistema no-inercial; por lo tanto, se adaptará la segunda ley de movimiento de -- Newton a este sistema. Para esto, se considerará un sistema de ejes rotando x', y' con respecto a ejes fijos x, y ; como se observa en la figura(I-1); donde $\vec{r}$ es el vector de posición de una partícula ó -- muestra de aire relativa al sistema inercial y al sistema rotando, cuyas componentes son para el sistema inercial :

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \quad \text{I-2.1}$$

y para el sistema rotando:

$$\vec{r} = \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z' \quad \text{I-2.2}$$

Tomando la derivada total del vector r en el sistema inercial, y su derivada correspondiente en el sistema rotando con respecto al sistema fijo:

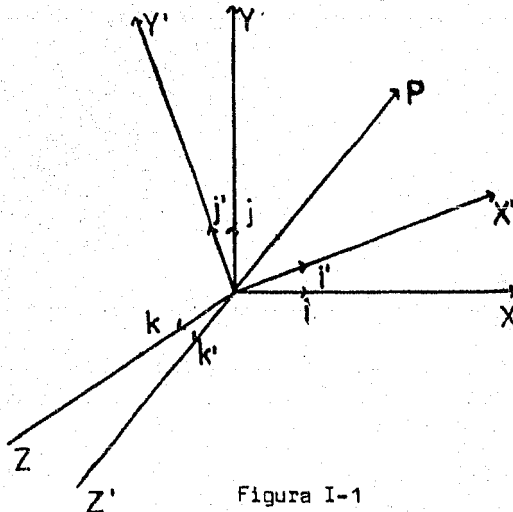


Figura I-1

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \hat{i} \frac{dx}{dt} + \hat{j} \frac{dy}{dt} + \hat{k} \frac{dz}{dt} = \\ &= \hat{i}' \frac{dx'}{dt} + \hat{j}' \frac{dy'}{dt} + \hat{k}' \frac{dz'}{dt} + x' \frac{d\hat{i}'}{dt} + y' \frac{d\hat{j}'}{dt} + z' \frac{d\hat{k}'}{dt} \end{aligned} \quad \text{I-2.3}$$

donde $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es la derivada total en el marco inercial. La expresión-

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}' \frac{dx'}{dt} + \hat{j}' \frac{dy'}{dt} + \hat{k}' \frac{dz'}{dt}$ es la velocidad de la partícula o muestra de aire relativa al sistema moviéndose. Como $\hat{i}'$, $\hat{j}'$, $\hat{k}'$ son los vectores de posición del sistema moviéndose, sus derivadas $\frac{d\hat{i}'}{dt}$, $\frac{d\hat{j}'}{dt}$, $\frac{d\hat{k}'}{dt}$ dan la velocidad de $\hat{i}'$, $\hat{j}'$, $\hat{k}'$ debido a su rotación, por lo --- tanto:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{k}'$$

sustituyendo estas relaciones en la ecuación (I-2.3) se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad \text{I-2.4}$$

La ecuación (I-2.4) establece la relación entre la derivada --- total de un vector en un sistema de referencia inercial y su derivada en un sistema rotando. Siendo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_a \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$$

entonces:

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad \text{I-2.5}$$

La ecuación (I-2.5) establece que la velocidad absoluta de un --- objeto sobre la tierra rotando es igual a su velocidad relativa a --- la tierra más la velocidad debido a la rotación de la tierra.

Aplicando la relación (I-2.4) al vector velocidad $\vec{V}$ se obtiene

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a \quad \text{I-2.6}$$

Sustituyendo la ecuación (I-2.5) en el lado derecho de la ecuación (I-2.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}_a}{dt} &= \frac{d}{dt} (\bar{v} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) + \bar{\Omega} \times (\bar{v} + \bar{\Omega} \times \bar{r}) \\ &= \frac{d\bar{v}}{dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{v} + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})\end{aligned}\quad \text{I-2.7}$$

Si $\bar{r}$ es un vector perpendicular a el eje de rotación, cuya magnitud es igual a la distancia a el eje de rotación entonces:

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}}{dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{v} - \bar{\Omega}^2 \bar{r} \quad \text{I-2.8}$$

La relación (I-2.8) dice, que la aceleración en un sistema inercial, es igual a la aceleración relativa a un sistema rotando, más la aceleración de Coriolis, más la aceleración Centrífuga.

La segunda ley de movimiento de Newton dice que la fuerza es igual a la masa por la aceleración, o sea:

$$F = m\bar{a}$$

donde $\bar{a} = \frac{d\bar{v}_a}{dt}$ que es la razón de cambio de la velocidad absoluta $\bar{v}_a$ en un sistema inercial y F es la suma de las fuerzas reales. Entonces multiplicando por m la ecuación (I-2.8) y suponiendo que las fuerzas reales que actúan sobre la atmósfera son la fuerza del gradiente de presión, la gravedad y la fuerza de fricción, se obtiene la ley de movimiento que rige a una partícula o muestra de aire sobre la tierra rotando, y se puede escribir como?

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -2m\bar{\Omega} \times \bar{v} - \frac{m}{f} \nabla p + m\bar{g} + \bar{F}_r \quad \text{I-2.9}$$

donde $m\bar{g} = m\bar{g}^* + m\bar{\Omega}^2 \bar{r}$ que es la gravedad efectiva para una partícula o muestra de aire en reposo sobre la superficie de la tierra, y es igual a la fuerza de gravedad dirigida hacia el centro de la

tierra más la fuerza Centrífuga.

Por lo tanto, la ecuación(I-2.9) describe el movimiento relativo a un sistema de coordenadas rotando; esta ecuación expresa que la fuerza relativa a un sistema rotando es igual a la suma de la fuerza de Coriolis, la fuerza del gradiente de presión, la gravedad efectiva y la fricción.

I-3 TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN COORDENADAS ESFERICAS.

Hasta aquí la ecuación de movimiento ha sido considerada en --- coordenadas cartesianas, ahora por la forma de la tierra es conveniente expresar la ecuación de movimiento en coordenadas esféricas--- donde los ejes de coordenadas son (ψ, θ, r) ; ψ es el ángulo azimutal o longitud, θ es el ángulo polar o co-latitud y r es la distancia vertical hacia arriba con respecto al plano tangente a la superficie de la tierra (ver figura I-2).

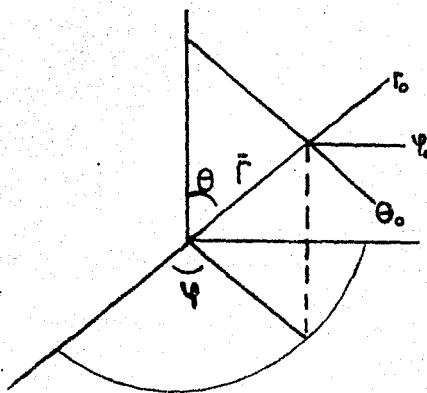


Figura I-2

Entonces la aceleración relativa $\frac{d\bar{v}}{dt}$ de la ecuación (I-2,9) se expresara en coordenadas esféricas. Por lo tanto, las componentes de la velocidad relativa en coordenadas esféricas serán:

$$\bar{v} = \hat{r}_0 u + \hat{\theta}_0 v + \hat{\phi}_0 w \quad I-3.1$$

donde $\hat{r}_0, \hat{\theta}_0, \hat{\phi}_0$ son los vectores unitarios dirigidos hacia el Este - Norte y hacia arriba respectivamente. Analizando geoméricamente la figura (I-2) se observa que:

$$\hat{r}_0 = \hat{i} \sin \theta \cos \psi + \hat{j} \sin \theta \sin \psi + \hat{k} \cos \theta \quad I-3.2a$$

$$\hat{\theta}_0 = \hat{i} \cos \theta \cos \psi + \hat{j} \cos \theta \sin \psi - \hat{k} \sin \theta \quad I-3.2b$$

$$\hat{\phi}_0 = -\hat{i} \sin \psi + \hat{j} \cos \psi \quad I-3.2c$$

Las componentes de $\bar{v}$; u, v, w, para una superficie esférica se pueden deducir de la figura (I-3).

Se observa del triángulo $\overline{OCD}$ que $\sin \delta\theta = \frac{\delta y}{r} \approx \delta\theta$ donde $\approx$ quiere decir aproximadamente a ; por lo tanto: $\delta y = r \delta\theta$

y $\frac{dy}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$ como $v = \frac{dy}{dt}$ entonces $v = r \frac{d\theta}{dt} \quad I-3.3a$

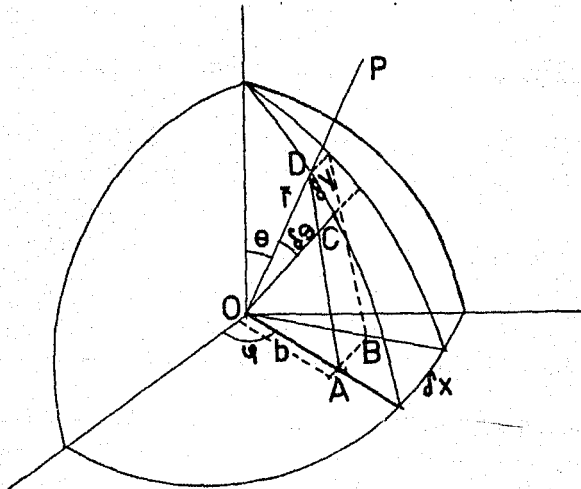


Figura I-3

Observando el triángulo $\overline{OAB}$ el $\text{sen } \delta\varphi = \frac{\delta x}{b} \simeq \delta\varphi$, de donde $\delta x = b \delta\varphi$ pero viendo el triángulo $\overline{OAD}$ se observa que $\cos(\pi - \theta) = \frac{b}{r} = \text{sen } \theta$ de donde $b = r \text{ sen } \theta$, por lo tanto, $\delta x = r \text{ sen } \theta \delta\varphi$ y $\frac{dx}{dt} = r \text{ sen } \theta \frac{d\varphi}{dt}$ y como $u = dx/dt$ se tiene que:

$$u = r \text{ sen } \theta \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{I-3.3b}$$

$$y \quad w = \frac{dz}{dt} \quad \text{I-3.3c}$$

Entonces sustituyendo las relaciones (I-3.3 a,b,c,) en la ecuación (I-3.1) se obtiene:

$$\bar{V} = \hat{\varphi}_0 r \text{ sen } \theta \frac{d\varphi}{dt} + \hat{\theta}_0 r \frac{d\theta}{dt} + \hat{r}_0 \frac{dr}{dt} \quad \text{I-3.4}$$

donde r es la distancia de la posición de la partícula P o muestra de aire hacia el centro de la tierra, que esta relacionada por : - $\bar{r} = (\bar{a} + \bar{z})$, donde $\bar{a}$ es el radio de la tierra y $\bar{z}$ la distancia de la superficie de la tierra a la posición de la muestra de aire.

Diferenciando la ecuación(I-3.1) con respecto al tiempo:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \hat{\varphi}_0 \frac{du}{dt} + \hat{\theta}_0 \frac{dv}{dt} + \hat{r}_0 \frac{dw}{dt} + u \frac{d\hat{\varphi}_0}{dt} + v \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} + w \frac{d\hat{r}_0}{dt} \quad \text{I-3.5}$$

Para obtener los términos $\frac{d\hat{\varphi}_0}{dt}$, $\frac{d\hat{\theta}_0}{dt}$, $\frac{d\hat{r}_0}{dt}$ de la ecuación anterior- en forma esférica, se diferencian las ecuaciones (I-3.2a,b,c) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}_0}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} (\hat{i} \cos \theta \cos \varphi + \hat{j} \cos \theta \sin \varphi - \hat{k} \text{ sen } \theta) + \\ &+ \frac{d\varphi}{dt} (-\hat{i} \text{ sen } \theta \sin \varphi + \hat{j} \text{ sen } \theta \cos \varphi) \end{aligned} \quad \text{I-3.6a}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} (-\hat{i} \text{ sen } \theta \cos \varphi - \hat{j} \text{ sen } \theta \sin \varphi - \hat{k} \cos \theta) + \\ &+ \frac{d\varphi}{dt} (-\hat{i} \cos \theta \sin \varphi + \hat{j} \cos \theta \cos \varphi) \end{aligned} \quad \text{I-3.6b}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}_0}{dt} = -\hat{i} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \hat{j} \text{ sen } \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{I-3.6c}$$

Sustituyendo las expresiones para $\hat{r}_0, \hat{\theta}_0, \hat{\varphi}_0$, dadas por las ---- relaciones (I-3.2 a,b,c), en las ecuaciones (I-3.6 a,b) se obtiene:

$$\frac{d\hat{r}_0}{dt} = \hat{\theta}_0 \frac{d\theta}{dt} + \hat{\varphi}_0 \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{I-3.7a}$$

$$\frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = -\hat{r}_0 \frac{d\theta}{dt} + \hat{\varphi}_0 \cos \theta \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{I-3.7b}$$

y como $(-\hat{r}_0 \cos \theta - \hat{\theta}_0 \sin \theta) = (-i \cos \varphi - j \sin \varphi)$ se sustituye en la ecuación (I-3.6c) obteniendo:

$$\frac{d\hat{\varphi}_0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \hat{r}_0 \sin \theta - \frac{d\varphi}{dt} \hat{\theta}_0 \cos \theta \quad \text{I-3.7c}$$

Ahora de las relaciones (I-3.3 a,b) se despeja $\frac{d\varphi}{dt}$ y $\frac{d\theta}{dt}$ y sustituyendo en las ecuaciones (I-3.7 a,b,c) queda:

$$\frac{d\hat{r}_0}{dt} = \hat{\theta}_0 \frac{v}{r} + \hat{\varphi}_0 \frac{u}{r} \quad \text{I-3.8a}$$

$$\frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = -\hat{r}_0 \frac{v}{r} + \hat{\varphi}_0 \frac{u}{r} \cot \theta \quad \text{I-3.8b}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}_0}{dt} = -\hat{r}_0 \frac{u}{r} - \hat{\theta}_0 \frac{v}{r} \cot \theta \quad \text{I-3.8c}$$

Sustituyendo las relaciones (3.8 a,b,c) en la ecuación (I-3.5) para obtener la aceleración relativa en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} = & \hat{\varphi}_0 \left[\frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r} \cot \theta \right] + \hat{\theta}_0 \left[\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} - \frac{u^2}{r} \cot \theta \right] + \\ & + \hat{r}_0 \left[\frac{dw}{dt} - \frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r} \right] \end{aligned} \quad \text{I-3.9}$$

Regresando a la sección 2 ecuación (I-2.9), los términos del lado derecho deben ser transformados a coordenadas esféricas. El término de la aceleración de Coriolis $2\vec{\Omega} \times \vec{V}$ cuyas componentes para $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son $2\Omega \sin \theta$ y $2\Omega \cos \theta$ no teniendo componente en $\hat{i}$. Luego desarrollando el producto vectorial en coordenadas esféricas:

$$-2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2\Omega \left[\hat{\varphi}_0 (w \sin \theta - v \cos \theta) + \hat{\theta}_0 u \cos \theta - \hat{r}_0 u \sin \theta \right] \quad \text{I-3.10}$$

El siguiente término es el gradiente de presión $-\frac{1}{\rho} \nabla P$ donde el gradiente transformado a coordenadas esféricas es:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P = -\frac{1}{\rho} \left[\hat{r}_0 \frac{\partial P}{\partial r} + \hat{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \hat{\phi}_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] \quad \text{I-3.11}$$

La componente de la gravedad efectiva esta dada por:

$$\bar{g} = -\hat{r}_0 g \quad \text{I-3.12}$$

y las componentes de la fuerza de fricción son:

$$\bar{F}_r = \hat{\phi}_0 F_{\phi_0} + \hat{\theta}_0 F_{\theta_0} + \hat{r}_0 F_{r_0} \quad \text{I-3.13}$$

Sustituyendo las relaciones (I-3.9), (I-3.10), (I-3.11), ----

(I-3.12) y (I-3.13) en la ecuación (I-2.9) se obtiene:

$$\frac{du}{dt} + \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2\Omega w \sin \theta + 2\Omega v \cos \theta + F_{\phi} \quad \text{I-3.14a}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vw}{r} - \frac{w}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - 2\Omega u \cos \theta + F_{\theta_0} \quad \text{I-3.14b}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega u \sin \theta - g + F_{r_0} \quad \text{I-3.14c}$$

Estas son las componentes hacia el Este, Norte y hacia arriba - respectivamente de la ecuación de movimiento dada por unidad de masa en coordenadas esféricas; donde la derivada total se expande de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{I-3.15}$$

I-4 PRINCIPIOS TERMODINAMICOS.

