

ESTUDIO SOBRE UNA FUENTE  
DE IONES

FEDERICO G. GARCIA SANTIBAÑEZ S.

*Físico*

---

**755**

Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México

1967



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres*

*A mi esposa*

*A mi hija*

# I N D I C E

	PAG.
AGRADECIMIENTOS	
INTRODUCCION	
CAPITULO I: FUENTES DE IONES	1
CAPITULO II: DESCARGAS EN GASES	4
CAPITULO III: DESCARGAS BRILLANTES	9
CAPITULO IV: CARACTERISTICAS DE LAS FUENTES DE IONES ESTUDIADAS	63
CAPITULO V: DISCUSION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES	80
CAPITULO VI: CONCLUSIONES	83
APENDICE I: TECNICAS DE DIAGNOSTICO	84
APENDICE II: LEYES DE SEMEJANZA	90
APENDICE III: TEORIA DE LA CAIDA LIBRE	95

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco a las siguientes personas la ayuda prestada en la elaboración de esta tesis:

Al Ingeniero Mario Vázquez Reyna por haberme propuesto el tema de tesis, así como por los consejos durante el desarrollo de la misma.

Al Dr. Alfonso Mondragón Ballesteros, por haberme asesorado y por el estímulo prestado en la elaboración de ésta tésis.

A los Doctores Vinicio Serment y Arcadio Poveda por su ayuda académica.

A los señores Ing. Walter Fonseca, Fernando Figueroa, Roberto Figueroa y Sra. Yolanda Jiménez, por la enorme, ayuda prestada en el transcurso de la preparación de esta tesis.

A mi esposa por haberme mecanografiado el original y muchas de las copias.

A mi hermano Alejandro por ayudarme poniendo las fórmulas en la tesis.

## I N T R O D U C C I O N

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos del estudio de dos fuentes de iones de cátodo frío. Los trabajos experimentales se realizaron en el Laboratorio de Plasmas de la Comisión Nacional de Energía Nuclear.

El propósito de este estudio es la investigación preliminar del comportamiento de las fuentes de iones, con objeto de mejorarlas y poder utilizarlas en la producción de plasmas relativamente calientes. Las fuentes de iones estudiadas difieren en dos características fundamentales, el diafragma y las distancias interelectrónicas.

En el Capítulo I, se indican algunas generalidades acerca de las fuentes de iones, tales como, la manera en que se distinguen unas de otras, los fenómenos principales que ocurren en ellas y los límites físicos de estos fenómenos.

Para comprender el funcionamiento de las fuentes de iones es necesario tener una idea general de las descargas en gases y estas son descritas someramente en el Capítulo II.

En el Capítulo III, se estudian con más detalle las descargas brillantes, pues este parece ser el fenómeno dominante en las fuentes de iones con que se experimenta. En este capítulo se mencionan los mecanismos básicos que ocurren en las descargas brillantes, las principales teorías usadas para describirlos y la comparación de estas con los experimentos.

Las características de las fuentes de iones estudiadas y los resultados experimentales con ellas obtenidos se exponen en el Capítulo IV. Las dos fuentes de iones tienen diafragmas de vidrio y de metal respectivamente, obteniéndose los mejo-

res resultados con la primera fuente de iones. Los resultados experimentales se obtuvieron variando la presión del gas a la entrada y los potenciales aplicados a los electrodos y tomando de 3 a 5 lecturas en cada punto de las curvas experimentales. Las corrientes de "iones" máximas obtenidas son de  $340 \mu A$  para un potencial acelerador de 7.2 KV y una presión de entrada de  $70 \mu$ . Estas corrientes máximas se obtienen en condiciones que no se pueden obtener con las dos fuentes, por esto no se reportan aquí.

En el Capítulo quinto se discuten los resultados experimentales haciendo un análisis global de ellos y mencionando algunos de los defectos no corregidos en los resultados. Los resultados más importantes dentro de los potenciales en que se ha operado son:

- a) Mayor efectividad de la fuente de iones con diafragma de vidrio
- b) Efecto pequeño de la fuente de radio-frecuencia
- c) Buena aproximación de la teoría con algunos resultados experimentales de la fuente de iones con diafragma de vidrio.

En el último capítulo se exponen las conclusiones obtenidas de los resultados experimentales, así como las modificaciones que pueden hacerse a las fuentes descritas para obtener mayores intensidades de corriente.

Por último se incluyen tres apéndices. En el primero se describen algunas de las técnicas de diagnóstico en la columna positiva. En el segundo apéndice se exponen la importancia de los principios de semejanza, deduciéndose algunos de los parámetros de semejanza. En el último apéndice se deducen las ecuaciones obtenidas por Tonks y Langmuir para el caso de una columna positiva cilíndrica.

Las fuentes de iones fueron diseñadas por el Ingeniero Mario Vázquez Reyna y construidas por el Sr. Fernando Figueroa - Lara. Los experimentos se realizaron con la ayuda del Sr. Roberto Figueroa Lara.

## CAPITULO I

### FUENTES DE IONES 1)

La necesidad de máquina de inyección de partículas cargadas para el estudio de los plasmas ha dado un gran impulso al desarrollo de fuentes de iones de gran intensidad.

Se han desarrollado para utilizarlas en los diversos tipos de aceleradores de partículas cargadas y para la separación de los isótopos. Para el primer propósito es que se han construido las fuentes de mayor intensidad ( $\sim 1$  A. de protones).

#### Principios Generales:

Dentro de una fuente generalmente se distinguen tres nómenos:

1.- La producción de iones ó más generalmente la producción de plasmas. El nombre de la fuente se lo da la forma de producción, así por ejemplo de alta frecuencia, acoplamiento capacitivo, fuentes de arco en campo magnético, simple ó con cátodo reflector (P.I.G.). Las fuentes más intensas tienen un arco de bajo potencial, un cátodo caliente y un campo magnético longitudinal intenso (5 a 7000 Gauss).

2.- Extracción que se hace siempre por un campo aplicado en el exterior. La extracción esta limitada principalmente — por dos factores:

a) La temperatura de electrones. Del plasma no se puede sacar sino un número de iones tal que la densidad de corriente máxima, esta dada por la expresión:<sup>2)</sup>

1.- Les Sources d'ions et de Plasma; Nucl. Instr. and Meth.; 4  
376 (1959)

2.- Characteristics of electrical discharges in magnetic fields,  
National Nuclear Energy Series 5 Mc Graw Hill, N. Y. (1949)  
Cap. III.

$$J_m = N_i \left( \frac{e k T_e}{m^+} \right)^{1/2}$$

donde  $N_i$  es la densidad de iones en el interior del plasma,  $m^+$  es la masa de iones,  $T_e$  la temperatura de electrones. De aquí la necesidad de altas temperaturas de electrones en el interior del plasma (del orden de  $3 \cdot 10^5$  °C en la fuente llamada Duo plasmatron).

b) La carga espacial que crea un campo puesto al campo aplicado. La extracción máxima es entonces de:

$$J_{MCE} = \frac{1}{9\pi V} \sqrt{\frac{2e}{m^+}} \frac{V^{3/2}}{d^2}$$

$J_{MCE}$  = densidad de corriente máxima

$V$  = voltaje aplicado exteriormente

$d$  = distancia entre el electrodo de extracción y el límite del plasma.

$m^+$  = masa de los iones

$e$  = carga del electrón

El problema de la concentración del haz de partículas, al cual se han dado diversas soluciones usando lentes simples ó dobles, generalmente de naturaleza electrostática. Cuando se trata de fuentes de alta intensidad se prefieren las lentes magnéticas.

Las fuentes de iones han sido estudiadas anteriormente por autores tales como A. T. Finkelstein <sup>3)</sup> quien obtiene una corriente máxima de 150 mA, pero su método es diferente al usado en el presente estudio y se basa en el empleo de un filamento; - T. Consoli y colaboradores <sup>1)</sup> mencionan las fuentes de iones conocidas hasta entonces, poniendo énfasis a sus aplicaciones en el trabajo termonuclear; P. C. Thoneman <sup>4)</sup> trata por primera vez

3.- A. High efficiency ion Source; Rev. Sci. Inst. 11, 94 (1940)

4.- Proc. Phys. Soc. (London); 61, 483-85 (1948)

fuentes de iones del tipo de radio-frecuencia; A. K. Ganguly y H. Bakhru <sup>5)</sup> dan datos acerca de las características de operación de una fuente de radio-frecuencia y discuten su funcionamiento.

---

5.- Operational characteristics of a radio-frequency ion source; Nucl. Instr. and Meth.; 21, 56.(1963)

## CAPITULO II

### DESCARGAS EN GASES

Si se aplica una diferencia de potencial adecuada entre dos electrodos que se encuentran en un tubo de vidrio que contiene gas, figura III.1, ocurren descargas eléctricas. Estas se pueden clasificar de acuerdo con sus características, por ejemplo su luminosidad que dependen de la naturaleza del gas y de la presión, densidad y otras propiedades del mismo. Considérese por ejemplo un tubo de vidrio de 50 cm de largo, conteniendo Neon a una presión de 1 mm de Hg y con electrodos planos de cobre de  $10 \text{ cm}^2$  de área, entonces las descargas se clasifican de la manera siguiente: figura III.2.

#### 1.- No autosostenida.

Además de aplicar una diferencia de potencial entre los electrodos, es necesario tener una fuente de ionización externa, la cual es generalmente proporcionada por rayos cósmicos, luz ultravioleta ó un campo electromagnético de alta frecuencia. Cuando la corriente a través del gas varía entre  $10^{-20}$  y  $10^{-10}$  amperes, con voltajes hasta de 600 volts, entonces ocurren chispazos al azar cuyo tamaño y frecuencia aumenta con el voltaje, región entre los puntos A B de la figura III. 2.

#### 2.- Descarga de Townsend.

Aumentando la caída de potencial interna, crece la corriente de descarga y cuando ésta tiene valores entre  $10^{-10}$  a  $10^{-6}$  amperes, región entre los puntos B y C de figura II. 2, entonces ocurre una descarga autosostenida conocida como descar-

ga de Townsend, la cual ha sido ampliamente estudiada <sup>6)</sup>. Es una descarga autosostenida pues la corriente no se modifica a pesar de que se le quite la fuente de ionización externa. La caída interna mínima para la que la corriente se autosostiene se le llama diferencia de potencial de ruptura. El fenómeno se considera consecuencia de que los electrones que dejan el cátodo producen ionización y excitación de las moléculas del gas, en la excitación se producen fotones, de los cuales algunos golpean el cátodo produciendo emisión secundaria de electrones, repitiéndose así continuamente estos procesos y dando una descarga autosostenida.

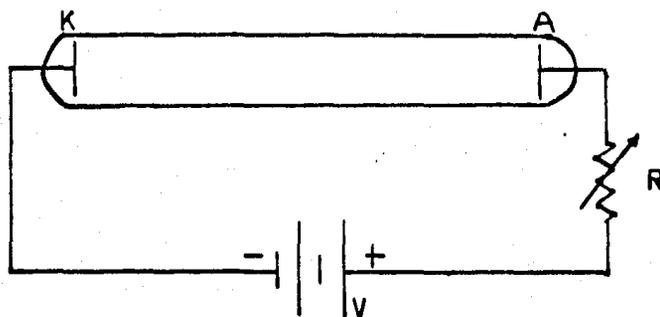


FIG. (1) TUBO DE DESCARGAS

Considérense  $dN$  nuevos electrones producidos en una distancia  $dx$  a lo largo de un campo eléctrico  $E$ , este número de electrones será proporcional al campo aplicado y a la densidad de electrones  $N_0$  entonces:

$$dN = \alpha E N_0 dx \quad \text{en 1}^a \text{ aproximación } \alpha E = \text{cte.}$$

integrando se obtiene:

$$N = N_0 \exp(\alpha Ex) \quad (1)$$

6.- Conduction of electricity through gases. J. J. Thomson, G.P. Thomson; Cambridge University Press (1933)

donde  $\alpha$  es el llamado primer coeficiente de Townsend. El coeficiente  $N_0$  mide el número de electrones sobre el cátodo.

Cuando  $X=d$ , entonces  $Ed=V_r$  es la caída de potencial de ruptura, la cual caracteriza el inicio de la descarga sostenida.

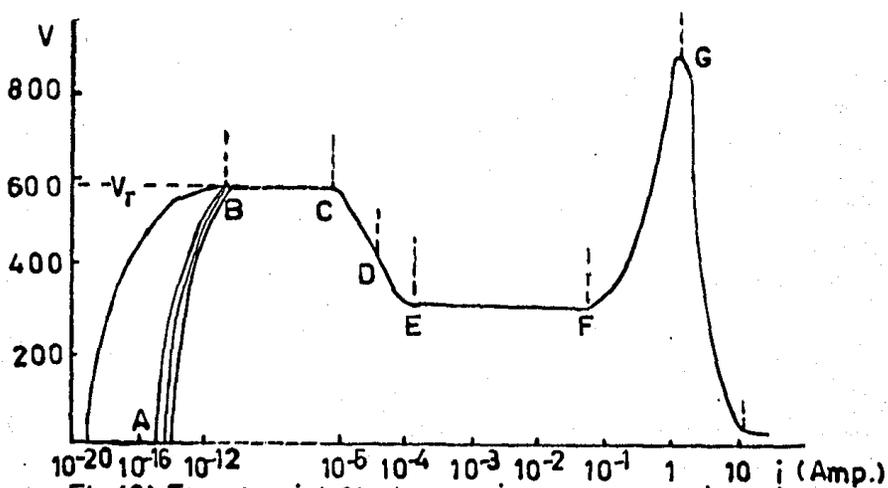


Fig.(2). El potencial Vs. la corriente para varios tipos de descargas.

Además de este proceso, los iones incidentes sobre el cátodo producen emisión secundaria. Supóngase que se producen,  $\gamma$  electrones por ion incidente en el cátodo, entonces el número total de electrones producidos por los dos procesos será  $\gamma(N - N_0)$  y suponiendo que no existen mecanismos de pérdidas de electrones, entonces este número deberá ser  $N_0$  por tanto:

$$\gamma(N - N_0) = N_0$$

$N_0$  es el número de electrones por unidad de volumen sobre el cátodo.

y sustituyendo de (1):

$$\gamma [N_0 \exp(\alpha V_r) - N_0] = N_0$$

$$\gamma [\exp(\alpha V_r) - 1] = 1$$

Debido a que  $\exp(\alpha V_r) \gg 1$ , entonces la expresión se reduce a

$$\gamma \exp(\alpha V_r) = 1 \dots (2)$$

A la  $\gamma$  se le conoce como el segundo coeficiente de Townsend y depende de las características del gas y del cátodo. Este tipo de descargas tienen lugar cuando  $Pd < 150$  mm. de Hg x cm. donde  $d$  es la distancia entre electrodos dada en cm.

### 3.- Descargas brillantes.

Si crece la corriente en la descarga de Townsend, disminuye la diferencia de potencial y ésta es la región de descarga subnormal, región entre los puntos D y E en la figura II.2.

Para valores aún mayores de la corriente de descarga se produce una carga espacial frente al cátodo y por ello se reduce la intensidad del campo eléctrico en la región del cátodo. A esta región de caída de potencial pequeña se le llama de brillo normal, región entre los puntos E y F, antes de llegar a ella entre los puntos C y E de la curva, la descarga es algunas veces intermitente.

Si la corriente es de  $10^{-4}$  a  $10^{-1}$  amperes el voltaje permanece constante y esta región es la de descarga brillante normal (EF), donde la descarga sólo cubre parte del cátodo.

Si la descarga cubre totalmente el cátodo entonces el potencial crece mucho, conociéndose como la región de la descarga anormal. (FG).

### 4.- Descarga de arco.

Si se aumenta la corriente la caída interna llega a un máximo y en grandes corrientes se reduce hasta un valor muy bajo cuando se produce la descarga de arco.

En la figura III.1 se muestran las variaciones de los parámetros de la descarga a lo largo de ella <sup>7)</sup>.

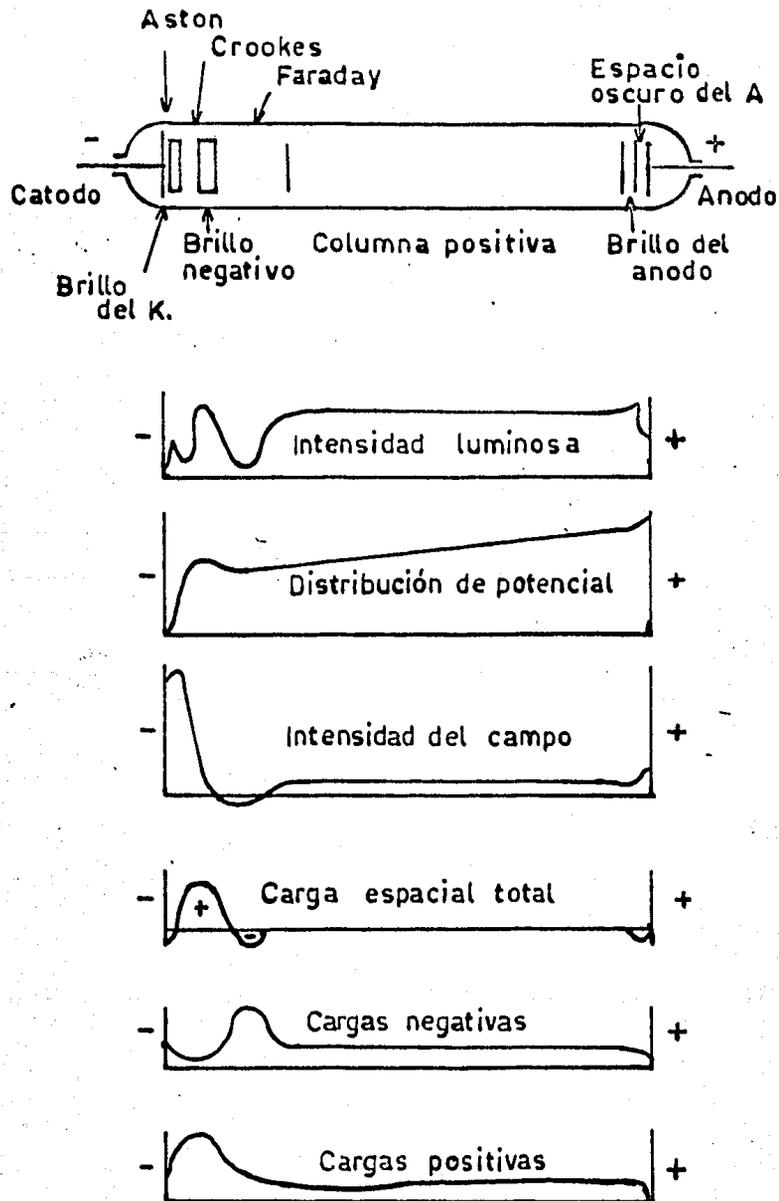


Fig. III.1 Variación de los parámetros en la descarga brillante.

7.- Basic data of plasma Physics. Sanborn C. Brown, Technology Press ( 1959)

## CAPITULO III

### DESCARGA BRILLANTE

#### 1.- Regiones en el espacio interelectrónico, en la descarga brillante.

Aún cuando la posición de las regiones y su ocurrencia dependen del tipo de gas, de la presión y de la corriente de descarga, sin embargo en general las regiones son comunes a todas las descargas de este tipo.

a) Espacio oscuro primario ó espacio de Aston. Debido a los iones incidentes sobre el cátodo se producen electrones secundarios, se forma una carga espacial negativa y la aparición oscura respecto a las zonas contiguas se atribuye a que los electrones que han sido liberados pierden energía y probablemente ya no pueden ocurrir excitación.

b) Primera capa del cátodo. Esta es una delgada capa que emite luz poco intensa.

c) Segunda capa del cátodo. La intensidad de la luz emitida es mucho más débil que la de la primera capa.

Las dos capas se producen por los electrones que logran pasar la carga espacial recombinándose con los iones incidentes ó bien porque su energía ha excedido los potenciales de resonancia produciendo excitación de los átomos del gas.

d) Espacio oscuro del cátodo ó espacio oscuro de Crookes. Este se toma comúnmente desde el cátodo hasta la frontera con la región de luminosidad negativa. Entonces esta región no es totalmente oscura aún que así lo parezca, debido a la presencia de otras zonas mucho más brillantes. Los electrones que no

se recombinan sufren una aceleración a través de esta región. En el espacio oscuro de Crookes se han observado rayos X blandos, cuya potencia de penetración aumenta conforme se acercan a la región de brillo negativo.

e) Región de brillo negativo. Es la región más luminosa de la descarga, incrementándose su luminosidad hacia la mitad de la región y decreciendo hacia el ánodo. Esta zona se forma debido a que la energía adquirida en el espacio de Crookes es la suficiente como para producir colisiones inelásticas las cuales dan lugar a ionización y excitación de átomos.

f) Espacio oscuro de Faraday. Relativamente oscuro, se produce cuando la energía de los electrones es tan baja que ya no produce excitación de los átomos neutros.

g) Columna Positiva. Es una larga columna luminosa que llena el resto del tubo, casi hasta el ánodo, su color no es igual al de la región de brillo negativo. La frontera con la región anterior es difusa y se conoce como punta de la columna. La columna positiva es una región de carga total cero.

h) Espacio oscuro del ánodo y brillo del ánodo. Algunas veces se puede ver un delgado espacio oscuro en el extremo de la columna positiva y un brillo sobre la superficie del ánodo.

Quando se disminuye la presión se expanden las zonas negativas y sus fronteras se hacen difusas, además la columna positiva se dirige hacia el ánodo. Si se reduce bastante la presión, entonces desaparecen sucesivamente la columna positiva, el espacio oscuro de Faraday y el brillo negativo. Llamándosele a ésta descarga obstruida.

Ai se aumenta la distancia entre los electrodos sólo crece la columna positiva, por la misma cantidad en que se amenta la distancia.

Si se aumenta la diferencia del potencial aplicado a los electrodos entonces la longitud del espacio oscuro del cátodo decrece, la "longitud del brillo negativo crece y también cre-

ce la corriente de la descarga aumentando el brillo en las zonas luminosas.

Cuando se aumenta la corriente de la descarga, en la región de brillo normal, sin variar la diferencia de potencial, entonces aumenta la luminosidad y las regiones cercanas al cátodo se expanden radialmente hasta que el brillo negativo cubre la superficie del cátodo.

En el presente caso de gas Helio, con impurezas que probablemente son de oxígeno, los colores de las regiones luminosas de la descarga son:

Gas	La capa del Cátodo	Luminosidad Negativa	Columna Positiva
He	rojo	verde	rojo a violeta
Aire	rosa	azul	

## 2.- Descripción de la Descarga Brillante

En general, los electrones salen del cátodo con una energía pequeña del orden de eV y son acelerados por el campo eléctrico, alcanzando en una distancia pequeña, la energía suficiente como para excitar los átomos del gas, los que al desexcitarse emiten fotones y esto da origen a la primera capa del cátodo. En este proceso de excitación los electrones pierden parte de su energía, aunque son acelerados, la luminosidad que producen no es tan grande, formándose la segunda capa del cátodo. En este proceso de excitación los electrones pierden parte de su energía, aunque son acelerados, la luminosidad que producen no es tan grande, formándose la segunda capa del cátodo. Después son acelerados a tal grado que pueden producir ionización de los átomos del gas ó sea nuevos electrones, los cuales son también acelerados y ello da lugar a que la ionización crezca conforme se alejan del cátodo. Como resultado de esas aceleraciones dos tipos de electrones cruzan la frontera entre el "es

pacio oscuro del cátodo" y el "brillo negativo".

i) Lentos debidos a la ionización en el espacio oscuro los cuales producen excitación y por tanto brillo de la región siguiente.

ii) Rápidos, que son pocos, provenientes del cátodo y con una energía cercana a la proporcionada por la caída del cátodo  $eV_k$ , éstos producirán ionización.

Debido a la excitación producida por los iones lentos se producirán fotones, algunos de los cuales golpean el cátodo y provocan emisión de electrones, así mismo los iones formados en el espacio oscuro producirán electrones secundarios del cátodo. Probablemente ocurra poca recombinación en esta región del brillo negativo en el gas, aunque sí la hay en el vidrio.

A causa del exceso de electrones en el extremo del "brillo negativo" se forma una carga espacial hasta el ánodo.

Los electrones son acelerados por el campo eléctrico a través del espacio oscuro de Faraday, produciendo ionización y excitación en el sitio donde empieza la columna positiva, esto es en la punta de la columna.

Excepto en los extremos, la columna positiva es una región uniforme donde hay poca ionización, debido a la difusión ambipolar existe un flujo radial de cargas, las densidades de iones y electrones son aproximadamente iguales, o sea

$$N_e \approx N_i (\sim 10^{10} \text{ a } 10^{13} \text{ por cm}^3).$$

La igualdad en la densidad se mantiene por el flujo de electrones proveniente del espacio oscuro de Faraday y el flujo de iones positivos desde el ánodo.

Frente el ánodo se forma una carga espacial negativa - debido a las fuerzas de atracción y repulsión que el ánodo ejerce sobre electrones e iones. Dando lugar además, a un campo eléctrico más intenso que en la columna positiva, el cual proporciona iones a la columna.

### 3.- La Región del Cátodo

#### Experimentos:

#### 3.1.- Descripción y Mecanismos Básicos.

La región del cátodo es la más importante de la descarga pues ésta puede existir sin las otras partes de ella, pero no sin la región del cátodo.

Se define como longitud de esta región a la comprendida entre el cátodo y la zona de "brillo negativo". Las propiedades de esta región son casi independientes del resto de la descarga, así por ejemplo la distancia  $d$ , la caída en el cátodo  $V_k$  y la densidad de corriente  $j$  son independientes de la longitud de la descarga si el ánodo no está cerca del espacio oscuro de Faraday y son además independientes del diámetro del tubo, si no es muy angosto.

Los principales procesos que ocurren en esta región son los siguientes:

Los electrones se aceleran a través del espacio oscuro del cátodo adquiriendo la energía suficiente para ionizar y excitar los átomos del gas. Suponiendo un factor de multiplicación  $M$  debido a las ionizaciones; entonces los iones positivos, los fotones, las moléculas neutras y las excitadas golpean el cátodo produciendo electrones secundarios.

Sea  $\gamma$  el número de electrones secundarios producidos por las diferentes partículas mencionadas, por cada  $(M-1)$  electrones formados en el gas, entonces para que la descarga sea autosostenida:

$$\gamma(M-1) = 1 \quad \dots (1)$$

$$\therefore M = 1 + \frac{1}{\gamma} \quad \dots (1a)$$

El factor de multiplicación  $M$  dependerá de la presión y de la naturaleza del gas. El coeficiente  $\gamma$  depende del tamaño y energía de las partículas incidentes sobre el cátodo, del material del cátodo y del estado de su superficie.

Caída de potencial en el cátodo,  $V_k$ .

La caída de potencial en el cátodo se define como la diferencia de potencial entre el cátodo y la zona de brillo negativo.

Cuando la corriente de descarga varía, en un cierto intervalo, la caída del cátodo permanece constante, siempre y cuando la descarga sólo cubra parte del cátodo. En este intervalo - la densidad de corriente en el cátodo  $j_k$  es constante, además - el área del cátodo cubierta por la descarga es proporcional a la densidad total de corriente. Cuando se cumplen las condiciones mencionadas se le llama descarga normal y en este caso la caída en el cátodo se llama caída normal, igualmente la densidad de corriente del cátodo se llama densidad normal de corriente.

La caída en el cátodo no es constante si:

- a) La corriente crece y la descarga cubre todo el cátodo, entonces la caída en el cátodo y la densidad de corriente aumentan con la corriente (descarga anormal).
- b) La corriente es pequeña y la longitud de la región del cátodo es aproximadamente igual al diámetro del cátodo cubierto por la descarga. En este caso, hay pérdida de iones en el espacio oscuro, debido a movimientos laterales de los mismos, además conforme se disminuye la corriente de descarga crece la caída en el cátodo (descarga subnormal).

### 3.2.- Mediciones

Las medidas se obtienen por los métodos siguientes:

- i) Sondas. Por medio de sondas de Langmuir se mide el mínimo potencial espacial del brillo del cátodo, definiendo en este caso la caída en el cátodo  $V_k$  como la diferencia entre este potencial y el del cátodo.
- ii) Medidas de campo eléctrico. Por medio de la deflexión de un haz electrónico se puede medir el campo eléctrico en cada punto del espacio oscuro del cá-

todo. La utilidad máxima de este método reside en la comprobación del valor de  $V_k$ .

- iii) Potenciales de electrodo. Moviendo el ánodo hacia el cátodo, midiendo la diferencia de potencial entre los electrodos y manteniendo constante la corriente de descarga se puede encontrar el valor de la caída en el cátodo, en el momento en que la caída en el ánodo desaparece, pues entonces  $V = V_k$ . Más recientemente se han hecho los mismos experimentos variando la presión, de tal manera que el ánodo esté en las diferentes zonas de la descarga, éste método tiene la ventaja de una mayor pureza del sistema, pues no es necesario utilizar empaques y grasas de alto vacío que introducen impurezas.

### 3.3.- Caída de potencial normal $V_n$ , en el cátodo.

Se puede lograr la reproducción de los experimentos si no existen impurezas en el gas ó en el cátodo. Se ha observado experimentalmente que las descargas anormales si son reproducibles, lo cual en general no sucedía en las descargas normales.

Las acciones que pueden tener las impurezas en las descargas luminosas con el gas que se está usando en ésta ( $H_e$ ) son:

- i) Colisiones de segunda clase. Estas ocurren si el potencial de excitación de un átomo (por ejemplo de impureza), es mayor que el potencial de ionización del átomo del gas ( $H_e$  por  $eJ$ ) y el primer átomo excitado tiene una colisión con el átomo neutro del segundo.
- ii) Acción química en el cátodo. Cuando se forman pequeñas capas sobre el cátodo, por ejemplo de óxidos.

Experimentalmente se ha encontrado un método para lograr la reproducibilidad de las descargas, el cual consiste en aumentar lentamente la intensidad de la corriente hasta que la descarga cubre el cátodo. Por este medio los iones al incidir.

