

APLICACION DE LA TEORIA DE GRUPOS AL CALCULO DE NIVELES  
DE ENERGIA DE NUCLEOS NON-NON EN LA CAPA 2s-1d

JUSTINO PINEDA LARIOS

MANUEL BERRONDO DEL VALLE

México, D. F.

INSTITUTO DE FISICA



BIBLIOTECA  
JUAN B. DE OYARZABAL

1966



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A nuestros padres

Al Dr. Marcos Moshinsky

A nuestros hermanos

Deseamos hacer patente nuestros más sincero agradecimiento al Dr. Marcos Moshinsky quien nos guió y dirigió a lo largo de este trabajo.

Agradecemos asimismo la colaboración de los Dres. Jorge Flores y Pier A. Mello y las correcciones y acertados comentarios del Dr. Manuel de Llano, así como la ayuda del Físico Elpidio Chacón y el interés prestado por el Físico Mario E. Fosado en el seminario en que colaboró con nosotros.

Queremos manifestar también nuestro agradecimiento al Centro de Cálculo Electrónico de la U. N. A. M. y al Centro Nacional de Cálculo del I. P. N. por habernos facilitado las instalaciones de que disponen.

Por último, queremos agradecer a la Comisión Nacional de Energía Nuclear la ayuda económica que nos brindó durante la elaboración del presente trabajo.

### Nota Aclaratoria

Con el objeto de utilizar términos castellanos, hasta donde sea posible, se han introducido los términos idio-valor, espín e iso-espín, en vez de las expresiones eigen-value, spin e isospin, utilizados generalmente en la literatura.

Además, debido al repetido uso que se hace de las expresiones 'representación irreducible' y 'espín-órbita', se utilizan las abreviaturas R. I. y S. O. respectivamente.

## I N T R O D U C C I O N

Con el objeto de dar una explicación satisfactoria del núcleo atómico, se han propuesto varios modelos entre los que destacan el modelo de la gota de líquido y el modelo de capas. El modelo de la gota de líquido propuesto por Bohr en 1937 tiene éxito al tratar propiedades nucleares en las que se forma un núcleo compuesto y al estudiar la escisión nuclear. Por otro lado, el modelo de capas, que fue propuesto por Elsassser en 1934 y desarrollado por Maria G. Mayer, Jensen, Haxel y Suess en 1948 en analogía con el concepto de capas electrónicas del átomo, resumió el hecho observado experimentalmente de que núcleos con los ahora llamados números mágicos de protones y neutrones forman configuraciones muy estables.

Este modelo, además, ha podido explicar el valor del impulso angular del estado base de la mayoría de los núcleos. Sin embargo, el hecho de despreciar los efectos de correlación de fuerzas entre nucleones lo limita considerablemente. Esto ha conducido al hecho de usar varios tipos de interacción entre nucleones representados generalmente por potenciales de tipo central entre los que destacan el potencial de Yukawa y el Gaussiano. En trabajos recientes se ha encontrado conveniente substituir estos potenciales

por una interacción modelo que consiste en una combinación lineal de fuerzas de apareamiento orbital entre nucleones y fuerzas de interacción cuadrupolo-cuadrupolo. Se ha encontrado que una fuerza de interacción cuadrupolo-cuadrupolo,<sup>1</sup> puede substituir al potencial Gaussiano para largo alcance mientras que una fuerza de apareamiento orbital se aproxima a un potencial Gaussiano a corto alcance; además, al comparar entre niveles de energía dados por una interacción Gaussiana y una interacción modelo se tiene un acuerdo muy satisfactorio.<sup>4</sup>

Este modelo tiene, por otro lado, la ventaja de presentar simetrías aprovechables, desde el punto de vista de la teoría de Grupos, como se verá más adelante.

Es interesante hacer notar que un hamiltoniano que toma en cuenta esta interacción modelo, sintetiza los modelos de capas y colectivo, ya que los elementos de matriz de la interacción modelo se calculan dentro del marco de estados del modelo de capas y a la vez, la componente cuadrupolo-cuadrupolo de esta interacción proporciona un espectro de banda rotacional<sup>2</sup>, característico de movimientos cooperativos nucleares del modelo colectivo de Bohr y Mottelson.

Se ha aplicado esta técnica en problemas de dos, tres y cuatro partículas en la capa 2s-1d del oscilador armónico<sup>4,5,6</sup>,

obteniéndose resultados muy satisfactorios. Esta tesis está encaminada hacia la sistematización de los cálculos en base a este modelo y la aplicación del mismo a todos los núcleos con un número impar de protones y un número impar de neutrones en la capa  $2s-1d$  del oscilador armónico.

## Primera Parte

C A P I T U L O I

1. La Interacción Modelo

En el problema de muchos cuerpos que se va a tratar se considera un hamiltoniano:

$$H = H_{osc} + H_{int}$$

donde  $H_{osc}$  es el hamiltoniano del oscilador armónico, y donde se supone que todos los nucleones están en el mismo nivel del oscilador tal como lo requiere el modelo de capas y  $H_{int}$  incluye interacciones de una y dos partículas a saber:

$H_{int} = -V_0(xQ^2 + yP + zW_{s.o.})$ , donde  $x + y + z = 1$  y  $0 \leq x, y, z \leq 1$ ;  $x, y, z$  son parámetros.

$Q^2$  es una interacción de cuadrupolo-cuadrupolo,  $P$  es una interacción de apareamiento orbital entre pares de nucleones y  $W_{s.o.}$  es una interacción espín-orbital del tipo  $\sum_i \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{s}_i$ .

Se expresarán los operadores de la interacción en lenguaje de segunda cuantización, usando para este efecto operadores de creación  $b_i^\dagger$ , y de aniquilación  $b_i$  de Fermi, que cumplen las reglas de anticonmutación;

$$\{b_f^+, b_{f'}^+\} = \{b_f^\dagger, b_{f'}^\dagger\} = 0, \quad y \quad \{b_f^+, b_{f'}^\dagger\} = \delta_{ff'}$$

donde  $\rho$  representa el conjunto completo de números cuánticos que caracterizan el estado de una partícula dentro de una sola capa del oscilador armónico, la capa 2s-1d para este trabajo.

## 2. Fuerza de Apareamiento.

Se define el operador de apareamiento  $P_{ij}$  entre dos partículas,  $i, j$  en una sola capa, de número cuántico total  $\nu$ , con impulsos angulares  $l$  y  $l'$  respectivamente y acopladas a un impulso angular total  $\Lambda = 0$  y proyección  $M_\Lambda = 0$ , como:

$$\langle \nu l, \nu l', \Lambda M_\Lambda | P_{ij} | \nu l', \nu l, \Lambda M_\Lambda \rangle = \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \int_{M_{\Lambda_0}}^{\Lambda_0}$$

En el caso de  $n$  partículas se tendrá:

$P = \sum_{i < j} P_{ij}$  ; que en lenguaje de segunda cuantización está dado por

$$P = \frac{1}{2} \sum_{l l'} \sum_{s, s'} (-1)^{m+l} b_{\nu l - m s}^+ b_{\nu l m s}^+ b_{\nu l' m' s'} b_{\nu l' - m' s'} \quad (2.1)$$

donde  $(\nu l m)$ , caracterizan la parte orbital y  $s = \pm 1/2$ , la parte de espín e isoespín para un estado de una partícula.

Si definimos  $b_{l m}^{\nu} = \sum_s b_{\nu l m s}^+$ , el operador de

apareamiento se reduce a

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\substack{l, l', \\ m, m'}} (-1)^{m+m'} \begin{matrix} l' m' \\ l m \end{matrix} \begin{matrix} l' -m' \\ l -m \end{matrix} = \frac{1}{2} \eta$$

; donde  $\eta$  es el operador de número

ro:  $\eta = \sum_{lm} Q_{lm}^{lm}$ , cuyo idio-valor es el número de partículas  $n$ .

Como se mencionó en la introducción, se tratará el problema de  $n$  nucleones en la capa  $2s-1d$  del oscilador armónico, en cuyo caso  $\nu = 2$  y  $l = 0, 2$ .

Si ahora definimos los quince operadores linealmente independientes,

$$\Lambda_{lm}^{l'm'} \equiv \begin{matrix} l' m' \\ l m \end{matrix} = (-1)^{m+m'} \begin{matrix} l' -m' \\ l -m \end{matrix}$$

; es fácil ver que

$$P = \frac{1}{2} Y_2(U_6) - \frac{1}{4} Y_2(R_6) - \frac{1}{2} \eta$$

; donde

$$Y_2(U_6) \equiv \sum_{\substack{l, m \\ l', m'}} \begin{matrix} l' m' \\ l m \end{matrix} \begin{matrix} l m \\ l' m' \end{matrix} \quad \text{y} \quad Y_2(R_6) \equiv \sum_{\substack{l, m \\ l', m'}} \Lambda_{lm}^{l'm'} \Lambda_{l'm'}^{lm}$$

son los operadores de Casimir<sup>8</sup> de segundo orden de los grupos  $U_6$  y  $R_6$  respectivamente.  $U_6$  y  $R_6$  son los grupos de transformaciones unitarias y rotaciones puras respectivamente, en el espacio orbital de una sola partícula, que en este caso es de  $\sum_{l=0,2} (2l+1) = 6$  dimensiones. Esto se debe a que  $\begin{matrix} l' m' \\ l m \end{matrix}$  y  $\Lambda_{lm}^{l'm'}$  son, en el orden correspondiente, los generadores de  $U_6$  y  $R_6$ .

Ya que  $G_2(R_6)$  y  $\mathbb{H}$  son diagonales en los estados caracterizados por los R.I. de  $R_6$  y  $G_2(U_6)$  es diagonal respecto a estados caracterizados por R.I. de  $U_6$ , se infiere que  $\mathbb{H}$  será diagonal en estados caracterizados por R.I. de la cadena de grupos  $U_6 \supset R_6$

### 3. Fuerza de Cuadrupolo-Cuadrupolo

Considérese un potencial Gaussiano de la forma

$$V(r_{ij}) = -V_0 \exp(-r_{ij}^2/a^2)$$

Si se desarrolla esta función en serie de potencias, para  $a$  grande, y se toman en cuenta sólo términos hasta de cuarto orden, se observa que, para estados de una capa del oscilador armónico, la única porción que sobrevive como interacción entre pares de partículas se reduce al término  $^1$  :

$$(2V_0/a^2) | (r_i \cdot r_j)^2 - \frac{1}{3} r_i^2 r_j^2 | \quad \text{que en términos de poli}$$

nomios de Legendre es lo mismo que:

$$- \frac{4V_0}{3 \times 4} r_i^2 r_j^2 P_2(\cos \Theta_{ij}) = - \frac{4V_0}{3 \times 4} \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^2 (-1)^m r_i^2 Y_{2,-m}(i) r_j^2 Y_{2,m}(j) \dots (6.1)$$

Por otro lado, se pueden definir los operadores

$$C_q^{q'} = a_q^+ a_q \quad (q, q' = 1, 0, -1)$$

donde  $a_q^+$  y  $a_q$  son los operadores de creación y aniquilación de -

bosones del oscilador armónico, que obedecen las reglas usuales de conmutación y que se transforman como las componentes de un tensor mixto con una métrica definida por  $g_{qq'} = (-1)^q \delta_{q,q'}$ .

Es fácil demostrar que

$$[C_{\delta}^{\delta'}, C_{\delta'}^{\bar{\delta}}] = C_{\delta}^{\bar{\delta}} \delta_{\delta'}^{\delta} - C_{\delta}^{\delta'} \delta_{\delta}^{\bar{\delta}}$$

y que

$$(C_{\delta}^{\delta'})^{\dagger} = C_{\delta'}^{\bar{\delta}}$$

lo cual implica<sup>10</sup> que estos operadores son los generadores infinitesimales de un grupo de transformaciones unitarias, tri-dimensional  $U_3$ , el grupo de simetrías del oscilador armónico.

En lenguaje de segunda cuantización, se asocia a  $C_{\delta}^{\delta'}$  el operador<sup>8</sup>

$$C_{\delta}^{\delta'} \equiv \sum_{\mu, \nu} \langle \mu | C_{\delta}^{\delta'} | \nu \rangle \hat{c}_{\mu}^{\delta'} \quad \text{donde} \quad \hat{c}_{\mu}^{\delta'} \equiv \sum_s b_{\mu s}^{\dagger} b_{\nu s}^{\delta'}$$

la  $\mu$  representa el conjunto completo de números cuánticos que caracterizan el estado orbital de una partícula, por ejemplo  $(\nu l m)$ , en el mismo sentido que en (2.1) y la  $s$  lo correspondiente para el estado de espín-isoespín, es decir  $(\sigma \tau)$  con  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$  y  $\tau = \pm \frac{1}{2}$ .

Para la capa 2s-1d se le asignan a  $\mu$  los valores 1, 2, ..., 6.

Los 36 operadores  $\hat{c}_{\mu}^{\delta'}$  son generadores<sup>10</sup> del grupo  $U_6$

ya mencionado, el cual contiene como subgrupo el grupo  $U_3$  generado por los operadores  $C_q^g$

Desde el punto de vista de rotaciones,  $C_q^g$  son los nueve componentes de un tensor cartesiano mixto de segundo rango, que pueden re-expresarse como cinco componentes de un tensor esférico simétrico de rango 2, tres componentes de un tensor esférico antisimétrico y un escalar, usando los coeficientes de Clebsch-Gordan <sup>7</sup>, a saber,

$$Q_m \equiv \sum_{g', g''=-1}^1 (-1)^{g''-1} \langle 11 g' - g'' | 2m \rangle C_{g'}^{g''} ; (m = -2, \dots, 2) \dots (3.2)$$

$$L_g \equiv \sqrt{2} \sum_{g', g''=-1}^1 (-1)^{g''-1} \langle 11 g' - g'' | 1g \rangle C_{g'}^{g''} ; (g = -1, 0, 1) \dots (3.3)$$

$$H_0 \equiv \sum_{g=-1}^1 C_g^g \dots (3.4)$$

Por otro lado, el operador cuadrupolar para una partícula es

$$Q_m = \frac{3e\pi}{5} r^2 Y_{2m}(\theta, \varphi)$$

cuyos elementos de matriz dentro de una sola capa del oscilador armónico serían iguales a los de

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\pi}{5}} \left[ r^+ Y_{2,2}(\theta, \varphi) + r^+ Y_{2,2}(\theta, \varphi) + r^+ Y_{2,2}(\theta, \varphi) \dots \right] \dots (3.5)$$

$$= - \sum_{\delta' \delta''} \langle 1 | \delta' \delta'' | 2m \rangle (x_{\delta'} + i p_{\delta''}) = \sum_{\delta' \delta''} (-1)^{\delta''} \langle 1 | \delta' - \delta'' | 2m \rangle C_{\delta'}^{\delta''}$$

en vista de que

$$a_{\delta'}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\delta'} - i p_{\delta'}) \quad \text{y} \quad a_{\delta'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_{\delta'} + i p_{\delta'})$$

Este último operador (3.5) en segunda cuantización será simplemente el operador  $\hat{Q}_m$  de (3.2). Una interacción entre momentos cuadrupolares de dos partículas i, j será:

$$Q_{ij}^2 = \sum_m (-1)^m Q_{2m}(i) Q_{-2m}(j) \quad \text{ó sea,}$$

$$Q_{ij}^2 = \frac{3+2\pi}{5} x_i^2 x_j^2 \sum_m (-1)^m Y_{2m}(i) Y_{2-m}(j) = P x_i^2 x_j^2 P_2(\cos \Theta_{ij}) \dots (3.6)$$

donde  $\Theta_{ij}$  es el ángulo que forman  $r_i$  y  $r_j$ .

