30 2ej.


# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS


# CURVATURA, CONSTRUCCIÓN Y ALGUNOS RESULTADOS

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a :


Ramón Reyes Carrión

Compra la verdad, y no la vendas;
La sabiduría, la enseñanza
y la inteligencia.
PR 23:23

# PROLOGO

En el presente trabajo se presenta el material necesario para entender el Teorema de Gauss-Bonnet y su demostración. Para tal efecto en el capítulo uno se construye el tensor de curvatura, de una forma geométrica, para variedades encajadas en un espacio euclideano, con la métrica y derivada covariante inducidas por éste. Posteriormente en el capítulo dos, se definen los conceptos de la geometría diferencial en el lenguaje modermo y se prueban los teoremas y proposiciones más importantes que dan las herramientas necesarias para enunciar y probar el Teorema de Gauss-Bonnet, así como ver que estos conceptos generalizan a los que se manejaron en el primer capítulo. En el capítulo final se enuncia y prueba el Teorema de Gauss-Bonnet, haciendo uso de los conceptos y resultados obtenidos, así como de teoremas clásicos bien conocidos de la Geometría y Topología Diferenciales.

El material del primer capítulo fué tomado casi en su totalidad (salvo ciertas omisiones) del curso "Geometría Riemanniana" que dictó el Dr. Santiago López de Medrano en el XIX Congreso Nacional de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana celebrado en Guadalajara, Jal. en noviembre de 1986. El material del segundo capítulo consiste de las definiciones y resultados que se encuentran en la mayoría de los libros de texto, en su oportunidad se citan los mismos, y es conveniente revisar la bibliografía para encontrar los detalles que no se incluyeron en el trabajo. La prueba del Teorema de Gauss-Bonnet que se presenta, es la que dió Chern en el artículo [Ch].

Agradezco especialmente al Dr. José Seade, por la dirección del presente trabajo, así como por el apoyo y amistad que me ha brindado. Así mismo agradezco a los doctores Xavier Gomez-Mont, Santiago López de Medrano y Marcelo Aguilar, por el apoyo que me han dado y por sus acertadas sugerencias gracias a las cuales este trabajo presenta su actual forma; además de agradecer a todas las personas que de alguna forma han contribuido a este trabajo. Finalmente y no por eso en menor forma, agradezco a la M. en C. Ana Irene Ramírez por la orientación, apoyo y comprensión que desde tiempo atrás ha mostrado a mi favor.

# INDICE

## Capítulo 1



## Capítulo 2



## Capítulo 3

# CAPITULO 1

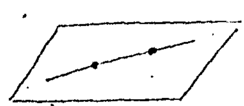
## § 1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, nos ocuparemos de construir objetos que nos digan en que medida deja de ser plano un subconjunto (variedad) de $\mathbb{R}^{n+k}$ con cierta estructura. Para esto seguiremos dos enfoques o puntos de vista.

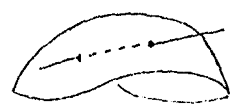
Enfoque 1° : Se refiere al hecho de si la variedad es parte de un plano (está contenida en él).

Enfoque 2° : Se trata de ver si es posible representar "fielmente" la variedad en un plano.

En el curso del presente capítulo precisaremos esto.

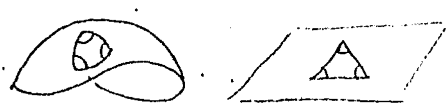


Respecto al primer enfoque, tenemos situaciones como la siguiente: Dado un plano en $\mathbb{R}^3$ y dos puntos en él, la recta en $\mathbb{R}^3$ que los une está contenida en el plano; lo que no sucede para cualquier superficie; por ejemplo, un casquete esférico no contiene la recta en $\mathbb{R}^3$; lo cual nos muestra que la tierra no es plana en este sentido, lo que nos dicen que creía Colón, ya habían demostrado los griegos, y aparece en la Biblia (SAL8:27 y PROV40:27)

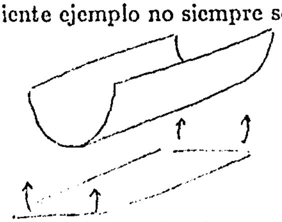


Lo que sucede, es que comparamos la geometría del objeto en cuestión con la del espacio ambiente (hablamos de rectas en $\mathbb{R}^3$). Por esto, llamamos a este enfoque extrínseco.