Con alta energía sobre el cátodo remueven las impurezas, como además se producen depósitos del metal sobre la cámara de vidrio, estos actúan como absorbedor ("getter") eliminando las impurezas y sirviendo de pantalla a las paredes de vidrio. Estos depósitos ocurren con motivo del chisporroteo del cátodo y éste es mayor en la descarga anormal, explicando así la mayor reproducibilidad de estas descargas.

a) Caída normal en función del material del cátodo

Para un gas determinado y un material del cátodo dado la caída del potencial normal es una constante. Por lo tanto se pensó inicialmente en alguna relación entre el material del cátodo y la caída de potencial normal, sin embargo los únicos datos son los de una variación de  $V_n$  con la función de trabajo del cátodo  $\varphi$ , pero sin poder encontrar una relación experimental. En seguida se muestra una tabla donde se dan las funciones de trabajo de algunos metales y los potenciales normales de los gases que interesan en el presente trabajo:

Tabla No. 1

Material del cátodo	$\varphi$ (ev)	Gases		
		He	Aire	O <sub>2</sub>
Ta	4.1	171	207	---
Mo	4.2	171	---	---
W	4.5	155	---	---
Fe	4.6	150	269	290
Ni	4.9	158	226	---

b) Caída de potencial normal en función de las propiedades del gas.

El potencial normal depende de la naturaleza temperatura y presión del gas, aunque su relación no es muy sencilla. Se ha encontrado que el potencial normal es pequeño si el potencial de ionización del gas es pequeño y la probabilidad de ionización por colisión con electron es grande. Este hecho se muestra explícitamente en la figura siguiente, para un cátodo de Molibdeno

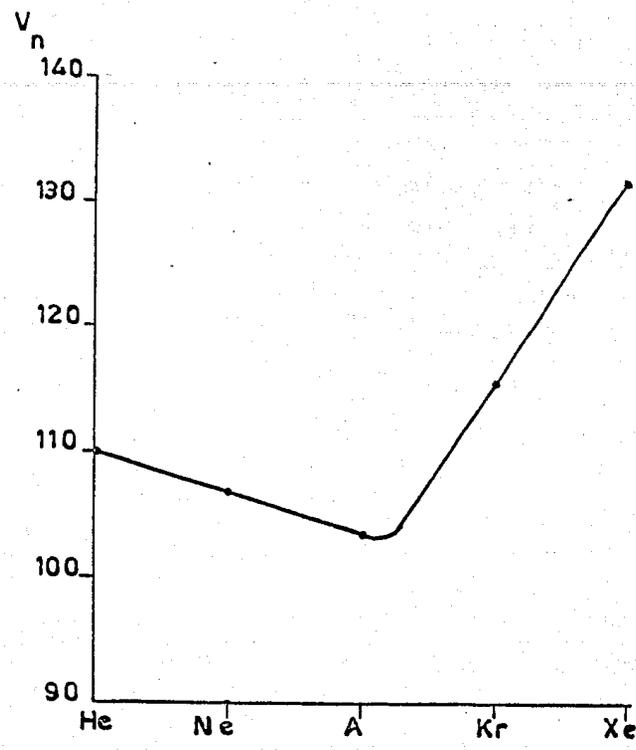


Fig. III.2. Caida normal en el Mo para los gases nobles.

*Contradiciendo el principio de semejanza se han encontrado variaciones del potencial normal cuando cambia la presión del gas, esto se ilustra en la figura siguiente:*

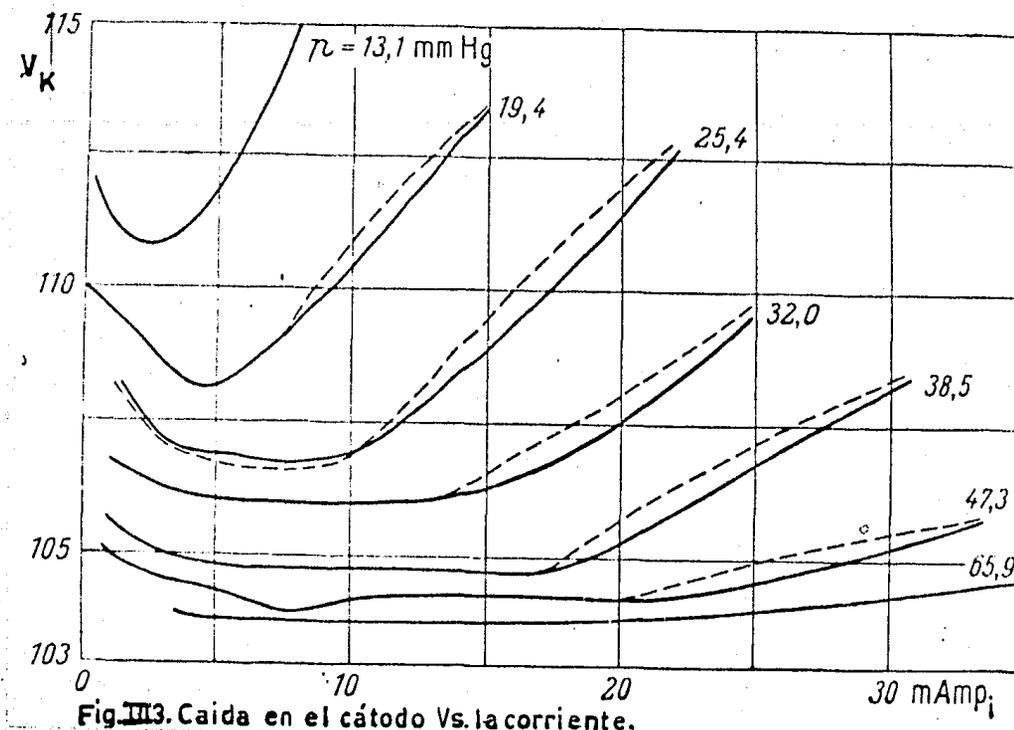


Fig. III.3. Caída en el cátodo Vs. la corriente.

También se ha encontrado experimentalmente que  $j_n/P^2$  no es constante como lo predicen las leyes de semejanza <sup>8)</sup>

Finalmente se han encontrado variaciones en  $V_n$  y  $j_n$  debidas a las variaciones en la temperatura del cátodo <sup>8)</sup>

#### 3.4.- Campo eléctrico en el espacio oscuro del cátodo-

El método empleado para medir el campo eléctrico en esta zona de la descarga es el de la deflexión de un haz de electrones producida por éste campo eléctrico. Usando este procedimiento se ha encontrado un decrecimiento lineal del campo eléctrico conforme se aleja del cátodo, figuras III.4 y III.5.

8.- Philips Res. Rep. 1, 119, 225, 407 (1946)

además se encuentran discrepancias en la región de campos pequeños y por tanto el método es útil preferentemente para campos eléctricos altos. Se puede definir la longitud de la región del cátodo como aquella en la cual el campo extrapolado vale cero. Con este método se está encontrando realmente el valor promedio del campo eléctrico y algunos autores han medido las variaciones de él, según se muestra en la figura III. 6.

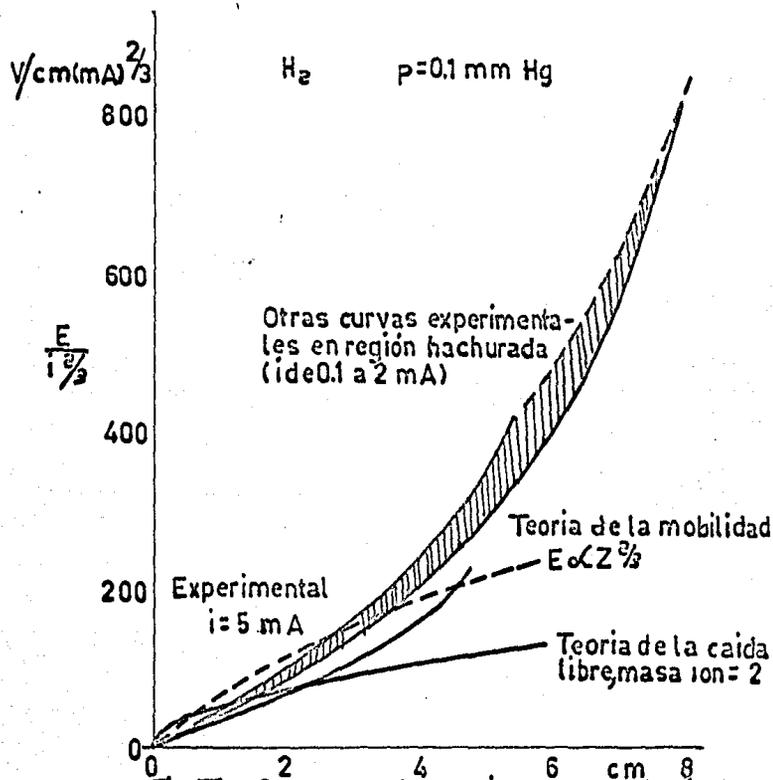


Fig. III 6. Campo en el espacio oscuro del cátodo Vs. la distancia desde b.n.

Los valores encontrados por Warren se comparan con los valores teóricos previstos por las dos teorías acerca del cátodo, de las cuales se hablará más adelante.

### 3.5.- Longitud del espacio oscuro del cátodo.

La longitud del espacio oscuro del cátodo se define de acuerdo con el método empleado para medirlo.

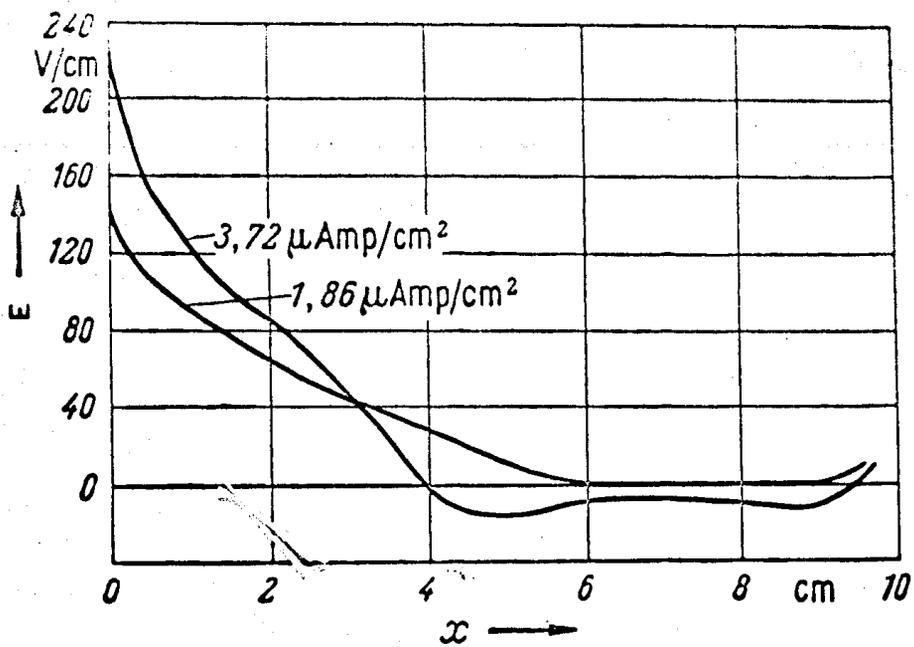


Fig. III. 4  $N_2 p = 55 \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}$   
Campo en el espacio oscuro del cátodo Vs. la distancia al cátodo.

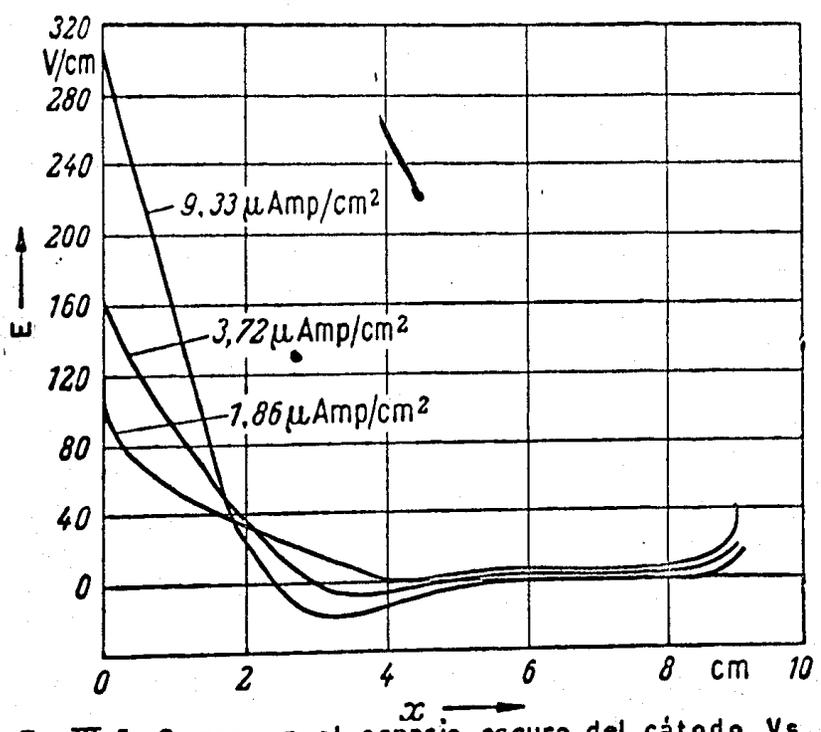


Fig. III. 5 Campo en el espacio oscuro del cátodo Vs la distancia al cátodo.

El primer método consiste en la medida visual de esta longitud en cuyo caso se define, como se ha dicho ya anteriormente. Otro método es el de mover el ánodo hacia el cátodo y aquí se define como la distancia entre electrodos a la cual crece abruptamente la diferencia de potencial entre los electrodos. Por último puede medirse por la deflexión de una haz electrónico y se define como se dijo en la sección correspondiente al campo eléctrico. En la figura y tabla siguiente pueden verse los valores de la longitud del espacio oscuro y su variación con la caída en el cátodo.

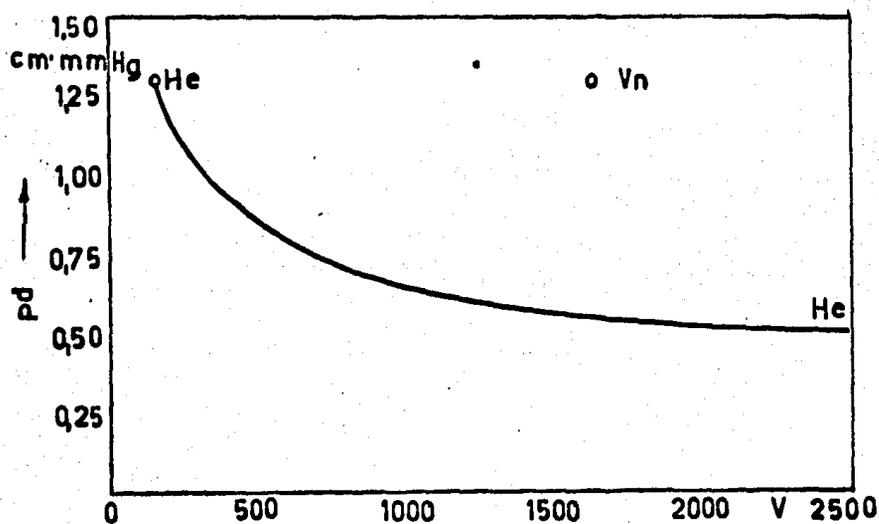


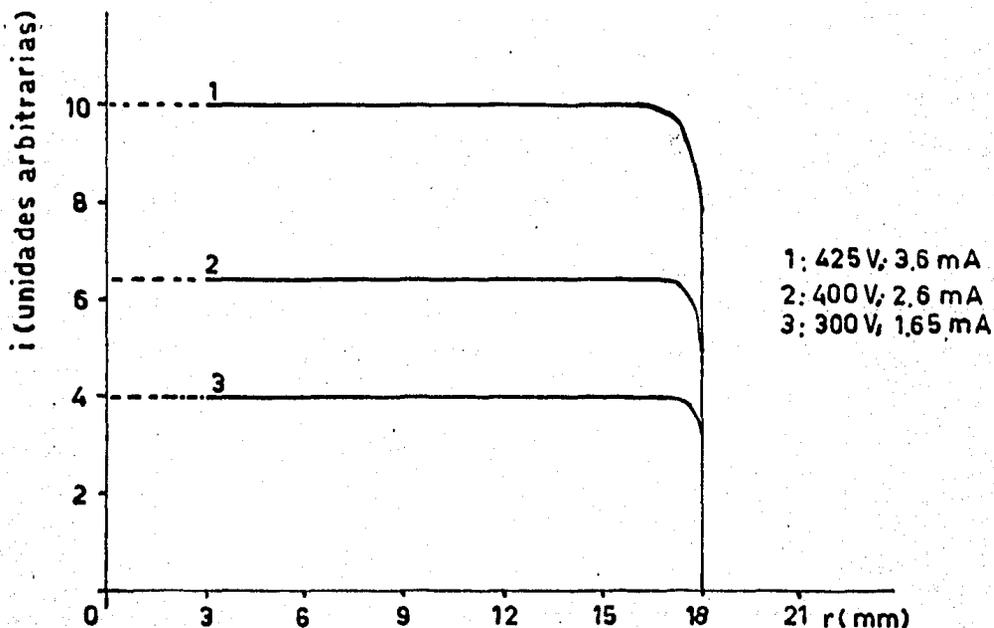
Fig. III.7 Longitud del espacio oscuro del cátodo Vs. la caída del cátodo.

Tabla No. 2.  $p \cdot d_n$  en  $\text{cm} \cdot \text{mmHg}$ 

Cátodo	He	Ne	A	Aire
Cu				0.23
Mg	1.45			
Al	1.32	1.64	0.29	0.25
Fe	1.3	0.72	0.33	0.52
Vidrio				0.3

3.-6. Densidad de corriente.

La densidad de corriente promedio se encuentra dividiendo la corriente que fluye hacia el cátodo entre el área del mismo. Sin embargo es útil conocer su variación sobre la superficie del cátodo y su dependencia de algunos parámetros como la caída en el cátodo, la presión, etc. En las figuras siguientes se muestran las variaciones de la densidad de corriente para distintos parámetros:

Fig. III 8. Distribución de la corriente sobre la superficie del cátodo a altas presiones ( $264 \mu\text{Hg}$ )

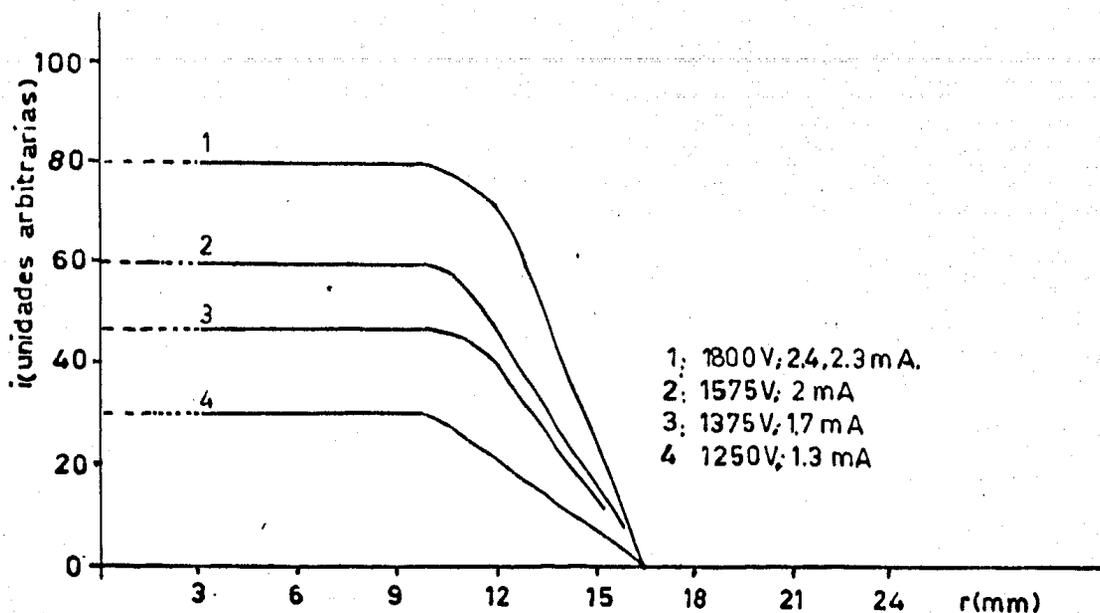


Fig. III.9. Distribución de la corriente sobre la superficie del cátodo a bajas presiones (30,8  $\mu$ Hg)

### 3.7.- Distribución de la energía en el espacio oscuro.

La distribución de la energía se ha medido por medio de deflexión magnética o por potenciales de retardo y se hace poniendo un colector atrás del cátodo agujerado y tomando las precauciones necesarias para evitar las contribuciones de:

- a) electrones secundarios emitidos por el colector
- b) ionización en el gas producida por iones rápidos - que chocan con las moléculas del gas.

Estas fuentes de error pueden ser eliminadas poniendo una rejilla a un potencial intermedio a la entrada del colector. El resultado que nos interesa fué encontrado por Brewer y Miller<sup>9)</sup> y es  $\frac{I^+}{I} \propto \frac{1}{p}$  entre 10 y 500  $\mu$ , donde  $I^+$  es la corriente de iones,  $I$  la corriente total en la descarga y  $p$  la presión.

9.- Brewer A. K. y R. Miller; Phys. Rev.; 42, 786 (1932)

Para los electrones se han encontrado las siguientes conclusiones:

- i) A bajas presiones la diferencia de potencial es alta y se está en la región de las descargas anormales además aquí los electrones tienen una energía igual a  $eV_k$ .
- ii) Si la presión es alta y la diferencia de potencial pequeña entonces los electrones tienen un cierto rango de energía, encontrándose que la curva es independiente de la corriente y del voltaje, además la máxima energía corresponde a  $eV_k$ .
- iii) Cuando la presión se mantiene constante, se tienen más electrones con la energía máxima y la corriente crece.
- iv) Si la presión aumenta, entonces habrá más electrones con energías pequeñas y la corriente de electrones al ánodo decrece.

De todo lo dicho parece concluirse que a bajas presiones todos los electrones provienen del cátodo.

### 3.8.- Propiedades Ópticas del Espacio Oscuro del Cátodo.

Debido a las colisiones se produce por excitación una luz, aunque menos intensa que la emitida por la región de brillo normal. Además se tienen las capas luminosas o brillo del cátodo.

La primera capa del cátodo se observa a bajas presiones y bajas caídas del cátodo ( $V_k$ ), así como también en los gases raros <sup>10)</sup> esta capa se forma cuando la energía de los electrones es suficiente como para producir la excitación de los átomos del gas <sup>11)</sup>.

El brillo del cátodo aparece cuando se tienen una mayor presión y caída en el cátodo, producido por la excitación de

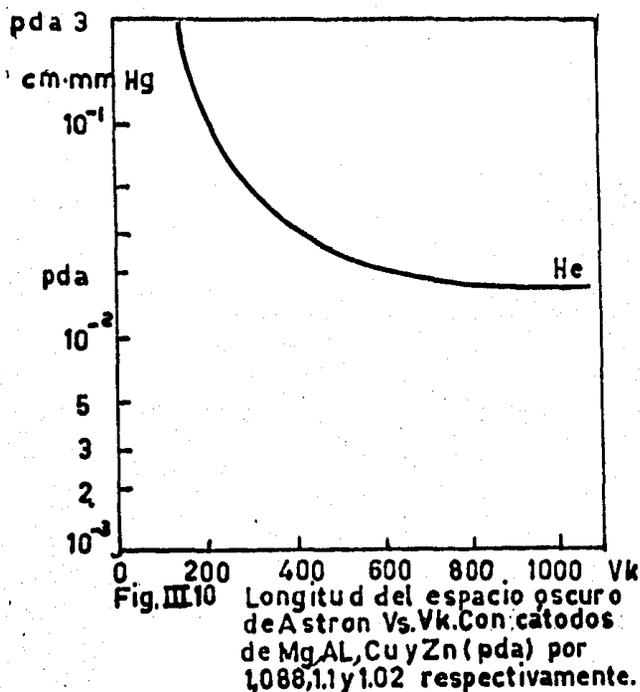
10.- Z. Physik, 71, 238, 246 (1931)

11.- Phil Mag., 17, 146 (1934)

los átomos debidas a colisiones de iones y de neutros rápidos <sup>12)</sup>.

Longitud del espacio oscuro de Aston, da:

Se ha encontrado experimentalmente que la longitud de este espacio disminuye cuando la caída en el cátodo crece y esta disminución es más rápida que con la longitud del espacio oscuro del cátodo. El producto  $pd_a$  si obedece la ley de similaridad. En la gráfica siguiente se muestra la variación de  $pd_a$  con la -- caída de potencial en el cátodo:



### 3. 9.- Geometría del cátodo.

Cuando el cátodo es hueco entonces la densidad de corriente es mayor que en los cátodos convencionales y además el brillo negativo es más intenso <sup>13)</sup>.

Balace de energía de iones y electrones.

12.- Z. Physik, 62, 746 (1930)

13.- J. Opt. Soc. Amer Vol. 44, 502 (1954)

La potencia generada en el cátodo esta dada por  $P_g = I V_k$  y la potencia disipada estará dada por el producto de la corriente de iones en el cátodo y de una diferencia de potencial promedio <sup>14)</sup>  $\bar{V}$ :

$$P_d = I_+ \bar{V} = K I V_k$$

donde  $K$  es una constante en general menor que un medio y en particular casi uno cuando es una descarga anormal (i.e.  $V = V_k$ ).

Relacionando la corriente de descarga con las corrientes de iones y electrones:

$$I = I_+ + I_e = I_+ (1 + \gamma)$$

$$\therefore \gamma = \frac{1-K}{K}$$

La última ecuación nos permite encontrar el coeficiente  $\gamma = \frac{I_e}{I_+}$  si se conoce el valor de  $K$ .

Experimentalmente se ha encontrado <sup>15)</sup> que cuando la presión es baja y la caída en el cátodo es grande:

$$\gamma = A(V_k - V_0) \quad ; \quad V_k \gg V_0$$

donde  $A$  y  $V_0$  son constantes.

### 3.10.- Teorías de la caída de potencial en el cátodo.

En estas teorías se trata de encontrar relaciones entre  $V_k$ ,  $j$  y  $d$  en función de los parámetros del gas y del cátodo, por ejemplo los coeficientes de ionización  $\alpha$  y  $\gamma$  y la función de ionización, etc. También se trata de obtener la variación del campo eléctrico en el espacio oscuro del cátodo.

Las teorías pueden dividirse en tres tipos diferentes, de acuerdo a su forma de tratar el problema y son:

- 1) Las que consideran al espacio oscuro del cátodo como unidad independiente.
- 2) Aquellas que unen las zonas del espacio oscuro del cátodo y la de brillo como esenciales para sostener la descarga.

14.- Phil. Mag; II, 55 (1931)

15.- Z. Physik, 107, 642, 730 (1937); 108, 780 (1938) 109, 121 (1938) 111, 208 (1938)

3) Otros pretenden describir todos los fenómenos de la descarga.

Enseguida se verán con más detalle cada uno de los tipos de teorías:

1.- Dentro de las teorías pertenecientes a este grupo están las siguientes:

i) No se consideran las colisiones de los iones con los átomos del gas, la frontera con el brillo negativo se supone como un electrodo ó una fuente de iones y en general tratan de resolver la ecuación de mantenimiento de una descarga:

$$\gamma(M-1) = 1 \dots (1)$$

ii) Se supone al espacio oscuro como una capa de carga espacial cuya densidad de corriente es:

$$j = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{m}} \frac{V_K^{3/2}}{d^2} \dots (2)$$

iii) Comparando los resultados de esta teoría con los experimentos de Aston y Watson <sup>16)</sup>, quienes encontraron la fórmula empírica

$$j \propto \left(\frac{V-G}{d}\right)^2 ; G = \text{cte.} \dots (3)$$

puede verse en la figura siguiente la buena aproximación teórica obtenida:

16.- Proc Roy Soc. Lond., Ser. A 86, 168 (1912)

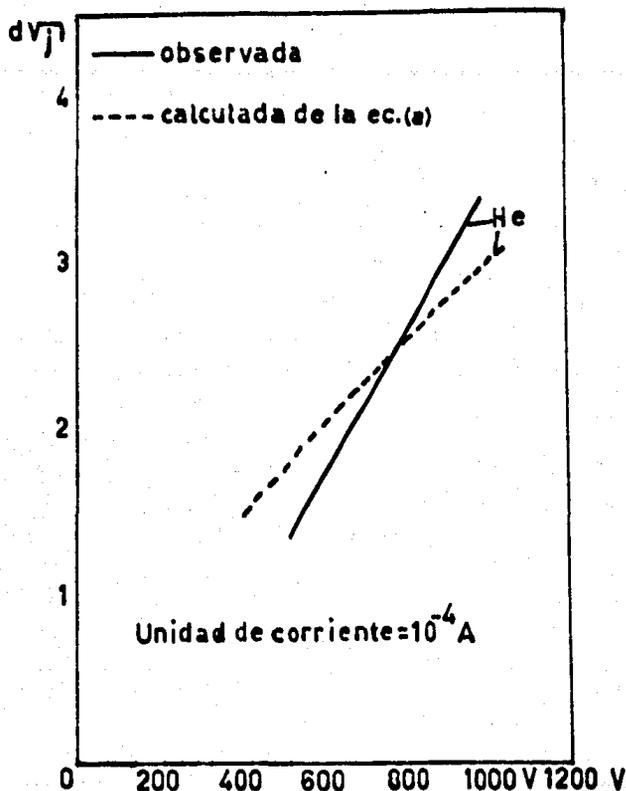


Fig. III.11 Comparación de la teoría con los resultados experimentales.

La falla más grande de estas teorías consiste en encontrar el campo eléctrico proporcional a  $Z^{1/3}$  con  $Z$  la distancia desde el brillo negativo.

#### 1.- Teoría General

Dentro del primer grupo de teorías se encuentra ésta, en la cual se considera un cátodo plano. En el cátodo se produce un electron secundario por cada  $\gamma$  iones que lo golpean, saliendo los electrones con una energía pequeña. ( $-1$  eV), acelerándose e ionizando el gas, produciendo así iones, los cuales aumentan hacia la frontera con la región de brillo negativo. Debido a las cargas espaciales positiva y negativa se produce un campo eléctrico.