Comparando (3.1) con (3.6), se observa que  $Q_{ij}^2$  se puede tomar como una aproximación del potencial Gaussiano  $V(r_{ij}) = -V_0 \exp(-r_{ij}^2/a^2)$  para  $a$  suficientemente grande (del orden del radio nuclear), o sea que  $Q_{ij}^2$  es un modelo de interacciones de largo alcance.

Además, puede verificarse que (3.3) es la expresión en segunda cuantización del operador de impulso angular

$$L_{\delta} = (\underline{r} \times \underline{p})_{\delta} = \sum_{\delta' \delta''} (-1)^{\delta''} \epsilon_{\delta' \delta'' \delta} C_{\delta'}^{\delta''} = \sqrt{2} \sum_{\delta' \delta''} (-1)^{\delta''} \langle 1 | \delta' - \delta'' | 1 \delta \rangle C_{\delta'}^{\delta''} \quad (3.7)$$

Se define ahora el operador de Casimir de segundo -

orden del grupo  $U_3$ , generado por los  $C_{ij}^q$  como:

$$Q_2(U_3) = \sum_{\beta\beta'} C_{\beta\beta'}^{\beta'} C_{\beta\beta'}^{\beta} = \frac{1}{2} K_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\beta} (U_{\beta}^{\beta} \int_{\beta} \int_{-\beta} + \sum_{\beta} (U_{\beta}^{\beta})^2 - 2 \dots$$

donde esto último es fácil de verificar a partir de las relaciones

(3.2), (3.3) y (3.4), es decir,

$$Q_2^2 = Q_2(U_3) \cdot \frac{1}{2} K^2 - \frac{1}{3} K_0^2$$

Se ha, pues, expresado la fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo  $Q^2$ , en segunda cuantización, como una suma de operadores de Casimir de  $U_3, R_3$ , y del operador  $K_0^2$ , los cuales son diagonales en una base para R.I. de la cadena de grupos  $U_3 \supset R_3$ .

El idio-valor del operador  $Q^2$  queda expresado en términos de la representación  $(h_1 h_2 h_3)$  de  $U_3$  y de la representación L de  $R_3$ , como<sup>8</sup>:

$$E_L^{(k_1, k_2)} = \frac{2}{3} (k_1 + k_2)^2 - 2 k_1 (k_2 - 1) - \frac{1}{2} L(L+1) \quad (3.8)$$

donde  $k_1 = h_1 \cdot h_3$  y  $k_2 = h_2 \cdot h_3$  especifican la representación de  $SU_3$ , el grupo unimodular unitario en tres dimensiones.

Resumiendo,

$$Q^2 |[f] \times (k_1, k_2) \otimes L M_L \rangle = E_L^{(k_1, k_2)} |[f] \times (k_1, k_2) \otimes L M_L \rangle,$$

donde [f] es una partición de Young de n partículas, o sea, la

R.I. de  $U_6$ ,  $(k_1, k_2)$  la correspondiente de  $SU_3$ , L de  $R_3$  y  $M_L$  de  $R_2$

y  $\omega$  son números cuánticos que distinguen entre las R. I. repetidas de  $R_3$  en  $SU_3$  y de  $SU_3$  en  $U_6$  respectivamente.

Queda claro del idio-valor de  $Q^2$  que para cada representación  $(k_1 k_2)$  de  $SU_3$ , el espectro tendrá el carácter rotacional colectivo  $L(L+1)$ , característico del modelo colectivo de Bohr y Mottelson.

Debe observarse además, que el operador  $Q^2$  no es la traducción a segunda cuantización del operador  $Q^2$ , sino que es el producto escalar del operador de momento cuadrupolar en segunda cuantización  $Q_m^2$ , consigo mismo; en este caso, aparecen términos de auto-interacción que no aparecen en el esquema de primera cuantización, que introducen una pequeña corrección al hamiltoniano; sin embargo, si estos términos se restasen en la traducción de la interacción a segunda cuantización, ésta contendría un término adicional, en general no-diagonal con respecto a la cadena de grupos  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3$ , que rompería la simetría obtenida.

#### 4. Fuerzas de Intercambio

Tratando de explicar las características de saturación e incompresibilidad de las fuerzas nucleares, se propusieron las llamadas fuerzas de intercambio de Bartlett, Heisenberg, Majorana y Wigner.

Una interacción con intercambio, entre partículas

$i, j$ , es de la forma:

$$\sum_{i < j = 2}^n I_{ij} V(r_{ij}) \equiv \sum_{i < j = 2}^n (W + MP_{ij}^* - HP_{ij}^2 + EP_{ij}^{\sigma}) V(r_{ij})$$

en donde

$$P_{ij}^* = -\frac{1}{4} (1 + \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j) (1 + \bar{z}_i \cdot \bar{z}_j)$$

es la fuerza propuesta por Majorana,

$$P_{ij}^c = \frac{1}{2} (1 + \bar{z}_i \cdot \bar{z}_j) \quad \text{la propuesta por Heisenberg y}$$

$$P_{ij}^{\sigma} = \frac{1}{2} (1 + \bar{\sigma}_i \cdot \bar{\sigma}_j) \quad \text{por Bartlett, siendo } \sigma = 2S_i \text{ y}$$

$\bar{z}_i = 2\bar{t}_i$  los operadores de espín e iso-espín para una sola partícula  $i$ , cuyo componente  $z$  tiene idio-valores posibles 1 y -1.

Considerando el efecto de intercambio, un potencial central de interacción  $V_{12}$  entre pares de partículas se expresaría en segunda cuantización como:

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{f_1, f_2 \\ f'_1, f'_2}} \langle f_1, f_2 | I_{12} V_{12}(r_{12}) | f'_1, f'_2 \rangle \left\{ C_{f_1}^{f'_1} C_{f_2}^{f'_2} - C_{f_2}^{f'_1} C_{f_1}^{f'_2} \right\} \quad (4.1)$$

donde  $C_{\rho}^{\sigma} = b_{\rho}^{\dagger} b_{\rho}^{\sigma}$  son generadores <sup>10</sup> de un grupo  $U_{24}$  y  $\rho$  representa un estado caracterizado por  $(\mu s)$ , definidos anteriormente.

Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, es suficiente considerar un potencial  $V_{12}$  de largo alcance, a saber

$2^2$ , en este caso, puesto que  $I_{12}$  sólo depende del espín y del iso-espín y  $2^2$  de la parte orbital únicamente, y, además, como un potencial  $\sum_{\langle ij \rangle} I_{ij} V(r_{ij})$  a alcance infinito puede expresarse como una constante multiplicada por  $\sum_{\langle ij \rangle} I_{ij}$ , la expresión (4.1) se puede aproximar como:

$$\frac{1}{2} 2^2 \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s'_1, s'_2}} \langle s_1, s_2 | I_{12} | s'_1, s'_2 \rangle \left\{ C_{s_1}^{s'_1} C_{s_2}^{s'_2} - \delta_{s_1, s'_1} C_{s_2}^{s'_2} \right\}, \quad \text{donde}$$

$C_s^{s'} = \sum_{\mu} b_{\mu s}^+ b^{\mu s'}$  son los generadores<sup>10</sup> de  $U_4$ , el grupo de transformaciones unitarias en el espacio de espín-isoespín de cuatro dimensiones.

Debido al principio de exclusión de Pauli, las representaciones irreducibles de  $U_6$  y  $U_4$  deben ser conjugadas; aprovechando este hecho, Chacón y de Llano<sup>9</sup> encontraron que el operador de intercambio para largo alcance se puede expresar como:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} W \eta (\eta - 1) + \frac{1}{4} (G - H) \eta (\eta - 4) + BS^2 - HT^2 + \frac{1}{2} M [G_2(U_6) - 6\eta],$$

donde  $\eta$  es el operador de número,  $S^2$  y  $T^2$  los cuadrados de los operadores totales para  $n$  nucleones de espín e iso-espín respectivamente, y  $G_2(U_6)$  el operador de Casimir de segundo orden del grupo  $U_6$ . Puede verse fácilmente que  $\mathcal{J}$  es diagonal respecto a estados caracterizados por la cadena de grupos

$$U_4 \supset SU_2^{(\tau)} \times SU_2^{(\sigma)}, \quad \delta \text{ sea}$$

$$\downarrow |[\tilde{f}]_{\beta} S M_S T M_T \rangle = I | [f]_{\beta} S M_S T M_T \rangle,$$

donde  $[f]$  es la partici3n de Young conjugada de  $[f]$  y  $\beta$  es un n3mero cu3ntico que distingue entre multiplicidades del conjunto  $(S, T)$  contenidas en una R.I.  $[f]$ ; el idio-valor  $I$  ser3:

$$I = \frac{1}{2} W N(N-1) + \frac{1}{4} (B-H) N(N-4) + B S(S+1) - H T(T+1) + \frac{1}{2} M \sum_{\alpha=1}^6 f_{\alpha} (f_{\alpha} - 2\alpha + 1) \quad (4.2)$$

donde  $\{f_1 f_2 \dots f_6\} = [f]$  es la partici3n de Young de  $u_6$  correspondiente.

Para este trabajo, se usar3 una mezcla de Rosenfeld para la cual  $W = -0.13$ ,  $M = 0.93$ ,  $H = -0.26$  y  $B = 0.46$ .

### 5. Interacci3n Esp3n-Orbita.

La interacci3n esp3n3rbita del tipo part3cula 3nica (aislada) constituye la parte no central de la interacci3n modelo y est3 dada por:

$$W_{s.o.} = \sum_i \underline{l}_i \cdot \underline{s}_i$$

donde la  $\underline{l}_i$  y  $\underline{s}_i$  son el impulso angular y el esp3n intr3nseco de

la  $i$ -ésima partícula.

Pasando al lenguaje de segunda cuantización y expresando  $\underline{l}_i$  y  $\underline{s}_i$  en componentes esféricas, el acoplamiento S. O. queda como

$$W_{s_0}^r = \sum_{ff'} \langle f | \sum_{\delta} (-1)^{\delta} \{ \delta \ s_{-\delta} | f' \rangle C_f^{f'}$$

donde  $C_{\rho}^{\sigma}$  son los generadores<sup>10</sup> de un grupo unitario  $U_{4r}$ ,  $r$  es la degeneración de la capa y  $\rho = (\nu l m, \sigma r)$  representa los números cuánticos que caracterizan el estado de una sola partícula.

Hasta este momento la discusión del acoplamiento S. O. ha sido general. Para este caso se considerará la capa  $2s-1d$  del oscilador armónico. Si se asocia  $\mu$  con  $\nu l m$ ,  $\nu = 2$  y  $s$  con  $\sigma r$ , se puede definir el operador

$$C_{qs}^{q's'} = \sum_{\mu} \langle \mu | C_q^{q'} | \mu' \rangle C_{\mu s}^{\mu' s'}, \quad (q = 1, 0, -1)$$

donde  $C_q^q$  son los operadores del oscilador armónico definidos en la sección (3), y los  $C_{\mu s}^{\mu' s'}$  son los generadores del grupo unitario  $U_{24}$

En términos de estos nuevos operadores  $C_{qs}^{q's'}$  el operador de acoplamiento S. O. se reduce a<sup>4</sup>

$$W_{s_0}^r = \sum_{k'k''} \epsilon_{-k-k''k'} \sum_{\sigma\sigma'} \langle \sigma | s_{\delta} | \sigma' \rangle C_{\delta\sigma\sigma'}^{k'k''}$$

ya que, de la ecuación (3.7),

$$l_{\gamma} = \sum_{\delta \delta'} (-1)^{\delta'-1} \epsilon_{\gamma-\delta'\delta''} C_{\delta'}^{\delta''}$$

además, si se define

$$U[(21)_{\gamma}^{\delta'}; 1_{\delta''}] \equiv \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\tau} \langle \sigma' | \sigma_{\gamma}'' | \sigma' \rangle (C_{\delta''\tau\sigma}^{\delta'\tau\sigma} \cdot \frac{1}{\delta} C_{\delta}^{\delta'}) \sum_{\nu=1}^{-1} (C_{\nu\tau\sigma}^{\omega\nu\tau\sigma})$$

el operador de acoplamiento espín-órbita queda expresado en la forma siguiente:

$$W_{so}^{\wedge} = \sum_{\delta \delta' \delta''} \epsilon_{\gamma-\delta'\delta''} (-1)^{\delta'+\delta''} U[(21)_{\gamma}^{\delta'}; 1_{\delta''}] \quad (3.1)$$

El tensor  $U[(21)_{\gamma}^{\delta'}; 1_{\delta''}]$  se transforma<sup>8</sup> irreduciblemente bajo  $SU_3$ , como  $(k_1 k_2) = (21)$  donde  $q$  y  $q'$  determinan el renglón de esta representación, y como vector, en el espín, respecto a rotaciones, con  $q''$  como su proyección.

Se puede entonces aprovechar el teorema de Wigner - Eckart, para obtener los elementos de matriz respecto a estados caracterizados por las cadenas de grupos  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3$  y  $U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  en términos de coeficientes de Wigner de  $SU_2$  y  $SU_3$ . Sin embargo, para este análisis, se derivará un caso especial de esta fórmula en el siguiente capítulo.

#### 6. Las Aproximaciones del Problema.

Hasta ahora se han presentado a grandes rasgos las

componentes de la interacción modelo que se utilizarán para el cálculo específico.

Se ha visto que estados clasificados por la cadena de grupos  $U_6 \supset R_6 \supset R_3 \supset R_2$  son idio-estados del operador de apareamiento  $P$ , mientras que estados clasificados por la cadena  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3 \supset R_2$  son idio-estados para el operador de cuadrupolo-cuadrupolo  $Q^2$ . Es, pues, conveniente clasificar los estados en alguna de estas dos cadenas y calcular la matriz del hamiltoniano respecto a estos estados. Pero, aun cuando se simplifiquen los cálculos aprovechando estas simetrías, para más de cuatro partículas en la capa  $2s-1d$ , la cantidad de niveles de energía y por ende, la dimensión de la matriz es extraordinariamente grande. Es pues necesario llevar a cabo los cálculos en las diversas cadenas de grupos, efectuando la aproximación natural dentro de cada cadena que consiste en restringirse a las representaciones irreducibles más bajas en energía del grupo en cuestión, comparando al final los resultados obtenidos en cada una de ellas.

En este trabajo se efectúan los cálculos utilizando la cadena  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3 \supset R_2$  y se hace la aproximación de tomar aquellos estados de  $n$  nucleones, provenientes de la R. I. energéticamente más baja del grupo  $SU_3$ .

En resumen:

- i) Se utiliza el modelo de capas considerando solamente estados que surgen de una sola capa del oscilador armónico, la capa  $2s-1d$ .
- ii) De los estados de  $n$  nucleones, posibles según i), se tomarán sólo aquellos pertenecientes a la representación irreducible de  $U_6$  de más baja energía, es decir, la partición de Young más simétrica compatible con el valor de iso-espín  $T$ , más bajo del sistema de acuerdo con la regla de Hund aplicada a fuerzas nucleares que son predominantemente atractivas.
- iii) De estos estados, se toman únicamente los correspondientes a la representación irreducible de  $SU_3$  de energía más baja, según la ecuación (3.8), siguiendo la proposición de Elliott<sup>2,3</sup> de hacer esto como primera aproximación.
- iv) La interacción residual central se aproxima como una fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo, con o sin intercambio, despreciando la fuerza de apareamiento, cuyos elementos de matriz resultaron<sup>4</sup> relativamente pequeños para los núcleos  $F^{18}$  y  $F^{20}$ , ambos nonon.
- v) Se agrega a lo anterior una fuerza espín-orbital del tipo partícula-única.