La atmósfera esta compuesta por una mezcla de gases llamada --- aire; esta mezcla de gases contiene 78% de Nitrógeno, 21% de Oxígeno y el 1% sobrante de gases raros, dióxido de Carbono etc...

En la sección anterior se dedujeron las ecuaciones de movimiento -- para una partícula o muestra de aire sobre la tierra, pero esa muestra de aire esta sujeta a cambios de energía, y con esta variación de temperatura, presión, volumen, etc. , que son producidos como -- consecuencia de la radiación solar. Entonces para una descripción -- justa del comportamiento de la atmósfera se deben introducir algunos principios termodinámicos.

La termodinámica es el estudio de un sistema en sus estados de equilibrio inicial y final. Este estado de equilibrio de un sistema puede ser especificado completamente por las siguientes propiedades Presión, Temperatura y Volumen, a estas propiedades se les conoce -- como variables de estado o variables termodinámicas. La relación -- entre esas variables de estado o termodinámicas que definen el estado de un sistema, es la ecuación de estado para un gas perfecto, -- que se aplica a un gas real como puede ser el aire seco, esto es:

$$p\alpha = RT \quad I-4.1$$

donde p es la presión; α es el volumen específico; R la constante de los gases para el aire seco y T la temperatura.

La primera ley de la termodinámica se expresa como:

$$dq = du + dw \quad I-4.2$$

donde du es el cambio de energía interna por unidad de masa; dw -- es el trabajo ejecutado por unidad de masa y dq es la cantidad de calor cedida o agregada a una sustancia por unidad de masa.

Esta ley es una ley de conservación de la energía para un sistema termodinámico. También la ecuación (I-4.2) se puede expresar de la siguiente manera:

$$dq = du + p d\alpha \quad I-4.3$$

donde $p d\alpha = dw$.

Ahora bien si el proceso es isotérico ($\alpha = \text{cte.}$)

$$\left(\frac{dq}{dT}\right)_{\alpha} = \frac{du}{dT} = C_v$$

siendo C_v el calor específico a volumen constante; sustituyendo en esta en la ecuación (I-4.3)

$$dq = C_v dT + p d\alpha \quad \text{I-4.4}$$

Ahora notando que $C_p = C_v + R$ donde C_p es el calor específico a presión constante se puede reescribir la ecuación (I-4.4) como:

$$dq = C_p dT + \alpha dp \quad \text{I-4.5}$$

Para un proceso adiabático donde no hay intercambio de calor - con los alrededores $dq = 0$ y la ecuación (I-4.5) queda:

$$C_p dT - \alpha dp = 0$$

de la ecuación de estado para un gas ideal $\alpha = \frac{RT}{p}$, y dividiendo la ecuación anterior entre T :

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{I-4.6}$$

Integrando la ecuación (I-4.6):

$$T = \text{const. } p^{R/C_p} \quad \text{I-4.7}$$

a esta ecuación se le denomina Ecuación de Poisson, y es una forma de la ecuación adiabática.

La ecuación (I-4.6) puede expresarse como:

$$d(\ln T) = \frac{R}{C_p} d(\ln p)$$

Integrando con los límites desde $T_0 = \Theta$ hasta T y $P_0 = 1000\text{mb}$ hasta p , entonces la ecuación anterior se expresa como:

$$\Theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/C_p} \quad \text{I-4.8}$$

donde Θ es la temperatura potencial.

La temperatura potencial se define como la temperatura que adquiere una porción de aire, si ésta fuera comprimida o expandida adiabáticamente, desde un estado dado p y T hasta la presión de 1000 mb. -- Por lo tanto, un valor determinado de temperatura potencial, define un proceso adiabático dado e inversamente, para cada proceso adiabático la temperatura potencial debe ser constante.

Ahora dividiendo la ecuación (I-4.5) entre T y de la ecuación de gas ideal $R/p = \alpha/T$ se obtiene:

$$\frac{dq}{T} = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

que puede ser escrita como :

$$d\phi = \frac{dq}{T} = C_p d(\ln T) - R d(\ln p) \quad \text{I-4.9}$$

siendo $d\phi$ la entropía específica, que es una diferencial de una función del estado de un gas.

La entropía esta relacionada con la temperatura potencial del modo siguiente:

Diferenciando logarítmicamente la ecuación de la temperatura potencial (I-4.8) se tiene que :

$$C_p d(\ln \theta) = C_p d(\ln T) - R d(\ln P) \quad \text{I-4.10}$$

El lado derecho de la ecuación anterior se identifica con el lado derecho de la ecuación (I-4.9) por lo tanto:

$$d\phi = C_p d(\ln \theta) \quad \text{I-4.11}$$

Por lo tanto, el cambio de la entropía es una función de la temperatura potencial.

Integrando la relación (I-4.11)

$$\phi = C_p \ln \theta + \text{const.} \quad \text{I-4.12}$$

Esta relación muestra que en un proceso donde la temperatura potencial es constante, la entropía también permanece constante.

I-5 CONSERVACION DE LA MASA.

La presión atmosférica es una medida del peso de una columna -- vertical de aire, sobre una superficie que se prolonge hasta los -- límites superiores de la atmósfera de la tierra. Una variación en -- la presión atmosférica en un lugar determinado representa, por lo -- tanto, un acarreo de masa de aire de, o hacia el lugar determinado. Como una consecuencia del movimiento general del aire y de los cam-- bios de temperatura que ocurren dentro del mismo, hay acumulaciones y enrarecimientos de la masa del aire que ocupe los diferentes ele-- mentos de volumen de una columna de aire; pero estos cambios de ma-- sa se compensan en gran parte, quedando como resultado una masa --- relativamente pequeña, que produce un cambio de la presión en la -- superficie. Las acumulaciones de aire dentro de los distintos ele-- mentos del volumen de la columna de aire, ocurren a niveles donde-- existe convergencia de aire y de una manera similar ocurren enra--- recimientos de aire dentro de los elementos del volumen donde --- existe divergencia.

Por lo tanto, la convergencia y la divergencia representan un-- incremento o disminución de masa dentro de un volumen especificado. La convergencia dentro de una sección transversal de una columna -- atmosférica unidad, producirá un aumento en la presión en la base-- de la columna, e igualmente la divergencia dentro de una sección -- transversal similar, producirá una disminución en la presión en la base de la columna.

Considerando un elemento de volumen $\delta x, \delta y, \delta z$, dentro de algu-- na columna atmosférica como en la figura (I-4). En un intervalo de--

tiempo δt , la cantidad de masa que fluye por la cara izquierda en la dirección de x es $\rho u \, dy \, dz \, dt$; mientras que la masa que sale por la cara derecha es:

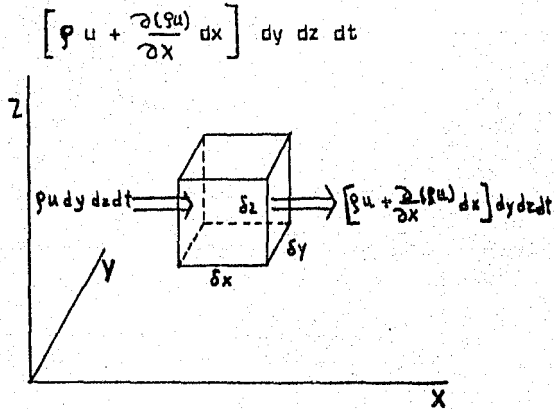


Figura I-4

por lo tanto el flujo neto de masa puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \rho u \, dy \, dz \, dt - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy \, dz \, dt = \\ & = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \, dy \, dz \, dt \end{aligned} \quad \text{I-5.1}$$

similarmemente las diferencias de masa que resultan a lo largo de los ejes Y y Z son:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx \, dy \, dz \, dt \quad \text{y} \quad - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx \, dy \, dz \, dt \quad \text{I-5.2}$$

El incremento de masa dentro del elemento de volumen durante este tiempo es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \, dx \, dy \, dz$$

donde ρ es justamente la densidad.

Por lo tanto, la suma de todas las contribuciones para el incremento de masa es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] \quad I-5.3$$

Esta ecuación es una forma de la ecuación de continuidad para la masa. Se puede escribir también como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad I-5.4$$

donde $\nabla \cdot (\rho \bar{V})$ es la divergencia de la masa dada por el lado derecho de la ecuación (I-5.3), y representa la pérdida de masa en el elemento de volumen.

Aplicando la identidad vectorial a la ecuación (I-5.4):

$$\nabla \cdot (\rho \bar{V}) = \rho \nabla \cdot \bar{V} + \bar{V} \cdot \nabla \rho$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad I-5.5$$

donde $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \rho$

La ecuación (I-5.5) requiere un tipo individual de cambio de densidad que es proporcional a la divergencia en tres dimensiones; mientras que la ecuación (I-5.4) requiere un tipo local de cambio de densidad proporcional a la divergencia de la masa en tres dimensiones.

Si se considera el flujo horizontal de la ecuación (I-5.5) la divergencia toma la siguiente forma:

$$\nabla_h \cdot \bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad I-5.6$$

esta ecuación representa la variación de la velocidad para el flujo horizontal.

Ahora considérese una sección transversal de pequeño espesor en una columna de aire, donde cualquier aumento o disminución de aire

causado por las variaciones en el flujo horizontal pasa a través de las caras verticales de la sección. La divergencia dentro de la --- sección transversal desaparecerá en este caso y :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

donde $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}$

o sea que:

$$\nabla_h \cdot \bar{V} = -\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{I-5.7}$$

Integrando la ecuación (I-5.7) con respecto a z desde z = 0 hasta una altura h se obtiene:

$$w(h) - w(0) = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -h \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right) \quad \text{I-5.8}$$

Donde la notación $\langle \rangle$ nos indica el promedio vertical de una cantidad. Por lo tanto, la diferencia entre la velocidad vertical, hasta arriba de la columna y en el fondo, esta dada por la profundidad de la columna y por la divergencia media horizontal.

I-6 ANALISIS DE ESCALA. ANALISIS DE ESCALA DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

En la atmósfera ocurren muchos fenómenos que están regidos por las mismas leyes de movimiento, continuidad, etc., como pueden ser alguna explosión que no está dentro del estudio del campo de la meteorología y que produce frentes de onda; alguna onda de los oestes o algún cumulonimbus que si son fenómenos meteorológicos, etcetera. Para poder diferenciar los movimientos meteorológicos de los que -- no lo son, se recurre al análisis de escala, que es una técnica para estimar las magnitudes de varios términos que describen diferentes fenómenos en las ecuaciones de movimiento. En el análisis de escala las siguientes cantidades se especifican: primero las magnitu-

des de las cantidades físicas que describen el estado de la atmósfera como son la presión, densidad, temperatura y velocidad; segundas amplitudes de las fluctuaciones de esas cantidades; y tercero la longitud, profundidad y escala de tiempo características de donde esas fluctuaciones ocurren.

Las ecuaciones de movimiento dadas en la sección (I-3), ecuaciones (I-3.14 a,b,c) describen todos los tipos de movimientos atmosféricos. Se usará el análisis de escala para eliminar términos con el fin de simplificar la ecuación y de eliminar los movimientos no deseados que están fuera del campo de la meteorología. Para esto se definirán las escalas de las variables basadas en valores observados para sistemas sinópticos de latitudes medias.

Escala de la velocidad horizontal:	$U \sim 10^3 \text{ cm seg}^{-1}$
Escala de la velocidad vertical:	$W \sim 1 \text{ cm seg}^{-1}$
Escala de longitud:	$L \sim 10^8 \text{ cm}$
Escala de profundidad:	$H \sim 10^6 \text{ cm}$
Escala de fluctuación de presión horizontal:	$P \sim 10^4 \text{ dina cm}^{-2}$
Escala de tiempo:	$L/U \sim 10^5 \text{ seg}$
Parámetro de Coriolis:	$f_0 = 2\Omega \cos \theta = 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$

Por lo tanto, la magnitud de cada término de las ecuaciones para el movimiento horizontal (I-3.14 a,b) para latitudes medias es la siguiente:

$$\left| \frac{du}{dt} \right| \sim \left| \frac{dv}{dt} \right| \sim \frac{U^2}{L} = 10^{-2} \text{ cm seg}^{-2} \quad A$$

$$\left| \frac{uw}{r} \right| \sim \left| \frac{vw}{r} \right| \sim \frac{UW}{r} = 10^{-6} \text{ cm seg}^{-2} \quad B$$

$$\left| \frac{uv}{r} \cot \theta \right| \sim \left| \frac{w^2}{r} \cot \theta \right| \sim \frac{U^2}{r} = 10^{-3} \text{ cm seg}^{-2} \quad C$$

$$\left| -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right| \sim \left| -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right| \sim \frac{\Delta P}{\rho L} = 10^{-1} \text{ cm seg}^{-2} \quad D$$

$$|2\Omega v \cos \theta| \sim |2\Omega u \cos \theta| \sim f\omega U = 10^{-1} \text{ cm seg}^{-2} \quad E$$

$$|2\Omega w \sin \theta| \sim f\omega W = 10^{-4} \text{ cm seg}^{-2} \quad F$$

Para la componente vertical de la ecuación de movimiento (I-3.14c) el gradiente de presión vertical puede ser tomado por P_0/H , donde P_0 es la presión a nivel de la superficie de 1000 mb, y H la altura de la tropósfera 10000 Km. , por lo tanto, la ecuación (I-3.14c)--- puede ser estimada para movimientos de escala sinóptica de latitud media del modo siguiente:

$$\left| \frac{dw}{dt} \right| \sim \frac{wU}{L} = 10^{-5} \text{ cm seg}^{-2} \quad G$$

$$|2\Omega u \sin \theta| \sim f\omega U = 10^{-1} \text{ cm seg}^{-2} \quad H$$

$$\left| -\frac{u^2 + v^2}{r} \right| \sim \frac{U^2}{r} = 10^{-3} \text{ cm seg}^{-2} \quad I$$

$$\left| -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \right| \sim \frac{P_0}{\rho H} = 10^3 \text{ cm seg}^{-2} \quad J$$

$$|g| \sim g = 10^3 \text{ cm seg}^{-2} \quad K$$

De las magnitudes de los términos desde A hasta F, se observa - en los términos D y E, que la fuerza de gradiente de presión y la fuerza de Coriolis son de la misma magnitud; ahora reteniendo estos dos términos en las ecuaciones (I-3.14 a,b) se obtiene la aproximación geostrofica:

$$-fv = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} \quad I-6.1$$

$$fu = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad I-6.2$$

donde $f = 2\Omega \cos \theta$. Entonces el balance geostrofico es una expresión de diagnóstico, que da la relación aproximada, entre el campo

de velocidad horizontal y el campo de presiones en sistemas de escala sinóptica para latitudes medias. El campo de velocidad horizontal que satisfacen las ecuaciones (I-6.1) y (I-6.2) se le llama --- viento geostrófico.

Observando las ecuaciones anteriores no se vé ninguna dependencia con respecto al tiempo, por lo tanto no pueden ser usadas para predecir el campo de velocidades. Entonces para obtener unas ecuaciones que puedan predecir como esta el sistema algún tiempo después, se necesita retener el término A de la aceleración en las ecuaciones anteriores, por lo tanto:

$$\frac{du}{dt} - fv = - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad \text{I-6.3}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \text{I-6.4}$$

Pero el análisis de escala anterior muestra que los términos de la aceleración son de un orden de magnitud menor que los términos de la fuerza de Coriolis y la fuerza del gradiente de presión. --- Entonces una medida conveniente de la magnitud de la aceleración, --- comparada con los otros términos, puede ser obtenida formando el --- cociente entre la aceleración y la fuerza de Coriolis:

$$Ro = \frac{U}{f_0 L} \quad \text{I-6.5}$$

A este cociente se le llama el "Número de Rossby". Entonces --- cuando $Ro \ll 1$ la aceleración relativa es muy pequeña frente a la de Coriolis y entonces hay un casi-equilibrio geostrófico.

Observando los términos de G a K, se encuentra que los de igual magnitud son el término J y el término K, por lo tanto, reteniendo esos dos términos en la ecuación (I-3.14) se obtiene:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = g$$

I-6.6

Esta ecuación indica que el campo de presión está en equilibrio hidrostático; esto es, que la presión en algún punto es simplemente igual a el peso de una columna unitaria de aire arriba de ese punto.