Escribiendo matemáticamente lo antes dicho se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$j = j_K^+(1+\gamma) = eN_K^+v_K^+(1+\gamma) \dots (1)$$

donde  $j_K^+$  es la densidad de corriente iónica en el cátodo,  $N_K^+$  y  $v_K^+$  son la densidad de iones y la velocidad de arrastre de iones en el cátodo.

Para poder conocer el factor de multiplicación  $M$ , se requieren las siguientes ecuaciones:

i) Ecuación de Poisson:

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi e(N^+ - N^-) = -4\pi eN^+ \dots (2)$$

donde se ha despreciado  $N^-$  debido a la gran velocidad de los electrones.

ii) Ecuación de Continuidad. En una diferencial de  $dx$  lumen las pérdidas de iones y de electrones deben igualarse, entonces:

$$Z_i = f(E_K) = \frac{d}{dx} (N^+v^+) \dots (3a)$$

despreciando la difusión de iones, ahora para electrones:

$$Z_e = f(E_K) = \frac{d}{dx} (N^-v^- + D \frac{dN^-}{dx}) \dots (3b)$$

donde  $Z_i$ ,  $Z_e$  son el número de ionizaciones por  $cm^3$ , por segundo para iones y electrones respectivamente.

iii) Ecuación de Movilidad:

$$v^+ = F(E) \quad ), \text{ usualmente } v^+ = b^+E \text{ o } \propto \sqrt{E} \dots (4a)$$

$$v^- = b^-E \text{ o } \propto \sqrt{E} \dots (4b)$$

donde (4a) es para movilidad constante cuando  $v^+ = b^+E$  y  $b^+$ ,  $b^-$  son las movilidades de iones y electrones.

Las condiciones a la frontera para estas ecuaciones son

$(E)_{x=d} = 0$  y  $(j_K^+)_{x=0} = eN^+v^+$ , la última ecuación será:

$$V_K = \int_0^d E dx \dots (5)$$

2.- Algunas de las teorías pertenecientes al segundo grupo son las de:

a) Compton y Morse <sup>17)</sup> los que desprecian la recombinación y la difusión, encuentran el valor máximo de  $M$  para un cierto  $V_n$  y suponen al ler coeficiente de Townsend dado por:

$$p = A e^{-B/(E/p)} \dots (1)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes, utilizan también el valor del campo eléctrico a la mitad del camino libre medio cerca del cátodo, ob-  
teniendo

$$V_x = 1.2 V_n (1 - e^{-0.714(px)/(pd_n)}) \dots (2)$$

$$pd_n = 0.85 \frac{V_n}{B^n} (1 + \frac{B}{0.97AV_n} + \dots) \dots (3)$$

$$\frac{j_n}{p^2} = cte \sqrt{\frac{\lambda^+}{M}} \frac{V_n^{3/2}}{1 - N_0^+/N_d^+} \dots (4)$$

donde  $N_0^+, N_d^+$  son las concentraciones de iones en  $x=0, d$ .

Sus resultados no coinciden con los experimentos y lo único importante esta dado por la ecuación (2), pues  $pd_n/V_n$  es una constante dependiente sólo del gas.

b) Morse <sup>18)</sup> usa las hipótesis siguientes

$$v_e^+ \propto \sqrt{E}$$

$$\frac{D_e}{b_e} - cte. = \frac{D^+}{b^+} \quad \text{o sea} \quad T^+ = T_e$$

con las hipótesis anteriores encuentra la expresión  $E = C_1 e^{-Ax} + C_0$   
donde  $A$  es una constante dependiente del gas.

La forma de la ecuación del campo eléctrico coincide -  
con la de la primera teoría y por tanto no está de acuerdo con -

17.- Phys. Rev. 30, 305 (1927); Z. Physik, 76, (1932); Z. Physik 82, 473 (1933).

18.- Phys. Rev. 31, 1003 (1928)

los valores experimentales, siendo su resultado más importante el de la constancia de  $V_n$ .

c) Engel y Steenbeck <sup>19)</sup> utilizan la expresión experimental del campo eléctrico  $E = E_k(1 - \frac{x}{d})$  y las ecuaciones  $v^* \propto E - B/(E/p)$   
 $\bar{p} = Ae$  junto con la condición a la frontera  $(j^*)_{x=d} = 0$

y obtienen los resultados siguientes

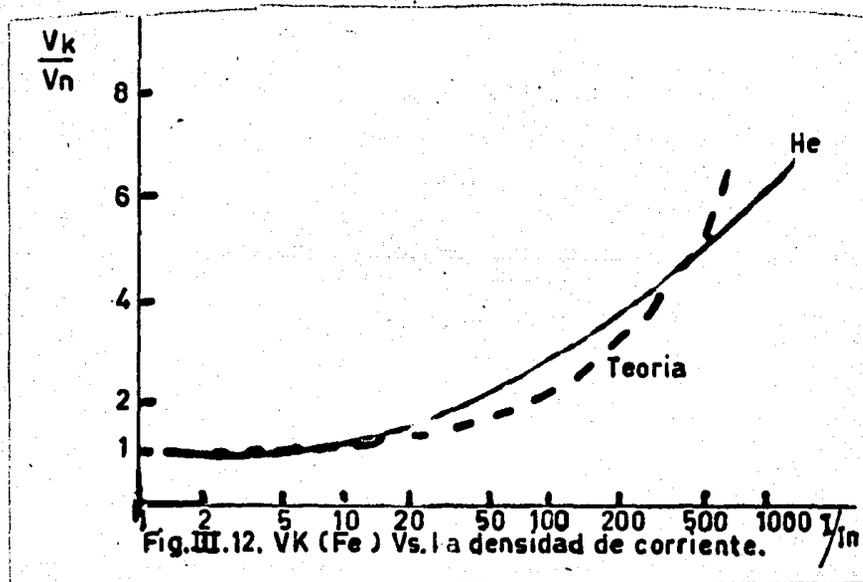
$$j = \frac{V_k}{d^2} \frac{b^*(1+\gamma)}{\pi} \dots (1)$$

$$(C_2 j)^{2/3} = (C_1 V_k)^{1/3} (C_1 V_k C_2 j)^{1/3} \dots (2)$$

$$f(x) = \int_0^x e^{-1/y} dy \dots (3)$$

$$\int_0^d \propto dx = \log(1 + \frac{1}{\gamma}) \dots (4)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes dependientes de  $\gamma$  y de las propiedades del gas. En las gráficas siguientes se comparan los resultados de esta teoría con los experimentales, encontrándose dificultad sólo con el He pues probablemente no sigue la ecuación propuesta (4).



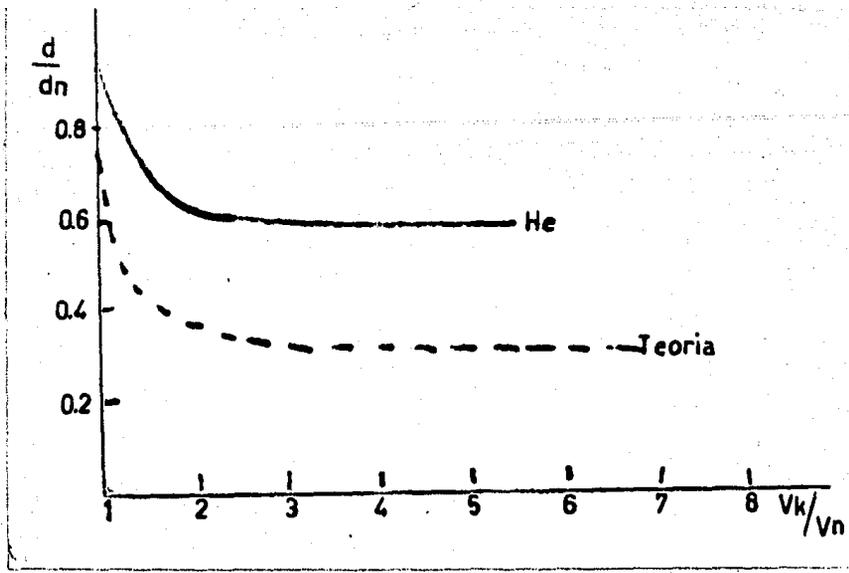


Fig. III 13. Espesor aproximado del espacio oscuro del cátodo Vs.  $V_k$  para un cátodo de Fe.

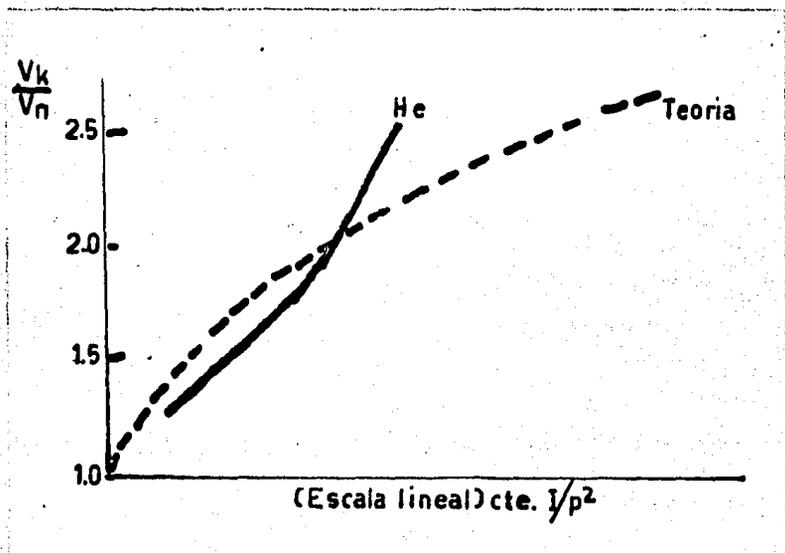


Fig. III 14. Caída de potencial en el cátodo (grafito) Vs. la densidad de corriente.

d) Rogowski <sup>20)</sup> y otros, desprecian la difusión, consideran  $\alpha = \text{cte.} = (\alpha_{\text{max}})_k$ , las velocidades de iones y electrones  $v^+$ ,  $v^-$  proporcionales a  $E^{1/2}$  y por último suponen una pequeña corriente de iones proveniente de la región de brillo negativo. Los resultados de ésta teoría son obtenidos a partir de la ecuación

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{E} \frac{dE}{dx}) = -\alpha \sqrt{E} \frac{dE}{dx} + 4\pi \frac{j_a}{b^+}$$

y con las siguientes condiciones a la frontera en:

$$x=0, j_e = \gamma j^+, x=d, E=0, j^+ = j_0$$

encontrándose las expresiones:

$$V_k = \left( \frac{6\pi j}{b^+ p^2} \right)^{2/3} \left( \frac{d}{p^2} \right)^{5/3} f(\gamma_0 \cdot \gamma_d)$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{1+\gamma} \cdot \gamma = j/j \quad \cdot \quad p d = \frac{1}{4p} \log(1 - j_0/j)$$

donde  $j_0$  es la densidad de iones provenientes del brillo negativo. Esta teoría difícilmente puede compararse con los experimentos pues no hay valores precisos de  $j_0$ , no obstante se encuentra que  $\gamma$  varía entre  $2 \times 10^{-2}$  y  $6 \times 10^{-2}$  cuando  $V_k$  varía entre 50 y 200 eV, lo cual coincide con los resultados experimentales.

### 3.11.- Defectos de las Teorías <sup>21)</sup>

Ninguna de las teorías mencionadas han podido demostrar la variación lineal del campo eléctrico, esta variación parece implicar una densidad de carga espacial positiva uniforme (generación uniforme de iones).

Los principales resultados experimentales pueden expresarse matemáticamente de la siguiente forma:

20.- Z. Physik, 114, (1939); 112, 339; 113, 730 (1939)

21.- Rep. Progr. Phys. 8, 338 (1941)

$$\frac{\partial d}{\partial j} < 0, \quad \frac{\partial d}{\partial V_k} < 0, \quad \frac{dV_k}{dj} > 0, \quad \frac{\partial V_n}{\partial j} = 0$$

De las ecuaciones anteriores se ha encontrado como requisito para su cumplimiento el de una función de  $\frac{\alpha}{pE}$  la cual crece más lentamente que lo haría linealmente con  $\frac{pE}{p}$ .

### 3.-12.- Caída Normal del Cátodo.

Se ha intentado encontrar la causa de la constancia de  $V_k$  y  $J_k$  cuando la descarga no cubre todo el cátodo, ni está confinada a la parte media en una pequeña área. Con este objeto se ha propuesto el principio de la energía mínima donde se supone a  $V_n$  como el voltaje mínimo necesario para controlar la corriente en la descarga y  $j_n$  provee la densidad de carga necesaria para la caída de potencial  $V_n$ . Esta teoría ya fué analizada dentro de las del cátodo.

El efecto por el cual permanece constante  $V_n$  más bien parece estar en conexión, con la difusión radial de cargas, y las pérdidas por difusión están controladas por la distribución de iones en  $r = R$

Una densidad de corriente constante  $j_n$  indica probablemente una región central uniforme.

### 3.13.- Teoría considerando la radiación <sup>22)</sup>

Little y Engel incluyen la radiación tanto del espacio oscuro como del brillo negativo, tomando como expresión del campo eléctrico la experimental del decrecimiento lineal, ó sea

$$E = E_k \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

La densidad de corriente eléctrica total en el cátodo tendrá la expresión:

$$(j_e)_k = \gamma_i(j_k) + f_d \gamma_f n_d (j_e)_k + f_b n_b (j_e)_b \dots (1)$$

donde  $f_d$  y  $f_b$  son las fracciones de fotones del espacio oscuro del cátodo y del brillo respectivamente que golpean el cátodo

<sup>22</sup>.- Proc. Roy Lond. Ser. A. 224, 209 (1954)

do formando electrones secundarios;  $n_d$  y  $n_b$  son los números de fotones, con energías  $h\nu$  mayores que la función de trabajo del material del cátodo, producidos en el espacio oscuro y en la zona de brillo negativo respectivamente. Finalmente  $\gamma_i$  y  $\gamma_f$  son los coeficientes de emisión secundaria por la incidencia de los iones y de los fotones respectivamente.

Por otro lado la densidad de corriente en el brillo negativo debe ser igual a la densidad total de corriente, esto

es  $j = (j_e)_b$  y como  $j = (j_e)_k + j_k^+$  entonces usando la primera ecuación se encuentra la expresión siguiente:

$$j_k^+ / j = \frac{1 - D - G}{1 - D + \gamma_i} \quad \text{con } D = f_d \gamma_f n_d, G = f_b \gamma_f n_b$$

y por lo tanto la expresión de  $j/p^2$  es:

$$j/p^2 = \frac{V_k^+}{2\pi (pd)^2} \frac{1 - D + \gamma_i}{1 - D - G} \dots (2)$$

Los autores calculan también el valor de  $v_k^+$ , obteniendo

$$v_k^+ = \sqrt{\frac{2eV_k}{m^+} \left[ \frac{2\lambda_0}{pd} - \frac{(\lambda_0)^2}{(pd)^2} \right]}$$

donde  $\lambda_0$  es el camino libre medio para transferencia de carga, calculando la expresión para  $D$  y  $G$  encuentran finalmente

$$\frac{j}{p^2} = \sqrt{\frac{e\lambda_0}{\pi^2 m^+ (pd)^2}} \frac{V^{3/2}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{2pd}}} S(\gamma) \dots (2a)$$

$S(\gamma)$  representa tan sólo un término de corrección cuando se trata de descargas normales.

Para la descarga con cátodo hueco  $f_d$  y  $f_b \approx 1$  a diferencia de los demás casos en que son menores que  $1/2$ .

En las gráficas siguientes se muestran los resultados teóricos y experimentales para el Helio:

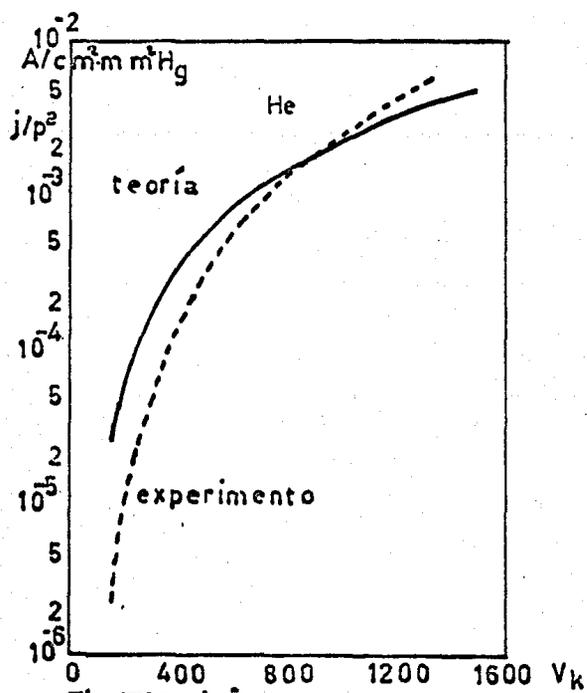


Fig. III 15.  $j/p^2$  Vs la caída de potencial en el cátodo (Fe)

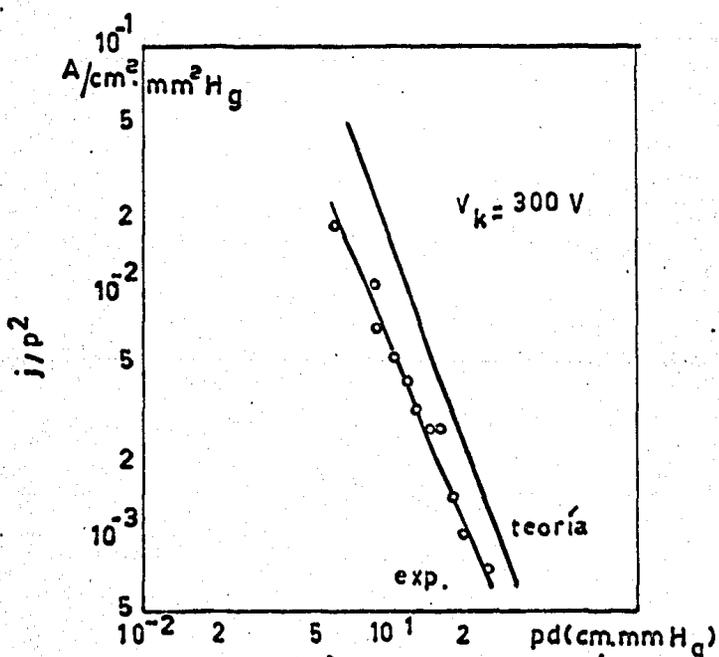


Fig. III 16.  $j/p^2$  Vs ( $pd$ ) para un cátodo hueco de Al.

#### 4.- El brillo Negativo y el Espacio de Faraday

Visualmente puede observarse como la intensidad de la luz emitida crece desde el espacio oscuro del cátodo hasta llegar a un máximo en la frontera entre el Brillo Negativo y el espacio de Faraday, despues vuelve a crecer más debilmente en la punta de la columna, no obstante en los gases raros puros el espacio oscuro de Faraday tiene una aureola.

En general la longitud del espacio de Faraday es mucho mayor que la longitud del brillo negativo. La distancia -- desde el espacio oscuro del cátodo hasta la punta de la columna positiva crece al disminuir la presión y mantener la corriente constante, asimismo crece conforme se aumenta la corriente si la presión se mantiene constante.

Estas dos zonas de la descarga se han estudiado principalmente por dos métodos experimentales:

##### 4.1.- Sondas de Langmuir-

Este tipo de técnica no puede usarse en la frontera con el espacio oscuro del cátodo, pues la sonda interacciona con el haz de electrones, relativamente rápidos, provenientes de la región del cátodo. Emeleus y sus colaboradores <sup>23)</sup> han usado las sondas en la región más brillante de la descarga y adelante, encontrando los resultados experimentales siguientes:

i) El campo eléctrico es casi cero en las dos regiones (de brillo negativo y espacio de Faraday), exceptuando en las cercanías de la punta de la columna.

ii) Si el voltaje está cerca de la caída normal, entonces en la parte media del brillo negativo se tendrán tres tipos de electrones, a saber:

a) Primarios, extraídos de la ionización de los átomos con una energía del orden de 25 eV.

b) Secundarios, cuya energía es del orden de 7 eV.

23.- Phys. Rev. 96, 536 (1954)

- c) Últimos, con energías de 0.5 a 2 eV dependientes inversamente de la presión y de la densidad de corriente.

Los 3 tipos de electrones se han observado en el Helio, encontrándose también que existen más electrones lentos que rápidos, para ilustrarlo se dan los valores en un experimento con Helio efectuado para una presión de 1 mm de Hg y con una densidad de corriente de  $j = 2.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$  se midieron  $5 \times 10^6$  electrones primarios,  $5 \times 10^7$  electrones secundarios y  $4 \times 10^9$  de los últimos.

iii) No existe ionización en el espacio oscuro de Faraday, pero como en la frontera con la columna el campo eléctrico crece, acelera a los electrones hacia la columna positiva.

#### 4.- 2. Medidas espectroscópicas.

Para su análisis espectroscópico las dos regiones se han dividido en cuatro partes, las cuales son:

a) Cercana al espacio oscuro del cátodo, donde se tienen átomos e iones excitados debido a los electrones rápidos - provenientes de la región del cátodo. Se han encontrado líneas de chispa cuando la energía  $eV_k$  es mayor, que la energía de ionización por un sólo impacto. También se han observado bandas de  $\text{He}_2$  las cuales se suponen producidas por colisiones de tres - cuerpos (dos normales y uno metaestable).

b) Frontera entre el brillo negativo y el espacio oscuro de Faraday. En esta zona se efectúan colisiones de 2a. - clase.

Espacio oscuro de Faraday donde ocurren los mismos - procesos observados en b); suponiéndose una difusión de átomos metaestables desde el brillo negativo, los cuales emiten luz al ser golpeados por electrones lentos. La aureola observada en los gases raros pueden desaparecerse agregando impurezas al gas los que destruyen los átomos metaestables. Se ha comprobado la existencia de radiación de onda corta procedente del brillo ne

gativo que excita y produce los átomos metaestables y finalmente a bajas presiones ( $\sim 10^{-2}$  m m. Hg) el espacio de Faraday es barrido por rayos catódicos.

d) la región de transición entre el espacio de Faraday y la columna positiva emite poca luz, indicando un campo eléctrico intenso.

Brewer y Westhaver <sup>24)</sup> han medido la longitud de brillo negativo para varias presiones y sus resultados se muestran en la gráfica siguiente:

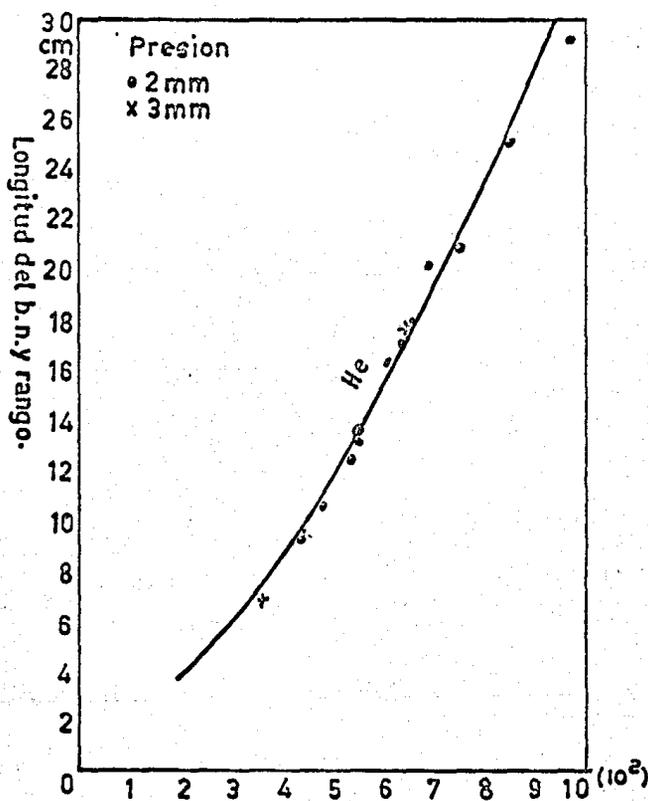


Fig. III 17 Rango de electrones y longitud del b.n. (puntos) Vs. energía inicial de electrones (eV) ó V<sub>k</sub> (V) respectivamente.

24.- J. A. PPL. Phys. 8, 779 (1937)

### 4.3.- Teoría del brillo negativo.

Un haz de electrones rápidos con energías mayores a  $eV_k$  cruzan del espacio oscuro del cátodo hacia el brillo negativo, en él disipan parte de su energía en excitación e ionización ó ambas, después sólo pueden tener colisiones produciendo excitación y, finalmente en el espacio de Faraday tiene una energía — tan pequeña ( $< 1 eV$ ) que sólo pueden excitar a los átomos metaestables. En la teoría de esta región se le considera como un plasma casi-neutro, las expresiones matemáticas de las densidades de corriente electrónica e iónica son

$$j_e = j_1 + eD_e \frac{dN_e}{dx} + eN_e b_e E \dots (1)$$

$$j^+ = -eD^+ \frac{dN^+}{dx} + eN^+ b^+ E \dots (2)$$

donde  $j_1$  es la corriente de electrones proveniente de la región del cátodo, por último la ecuación de pérdida y ganancia de iones (la ecuación para electrones es análoga):

$$\frac{dj^+}{dx} = \alpha |j_e| + \beta |j^+| N_e - \rho_e N_e N^+ - \tau e N^+ N_e^2 \dots (3)$$

donde el primer término corresponde a la ionización por electrones rápidos, el 2o. a la ionización por electrones lentos, el tercero a la recombinación y el último a la recombinación por colisiones de 3 cuerpos.

### 5.- La Columna Positiva.

Existen los siguientes tipos de columna:

#### 5.1.- Uniforme.

En ella la luminosidad y las propiedades eléctricas permanecen constantes, excepto en los gases raros donde se observan variaciones en los extremos si  $p < 1$  mm de Hg. En los gases atómicos se han medido:

1.- Campo eléctrico. Usando: sondas flotantes, movimiento del ánodo (para  $i = cte$ ) encontrando el voltaje extra-necesario para sostener la longitud adicional y finalmente por

sondas de Langmuir en las que se encuentra el campo eléctrico promedio  $\frac{NV}{\Delta x}$  para  $\Delta x = \text{cm}$ .<sup>25)</sup>

A partir del 3er método de medición se han encontrado los siguientes resultados experimentales.

- a) Valor máximo del campo eléctrico en presiones de  $10^{-2}$  a  $10^{-1}$  mm de Hg.
- b) Valor pequeño del campo eléctrico para aquellos gases que tienen un voltaje de ionización pequeño.
- c) El campo eléctrico casi no depende de la corriente a presiones menores de  $10^{-2}$  mm Hg. y es inversamente proporcional a la densidad de corriente si  $j < 10^{-6} \text{ A/cm}^2$

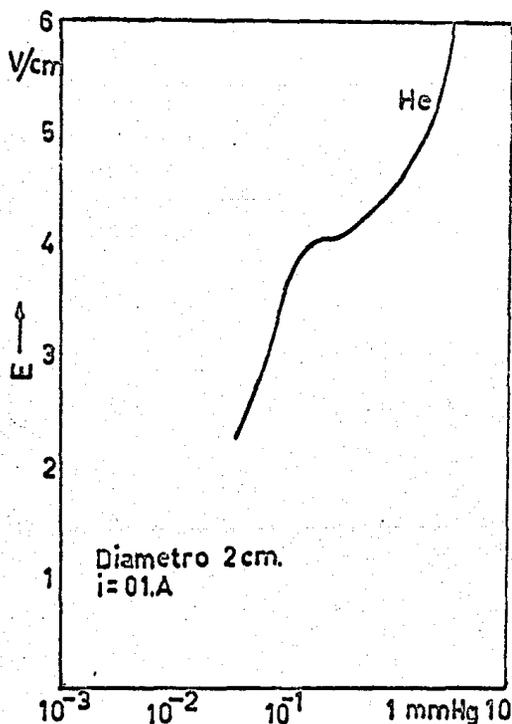


Fig. III 18. Gradiente de potencial Vs. la presión.