Es por esto que se utiliza como interacción modelo

$-(\alpha \mathcal{L}^2 + \beta \mathcal{L}_{s.o.})$  siendo  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros que se determinarán con los niveles de energía empíricos, cuando sea factible,

calculada entre estados clasificados por las cadenas  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3$   
y  $U_4 \supset SU_2^{(\sigma)} \times SU_2^{(\tau)}$  designados por  $\downarrow [f](k_1 k_2) \omega L; [\tilde{f}] S, T; J$   
donde  $[f]$  es la partici3n de Young para  $U_6$ , m3s sim3trica,  $[\tilde{f}]$   
la partici3n conjugada correspondiente,  $(k_1 k_2)$  la R.I. de  $SU_3$   
de energ3a m3s baja, L, S, T y J son, para los n nucleones, el im-  
pulso angular orbital, el esp3n intr3nseco, el iso-esp3n y el impulso  
angular total, respectivamente y  $\omega$  es el n3mero cu3ntico que dis-  
tingue multiplicidades de L contenidas en la representaci3n  $(k_1 k_2)$ .

C A P I T U L O II

7. Los Elementos de Matriz de la Interacción Espín-Orbital en la Cadena  $U_6 \supset U_3 \supset R_3$ .

Como ya se mencionó anteriormente, en este trabajo sólo se tomará en cuenta la R.I. más baja en energía de  $SU_3$  contenida en la R.I. más simétrica de  $U_6$  compatible con el espín isotópico más bajo del núcleo. Puesto que la interacción  $2^2$  es diagonal en la cadena  $U_6 \supset U_3 \supset R_3$ , como ya se vio en la sección (3), sólo falta encontrar los elementos de matriz de la interacción espín-órbita entre estados clasificados por esta cadena y dentro de las restricciones arriba mencionadas, para tener completo el esquema de la interacción modelo que se va a utilizar.

Para este caso, llamando  $(h_{13}h_{23}h_{33})$  la R. I. de energía más baja de  $U_3$  y usando el teorema de Wigner-Eckart para el grupo  $SU_2^{(\sigma)}$ , se puede evaluar el tensor entre estados  $[[f] \alpha (h_{13} h_{23} h_{33}, h_{12} h_{22}, h_{11}), \beta S M_S T]$  como:

$$\langle [f] \alpha (h_{13} h_{23} h_{33}, h_{12} h_{22} h_{11}), S' M_S' T' | T_{11}^{(2)} | [f] \alpha (h_{13} h_{23} h_{33}, h_{12} h_{22} h_{11}), S M_S T \rangle$$

$$= [f] \alpha (h_{13} h_{23} h_{33}, h_{12} h_{22} h_{11}), S M_S T \rangle =$$

$$= \left\{ A \left\langle \begin{matrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} & h_{22} & h_{11} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \bar{c} & \bar{g}' \\ \bar{g} & \bar{g} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} & h_{22} & h_{11} \end{matrix} \right\rangle + B \left\langle \begin{matrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} & h_{22} & h_{11} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \bar{c} & \bar{g}' \\ \bar{g} & \bar{g} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h_{12} & h_{22} & h_{11} \end{matrix} \right\rangle \right\} \langle S' M_S' | S M_S \rangle \quad (7.1)$$

donde  $(h_{12} h_{22})$  y  $(h_{11})$  son R.I. de  $U_2$  y  $U_1$  respectivamente, contenidas en  $(h_{13} h_{23} h_{33})$  y, además, A y B son independientes de  $M_S^1$ ,  $M_S$ ;  $h_{12}^1 h_{22}^1 h_{11}^1$ ,  $h_{12} h_{22} h_{11}$ , es decir, de los renglones de las R.I. de  $SU_2^{(\sigma)}$  y de  $U_3$ . Los operadores de traza nula  $\bar{C}_q^{\alpha'}$  y  $\bar{C}_q^{\beta'}$ , independientes entre sí, se definen como:

$$\bar{C}_q^{\alpha'} = C_q^{\delta'} - \frac{1}{3} \sum_{\bar{q}} C_q^{\bar{\delta}} \quad \text{y} \quad \bar{C}_q^{\beta'} = \sum_{\bar{q}} C_q^{\bar{q}} C_{\bar{q}}^{\delta'} - \frac{1}{3} \sum_{\bar{q} \bar{q}'} C_q^{\bar{q}'} C_{\bar{q}}^{\delta'} \quad (7.2a) \quad (7.2b)$$

Se pueden encontrar dos ecuaciones lineales inhomogéneas en A y B, a partir de la expresión (7.1), si se substituyen los valores  $q = q' = 1, 0, -1$  y se restan dos a dos, obteniéndose así, operadores  $\{ \mathcal{H}[(21)_1^1; J_{\bar{q}''}] - \mathcal{H}[(21)_{-1}^1; J_{\bar{q}''}] \}$  y  $\{ \mathcal{H}[(21)_0^0; J_{\bar{q}''}] - \mathcal{H}[(21)_{-1}^1; J_{\bar{q}''}] \}$  en el miembro izquierdo de cada ecuación respectivamente; los elementos de matriz de estos operadores se pueden evaluar para el caso particular de la R.I. de máximo peso en  $U_3$ , es decir con  $h_{11} = h_{11}^1 = h_{12} = h_{12}^1 = h_{13}$ ,  $h_{22} = h_{22}^1 = h_{23}$ , y para máximas proyecciones de espín  $M_S = S$ ,  $M_S^1 = S^1$ , de modo que  $q'' = S^1 - S$ . Los valores de los coeficientes A y B se deducen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante.

Para pasar ahora, de estados clasificados por la cadena natural  $U_3 \supset U_2 \supset U_1$ , a la cadena de interés físico  $U_3 \supset R_3 \supset R_2$  con una R.I. de  $U_3$  fija, es necesario obtener los

paréntesis de transformación correspondientes, que no son otros sino los idio-vectores que diagonalizan la matriz

$$\left\| \left\langle \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h'_{12} & h'_{22} & \\ h''_{11} & & \end{array} \right| \mathcal{L}^{-2} \left| \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h'_{12} & h'_{22} & \\ h''_{11} & & \end{array} \right\rangle \right\|$$

la cual se calcula fácilmente, ya que de (3.3),

$$\mathcal{L}^{-2} = \sum_{\delta} (-1)^{\delta} \int_{\delta} \mathcal{L}^{-2} = 2 \sum_{\delta' \delta''} (-1)^{\delta} \langle 1 \delta' - \delta'' | 1 \delta \rangle \langle 1 \delta' - \delta'' | 1 - \delta \rangle C_{\delta}^{1 \delta'} C_{\delta}^{1 \delta''},$$

los elementos de matriz  $\left\langle \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h'_{12} & h'_{22} & \\ h''_{11} & & \end{array} \right| C_{\delta}^{1 \delta'} \left| \begin{array}{ccc} h_{13} & h_{23} & h_{33} \\ h'_{12} & h'_{22} & \\ h''_{11} & & \end{array} \right\rangle$

ya han sido calculados<sup>8,11,12</sup>

Con estas consideraciones y renumerando los índices

$q, q', q''$  de los generadores de  $U_3$ , que toman los valores (1,0,-1)

como (1, 2, 3) respectivamente y usando la R. I. de  $SU_3$  ( $k_1 k_2$ )

con  $k_1 = h_{13} - h_{33}$  y  $k_2 = h_{23} - h_{33}$ , con  $k_1 = q_1 - k_2$ .

$q_2 \geq 0$  y con  $M_L = h_{11} + h_{12} - h_{22} - h_{13} - h_{23} - h_{33}$  el idio-valor

de  $C_0 = C_1^1 - C_3^3$ , se encuentra que los elementos de matriz

$$\left\langle (k_1, k_2) \chi_1, \chi_2 \left| M_L' \right| \mathcal{L}^{-2} \left| (k_1, k_2) \chi_1, \chi_2 \right. M_L \right\rangle$$

son iguales a:

$$\begin{aligned}
& ((k_1, k_2) q_1^i q_2^j M_L^i | L^2 | (k_1, k_2) q_1 q_2 M_L) = \left[ M_L(M_L + i) \right. \\
& \quad + 2(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 + 1) \\
& \quad + \frac{2(k_1 - q_1)(q_1 - k_2 + 1)(q_1 + 2)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 1)}{(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)} \\
& \quad \left. + \frac{2(q_2 + 1)(k_2 - q_2)(k_1 - q_2 + 1)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)} \right] \delta_{q_1^i q_1} \delta_{q_2^j q_2} \delta_{M_L^i M_L} \\
& + 2 \sqrt{\frac{(k_1 - q_1 + 1)(k_1 - q_2 + 1)(q_1 - k_2)(k_2 - q_2)(q_1 + 1)(q_2 + 1)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L)}{(q_1 - q_2 - 1)(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)}} \\
& \quad \sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)} \delta_{q_1^i q_1 - 1} \delta_{q_2^j q_2 + 1} \delta_{M_L^i M_L} \\
& + 2 \sqrt{\frac{q_2(q_1 + 2)(k_1 - q_1)(k_1 - q_2 + 2)(q_1 - k_2 + 1)(k_2 - q_2 + 1)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 1)}{(q_1 - q_2 - 1)(q_1 - q_2 + 2)(q_1 - q_2 - 2)(q_1 - q_2 + 3)}} \\
& \quad \sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 - 1)} \delta_{q_1^i q_1 + 1} \delta_{q_2^j q_2 - 1} \delta_{M_L^i M_L} \\
& + 2 \sqrt{\frac{(q_2 + 1)(k_2 - q_2)(k_1 - q_2 + 1)(2q_1 - q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 1)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 - 1)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)}} \\
& \quad \sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)} \delta_{q_1^i q_1} \delta_{q_2^j q_2 + 1} \delta_{M_L^i M_L} \\
& + 2 \sqrt{\frac{(q_1 + 2)(q_1 - k_2 + 1)(k_1 - q_1)(2q_1 - q_2 - k_1 - k_2 - M_L - 1)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 2)}{(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)}} \\
& \quad \sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)} \delta_{q_1^i q_1 - 1} \delta_{q_2^j q_2} \delta_{M_L^i M_L} \\
& - 2 \sqrt{\frac{q_2(k_2 - q_2 - 1)(k_1 - q_2 + 2)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 + 1)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 + 2)}{(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)}} \\
& \quad \sqrt{(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L)} \delta_{q_1^i q_1} \delta_{q_2^j q_2 - 1} \delta_{M_L^i M_L} \\
& + 2 \sqrt{\frac{(q_1 + 1)(q_1 - k_2)(k_1 - q_1 - 1)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L - 1)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)}} \\
& \quad \sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2 - 1)} \delta_{q_1^i q_1 - 1} \delta_{q_2^j q_2} \delta_{M_L^i M_L}
\end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de (3.3) se puede verificar que

$$L_{\delta''} = - \sum_{\delta \delta'} (-1)^{\delta} \epsilon_{-\delta \delta' \delta''} \overline{C}_{\delta}^{\delta'} \quad ; \text{ se define además el operador}$$

$$K_{\delta''} = - \sum_{\delta \delta'} (-1)^{\delta} \epsilon_{-\delta \delta' \delta''} \overline{G}_{\delta}^{\delta'} \quad ; \text{ usando las reglas de conmutación de } C_q^{\delta} \text{ se obtiene que:}$$

$$[L_{\delta}, K_{\delta''}] = - \sum_{\delta'} (-1)^{\delta'} \epsilon_{\delta \delta' \delta''} K_{\delta'} \quad , \text{ lo cual demuestra que } K_{\delta''}$$

se transforma como un vector frente a rotaciones; aprovechando ahora el teorema de Wigner-Eckart respecto a  $R_3$  y la definición de los coeficientes de Racah, se tiene de (7.1) y de (5.1) que:

$$\langle [f](k, k_2) \omega' L' S', J M_J, T | W_{S, a} | [f](k, k_2) \omega L S, J M_J, T \rangle = \quad (7.4)$$

$$= (-1)^{L'+S-J} \sqrt{(2L'+1)(2S+1)} W(L L' S S', J J) \left\{ A \langle (k, k_2) \omega' L' || X || (k, k_2) \omega L \rangle + B \langle (k, k_2) \omega' L' || K || (k, k_2) \omega L \rangle \right\}$$

donde W es un coeficiente de Racah y, además, el elemento de matriz reducido del operador vectorial  $X_q$  igual a  $X_q$  ó a  $X_{-q}$  está definido por:

$$\langle (k, k_2) \omega' L' M_L' | X_q | (k, k_2) \omega L M_L \rangle = \langle (k, k_2) \omega' L' || X || (k, k_2) \omega L \rangle \langle L M_L q | L' M_L' \rangle$$

que se puede obtener tomando  $M_L' = L'$   $M_L = L$  y  $q = L' - L$ ; o sea que

$$\langle (k_1, k_2) \omega' L' \| \mathcal{K} \| (k_1, k_2) \omega L \rangle = \frac{\langle (k_1, k_2) \omega' L' L' | \mathcal{K}_0 | (k_1, k_2) \omega L L \rangle}{\langle L L L \quad L' L' L' L' \rangle} \hat{C}_{L L L} =$$

$$= \frac{\langle (k_1, k_2) \omega' L L | \mathcal{K}_0 | (k_1, k_2) \omega L L \rangle}{\langle L L L \quad L L L \rangle} \hat{C}_{L L L} = \sqrt{L(L+1)} \delta_{\omega \omega'} \hat{C}_{L L L}$$

y, además, si se escoge  $M_{L'} = M_L = 1$ , se obtendrá:

$$\langle (k_1, k_2) \omega' L' \| \mathcal{K} \| (k_1, k_2) \omega L \rangle = \frac{\langle (k_1, k_2) L' | \mathcal{K}_0 | (k_1, k_2) L L \rangle}{\langle L L L \quad L' L' \rangle} =$$

$$= \frac{1}{\langle L L L \quad L' L' \rangle} \sum_{\delta_1, \delta_2} \langle \omega' L' | \delta_1, \delta_2 \rangle \langle \delta_1, \delta_2 | \mathcal{K}_0 | \delta_1, \delta_2 \rangle \langle \delta_1, \delta_2 | \omega L \rangle,$$

siendo los coeficientes  $\langle q_1, q_2 | \omega L \rangle$  las componentes de los idio-vec-  
tores antes mencionados, que diagonalizan la matriz (7.3). Final-

mente, utilizando nuevamente los elementos de matriz de  $C_q^{q'}$

$$\text{se encuentra que: } \langle (k_1, k_2) q_1' q_2' M_L' | \mathcal{K}_0^{(1)} | (k_1, k_2) q_1 q_2 M_L \rangle = [M_L(q_1 + q_2 + 2)$$

$$- (k_1 + k_2 - 2q_1 - q_2 + 1)(k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)$$

$$- \frac{(k_1 - q_1)(q_1 - k_2 + 1)(q_1 + 2)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 1)}{(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)}$$

$$- \frac{(q_2 + 1)(k_2 - q_2)(k_1 - q_2 + 1)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)} ] \delta_{q_1' q_1} \delta_{q_2' q_2} \delta_{M_L' M_L}$$

$$\sqrt{\frac{(k_1 - q_1)(k_1 - q_1 + 1)(q_1 - k_2)(q_1 - k_2 + 1)(q_1 + 1)(q_1 + 2)(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L)}{(q_1 - q_2 - 1)(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)}}$$

$$\sqrt{(2q_1 + q_2 - k_1 - k_2 - M_L + 1)} \delta_{q_1' q_1 - 1} \delta_{q_2' q_2 + 1} \delta_{M_L' M_L}$$

$$\sqrt{\frac{q_2(q_2 + 1)(k_2 - q_2)(k_2 - q_2 + 1)(k_1 - q_2 + 1)(k_1 - q_2 + 2)(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)}{(q_1 - q_2)(q_1 - q_2 + 1)(q_1 - q_2 + 2)(q_1 - q_2 + 3)}}$$

$$\sqrt{(M_L + k_1 + k_2 - q_1 - 2q_2)} \delta_{q_1' q_1 - 1} \delta_{q_2' q_2 - 1} \delta_{M_L' M_L}$$

En resumen, se han expresado los elementos de matriz de  $U_{s.o.}$  para la R.I. de energía más baja de  $SU_3$  contenida en  $U_6$  en términos de fórmulas cerradas, y coeficientes A, B, fácilmente obtenibles.