CAPITULO II

COORDENADAS ISOBARICAS Y ECUACION DE VORTICIDAD

En el presente capítulo se transformarán las ecuaciones de movimiento de coordenadas cartesianas a coordenadas isobáricas, ya que simplifica enormemente las ecuaciones, al eliminar algunos términos como la densidad en la ecuación de movimiento cartesiana; además se tratará la circulación y la vorticidad como medidas del giro o rotación de un fluido atmosférico, y se derivará la ecuación de vorticidad tanto en coordenadas cartesianas como en coordenadas isobáricas a partir de las ecuaciones de pronóstico aproximado deducidas en el capítulo I.

II-1 COORDENADAS ISOBARICAS.

Generalmente en meteorología se hace uso de los mapas para representar la situación presente o la situación futura; para ello se acostumbra mostrar superficies de presión constante, por lo cual se fija la presión, y se consideran las diferentes alturas a esa presión, las líneas que resultan de ese procedimiento se denominan isohipsas o contornos, esto es lo que genera la superficie isobárica. Por este motivo, es necesario considerar un sistema de coordenadas donde X y Y sean los dos ejes horizontales y la posición sobre el eje vertical sea especificada por la presión.

Matemáticamente esto implica una transformación de z en p , como una coordenada vertical independiente, y la expresión para el gradiente de presión horizontal, estaría en términos de el gradiente de altura a presión constante; así mismo una derivada con respecto a z puede ser escrita como:

Tomando la aproximación hidrostática (I-6.6) la ecuación transformada queda:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{II-1.2}$$

Ahora derivando la expresión para el gradiente de presión horizontal, determinandolo punto por punto a lo largo de una superficie inclinada arbitraria; para esto, se considerará una sección transversal en el plano x, z como la figura (II-1). Se puede ver de la figura (II-1) que la igualdad siguiente es correcta:

$$\frac{p_3 - p_1}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta x} = \frac{p_2 - p_3}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x} \quad \text{II-1.3}$$

tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$ y usando la aproximación hidrostática (I-6.6) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_q + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_q \quad \text{II-1.4}$$

donde los subindices z y q denotan la altura y alguna propiedad --- constante respectivamente.

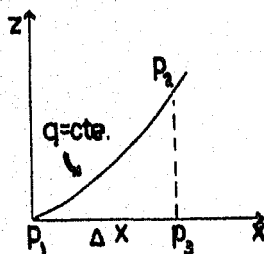


Figura II-1

La ecuación (II-1.4) relaciona la fuerza del gradiente de presión por unidad de masa, con la fuerza del gradiente de presión por unidad de masa a lo largo de la superficie q constante. El último término de la ecuación (II-1.4) es la pendiente de la superficie q .

Suponiendo que la superficie es una superficie isobérica, o sea que $q = p$, entonces las ecuaciones para transformar el sistema x, y, z , y t , al sistema x, y, p, t , son las siguientes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{II-1.5a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{II-1.5b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{II-1.5c}$$

Estas tres ecuaciones contienen todo lo necesario para transformar las ecuaciones básicas de meteorología a un sistema x, y, p, t , de coordenadas independientes. Luego aplicando estas tres relaciones al operador derivada total (I-3.15), entonces en un sistema x, y, z, t :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Sustituyendo las relaciones (II-1.5 a, b, c) de transformación se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} = & \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - \rho g w \frac{\partial}{\partial p} + \\ & + \rho g \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \right] \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned} \quad \text{II-1.6}$$

Aplicando el operador anterior (II-1.6) a la presión p y definiendo $\omega = \frac{dp}{dt}$ se obtiene:

$$\frac{dp}{dt} = \omega = - \rho g w + \rho g \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \right] \quad \text{II-1.7}$$

Luego sustituyendo el valor anterior de ω en el operador (II-1.6):

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{II-1.8}$$

Por lo tanto, la derivada total (II-1.8) toma la misma forma que el operador derivada total en el sistema x, y, z, t , excepto que $\omega \frac{\partial}{\partial p}$

reemplaza a $w \frac{\partial}{\partial z}$; por lo que la variable w es equivalente a la velocidad vertical.

Aplicando los operadores (II-1.5 a,b) y (II-1.8) a las ecuaciones de pronóstico aproximado (I-6.3) y (I-6.4) para transformarlas a coordenadas isobáricas se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p + w \frac{\partial u}{\partial p} - f v &= -g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + w \frac{\partial v}{\partial p} + f u &= -g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \end{aligned}$$

Nombrando Φ , al geopotencial definido como el trabajo que se necesita para elevar una masa unitaria desde la superficie de la tierra hasta la altura que se considera; por lo tanto, las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p + w \frac{\partial u}{\partial p} - f v = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{II-1.9a}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p + u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p + v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + w \frac{\partial v}{\partial p} + f u = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{II-1.9b}$$

De igual manera, se deriva la ecuación de continuidad (I-5.5) - sustituyendo las relaciones (II-1.2), (II-1.5 a,b), (II-1.7) y (II-1.8) en cada uno de los términos correspondientes quedando:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial w}{\partial p} \quad \text{II-1.10}$$

Esta forma de la ecuación de continuidad es mucho más sencilla porque no involucra la densidad, ni tampoco derivadas con respecto al tiempo.

Para derivar la ecuación del viento geostrofico en coordenadas isobáricas se sustituye en las ecuaciones (I-6.1) y (I-6.2), los --

operadores (II-1.5 a,b) para obtener:

$$-f v = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{II-11a}$$

$$f u = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{II-11b}$$

Siendo Φ el geopotencial como se definió anteriormente; se observa que en estas ecuaciones (II-11 a,b), la densidad no aparece y que el gradiente horizontal de un geopotencial dado implica el mismo -- viento geostrófico, mientras que el gradiente de presión horizontal implica diferentes valores del viento geostrófico dependiendo de la densidad.

II-2 CIRCULACION Y VORTICIDAD.

La circulación y la vorticidad son dos medidas de la tendencia a girar de una muestra de aire, ubicada dentro de la atmósfera. Matemáticamente se define a la circulación C de una curva cerrada como la integral alrededor de la curva como se observa en la figura (II-2)., por lo tanto:

$$C = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint |\vec{V}| \cos \alpha \, dl \quad \text{II-2.1}$$

donde $\vec{V}$ representa la magnitud de la velocidad total, α el ángulo entre el vector velocidad y la curva, $d\vec{l}$ es el incremento de distancia a lo largo de la curva, y el símbolo $\oint$ significa que la integral esta tomada a lo largo de una curva cerrada, contra las manecillas del reloj, a esta trayectoria se le denomina "Circulación -- Ciclónica", y cuando es en el mismo sentido de las manecillas del reloj se la llama "Circulación anticiclónica". Entonces C es una --

medida del tamaño para el que el fluido exhiba su movimiento rotacional.

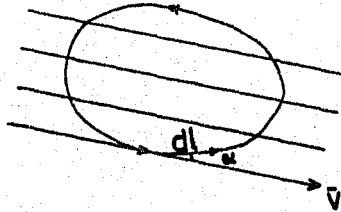


Figura II-2

Si dx, dy, dz , son las componentes de $d\vec{l}$, y $\vec{V} = iu + jv + kw$ -- entonces:

$$C = \oint (u dx + v dy + w dz) \quad \text{II-2.2}$$

Tomando la razón de cambio con el tiempo de la circulación:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \left(\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right) + \oint \left[u \frac{d}{dt}(dx) + v \frac{d}{dt}(dy) + w \frac{d}{dt}(dz) \right]$$

Notando que en la segunda integral de la derecha se diferenciaron incrementos de distancia a lo largo de la curva, y por deducciones simples se llega a que esta integral es cero porque es una integral de línea cerrada de una diferencial exacta:

$$\oint \left[u \frac{d}{dt}(dx) + v \frac{d}{dt}(dy) + w \frac{d}{dt}(dz) \right] = \oint d \left[\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right] = 0$$

Entonces:

$$\frac{dC}{dt} = \oint \left[\frac{du}{dt} dx + \frac{dv}{dt} dy + \frac{dw}{dt} dz \right] = \oint \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad \text{II-2.3}$$

Sustituyendo el valor de la aceleración de la ecuación de movimiento (I-2.9) en la ecuación anterior (II-2.3) y descomponiéndola en sus componentes respectivamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & - \oint \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - \oint f (v dx - u dy) + \\ & + \oint \left(\frac{F_x}{m} dx + \frac{F_y}{m} dy + \frac{F_z}{m} dz \right) + \oint g dz \end{aligned} \quad \text{II-2.4}$$

La cuarta integral de la derecha de la ecuación anterior es cero, ya que es una integral de línea cerrada de una diferencial exacta, por lo tanto:

$$\frac{dC}{dt} = - \oint \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \oint f(u dy + v dx) + \oint \left(\frac{F_x}{m} dx + \frac{F_y}{m} dy + \frac{F_z}{m} dz \right) \quad \text{II-2.5}$$

Este es el teorema de circulación de Byerknes, que describe el tipo de cambio con el tiempo de una medida de la rotación de un fluido.

Para establecer la relación de la circulación con la vorticidad se considerará un circuito formado de un rectángulo infinitesimal, figura (II-3). La circulación siguiendo los lados A, B, C, D, es:

$$dC = u dx - v dy + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx$$

$$dC = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA$$

entonces:

$$\frac{dC}{dA} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

donde la vorticidad se define como la circulación entre el elemento de área, por lo tanto, la vorticidad en el plano x, y es:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{II-2.6a}$$

La vorticidad en el plano x, z y y, z, se derivan similarmente y se denotan respectivamente por:

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{II-2.6b}$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{II-2.6c}$$

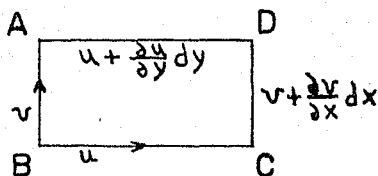


Figura II-3

En términos más generales, la relación entre la vorticidad y la circulación esta dada por el teorema de Stokes aplicado al vector velocidad:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} d\sigma \quad \text{II-2.7}$$

donde σ es el área encerrada por la curva $\vec{l}$ de la figura (II-2), y $\hat{n}$ es la normal unitaria al elemento de área $d\sigma$. Por lo que la relación (II-2.7), dice que la circulación a lo largo de un circuito cerrado, es igual a la integral de la componente normal de vorticidad sobre el área encerrada por el circuito. Luego como la vorticidad se puede medir en función del rotacional de la velocidad, entonces va a ser función de la curvatura de la trayectoria alrededor de la cual se mueve la muestra de aire. La vorticidad también es función del cizallamiento, este es, el cambio de velocidad por unidad de distancia en una dirección normal a la dirección del movimiento. Matemáticamente, sobre una distancia infinitesimal, el cizallamiento se expresa como $\frac{\delta \vec{v}}{\delta \hat{n}}$, donde $\delta \vec{v}$ es el cambio de velocidad, y $\delta \hat{n}$ es el elemento de distancia normal a la velocidad; ahora considerando la figura (II-2.3) se expresa la vorticidad en función de la curvatura y el cizallamiento; de la figura, se ve que la circulación es:

$$C = \vec{v} [\delta s + \delta(\delta s) - \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{n}} \delta \hat{n}] \delta s \quad \text{II-2.8}$$

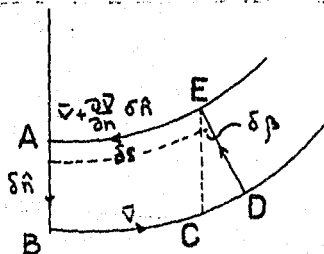


Figura II-4

del triángulo $\overline{CDE}$ se obtiene $d(\delta s) = \delta p \delta \hat{n}$, donde δp es el cambio angular en la dirección del viento en una distancia δs , entonces se obtiene:

$$C = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \bar{V} \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

tomando el límite cuando δn y δs tienden a cero, para obtener la vorticidad:

$$\zeta = \lim_{\delta n \delta s \rightarrow 0} \frac{C}{\delta n \delta s} = - \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} + \frac{\bar{V}}{R_s}$$

donde R_s es el radio de curvatura de las líneas de flujo; por lo que, el primer término representa el cambio de velocidad a lo largo de R_s , y por lo tanto, es el término de cizallamiento; y el segundo término representa la curvatura.

II-3 ECUACION DE VORTICIDAD.

Para derivar la ecuación de vorticidad se hará uso de las ecuaciones de pronóstico aproximado (I-6.3) y (I-6.4), en su forma cartesiana; primero se diferencia la ecuación (I-6.3) con respecto a y y luego se diferencia la ecuación (I-6.4) con respecto a x , después restandolas y sabiendo que $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{g^2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

ya que f solo depende de y , entonces $\frac{df}{dt} = v \frac{df}{dy}$, por lo tanto;

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta + f)}{dt} = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + \frac{1}{g^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad \text{II-3.1}$$

La ecuación (II-3.1) es la ecuación de vorticidad en su forma cartesiana; el término de la izquierda es la derivada con respecto al-

tiempo de la vorticidad absoluta ($\zeta + f$) que esta compuesta por la vorticidad debida al movimiento relativo a la superficie de la tierra más la vorticidad de la superficie de la tierra. Esta suma es la vorticidad absoluta de una muestra de aire vista desde un marco inercial. Por lo tanto, la ecuación (II-3.1), dice que la vorticidad absoluta de una muestra de aire pueda cambiar solamente a través de los tres términos de la derecha.

El primer término se le llama "Término de la Divergencia", esto es, que la vorticidad se genera por medio de la divergencia horizontal, o sea que, si hay divergencia horizontal, el área encerrada por muestras de aire se incrementara con el tiempo; y si la circulación se conserva la vorticidad absoluta promedio de la muestra de aire debe disminuir.

El segundo término de la derecha de la ecuación (II-3.1) se le denomina "Término de Torsión", y representa la vorticidad vertical que se genera por la inclinación de las componentes de vorticidad orientadas horizontalmente en la vertical.

El tercer término es el "Término Solenoidal", este término corresponde al término solenoidal del teorema de circulación aplicado a un circuito infinitamente pequeño. Para mostrar esta relación con el teorema de circulación aplicamos el teorema de Stokes (II-2.7) a el término solenoidal:

$$-\oint \frac{\nabla P}{\rho} \cdot d\vec{l} = - \iint_{\sigma} (\nabla \times \vec{\zeta}' \cdot \nabla P) \cdot \hat{k} \, d\sigma \quad \text{II-3.2}$$

como $[\nabla \times (\vec{\zeta}' \cdot \nabla P)] = \nabla \vec{\zeta}' \times \nabla P$

Entonces:

$$\oint \vec{\zeta}' \cdot d\vec{P} = - \iint_{\sigma} (\nabla \vec{\zeta}' \times \nabla P) \cdot \hat{k} \, d\sigma$$

pero
$$\bar{\zeta}^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = (\nabla \bar{\zeta}' \times \nabla p) \cdot \hat{k} \quad \text{II-3.3}$$

Por lo tanto, el término solenoidal contribuye al cambio de vorticidad, y es el límite del término solenoidal en el teorema de circulación dividido por el área cuando el área tiende a cero.