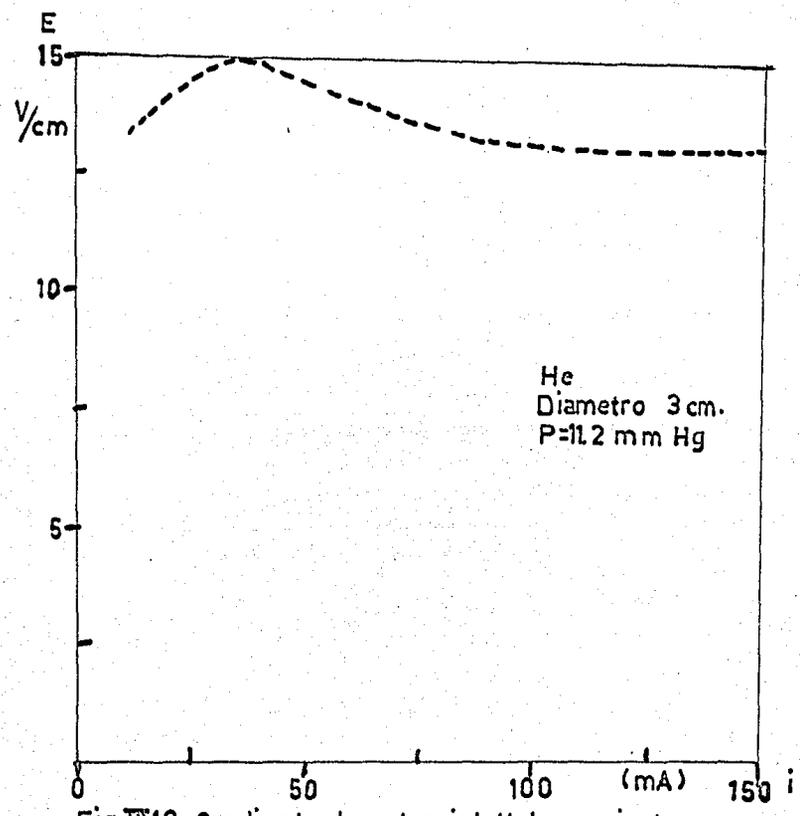


Fig. III.19. Gradiente de potencial Vs. la corriente.

d) Si la corriente es grande entonces la curva del campo eléctrico tiene una pendiente positiva según puede verse en la figura siguiente:

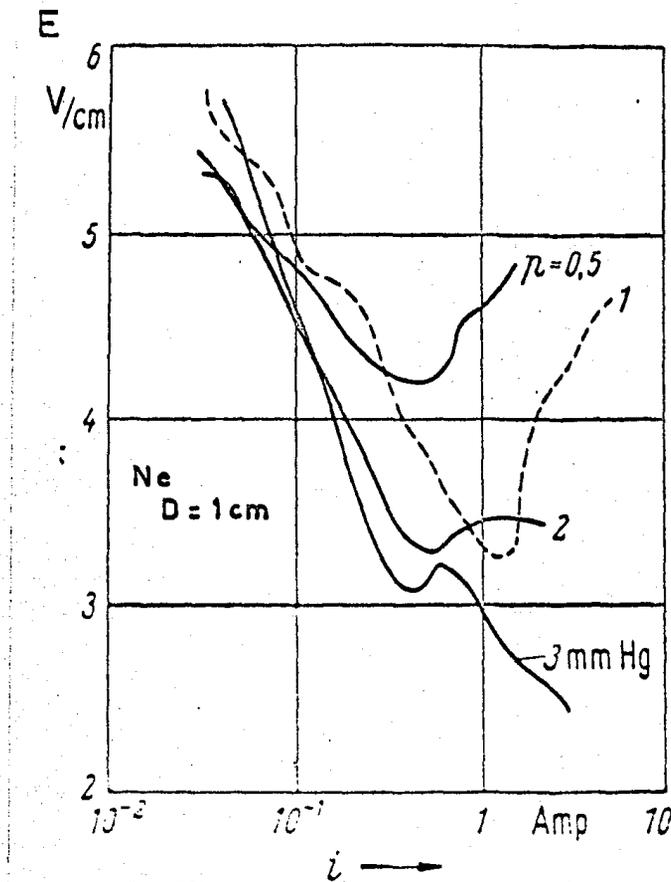


Fig. III.20 Gradiente de potencial Vs. la corriente.

e) El diámetro del tubo afecta al campo eléctrico disminuyéndolo cuando el primero crece, excepto cuando el diámetro es grande entonces el campo eléctrico resulta independiente del radio del tubo <sup>26)</sup>

26.- Z. Physik 22, 70 (1924); 77, 703 (1932); 81 283 (1933).

f) El campo eléctrico es independiente de la presión - cuando ésta varía entre 50 y 200  $\mu$ , en cuyo caso la corriente y el radio varían de 10-100 mA y de 4 a 18 mm. respectivamente, encontrándose la siguiente expresión empírica:

$$E = \frac{C}{R + aI}$$

donde para  $H_e$ ,  $C = 45.4$  y  $a \approx 0$

2.- Temperatura de electrones <sup>27</sup>

El uso de la sonda está limitado, pues si la presión es mayor de 1 mm ocurren colisiones con la cáscara de la misma y si es muy pequeña la presión entonces la cáscara se extiende sobre regiones considerables de la descarga. La temperatura de electrones varía inversamente con la presión según se muestra en la gráfica siguiente:

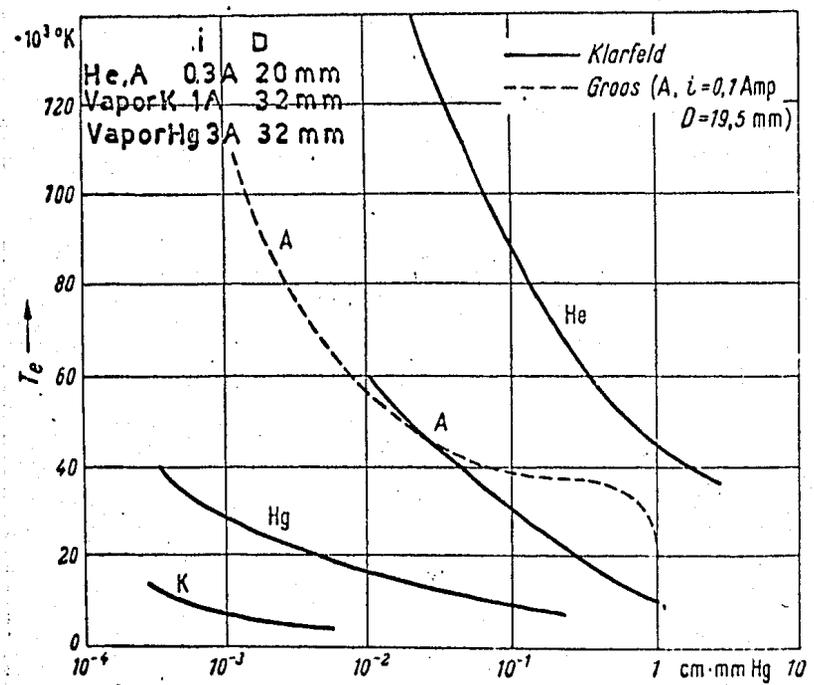


Fig. III. 21  $T_e$  Vs.  $R_p$  → para varios gases.

27.- J. Tech. Phys. USSR 4, 44 (1937); 5, 725 (1938); C. R. Acad. Sci. URSS 28, 38 (1940); J. Phys USSR 6, 218 (1942).

### 5.2.- Estrías Estacionarias.

Los espacios brillantes y oscuros se alternan, encontrándose pocas estrías en la punta de la columna de los gases nobles. Este tipo de columnas se observan a presiones mayores de 1 mm y en los gases nobles cuando éstos tienen impurezas.

### 5.3.- Estrías en movimiento.

Se observan en los gases nobles y para presiones mayores de 1 mm. donde las estrías se mueven con velocidades del orden de  $10^4$  a  $10^5$  cm/seg.

En los gases nobles el campo eléctrico en el eje, depende de la presión, el radio del tubo y la corriente.

### 5.4.- Teoría de la Columna Positiva Uniforme.

El hecho experimental del valor pequeño y constante del campo eléctrico, en la columna positiva da como resultado a través de la ecuación de Poisson que  $N^+ - N_e \approx 0$  en el eje de la columna y es ésta una de las condiciones para la existencia de un plasma, entonces la columna positiva es un plasma. La desigualdad  $N^+ = N_e \gg |N^+ - N_e|$  expresa un plasma casi-neutro como lo es la columna positiva. Esta casi neutralidad se conserva, pues la columna recibe electrones del espacio oscuro de Faraday e iones del ánodo. Aún cuando existe el movimiento radial de cargas hacia las paredes del tubo, sin embargo pronto se establece el equilibrio, pues inicialmente las paredes se cargarán negativamente, repeliendo a los otros electrones que quisieran llegar y atrayendo a los iones, con los cuales se realizará la recombinación en las paredes. No obstante ser cero la corriente en las paredes, a veces se indica la corriente de iones en las paredes  $i_p^+$ . El campo eléctrico transversal, el gradiente de potencial y el gradiente de la concentración originan que las líneas equipotenciales en la columna positiva sean convexas hacia el cátodo.

En el análisis teórico de la columna positiva se hacen en general las siguientes suposiciones:

$$\text{Que la concentración de cargas } N^+ = N_e = N$$

Que la distribución de la energía de los electrones es Maxwelliana.

Que la temperatura de electrones es constante a través de la descarga ó sea, la temperatura es independiente de la distancia al eje del tubo.

Que la movilidad de electrones está dada por la: Ecuación de Langevin.

Que la rapidez de producción de iones es proporcional a  $N_e$ .

Que la densidad de partículas obedece la Ecuación de Boltzmann o sea  $\frac{N_r}{N_0} = \exp\left(\frac{eV}{kT_e}\right)$ .

Las incógnitas en esta teoría son la temperatura de los electrones  $T_e$ , el campo eléctrico longitudinal  $F$ , la concentración  $N$  y la producción de pares de iones por  $\text{cm}^3 \cdot \text{s}$ .

Estas teorías se tiene un grupo de ecuaciones básicas que son:

I.- Balance del número de partículas:

Número de iones producidos = Número fluyendo a pared.

$$Z = f(p, R, T_e)$$

II.- Producción de iones:

Cuando  $T_e$  es la temperatura de electrones necesaria para mantener la producción  $Z$  de pares de iones, si además  $Z \ll N_e$  y se tiene una distribución Maxwelliana entonces  $Z = F(p, T_e)$

III.- Balance de energía (por  $\text{cm}$  de la columna), el cual puede hacerse de dos maneras:

$$a) I \cdot E \cdot l = W_p + W_r + W_c$$

donde se han igualado la potencia entregada a la columna por  $\text{cm}$ , con la energía disipada por segundo en las paredes  $W_p$ , radiada  $W_r$  y por calentamiento del gas  $W_c$ , o bien:

$$b) I \cdot E = L_{el} + L_{in}$$

ecuación donde se igualan la energía ganada por electrón con las pérdidas de energía en colisiones elásticas ( $L_{el}$ ) e inelásticas ( $L_{in}$ ).

Los términos de la derecha en b) son en general una -- complicada función de la concentración  $N$  y de la temperatura de electrones  $T_e$ .

IV.- Ecuación de movilidad ó de corriente (despreciando la contribución de los iones a la corriente de descarga):

$$I = N_t e v_a = e \int_0^r N_r 2\pi r b_e E = \Psi(N, T_e)$$

donde  $N_t$  es el número total de electrones por cm de longitud de la columna; suponiendo la ecuación de Langevin para la movilidad:

$$b_e = \frac{3 e \lambda_e}{4 m \bar{v}}$$

donde  $\lambda_e$  es el camino libre medio para electrones y  $\bar{v}$  es la velocidad media.

Una vez señaladas las suposiciones comunes y las ecuaciones básicas, se expondrán algunas de las teorías de la columna, las cuales son válidas en cierto intervalo de presiones.

#### 1.- Teoría de Schottky<sup>28)</sup>

El intervalo de aplicabilidad de esta teoría es para -- camino libre de iones y electrones ( $\lambda^+$ ,  $\lambda_e$ ) mucho menor que el radio del tubo de descargas ( $R$ ) y con presiones medias del orden de  $10^{-1}$  a  $10$  mm Hg.

En esta teoría sólo se consideran las pérdidas por difusión ambipolar, despreciando la recombinación volumétrica:

$$\text{Rapidez de pérdidas} = 2\pi(r+dr)D_a \frac{(dN)}{(dr)r+dr} - 2\pi r D_a \frac{(dN)}{(dr)r}$$

$$= 2\pi D_a \left[ r \frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{dN}{dr} \right] dr$$

$$\text{Rapidez de producción} = ZN \cdot 2\pi r dr$$

Iguando pérdidas con producción se obtiene:

28.- Phys Z. 25, 342, 635 (1924)

$$\frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN}{dr} + \frac{Z N}{D_a} = 0$$

la cual es una ecuación cuya solución es una función de Bessel de orden cero, entonces:

$$N = N_0 J_0 \left( r \sqrt{\frac{Z}{D_a}} \right) \quad \text{con } N_0 = (N)_{r=0}$$

la función de Bessel es cero si  $r \sqrt{\frac{Z}{D_a}} = 2.405$  y es menor que ce ro si  $r \sqrt{\frac{Z}{D_a}} > 2.405$ .

Una condición en la frontera debe ser que la concentración de partículas sobre el tubo sea cero, esto es  $(N)_{r=R} = 0$  entonces aplicando la condición en la frontera se obtiene:

$$N_R = N_0 J_0 \left( r \sqrt{\frac{Z}{D_a}} \right) = 0 \quad \text{con } N_0 = (N)_{r=0}$$

y la concentración a cualquier distancia  $r$  del eje del tubo será

$$N_r = N_0 J_0 (2.405 r/R) \dots (1)$$

Para encontrar la distribución radial del potencial se puede hacer uso del arrastre de iones a las paredes, así mismo - suponiendo que:

$v^+ = v^- = v$  se obtiene la expresión siguiente:

$$v = -\frac{D^+ dN}{N dr} + b^+ E_r = -\frac{D_e dN}{N dr} - b_e E_r$$

donde  $b_e^+$ ,  $b_e$ ,  $D^+$  y  $D_e$  son las movilidades y coeficientes de difusión de iones y electrones respectivamente.

Haciendo además las suposiciones  $D^+ \ll D_e$  y  $b^+ \ll b_e$

y usando la ecuación de Townsend:

$$\frac{D_e}{b_e} = \frac{k T_e}{e}$$

se obtiene:

$$E_r = -\frac{dV}{dr} = -\frac{k T_e}{e} \frac{1}{N} \frac{dN}{dr}$$

Integrando:

$$\frac{N_r}{N_0} = \exp \left[ -e \frac{(V_0 - V_r)}{k T_e} \right] \dots (2)$$

La corriente de iones a las paredes, por cm. de longitud será:

$$I_p^+ = -2\pi R D_a e \left[ \frac{dN}{dr} \right]_{r=R} = 2\pi R e \frac{b^+ k T_e}{e} \left[ \frac{dN}{dr} \right]_{r=R}$$

$$I_p^+ = 7.83 b^+ k T_e N_0 \dots (3)$$

donde se ha usado la relación

$$\frac{D_a}{b^+} = \frac{k T_e}{e}$$

y se ha encontrado el valor de:

$$\left[ \frac{dN}{dr} \right]_{r=R} = N_0 \left[ \frac{dJ_0}{dr} \right]_{r=R} = -N_0 J_1(R)$$

La forma de obtener el campo eléctrico longitudinal es igualando la energía de iones hacia las paredes del tubo por segundo cm. con la energía de la corriente total a lo largo del tubo, ó sea:

$$I_p^+ V_i = \chi I E \cdot l \quad (\text{similar a III})$$

con  $\chi$  la fracción de energía perdida por el haz de electrones/ al efectuar colisiones ionizantes, esta fracción se supone constante. Sustituyendo el valor de  $I_p^+$  de la ecuación (3) y una expresión para  $I$  se obtiene como resultado:

$$E = \frac{2.4}{R} \sqrt{\frac{V_i k T_e b^+}{\chi e}} \dots (4)$$

Extensiones a la teoría de Schottky (29)

Es posible encontrar la temperatura de electrones si se introducen expresiones para  $D_a$  y  $Z$  en la ecuación:

$$R \sqrt{\frac{Z}{D_a}}$$

así la expresión de  $D_a$  es:

$$D_a = D_e \frac{b^+}{b} = \frac{k T_e}{e} b^+$$

y Z puede calcularse suponiendo que:

a) La función de ionización varía linealmente con energías mayores a la de ionización  $eV_i$ , producida por electrones - con moléculas del gas; entonces el número de pares de iones producidos por segundo, por electrón con energía  $eV$  es:

$$F(V) = a'(V - V_i) \frac{v}{\lambda_e} = ap \frac{(V - V_i)}{v} \dots (5)$$

donde  $v/\lambda_e$  es el número de colisiones por segundo.

b) Los electrones tienen una distribución Maxwelliana o sea:

$$\frac{dN}{N \sqrt{\pi} \omega^3} e^{-v^2/\omega^2} \quad d(v/\omega) = \frac{2 \sqrt{eV}}{\sqrt{\pi} (kT_e)^{3/2}} e^{-eV/kT_e} d(kV) \dots (6)$$

donde  $\omega$  es la velocidad más probable y  $T_e$  se define por cualquiera de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 = kT_e \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT_e$$

Utilizando la distribución Maxwelliana se encuentra:

$$Z = \int_{V_i}^{\infty} \frac{F(V) dN}{N} = apm \frac{4}{e \pi} \left( \frac{2kT_e}{m} \right)^{3/2} \exp(-eV_i) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{eV_i}{kT_e} \right] \dots (7)$$

finalmente se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{eV_i}{kT_e}}} \exp\left(-\frac{eV_i}{kT_e}\right) = 1.16 \cdot 10^7 \text{ c}^2 \text{ p}^2 \text{ R}^2 \dots (8)$$

con  $c^2 = a \frac{\sqrt{V_i}}{b^+ p}$  (constantes del gas)

para el presente caso del Helio  $c = 3.9 \cdot 10^{-3}$

Si la expresión  $K(1/2)mv^2$  da la energía promedio - perdida por los electrones en las colisiones elásticas, entonces usando las ecuaciones III y IV se obtiene:

$$E = 1.83 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{k}}{\lambda_e} T_e \quad \text{con } T_e \text{ en } ^\circ\text{K} \text{ y } \lambda_e \text{ en cm.}$$

Teoría de la caída Libre 30)

Esta teoría es válida cuando el camino libre medio de los iones es mayor que el radio del tubo ó sea para bajas presiones del orden de  $10^{-4}$  a  $5 \times 10^{-3}$  mm. Hg.

Tonks y Langmuir suponen que en estas presiones no existe la difusión ó es despreciable, pero existe un gradiente de potencial entre el eje del tubo y las paredes del mismo. Supóngase que los iones se forman en  $r_1$ , entonces ganan energía por caída libre entre ese punto y las paredes del tubo, o sea:

$$(1/2) m^+ v^2 = e(V_{r_1} - V_r) \dots (1)$$

Otras suposiciones son la inexistencia de colisiones de electrones con las moléculas del gas y en cualquier sección transversal las partículas están distribuidas de acuerdo con la relación de Boltzman por ellos deducida. Los resultados obtenidos son 31):

a) A partir de la ecuación (I):

$$Z = \text{cte.} \sqrt{\frac{T_e}{k}} \dots (2)$$

b) Las ecuaciones (II) y (III) de la producción de iones y el balance de energía son iguales a las de la Teoría de Schotcky.

c) La ecuación (IV) para la movilidad es la misma que en la Teoría de Schotcky pero la constante es diferente:

$$I_p^+ = 2.4 N_0 e R \sqrt{\frac{k T_e}{m^+}} \dots (3)$$

Discuten con detalle las condiciones a la frontera su poniendo que la columna positiva no llega hasta las paredes sino a una carga espacial positiva sobre ella, a la que llaman cáscara. A diferencia de la Teoría de Schotcky la densidad de cargas en las paredes del tubo no es cero y puede ser calculada.

30.- Phys. Rev. 34, 876 (1929)

31.- Rev. Mod. Phys. 12, 87 (1940)

Balance de Energía.

Los sumandos de la ecuación del balance de energía, sólo pueden ser determinados haciendo simplificaciones, como por ejemplo a presiones bajas, corriente pequeña y sin procesos acumulativos entonces pueden calcularse las energías de la siguiente manera:

a) La energía disipada en las paredes por unidad de longitud de la columna es:

$$W_p = I_p^* \left[ V_i + (V_c - V_p) + \frac{4}{3} \bar{V} \right] \dots (1)$$

donde  $V_c$  es el potencial en la cáscara; el primer sumando está relacionado con la energía de recombinación en la pared  $eV_i$ , el segundo corresponde a la energía adquirida al pasar a través de la cáscara y finalmente el tercero corresponde a la energía adquirida en la caída libre.

b) La energía disipada en el calentamiento del gas se debe a las colisiones elásticas entre electrones y moléculas del gas. Un electrón pierde una cantidad  $\frac{2m}{M}$  de su energía  $\frac{1}{2}mv^2$  cuando golpea una molécula del gas. Si los electrones tienen distribución de velocidades, entonces el calor generador por  $\text{cm}^3$  por segundo en cualquier punto  $r$  es:

$$w_c(r) = \int_{v=0}^{\infty} \frac{v}{\lambda_e} \frac{2M}{m} \frac{1}{2} mv^2 Nf(v) dv \dots (2a)$$

donde  $v/\lambda_e$  es la frecuencia de colisiones y como la concentración de cargas es una función de la distancia al eje de la descarga, entonces el calentamiento total en la unidad de longitud, sobre toda la sección transversal es:

$$W_c = \int_{r=0}^R w_c 2\pi r dr \dots (2b)$$

Los cálculos más detallados de esta energía pueden verse en un artículo de Waserrab (32).

La energía disipada por radiación puede calcularse fácilmente cuando no existen procesos acumulativos, pues entonces suponiendo que el número de cuantos radiados es igual al número de átomos excitados por colisiones de electrones y si  $P(v)$  es la probabilidad de excitación a un nivel de energía particular  $eV_{ex}$  por electrón con velocidad  $v$ , entonces el número de excitaciones por segundo por unidad de longitud de la columna es:

$$\frac{dN^*}{dt} = \sum_r \int_{r=0}^R \int_{v=0}^{\infty} P(v) N_r f(v) dv \cdot 2\pi r dr \dots (3)$$

con la suma sobre todo los niveles de excitación posibles. Por lo tanto la energía de radiación está dada por la expresión:

$$W_r = h \int_0^R \int_{v=0}^{\infty} P(v) N f(v) dv \cdot 2\pi r dr \dots (4)$$

Cuando existe ionización acumulativa, entonces la ecuación (3) sin la suma es igual a la rapidez de producción de un estado excitado. La rapidez de pérdida está dada por la expresión  $A \cdot N^*$  multiplicada por el número de colisiones entre electrones y estados excitados.

La expresión de la rapidez de producción es:

$$\frac{dN^*}{dt}_{\text{prod.}} = P_e \cdot P N_c \dots (5)$$

donde  $P_e$  es la probabilidad de excitación integrada.

La rapidez de pérdida esta dada por:

$$\frac{dN^*}{dt}_{\text{perd.}} = A N^* P_{e \rightarrow i} N^* N_e$$

donde  $P_{e \rightarrow i}$  es la probabilidad de que un electrón ionice una molécula en un estado excitado y como además la constante de Einstein  $A$  de emisión espontánea, es igual a  $\frac{1}{\tau}$  donde  $\tau$  es la vida media del estado excitado, entonces:

$$\frac{dN^*}{dt}_{\text{perd.}} = N^* P_{e \rightarrow i} N^* N_e \dots (6)$$

Iguando perdida (9) con producción (8) se puede obtener el valor de  $N^*$ .

5.5.- Comprobación experimental de las teorías de la columna positiva.

En general los experimentos se efectúan con sondas de Langmuir, encontrándose los resultados siguientes:

a) La temperatura de electrones permanece constante - dentro del 10% de variación para los gases nobles Ne, A y para el mercurio <sup>33)</sup>.

b) Considerando la distribución Maxwelliana se confirma la rapidez de ionización excepto si la presión es inferior a  $10^{-3}$  mm Hg.

c) La distribución real de la energía se midió usando una sonda con una rendija, tal que el potencial de la sonda se mantuvo igual al potencial espacial y la velocidad se analizó por medio de campos magnéticos encontrándose que para el argón a presiones de 25 y 40 micras la distribución no es Maxwelliana.

d) La ecuación de Langevin fué confirmada calculada y encontrándola cierto dentro del 30% de error, además hubo de modificarse para tomar en cuenta las variaciones de con la energía de los electrones, la presencia de iones y a bajas presiones las colisiones con las paredes <sup>34)</sup>.

e) La comprobación experimental <sup>35)</sup> de la temperatura de electrones con las diferentes teorías puede verificarse fácilmente con la figura siguiente:

33.- Phys. Rev. 35, 1238 (1930)

34.- Phys. Rev. 73, 762 (1948)

35.- Z. Physik 133, 312 (1950)

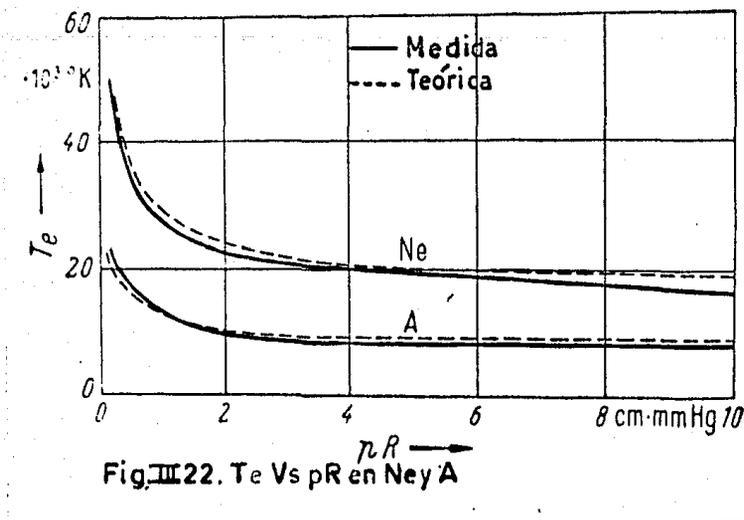


Fig. III 22.  $T_e$  Vs  $pR$  en Ne y A

f) El balance de energía y el gradiente<sup>36)</sup>, se han tratado de comprobar experimentalmente obteniendo los resultados siguientes:

i) A bajas presiones ( $\sim 10^{-4}$  mm) la mayor parte de la energía se disipa en las paredes y esto se explica por que ocurren colisiones inelásticas entre electrones y moléculas del gas y esta energía más la cinética de los iones y electrones se libera en las paredes por la recombinación.

ii) La energía de radiación varía entre un 50 y un 90% del total a presiones medias ( $\sim 10^{-3}$  a 1 mm.Hg) y esto se debe a que las colisiones elásticas son más frecuentes y la temperatura de electrones decrece, empezando a crecer la energía por calentamiento del gas. Si se aumenta la presión entonces la recombinación volumétrica reduce la energía disipada en las paredes.

iii) Cuando las presiones son más altas de  $\sim 1$  cm.Hg entonces la mayor parte de la energía se disipa por calentamiento del gas y esto se explica por que la  $W_p$  decrece y crece  $W_r$ .

36.- Bur. Stand. J. Res. 10 357 (1933); 9, 25 (1932); 21 697, 873 (1938); Ann. Phys, 13, 315 (1932); 28, 240 (1937)

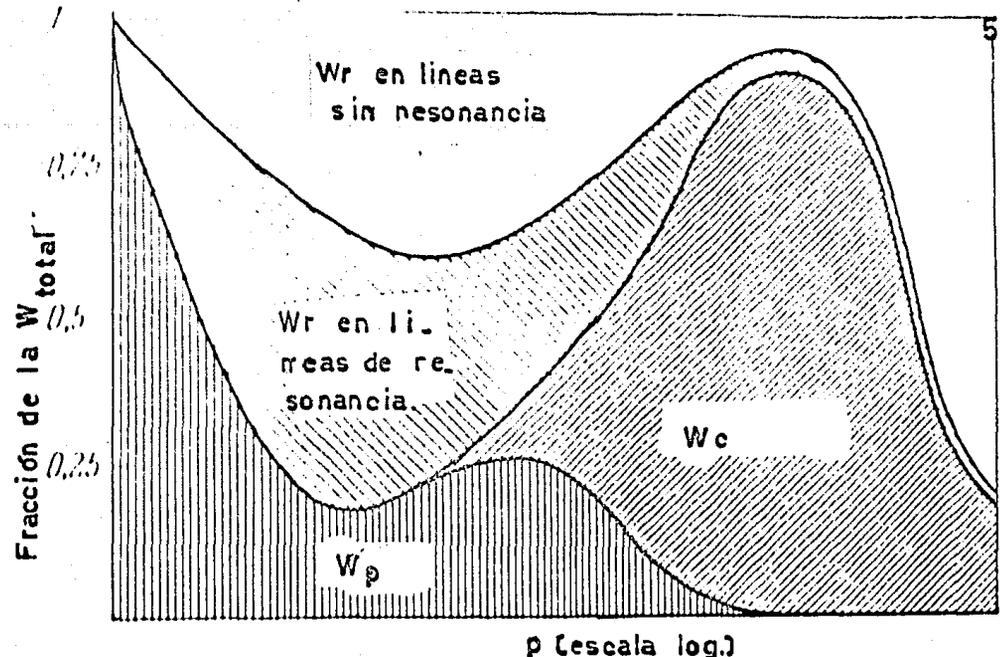


Fig. III. 23 Representación esquemática del balance de energía.

Comprobación de la teoría de la caída libre.

La exactitud de esta teoría puede observarse en las gráficas siguientes:

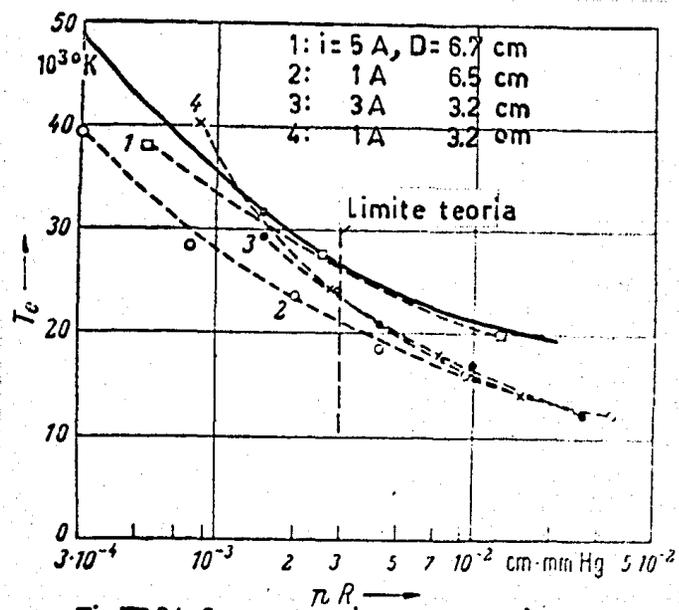


Fig. III 24 Curvas teóricas y experimentales para Hg.