### 8. Cálculo de los Coeficientes A y B.

A partir de las funciones de onda con las características mencionadas en la sección (7), se calculan los coeficientes A y B. Esta función se obtiene <sup>8</sup>, a partir de la partición de Young más simétrica compatible con el valor de iso-espín más bajo del núcleo, de la siguiente manera: se numeran los renglones de la partición con valores de  $\mu$  y las columnas con valores de  $s$ , y se asocia el operador de creación  $b_{\mu s}^+$  a cada bloque de la partición; se obtiene así un operador, que aplicado al estado de vacío da la función de onda requerida. Como ilustración, considérese el  $Na^{22}$ , con seis partículas en la capa  $2s-1d$  y con valor de iso-espín más bajo  $T = 0$ . La partición de  $U_6$  más simétrica  $[f]$ , será entonces <sup>15</sup>  $[420000] = [42]$ , y el diagrama de Young correspondiente será:

	s	1	2	3	4
$\mu$	1	$b_{11}^+$	$b_{12}^+$	$b_{13}^+$	$b_{14}^+$
	2	$b_{21}^+$	$b_{22}^+$		

, ó sea que la función de

onda que se busca será

$$\mathbb{P}_s |0\rangle \equiv \{ [4, 2] (10, 2) L = M_L = 10 ; \{ 2, 2, 1, 1 \} s=1 T=0 \rangle =$$

=  $b_{11}^+ b_{12}^+ b_{13}^+ b_{14}^+ b_{21}^+ b_{22}^+ |0\rangle$  donde  $|0\rangle$  denota el estado de vacío.

En caso que haya más valores de espín posibles compatibles con el valor de iso-espín y con la partición de  $U_4$ , es necesario obtener la función de onda correspondiente al resto de valores del espín  $P_S |0\rangle$ . Esto se logra aplicando repetidamente el operador  $B R_{-10} = \frac{1}{\sqrt{8}} (C_3^1 - C_4^2)$ , donde  $C_s^{\alpha}$  son los generadores del grupo de transformaciones  $U_4$  ya definidos.

Una vez obtenidas estas funciones de onda  $P_S |0\rangle$  se pueden evaluar los elementos de matriz

$$T_{\bar{q}\bar{q}'}^{qq'}(s', s) \equiv \langle [\bar{f}] s' T | \mathcal{T}_{\bar{q}\bar{q}'}^{qq'}(s', s) | [\bar{f}] s T \rangle, \text{ donde}$$

$$\mathcal{T}_{\bar{q}\bar{q}'}^{qq'}(s', s) \equiv \mathcal{T}[(\alpha, 1)_{\bar{q}}^q; |_{s', -s}] - \mathcal{T}[(\alpha, 1)_{\bar{q}'}^{q'}; |_{s', -s}]$$

Usando  $q = 1, 2$  y  $q' = 3$ , de la expresión (7.1) se tendrá:

$$T_{1,3}^{13}(s', s) = \sqrt{\frac{3}{4}} \langle s | s \ s' - s | s' s' \rangle \left\{ \langle 0 | P_3^+ | \bar{C}_1^1 - \bar{C}_2^2 | P_3 | 0 \rangle A(s', s) + \langle 0 | P_3^+ | \bar{C}_1^1 - \bar{C}_2^2 | P_3 | 0 \rangle B(s', s) \right\}$$

$$T_{2,3}^{23}(s', s) = \sqrt{\frac{3}{4}} \langle s | s \ s' - s | s' s' \rangle \left\{ \langle 0 | P_3^+ | \bar{C}_2^2 - \bar{C}_1^1 | P_3 | 0 \rangle A(s', s) + \langle 0 | P_3^+ | \bar{C}_2^2 - \bar{C}_1^1 | P_3 | 0 \rangle B(s', s) \right\}$$

... (8.1)

de donde se obtienen fácilmente los valores de  $A(S', S)$  y  $B(S', S)$ .

## Segunda Parte

## C A P I T U L O I

### 9. Programación para el Cálculo de la Interacción:

La técnica desarrollada en los capítulos anteriores permite llevar a cabo una programación de la misma para máquinas computadoras. Se ha llevado a cabo un programa que calcula de manera sistemática los elementos de matriz del acoplamiento espín-órbita,  $W_{s.o.}$  y de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo,  $Q^2$ , aprovechando las fórmulas cerradas (7.4) y (3.8), además hace una combinación lineal del tipo  $-(x Q^2 + (1-x) W_{s.o.})$  ó bien  $-[x Q^2 + (1-x) W_{s.o.}]$  donde  $J$  es la fuerza de intercambio. Variando los valores de  $x$  de 0 a 1 de una manera iterativa, diagonaliza la matriz combinación y grafica los idio-valores obtenidos para cada valor del impulso angular total  $J$ , en función del parámetro  $x$ , considerando que gráficas correspondientes al mismo valor de  $J$  no se cruzan.

Este programa fue elaborado en lenguaje FORTRAN II para las máquinas G-20 e IBM-709, graficándose los resultados en una computadora G-15, habiéndose llevado a cabo los cálculos en el CeNaC del I. P. N. y en el CCE de la U. N. A. M.

Los datos que requiere el programa son:

- i) La partición de  $SU_3$  correspondiente,  $(k_1 k_2)$ .

- ii) Los valores de espín intrínseco  $S$  posibles.
- iii) Los valores de los elementos de matriz  $T_{13}^{13}(s', s)$  y  $T_{23}^{23}(s', s)$  que aparecen en la ecuación (8. 1).
- iv) El valor del impulso angular total  $J$  del estado base experimentalmente obtenido.

Con los dos primeros datos se calculan los elementos de matriz (7. 3) y (7. 5) y los idio-valores de  $2^2$  dados por (3. 8). Estos cálculos incluyen la determinación de los coeficientes de Clebsch-Gordon<sup>13</sup> y Racah<sup>14</sup> involucrados.

El tercer dato se utiliza en el cálculo de los coeficientes  $A$  y  $B$  de la sección 8.

Se ha convenido en hacer las gráficas tomando como origen de energías el nivel más bajo de la  $J$  dada experimentalmente como estado base. Esto resulta muy práctico al analizar los resultados obtenidos; es por esto que se incluye el cuarto dato.

#### 10. Clasificación de los núcleos non-non.

En la siguiente hoja se da una tabla que contiene el número de partículas fuera de capa cerrada, la partición de  $U_6 \times U_4$  más simétrica posible, la R. I. de  $SU_3$  más baja<sup>7</sup> en energía contenida en la dada de  $U_6$ , las R. I. de  $R_3$  contenidas<sup>7</sup> en  $SU_3$ , el valor de iso-espín más bajo compatible con la partición de  $U_6$  dada, los valores de espín correspondientes y el impulso angular total correspondiente al estado base experimental.

TABLA

Núcleos	N	$U_6 \otimes U_4$	$SU_3$	$R_3$	$U_2^{(\tau)}$	$U_2^{(\sigma)}$	$J_{\text{exp}}$ (e. b.)
		$[f] \otimes [\bar{f}]$	$(k_1, k_2)$	L	T	S	
${}_{11}\text{Na}_{11}^{22}$	6	$[42] \otimes [2211]$	(10,2)	0, 2 <sup>2</sup> , 3, 4 <sup>2</sup> , 5, 6 <sup>2</sup> , 7, 8 <sup>2</sup> , 9, 10	0	1	3
${}_{11}\text{Na}_{13}^{24}$	8	$[431] \otimes [3221]$	(11,2)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4, 5 <sup>2</sup> , 6, 7 <sup>2</sup> , 8, 9 <sup>2</sup> , 10, 11	1	0,1	4
${}_{11}\text{Na}_{15}^{26}$	10	$[4321] \otimes [4321]$	(11,3)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8 <sup>2</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10, 11	2	0,1	(2,3)
${}_{13}\text{Al}_{11}^{24}$	8	$[431] \otimes [3221]$	(11,2)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4, 5 <sup>2</sup> , 6, 7 <sup>2</sup> , 8, 9 <sup>2</sup> , 10, 11	1	0,1	(4)
${}_{13}\text{Al}_{13}^{26}$	10	$[442] \otimes [3322]$	(12,2)	0, 2 <sup>2</sup> , 3, 4 <sup>2</sup> , 5, 6 <sup>2</sup> , 7, 8 <sup>2</sup> , 9, 10 <sup>2</sup> , 11, 12	0	1	5
${}_{13}\text{Al}_{15}^{28}$	12	$[4431] \otimes [4332]$	(12,3), (12,9)	1, 2, 3 <sup>2</sup> , 4 <sup>2</sup> , 5 <sup>2</sup> , 6 <sup>2</sup> , 7 <sup>2</sup> , 8 <sup>2</sup> , 9 <sup>2</sup> , 10 <sup>2</sup> , 11, 12	1	0,1	3
${}_{13}\text{Al}_{17}^{30}$	14	$[44321] \otimes [5432]$	(11,3)	Las mismas que para el $\text{Na}^{26}$	2	0,1	(2,3)
${}_{15}\text{P}_{13}^{28}$	12	$[4431] \otimes [4332]$	(12,3), (12,9)	Las mismas que para el $\text{Al}^{28}$	1	0,1	(3)
${}_{15}\text{P}_{15}^{30}$	14	$[4442] \otimes [4433]$	(12,2)	Las mismas que para el $\text{Al}^{26}$	0	1	1
${}_{15}\text{P}_{17}^{32}$	16	$[44431] \otimes [5443]$	(11,2)	Las mismas que para el $\text{Na}^{24}$	1	0,1	1
${}_{15}\text{P}_{19}^{34}$	18	$[444321] \otimes [6543]$	(8,1)	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	2	0,1	1
${}_{17}\text{Cl}_{15}^{32}$	16	$[44431] \otimes [5443]$	(11,2)	Las mismas que para el $\text{Al}^{24}$	1	0,1	(2)
${}_{17}\text{Cl}_{17}^{34}$	18	$[44442] \otimes [5544]$	(10,2)	Las mismas que para el $\text{Na}^{22}$	0	1	3

Nota. Todos los valores dados de  $J_{\text{exp}}$  (estada base experimental) son de Paridad positiva.

Por otro lado, tomando en cuenta que las fuerzas nucleares no dependen de la carga de los nucleones y además puesto que el efecto coulombiano puede considerarse despreciable, esta clasificación es simétrica ante el intercambio de protones y neutrones, es decir, no distingue entre un núcleo y su espejo.

Ahora, si se intercambian partículas por agujeros en este esquema, se cambia el signo de la matriz del acoplamiento espín-órbita apareciendo además una constante, irrelevante en este caso, ya que no afecta la separación relativa de los niveles de energía excitados, pero se conserva el signo de las interacciones entre pares de partículas:

Intercambiar partículas por agujeros equivale a intercambiar operadores de creación por de aniquilación y viceversa, de manera que en interacciones de una sola partícula se tendrá:

$$\hat{w}_{ag} = \sum_{ff'} \langle f | W | f' \rangle b_f^\dagger b_{f'}^+ = \sum_{ff'} \langle f | W | f' \rangle (\delta_{ff'}^f - b_{f'}^+ b_f) = \text{cte.} - \hat{w}_p$$

es decir  $\hat{w}_{ag} = - \hat{w}_p + \text{cte.}$

ya que  $\langle f | W | f' \rangle = \langle f' | W | f \rangle$  y  $\sum_f \langle f | W | f \rangle = \text{cte.}$

Para interacciones entre dos partículas:

$$\begin{aligned} \hat{w}_{ag} &= \sum_{\substack{f_1 f_2 \\ f_1' f_2'}} \langle f_1 f_2 | V_{12} | f_1' f_2' \rangle b_{f_1}^\dagger b_{f_2}^\dagger b_{f_2'}^+ b_{f_1'}^+ = \\ &= \sum_{\substack{f_1 f_2 \\ f_1' f_2'}} \langle f_1 f_2 | V_{12} | f_1' f_2' \rangle \delta_{f_1 f_1'} \delta_{f_2 f_2'} + \sum_{\substack{f_1 f_2 \\ f_1' f_2'}} \langle f_1 f_2 | V_{12} | f_1' f_2' \rangle b_{f_1}^\dagger b_{f_2}^\dagger b_{f_2'}^+ b_{f_1'}^+ = \text{cte.} + 2 \hat{w}_p \end{aligned}$$

$U_{ij} = U_{ji}$  etc. , usando las reglas de anticonmutación y el hecho de que  $V_{12}$  es simétrica.