La ecuación de vorticidad anterior (II-3.1) se puede expresar en forma vectorial simplificando la notación; para esto, se escriben las ecuaciones de pronóstico aproximado (I-6.3) y (I-6.4) en forma vectorial:

$$\frac{d\bar{V}_h}{dt} - f \bar{V}_h \times \hat{k} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla_h p \quad \text{II-3.4}$$

donde el subíndice h significa movimiento en la horizontal. Aplicando el operador derivada total (I-3.15):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V}_h \cdot \nabla_h + w \frac{\partial}{\partial z}$$

a la ecuación (II-3.4) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \bar{V}_h}{\partial t} + (\bar{V}_h \cdot \nabla_h) \bar{V}_h + w \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} - f \bar{V}_h \times \hat{k} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla_h p$$

Aplicando la siguiente identidad vectorial en la ecuación anterior:

$$(\bar{V}_h \cdot \nabla_h) \bar{V}_h = \nabla_h \left(\frac{\bar{V}_h \cdot \bar{V}_h}{2} \right) + \hat{k} \times \bar{V}_h \zeta$$

se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{V}_h}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\bar{V}_h \cdot \bar{V}_h}{2} \right) + \hat{k} \times \bar{V}_h \zeta + w \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla_h p + f \bar{V}_h \times \hat{k}$$

Sabiendo que $f = 2\Omega \cos \theta$ para la colatitud, y $\bar{\Omega} = \hat{k} \Omega$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial t} = & - \nabla_h \left(\frac{\bar{V}_h \cdot \bar{V}_h}{2} \right) - \hat{k} \times \bar{V}_h \zeta - w \frac{\partial \bar{V}_h}{\partial z} - 2 \cos \theta \bar{\Omega} \times \bar{V}_h - \\ & - \frac{1}{\bar{\sigma}} \nabla_h p \end{aligned} \quad \text{II-3.5}$$

donde $\zeta = \hat{k} \cdot (\nabla \times \bar{V})$

Aplicando el operador $\hat{k} \cdot \nabla \times$ a la ecuación (II-3.5) se obtiene:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \hat{k} \cdot \nabla \times (\hat{k} \times v_h \zeta) - \hat{k} \cdot \nabla \times (w \frac{\partial v_h}{\partial z}) - \hat{k} \cdot \nabla \times (\bar{\zeta}' \nabla_h p) - \hat{k} \cdot \nabla \times (2 \cos \theta \bar{\Omega} \times \nabla_h) \quad \text{II-3.6}$$

Sustituyendo las siguientes identidades vectoriales a la ecuación -

$$\begin{aligned} \nabla \times (\bar{A} \times \bar{B}) &= (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{A} - \bar{B} (\nabla \cdot \bar{A}) - (\bar{A} \cdot \nabla) \bar{B} + \bar{A} (\nabla \cdot \bar{B}) \\ \nabla \times (\phi \bar{A}) &= (\nabla \phi) \times \bar{A} + \phi (\nabla \times \bar{A}) \end{aligned}$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son vectores y ϕ un escalar, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \kappa \cdot \left(\frac{\partial v_h}{\partial z} \times \nabla w \right) - w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \hat{k} \cdot (\nabla \times \nabla p) - v_h \cdot \nabla (\zeta + f) - \\ &- (\zeta + f) \nabla \cdot v_h \end{aligned} \quad \text{II-3.7}$$

Esta ecuación es la ecuación de vorticidad en su forma vectorial.

II-4 ANALISIS DE ESCALA DE LA ECUACION DE VORTICIDAD.

Por medio del análisis de escala del capítulo I sección 6, las ecuaciones de movimiento fueron simplificadas, despreciando los movimientos de poca importancia en meteorología; igualmente en esta sección se hará el análisis de escala de la ecuación de vorticidad, para estimar la magnitud de varios términos. Las escalas características para el campo de variables basadas sobre magnitudes típicas observadas para movimientos sinópticos de latitudes medias son:

Velocidad horizontal :	$U \sim 10^3 \text{ cm seg}^{-1}$
Velocidad vertical:	$w \sim 1 \text{ cm seg}^{-1}$
Escala de longitud :	$L \sim 10^8 \text{ cm}$
Escala de profundidad :	$H \sim 10^6 \text{ cm}$
Fluctuaciones de presión horizontal:	$p \sim 10^4 \text{ dina cm}^{-2}$
Fluctuación de densidad fraccional:	$\frac{\delta \rho}{\rho} \sim 0.02$
Escala de tiempo:	$L/U \sim 10^5 \text{ seg}$
Parámetro de Coriolis:	$f_0 \sim 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$
Parámetro beta:	$\beta \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \sim 10^{-13} \text{ cm seg}^{-2}$

Notando que: $|\zeta| = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \lesssim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ seg}$

comparado con el parámetro de Coriolis $\zeta/f_0 \leq 10^{-1}$, por lo tanto, en sistemas sinópticos para latitudes medias, la vorticidad relativa es pequeña comparada con la vorticidad de la tierra, entonces puede ser despreciada comparada con el término de la divergencia.

$$(\zeta + f)(\nabla \cdot \bar{V}_h) = f(\nabla \cdot \bar{V}_h)$$

donde: $\nabla \cdot \bar{V}_h = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$

La magnitud de cada término de la ecuación de vorticidad ----

(II-3.1) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right| &\sim \left| u \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right| \sim \left| v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right| \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} \text{ seg}^{-2} & L \\ \left| w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right| &\sim \frac{U W}{L H} \sim 10^{-11} \text{ seg}^{-2} & M \\ \left| v \frac{\partial f}{\partial y} \right| &\sim U \beta \sim 10^{-10} \text{ seg}^{-2} & N \\ \left| f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right| &\lesssim \frac{f_0 U}{L} \sim 10^{-9} \text{ seg}^{-2} & O \\ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right| &\lesssim \frac{W U}{H L} \sim 10^{-11} \text{ seg}^{-2} & P \\ \left| \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right| &\lesssim \frac{\delta \varphi}{f^2} \frac{\delta p}{L^2} \sim 2 \times 10^{-11} \text{ seg}^{-2} & Q \end{aligned}$$

Reteniendo los términos de orden $10^{-10} \text{ seg}^{-2}$, se obtiene, como --- primera aproximación de la ecuación de vorticidad para movimientos de escala sinóptica sobre latitudes medias:

$$\frac{d_h(\zeta + f)}{dt} = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \text{II-4.1}$$

La ecuación anterior establece que el cambio de vorticidad ---- absoluta sobre la escala sinóptica para latitudes medias se debe al efecto de la divergencia. En lugares donde no hay divergencia ---

horizontal, en particular en el nivel de no-divergencia (más o menos al nivel de 500 mb); entonces la ecuación (II-4.1) queda:

$$\frac{d}{dt} (\zeta + f) = 0 \quad \text{II-4.2}$$

lo que significa que $(\zeta + f)$ es constante, y, por lo tanto, la vorticidad absoluta no varía, lo que proporciona un procedimiento para predecir la futura curvatura de las isohipsas.

Ahora se derivará la ecuación de vorticidad en coordenadas isobáricas. Esta derivación es parecida a la derivación de la ecuación de vorticidad en coordenadas cartesianas, por lo tanto, diferenciamos las ecuaciones de movimiento (II-1.9 a,b) con respecto a y la primera, y la segunda con respecto a x , y restandolas se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)_p + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = - (f + \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p - \\ - (\rho v + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_p \frac{\partial u}{\partial p} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_p \frac{\partial v}{\partial p} \end{aligned} \quad \text{II-4.3}$$

Como se observa la ecuación de vorticidad en el sistema x, y, p, t , no contiene al término solenoidal que apareció en la ecuación de vorticidad en el sistema x, y, z, t . El significado de los términos de la ecuación (II-4.3), es análogo a cada uno de los términos de la ecuación de vorticidad cartesiana; excepto que la componente vertical de la vorticidad ζ no es la misma en el sistema cartesiano, por lo que, sustituyendo las expresiones (II-1.5 a,b) en $\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_z - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_z$ se obtiene:

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_p - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p + \rho g \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p \frac{\partial v}{\partial p} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_p \frac{\partial u}{\partial p} \right] \quad \text{II-4.4}$$

y similarmente para la divergencia horizontal:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + f g \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \frac{\partial u}{\partial p} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_p \frac{\partial v}{\partial p} \right] \quad \text{II-4.5}$$

los últimos términos de la derecha de las ecuaciones (II-4.4) y --
(II-4.5) son correcciones a la inclinación de las curvas isobáricas
y son usualmente muy pequeños.

CAPITULO III

FILTRADO DE ONDAS

Las ecuaciones obtenidas en los capítulos anteriores expresan todo tipo de movimientos que ocurren en la atmósfera, y esto hace que se pierdan los movimientos meteorológicos importantes que se desean describir. En este capítulo se verán las propiedades físicas de estos movimientos no deseados (ondas de sonido y ondas de gravedad) para excluirlas de las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente, y así hacer una gran simplificación a estas ecuaciones; este proceso se le llama filtrado.

III-1 ONDAS EN LA ATMOSFERA.

Como el aire es un medio elástico, cualquier perturbación que se propague en él lo hace en forma de movimiento ondulatorio. Los distintos tipos de perturbaciones que se consideran son:

Las vibraciones sonoras que producen ondas longitudinales, que son ondas en donde las oscilaciones de las partículas son paralelas a la dirección de propagación (ondas sonoras); la acción de la gravedad hace que se hundan las masas de aire más densas y asciendan las más ligeras, esto origina perturbaciones que se propagan en forma de ondas transversales-verticales, en donde la partícula se mueve hacia arriba o hacia abajo mientras la onda se propaga horizontalmente, (ondas de gravedad) estas ondas son similares a las que se producen al perturbar la superficie del agua en un estanque; otro tipo de perturbación son las originadas por movimientos individuales horizontales del aire (viento) hacia el sur o hacia el norte, estas perturbaciones se propagan en forma de ondas transversales-horizontales que son propiamente los movimientos meteorológicos que se quieren describir.

III-2 ONDAS DE SONIDO.

El sonido se propaga por la compresión adiabática alternada y la expansión del medio, esto es lo que origina que las ondas sean longitudinales, entonces las trayectorias de las partículas serán líneas paralelas al eje x (ver figura I-1), por lo tanto, la velocidad será u y $v = w = 0$, (porque $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$ y $w = \frac{dz}{dt}$). Entonces se usará la ecuación de movimiento de componente u , ecuación (I-6.3), la ecuación de continuidad (I-5.5) y la ecuación de energía termodinámica, que se obtiene de la primera ley de la termodinámica (I-4.4) para procesos adiabáticos y la ecuación de estado (I-4.1). Las tres ecuaciones son:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.1a}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{III-2.1b}$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dt} \quad \text{III-2.1c}$$

donde $\gamma = C_p / C_v$

Sustituyendo $\frac{d\rho}{dt}$ de la ecuación (III-2.1c) en la ecuación (III-2.1b) se obtiene:

$$\frac{dp}{dt} + (\gamma p) \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Haciendo $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$ igual a cero por ser el movimiento hacia el este; entonces las dos ecuaciones resultantes son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.2a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.2b}$$

La solución de las dos ecuaciones anteriores puede encontrarse aplicando el método de perturbación, que consiste en referirse a un -- estado de equilibrio más una pequeña desviación de esos valores de equilibrio, por lo tanto:

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad \varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad \text{y} \quad p = \bar{p} + p'$$

siendo $\bar{u}$, $\bar{\varphi}$ y $\bar{p}$, las funciones en los estados de equilibrio y u' , φ' y p' las perturbaciones. Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones (III-2.2 a,b) se tiene:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\varphi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi'}{\bar{\varphi}} \right)^n \right] \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + (\bar{u} + u') \frac{\partial p'}{\partial x} + \gamma (\bar{p} + p') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0$$

donde $\frac{1}{\bar{\varphi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi'}{\bar{\varphi}} \right)^n \right] = \frac{1}{\bar{\varphi}} \left(1 + \frac{\varphi'}{\bar{\varphi}} \right)^{-1} = \frac{1}{\bar{\varphi} + \varphi'}$

Si $|u'| \ll |\bar{u}|$, $|\varphi'| \ll |\bar{\varphi}|$ y $|p'| \ll |\bar{p}|$ se desprecian los términos -- que contengan cantidades de perturbación, entonces:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\varphi}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.3a}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.3b}$$

Estas dos ecuaciones se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{1}{\bar{\varphi}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.4a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.4b}$$

siendo $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ un operador entonces:

$$\textcircled{1} u' + \frac{1}{\bar{\varphi}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.5a}$$

$$\textcircled{2} p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-2.5b}$$

Aplicando el mismo operador a la ecuación (III-2.5b), y ya que el operador conmuta se obtiene:

$$\partial \partial p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial}{\partial x} \partial u' = 0$$

pero de la ecuación (III-2.5a) despejando $\partial u' = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p'}{\partial x}$ y sustituyéndolo en la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) p' = \frac{\gamma \bar{p}}{\gamma} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} \quad \text{III-2.6}$$

cuya solución es de la forma:

$$p' = A e^{i\alpha(\lambda - ct)} \quad \text{III-2.7}$$

donde A es el factor de amplitud constante, y el número de onda, c es la velocidad de fase; luego sustituyendo la solución (III-2.7) en la ecuación (III-2.6) se obtiene una ecuación de la forma:

$$c^2 - 2c\bar{u} + \left(\bar{u}^2 - \frac{\gamma \bar{p}}{\gamma} \right) = 0$$

siendo c la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio, -- por lo tanto, resolviendo la ecuación anterior:

$$c = \bar{u} \pm \left(\frac{\gamma \bar{p}}{\gamma} \right)^{1/2}$$

sustituyendo $\bar{p}/\gamma = RT$ que es la ecuación de estado, la velocidad de fase también se puede escribir como:

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma RT} \quad \text{III-2.8}$$

La relación (III-2.8) da la velocidad del sonido en un fluido. El desarrollo anterior dice que la característica esencial para que --

las ondas de sonido existan es que los gradientes de presión se ---
deben fundamentalmente a la compresión adiabática, esto es, que las
ondas de sonido son propagadas en incrementos adiabáticos (o decre-
mentos) de presión debido a la compresión (o enrarecimiento) del -
medio.

III-3 ONDAS DE ROSSBY.

Es conveniente conocer las propiedades físicas de las ondas me-
teorológicas ó de Rossby, que son las que se intentan describir; --
estas ondas meteorológicas son ondas transversales-horizontales, --
por lo tanto, la onda yace en el plano horizontal (x,y), por lo que
 $w = 0$, las ecuaciones de componente u, v son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{III-3.1a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{III-3.1b}$$

y la ecuación de continuidad para $w = 0$ es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{III-3.1c}$$

Diferenciando (III-3.1a) con respecto a y , y (III-3.1b) con respec-
to a x, luego restándolas se encuentra la ecuación de vorticidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \\ + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{III-3.2}$$

donde $\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ por la ecuación (III-3.1c) el último término desaparece, y como f no depende del tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\zeta + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\zeta + f) = 0 \quad \text{III-3.3}$$

esto corresponde a:

$$\frac{d}{dt}(\xi + f) = 0$$

que es la ecuación obtenida en el capítulo II y se le conoce como - "Principio de Conservación de la Vorticidad Absoluta".

Para hallar la velocidad de fase de las ondas transversales-horizontales las restringiremos a viajar en la dirección x , o sea, haciendo u y v independientes de la coordenada y , por lo que la vorticidad $\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ se reduce a $\frac{\partial v}{\partial x}$, luego f es independiente de x y t por lo que la ecuación (III-3.2) da:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0 \quad \text{III-3.4}$$

donde $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ el parámetro de Rossby, como v no depende de y la ecuación de continuidad sera :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

luego v es nada más función de t e independiente de y ; por lo tanto (III-3.4) es casi-líneal y tiene la siguiente solución ondulatoria:

$$v = A e^{i\alpha(x-ct)} \quad \text{III-3.5}$$

Sustituyendo la solución (III-3.5) en la ecuación (III-3.4), y --- haciendo las correspondientes derivaciones se obtiene que:

$$c = \bar{u} - \beta / \alpha^2 \quad \text{III-3.6}$$

que da la velocidad de fase de las ondas transversales-horizontales.

III-4 ONDAS DE GRAVEDAD.

Las ondas de gravedad tienen la forma de las ondas transversales-verticales, por lo tanto, el movimiento de las partículas queda restringido al plano (y, z) . Para entender más este tipo de ondas se considerarán dos capas homogéneas en la atmósfera con densidad ρ_1 y ρ_2 separadas por una superficie de densidad discontinua ver figura- (III-1) , por lo tanto, para una atmósfera incompresible se observa que el gradiente de presión horizontal en la capa inferior es:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{III-4.1}$$

De la relación anterior se observa que el gradiente de presión horizontal es independiente de la altura z , esto implica, que la aceleración es independiente de la altura, lo mismo que la velocidad, - por lo tanto, v y $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Considerando la ecuación de movimiento de componente u (I-6.4) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.2}$$

Como $v = 0$ la ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{III-4.3}$$

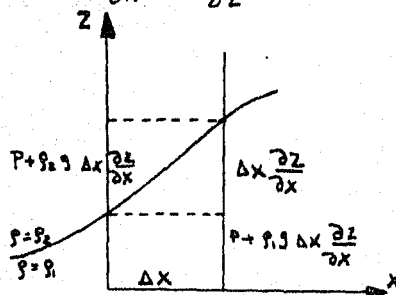


Figura III-1

Integrando con respecto a z la ecuación (III-4.3) desde 0 a una altura z , suponiendo que la superficie de la tierra es plana entonces $w_0 = 0$ en $z = 0$, y la velocidad vertical w_z esta dada en la superficie de discontinuidad como dz/dt por lo que la ecuación (III-4.3) queda:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.4}$$

Por lo tanto las ecuaciones (III-4.2 y 4.4) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas u, z , cuya solución se obtiene usando el método de perturbación usado anteriormente en la sección (III-2), por consiguiente en el estado de equilibrio $u = \bar{u}$, $z = \bar{z}$ de tal manera que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 0$ y u' y z' representan una ligera desviación de $\bar{u}$ y $\bar{z}$ entonces:

$$u = (\bar{u} + u') \quad y \quad z = (\bar{z} + z')$$

sustituyendo lo anterior en las ecuaciones (III-4.2 y 4.4) se obtiene:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + g \left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right) \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.5}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial z'}{\partial x} + \bar{z} \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.6}$$

Eliminando v' de este par de ecuaciones queda que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) z' = g z \left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right) \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}$$

Esta ecuación es una ecuación de onda, cuya solución es de la forma:

$$z' = A e^{i\alpha(x-ct)}$$

donde A es la amplitud, α el número de onda y c la velocidad de fase, donde la velocidad de fase es :

$$c = \bar{u} \pm [gz(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})]^{1/2} \quad \text{III-4.7}$$

que es la velocidad de las ondas gravitacionales en agua superficial o poco profunda. Por lo tanto, lo anterior dice que las ondas gravitacionales se propagan por cambios de presión que se deben al peso del aire, mientras que las de sonido se deben al peso del aire mientras que las de sonido se deben a la variación de la presión hidrostática produciendo los cambios de presión.