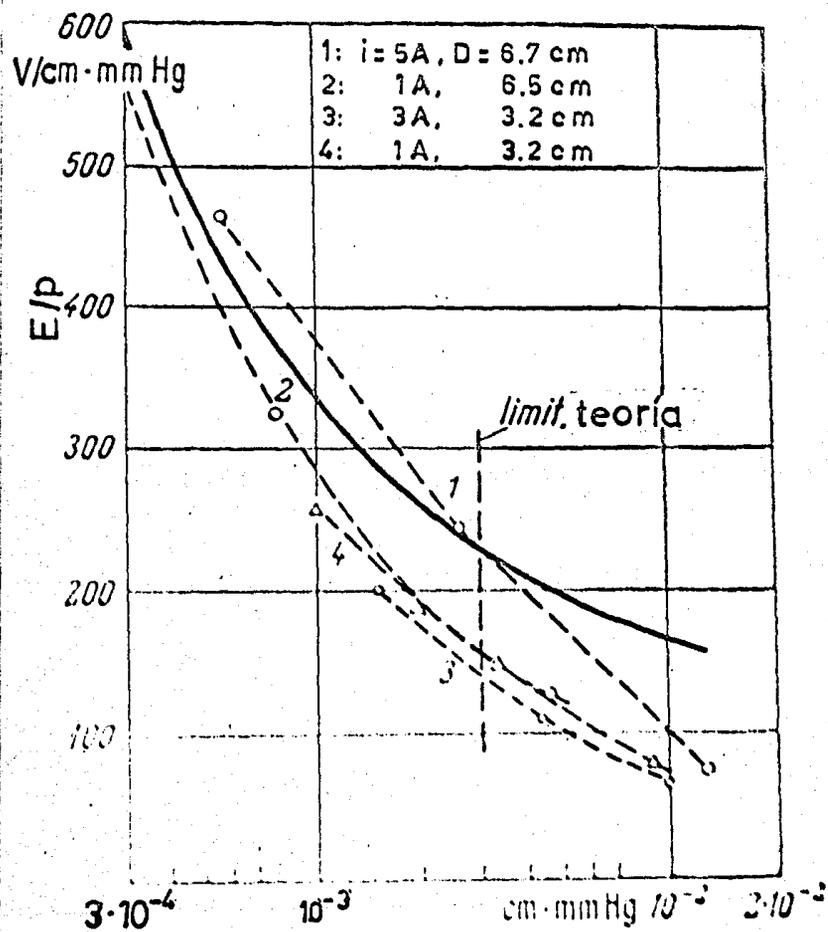


Fig. III. 25 Curvas teóricas y experimentales para Hg.

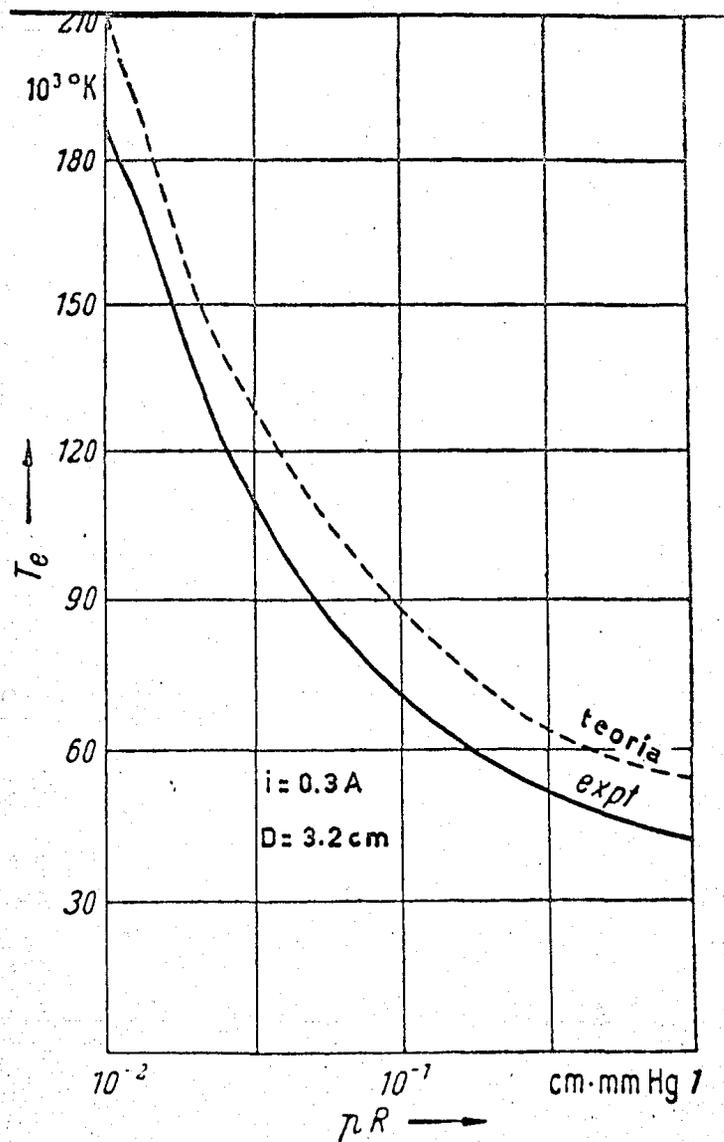


Fig.III. 26  $T_e$  Vs.  $pR$  en He.

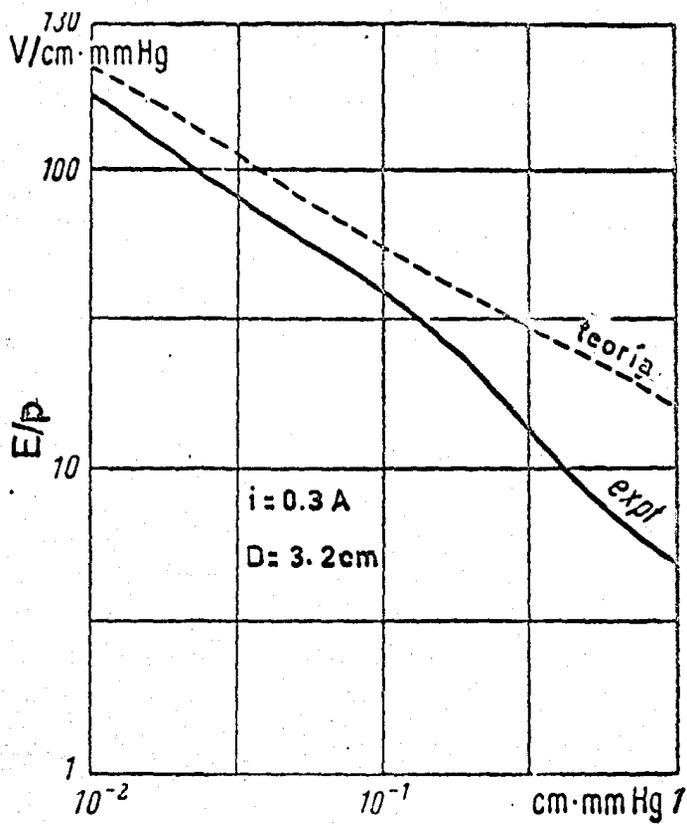


Fig. III.27  $E/p$  Vs.  $pR$  en He.

6.- La caída en el ánodo.

La teoría que más se acerca a los resultados experimentales es la de Von Engel <sup>37)</sup> y a continuación se describe:

La intensidad del campo eléctrico en la dirección axial se puede considerar parabólica. Usando la notación de la figura siguiente, la expresión de la intensidad del campo eléctrico es:

$$E_x = A \left[ \left( \frac{d}{2} \right)^2 - (x - d/2)^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{V_a}{d} \left[ 1 - \left( \frac{2x}{d} - 1 \right)^2 \right] \dots (1)$$

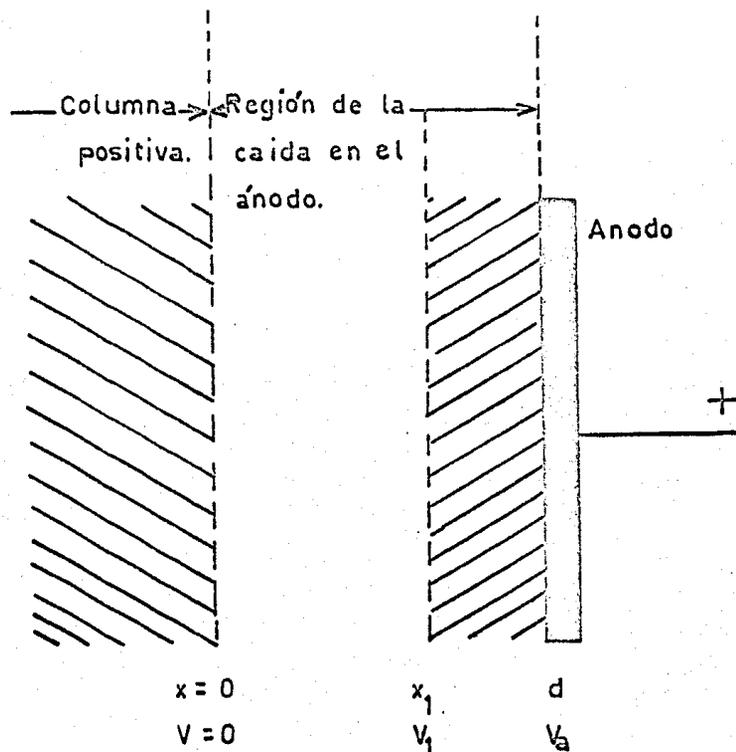


Fig. III. 28. Descarga brillante en la región del ánodo.

donde  $V_a$  es el potencial en ánodo y  $d$  es el espesor de la caída en el ánodo. El potencial a cualquier distancia  $X$  se puede escribir como

$$V_x = 3 V_a \left( \frac{x}{d} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2x}{3d} \right] \dots (2)$$

37.- *Elektrische Gasentladungen*, I, J. Springer, Berlin (1932)

El número de choques ionizantes que ocurren en una distancia  $dx$  para un electron con una velocidad de  $v$  electron volts es:

$$dN = ap(v - u_i) dx \quad (3)$$

donde  $a$  es una constante del gas y  $u_i$  el potencial de ionización. Suponiendo que la energía media de los electrones que entran a la región de la caída del ánodo desde la columna positiva es  $\bar{U}$  entonces en cualquier punto de la región del ánodo:

$$dN = ap(V_x + \bar{U} - u_i) dx \quad (4)$$

De la ecuación (4) se puede determinar el número total de choques ionizantes  $N$ , que ocurren entre  $x$  y  $x_1$ , donde  $x_1$  es la frontera del brillo del ánodo. El brillo del ánodo es una región de espesor muy pequeño y puede expresarse como:

$x_1 = d(1 - \epsilon)$  con  $\epsilon \ll 1$ . Por tanto el potencial  $V_1$ , en  $x_1$  es

$$V_1 = U_i - \bar{U} \quad \text{y de la ecuación (2)}$$

$$V_1 = 3\bar{U} x_1^2 (1 - 2x_1/d) \quad (5)$$

$$\text{y } \epsilon = \left[ \frac{V_a + \bar{U} - U_i}{3V_a} \right]^{1/2} \dots (6)$$

Integrando (4) entre  $x_1$  y  $d$ , donde  $x_1$ , se encuentra a partir de  $x_1 = d(1 - \epsilon)$  y de la ecuación (6), se obtiene la siguiente expresión para el número de iones positivos generados:

$$N = apd \frac{(V_a + \bar{U} - U_i)^{3/2}}{(3V_a)^{1/2}} \dots (7)$$

Suponiendo que la concentración de iones positivos cerca del ánodo es grande, entonces el caso ilustrado en la figura se aproxima al de dos electrodos paralelos en un gas a muy bajas presiones; un electrodo es una fuente copiosa de electrones y el otro de iones positivos. Para este caso, el cociente de las densidades de corrientes iónicas entre las densidades de corrientes electrónicas es aproximado por

$$\frac{j^+}{j^-} = \left( \frac{m^-}{m^+} \right)^{1/2}$$

Para muchos gases,  $j^+$  es del orden del 1% de  $j^-$  y esto representa la condición a la cual la presente teoría se relaciona. Para este caso

$$j = j^- = \frac{3.5}{16\pi} \left( \frac{2e}{m^-} \right)^{1/2} \frac{V_a^{3/2}}{d^2} \dots (8)$$

Ya que  $N$  es el número total de iones positivos generados por un electron que pasa a través de la caída en el ánodo, entonces  $N$  también representa el cociente del número de iones positivos por  $cm^2$  por segundo, entre el número de electrones -- por  $cm^2$  por segundo en cualquier sección transversal entre los dos electrodos virtuales. Entonces de la ecuación (7) y del cociente de las densidades de corriente se encuentra:

$$N = \left( \frac{m^-}{m^+} \right)^{1/2} \frac{a p d (V_a + \bar{U} - U_i)^{3/2}}{(3V_a)^{1/2}} \dots (9)$$

Sustituyendo  $d$  a partir de (8):

$$\frac{j}{p^2} = \frac{1.17}{16\pi} \frac{m^+}{m^-} \left( \frac{2e}{m^-} \right)^{1/2} a^2 V_a^{1/2} (V_a + \bar{U} - U_i)^3 \dots (10)$$

La influencia de la densidad de corriente sobre la región del ánodo está dada por (8) como:

$$p d = \left( \frac{3.5}{16\pi} \right)^{1/2} \left( \frac{2e}{m^-} \right)^{1/2} U^{3/4} \left( \frac{1}{j/p^2} \right)^{1/2} \dots (11)$$

donde se ha hecho la sustitución  $V_a = U_i$

Por lo tanto las ecuaciones (10) y (11) proporcionan la variación de los parámetros de semejanza.

## CAPITULO IV

### CARACTERISTICAS DE LAS FUENTES DE IONES ESTUDIADAS.

#### I.- Descripción de las fuentes.

La primera fuente de iones, figuras 1,a, 2,a, está formada por un tubo de vidrio pyrex donde se encuentran localizados los siguientes elementos:

Un electrodo repulsor *R*, unido a una barra de Wolframio y esta soldada al vidrio pyrex.

El diafragma de vidrio pyrex "D", figura 1,a, tiene un agujero central, figura 2,a.

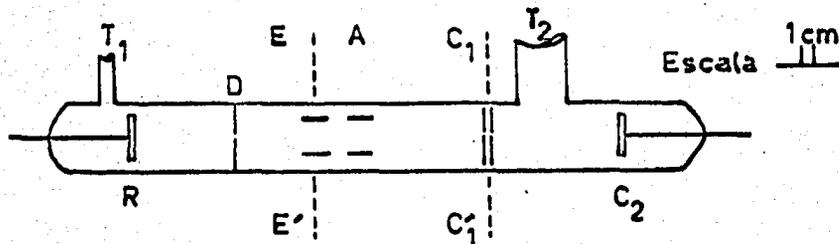


Fig. 1,a. Corte longitudinal de la fuente de iones. FIDV.

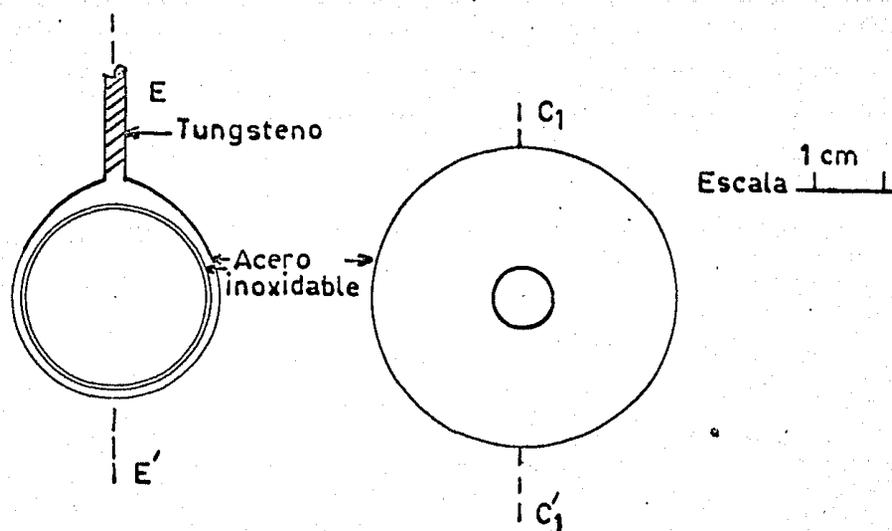


Fig. 2.a. Cortes transversales de la fuente de iones FIDV

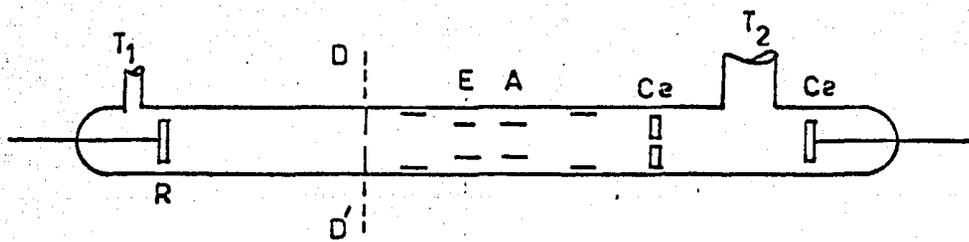


Fig. 1, b. Corte longitudinal de la fuente de iones FIDM.

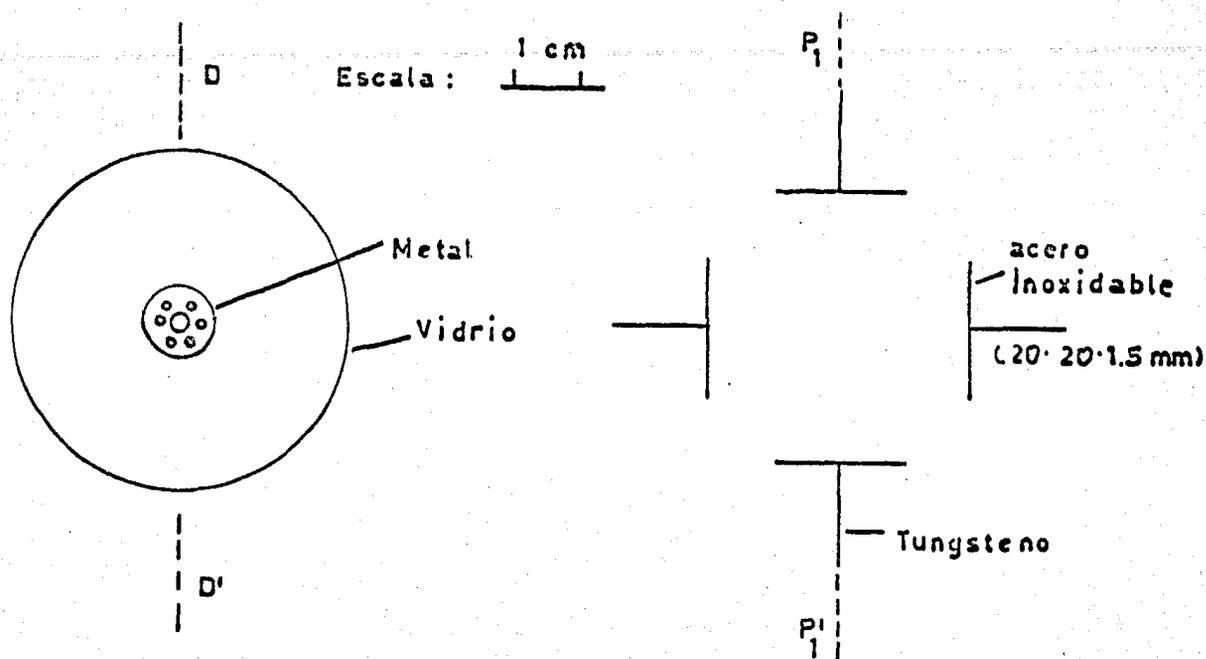


Fig. 2.b Cortes transversales de la fuente de iones FIDM.

El electrodo extractor  $E$  que esta sujeto por medio de un cinturón metálico; al cinturón va atornillada una barra de Wolframio. El electrodo acelerador  $A$  tiene las mismas características del anterior según puede verse en la, Fig. 1,a.

El electrodo colimador  $C_1$  con orificio central, figura 1,b, este electrodo tiene atornillada una barra de Wolframio que lo fija al tubo de vidrio por medio de una soldadura metal-vidrio

El electrodo colector  $C_2$  con las mismas dimensiones de  $R$ . El inyector  $T_1$  y el extractor  $T_2$  son tubos de vidrio.

En los diagramas 1 y 2 se notan algunas diferencias en la estructura interna de las fuentes de iones, variando no sólo en distancias entre electrodos sino además en el diafragma, figu

2, a. y 2, b.

*Fuente de radio frecuencia.*

Se usa una fuente de radio frecuencia de 12 Mc/s con una potencia de 100 w que se acopla inductivamente al sistema -- por medio de una bobina de 6 vueltas, 6 cm. de diámetro con alambre de Cu del No. 16.

*Voltajes de extracción y de aceleración.*

Estos voltajes son proporcionados por dos fuentes no reguladas, de 4.3KV, 1/16 A y 7.2 KV, 1/8 A.

*Presión de entrada*

La presión se mide antes del inyector  $T_1$ , por medio de un medidor de vacío tipo Pirani, Para controlar la presión de entrada se usan una válvula de control 0-100 mm. de Hg y un manómetro.

2.- Procedimiento de operación.

a) Se controla la inyección del helio a través de  $T_1$  por medio de la válvula de control, efectuando simultáneamente la evacuación del sistema a través del extractor  $T_2$  que conecta a una bomba mecánica de vacío. En las condiciones anteriores se mantiene el Helio circulando mediante la caída de presión entre los dos extremos de la fuente de iones.

b) Una vez logrado el control de la presión se conectan los electrodos de las cámaras tal como se muestra en el siguiente diagrama eléctrico:

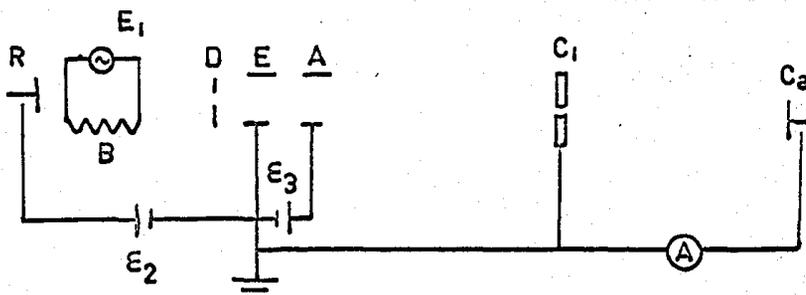


Fig. IV.3. Diagrama eléctrico de las fuentes de iones.

En este diagrama  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  son las fuentes no reguladas de corriente continua descritas anteriormente, B es la bobina de la fuente de radio-frecuencia y A es el microamperímetro con que se mide la corriente de iones producidos por la fuente de iones.

Para obtener la máxima corriente de iones se mantienen fijos los parámetros tales como la presión y los voltajes.

### 3.- Resultados Experimentales:

Para obtener los resultados experimentales fué necesario evacuar el sistema durante varias horas y después para lograr la reproducibilidad de las lecturas se mantuvo el haz de iones un corto tiempo hasta lograr ese propósito. Los datos experimentales fueron obtenidos de un promedio de 3 a 5 lecturas en cada punto de las curvas.

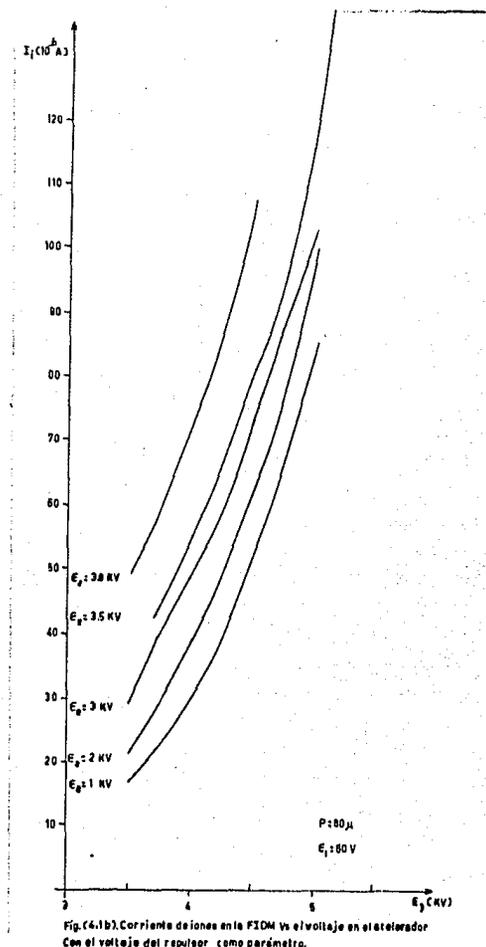
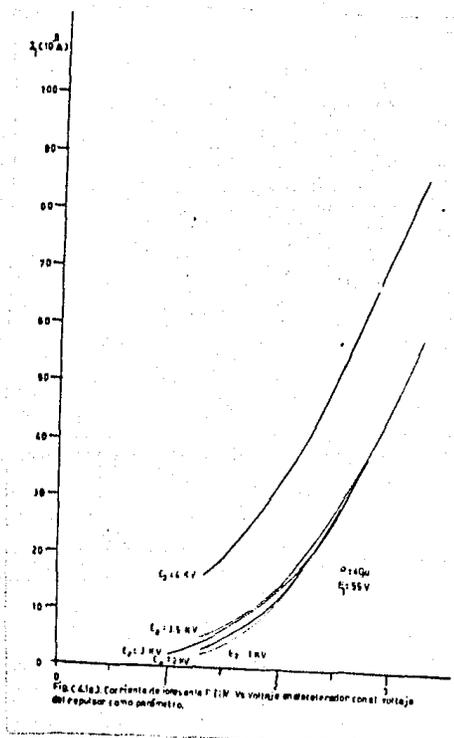
#### 3.1.- Corriente de iones en función del voltaje del acelerador - ( $\epsilon_3$ )

Parámetro  $\epsilon_2$ :

En primer lugar se usa como parámetro el voltaje del repulsor ( $\epsilon_2$ ), manteniendo fijos en este caso la presión (P) y el voltaje  $\epsilon_1$ , aplicado a la fuente de radio-frecuencia. Los resultados obtenidos, para la corriente de iones en esta situación, se muestran en las figuras (4.1 a) y (4.1 b). Aún cuando los parámetros difieren en valor, sin embargo las 2 gráficas son bastantes distintas, pues en la de la fuente de iones con diafragma de vidrio se observa que aún cuando aumenta el voltaje

$\epsilon_2$ , éste sólo ejerce una influencia notable sobre la corriente, cuando su valor es de 4 KV, obteniéndose un valor máximo de corriente de aproximadamente  $87 \mu$  A. La gráfica de la fuente de iones con diafragma metálico si muestra una dependencia de la corriente de iones  $I_i$  del voltaje aplicado al repulsor ( $\epsilon_2$ ) notándose además que el valor máximo de la corriente obtenida con

la otra fuente es superado por ésta por  $50 \mu A$ , aunque también el voltaje aplicado en el acelerador es mayor en éstas por 2 KV.

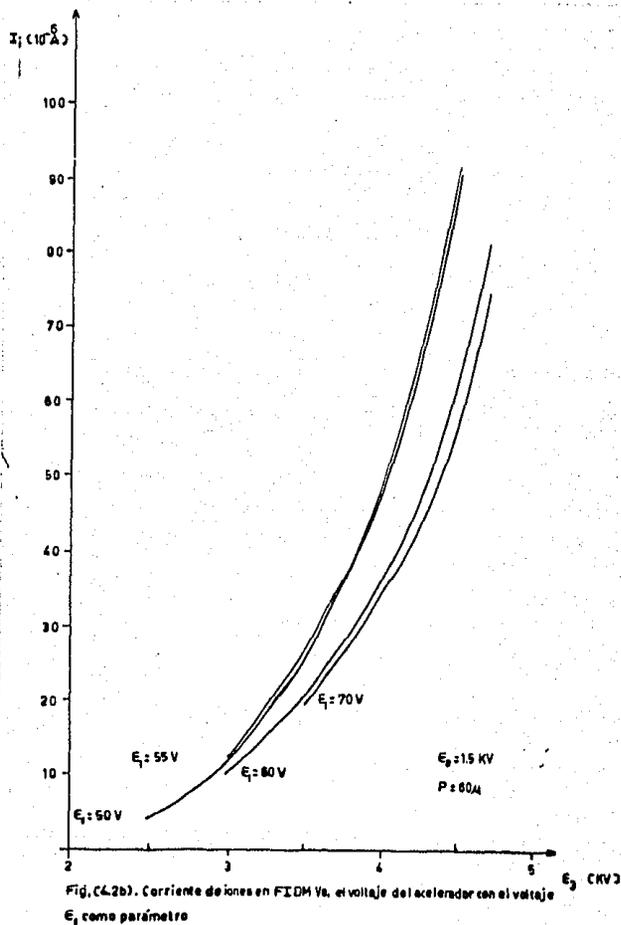
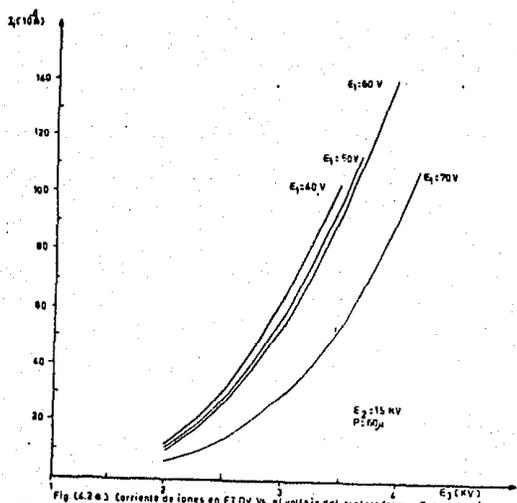


### Parámetro $\epsilon_1$ :

En las figuras 4.2a, y 4.2 b, se muestran las gráficas obtenidas usando como parámetro el voltaje  $\epsilon_1$  aplicado a la fuente de radio frecuencia. Se observa en la gráfica de la FIDM figura 4.2 b que, excepto por un traslape de las curvas para

$\epsilon_1 = 50 V$  y  $\epsilon_1 = 55 V$ , la corriente de iones disminuye al aumentar el voltaje  $\epsilon_1$  y la gráfica parece ser la de una familia de curvas con parámetro  $\epsilon_1$ . La gráfica de la otra fuente de iones (4.2 a, muestra las mismas características observadas en la

primera fuente. El valor máximo de la corriente de iones obtenido con esta fuente es de  $140 \mu A$  para un voltaje de 4 KV en el acelerador y de 60 V en  $\epsilon_1$ ; en la otra fuente el valor de corriente es de  $93 \mu A$  para un voltaje de 4.5 KV en el acelerador de 50 V en  $\epsilon_1$ .