## C A P I T U L O   I I

### 11. Análisis de los Resultados.

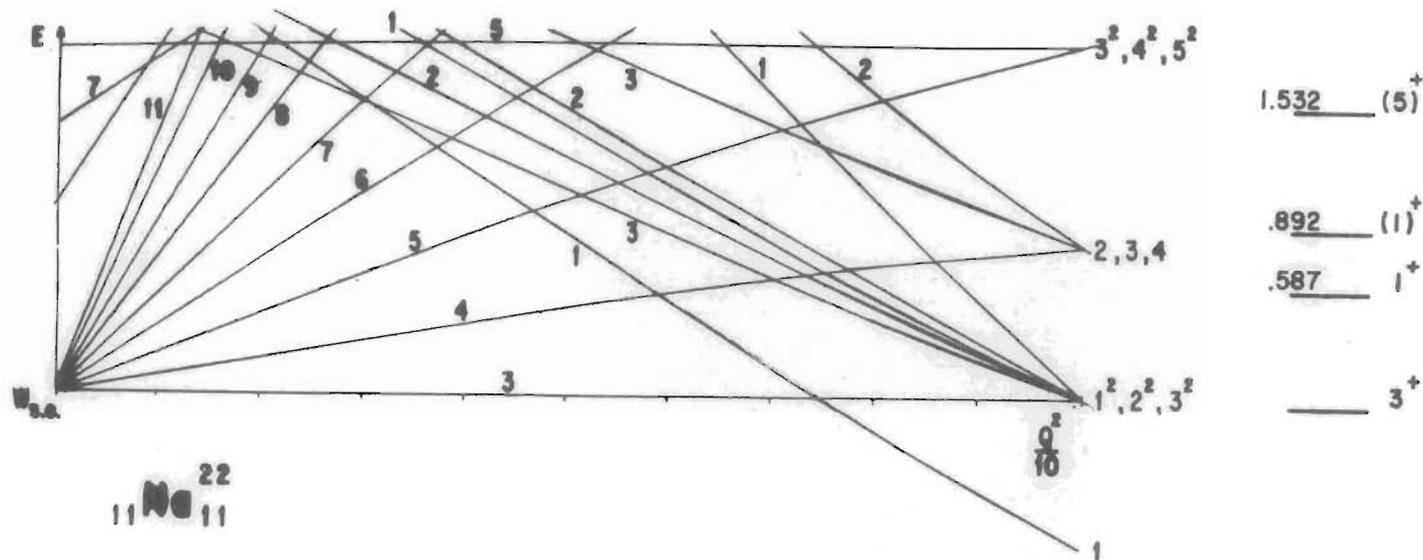


FIG. 1. En la gráfica se observa que el estado base 3 se obtiene para la mayor parte del rango del parámetro  $x$ , además se obtiene el primer nivel excitado 1. Los siguientes niveles no aparecen en el orden indicado, aunque experimentalmente son dudosos los que se tienen. Se espera obtener un mejor acuerdo tomando una interacción modelo completa, es decir, agregando fuerzas de corto alcance. Como en este caso sólo hay un valor posible de espín, una fuerza de intercambio no contribuiría más que como una constante que sólo afectaría la escala de la gráfica.

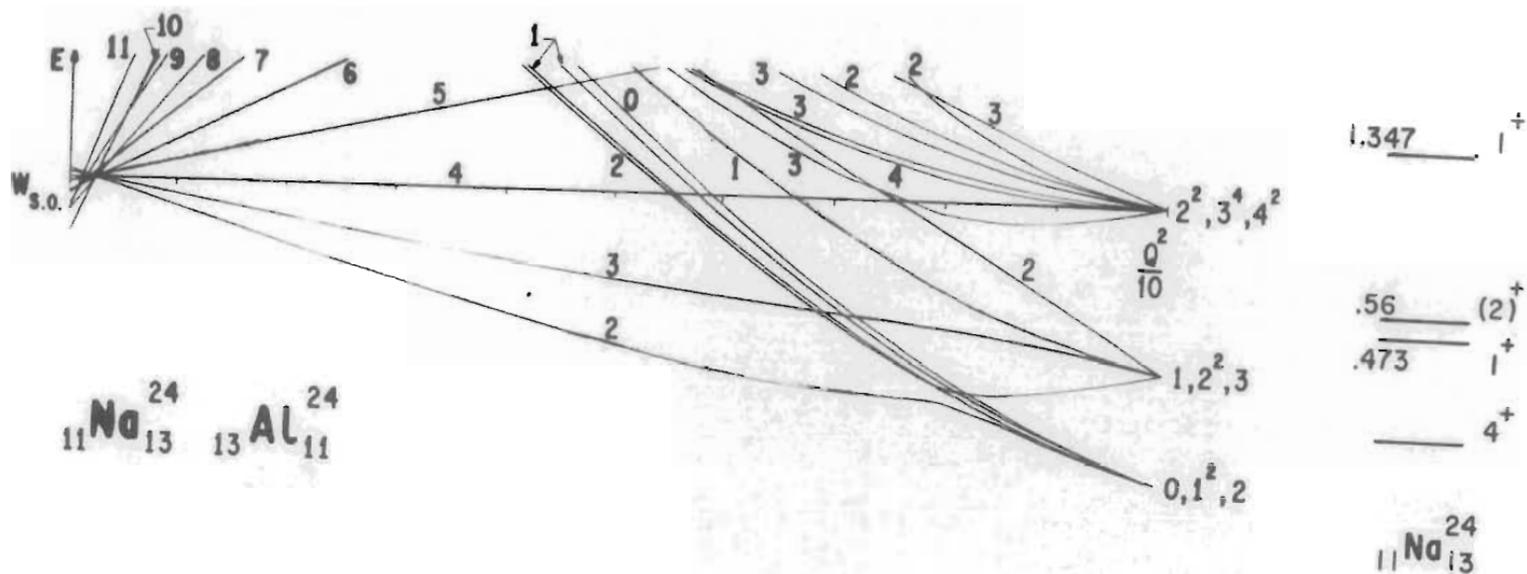


FIG. 2. En este caso el estado base 4 del  $Na^{24}$  no se obtiene para ningún valor del parámetro; es claro pues, que el corte hecho por la cadena de grupos  $U_6 \supset SU_3 \supset R_3$  no es satisfactorio. Un resultado semejante se tiene para el  $Al^{24}$ , si su estado base fuese 4 como lo indica tentativamente el experimento. Ninguna mejora se obtiene en este esquema al introducir una fuerza de intercambio con mezcla de Rosenfeld (Figura 3).

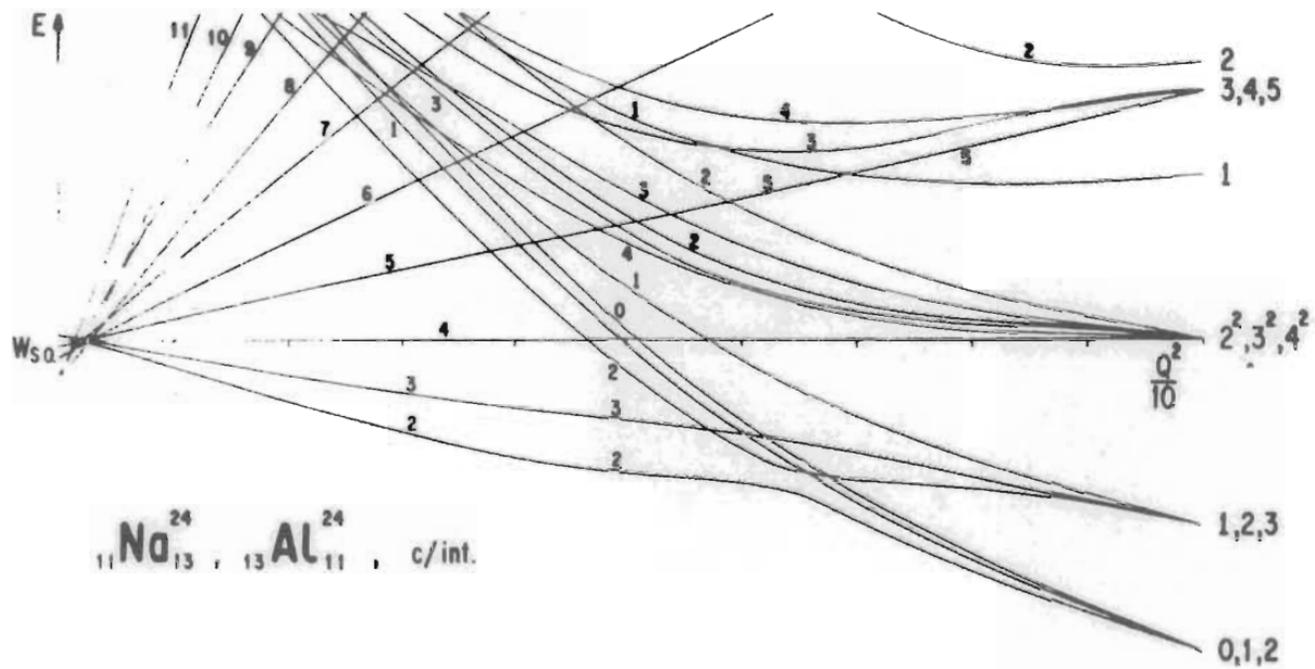


FIG. 3

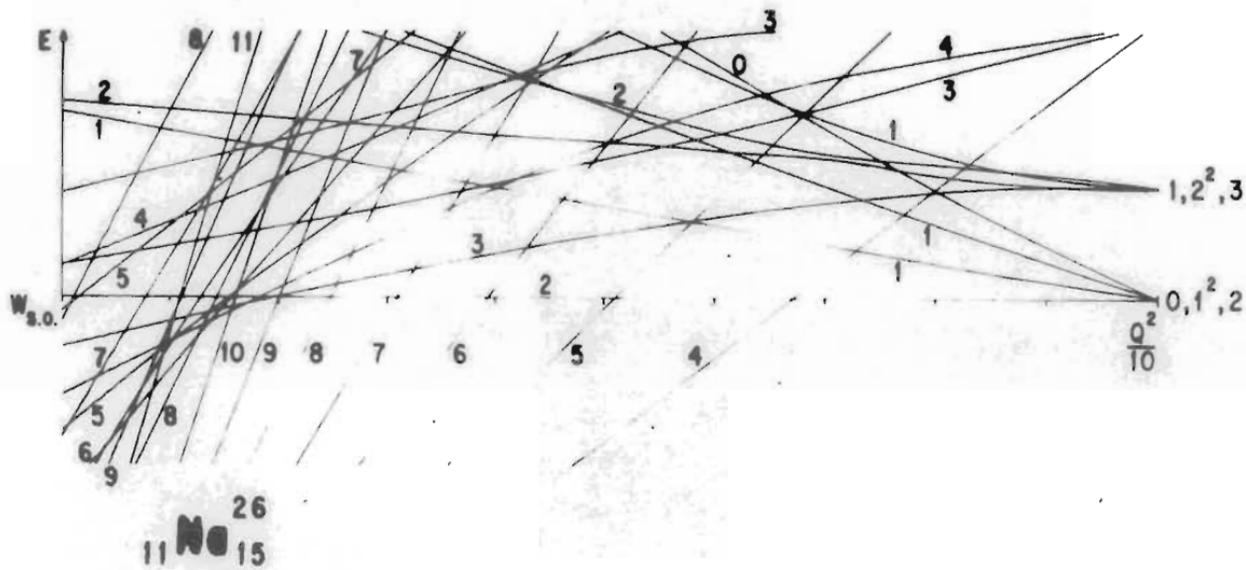


FIG. 4. Sólo se conoce el estado base (2 , 3 ), dudoso. La gráfica indica que el 2 , sería el más bajo para un acoplamiento espín-órbita débil, descartando el 3 como posibilidad teórica en este análisis. Al considerar fuerzas de intercambio, ninguna mejora se logra, (Figura 5).

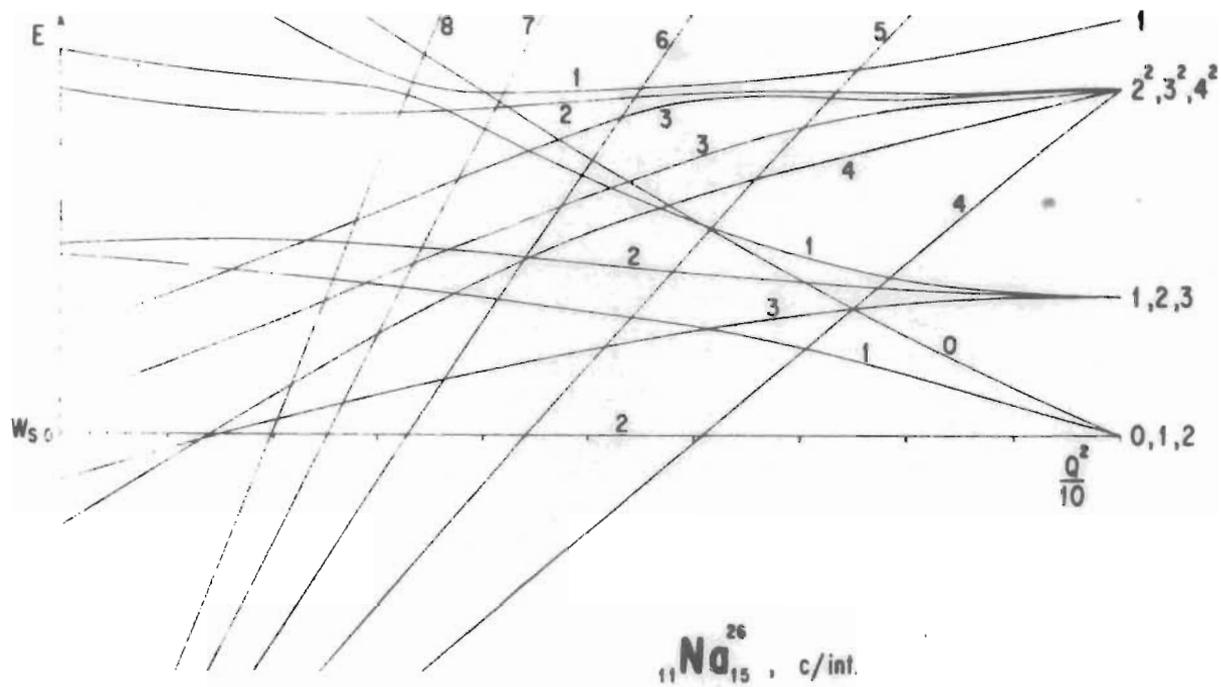


FIG. 5

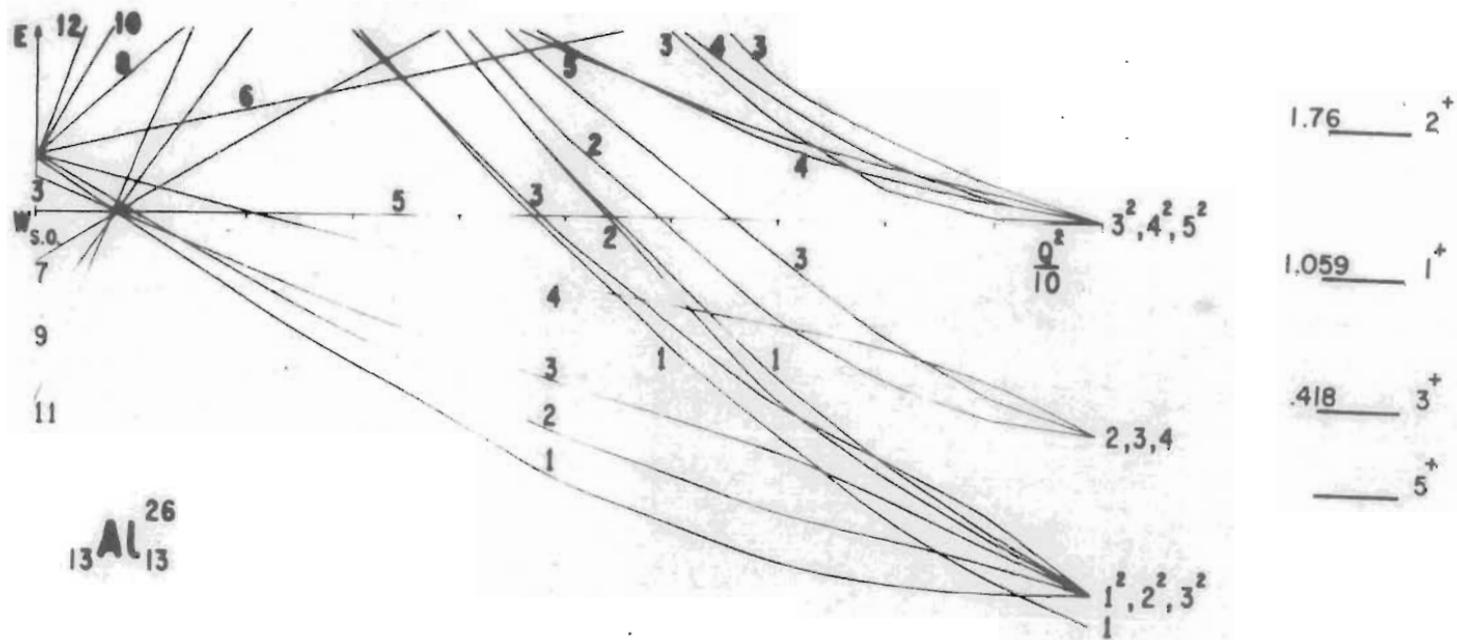


FIG. 6. Como en el caso del  $\text{Na}^{24}$ , el estado base 5 no aparece como nivel más bajo para la clasificación de  $\text{SU}_3$  más baja en energía.