Generalizando lo anterior para una atmósfera incompresible la relación (III-4.1) será:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{III-4.8a}$$

similarmente para la componente y:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{III-4.8b}$$

Sustituyendo las relaciones (III-4.8 a,b) en las ecuaciones de movimiento, para las componentes u y v (I-6.3, 6.4) se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

notando que u, v no depende de la altura z entonces se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + g \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.9a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + g \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{III-4.9b}$$

Derivando (III-4.9b) con respecto a x, y (III-4.9a) con respecto a Y, y luego restándolas se obtiene la ecuación de vorticidad:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial Y} + v \frac{\partial f}{\partial Y} + (f+f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = 0 \quad \text{III-4.10}$$

donde: $f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial Y}$

De la misma forma que se obtuvo la ecuación (III-4.4), de la ecuación de continuidad, tomando ahora la componente u se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial Y} + z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = 0 \quad \text{III-4.11}$$

Las ecuaciones (III-4.9a, 4.10, 4.11) forman un sistema de ecuaciones cuyas variables son u, v y z, y usando el método de perturbación las ecuaciones que permanecen son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) u' - f v' + g \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.12a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \beta + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.12b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) z' - \frac{f \bar{u} v'}{g} + \bar{z} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.12c}$$

donde $\bar{u}$ y $\bar{z}$ son los valores en el estado de equilibrio; u' y z' son las perturbaciones de $\bar{u}$ y $\bar{z}$ respectivamente; $\beta = \frac{\partial f}{\partial Y}$ el parámetro de Rossby; el segundo término de la ecuación (III-4.11) fue sustituido por la condición de equilibrio $f\bar{u} = -g \frac{\partial \bar{z}}{\partial Y}$

La solución de las ecuaciones (III-4.12 a,b,c) es de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} u' &= U e^{i\alpha(x-ct)} \\ v' &= V e^{i\alpha(x-ct)} \\ z' &= Z e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned} \quad \text{III-4.13}$$

Donde U, V, Z, son las amplitudes constantes. Diferenciando las soluciones se observa que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\alpha^2 \quad \text{III-4.14}$$

Introduciendo las relaciones anteriores en las ecuaciones (III-4.12 a,b,c) se obtiene:

$$(\bar{u}-c) \frac{\partial u'}{\partial x} - f v' + g \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.15a}$$

$$-\alpha^2 (\bar{u}-c) v' + \beta v' + f \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.15b}$$

$$(\bar{u}-c) \frac{\partial z'}{\partial x} - f \frac{\bar{u} v'}{g} + \bar{z} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad \text{III-4.15c}$$

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones simultáneas homogéneas cuyas incógnitas son: $\frac{\partial u'}{\partial x}$, v' , $\frac{\partial z'}{\partial x}$, en este sistema la solución es diferente de cero, si y solo si el determinante es igual a cero

$$\begin{vmatrix} \beta - \alpha^2(\bar{u}-c) & 0 & f \\ -f & g & (\bar{u}-c) \\ -f \bar{u}/g & (\bar{u}-c) & \bar{z} \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo este determinante se obtiene la ecuación de frecuencia-que da los valores de la velocidad de fase c correspondiente al número de onda :

$$\begin{aligned} & [\beta - \alpha^2(\bar{u}-c)] [g\bar{z} - (\bar{u}-c)(\bar{u}-c)] - \\ & - f^2 [(\bar{u}-c) - \bar{u}] = 0 \end{aligned} \quad \text{III-4.16}$$

Esta es una ecuación cúbica en donde la variable desconocida es $(u - c)$. Las raíces de esta ecuación pueden ser encontradas suponiendo que $|\bar{u} - c| \gg \beta/\alpha^2$, esto es, que la velocidad de las ondas es mucho más grande que la velocidad de fase de las ondas de Rossby ó meteorológicas (III-3.6), por lo tanto, el primer término de la ecuación (III-4.16) se desprecia y $|\bar{u} - c| \gg \bar{u}$ entonces:

$$(u - c)(u - c) = g \bar{z} + \frac{f^2}{\alpha^2} \quad \text{III-4.17}$$

La solución (III-3.17) corresponde a las ondas de gravedad, por lo tanto, los movimientos correspondientes de estas ondas viajan en ambas direcciones a la vez.

III-5 FILTRADO.

En el tipo de movimientos que describe la atmósfera, las ondas de sonido y gravedad viajan con grandes velocidades relativas al medio, la rapidez de las ondas de sonido varía entre 600 y 700 mph; y las de gravedad se desplazan con una rapidez de 200 a 300 mph; mientras que las meteorológicas o de Rossby viajan con una velocidad de 10 mph (4), esto es, se desplazan más lentamente; por otro lado, la amplitud de las ondas de Rossby es grande comparada con las ondas de sonido y de gravedad, por lo tanto, se observa que la solución que nos interesa, o sea la de las ondas meteorológicas, se vé afectada por la introducción de ruido producido por las soluciones de ondas gravitacionales y de sonido, pero sin modificar las soluciones que corresponden a ondas de Rossby.

En la sección (III-2) se hizo referencia a la característica esencial que hace que las ondas de sonido se propaguen, es el gra-

diente de presión debido a la compresión adiabática, por lo tanto, el cambio de presión en algún punto se debe al cambio de peso total en la columna de aire, por lo que se introduce la aproximación hidrostática dentro de las ecuaciones de movimiento, entonces las soluciones que corresponden a ondas de sonido no pueden existir. Por lo tanto, usando sistemáticamente la aproximación hidrostática en las ecuaciones de movimiento las ondas de sonido pueden ser excluidas. Las soluciones correspondientes a las ondas de gravedad no pueden ser filtradas directamente, por lo tanto, lo que se debe hacer es ver como excluir la solución (III-4.17), esta solución aparece debido al término $(\bar{u}-c)$ $(\bar{u}-c)$ en el segundo factor del primer término de la ecuación antes mencionada, entonces la condición para la exclusión de las ondas de gravedad es que $(\bar{u}-c)$ sea cero, esto implica que el término $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u'$ sea cero en la ecuación (III-4.12a), por lo tanto:

$$v' = \frac{g}{f} \frac{\partial z'}{\partial x} \quad \text{III-5.1}$$

que es justamente el balance geostrófico; por lo que las ecuaciones filtradas son (III-5.1, 4.12 b,c) y la ecuación de frecuencia es la ecuación (III-4.16) con $(\bar{u}-c)$ igual a cero. Por lo tanto, se mostró que las ondas de gravedad son excluidas por aproximación geostrófica.

Ahora eliminando $\frac{\partial u'}{\partial x}$ de las dos ecuaciones (III-4.12 b,c) se obtiene que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v' - \frac{f}{2} \left(\frac{\partial z'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial z'}{\partial x} - f \frac{\bar{u}}{g} v'\right) = 0$$

introduciendo el balance geostrófico (III-5.1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial z'}{\partial x} - \frac{f^2}{g\bar{z}} \frac{\partial z'}{\partial t} = 0$$

esta ecuación solo depende de la variable z' , se puede observar que al eliminar $\frac{\partial u'}{\partial x}$ entre las ecuaciones (III-4.12 b,c) es equivalente a eliminar la divergencia de la velocidad horizontal $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ entre las ecuaciones (III-4.10, 4.11) que es la ecuación de vorticidad y la ecuación de continuidad; por lo tanto, se puede deducir - que eliminando la divergencia de la velocidad horizontal filtra o- elimina las soluciones de las ondas de gravedad correspondientes a- la ecuación de vorticidad y continuidad.

CAPITULO IV

MODELO BAROTROPICO

En los capítulos anteriores se obtuvo la forma de las ecuaciones de movimiento, señalando las fuerzas que actúan en la atmósfera, después se vió la circulación y la vorticidad que son medidas de la rotación del aire producidas por estas fuerzas; se obtuvo la ecuación de vorticidad y se hizo un análisis de escala para comparar la magnitud de cada uno de los términos y así retener los de mayor magnitud; se mencionaron después los tipos de soluciones ondulatorias que dan estas ecuaciones, para conservar las soluciones de tipo meteorológico.

Lo anterior se realizó para construir un modelo que permita describir el comportamiento de alguna región de la atmósfera. En este capítulo se aplicará ese modelo (ecuación II-4.2) a una región particular de la atmósfera, que permitirá encontrar la ecuación de vorticidad Barotrópica (ecuación IV-1.7), que es el modelo buscado en esta tesis; además se resolverá dicha ecuación por los métodos de diferencias finitas y relajación.

La región que se considera es la región IV que está limitada de oeste a este por las longitudes de 135° a 50° , y de norte a sur entre las latitudes de 55° a 10° ; esta región comprende parte de Canadá, E.E.U.U., México, Centroamérica y parte de los océanos Pacífico y Atlántico, además se considerará solo la superficie que se encuentra a una altura media de 5000 metros que corresponde más o menos a la parte media de la tropósfera, o sea la superficie correspondiente a los 500 milibares, en donde la atmósfera se comporta aproximadamente como una atmósfera Barotrópica, esto es, que las variables de el aire son solamente función de la presión, por lo tanto, las superficies de temperatura y densidad constantes son paralelas a la -

superficie isobárica; no hay variación del viento con la altura, o sea que no hay divergencia, por lo tanto, no hay pérdida ni ganancia de masa. También se considerará que esta región es adiabática para un periodo de uno o dos días(2), esto es, no hay entrada ni salida de calor del sistema. Este tipo de atmósfera esta restringida, porque en general en la atmósfera las superficies isotérmicas y de densidad constante suelen no ser paralelas a las superficies de presión, por lo tanto, un modelo para una atmósfera Barotrópica no puede ser válido para otros niveles, donde ya las variables de estado son función tanto de la presión como de la temperatura, y además -- existe divergencia.

De lo anterior se puede observar que al eliminar la divergencia de la ecuación de vorticidad (II-4.1), automáticamente las ondas de gravedad quedan filtradas, y así la ecuación resultante es la ecuación de conservación de la vorticidad absoluta (II-4.2), o sea que las trayectorias se pueden trazar de modo que la vorticidad absoluta $(\zeta + f)$ sea constante, esto es, que cualquier variación de f debida a la latitud se compensa inmediatamente por la variación de la vorticidad relativa, indicada por la curvatura de las isobáras.

IV-1 ECUACION FUNDAMENTAL.

Considerando una atmósfera Barotrópica la divergencia en el nivel de 500 mb es cero, por lo tanto, la ecuación de vorticidad para latitudes medias no incluye soluciones del tipo de ondas de gravedad y la ecuación es:

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0 \quad \text{IV-1.1}$$

desarrollando el operador derivada total:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\zeta + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\zeta + f) = 0 \quad \text{IV-1.2}$$

o en forma vectorial:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + V_h \cdot \nabla_h (\zeta + f) = 0 \quad \text{IV-1.3}$$

la vorticidad relativa ζ se puede expresar en términos del ---
geopotencial Φ aplicando la aproximación de viento geostrófico -
La vorticidad tiene la forma:

$$\zeta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

sustituyendo $u = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ y $v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ en la relación ante-
rior:

$$\zeta = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi \quad \text{IV-1.4}$$

recordando que $\Phi = \int_0^z g \, dz$ definida en el capítulo II, susti-
tuyendo (IV-1.4) en (IV-1.3) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + f \right) + V_h \cdot \nabla_h (\zeta + f) = 0 \quad \text{IV-1.5}$$

para: $V_g = \frac{1}{f} \left(-\hat{i} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{j} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)$ de (II-1.11a,b)

sustituyendo esta aproximación geostrófica en (IV-1.5) y como el --
parámetro de Coriolis solo depende de la coordenada y se tiene:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi = \frac{1}{f} \left(-\hat{i} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \hat{j} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial f^*}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f^*}{\partial y} \right) \quad \text{IV-1.6}$$

donde $f^* = (\zeta + f)$ y $\nabla_h = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right)$

multiplicando por f (IV-1.6) y haciendo el producto escalar:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) = 0$$

para: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f^*}{\partial x} = J(\Phi, f^*)$

donde $J(\Phi, \zeta^A)$ es el jacobiano dependiente de Φ y ζ^A entonces:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + J(\Phi, \zeta^A) = 0 \quad \text{IV-1.7}$$

La ecuación (IV-1.7) es la ecuación de vorticidad Barotrópica que se aplica solamente para un fluido incompresible, homogéneo, sin -- fricción en un nivel de no-divergencia.

IV-2 DIFERENCIAS FINITAS Y METODO DE RELAJACION.

Ahora se resolverá la ecuación (IV-1.7); esta ecuación es una -- ecuación diferencial parcial del tipo de la ecuación de Poisson, -- siendo $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ la variable y $J(\Phi, \zeta^A)$ la función fuente conocida. Esta -- ecuación es una ecuación no-lineal y no puede ser resuelta por méto -- dos analíticos exactos. Se aplicará entonces el método aproximado -- de diferencias finitas para calcular $J(\Phi, \zeta^A)$ con valores conocidos de Φ y ζ^A a un tiempo inicial y luego calcular $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ por medio del -- método de Relajación.

El método de diferencias finitas es discreto, esto es, los valo -- res son calculados por medio de puntos y no en forma continua, por -- lo tanto, se escoge un espacio vectorial bi-dimensional cuyas coor -- denadas son x y Y , este espacio se divide en una malla o enreja -- do de puntos de dimensiones $M \times N$; los espacios enrejados respectivos son a intervalos de Δx y Δy de tal manera que $x = M \Delta x$ y $Y = N \Delta y$ (ver figura IV-1).

En la figura (IV-1) se observa que los indices (i, j) se usan pa -- ra denotar un punto en el espacio. Por simplicidad se considerará un enrejado cuadrado, esto es $\Delta x = \Delta y = d$.

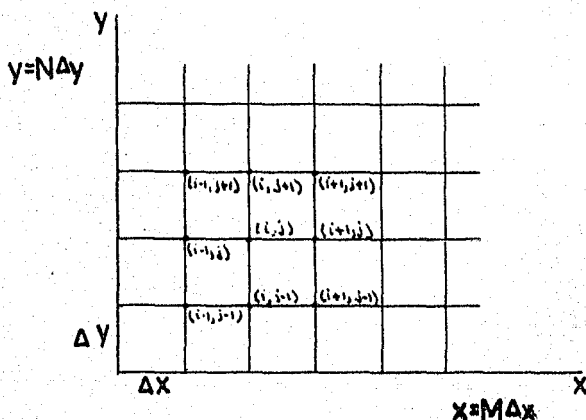


Figura IV-1

Usando las formas de diferencia finita centradas para las primeras derivadas, y las segundas derivadas (ver apéndice I), entonces el laplaciano horizontal de la ecuación (IV-1.7) se puede escribir en forma de aproximación de diferencia finita:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j}}{d^2} = \frac{1}{d^2} \nabla^2 \Phi_{i,j}$$

notando que el laplaciano en forma de diferencias finitas es proporcional a la diferencia de el valor de Φ en un punto central y el valor promedio entre los cuatro puntos vecinos.