#### Parámetro P:

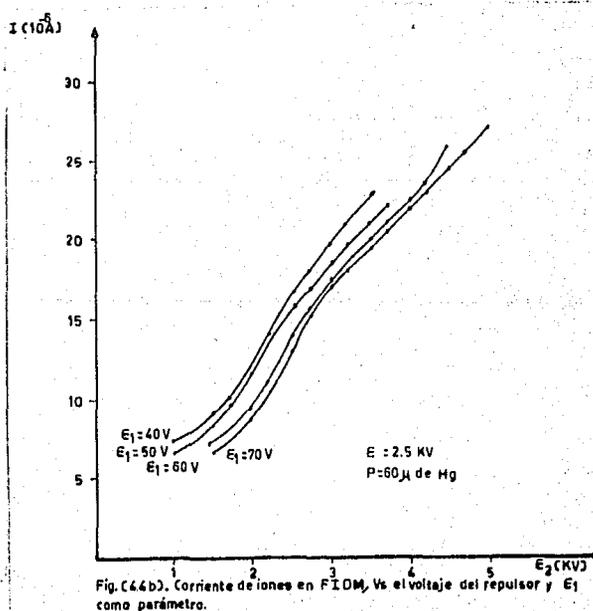
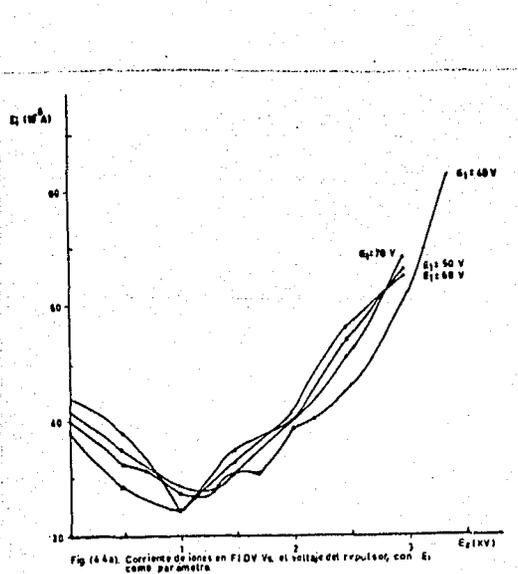
Finalmente para obtener la dependencia que la corriente de iones tiene del voltaje del acelerador ( $\epsilon_3$ ), se usa como parámetro la presión de entrada, la cual varía desde 30 hasta  $80 \mu$ . Los resultados así obtenidos se muestran en las figuras



### 3.2.- Corriente de iones en función del voltaje aplicado al repulsor ( $\epsilon_2$ ).

Parámetro  $\epsilon_1$ :

Procediendo de manera similar a lo hecho antes, se mantienen fijos la presión y el voltaje del acelerador ( $\epsilon_3$ ), usando como parámetro el voltaje aplicado a la fuente de radio-frecuencia ( $\epsilon_1$ ). Los resultados experimentales se encuentran en las figuras 4.4 a y 4.4 b de donde se nota que en el caso de la fuente F I D V la corriente cambia al variar el voltaje aún cuando esta dependencia no es muy clara pues las curvas se traslapan varias veces. Para la fuente de F I D M la dependencia es muy clara, notándose que al aumentar el voltaje aplicado a la fuente de radio-frecuencia, disminuye la intensidad de la corriente. Los valores máximos de la corriente de iones son en la primera fuente de 61  $\mu$  A con 3.5 KV en el repulsor y 40 V en  $\epsilon_1$  y de 27  $\mu$  A en la segunda con  $\epsilon_2 = 5$  KV y  $\epsilon_1 = 70$  V.



Parámetro  $\xi_3$  :

Si el parámetro es ahora el voltaje del acelerador entonces se obtienen las gráficas de las figuras 4.5 a y 4.5 b. De la primera figura se nota que la corriente de iones aumenta al incrementarse el voltaje  $\xi_3$ , apareciendo las gráficas casi como curvas paralelas. En la segunda figura se encuentra una dependencia similar a la de la otra fuente. Los valores máximos de la corriente de iones son de  $37.5 \mu A$  para la fuente con difragma de vidrio y de  $69 \mu A$  en la otra fuente para un voltaje del repulsor de  $4.2 KV$  y  $6 KV$  respectivamente.

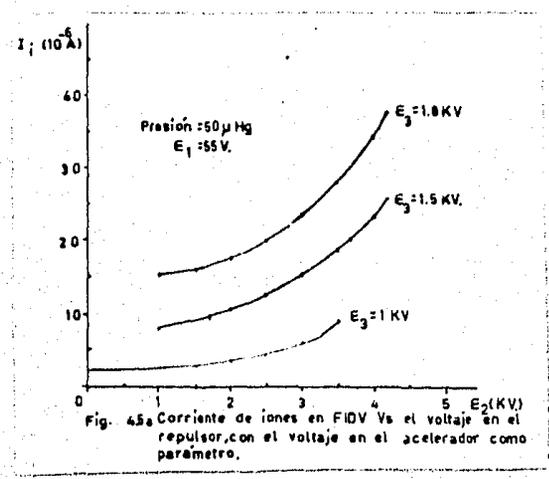
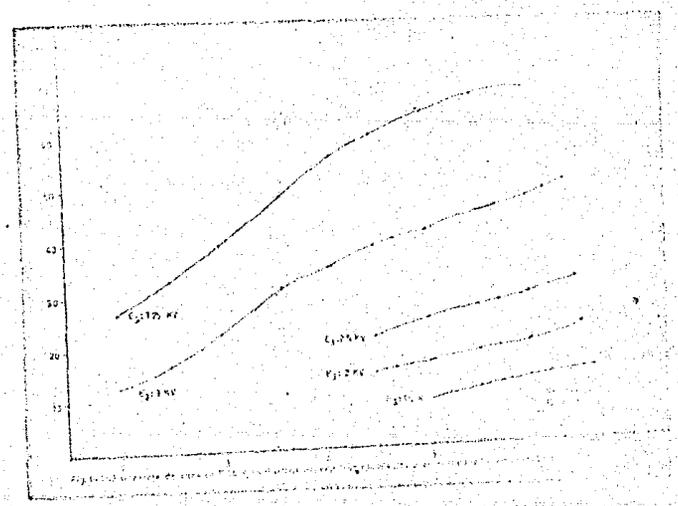


Fig. 4.5a Corriente de iones en FIDV Vs el voltaje en el repulsor, con el voltaje en el acelerador como parámetro.



### Parámetro P:

En las figuras 4.6 a y 4.6 b, se muestran las gráficas obtenidas en las dos fuentes, teniendo como parámetro la presión de entrada (P). En la fuente con diafragma de vidrio la presión óptima en las condiciones del experimento fué de  $50 \mu$  ya que - abajo ó arriba de ella la corriente de iones disminuye: la corriente máxima fué obtenida para esta presión de  $50 \mu$  con un voltaje en el repulsor de 4.4 KV.

Para la otra fuente, con diafragma metálico, las variaciones en la presión afectan muy poco a la corriente de iones obtenida, aún cuando en este caso conforme aumenta la presión aumenta la corriente, sin embargo la corriente máxima obtenida es de sólo  $33 \mu A$  a una presión de  $70 \mu$  y con 6.5 KV en el repulsor.

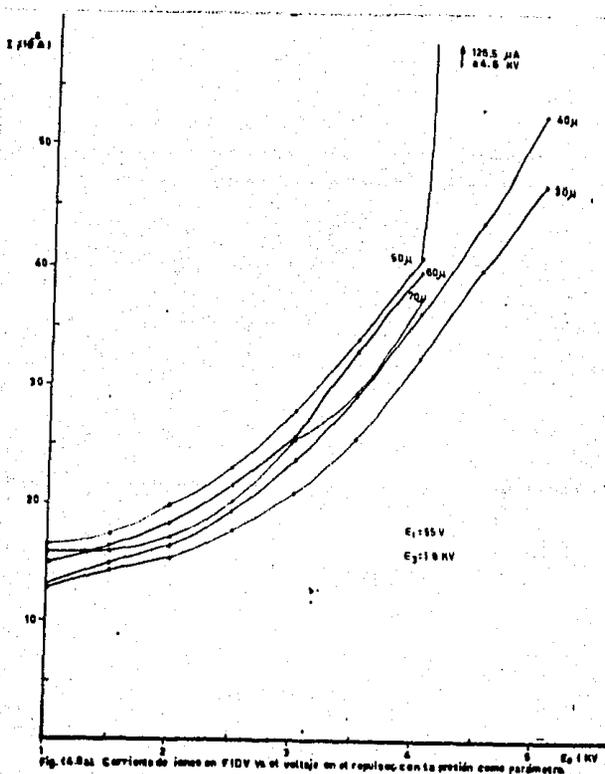


Fig. 4.6.a) Corrientes de iones en FIDV vs el voltaje en el repulsor, con la presión como parámetro.

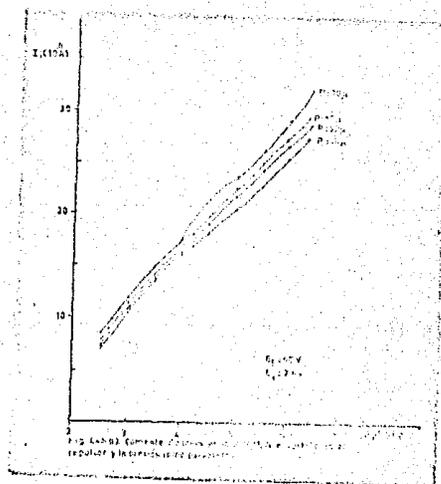


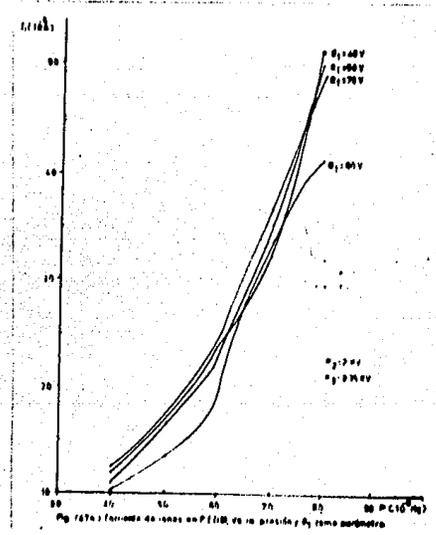
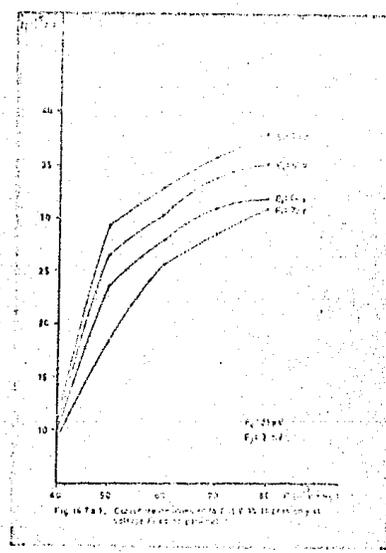
Fig. 4.6.b) Corrientes de iones en FIDV vs el voltaje en el repulsor y la presión como parámetro.

3.3.- Corriente de iones en función de la presión de entrada (P).

Parámetro  $\epsilon_1$  :

Cuando el parámetro es el voltaje aplicado a la fuente de radio-frecuencia se obtienen las gráficas mostradas en las figuras 4.7 a y 4.7 b. De la figura 4.7 a, puede notarse como la corriente de iones decrece al aumentar el voltaje  $\epsilon_1$ , obteniéndose una corriente máxima de  $38 \mu A$  cuando  $\epsilon_1 = 55$  y para una presión de  $80 \mu$ .

En la fuente con diafragma metálico conforme  $\epsilon_1$  aumenta de 40 a 60 V, decrece la corriente de iones, pero cuando  $\epsilon_1 = 70$  V, entonces crece arriba de 40 V. El valor máximo de corriente de iones al igual que con la otra fuente se obtiene en  $P = 80$ , pero su valor es del orden de  $50 \mu A$  para  $\epsilon_1 = 40, 50$  y  $70$  V.

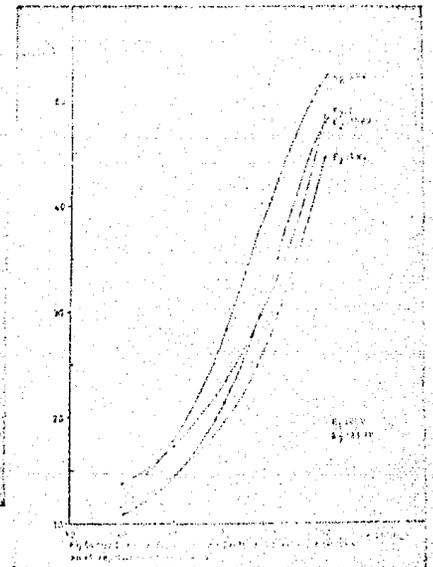
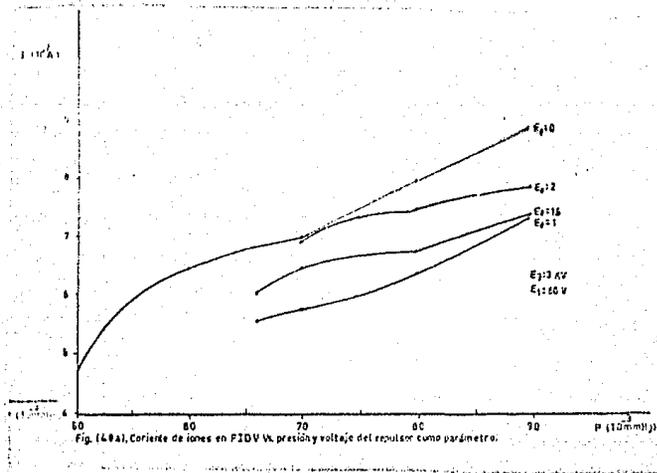


Parámetro  $\epsilon_2$  :

De la figura 4.8 a, se observa como al variar el voltaje  $\epsilon_2$  de 0 a 1 KV disminuye la corriente de iones colectada, pero al aumentarlo nuevamente hasta 2 KV la corriente aumenta.

El valor máximo de corriente de iones obtenida en esta serie de experimentos es de  $8.8 \mu A$  para  $\epsilon_2 = 0$  y  $P = 90 \mu$  de Hg. No fué posible aumentar más el valor del voltaje  $\epsilon_2$  pues ocurría una descarga a la presión de  $90 \mu$ .

En la fuente F I D M, se obtienen la gráfica de la figura 4.8 b, donde puede observarse una dependencia diferente a la observada con la otra fuente, pues para  $\epsilon_2 > 0$  la corriente de iones decrece hasta que  $\epsilon_2 = 1.5 KV$  y para  $\epsilon_2 = 2 KV$  se obtienen valores máximos de corriente. El máximo valor de la corriente es de  $53 \mu A$  para  $\epsilon_2 = KV$  y con  $P = 80 \mu$  de Hg. Obsérvese que además los valores mínimos de corriente en esta fuente ( a  $40 \mu$  de Hg), son mayores que los valores máximos en la otra fuente ( a  $90 \mu$  ).

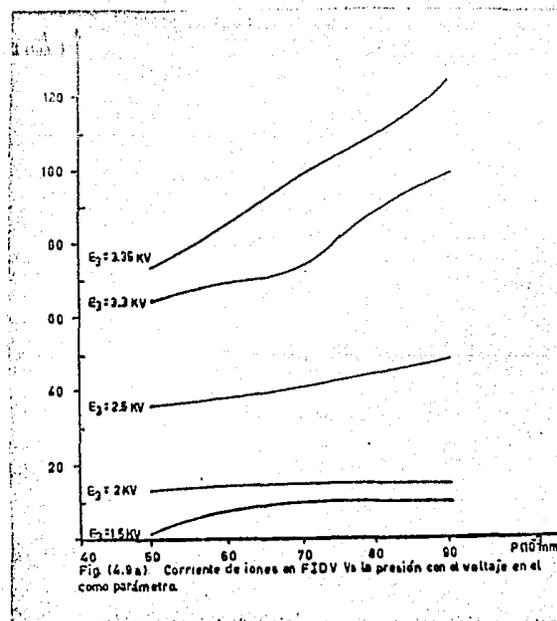
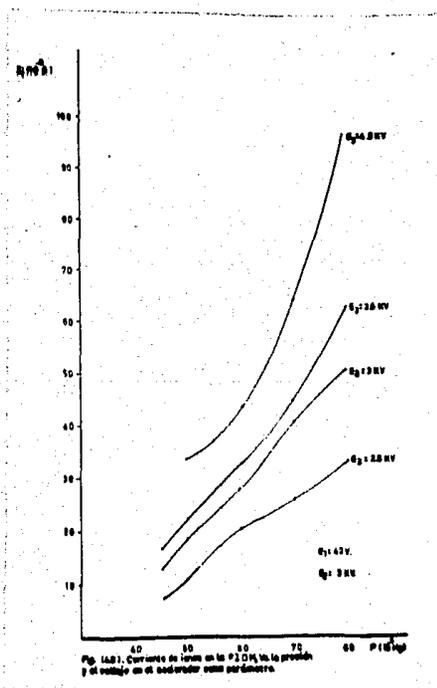


Parámetro  $\epsilon_3$ :

En las figuras 4.9 a y 4.9 b, se muestran los resultados experimentales obtenidos cuando el parámetro es el voltaje del acelerador ( $\epsilon_3$ ). En la fuente con diafragma de vidrio — puede observarse el gran efecto producido por el aumento del vol

taje  $E_3$ , pues la corriente aumenta del orden de  $5 \mu A$  si  $E_3$  varía de 1.5 a 2 KV, después aumenta del orden de  $20 \mu A$  al aumentar  $E_3$  de 2 a 2.5 KV, finalmente nótese que cuando  $E_3 = 3.35 KV$ , entonces la corriente de iones aumenta desde 70 hasta  $110 \mu A$  respecto a los valores obtenidos cuando  $E_3 = 1.5 KV$ . El valor máximo de corriente de iones es de  $125 \mu A$  cuando  $E_3 = 3.35 KV$  y  $P = 90 \mu$  de Hg.

El efecto del voltaje  $E_3$  sobre la corriente de iones obtenida en la fuente con diafragma metálico también es muy grande y tiene variaciones del orden de 30 hasta  $60 \mu A$  cuando se consideren los valores mínimos ( $E_3 = 2.5 KV$ ) y los valores máximos ( $E_3 = 4.2 KV$ ). En este caso el valor máximo de la corriente de iones fué de  $96 \mu A$  cuando  $E_3 = 4.2 KV$  para  $P = 80 \mu$  el cual es inferior al obtenido con la otra fuente para las mismas condiciones ( $I_i = 110 \mu A$ ).

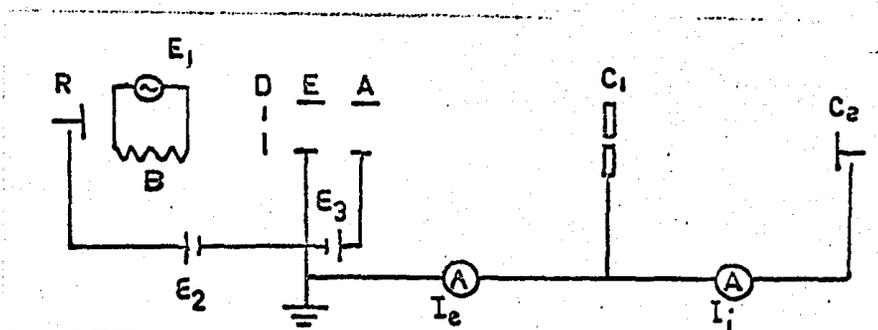


3.4.- Relación entre la corriente de electrones en el extractor  $I_e$  y la corriente de iones  $I_i$ .

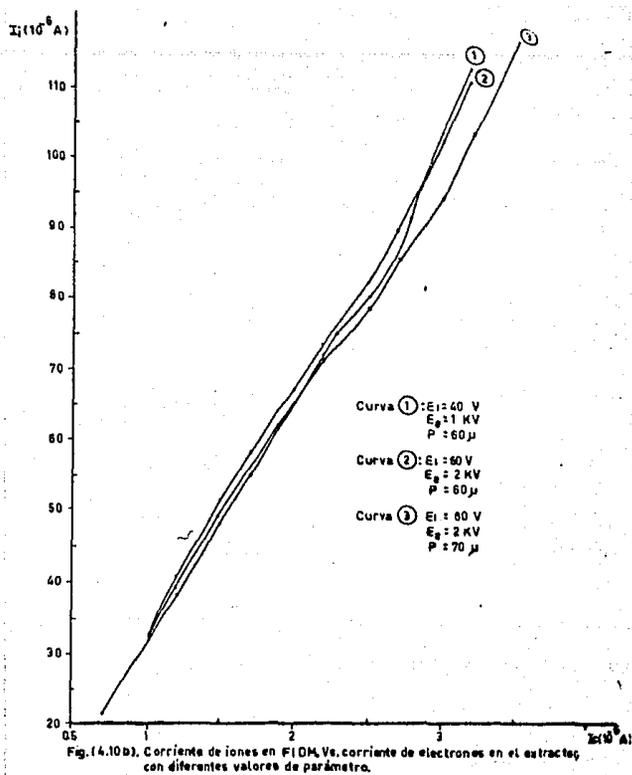
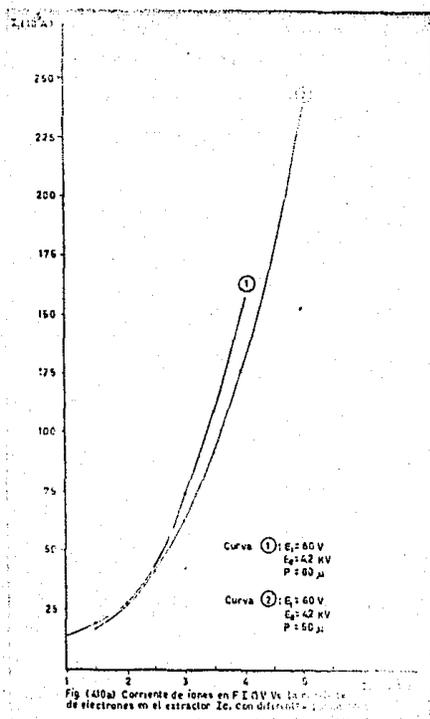
En las figuras 4.10 a y 4.10 b, estan los resultados experimentales obtenidos, empleando diferentes parámetros. Puede observarse en las gráficas de la figura 4.10 b, como aparentemente el 3% de la corriente que llega al extractor es la corriente obtenida en el colector, ya que por ejemplo en la curva (1) para  $I_i = 55 \mu A$ ,  $I_e = 1.7 m A$ , entonces:

$$\frac{I_i}{I_e} \times 100\% = \frac{55}{1700} \times 100\% \approx 3.24\%$$

Para obtener estas gráficas se conectaron los amperímetros según ilustra la figura siguiente



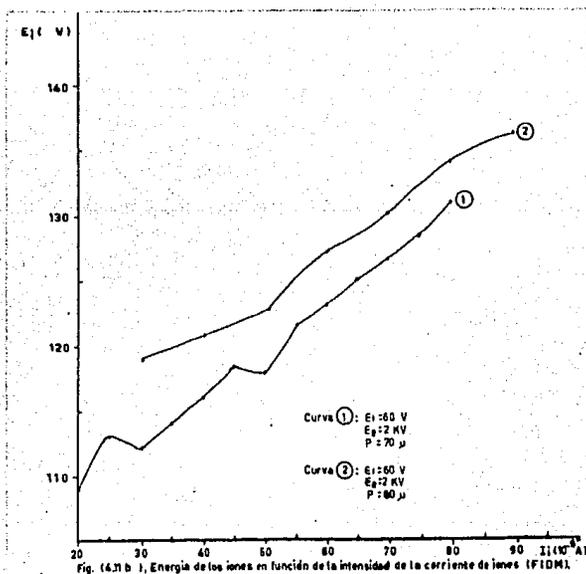
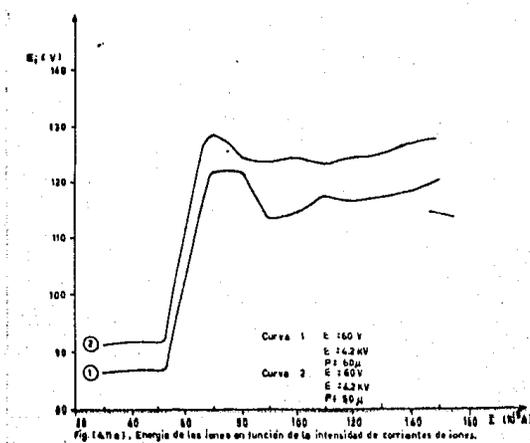
De la gráfica correspondiente a la fuente con diafragma de vidrio figura 4.10 a, se puede obtener que la relación  $\frac{I_i}{I_e}$  varia desde 1.35%, cuando la corriente de iones tiene los valores desde 13 hasta 35  $\mu A$ , hasta 3.1% para el resto de valores obtenidos para la corriente de iones.



### 3.5.- Energía de los iones.

Aplicando un potencial positivo al colector, hasta hacer cero la corriente de iones se obtuvieron las gráficas mostradas en las figuras 4.11 a y 4.11 b. Para la fuente con diafragma de vidrio se observa que la energía es relativamente pequeña a bajas intensidades de corriente iónica, crece rápidamente a los  $50 \mu$  A obteniéndose un valor máximo para los  $70 \mu$  A y después sufre variaciones relativamente pequeñas cuando la presión es de  $50 \mu$  de Hg. La máxima energía de 128 V. corresponde a los  $70 \mu$  A de corriente de iones y para una presión de entrada de  $50 \mu$ . En la región de altas intensidades de corriente se tienen también altas energías.

Para el caso de la fuente de iones con diafragma metálico se encuentra una variación casi lineal de la energía con respecto a la intensidad de la corriente de iones, encontrándose además que al aumentar la presión de entrada, crece la energía de los iones, lo cual no sucedía en la otra fuente. Aún cuando las intensidades de corriente obtenidas son menores, sin embargo su energía es mayor que la de los iones de la fuente con diafragma de vidrio.



## CAPITULO V

### DISCUSION DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

En las figuras 4.1 a, 4.1 b, 4.2 a, 4.2 b, 4.3 a, y 4.3 b, puede observarse que el potencial aplicado al acelerador proporciona corrientes de iones con valores del orden de 2 a 5 veces superiores en la fuente con diafragma de vidrio respecto a los obtenidos en la fuente con diafragma de metal, para las mismas condiciones de operación. Por ejemplo en la figura 4.1 a, el valor máximo para  $E_2 = 4 \text{ KV}$  es de  $87 \mu\text{A}$  con un potencial en el acelerador de solo  $3.5 \text{ KV}$ , en las mismas condiciones para la otra fuente sólo se obtienen aproximadamente  $48 \mu\text{A}$ . En la figura 4.2 a el valor máximo de  $140 \mu\text{A}$  se obtiene con  $E_1 = 60 \text{ V}$ ,  $E_2 = 4 \text{ KV}$  y en las mismas condiciones sólo se obtienen  $135 \mu\text{A}$  en la otra fuente.

Los potenciales aplicados al acelerador están limitados en estos casos por el hecho de que a valores mayores ocurre una descarga de arco.

Lo mencionado parece indicar una mayor efectividad de la fuente de iones con diafragma de vidrio.

El mismo efecto se aprecia en las figuras 4.4, 4.5, 4.6 a y b, pero en este caso para el potencial aplicado al repulsor. El potencial aplicado al repulsor no está todavía limitado por la ocurrencia de una descarga de arco para la fuente con diafragma de metal.

En el inciso 3.2, se observa también que, exceptuando las figuras 4.7 a y 4.7 b, en las mismas condiciones la corriente de iones obtenida en la primera fuente es superior a la obtenida

nida con la de diafragma metálico.

De la figura 4 1 a, se obtiene que  $I \propto E_3^2$ , para -  
ello considérese por ejemplo la curva de  $E_2 = 4 \text{ KV}$ :

$$\text{Si } E_3 = 2 \text{ KV, } I_1 = 34 \mu\text{A}$$

$$\text{cuando } E_3 = 2.5 \text{ KV, } I_2 = 53 \mu\text{A}$$

suponiendo que  $I = C E_3^n$ , donde C es una constante de  
proporcionalidad, entonces  $\frac{I_1 - (E_3)_1^n}{I_2 - (E_3)_2^n} = \left(\frac{2.5}{2}\right)^n$ , tomando el lo  
garitmo de ambos lados puede obtenerse el valor del exponente:

$$n = \frac{\log 1.56}{\log 1.25} = 1.99$$

Para comprobarlo puede calcularse el valor de  $I_3$  cuando  
 $E_3 = 3 \text{ KV}$

$$I_3 = I_2 (3/2.5)^2 = 53 \cdot 1.44 = 76.5 \mu\text{A}$$

resultado que coincide con el valor experimental encontrado.

Para la otra fuente siguiendo un procedimiento similar  
y tomando la curva de  $E_2 = 3.8 \text{ KV}$  se obtiene que  $I \propto E_3^3$

El primer caso se aproxima bastante a lo expuesto en el  
Capítulo I, pues la densidad de corriente debía ser proporcional  
a  $V^{3/2}$ , pero la proporcionalidad en el caso de la otra fuente  
no corresponde con la teoría.

En cuanto a la diferencia de valores obtenidos en las  
mismas condiciones esto puede deberse a dos causas que son la  
diferente distancia entre el repulsor y el extractor, pues en la  
primera fuente es de 13.5 cm. y en la segunda es de 21 cm. y a  
el diferente material empleado en los diafragmas.

Si se considera el efecto de la distancia entonces re-  
sulta que  $I \propto 1/d^n$  con  $1 < n < 2$  y esto quedaría de acuerdo con lo -  
expuesto en el 1er Capítulo pues ahí se puso como densidad de co-  
rriente máxima una cantidad tal que  $J_m \propto 1/d^2$

De los resultados obtenidos en el inciso 4.4 del capi-

tulo anterior se hizo notar que los porcentajes de corrientes va rian entre 1.3 y 3%, dando ello lugar para pensar que las dife rentes distancias entre el colimador y el colector no producen - un efecto notable en la eficiencia de las fuentes.