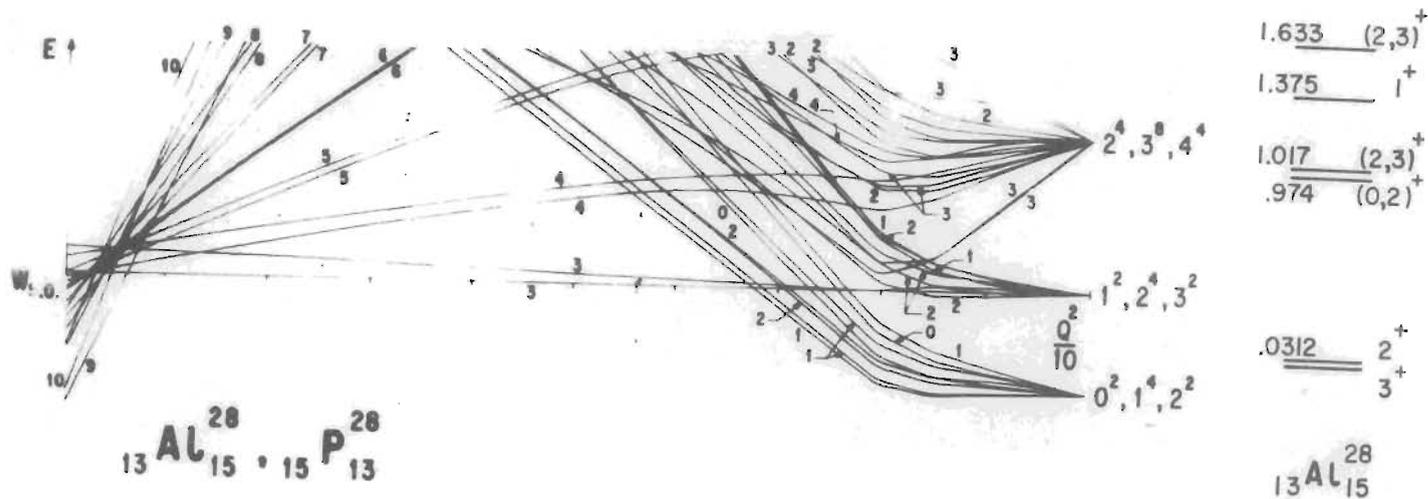


FIG. 7. Para el  $\text{Al}^{28}$ , el estado base  $3^-$  se obtiene con un acoplamiento espín-órbita de fuerte a moderado. Aún cuando los niveles excitados no se obtengan en el orden correcto, es interesante observar la aparición de dobletes tanto en el espectro teórico como en el experimental. En el caso teórico, estos dobletes se deben al hecho de que existen dos R. I. de  $\text{SU}_3$ , caracterizadas por  $(12, 9)$  y  $(12, 3)$ , contenidas en la partición  $[4431]$  de  $U_6$  con la energía más baja posible para una fuerza de cuadrupolo-cuadrupolo, como puede observarse en la tabla de clasificación de los núcleos. Los dobletes que se obtienen, sin embargo, en el caso teórico son del mismo impulso angular total  $J$ , lo cual no concuerda con el experimento para el estado base; ninguna información adicional se obtiene de la gráfica de niveles cuando se toma en cuenta la fuerza de intercambio ya citada (Figura 8). Se espera, sin embargo, un mejor acuerdo con el experimento al tomar en cuenta la fuerza de apareamiento  $^0$  en la interacción.

Para el  $\text{P}^{28}$  sólo se conoce el estado base  $3^-$ , que concuerda con los resultados teóricos.

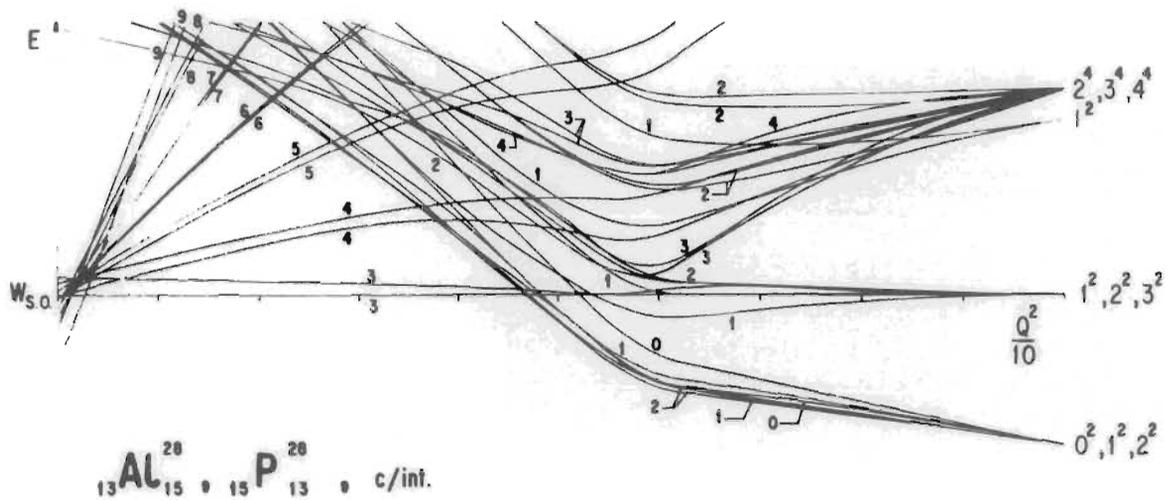


FIG. 8

7.13

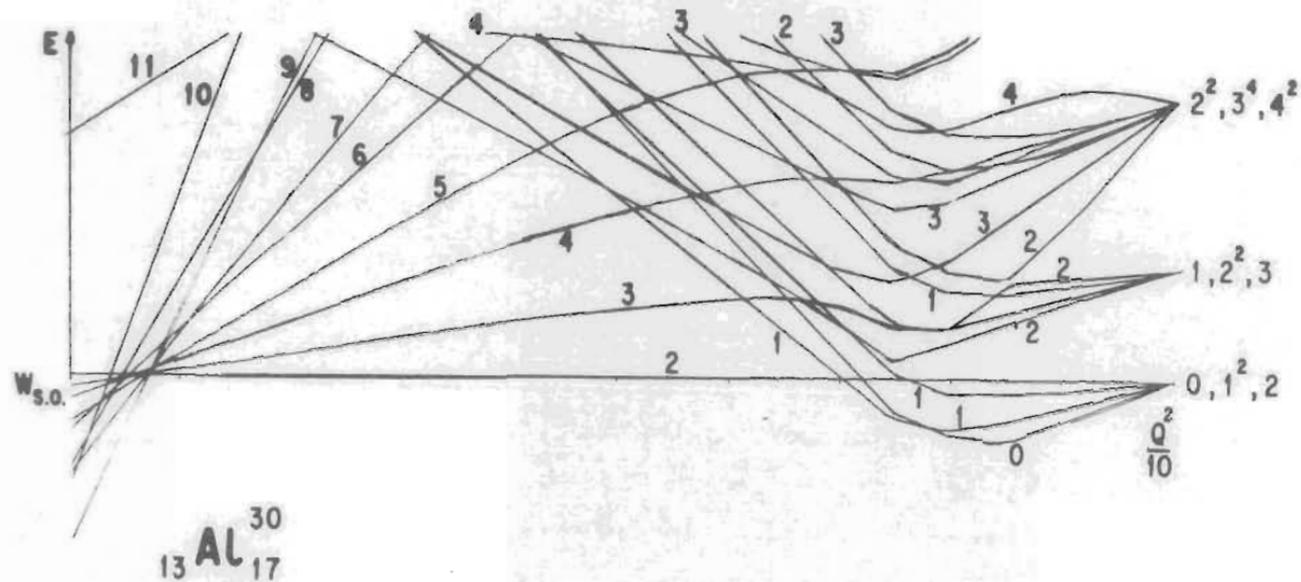
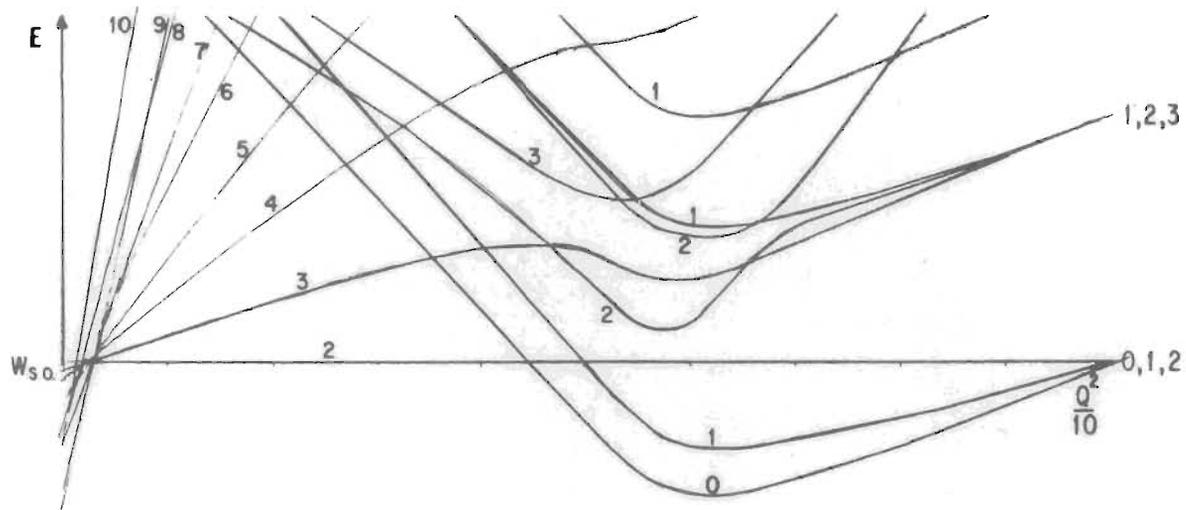


FIG. 9. Como en el caso del  $\text{Na}^{26}$ , el esquema muestra una clara predilección por el estado 2 como base, para un acoplamiento espín-órbita de débil a moderado, lo cual no contradice los datos experimentales. Como en el resto de casos en que se ha considerado el efecto de una fuerza de intercambio, no se obtiene ningún dato de interés nuevo. (Figura 10).



$^{30}_{13}\text{Al}_{17}$ , c/int.

FIG. 10

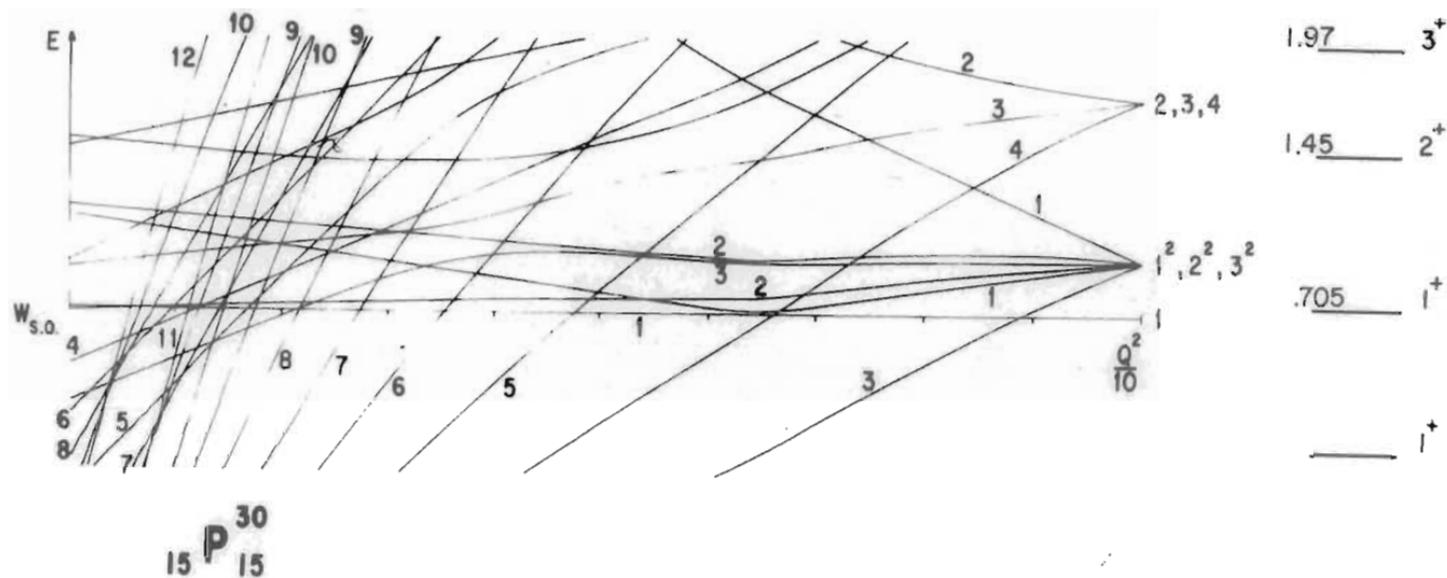


FIG. 11. El estado base  $1^-$  se obtiene con un acoplamiento espín-órbita débil. Es muy probable que la introducción del apareamiento ajuste los niveles excitados debido a que la degeneración de niveles  $1^2, 2^2, 3^2$  en este extremo (de  $2^2$ ), contiene los tres primeros niveles excitados.