Para el segundo enfoque no requerimos del espacio ambiente, sino comparar la geometría de la variedad en cuestión con la geometría del plano. Por ejemplo en la esfera, los ángulos de un triángulo suman más de $\pi$ y en el plano suman $\pi$, esto nos hace pensar que no podremos representar a la esfera fielmente en un plano, como lo intentaba Mercator.



Es claro que si algo es plano respecto al primer enfoque, también lo será respecto al segundo, pero como veremos en el siguiente ejemplo no siempre se da lo contrario. Consideremos un cilindro parabólico, la superficie obtenida al doblar una hoja de papel en forma de parábola, es claro que no está contenido en un plano pero sí tiene una representación en un plano (desdoblando).



Utilizando la riqueza del español, decimos, bajo el primer enfoque algo está plano y bajo el segundo algo es plano.

## § 2 DEFINICIONES

**Definición 1.-** El *espacio tangente* a $\mathbb{R}^n$ en $p$ ($p \in \mathbb{R}^n$), es el espacio vectorial de los vectores tangentes en $p$ a curvas que pasan por $p$, se denota por $T_p\mathbb{R}^n$. Como es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ en ocasiones los identificaremos.

**Definición 2.-** Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi: U \to \mathbb{R}^{n+k}$ diferenciable y $p \in U$, la *diferencial* de $\varphi$ en $p$ es la aplicación lineal

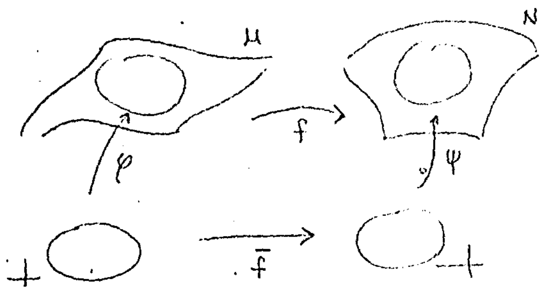
$$d\varphi_p = D\varphi_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n+k}, \quad \text{definida como sigue:}$$

dado $v \in T_p\mathbb{R}^n$, por definición existe $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces, $D\varphi_p(v) := \beta'(0)$ donde $\beta = \varphi \circ \alpha$ (es un hecho, el cual no probaremos que $D\varphi_p(v)$ está bien definida, es decir no depende de $\alpha$).

**Definición 3.-** Una *variedad diferenciable* $M^n$ de dimensión $n$, es un subconjunto $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$, tal que para cada $p \in M$ existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varphi: U \to \mathbb{R}^{n+k}$ inyectiva y diferenciable, $C^\infty$ (la llamaremos una *parametrización*), tal que $\varphi(U)$ es vecindad de $p$ en $M$ (con la topología inducida por $\mathbb{R}^{n+k}$) y $d\varphi_q$ es no singular para todo $q \in U$ (i.e. $\varphi$ es *regular*).

**Definición 4.-** Dado un punto $p \in M$, el *espacio tangente* a $M$ en $p$, que denotaremos por $T_pM$, es $T_pM := D\varphi_q(T_q\mathbb{R}^n)$ donde $\varphi(q) = p$; esto es, el espacio de todos los vectores tangentes en $p$, a curvas en M que pasan por $p$ (y que no depende de $\varphi$).

Obsérvese que $T_pM \subset T_p\mathbb{R}^{n+k} (\simeq \mathbb{R}^{n+k})$ es subespacio, lo que nos permite considerar a $T_pM$ como un espacio con producto interior (la restricción del producto escalar en $\mathbb{R}^{n+k}$), decimos que $M^n$ tiene la *métrica inducida* por $\mathbb{R}^{n+k}$.