En el inciso 4.5, lo que se obtuvo realmente fué los - valores promedio de la energía máxima de los iones. Nótese que además no se corrigió el efecto de emisión secundaria producido por los iones incidentes sobre el colector. Las energías pueden obtenerse multiplicando por la carga del electrón los potencia les de retardo obtenidos en la figura 4.11, pues con los poten ciales aplicados es improbable obtener iones de helio doblemente ionizados. Por último las diferencias en el rango de energías máximas en una y otra fuente pueden deberse a la mayor distancia recorrida por los iones desde el colimador hasta el colector, en el caso de la fuente con diafragma metálico.

En casi todos los casos donde se utilizó el potencial aplicado a la fuente de radio-frecuencia, se nota que el efecto producido por las variaciones en éste, es muy pequeño y en la ma yoría de los casos disminuye el valor de la corriente de iones. Ante estos hechos se pensó en la posibilidad de que no tuviera efecto importante la operación de esta fuente, eliminando la ra dio-frecuencia por completo en experimentos no reportados en es te estudio y cuyo resultado fué el esperado. Es por ello que - en la parte teórica no se hace mención a la aplicación de un cam po de alta frecuencia en las descargas gaseosas.

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES

Las diferencias entre las dos fuentes de iones, como son las distancias entre electrodos y los diafragmas, hacen muy complicado el poder comparar con exactitud las características de ambas fuentes. Sin embargo con los resultados obtenidos puede pensarse que la fuente con mejores características, para los potenciales en que se ha operado, es la de diafragma de vidrio, debido a que se necesitan voltajes menores para obtener una intensidad de corriente similar.

Para aumentar la intensidad de corriente colectada se puede hacer mayor el agujero del colimador, permitiendo así un mayor flujo de partículas cargadas. Otra forma de mejorar estas fuentes es poniéndoles un cátodo caliente, como se menciona en el Capítulo I.

Se observó que el haz de partículas cargadas que con átomos neutros pasa del colimador al colector se dispersa por colisiones dado que la presión en la región considerada es relativamente alta ( $\sim 10^{-2}$  mm). La corriente colectada podría aumentar si se dispusiera un sistema magnético de enfoque.

Al presente estudio se le debe considerar como una investigación preliminar experimental realizado con el propósito de desarrollar fuentes de iones útiles en la formación de plasmas relativamente calientes.

Los resultados experimentales obtenidos sugieren disminuir las distancias entre electrodos para obtener mayores intensidades de corriente.

## APENDICE I

### TECNICAS DE DIAGNOSTICO.<sup>38)</sup>

Los parámetros principales de un plasma son las densidades y las temperaturas de partículas neutros, iones y electrones, pues una vez conocidas ellas se pueden conocer otras propiedades del plasma con ellas relacionadas.

Cuando un plasma se encuentra en equilibrio termodinámico local, entonces es posible obtener la temperatura de electrones si se conoce la densidad de los mismos, a través de la ecuación de Saha<sup>39)</sup>.

Se describirán sólo algunas técnicas experimentales representativas y suponiendo el equilibrio termodinámico local.

#### Sonda de Langmuir.

Si se tiene un plasma totalmente ionizado, entonces la resistividad del mismo será una función de la temperatura de los electrones y cuya expresión para un plasma de hidrógeno es:

$$n = \frac{9.5 \cdot 10^{-2}}{T_e^{3/2}} \text{ (ohm-cm)}$$

donde la  $T_e$  es la temperatura de electrones en eV.

Esta última relación es válida siempre y cuando no se aplique un campo magnético ó si lo hay, haciendo la medición a lo largo de las líneas del campo.

Cuando dentro del plasma se tienen un par de electrodos y se conoce la geometría de la descarga, entonces puede introducirse una pequeña placa ó alambre, al cual se le aplica un

38.- Forrest. I. Bole y, Plasmas-Laboratory and Cosmic Van Nostrand Momentum Book

39.- H. Jiménez D., Teoría del diagnóstico espectroscópico de Plasma, Tesis; Apéndice I

voltaje con respecto a uno de los electrodos, a esta sonda se le llama de Langmuir que fué quien primero la usó. Con esta sonda, se puede medir indirectamente la resistividad del plasma, si se toman lecturas del voltaje aplicado a la sonda y de la corriente por ella recibida. Las lecturas tomadas darían la siguiente curva ideal:

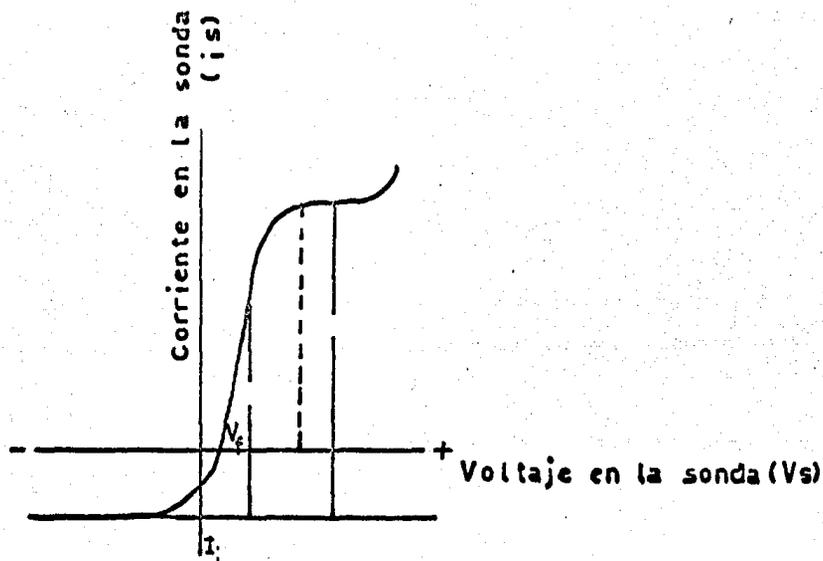


Fig. VII.1 Curva idealizada de potencial y corriente en la sonda.

Según se verá, de esta curva pueden obtenerse datos acerca de las densidades de iones y electrones, así como de temperatura de electrones.

Cuando el voltaje de la sonda se hace muy negativa, entonces repelerá electrones y "solo" captará iones, a esta corriente captada por la sonda se le denominó  $I_i$  en la gráfica y esta corriente de iones será función de la densidad de iones existentes en el plasma, dando por tanto una medida indirecta de  $N_i$ .

Conforme el voltaje de la sonda se va haciendo más positivo, empezará ésta a recibir tantos iones como electrones hasta que las dos corrientes se igualen y la corriente neta se haga ce

ro, en ese punto se define un potencial flotante  $V_f$ .

Si el voltaje se sigue aumentando hasta hacerse muy positivo, entonces la sonda sólo captará electrones y por tanto la forma de la curva cuando  $V_s \gg 0$  será función de la distribución de energía de electrones en el plasma. Para el caso en que los electrones siguen una distribución de Boltzmann, entonces la probabilidad de que un electron tenga una energía  $eV$  es de  $e^{-eV/kT_e}$  ó sea dependerá de la temperatura de electrones  $T_e$ . En estas condiciones el número de electrones colectados por la sonda será  $n_s^- = N_e e^{-eV/kT_e}$  donde  $N_e$  es la densidad de electrones y  $V = V_c - V_s$  con  $V_c$  el voltaje de la cáscara de electrones que se forma enfrente de la sonda y que necesitan vencer los electrones para llegar a la sonda. Ahora bien como la corriente de electrones es proporcional al número de ellos que llegan a la sonda, entonces se tiene la siguiente relación

$$I_e \propto \exp \left[ -e(V_c - V_s) / kT_e \right]$$

ó sea que tomando el logaritmo en ambos lados y graficando  $\ln I_e$  en función del voltaje de la sonda se debe obtener una recta con pendiente  $kT_e$  y de allí el valor de la temperatura de los electrones. En particular, si no se obtiene una recta esto que rra decir que los electrones no siguen la estadística de Boltzmann. Para hacer esta prueba se requiere que la sonda sea pequeña como para que no perturbe el plasma, pero grande en comparación con el camino libre medio.

#### Técnicas de Microondas.

Las microondas son aquellas cuya frecuencia está entre  $3 \times 10^9$  y  $300 \times 10^9$  c/segundo. Ya que el plasma atenúa aquellas perturbaciones cuya frecuencia es menor que la de oscilación del plasma, esto sugiere una forma de poder conocer la frecuencia del plasma, bastará con aplicar por medio de un generador de microondas diversas frecuencias hasta lograr que no se transmitan por el plasma, esta frecuencia de corte será precisamente la frecuencia del plasma  $\omega_p = \left( \frac{4\pi N_e e^2}{m} \right)^{1/2}$  de cuyo va-

lor se puede obtener la densidad de electrones

Además del método descrito puede utilizarse otro que emplea el defasamiento producido por el plasma sobre una perturbación conocida y para ello se utiliza una disposición como la siguiente:

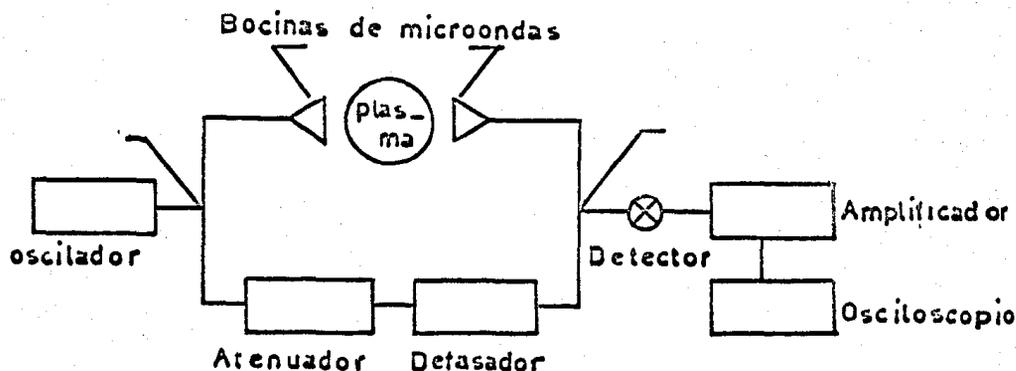


Fig. VII. 2 Representación esquemática de un interferómetro de microondas.

Por medio de un oscilador de microondas y siguiendo la trayectoria del atenuador se produce una señal patron, la cual se interferirá constructiva ó destructivamente con la transmitida a través del plasma. La velocidad de fase de las ondas transmitidas por el plasma está dada por  $C = \frac{C}{(1 - \omega_p / \omega)^{1/2}}$  y entonces basta con obtener el defasamiento ó velocidad de fase, para con ello conocer la frecuencia del plasma y de aquí la densidad de partículas.

#### Técnicas Espectroscópicas.

Estas técnicas son las más vastas y aquí sólo se mostrará un ejemplo. Considérese un plasma de hidrógeno con una densidad de  $5 \times 10^{15}$  partículas /  $cm^3$  y  $T_e = 1.4 \times 10^4$  °K en el cual existe equilibrio termodinámico.

Para ionizar los átomos de hidrógeno desde el nivel ce

ro se requieren 13.6 eV según puede verse en el diagrama de niveles de energía. Por el contrario puede ocurrir la recombinación para los electrones de energía cero emitiendo un foton de energía 13.6 eV. Si los electrones tienen una energía  $> 0$  entonces habrá emisión de fotones con una gama continua mayor que 13.6 eV.

En un plasma de hidrógeno completamente ionizado, la energía de los electrones es mayor de cero y por tanto habrá emisión de radiación continua de acuerdo con las pérdidas de energía de los electrones y además emisión de radiación de longitud de onda discreta para aquellos cuya energía sea cero. La radiación emitida por estos electrones de energía cero puede analizarse por medio de un espectrógrafo observándose líneas espectrales de Lyman, Balmer, Paschen, etc., si las transiciones son de

$$n = 1, 2, 3, \text{ etc.}$$

La intensidad de la radiación ya sea lineal ó continua es proporcional a las densidades de partículas cargadas  $\propto N_i N_e$  y además depende de la temperatura de electrones puesto que la razón de recombinación crece al disminuir la temperatura aunque esta dependencia varía según la transición de que se trate o debido a lo dicho antes se pueden medir dos intensidades de líneas y obtener su cociente con lo cual se habrá sacado una relación independiente de la densidad pero dependiente de  $T_e$  ó sea es una medida indirecta de  $T_e$ . Una vez obtenida la temperatura de electrones se puede encontrar la densidad de partículas haciendo la medición de una intensidad absoluta en una región tal que casi no dependa de la temperatura como por ejemplo en  $n = 2$  y alrededor de 5300 Å.

En las condiciones de equilibrio termodinámico local ó sea cuando el poblamiento y despoblamiento casi se equilibran pueden compararse los resultados experimentales con los previstos por la ecuación de Saha

Obteniendo el comportamiento en el tiempo de la intensidad de las líneas espectrales se encuentra para el plasma de

hidrógeno descrito la siguiente gráfica de la densidad de partículas en función de la temperatura:

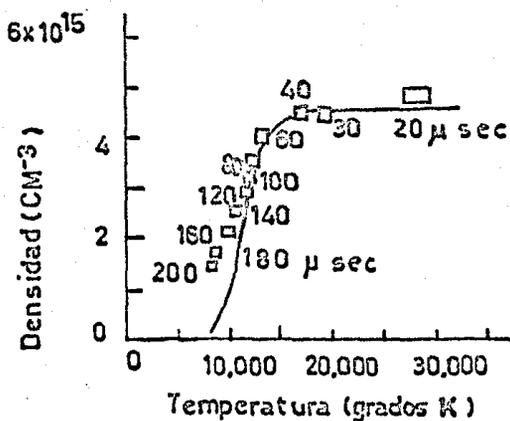


Fig. VII. 3 Densidad de iones Vs. temperatura de electrones.

El tiempo indica el lapso después de iniciada la descarga en el cual se hizo la medida.

Se observa que a 20 μs y a 30 μs aún no es muy grande la recombinación y todavía no se establece, por tanto el equilibrio termodinámico local previsto por la ecuación de Saha. De los 40 a los 120 μs en que el plasma se está enfriando, se mantiene en equilibrio termodinámico local. Esta gráfica nos indica el tiempo en el cual el plasma permanece en equilibrio termodinámico.

## APENDICE II

### EL PRINCIPIO DE SEMEJANZA <sup>40, 41, 42</sup>).

#### 1.- Relaciones de semejanza

Sean dos sistemas 1 y 2 de descargas geoméricamente semejantes, donde una dimensión importante  $d$  (por ejemplo la distancia entre electrodos), esta relacionada en ambos sistemas a través de una constante:

$$d_2 = K d_1$$

El potencial en un punto  $P_1$  en el sistema 1 está dado por

$$V_1 = \int \sigma_1 \frac{dS_1}{r_1}$$

siendo  $dS_1$  una superficie elemental de densidad de carga  $\sigma_1$  sobre los electrodos y  $r_1$  la distancia radial entre  $P_1$  y  $dS_1$ . En el sistema 2 el potencial en un punto semejante  $P_2$  es igual a:

$$V_2 = \int \sigma_2 \frac{dS_2}{r_2} = \int \frac{K^2 \sigma_1 dS_1}{K r_1}$$

ya que  $dS_2 = K^2 dS_1$  y  $r_2 = K r_1$ , entonces  $V_2 = V_1$  si  $\sigma_2 = \sigma_1 / K$  y en ese caso las intensidades de campo eléctrico estarán relacionadas por

$$E_2 = E_1 / K \quad (\text{puesto que } E = - \frac{dV}{dr})$$

si las presiones se ajustan de tal manera que  $p_2 = p_1 / K$

40.- J. D. Cobine; *Gaseous Conductors*, 209, Dover (1958)

41.- F. Llewellyn; Jones; *Ionization and Breakdown*, 7), Methwen's Monographs on Phys. Subj. (1966)

42.- G. Francis, *Handbuch der Physik*, 22 (1958)

entonces  $\frac{E_1}{P_1} = \frac{E_2}{P_2} = \text{cte.}$

y

$$P_1 d_1 = P_2 d_2$$

De lo anterior se deduce que todas las cantidades que sólo sean funciones de  $E/p$  serán iguales en los sistemas semejantes. Por ejemplo para el primer coeficiente de Townsend  $\alpha$  se tiene

$$\int \alpha dS = \int f(E/p) p dS$$

pero  $p_1 dS_1 = p_2 dS_2$

$$\therefore \alpha_1 = \alpha_2$$

Si  $I_1 = I_2$  y  $V_1 = V_2$  entonces las caídas de ruptura son iguales.

Las densidades de corriente están dadas por

$$J_1 = \frac{I_1}{dS_1} = K^2 \frac{I_2}{dS_2} = (P_1/P_2)^2 J_2$$

$$\frac{J}{P^2} = \text{cte.}$$

**Significado Físico.** El principio de semejanza es una consecuencia de la naturaleza de los procesos fundamentales en las descargas gaseosas.

La energía media de una nube de electrones  $\frac{1}{2} m u^2$  es una función sólo de  $E/p$  y por lo tanto es igual en sistemas semejantes. También las velocidades de arrastre de electrones -

$v = \frac{2eE\lambda}{3m^*u}$  (donde  $\lambda$  es el camino libre medio de electrones) y de iones  $v = \frac{eE\lambda^+}{m^*u^+}$  son funciones de  $E/p$ .

La condición de que  $p_1 = p_2/K$  implica que las concentraciones estén dadas por  $N_1 = N_2/K$  y que los caminos libres medios de iones y electrones tengan la misma constante de proporcionalidad.

Considérense dos tubos de descarga semejantes y sean  $A_1, B_1$  y  $A_2, B_2$  dos pares de puntos semejantes en los dos sistemas, si se cumple que  $V_{A_1 B_1} = V_{A_2 B_2}$  entonces  $E_1 x_1 = E_2 x_2$  con  $x_1, x_2$  las distancias entre los puntos. Como  $x_1 = K x_2$  entonces  $E_1 = E_2 / K$ .

Usando la ecuación de Poisson  $\frac{dE}{dx} = -4\pi\rho$  se obtiene que la densidad de carga se transforma de acuerdo con la relación

$$\rho_1 = \rho_2 / K$$

y por lo tanto las concentraciones de iones y electrones se transformarán como sigue

$$\frac{N_1^+}{N_2^+} = \frac{N_{e1}}{N_{e2}} = 1 / K^2$$

Las velocidades en ambos sistemas son iguales ya que  $v = \left(\frac{2eV}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{2e \int E dx}{m}\right)^{1/2}$  y  $E_1 x_1 = \frac{E_2 K x_2}{K} = E_2 x_2$

la densidad de corriente de iones, electrones y de arrastre obedece la expresión:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{K^2}$$

y de aquí se deduce que las corrientes son iguales ya que  $I = J \cdot \pi R^2$ . Del último resultado se concluye que las características  $V-I$  son iguales en sistemas semejantes.

En el caso del tiempo este se transforma de acuerdo a  $dt_1 = K dt_2$  ya que  $dt = dx/v$  entonces la variación en la concentración de cargas estará dada por

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_1 = \frac{1}{K^3} \left(\frac{dN}{dt}\right)_2$$

y en la última expresión están implicados procesos individuales tales como la ionización por electrones, por iones, fotoionización, recombinación, difusión, etc., todos ellos transformándose como  $1:1/K^3$ .

Las Leyes de Semejanza son útiles para saber cuando un proceso físico puede ocurrir en un sistema, pero no pueden decir cuales procesos ocurren si el sistema no las obedece. Para ejemplificar lo dicho considérense los procesos siguientes, los cuales se llamarán prohibidos ó permitidos según que obedezcan ó no la transformación  $1:1/K^3$  para la variación en la concentración de cargas.

Considérense los ejemplos siguientes:

a) Rapidez de cambio de la carga debido a la difusión cuya expresión es:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial(Nv)}{\partial x}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_1 = \frac{1}{K^3} \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_2$$

y por lo tanto este proceso está permitido ya que varía como  $1/K^3$

b) Rapidez de cambio de carga por recombinación  $= \alpha_i N^+ N_e$

donde el coeficiente  $\alpha_i$  de recombinación es proporcional a la presión cuando ésta es menor que una atmósfera, en este caso

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_1 = \frac{1}{K^3} \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_2$$

y entonces no obedece la ley de semejanza ó sea que su contribución, si es que existe este proceso, es muy pequeña en sistemas semejantes. Cuando se tienen altas presiones  $\alpha_i \propto 1/p$  y entonces

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_1 = \frac{1}{K^3} \left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_2$$

ó sea que es un proceso permitido.

En la tabla siguiente se muestra las transformaciones de semejanza para los parámetros de la descarga:

Párametros	Relaciones	Párametros de Semejanza
Potencial	$V_1 = V_2$	V, I, T
Dimensión Lineal	$d_1 = K d_2$	
Corriente	$I_1 = I_2$	
Temperatura del Gas	$T_1 = T_2$	
Camino libre medio de cualquier partícula	$\lambda_1 = K \lambda_2$	E/p, p <sub>d</sub> , p <sub>R</sub>
Densidad del gas	$N_1 = N_2 / K$	
Presión del gas	$P_1 = P_2 / K$	
Campo eléctrico	$E_1 = E_2 / K$	
Densidad de carga en las paredes	$\sigma_1 = \sigma_2 / K$	
Densidad de carga volumétrica	$\rho_1^+, \rho_1^- = \frac{1}{K^2} \rho_2^+, \frac{1}{K^2} \rho_2^-$	
Densidad de corriente total y parcial	$(j, j^+, j_e)_1 = 1/K^2 (j, j^+, j_e)_2$	T <sub>e</sub> , T <sub>+</sub> , j/p <sup>2</sup> , N <sub>e</sub> /p <sup>2</sup>
Densidad de partículas Electrones, iones átomos metaestables, neutros rápidos	$(N_e, N^+, N^-, N_m^0, N^o)_1 = \frac{1}{K^2} (N_e, \dots)_2$	
Estados excitados excepto resonancia	$N_1^* = N_2^* / K^3$	
Velocidad	$v_1 = v_2$	
Energía de las partículas cargadas	$W_1 = W_2$	
Temperatura de electrones e iones	$(T_e, T_+)_1 = (T_e, T_+)_2$	
Intervalo de tiempo	$dt_1 = K dt_2$	
Frecuencia de colisión	$\nu = \nu_2 / K$	

### APENDICE III

#### TEORIA DE LA CAIDA LIBRE EN LA COLUMNA POSITIVA

Dentro de las teorías de la columna positiva se menciona ésta de la caída libre y en este apéndice se detallará para el caso de una columna cilíndrica.

Las suposiciones de la teoría son:

- i) Distribución Maxwelliana de las velocidades de los electrones.
- ii) Los electrones debido a su gran movilidad obedecen la ley de Boltzmann.
- iii) La velocidad inicial de los iones es despreciable.
- iv) a.- Si los iones son generados totalmente por electrones y el camino libre medio es  $\gg R$  entonces se tiene una generación uniforme de iones.  
b.- Si la generación es causada por los electrones "últimos" (véase III. 4. 1 ii), entonces la rapidez de generación es proporcional a la concentración de electrones.

#### 1.- Distribución del potencial en el plasma.

Para que los iones fluyan hacia los electrodos y paredes se requiere la existencia de un potencial máximo en el centro de la columna del plasma.

Supóngase que los iones se generan en un punto a una distancia  $z$  del eje del tubo y adquieren una velocidad  $v_z$  a la distancia  $r$ , si  $N_z$  es el número de iones generados por segundo por unidad de volumen en  $z$ , entonces la densidad de iones cuando pasan por  $r$  es:

$$N_z \frac{dz}{v_z} \dots (1)$$

Puesto que todos los iones generados en  $z < v$  contribuyen en  $v$ , entonces la densidad de iones en  $v$  es:

$$N^+ = \frac{1}{r} \int_0^v N_z \frac{z dz}{v_z} \dots (2)$$

de la suposición ii) la densidad de electrones está dada por la expresión

$$N_e = N_0 \exp(eV_r / kT_e) \dots (3)$$

donde  $N_0$  es la densidad de electrones en el origen ( $r=0$ ) y  $V_r$  es el potencial espacial.

La ecuación de Poisson es:

$$\nabla^2 V = -4\pi e(N^+ - N_e)$$

y substituyendo las expresiones de  $N^+$  y  $N_e$  se obtiene la ecuación completa plasma-cáscara:

$$\nabla^2 V = 4\pi e N_0 \exp(eV_r / kT_e) + \frac{4\pi e}{r} \int_0^v N_z \frac{z dz}{v_z} = 0 \dots (4)$$

Para facilitar la resolución de esta ecuación se usa una nueva variable adimensional

$$\eta = -eV_r / kT_e \dots (5)$$

que al substituir en la ecuación plasma c-áscara la modifica a la expresión siguiente:

$$\left( \frac{kT_e}{4\pi e^2 N_0} \right) \nabla^2 \eta + e^{-\eta} - N_0^{-1} r^{-1} \int_0^v N_z \frac{z dz}{v_z} = 0 \dots (6)$$

Esta última ecuación se va adaptando a los casos particulares que interesan y que son:

a) Camino libre medio grande y  $N_z \ll N_0$ . En este caso la expresión de la velocidad de los iones en  $r$  haciendo la suposición iii) es:

$$v_z = \left[ \frac{2e(V_z^2 - V_r)}{m^+} \right]^{1/2} = \left[ \frac{2kT_e(\eta - \eta_z)}{m^+} \right]^{1/2} \dots (7)$$

donde  $m$  es la masa de los iones y se han usado las definiciones (5) y la similar  $\eta_z = eV_z / kT_e$ . La expresión de el número ---

de iones generados por segundo por unidad de volumen es:

$$N_z = (N_e)_z \epsilon = (N_0 \exp(-\eta_z)) \dots (8)$$

con el número de iones generados por electron por segundo.

Sustituyendo en (6)

$$\frac{(kT_e) \nabla^2 \eta}{4\pi e^2 N_0} + \exp(-\eta) - \epsilon \left( \frac{m^+}{2kT_e} \right)^{1/2} \frac{1}{r} \int_0^r z e^{-\eta_z} (\eta - \eta_z)^{-1/2} dz = 0 \quad (9)$$

Usando nuevamente una variable adimensional

$$s = \beta r \quad (10)$$

la ecuación (9) se expresa como

$$\frac{(\beta^2 kT_e)}{4\pi e^2 N_0} \nabla_s^2 \eta + e^{-\eta} - \epsilon \left( \frac{m^+}{2kT_e} \right)^{1/2} \frac{1}{s} \frac{1}{\beta} \int_0^s s_2 e^{-\eta_2} (\eta - \eta_2)^{-1/2} ds_2 = 0 \quad (11)$$

tomando  $\beta$  tal que

$$\beta = \epsilon \left( \frac{m^+}{2kT_e} \right)^{1/2} \dots (12)$$

por lo tanto la ecuación (11) reduce a:

$$m^+ \epsilon^2 \nabla_s^2 \eta + e^{-\eta} - \frac{1}{s} \int_0^s s_2 e^{-\eta_2} (\eta - \eta_2)^{-1/2} ds_2 \dots (13)$$

Ya que el término de Poisson es despreciable entonces la ecuación (13) queda como

$$\exp(-\eta) - \frac{1}{s} \int_0^s s_2 e^{-\eta_2} (\eta - \eta_2)^{-1/2} ds_2 = 0 \dots (14)$$

La ecuación (14) es adimensional y por lo tanto significa que el potencial tiene la misma forma independientemente de los valores particulares de las constantes.

Tomando a  $\eta$  como la variable independiente, y usando las definiciones  $\eta = \rho^2$   $\eta_2 = \rho_2^2$  con  $\rho_2 = \rho \sin \theta$  ... (15)

y sustituyendo en (14) se obtiene

$$s \exp(-\rho^2) - \int_0^{\rho_2} s_2 \exp(-\rho_2^2) (ds/d\rho_2) d\theta = 0 \dots (16)$$

Expresando  $s$  como un polinomio:

$$s = a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + a_3 \rho^3 + \dots$$

Ya que  $s = 0$  en  $\rho = 0$  entonces  $a_0 = 0$  y además se encuentra que  $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2m} = 0$  La expresión de  $s$  esta dada por

$$s = a_2 \rho^2 + a_4 \rho^4 + \dots (7)$$

La segunda condición en la frontera es la de un potencial máximo en  $r=0$  o sea  $(E)_r=0$  y por tanto  $\frac{d\eta}{ds} = 0$  en  $r=0$

ó lo que es lo mismo  $\frac{ds}{d(P^2)} = 0$

Sustituyendo (17) en (16)

$$s_2 \frac{ds_2}{dP_2} = a_1^2 P_2 + 2(2a_1 a_3) P_2^3 + 3(a_3^2 + 2a_1 a_5) P_2^5 + \dots$$

$$\exp(-P_2^2) = 1 - \frac{P_2^2}{2!} + \frac{P_2^4}{4!} - \frac{P_2^6}{6!} + \dots$$

pero  $P_2^{2m+1} = \rho^{2m+1} \sin^{2m+1} \theta$

entonces el coeficiente de  $P_2^{2m+1}$  en  $s_2 \frac{ds_2}{dP_2}$  es:

$$(-)^m \sin^{2m+1} \theta \left\{ \frac{a_1}{m!} - \frac{2(a_1 a_3)}{(m-1)!} + \frac{3(a_3^2 + 2a_1 a_5)}{(m-2)!} \dots \right. \\ \left. + \frac{a_k^2}{(m-k+1)!} 2(a_1 a_{k-1} + a_3 a_{k-3} + \dots) \right\} \text{ hasta } k=m+1$$

y como además

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} \theta d\theta = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}$$

entonces el coeficiente de  $P_2^{2m+1}$  es

$$(-)^m \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}$$

donde

$$\Gamma_m = \left\{ \frac{a_1}{m!} - \frac{2(a_1 a_3)}{(m-1)!} + \frac{3(a_3^2 + 2a_1 a_5)}{(m-2)!} \dots \right. \\ \left. + \frac{a_k^2}{(m-k+1)!} 2(a_1 a_{k-1} + a_3 a_{k-3} + \dots) \right\} \text{ hasta } k=m+1$$

El primer sumando de la ecuación se obtiene de

$$s \exp(-P_0^2) = (a_1 P + a_3 P^3 + \dots) \left( 1 - \frac{P^2}{2!} + \frac{P^4}{4!} - \dots \right)$$

y el coeficiente de  $P^{2m+1}$  de esta última expresión es:

$$(-)^m \left[ \frac{a_1}{m!} - \frac{a_3}{(m-1)!} + \frac{a_5}{(m-2)!} - \dots + a_{2m+1} \right]$$

Sumando los coeficientes e igualándolos a cero, la expresión de las  $a_i$  es:

$$\frac{a_1 a_3 + a_5 \dots = 1 \cdot 2 \cdot 4 \dots (2m)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)} \left[ \frac{a_1^2}{m} - \frac{2(2 \cdot 2 \cdot 2^2)}{(m-1)!} + \frac{2^2 5}{(m-2)!} - \dots + a_{2m+1} \right]$$

Para encontrar los valores de las  $a_j$  se sustituyen

los valores de  $m=0,1,2,3,4$ , etc., obteniéndose:

si  $m=0$ , entonces  $a_1 = a_1^2$  o sea que  $a_1 = 1$

para  $m=1$ ,  $1 - a_3 = \frac{2}{3}(1 - 4a_3)$  y entonces  $a_3 = 0.2$

cuando  $m=2$ ,  $\frac{1}{2!} + 0.2 + a_5 = \frac{8}{15} \left[ \frac{1}{2!} + 0.8 + 3(0.04 + 2a_5) \right]$

$$\text{ó sea } a_5 = 0.020061$$

De igual manera se pueden encontrar los valores de las siguientes  $a_j$  encontrándose así la expresión de  $s$ :

$$s = \eta^{1/2} (1 - 0.2\eta - 0.026\eta^2 - 0.006489\eta^3 \dots)$$

Encontrando  $\left(\frac{d\eta}{ds}\right)_{s_0} = \infty$  se obtienen los valores de  $\eta_0$

y  $s_0$  los límites de validez de esta teoría:

$$\eta_0 = 1.155 \quad \text{y} \quad s_0 = 0.7722$$

b) Camino libre medio  $\gg R$  y generación de iones — constante a través del plasma ó, sea  $N_z = \text{cte.} = K$ .