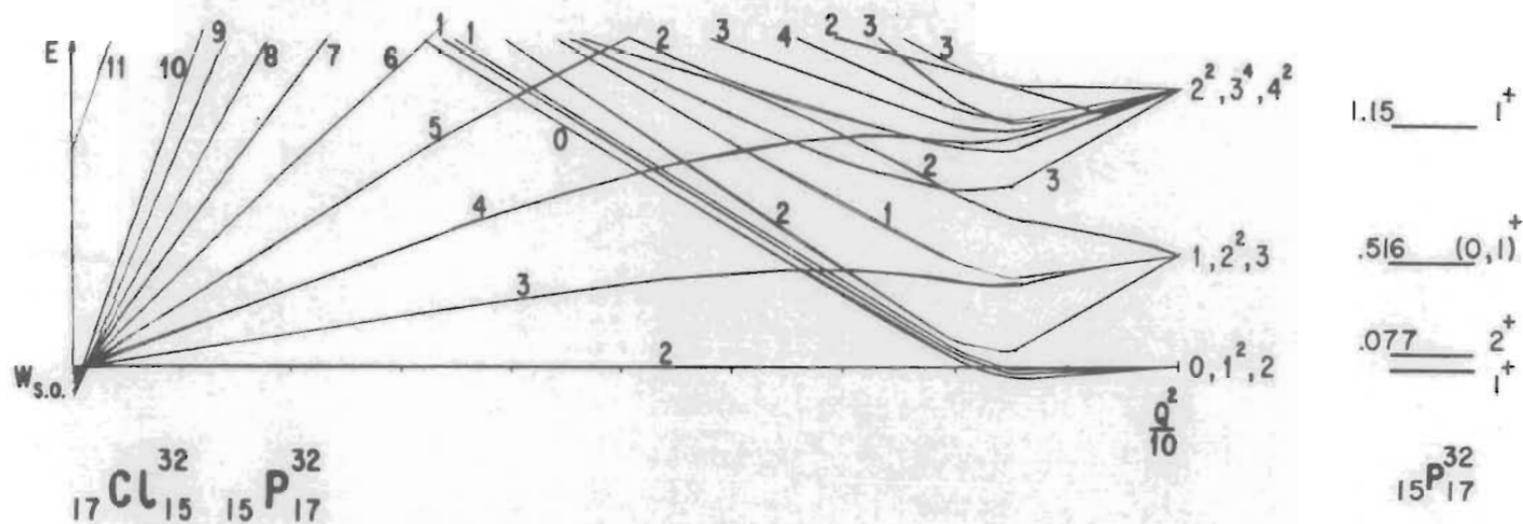
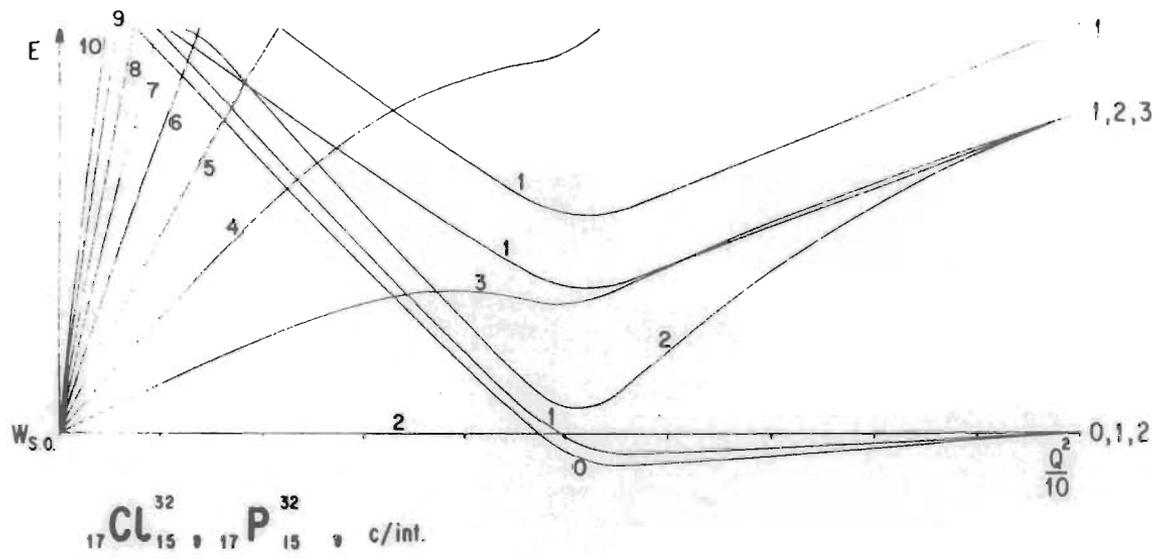


FIG. 12. Para el  $\text{P}^{32}$ , los cuatro primeros niveles están incluidos en el estado degenerado más bajo con  $x = 1$ ; aunque el orden obtenido no es el correcto, es muy probable que al introducir el apareamiento se obtenga un buen ajuste. En el caso del  $\text{Cl}^{32}$ , sólo se conoce el estado base 2, el cual se obtiene en la mayor parte de los valores del parámetro  $x$ . La consideración del intercambio no altera los resultados en modo favorable. (Figura 13).



- 2.18 -

FIG. 13

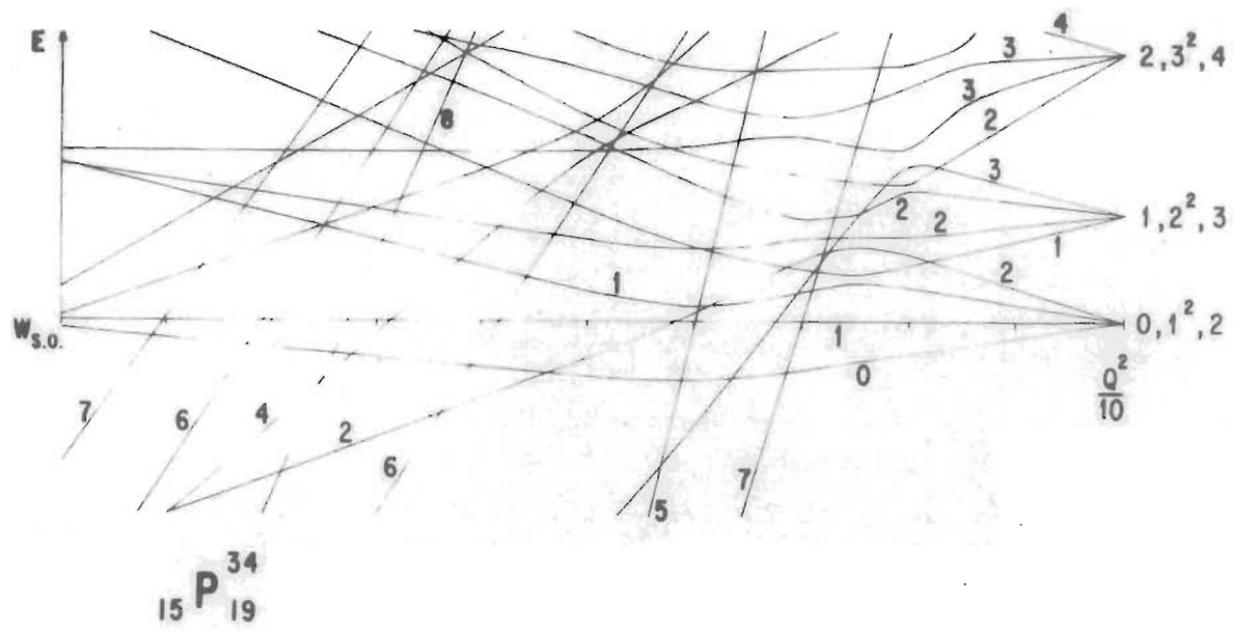
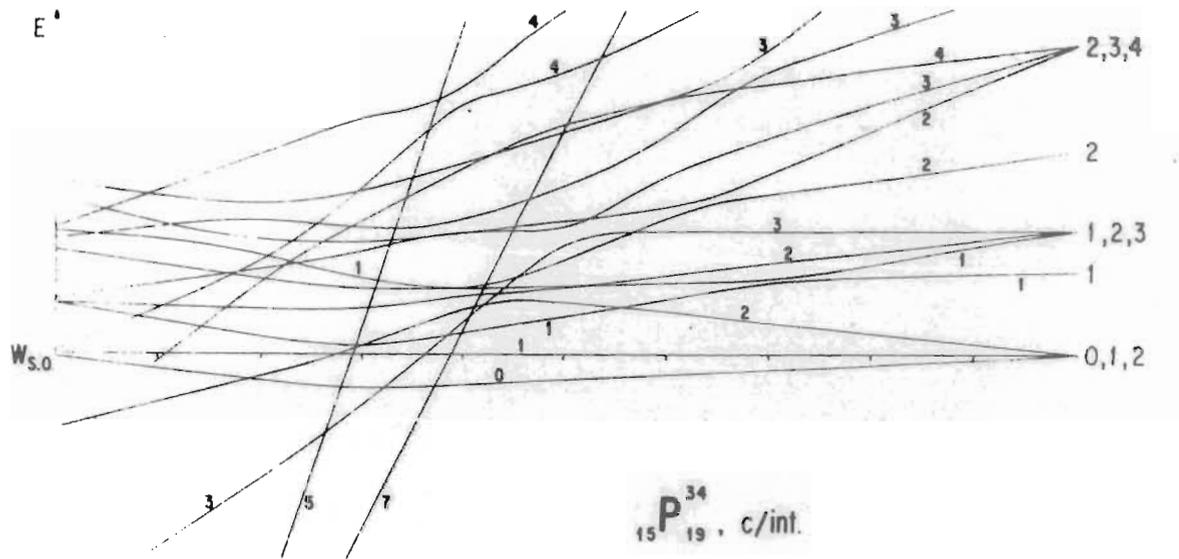


FIG. 14. No se obtiene el estado base correcto 1 para ningún punto de la gráfica. Nuevamente se puede observar que el intercambio no introduce ningún efecto positivo. (Figura 15).



- 2.20 -

FIG. 15

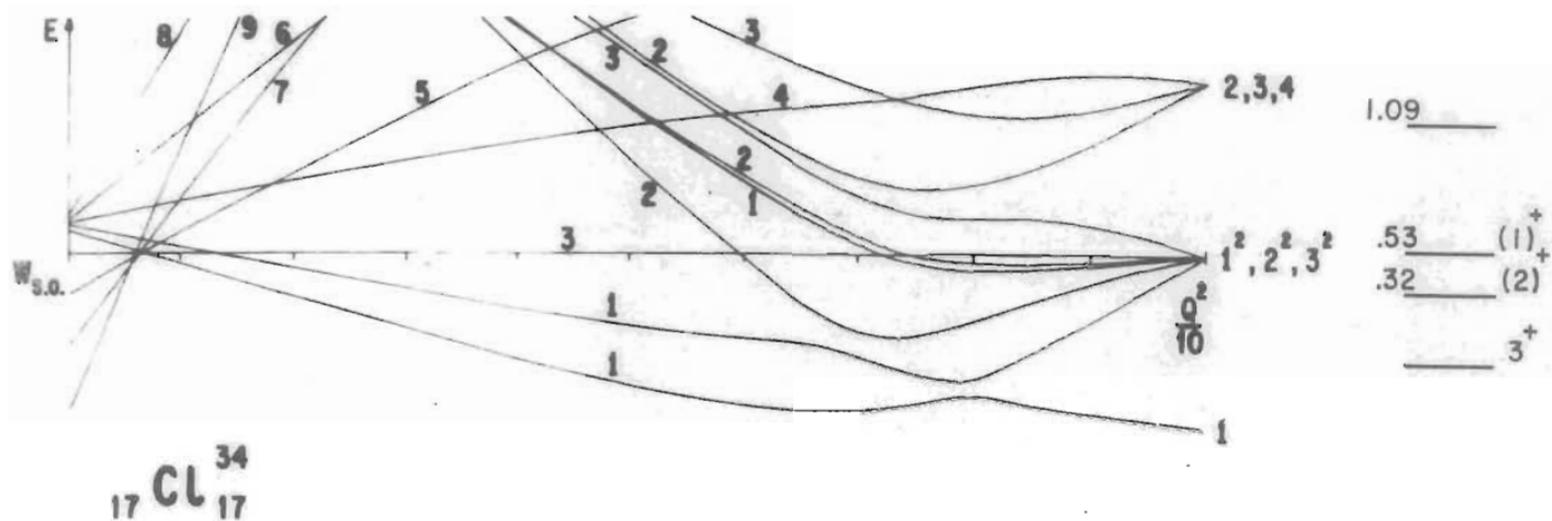


FIG. 16. Como en los casos del  $\text{Na}^{24}$  y el  $\text{Al}^{26}$ , no es posible obtener el estado base 3 aunque se espera una mejora al considerar la fuerza de apareamiento en la interacción modelo.

12. Algunos de los Núcleos en otros Esquemas.

Es interesante estudiar el  $\text{Na}^{24}$ , el  $\text{Al}^{26}$ , el  $\text{Cl}^{34}$  y el  $\text{P}^{34}$  en otros esquemas, tales como el acoplamiento j-j. Si no se toman en cuenta mezclas de configuraciones, el  $\text{Al}^{26}$ , está representado por dos agujeros en la sub-capa  $d_{5/2}$  del oscilador armónico con efecto de acoplamiento espín-órbita, con iso-espín  $T=0$ , mientras que el  $\text{Na}^{24}$  se obtendría considerando cuatro agujeros en esta sub-capa con  $T=1$ .

Considérese, pues, el problema de n partículas, con iso-espín  $\tau = \pm 1/2$ , en la capa  $d_{5/2}$ . La degeneración de la capa es de 12 y se obtiene, por tanto, un grupo unitario de 12 dimensiones  $U_{12}$  con un sub-grupo  $U_6 \times U_2$  que separa el espacio de configuración y el espacio de iso-espín y se pueden considerar operadores fermiónicos de creación y aniquilación  $b_{\rho}^{\dagger}$ ,  $b_{\rho}$ , con  $\rho \rightarrow (\nu | j m, r) = (m r)$  ya que  $\nu = 2, l = 2, j = 5/2$  son fijos, y asociados a estos operadores, los generadores<sup>8</sup> del grupo  $U_6$ :

$$\varphi_m^{m'} = \sum_{\tau} b_{m\tau}^{\dagger} b_{m'\tau}$$

según la técnica ya mencionada, con las reglas de conmutación  $[\varphi_m^{m'}, \varphi_{m''}^{m''}] = \varphi_m^{m''} \delta_{m''}^{m'} - \varphi_{m''}^{m'} \delta_m^{m''}$  (12.1) y de hermiticidad  $(\varphi_m^{m'})^{\dagger} = (\varphi_{m'}^m)$ , donde  $m, m', m'', m''' = 5/2, 3/2, \dots, -3/2, -5/2$ .

Se definen además los operadores

$\Delta_m^{m'} \equiv \zeta_m^{m'} + (-1)^{m+m'} \zeta_{-m}^{-m'}$  que cumplen las reglas de conmutación

$$[\Delta_m^{m'}, \Delta_{m''}^{m''}] = \Delta_m^{m''} \zeta_{m''}^{m'} - \Delta_{m''}^{m'} \zeta_m^{m''} + (-1)^{m+m''} \Delta_{-m}^{m''} \zeta_{m''}^{-m'} + (-1)^{m+m''} \Delta_{-m}^{-m'} \zeta_{m''}^{m''} \quad (12.2)$$

y para los cuales  $\Delta_{-m}^{-m'} = (-1)^{m+m'} \Delta_m^{m'}$  (12.3).

Estas dos propiedades (12.2) y (12.3) muestran que hay 21 operadores linealmente independientes  $\Delta_m^{m'}$ , generadores de un grupo simplectico en 6 dimensiones  $Sp_6$ , sub-grupo del grupo  $U_6$  mencionado. El operador de Casimir de segundo orden para este grupo será:

$$Q_2(Sp_6) = \sum_{m, m'} \Delta_m^{m'} \Delta_{m'}^m = 2 \sum_{m, m'} \zeta_m^{m'} \zeta_{m'}^m + 2 \sum_{m, m'} (-1)^{m+m'} \zeta_m^{-m'} \zeta_{-m}^{-m'}$$

ó sea  $Q_2(Sp_6) = 2 Q_2(U_6) + 2 \sum_{m, m'} (-1)^{m+m'} \zeta_m^{m'} \zeta_{-m}^{-m'}$  (12.4).