**Definición 5.-** Sean $M^n$ y $N^n$ variedades diferenciables, decimos que $f: M^n \to N^n$ es *diferenciable*, si $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \overline{f}: U \to V$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, para cualesquiera $(\varphi, U)$ y $(\psi, V)$ parametrizaciónes de $M$ y $N$ respectivamente; si además $f$ es biyectiva con inversa diferenciable, decimos que $f$ es un *difeomorfismo*.

**Definición 6.-** Una *isometría* $f$, es un difeomorfismo, tal que para todo $p \in M$ $w, v \in T_pM$ se tiene

$$u \cdot v = df_p(v) \cdot df_p(w),$$

donde $df_p$ se define tomando curvas como en la definición 2.

Cuando decimos representar en un plano, nos referimos a la existencia de isometrías.

**Definición 7.-** El *haz tangente* a la variedad $M^n$, es la variedad diferenciable de todos los vectores tangentes a $M$; esto es, como conjunto es:

$$TM \overset{\text{def}}{=} \bigcup\{T_pM | p \in M\}$$

**Observación.-** Las construcciones que haremos en este capítulo requieren de una sola parametrización, por eso consideraremos una sola *carta*, esto es, una sola pareja $(\varphi, U)$; aunque es posible hacer estas construcciones en toda la variedad. Es importante notar qur localmente el haz tangente es un producto (no globalmente), de hecho para una carta $(\varphi, U)$, tenemos que

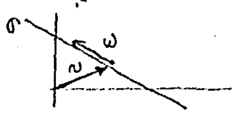
$$U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$$

dada por
$$(x, \sum_{i=1}^{n} u_i e_i) \mapsto (\varphi(x), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$$
es un difeomorfismo.

## § 3 CURVAS

Comencemos con el caso $n = 1$, con variedades de dimensión 1, curvas, i.e.
$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{1+k} \quad \text{tal que} \quad \alpha'(t) \neq 0 \quad \text{para toda } t \in I.$$

Un caso particular son las rectas de la forma $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{1+k}$, $\sigma(t) = v + tw$ con $v, w \in \mathbb{R}^{1+k}$, que llamaremos *rectas a velocidad uniforme*, pues $\sigma'(t) = w$ el *vector velocidad* es constante.




Observamos que, en este caso $\sigma''(t) = 0$, y podríamos pensar, esto nos mide qué tanto deja de ser recta una curva, pero veamos qué pasa si reparametrizamos.

**Definición 8.-** Dada una curva $\alpha: I \to \mathbb{R}^{1+k}$, una *reparametrización* de $\alpha$ es, una curva $\beta: J \to \mathbb{R}^{1+k}$, tal que existe una función $h: J \to I$ invertible y diferenciable (un difeomorfismo), con $\beta = \alpha o h$.

Si reparametrizamos $\sigma$ como $\sigma_1 = \sigma o h$, no se tiene por que cumplir $\sigma_1'' = 0$ a pesar de seguir teniendo una recta.

Dentro de todas las reparametrizaciones de una curva $\alpha$, nos interesan aquellas cuyo vector velocidad tiene norma unitaria, i.e. $\|\alpha'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$, las cuales llamaremos *curvas parametrizadas por longitud de arco*.

**Definición 9.-** $n$ es un vector *normal* a la curva $\alpha$ en $\alpha(t)$, si $\alpha'(t) \cdot n = 0$.

Para $\tau$ una curva parametrizada por longitud de arco, tenemos:

$$\|\tau'(t)\| = 1 \Rightarrow \|\tau'(t)\|^2 = \tau'(t) \cdot \tau'(t) = 1$$

y derivando resulta
$$2\tau'(t) \cdot \tau''(t) = 0,$$
luego el vector $\tau''(t)$ es normal a la curva en $\tau(t)$, para cada $t$.