Haciendo los mismos pasos que en el caso anterior a), omitiendo  $\exp(\eta z)$  en la integral y sustituyendo  $\epsilon = K/N_0$

se obtienen las ecuaciones

$$\beta = \frac{K(m^*)^{1/2}}{N_0(2kT_e)^{1/2}}$$

$$\frac{m^* K^2}{8\pi e^2 N_0^2} \nabla_s^2 \eta + e^{-\eta} - \frac{1}{s} \int_0^s s_2 (\eta - \eta_2)^{-1/2} ds_2 = 0 \dots (18)$$

los resultados obtenidos son similares y se muestran en la tabla II.

c) Camino libre medio  $\ll R$  y  $N_z$  uniforme.

Este caso puede dividirse en dos:

i) Campo eléctrico pequeño tal que la energía obtenida por los iones entre colisiones es pequeña en comparación con la

energía térmica de los átomos, en este caso la velocidad de arrastre de los iones tiene dos términos, el de difusión y el del campo eléctrico

$$v_z^+ = -\frac{D}{N^+} \frac{dN^+}{dr} - \frac{eD}{kT_e} \frac{dV}{dr}$$

donde  $T_g$  es la temperatura del gas,  $k$  la constante de Boltzmann y  $D$  el coeficiente de difusión;

como  $N^+ = N_e$  entonces

$$v_z^+ = -\frac{eD}{k} \left( \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_g} \right) \frac{dV}{dr}$$

Ya que  $T_g \ll T_e$  entonces la última expresión se simplifica a:

$$v_z^+ = -\frac{eD}{kT_g} \frac{dV}{dr} \dots (19)$$

Si  $D$  es la constante de autodifusión  $D = 0.561 \lambda_g \bar{v}$  donde  $\bar{v}$  es la velocidad promedio de los iones:

$$\bar{v} = 2 \left( \frac{2kT_g}{\pi m^+} \right)^{1/2} = 1.597 \left( \frac{kT_g}{m^+} \right)^{1/2} \dots (20)$$

sustituyendo en (19)

$$v_z^+ = q E \frac{dV}{dr}$$

$$\text{con } q = \frac{0.895 \lambda_g}{(kT_g m^+)^{1/2}} \dots (21)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (6) se obtiene:

$$\frac{kT_e}{4\pi e^2 N_0} \nabla_a^2 \eta + e^{-\eta} - \frac{K}{N_0 q k T_e r} \left( \frac{d\eta}{dr} \right)^{-1} \int_0^r s_2 ds_2 = 0 \quad (22)$$

Haciendo las mismas sustituciones que en el caso a) se encuentran las expresiones siguientes:

$$\beta^2 = (K/N_0 q k T_e) \dots (23)$$

$$\frac{K}{4\pi e^2 N_0 q} \nabla_s^2 \eta + \exp(-\eta) - \frac{1}{s} \frac{ds}{dn} \int_0^s s_2 ds_2 = 0 \quad (24)$$

Despreciando nuevamente el término de Poisson:

$$\exp(-\eta) - \frac{1}{s} \frac{ds}{dn} \int_0^s s_z ds_z = 0 \quad (24')$$

cuya solución es:

$$\exp(-\eta) = 1 - \frac{s^2}{4} \dots (25)$$

En este caso cuando  $\eta = \infty$ ,  $s_0 = 2$

ii) En presiones intermedias la temperatura de los iones está más determinada por la energía adquirida por los iones en caída libre que por la temperatura del gas y por lo tanto se sustituye la temperatura de iones  $T^+$  en lugar de la  $T_g$ .

Para calcular la velocidad de arrastre de los iones  $v^+$  sean  $v_0$  y  $v_f$  las velocidades al principio y al final de un camino libre medio, como la persistencia de la velocidad después de la colisión es 0.5, entonces

$$\begin{aligned} v_f &= 2v_0 \\ v_f &= v_0 + \left(\frac{eE}{m^+}\right) T \\ \lambda^+ &= v_0 T + \left(\frac{eE}{m^+}\right) T^2 \end{aligned}$$

donde  $T$  es el tiempo libre medio. Eliminando  $T$ , encontrando  $v_0$  y luego obteniendo  $v^+ = \frac{v_0 + v_f}{2}$

$$v^+ = 1.2 \left(\frac{eE\lambda^+}{m^+}\right)^{1/2} \quad \text{ó en términos del potencial}$$

$$v^+ = -q' e \left(\frac{dV}{dV}\right) \dots (26)$$

donde  $q' = 1.2 \left(\frac{\lambda^+}{m^+}\right)^{1/2} \dots (27)$

Sustituyendo en la ecuación (6) la expresión de  $v^+$  y se obtienen las ecuaciones

$$\beta = \left(\frac{K^2}{N_0^2 q'^2 k T_e}\right)^{1/3} \dots (28)$$

$$\frac{1}{4\pi e^2} \left(\frac{k T K^4}{N_0^2 q'^4}\right)^{1/3} \nabla_s^2 \eta + e \eta - s \left(\frac{ds}{dn}\right)^{1/2} \int_0^s s_z ds_z = 0 \dots (29)$$

Despreciando  $\nabla_s^2 \eta$  se reduce a:

$$\exp(-\eta) - s \left( \frac{ds}{d\eta} \right)^{1/2} \int_0^s s_2 ds_2 = 0$$

y su solución está dada por:

$$\exp(-\eta) = \left[ 1 - \frac{2s^3}{12} \right]^{1/2} \dots 30$$

en este caso cuando  $\eta_0 \rightarrow \infty$ ,  $s_0 \rightarrow 1.816$  y además cuando  $\eta \rightarrow 0$  también  $s \rightarrow 0$ .

d) Camino libre medio de iones y electrones pequeño en comparación con las dimensiones del plasma y la generación de iones proporcional a  $N_e$ . Este caso también puede dividirse en dos partes a saber:

i) Para los caminos libres medios más cortos se sustituye  $K = \epsilon N_0 \exp(-\eta z)$  en la ecuación (22) obteniéndose

$$\frac{\epsilon}{4\pi e^2 N_0 q} \nabla_s^2 \eta + \exp(-\eta) - \frac{1}{s} \frac{ds}{d\eta} \int_0^s e^{-\eta z} s_2 ds_2 = 0 \dots (31)$$

$$\beta = \left( \frac{\epsilon}{q k T_e} \right)^{1/2} \dots (32)$$

Haciendo la sustitución  $w = \exp(-\eta)$  se puede transformar la ecuación (3) en una ecuación de Bessel de orden cero:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dw}{ds} + w = 0$$

y entonces el resultado es

$$\exp(-\eta) = J_0 \left( \left[ \frac{\epsilon}{q k T_e} \right]^{1/2} r \right) \dots (33)$$

la cual es una solución como la obtenida por Schottky

ii) Para caminos libre medios grandes se hace la sustitución  $K = \epsilon N_0$  y se pone  $\exp(-\eta z)$  en las ecuaciones (23) y (24) donde como resultados:

$$\beta = \left( \frac{\epsilon^2}{q^2 k T_e} \right)^{1/3} \dots (34)$$

$$\frac{1}{4\pi N_0 e^2} \left( \frac{k T_e \epsilon^4}{q^4} \right)^{1/3} \nabla_s^2 \eta + e^{-\eta} - s \left( \frac{ds}{d\eta} \right)^{1/2} \int_0^s e^{-\eta z} s_2 ds_2 = 0 \dots (35)$$

suprimiendo  $\nabla_s^2 \eta$  la ecuación anterior puede tomar la forma

$$e^{-\eta} \left\{ 1 - 2 \int_0^s \gamma - 2 \left[ \int_0^y e^{-\eta z} s_z ds_z \right]^2 dy \right\}^{1/2}$$

con soluciones

$$\exp(-\eta) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

Los resultados de este caso se encuentran en la tabla IV.

### 2.- Ecuación de Balance del plasma.

Ya que  $S_0$  se puede identificar con el radio del tubo entonces se tiene la relación siguiente:

$$\frac{R}{S_0} = \frac{r}{s} = \frac{1}{\beta} \dots (36)$$

y sustituyendo el valor de  $\beta$  de la ecuación (12)

$$aE = s_0 \left( \frac{2k}{m^+} \right)^{1/2} T_e^{1/2} = 0.5522 \cdot 10^6 s_0 \left( \frac{T_e m_e}{m^+} \right)^{1/2} \text{cm. seg}^{-1} \dots (37)$$

ya que  $s_0 = 0.7722$  entonces

$$aE = 0.4264 \cdot 10^6 \left( \frac{T_e m_e}{m^+} \right) \dots (38)$$

La ecuación (37) es la de Balance del plasma para presiones bajas y  $N_z$  uniforme.

### 3.- Corrientes iónicas en el plasma

De lo visto anteriormente se concluye que la corriente iónica es  $r = 0$  es nula. Para todos los casos el número de iones que llegan a las paredes por unidad de área y unidad de tiempo es igual al número de iones generados por segundo en el volumen subtendido por la unidad de área de las paredes del tubo ó sea

$$R J_p^+ = \int_0^R e N_r r dr$$

donde  $J_p^+$  es la densidad de corriente iónica en las paredes.

Haciendo la sustitución  $s=rE$

$$J_p^+ = Re s_0^{-2} \int_0^{\eta_0^{1/2}} N_s s ds \dots (39)$$

y si  $P=\eta^{1/2}$  entonces

$$J_p^+ = Re s_0^{-2} \int_0^{\eta_0^{1/2}} N^+ s \frac{ds}{dP} dP \dots (40)$$

la solución es parecida a la del caso a)

$$J_p^+ = Re s_0^{-2} E \sum_0^{\infty} \frac{(-)^m \sigma_m \eta_0^{m+1}}{2m+2}$$

$\sigma_m$  definida como en a).

Definiendo

$$h_0 = s_0^{-2} \sum_0^{\infty} \frac{(-)^m \sigma_m \eta_0^{m+1}}{2m+2} \dots (41)$$

la expresión de la densidad de corriente es:

$$J_p^+ = h_0 e N_0 E \dots (42)$$

y la ecuación (42) es la de corriente iónica.

Para los casos b) y c)  $N_2 = K$  y sustituyendo en (39) se encuentra:

$$J_p^+ = h_0 e R K \dots (43) \quad \text{con } h_0 = 1/2$$

Atribuyéndole a  $2h_0$  el valor promedio de la exponencial de  $(-\eta)$ .

$$2h_0 = \overline{\exp(-\eta)} \dots (44)$$

por lo tanto

$$N_e = 2h_0 N_0 \pi R^2 \dots (45)$$

y entonces la corriente iónica es:

$$2\pi R I_p^+ = N_e e E = 2\pi R^2 h_0 N_0 e E$$

Para los casos de camino libre medio  $\gg R$  se obtiene si  $N_2 \propto N_e$

$$J_p^+ = s_0 h_0 e N_0 \left( \frac{2kT_e}{m^+} \right)^{1/2} \dots (46)$$

cuando el camino libre medio  $< R$ :

$$J_p^+ = s_0^2 h_0 \frac{e N_0 q k T_e}{R} \dots (47)$$

Las ecuaciones (46) y (47) son las de la corriente iónica en las paredes.

#### 4.- Potencial en las paredes

La densidad de corriente electrónica que llega a las paredes está dada por la teoría cinética:

$$J_p^- = e N_0 \exp(-\eta_p) \cdot \left( \frac{k T_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2}$$

con  $\eta_p = \frac{-11600V_p}{T_e}$  donde  $V_p$  es el potencial de la pared referido al potencial máximo del plasma (i.e. en  $r=0$ ) Sea  $\rho_e$  el coeficiente de reflexión, entonces la densidad de corriente realmente colectada es:

$$J_p^- = (1 - \rho_e) J_p^-$$

e igualando con  $J_p^+$  de (46) ó (47) se obtiene:

$$\eta_p = \ln \left[ \frac{(m^*)^{1/2}}{m_e} \right] / (2\pi)^{1/2} s_0^2 h_0 + \ln(1 - \rho_e) \dots (48)$$

#### 5.- Cociente de la corriente electrónica sobre la corriente de arrastre

La densidad de corriente electrónica dada por la teoría cinética es

$$J_e = e N_0 \left( \frac{k T_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \quad \text{en } r=0$$

entonces el cociente de la densidad de corriente de electrones - entre la densidad de corriente iónica en las paredes (46) es:

$$\frac{J_e}{J_p^+} = \left( \frac{m^*}{m_e} \right)^{1/2} / (2 s_0^2 h_0 \pi^{1/2})$$

El promedio de la densidad de corriente de arrastre es igual a  $\frac{I_d}{\pi R^2}$  donde  $I_d$  es la corriente de la descarga, además

tomando en cuenta la distribución dada por la ecuación (44) se obtiene:

$$J_a = \frac{I_a}{2 h_0 \pi R^2}$$

entonces el cociente buscado es

$$\frac{J_e}{J_a} = \frac{\pi^{1/2}}{s_0} \left( \frac{m^+}{m_e} \right)^{1/2} J_p^+ I_d \dots (49)$$

### 6.- Velocidad iónica promedio en el límite

La densidad de corriente iónica en las paredes es igual a:

$$J_p^+ = e N_e \bar{v}_p^+$$

donde  $\bar{v}_p^+$  es la velocidad iónica media y  $N_e = N_0 \exp(-\eta_0)$

con  $\bar{v}_p^+ = \left( \frac{2 k T}{m^+} \bar{\eta}_0 \right)^{1/2}$

entonces  $J_p^+ = e N_0 \exp(-\eta_0) \left[ \frac{2 k T_e \bar{\eta}_0}{m^+} \right]^{1/2}$

eliminando  $J_p^+$  sustituyéndola por (46) se encuentra la expresión equivalente buscada

$$\bar{\eta}_0 = h_0^2 s_0^2 \exp(2 \eta_0^0) \dots (50)$$

### 7.- Frontera con la cáscara y la cáscara.

i) Límite de validez de la ecuación del plasma. Sólo se analiza el caso correspondiente a las bajas presiones. En lo deducido hasta el inciso anterior se ha despreciado el término de Poisson, pero este ya es significativo cuando por ejemplo es igual a una cierta fracción  $\phi$  dada por el cociente de este término de Poisson y otro término de la ecuación del plasma-cáscara, esto es

$$\phi = A \frac{d^2 \eta}{ds^2} / \exp(-\eta) \dots (51)$$

La ecuación del plasma falla en  $s < s_0$ , ya que  $(\nabla_s^2 \eta)_{s_0} = \infty$ . En la ecuación (51) se ha simplificado el Laplaciano haciendo - que  $\nabla_s^2 \eta = \frac{d^2 \eta}{ds^2}$  pues sólo se analiza en el caso cuando el es pesor de la cáscara es  $\ll R$ .

Sean  $s_0$  y  $\eta_0$  las coordenadas del punto límite en el cual se cumple la ecuación del plasma, entonces usando a la  $\eta$  como la variable siguiente:

$$\frac{d\eta}{ds} = \left(\frac{ds}{d\eta}\right)^{-1}; \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} = -\left(\frac{ds}{d\eta}\right)^3 \frac{d^2s}{d\eta^2} \quad \text{ya que:}$$

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{d\eta} \right)^{-1} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{ds}{d\eta} \right)^{-1} \frac{d\eta}{ds} = -\left(\frac{ds}{d\eta}\right)^{-2} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{ds}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{ds}$$

$$\therefore \frac{d^2\eta}{ds^2} = -\left(\frac{ds}{d\eta}\right)^{-2} \frac{d\eta}{ds} \frac{d^2s}{d\eta^2} = -\left(\frac{ds}{d\eta}\right)^{-3} \frac{d^2s}{d\eta^2}$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor alrededor - del punto  $s_0$ :

$$s = s_0 + s_1' \delta\eta + \frac{s_0'' \delta\eta^2}{2!} + \dots$$

con  $s_1' = \left(\frac{ds}{d\eta}\right)_{s_0}$  pero  $\left(\frac{ds}{d\eta}\right)_{s_0} = 0$ , y  $\delta\eta = \eta - \eta_0$

definiendo  $\delta s = s - s_0$  se obtiene:

$$\delta s = \frac{1}{2} s_0'' \delta\eta^2 (1 + \delta\eta (\dots))$$

Encontrando ahora  $s'$  y  $s''$

$$\frac{ds}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left( s_0 + \frac{s_0''}{2} \delta\eta \right) + \dots = s_0'' \delta\eta$$

a primer orden y

$$\frac{d^2s}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta} (s_0'' \delta\eta) = s_0''$$

Sustituyendo en  $\frac{d\eta}{ds}$  y  $\frac{d^2\eta}{ds^2}$ :

$$\frac{d\eta}{ds} = (s_0'' \delta\eta)^{-1}; \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} = -(s_0'')^{-3} \frac{d^2s}{d\eta^2} \delta\eta^{-3} = -(s_0'')^{-3} \delta\eta^{-3}$$

y además a primer orden:

$$\exp(-\eta) = \exp(-\eta_0) \dots (52)$$

Sustituyendo en (51):

$$A \delta \eta_0^3 (s_0'')^{-2} = \phi \exp(-\eta_0)$$

donde se ha hecho la sustitución  $\delta \eta_\phi = -\delta \eta$  con objeto de que sea positivo definido, finalmente la expresión es igual a:

$$\delta \eta_0^3 = \frac{A \exp(\eta_0)}{s_0''^2} \dots (53)$$

El valor de  $s_0''$  se puede encontrar usando el desarrollo de Taylor para  $s$  y resulta  $s_0'' = -0.635$  por lo tanto:

$$\delta \eta_\phi = \frac{A^{1/3} (\exp(\eta_0/3))}{(-0.635)^2} \dots (54)$$

$$\delta s_\phi = \frac{1}{2} (-0.635) \delta \eta_\phi^2 \dots (55)$$

El extender la teoría después del punto  $(\eta_\phi, s_\phi)$  sirve para corregir el radio de la descarga comparado con el radio del tubo. Para poder encontrar el espesor de la cáscara se hacen las siguientes simplificaciones:

- Reemplazar  $\nabla^2 V$  por  $\frac{d^2 V}{dr^2}$  por la misma razón que en (51)
- Hacer cero la integral en (6)
- Despreciar el término de la carga electrónica cuando lo sea.

En cuanto a las simplificaciones en b) para los casos de generación uniforme de iones,  $N_2 = \epsilon N_e$ , La contribución de la cáscara en la generación de iones es despreciable ó sea que el valor de la densidad de corriente iónica es constante e igual a su valor en  $\phi$ .

Siguiendo los mismos pasos que cuando se encontró  $\bar{\eta}_0$ , ecuación (48) se obtiene en este caso:

$$\bar{\eta}_\phi = s_0^2 h_0^2 \exp(2 \eta_\phi) \dots (56 a)$$

$$\bar{n}_0 = s_0^2 h_0^2 \exp(2\eta_\phi) \dots (56b)$$

$$\bar{n}_0 = \bar{n}_\phi + \epsilon \cdot s_0^2 h_0^2 \exp(2\eta_\phi) \delta\eta_\phi$$

$$\bar{n}_0 = \bar{n}_\phi + 1.47 \delta\eta_\phi \dots (57)$$

La densidad de carga espacial de iones en la cáscara es

$$\Gamma_c^+ = \left( \frac{m^+}{2kT_e \eta_c} \right)^{1/2} \cdot J_p^+$$

$$\text{donde } \eta_c = \eta - \eta_\phi + \bar{\eta}_\phi$$

$$\text{pero } J_p^+ = s_0 h_0 e N_0 \left( \frac{2kT_e}{(m^+)^{1/2}} \right)^{1/2}$$

$$\text{entonces } \Gamma_c^+ = e N_0 s_0 h_0 \eta_c^{1/2}$$

y usando ésta expresión en lugar de la integral en la ecuación (4) se obtiene:

$$\frac{d^2 V}{dr^2} - 4\pi N_0 e^{-\eta} + 4\pi e N_0 s_0 h_0 \eta_c^{-1/2} = 0$$

además sustituyendo el valor de  $A$  se reduce a la ecuación siguiente

$$A \frac{d^2 \eta}{ds^2} + e^{-\eta} - s_0 h_0 \eta_c^{-1/2} = 0 \dots (58)$$

Haciendo un cambio de variable de  $s = \beta r$  a  $\xi$  definida con las ecuaciones siguientes:

$$d\xi = dr \dots (59)$$

$$J_p^+ = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \left( \frac{e}{m^+} \right)^{1/2} W_e^{3/2} / x_p^2 \dots (60)$$

$$W_e = kT_e = \frac{I_0}{11600} \dots (61)$$

se encuentra  $\frac{A}{ds^2}$  de la manera siguiente:

$$ds^2 = \beta^2 dr^2 = \beta^2 x_p^2 d\xi^2$$

$$\therefore \frac{A}{ds^2} = \frac{[h_0 s_0^3 (2kT_0)^{3/2}]}{x_p^2 d\xi^2 \beta^2}$$

simplificando y usando la relacion  $R/s_0 = 1/\beta$  se tiene

$$\frac{A}{ds^2} = \frac{9 h_0 s_0^3}{4 R^2 \beta^2 d\xi^2} \dots (62a)$$

Ahora se puede sustituir (62a) en la ecuación (4) modificada, obteniéndose:

$$\frac{9 h_0 s_0^3}{4 R^2 \beta^2} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \exp(-\eta) - s_0 h_0 \eta_c^{-1/2} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{4}{9} \left( \eta_c^{-1/2} - \frac{e^{-\eta}}{h_0 s_0} \right) \dots (62b)$$

Integrando una vez se encuentra

$$\left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 - \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2_{\phi} = \frac{16}{9} \left\{ \eta_c^{1/2} - \bar{\eta}_\phi^{1/2} - \frac{(1 - e^{-\eta_c + \bar{\eta}_\phi})}{2 h_0 s_0} \right\} \dots (63)$$

ó sea que:

$$\left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2_{\phi} = \left( \frac{4 \exp(\eta_c - \eta)}{9 s_0 h_0} \right) \phi \delta \eta_{\phi}$$

Haciendo la simplificación  $\eta_c \eta_{\phi} - \eta_0 - \bar{\eta}_0$

y usando la ecuación  $\bar{\eta}_0 = h_0^2 s_0^2 \exp(2\eta_0)$

la expresión diferencial cambia a:

$$\left( \frac{d\eta}{d\xi} \right)^2_{\phi} = \frac{4}{9} \frac{\phi \delta \eta_{\phi}}{\bar{\eta}_0^{1/2}} = \frac{16}{9} \left[ \eta_c^{1/2} - \bar{\eta}_0^{1/2} - \frac{(1 - e^{-\eta_c + \bar{\eta}_0})}{2 \bar{\eta}_0^{1/2}} \right] \dots (64)$$

cuando  $\eta = \eta_0$  entonces el término de la derecha se hace cero.

Después integrando en 3 etapas:

i) Desarrollo en serie de Taylor en  $\eta_c = \bar{\eta}_0$  da:

$$\xi = \frac{3}{2} \bar{\eta}_0^{-3/4} \left( \bar{\eta}_0 - \frac{1}{2} \right)^{-1/2} \left\{ \ln \frac{\eta_c - \bar{\eta}_0}{\bar{\eta}_0} - \frac{1}{2} \ln \frac{\phi \delta \eta_{\phi}}{4 \bar{\eta}_0 \left( \bar{\eta}_0 - \frac{1}{2} \right)} \right\}$$

en el intervalo  $\bar{\eta}_0 < \eta_c \leq 2\bar{\eta}_0$

Para el caso de camino libre medio  $\gg R$  y generación uniforme de iones

$$\xi \Big|_{\eta_c = 2\bar{\eta}_0} = -0.449 - 1.23 \ln(\phi \delta \eta_\phi)$$

ii) Haciendo cuadratura de — (64) y despreciando el 2o. sumando de ella se obtiene para el mismo caso que en i)

$$\xi - \xi \Big|_{\substack{\eta_c = 1.472 \\ = 0 \\ 1.472}} \quad \begin{array}{cc} 2.944 & 4.416 \\ 2.82 & 4.40 \end{array}$$

en el intervalo  $2\bar{\eta}_0 \leq \eta_c \leq 6\bar{\eta}_0$

iii) Integración de (64) despreciando la exponencial:

$$\xi = (\eta_c^{1/2} + 2.88) (\eta_c^{1/2} - 1.44) - 0.1 - 1.23 \ln(\phi \delta \eta_\phi) \quad \dots (65)$$

$\eta_c > 6\bar{\eta}_0$ ;  $\xi$  se encuentra de s.

Usando (62 a) y poniendo  $P = \frac{A s}{s_0}$  se encuentra:

$$P = \frac{2}{3} \left( \frac{A}{s_0 s_p} \right)^{1/2} \xi_p \dots (66)$$

donde  $\xi_p$  es el espesor de la cáscara en una pared aislante.

Para el mismo caso de i):

$$P = 1.662 A^{1/2} \xi_p \quad \dots (67)$$

donde  $P$  es la fracción del radio del tubo ocupado por la cáscara

Enseguida se muestran las tablas para las ecuaciones - del plasma y en ellas se ha resumido indicando con una  $G$  si el camino libre medio es  $\gg R$ , con una  $P$  si es  $\ll R$  y con una  $M$  si tiene un valor  $\simeq R$ ; además se indican las generaciones uniforme con la letra  $\epsilon$  y la constante con la letra  $\kappa$ .

TABLA I.- Soluciones del plasma para el caso a) Ecuación del plasma:  $s = \eta (1 + g_1 \eta + g_2 \eta^2 + \dots)$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \frac{e(m^+)^{1/2}}{(2kT_e)}$

Constante	Caso: GE
$g_1$	0.20
$g_2$	0.26026
$g_3$	0.00648941
$g_4$	0.0019840
$g_5$	0.0 <sub>3</sub> 6794
$g_6$	0.0 <sub>3</sub> 253
$g_7$	0.0 <sub>3</sub> 10
$\eta_0$	1.155
$h_0$	0.3500
$s_0$	0.7722

TABLA II.- Soluciones del plasma para el caso b) Ecuación del plasma  $s = \eta (1 + g_1 \eta + g_2 \eta^2 + \dots)$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \frac{K}{N_0} \left( \frac{m^+}{2kT_e} \right)^{1/2}$

Constante	Caso: GK
$g_1$	0.600000
$g_2$	0.238182
$g_3$	0.068573
$g_4$	0.015303
$g_5$	0.002721
$g_6$	0.0 <sub>3</sub> 4242
$g_7$	0.0 <sub>4</sub> 56
$g_8$	0.0 <sub>5</sub> 65
$s_0$	0.5828
$\eta_0$	1.0542
$h_0$	0.5000

TABLA III: Soluciones del plasma para el caso c)

i) Ecuación del plasma:  $s^2 = 4(1 - \exp(-\eta))$ ,  $q = 0.895 \cdot \lambda_0 (k T_e m^+)^{-1/2}$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \left( \frac{k}{N_0 q k T_e} \right)^{1/2}$

Constante	Caso PK
$s_0$	2.0
$\eta_0$	$\infty$
$h_0$	0.50

ii) Ecuación del plasma:  $s^3 = \frac{3}{8}(1 - \exp(-\eta \cdot 2))$ ,  $q' = 1.2 \left( \frac{\lambda^+}{m^+} \right)^{1/2}$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \left( \frac{k^2}{N_0^2 q'^2 k T_e} \right)^{1/2}$

Constante	Caso MK
$s_0$	1.816
$\eta_0$	$\infty$
$h_0$	0.5

TABLA IV: Soluciones del plasma para el caso d)

i)  $q = 0.895 \lambda^+ (k T_e m^+)^{-1/2}$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \left( \frac{\epsilon}{q k T_e} \right)^{1/2}$

Ecuación del plasma:  $\exp(-\eta) = J_0(s)$

Constante	Caso P $\epsilon$
$s_0$	2.405
$\eta_0$	$\infty$
$h_0$	0.2159

ii)  $q' = 1.2 \left( \frac{\lambda^+}{m^+} \right)^{1/2}$ ,  $\beta = \frac{s}{r} = \left( \frac{\epsilon^2}{q'^2 k T_e} \right)^{1/2}$

Ecuación del plasma  $\exp(-\eta) = 1 - \frac{1}{12}s^2 - 0.036944s^4 - \dots$

Constante	Caso M $\epsilon$
$s_0$	2.154
$\eta_0$	$\infty$
$h_0$	...

con  $0.036944 \approx 0.0006944$ .