El idio-valor de  $Q_2(U_6)$  es:<sup>8</sup>

(12.4a)...  $\chi = \sum_{\mu=1}^6 f_{\mu} [f_{\mu} - 2\mu + 7]$ , donde  $\mu = 7/2 - m$  y  $[f_{\mu}]$  están definidas por las ecuaciones  $\zeta_m^m \bar{P} = f_{\mu} \bar{P}$ ,  $\zeta_m^{m'} \bar{P} = 0$  para  $m < m'$ , es decir, representan el peso del polinomio de máximo peso del grupo  $U_6$  definido.

Para obtener el idio-valor de  $Q_2(Sp_6)$  es necesario dividir los operadores  $\Delta_m^{m'}$  en tres grupos

i) de ascenso:  $\Delta_m^{m'}$  con  $m > m' > -m$

ii) de peso:  $\Delta_m^m$

iii) de descenso  $\Delta_m^m$  con  $m > m' > -m$ , en analogía con el grupo  $R_6$  usado por Moshinsky <sup>8</sup>

Las R.I. de  $Sp_6$  pueden caracterizarse por el conjunto

$(\sigma_\mu)$  definidos por

$$(12.5) \dots \Delta_m^m P = \sigma_\mu P \quad \text{y} \quad \Delta_{-m}^{m'} P = 0 \quad (m' > m' > -m'),$$

y con  $\mu = 1, 2, 3$ , ya que, de (12.3),  $\Delta_{-m}^m = -\Delta_m^m$  y basta tomar  $m = 0$ .

Para encontrar ahora el idio-valor de  $G_2(Sp_6)$ , se aplica este operador al polinomio de máximo peso  $P$

$$\begin{aligned} G_2(Sp_6)P &= \sum_{m,m'} \Delta_m^{m'} \Delta_{m'}^m P = \left\{ 2 \sum_{m>0} (\Delta_m^m)^2 + \sum_{m>m'} \Delta_m^{m'} \Delta_{m'}^m + \sum_{m>m'} \Delta_{m'}^m \Delta_m^{m'} \right\} P \\ &= \left\{ 2 \sum_{m>0} (\Delta_m^m)^2 + 2 \sum_{m>0} \Delta_m^m + 4 \sum_{m>0} m \Delta_m^m \right\} P = \left\{ 2 \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu [\sigma_\mu - 2\mu + 8] \right\} P \end{aligned}$$

donde se utilizaron las ecuaciones (12.2) y (12.5). El idio-valor  $\psi$  de  $Sp_6$  será entonces:

$$\psi = 2 \sum_{\mu=1}^3 \sigma_\mu [\sigma_\mu - 2\mu + 8] \quad (12.6)$$

Considérese ahora una fuerza de apareamiento, que acopla dos partículas a un impulso angular total  $J=0$ , de la forma:

$\langle jjJM | R_{12} | jjJM \rangle = (2j+1) S_{J_0} S_{M_0}$ , que representa interacciones de corto alcance; en el esquema de segunda cuantización,  $R$  se expresa como<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{m_1, m_1' \\ m_2, m_2'}} \langle m_1, m_2 | R_{12} | m_1', m_2' \rangle (C_{m_1}^{m_1'} C_{m_2}^{m_2'} - C_{m_2}^{m_1'} S_{m_1}^{m_2'}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m_1, m_2} \langle jj, m_1, m_2 | 00 \rangle \langle jj, m_1', m_2' | 00 \rangle (2j+1) \{ C_{m_1}^{m_1'} C_{m_2}^{m_2'} - C_{m_2}^{m_1'} S_{m_1}^{m_2'} \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ - \sum_{m, m'} (-1)^{m+m'} C_m^{m'} C_{-m}^{-m'} + \eta \right\} \end{aligned}$$

donde  $\eta = \sum_m C_m^m$  es el operador de número; substituyendo esta expresión en (12.4), se obtiene que

$$P_0 = \frac{1}{2} \left\{ G_2(\mathcal{J}_2) + \eta - \frac{G_2(S_{P_2})}{2} \right\} \quad \text{que será entonces diagonal}$$

al calcularse entre estados caracterizados por la cadena de grupos  $U_6 \supset Sp_6$  y su idio-valor será, usando (12.4) y (12.6):

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \gamma + \eta - \frac{\eta}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mu=1}^6 f_\mu [f_\mu - 2\mu + 1] + \eta - \sum_{\mu=1}^2 f_\mu [f_\mu - 2\mu + 1] \right\} \dots (12.7)$$

Este idio-valor da una separación de los niveles para núcleos en la capa  $d_{5/2}$ . En particular, el  $Al^{26}$ , con dos agujeros y  $T = 0$ , es equivalente en este esquema al problema de dos partículas y tendrá por tanto,  $|f| = [2]$ . La única R.I. de  $Sp_6$  contenida en esta partición es<sup>15</sup> la (200) que contiene<sup>15</sup> los valores

$J=1, 3, 5$  como posibles y que en este caso, aparecen degenerados; sin embargo, tomando una fuerza de largo alcance, como lo hacen Edmonds & Flowers<sup>16</sup>, la degeneración se rompe y, para valores apropiados del parámetro de alcance, se obtienen los niveles en el orden  $5, 3, 1$ , que es el correcto.

El  $\text{Na}^{24}$ , cuatro agujeros con  $n=8$  y  $T=1$ , es equivalente al problema de cuatro partículas con  $T=1$ , para el cual  $[f] = [211]$  y que contiene<sup>15</sup> las R. I. de  $\text{Sp}_6$  siguientes:  $(200)$ ,  $(110)$  y  $(211)$  con  $J=1, 3, 5; 1, 2, 3^2, 4, 5, 6, 7$  como  $J$  posibles. En este caso, substituyendo en (12.7) se obtienen los niveles

E	$(\sigma_\mu)$	J	
-5	(211)	<u>1,2,3<sup>2</sup>,4,5,6,7</u>	
-6	(200)	<u>1,3,5</u>	tomando en cuenta que la fuerza $\mathcal{R}$ es atractiva. Para interacciones de corto alcance que rompen la degeneración, Edmonds & Flowers <sup>17</sup> encuentran $J=2$ como más bajas,
-8	(110)	<u>2,4</u>	mientras que para otras interacciones, encuentran $J=5, 7$ y ninguno de estos valores coincide con el 4 obtenido empíricamente para el $\text{Na}^{24}$ .

De la discusión anterior se deduce que el modelo de la capa  $d_{5/2}$  es bueno para el  $\text{Al}^{26}$ , pero no para el  $\text{Na}^{24}$ . Por otra

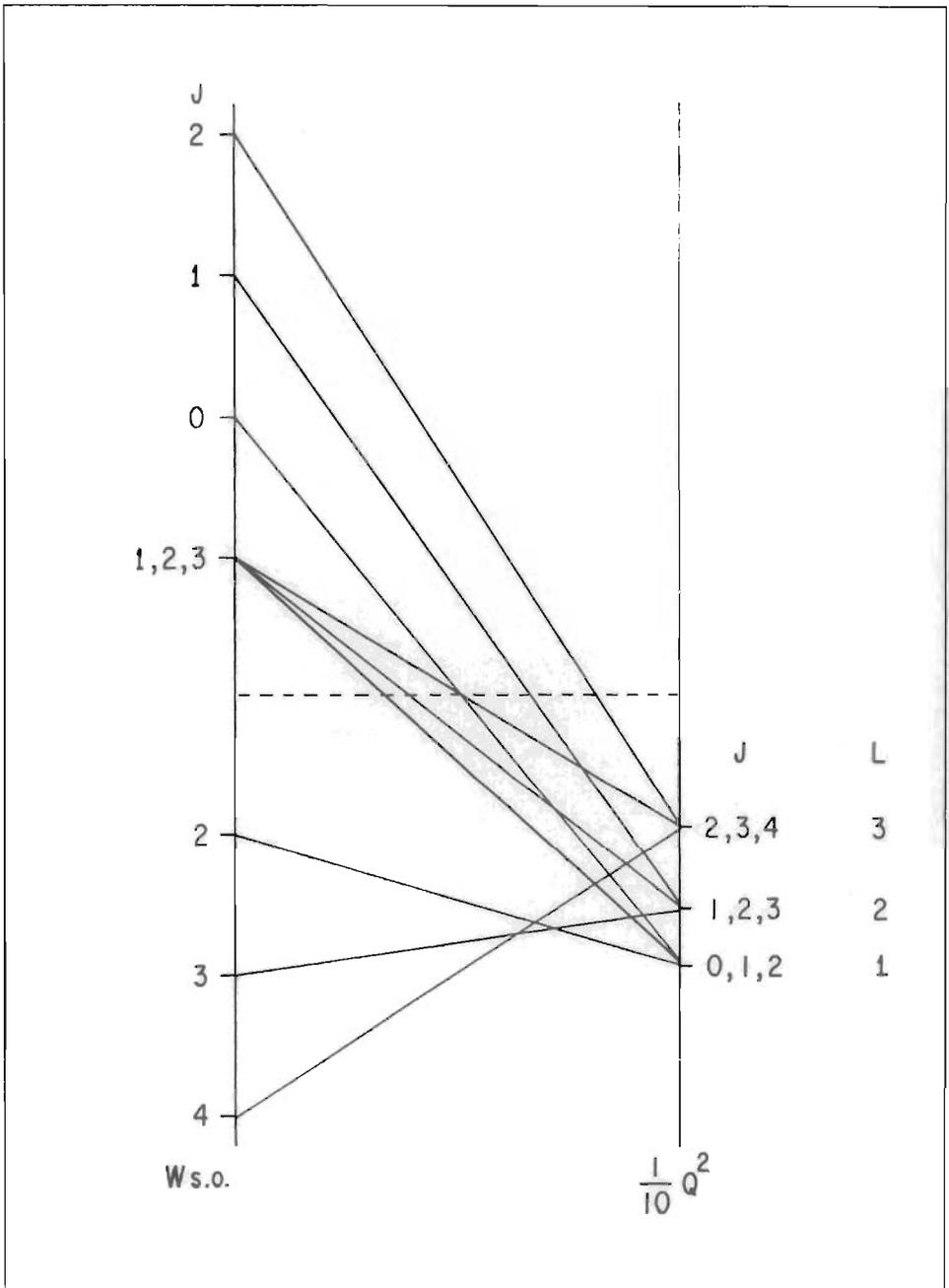


Fig. 17

parte, usando las reglas de Nordheim modificadas por Brennan y Bernstein<sup>18</sup>, sí se obtienen los niveles base tanto del  $Al^{26}$ , como del  $Na^{24}$ . Por último, en un primer análisis hecho por Chacón<sup>19,21</sup> en la cadena de grupos  $U_6 \supset R_6$  asociada a la fuerza de apareamiento (ver sec. 2) se obtiene el estado base 4, como se muestra en la figura de la página anterior.

Los núcleos  $Cl^{34}$  y  $P^{34}$  han sido estudiados utilizando acoplamiento j-j por Claudemans<sup>20</sup>, considerando una mezcla de configuraciones en las subcapas  $2s_{1/2}$  y  $d_{3/2}$ . Para el  $Cl^{34}$  se puede explicar satisfactoriamente los tres niveles más bajos y, si se considera el valor  $T=0$  solamente, el estado base es el correcto. En el caso del  $P^{34}$  se conoce sólo el estado base, que coincide con el calculado por este método. Los datos experimentales del  $Cl^{34}$  y  $P^{34}$  se ajustan, pues, mejor utilizando acoplamiento j-j.

## CONCLUSIONES

El estudio de la estructura del núcleo puede compararse metafóricamente, como lo ha expresado el Dr. Moshinsky, con el estudio de la estructura de un pastel.

Se puede, por ejemplo, desmoronar el pastel y examinar cada pedazo cuidadosamente; éste sería un examen minucioso, pero a la vez molesto. En el caso de la estructura nuclear, esto significaría tomar el conjunto completo de estados en algún esquema del modelo de capas, lo cual conduce a una explosión de estados.

Otro procedimiento, más razonable, consistiría en hacer tres cortes en planos perpendiculares y estudiar cada uno de ellos. La analogía en el caso nuclear sería clasificar los estados mediante tres cadenas distintas de subgrupos, para cada una de las cuales una parte de la interacción fuese diagonal y restringirse sólo a estados correspondientes de la energía más baja de la interacción en cuestión.

En este trabajo se estudian los núcleos non-non de la capa  $2s-1d$  haciendo el corte que clasifica los estados mediante la cadena de grupos donde la interacción cuadrupolo-cuadrupolo es diagonal.

### Referencias

1. M. Moshinsky, 'Group Theory & Collective Motions' (Notas de la LASP, 1962, U. N. A. M.)
2. J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A245(1958)128
3. J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. A245(1958)562
4. J. Flores, E. Chacón, P. A. Mello & M. de Llano, Nuc. Phys. 72(1965)352, 379
5. B. Wolf, Tesis de Físico U. N. A. M. (1965)
6. M. E. Fosado, Tesis de Físico U. N. A. M. (1965)
7. M. de Llano, Ph. D. Thesis, Catholic University of America, Washington, D. C. (1965)
8. M. Moshinsky, 'Group Theory & the Many Body Problem' en 'The Many Particle Systems' ed. por Gordon & Breach, N. Y. (1966)
9. E. Chacón y M. de Llano, Rev. Mex. Fís. 12(1965)87
10. Referencia 8, Appendix I
11. I. M. Gelfand & M. I. Zetlin, Dok. Akad. Nauk 71(1950)825
12. J. G. Nagel & M. Moshinsky, Rev. Mex. Fís. 14(1965)29
13. M. E. Rose, 'Elementary Theory of Angular Momentum' J. Wiley & Sons (1957)
14. T. Ishidzu, "Tables of Racah Coefficients" Pan-Pacific Press Tokyo, Japan (1960)
15. M. Hamermesh, 'Group Theory & its Applications to Physical Problems' Addison-Wesley (1962)
16. A. R. Edmonds & B. H. Flowers, Proc. Roy. Soc. A215(1952) pág. 128, fig. 4
17. Referencia 16, pág. 130
18. M. H. Brennan & A. M. Bernstein, Phys. Rev. 120(1960)927

19. E. Chacón, Tesis Doctoral U.N.A.M. (por publicarse)
20. P. W. M. Glaudemans, G. Wiechers & J. P. Brussaard, Nuc. Phys. 56(1964) pág. 559 y 560
21. M. Moshinsky, M. Berrondo & J. Pineda. "Group Theory & Nuclear Structure in the  $2s-1d$  Shell", que se publicará en "Proceedings of the 2nd Conference in Light & Medium Nuclei", Dayton, Ohio (1966)

## INDICE

Introducción		1.1
	<u>PARTE I</u>	
<u>Capítulo I</u>		
1. La Interacción Modelo		1.4
2. Fuerza de Apareamiento		1.5
3. Fuerza de Cuadrupolo-Cuadrupolo		1.7
4. Fuerzas de Intercambio		1.12
5. Interacción Espín-Orbita		1.15
6. Las Aproximaciones del Problema		1.17
<u>Capítulo II</u>		
7. Los Elementos de Matriz de la Interacción Espín-Orbital en la Cadena		1.21
8. Cálculo de los Coeficientes A y B		1.27
	<u>PARTE II</u>	
<u>Capítulo I</u>		
9. Programación para el Cálculo de la Interacción		2.1
10. Clasificación de los Núcleos Non-Non		2.2
<u>Capítulo II</u>		
11. Análisis de los Resultados		2.6
12. Algunos de los Núcleos en Otros Esquemas		2.22
Conclusiones		
Referencias		