Entonces el lado izquierdo de la ecuación (IV-1.7) se expresa como:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{d^2} \left(\frac{\partial \Phi_{i+1,j}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{i-1,j}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{i,j+1}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{i,j-1}}{\partial t} - 4 \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t} \right) = \frac{1}{d^2} \nabla^2 \frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t}$$

IV-2.1

donde $\frac{\partial \Phi_{i+1,j}}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_{i-1,j}}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_{i,j+1}}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi_{i,j-1}}{\partial t}$, son las tendencias del geopotencial en los extremos del enrejado, y $\frac{\partial \Phi_{i,j}}{\partial t}$

es la tendencia del geopotencial en el centro del enrejado.

Ahora escribiendo el jacobiano $J(\Phi, \zeta^A)$ como aproximación de diferencia finita:

$$\begin{aligned} J(\Phi, \zeta^A) &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta^A}{\partial y} - \frac{\partial \zeta^A}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{4d^2} [\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}) (\zeta_{i,j+1}^A - \zeta_{i,j-1}^A) - (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}) (\zeta_{i+1,j}^A - \zeta_{i-1,j}^A)] = \\ &= \frac{1}{4d^2} J_{ij}(\Phi, \zeta^A) \end{aligned} \quad \text{IV-2.2}$$

donde la vorticidad $\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$ se escribe en forma de aproximación de diferencias finitas:

$$\zeta = \frac{1}{fd^2} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j-1}) - \frac{1}{fd^2} \nabla^2 \Phi_{ij} \quad \text{IV-2.3}$$

Entonces conociendo los valores de Φ en todos los puntos interiores a un tiempo inicial $t = 0$ de un enrejado, los valores iniciales de $J_{ij}(\Phi, \zeta^A)$ pueden ser calculados en cada punto interior con los valores iniciales Φ_{ij} y los valores a la frontera Φ y ζ .

Por lo tanto, la ecuación (IV-1.7) en forma de diferencias finitas es:

$$\nabla^2 \Delta \Phi_{ij} = - \frac{1}{4f} J_{ij}(\Phi, \zeta^A) \quad \text{IV-2.4}$$

donde $\Delta \Phi_{ij} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t}$

Por lo tanto, la ecuación (IV-2.4) toma la forma de una ecuación lineal en la cual $\Delta \Phi_{ij}$ son las funciones desconocidas, y el jacobiano J_{ij} las funciones conocidas en los puntos reja (i,j) .

Los puntos del enrejado cuadrado espaciados por una distancia d corresponden a puntos sobre un mapa que representa una cierta región de la tierra, para esto, es necesario añadir el factor $(\sigma m)^2 = S^2$ en la ecuación de vorticidad Barotrópica (ecuación IV-1.7); este factor da la razón del elemento de área sobre el mapa con el elemento de área sobre la tierra para alguna proyección; donde m es el factor de reducción de escala, y σ la escala de la imagen (ver apéndice II).

La proyección que se utiliza es la proyección cónica conformada de Lambert descrita en el apéndice II.

La ecuación (IV-1.7) es entonces:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = S^2 \nabla_s^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} ; \quad J(\Phi, \zeta^A) = S^2 J_s(\Phi, \zeta^A)$$

el subíndice s significa que las derivadas son con respecto a las coordenadas del mapa.

La ecuación (IV-2.4) es la ecuación de Vorticidad Barotrópica en forma de aproximación de diferencias finitas, con esto se pudo conocer el jacobiano para valores dados de Φ y ζ a un tiempo inicial $t = 0$; conociendo los valores de Φ para cada uno de los puntos de la frontera en cada período de tiempo. En esta forma la ecuación (IV-2.4) se pudo expresar como un sistema de ecuaciones lineales algebraicas cuya incógnita a resolver es $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$; entonces en la ecuación (IV-2.4) si i va de 0 a M y j de 0 a N se tiene un conjunto de $(M-1)(N-1)$ ecuaciones aplicadas a cada uno de los puntos interiores (i,j) del enrejado de la figura (IV-2).

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30

Figura IV-2

Tomando cualquier punto interior, por ejemplo el 15, este punto es el centro de un cuadrado limitado por los puntos 8, 10, 22, 20, y - también va a ser la esquina de cuatro cuadrados. Entonces se pueden establecer cinco ecuaciones que contienen a ese punto, esto es:

$$\Delta \Phi_8 + \Delta \Phi_{10} + \Delta \Phi_{20} + \Delta \Phi_{22} - 4 \Delta \Phi_{15} = J_{15} (s^2 \Phi, \xi^A)$$

$$\Delta \Phi_{15} + \Delta \Phi_{13} + \Delta \Phi_1 + \Delta \Phi_3 - 4 \Delta \Phi_8 = J_8 (s^2 \Phi, \xi^A)$$

$$\Delta \Phi_{17} + \Delta \Phi_{15} + \Delta \Phi_3 + \Delta \Phi_5 - 4 \Delta \Phi_{10} = J_{10} (s^2 \Phi, \xi^A)$$

$$\Delta \Phi_{13} + \Delta \Phi_{25} + \Delta \Phi_{15} + \Delta \Phi_{27} - 4 \Delta \Phi_{20} = J_{20} (s^2 \Phi, \xi^A)$$

$$\Delta \Phi_{27} + \Delta \Phi_{29} + \Delta \Phi_{15} + \Delta \Phi_{17} - 4 \Delta \Phi_{22} = J_{22} (s^2 \Phi, \xi^A)$$

donde $J_{ij}(s^2 \Phi, \xi^A)$ son los jacobianos ya calculados. Se puede seguir - escribiendo ecuaciones para cada punto interior del enrejado con -- cinco ecuaciones conteniendo ese punto, y de esta manera se llega - a los límites del enrejado en donde los valores deben ser conocidos. Entonces se tiene un gran número de ecuaciones, ya que el enrejado -- es de trece renglones por diecisiete columnas y eso dá un total de -- 221 puntos incluyendo la frontera.

Este gran número de ecuaciones es resuelto en forma aproximada por el método de relajación simultáneo o el método de relajación - secuencial o sucesivo.

El método de relajación simultánea consiste en hacer un primer-supuesto como solución de $\Delta\Phi$, este supuesto es $\Delta\Phi^0$; este primer-supuesto no satisface en principio la ecuación (IV-2.4) y diferirá de la ecuación verdadera por alguna cantidad llamada Residuo R_{ij} ; - por lo tanto, sustituyendo la primera suposición :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{i+1,j}^0 + \Delta\Phi_{i-1,j}^0 + \Delta\Phi_{i,j-1}^0 + \Delta\Phi_{i,j+1}^0 - 4\Delta\Phi_{ij}^0 = \\ = -\frac{1}{4} J_{ij} (s^2\Phi, \gamma^A) + R_{ij} \end{aligned} \quad \text{IV-2.5}$$

ya que se ha calculado para $\Delta\Phi^0$ se toma la siguiente suposición -- definida como el supuesto anterior $\Delta\Phi^0$ más un cuarto del residuo - de R_{ij} , esto es:

$$\Delta\Phi_{ij}^1 = \Delta\Phi_{ij}^0 + \frac{1}{4} R_{ij} \quad \text{IV-2.6}$$

Sustituyendo (IV-2.6) en (IV-2.5) se obtendrá un residuo menor R_{ij}^1 y así sucesivamente, de tal manera que $R_{ij}^0 > R_{ij}^1 > R_{ij}^2 > \dots > R_{ij}^v$ esto es, el residuo va disminuyendo hasta que una cierta $\Delta\Phi^v$ tiende a la solución verdadera $\Delta\Phi$; entonces generalizando para algún-orden de aproximación v :

$$\Delta\Phi_{ij}^{v+1} = \Delta\Phi_{ij}^v + \frac{1}{4} R_{ij}^v \quad \text{IV-2.7}$$

$$R_{ij}^v = \nabla^2 \Delta\Phi_{ij}^v + J_{ij} (s^2\Phi, \gamma^A) \quad \text{IV-2.8}$$

por lo tanto, las ecuaciones (IV-2.7, 2.8) definen a la relajación-simultánea, ya que el nuevo valor de $\Delta\Phi_{ij}^{v+1}$ puede ser calculado a - partir de un primer supuesto $\Delta\Phi_{ij}^0$. Entonces para valores suficiente-mente grandes de v los valores de $\Delta\Phi_{ij}^{v+1}$ convergerán a la solución - verdadera $\Delta\Phi$.

El método anterior, o sea el método de la relajación simultánea no es muy eficiente, ya que los valores que se obtienen no son usados inmediatamente para la siguiente suposición, sino que son necesarios para calcular la suposición siguiente. El método sucesivo o secuencial da solución a este problema, ya que va usando inmediatamente cada uno de los supuestos que se van calculando para obtener otros nuevos. Esto es, los valores de $\Delta \Phi^{v+1}$ son calculados de $\Delta \Phi^v$ para una sucesión de puntos definidos (i,j). Esta sucesión empieza generalmente desde el punto (0,0); como el enrejado contiene 13 x 17 puntos, va hacia la derecha a través del primer renglón de puntos (12,0), luego salta al primer punto del segundo renglón hasta (12,1) y así sucesivamente. $\Delta \Phi_{ij}^{v+1}$ está dado por:

$$\Delta \Phi_{ij}^{v+1} = \Delta \Phi_{ij}^v + \frac{1}{4} R_{ij}^v \quad \text{IV-2.9}$$

Pero el residuo se calcula considerando el cambio en $\Delta \Phi$ en los puntos a la izquierda y abajo del punto (i,j) esto es:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \Delta \Phi_{i+1,j}^v + \Delta \Phi_{i,j+1}^v + \Delta \Phi_{i-1,j}^{v+1} + \Delta \Phi_{i,j-1}^{v+1} - 4 \Delta \Phi_{ij}^v \\ &\equiv \frac{1}{4} J_{ij} \end{aligned} \quad \text{IV-2.10}$$

Este método da una convergencia más rápida a la solución verdadera $\Delta \Phi$.

Como esto requiere un gran número de cálculos es necesario hacer uso de las máquinas computadoras que lo desarrollan en muy poco tiempo.

Ya que se conoce el valor de $\Delta \Phi$, calculado por el método anterior, entonces para establecer la circulación futura se debe cono-

cer Φ para un tiempo Δt , para esto, en los puntos exteriores se usa la fórmula de diferencias finitas adelantada (ver apéndice I):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta t} \quad \text{IV-2.11}$$

y para calcular en los puntos interiores se usa la forma de diferencias finita centrada:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2 \Delta t} \quad \text{IV-2.12}$$

despejando $\Phi_{i+1,j}$

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{IV-2.13}$$

$$\gamma \quad \Phi_{i+1,j} = \Phi_{i-1,j} + 2 \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{IV-2.14}$$

Por lo tanto, para calcular $\Phi_{i+1,j}$, se conoce $\Phi_{i,j}$ a un tiempo inicial en $t=0$ y la tendencia $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$; o sea $\Delta \Phi$ es conocida, porque se calcula con el método de relajación descrito anteriormente. Ahora el problema se reduce a encontrar un intervalo de tiempo Δt adecuado, ya que para valores grandes de Δt se obtienen grandes errores de truncación debido a que el método de diferencias finitas es solo una aproximación a las derivadas, por lo tanto, un valor no adecuado de Δt da poca aproximación a $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$; ya que por la ecuación (IV-2.14) la $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ se extrapola linealmente sobre el intervalo $2 \Delta t$. Entonces Δt debe ser suficientemente pequeño, y no solo eso, sino que para que haya estabilidad computacional Δt no puede ser aislado de d , así mismo Δt debe depender de la distancia que se tome entre cada espaciado del enrejado cuadrado de dos dimensiones Δt y d están relacionados por:

$$\frac{v \Delta t}{d} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde v es la velocidad del viento máximo que debe ser menor de --
50 m/seg y para un intervalo entre puntos del enrejado $d=462.8$ Km;-
por lo tanto:

$$\Delta t < 2.5 \text{ horas}$$

entonces el intervalo de tiempo debe ser menor de 2.5 horas, por lo
tanto Δt puede ser tomado como del orden de 1 hora. Esto quiere de-
cir que para un pronóstico de más o menos 12 horas es necesario ha-
cer 12 iteracciones.

CAPITULO V

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El modelo descrito en este trabajo es probado para el período - de los días 2, 3 y 4 del mes de Enero de 1976. La prueba consistió en dar como condición inicial el campo de geopotencial correspon---diente al 2 de Enero a las 00.00 Z y realizar un reporte cada 12 ho- ras hasta sumar cuatro, o sea tener corridas (pronóstico) para las- 12, 24, 36 y 48 horas, con las cuales: primero se probó el rango -- temporal de validez de la hipótesis fundamental del modelo, y segun- do se estudió el efecto de frontera, el cual permitirá conocer el - rango espacial de validez del pronóstico, ya que se trata de un -- "Modelo de Área Limitada".

También se realizó un experimento de análisis de sensibilidad del modelo de acuerdo a las condiciones iniciales, para lo cual se simuló un error en el campo del geopotencial inicial, dicha simula- ción fué realizada con una variación de un $\pm 1\%$ del campo de geopo- tencial inicial.

El período mencionado para probar el modelo fue seleccionado de bido a que se tiene una película de la Circulación General dela At- mósfera correspondiente al mismo año, lo cual permite hacer un es- tudio observacional del movimiento de los sistemas de escala sinóp- tica que predominan sobre la región IV, e idear algún mecanismo que simule lo más real posible la región de interes y sus alrededores. Los datos correspondientes a dicho período fueron proporcionados -- por Radio Aeronáutica Mexicana S.A. (R.A.M.S.A.).

En la figura 1 se muestra la región IV, que es el área de estu- dio en este trabajo, así como los puntos de integración.

En la figura 2 se muestra el campo inicial del geopotencial o campo isohiptico del día 2 - I - 76 a las 00.00 Z.

En las figuras 3 y 4 se muestran los resultados correspondientes a encontrar el rango temporal de validez de la hipótesis de adiabaticidad. En las figuras (3a, 3c, 4a, 4g) se muestran los campos de geopotencial o isohípticos observado para 12, 24, 36 y 48 horas después del campo inicial de geopotencial, es decir, las 12.00Z del día 2 - I-76; las 00.00 Z del día 3 - I - 76; las 12.00 Z del día 3 - I - 76 y las 00.00 Z del día 4 - I - 76 respectivamente. En las figuras (3b, 3d, 4f, 4h) se muestran los campos de geopotencial calculado para los períodos de tiempo antes mencionados. Este experimento se realizó con una frontera móvil. Como se puede observar en la figura 3d aún guarda una gran similitud el campo isohíptico calculado con el campo isohíptico observado (figura 3c), es decir el rango temporal de validez mostrado en las figuras 3 a,b,c,d y 4 a,f,g,h será solo de 24 horas, ya que para 36 y 48 horas el campo calculado se distorsiona (figuras 4f y 4h).

Con respecto al experimento del efecto de frontera se muestran las figuras 5 y 6. En las figuras (5a, 5c y 6a, 6g) se muestran los campos del geopotencial calculado considerando una frontera fija para 12, 24, 36 y 48 horas del período ya mencionado. En las figuras (5b, 5d y 6f, 6h) se muestran los campos del geopotencial calculado con frontera móvil para el mismo intervalo de tiempo, analizando los resultados obtenidos con una frontera fija se observa una mayor distorsión del campo isohíptico calculado debido a que en este caso no se considera una interacción entre los sistemas dentro de la región de trabajo y los exteriores, como es el caso cuando se --

considera una frontera móvil. La figura 5a muestra que solo la región central del campo de geopotencial calculado podría ser de utilidad para la descripción del campo de geopotencial observado. Una deficiencia más al utilizar frontera fija es encontrada en las figuras (5a, 5c, 6a, 6g) pues el eje de la vaguada continental, en la parte central de E.E.U.U., tiende a rotar, lo cual no se observa en las figuras (3a, 3c, 4e, 4g). A pesar de que los resultados considerando una frontera móvil son más satisfactorios, debe considerarse una condición de frontera obtenida de los modelos hemisféricos o globales con el fin de hacer más realista el "Modelo de Área Limitada" para el flujo atmosférico sobre la República Mexicana. En este trabajo se consideró como frontera móvil el cambio en la tendencia para las primeras 12.00 horas.

Con respecto al experimento de sensibilidad del modelo se muestra la figura 7. En la figura 7a se muestra el campo isohiético inicial 00.00 Z del día 2 - I - 76; en la figura 7b el campo isohiético calculado 12 horas después normalmente, es decir, sin la simulación de un hipotético error; en las figuras 7c y 7d se muestran los campos del geopotencial calculados considerando un error de +1% en todo el campo inicial, y -1% respectivamente. Los resultados en las figuras 7c y 7d muestran una gran sensibilidad a errores posibles en el asentamiento y análisis de los campos isohiéticos, por lo cual se recomienda preparar cuidadosamente los campos de entrada a este modelo.

De acuerdo a los resultados analizados anteriormente podemos -- concluir lo siguiente:

- a) El rango temporal de validez de una atmósfera adiabática, para la región IV, es de 12 horas y como máximo 24 horas.
- b) Se debe simular o incorporar una frontera móvil lo más real posible, por ello, como se mencionó anteriormente se debe utilizar -- como condición de frontera los campos de modelos hemisféricos o globales.
- c) Puesto que este modelo es muy sensible a pequeñas variaciones en los datos de entrada se recomienda especial cuidado al preparar los campos de la variable inicial.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente los resultados son satisfactorios dentro de sus limitaciones inherentes (atmósfera Barotrópica, adiabaticidad y región limitada).

Puesto que este modelo describe movimientos de escala sinóptica (100 a 10 000 Km), una posible mejora es incorporar los efectos -- de mesoescala (10 a 100 Km), con una red anidada en la red que registra los movimientos a escala sinóptica.

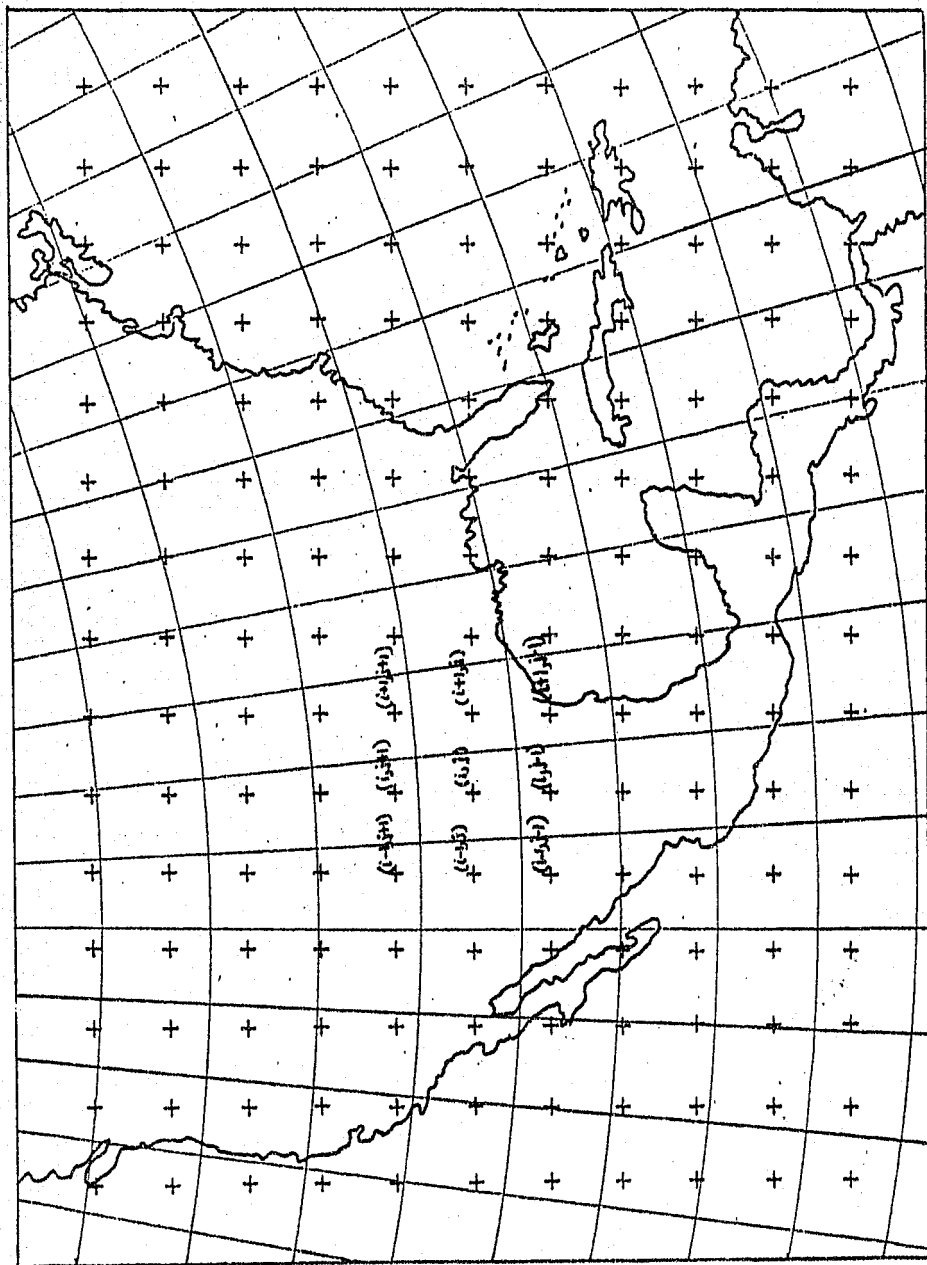


FIGURA 1

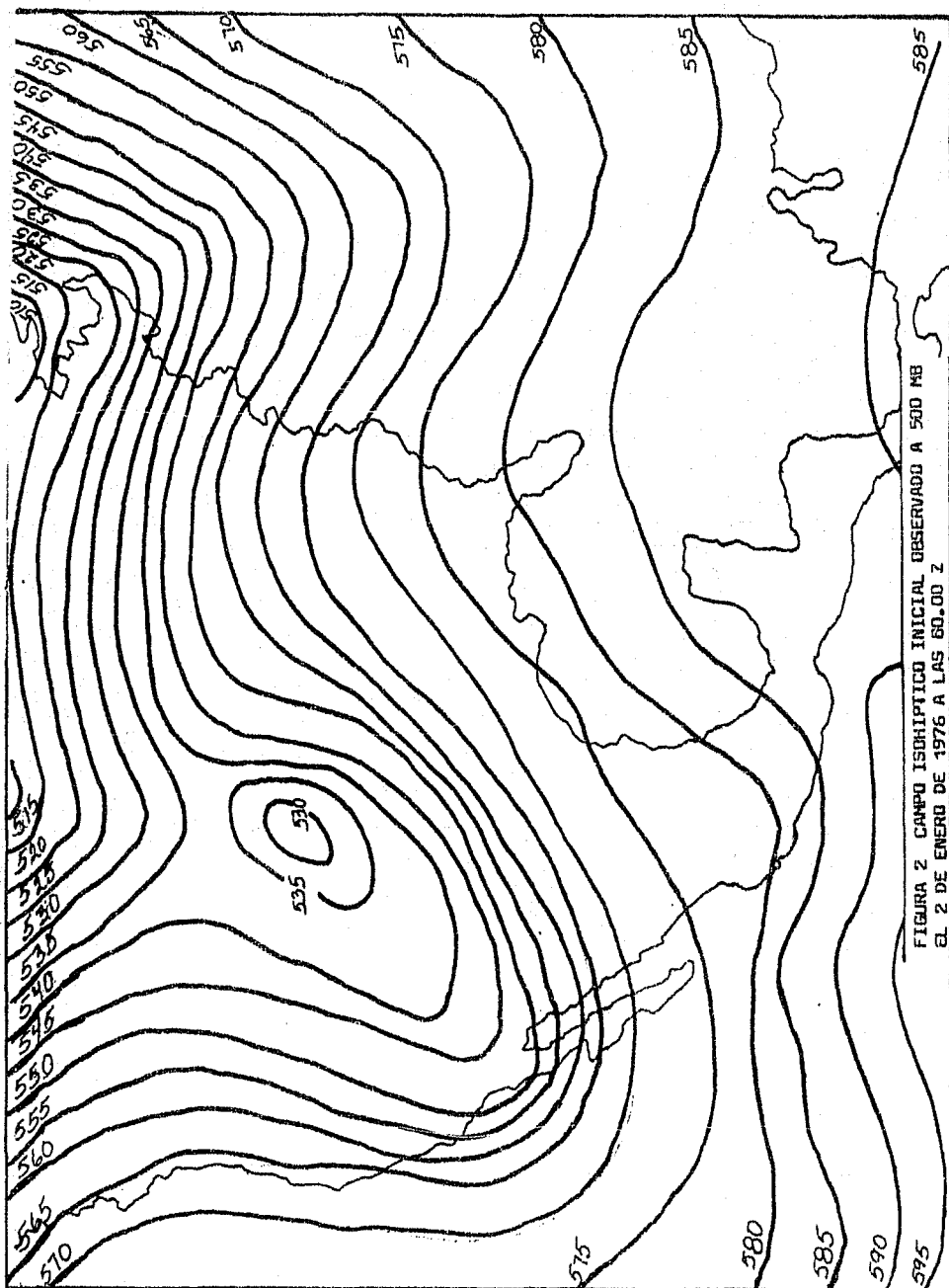
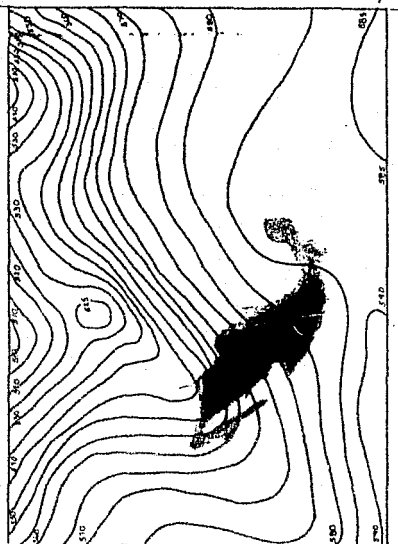
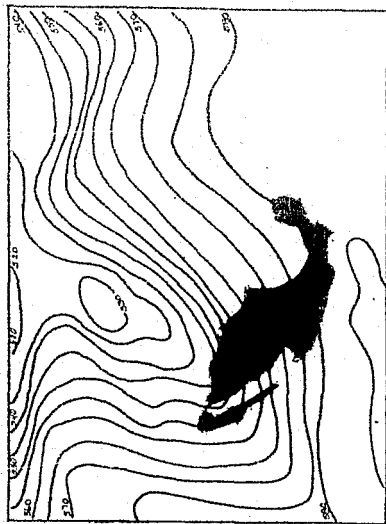


FIGURA 2 CAMPO ISORHPTICO INICIAL OBSERVADO A 500 MB
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 00.00 Z



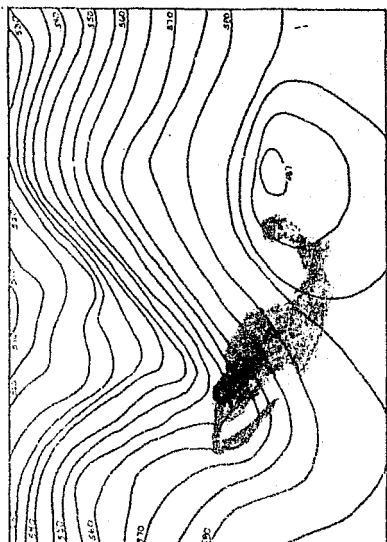
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL OBSERVADO A 500 MB
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z

FIGURA 3a.



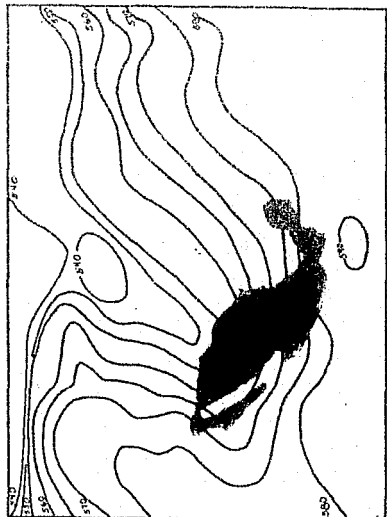
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z

FIGURA 3b.



CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL OBSERVADO A 500 MB
EL 3 DE ENERO DE 1976 A LAS 00.00 Z

FIGURA 3c.



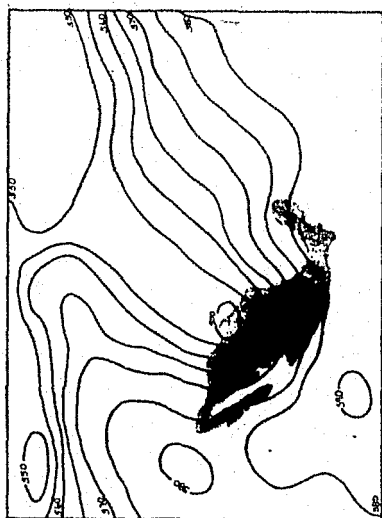
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB
EL 3 DE ENERO DE 1976 A LAS 00.00 Z

FIGURA 3d.



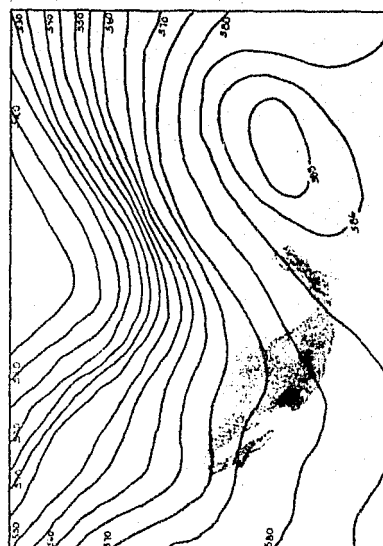
CAMPO ISOPIETICO CON FRONTERA MOVIL OBSERVADA A 500 MB.
EL 3 DE ENERO DE 1976 A LAS 1200 Z.

FIGURA 4a



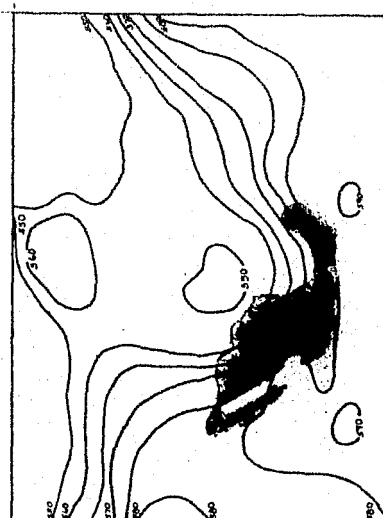
CAMPO ISOPIETICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADA A 500MB
EL 3 DE ENERO DE 1978 A LAS 1200 Z.

FIGURA 4i



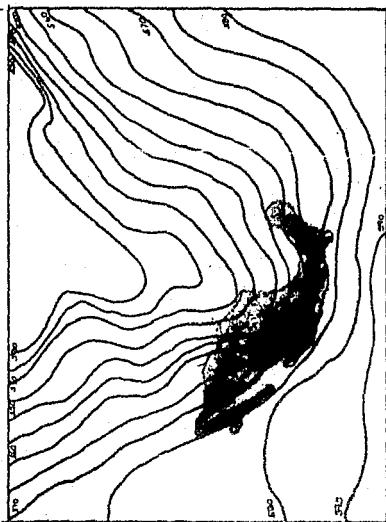
CAMPO ISOPIETICO CON FRONTERA MOVIL OBSERVADA A 500 MB.
EL 4 DE ENERO DE 1976 A LAS 1200 Z.

FIGURA 4b

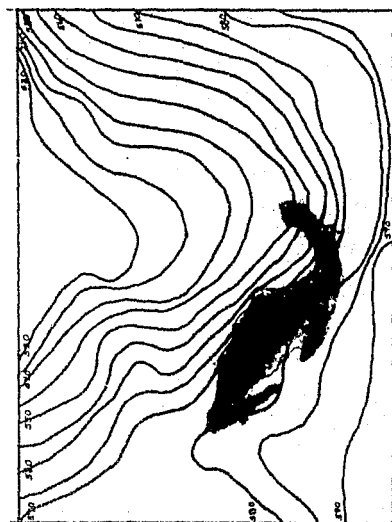


CAMPO ISOPIETICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADA A 500MB
EL 4 DE ENERO DE 1978 A LAS 1200 Z.

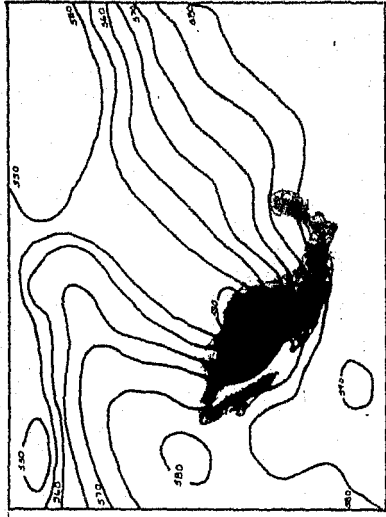
FIGURA 4h



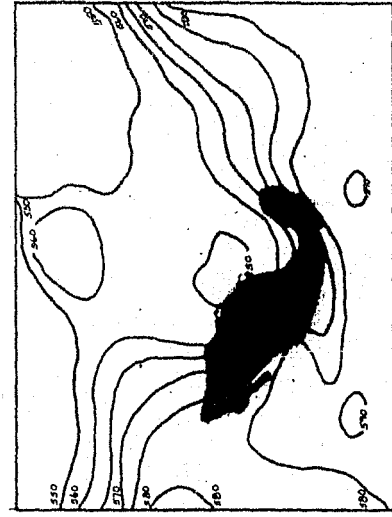
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA FIJA CALCULADO A 500 MB
EL 3 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z.
FIGURA 6a



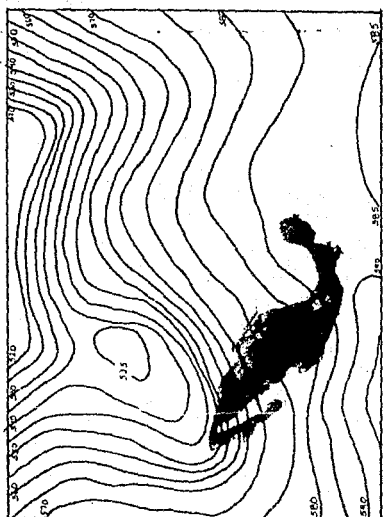
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA FIJA CALCULADO A 500 MB
EL 4 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z.
FIGURA 6b



CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB
EL 3 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z.
FIGURA 6c

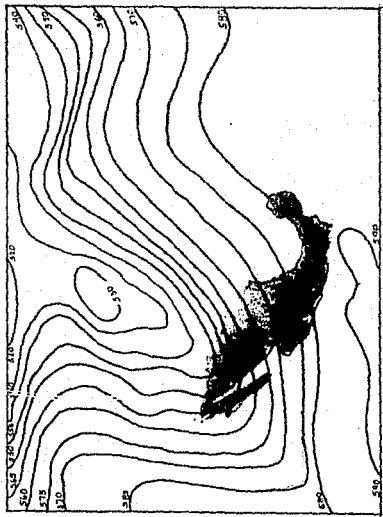


CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB
EL 4 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z.
FIGURA 6d



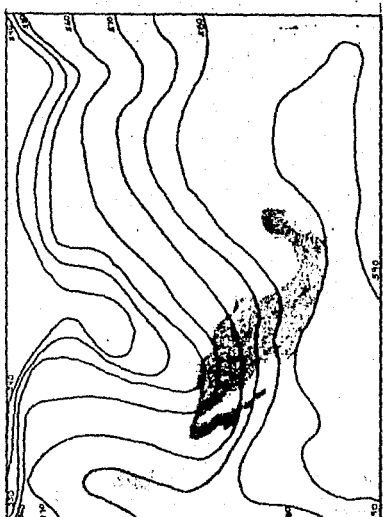
CAMPO ISOHIPTICO INICIAL OBSERVADO A 500 MB EL 2 DE ENERO
DE 1976 A LAS 00.00 Z.

FIGURA 7a



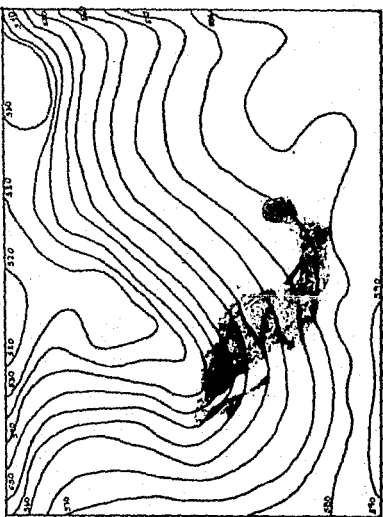
CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB.
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z

FIGURA 7b



CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 500 MB.
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z. CON UN ERROR DE +1%.

FIGURA 7c



CAMPO ISOHIPTICO CON FRONTERA MOVIL CALCULADO A 800 MB.
EL 2 DE ENERO DE 1976 A LAS 12.00 Z. CON UN ERROR DE +1%.

FIGURA 7d

APENDICE I

APROXIMACION DE DERIVADAS EN FORMA DE DIFERENCIAS FINITAS.

Supongamos una función $f(x)$ que tiene n derivadas continuas --- en la vecindad de algún punto x_0 , entonces desarrollando en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \end{aligned}$$

Considerando el enrejado de la figura (IV-1), se observa que -- desarrollando en serie de Taylor la función en los puntos $(i-1, j)$ - y $(i+1, j)$ alrededor del punto central (i, j) , se puede obtener las - primeras y segundas derivadas en forma de diferencias finitas; esto es, para $X-X_0 = \Delta x$ se tiene que, para una cierta función f :

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (1)$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2)$$

donde las derivadas estan evaluadas en el punto (i, j) .

De la ecuación (1) despejando $\frac{\partial f}{\partial x}$ y despreciando términos de segundo orden se obtiene la forma de diferencia finita atrasada. --

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3)$$

Haciendo lo mismo en la ecuación (2) se obtiene la forma de diferencia finita adelantada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad (4)$$

Ahora restando la relación (2) de (1) se obtiene la forma de -- diferencia finita centrada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (5)$$

Conservando hasta términos de segundo orden en (1) y (2), despreciando los demás y sumando ambas relaciones se obtiene la forma de diferencias finitas para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i-1,j} - 2f_{i,j} + f_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

Formas similares se derivan para una función en y, siendo $y - y_0 = \Delta y$, desarrollando en serie de Taylor la función en los puntos $(i,j-1)$ y $(i,j+1)$, entonces las formas de diferencias finitas aproximadas son:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \Delta y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad (10)$$

Las relaciones (7), (8) y (9), son las formas de diferencia finita atrasada, adelantada y centrada respectivamente para la componente y; y la ecuación (10) es la forma de diferencia finita para la segunda derivada, también para la componente y.

PROYECCIONES DE MAPAS

En el método de diferencias finitas discutido en el Apéndice I, los puntos de la malla o enrejado representan puntos en el espacio, separados distancias iguales sobre el globo terrestre; este enrejado se obtiene del conjunto de enrejados cuadrados sobre un mapa, -- que es una proyección sobre una superficie geométrica ficticia (superficie imagen) de la superficie de la tierra; el cual se reduce a un tamaño adecuado.

Las proyecciones que generalmente se emplean en Meteorología -- son las proyecciones conformadas, que se caracterizan por la formación de un ángulo recto en la intersección de meridianos y paralelos en todo el mapa; y la escala debe de ser la misma en todas direcciones a través de algún punto.

Por lo tanto, es necesario definir un factor que dé la relación entre la distancia imagen y la distancia sobre la superficie de la tierra, a este factor se le denomina "Escala de la imagen" y se denota por σ . También se define la reducción de escala m , como la reducción del mapa final a la latitud estándar, siendo esta latitud en donde la superficie imagen es tangente a la tierra; esto es, m se define como:

$$m = \frac{\text{Distancia sobre el mapa a una latitud estandar.}}{\text{Distancia correspondiente sobre la tierra.}}$$

El producto $m \sigma = 1$, da la escala actual sobre algún punto del mapa. La escala de la imagen es unitaria alrededor del paralelo estándar, y en alguna otra latitud es mayor o menor que la unidad.

Las proyecciones conformadas que se emplean generalmente para cartas sinópticas son las de: Mercator, que es una proyección cilíndrica; la proyección cónica conformada de Lambert; y la proyección-

estereográfica polar. La teoría que gobierna estas tres proyecciones es la "Teoría de proyección cónica conformada"; puesto que la superficie de un cilindro circular recto o una superficie plana son casos límites del cono circular recto; la imagen se encuentra en la superficie del cono.

La teoría consiste en considerar la sección transversal de un cono tangente al hemisferio norte, como en la figura 1(a); esto mismo es desarrollado en la figura 1(b). El radio de la tierra está denotado por a , la latitud estándar por ϕ_0 , la latitud arbitraria por ϕ y su co-latitud por ψ , el radio de un arco de latitud sobre la superficie imagen por r , y el radio de un círculo de latitud sobre la tierra por R ($R = a \sin \psi = a \cos \phi$). La circunferencia de un círculo de latitud dado sobre la tierra es $L_t = 2\pi R$. La longitud de arco de la misma línea de latitud sobre la imagen es $L = 2\pi nr$

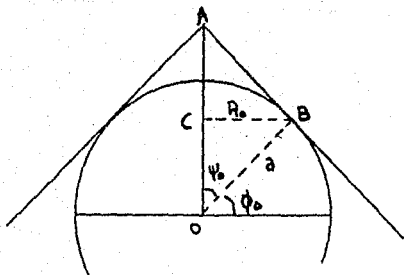


Figura 1(a)

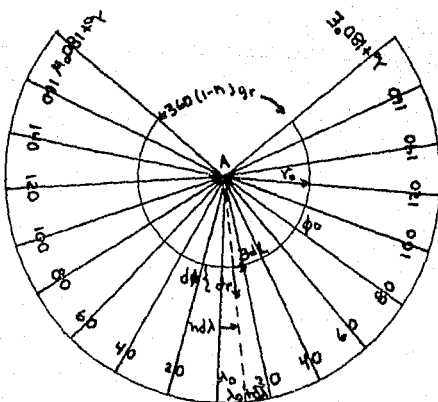


Figura 1(b)

donde $0 \leq n \leq 1$ y $2\pi n$ es el ángulo subtendido por el arco L sobre la imagen desarrollada de la superficie y n es una fracción que es una propiedad geométrica del cono llamada constante del cono. La escala a lo largo de un paralelo es constante, y la escala a lo largo de un círculo de latitud es el radio de la longitud de arco sobre la superficie de la imagen, a la longitud de arco sobre la tierra:

$$\sigma_\phi = \frac{L}{L_t} = \frac{2\pi nr}{2\pi R} = \frac{nr \csc \psi}{a} \quad (1)$$

A una latitud estándar $\sigma = 1$, $\psi = \psi_0$ y $n = \cos \psi_0$. Un incremento de arco sobre un meridiano de la tierra está dado por $dr_t = a d\psi$ y sobre la superficie de la imagen el incremento correspondiente del radio para el mismo incremento de latitud es: $dr = \sigma_\phi dr_t$ o $dr = \sigma_\phi a d\psi$; sustituyendo σ_ϕ de (1) en la última ecuación:

$$\frac{dr}{r} = (\cos \psi_0)(\csc \psi) d\psi$$

integrando:

$$r = (a \tan \psi_0) \left[(\tan \psi / 2) / \tan \psi_0 / 2 \right]^{\cos \psi_0} \quad (2)$$

sustituyendo r en (1):

$$\sigma = (\tan \psi_0)(\csc \psi) \left[(\tan \psi / 2) / \tan \psi_0 / 2 \right]^{\cos \psi_0} \quad (3)$$

La ecuación (2) da el radio imagen de algún círculo de latitud; multiplicando r por la reducción de escala m que se selecciona da el radio del arco de latitud sobre el mapa.

Si se toma la latitud estándar de 45° , el espaciado de meridianos es $n = \cos 45^\circ = 0.707$ grados del compás, y el hemisferio es mapeado en un sector de 255° sobre la superficie imagen desarrollada; el mapa que resulta es la proyección cónica conformada de Lambert. Si el paralelo estándar está en Ecuador la proyección que resulta -

es una proyección de Mercator en el caso límite de $\psi_0 = 90^\circ$ y $n = 0$ por lo tanto, de las ecuaciones (2) y (3) :

$$r = \infty$$

$$\sigma = \csc \psi$$

Los meridianos son equidistantes y su espaciado sobre el mape es igual al espaciado sobre la tierra en el Ecuador multiplicado por la reducción de escala m . Los círculos de latitud son líneas rectas paralelas perpendiculares a las líneas de longitud que también son rectas paralelas.

Ahora considerando el límite donde $\psi_0 = 0$ y $n = 1$, entonces:

$$r = 2a \tan \psi / 2$$

$$\sigma = 2 / (1 + \cos \psi) = 2 / (1 + \sin \phi)$$

se obtiene la proyección estereográfica polar en la cual las paralelas son círculos concéntricos cerrados alrededor del polo, y los meridianos están espaciados con el mismo ángulo sobre el mape, como sobre la tierra. La escala en el Ecuador es dos veces la escala del polo, entonces el espaciado de paralelas es dos veces más grande cerca del polo.

Lo anterior fue descrito para la proyección tangente; o sea, -- un cono tangente al hemisferio norte; esto también se puede hacer para la proyección secante, en la cual la superficie imagen interseca la superficie de la tierra; y por lo tanto, hay dos paralelas estándar en las proyecciones de Lambert y de Mercator y solo una en la estereográfica polar.

BIBLIOGRAFIA

- (1) Holton James R. An Introduction to Dinamic Meteorology. Ed. Academic Press N.Y. 1972.

Se consultarán principalmente los capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 8; se tomarán los valores de las magnitudes correspondientes para el análisis de escala correspondiente a latitudes medias.

- (2) Hess Seymour L. Introduction to Theoretical Meteorology. Ed. Holt, Rinchart and Winston N.Y. 1959.

Se consultó principalmente para la sección I-4 y I-5. Explica claramente la transformación de coordenadas cartesianas a isobáricas; se consultó también método de relajación y la parte de circulación y vorticidad.

- (3) Gordon A. H. Meteorología Dinámica. Ed. UTHEA. 1975. Se consultó para la sección I-4 explica con bastante claridad la conservación de la masa, también se consultó para el capítulo de circulación y vorticidad.

- (4) Thomson Philip D. Numerical Weather Analysis and Prediction. Ed. The Mac Millan Company N.Y. 1961.

Explica con bastante claridad el desarrollo del filtrado de ondas en las ecuaciones de movimiento, también se consultó el capítulo de Diferencias Finitas y Metodo de Relajación.

- (5) Arfken George. Mathematical Methods for Physicists. Ed. Academic Press International. Second Edition. 1970.

Se consultó la sección sobre la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas.

- (6) Charney J. On the Scale of Atmospheric Motions. GEOPYS. Publ. - 17. No. 2. 1948.

Se consultó para el análisis de escala, secciones I-6 y II-4.

- (7) Castro R. T. Tesis de Licenciatura en Física sobre " El transporte horizontal turbulento y principios físicos de la paleoclimatología". 1977.

Se consultó el apéndice A, donde desarrolla con bastante claridad la transformación de coordenadas cartesianas a esféricas.

- (8) Smith J.H. Introducción a la Relatividad Especial. Ed. Reverte-S.A. 1969.

Se explica con bastante claridad los sistemas de referencia.

- (9) Resnick Halliday D. Física. Parte I. Ed. C.E.C.S.A. 1970.

Se consultó para sistemas de referencia (capítulo I)

- (10) Medina M. Meteorología Básica Sinóptica. Ed Paraninfo. 1976.

Se consultó la parte sobre circulación y vorticidad, explica con claridad la circulación de la atmósfera y los tipos de ondas que la componen.

- (11) Marcelo Alonso, Edward Finn. Física. Vol. II. Campos y Ondas. - Ed. Fondo Educativo Interamericano. 1970.

Se consultó para movimiento ondulatorio, velocidad de fase y velocidad de grupo.

- (12) Somerfeld Arnold. Mechanics of Deformable Bodies. Vol. II. Ed. - Academic Press. 1964.

Se estudió la forma de las ecuaciones de ondas, ondas de sonido y gravedad (velocidad de propagación) para el capítulo III.

- (13) Walter J. Saucier. Principles of Meteorological Analysis. 1955.
Ed. The University of Chicago Press. Chicago & London.

La teoría sobre las proyecciones de mapas es desarrollada con -
bastante claridad.

- (14) E. J. Buendía Carrera y T. Morales Acoltzi

"Integración Numérica Preliminar del Modelo Barotrópico en
la región IV. Parte I"

Por publicarse Anales de Geofísica.

Se analizan los problemas que se presentan en la integración
sobre una región limitada.