Supongamos $0 \in I, \tau(0) = p$, fijaremos nuestra atención en el siguiente vector.

**Definición 10.-** El *vector de curvatura* es

$$\overrightarrow{k(p)} = \tau''(0).$$

Ahora, nuestro problema es: dada una curva encontrar $\overrightarrow{k(p)}$, para lo cual debemos reparametrizarla por longitud de arco y lo haremos como sigue:

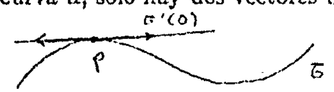
Dada $\alpha$ curva regular arbitraria, consideremos $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$ (donde $\alpha(0) = p$), función cuya derivada es distinta de cero, pues $\alpha'(t) \neq 0$ para toda $t$; aplicándole el teorema de la función inversa obtenemos una función $t(s)$, de forma que $\tau(s) = \alpha(t(s))$ es una curva parametrizada por longitud de arco, pues $\|\tau'(s)\| = \|\alpha'(t(s))/|\alpha'(t(s))|\| = 1$, y ahora si podemos considerar $\overrightarrow{k(p)}$.

**Observación.-** Acabamos de probar que toda curva regular se puede parametrizar por longitud de arco.

**Definición 11.-** La *curvatura* de una curva regular $\alpha$ en $p$ es el escalar:

$$\|\overrightarrow{k(p)}\| = K(p).$$

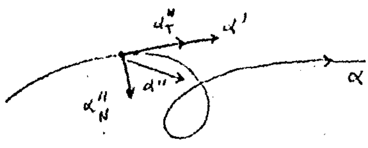
**Observación.-** La definición anterior es válida por el siguiente hecho: dada una curva $\alpha$, sólo hay dos vectores unitarios tangentes a $\alpha$ en cada punto, por lo tanto sólo hay dos parametrizaciones por longitud de arco $\tau$ y $\tau_1$, y cumplen $\tau_1(t) = \tau(-t)$, derivando dos veces tenemos, $\overrightarrow{k(p)} = \tau''(0) = \tau_1''(0)$.



En vista de que no es fácil reparametrizar una curva por longitud de arco, daremos una forma alternativa de saber cuando $K(p)$ es cero. Sean $\alpha$ y $\alpha_1$ una curva y una reparametrización ($\alpha_1 = \alpha \circ h$), tenemos:

$$\alpha_1''(t) = \alpha''(h(t))h'^2(t) + \alpha'(h(t))h''(t) \quad - - - - - \quad (1)$$

si descomponemos $\alpha''$ y $\alpha_1''$, en sus componentes tangencial (en la dirección del vector tangente) y normal (ortogonal a la anterior), intuitivamente son: la componente del cambio del vector tangente en la dirección de la curva misma, y nos da información de qué tan uniformemente se recorre la curva, y la componente en la dirección normal, nos dice qué tanto cambia de dirección el vector tangente, i.e., qué tanto se curva la curva, respectivamente; tenemos



$$\alpha''(t) = \alpha''(t)_T + \alpha''(t)_N \quad \text{y} \quad \alpha_1''(t) = \alpha_1''(t)_T + \alpha_1''(t)_N$$

y de (1) se tiene $\alpha_1''(t)_N = h'^2(t)\alpha''(h(t))_N$, donde $h'(t) \neq 0$ para toda $t$, en particular si $\alpha_1 = \tau$ parametrización por longitud de arco, entonces $\alpha_1''(t)_T = 0$ y por lo tanto:

$$\overrightarrow{k(p)} = \alpha''(0)_N / \|\alpha'(0)\|^2.$$

La función $K(p)$ resuelve el problema de medir respecto al primer enfoque, qué tanto deja de ser plana una curva.

**Definición 12.-** Dada una curva $\alpha$, *la longitud de arco* de $\alpha(t_0)$ a $\alpha(t_1)$ es:

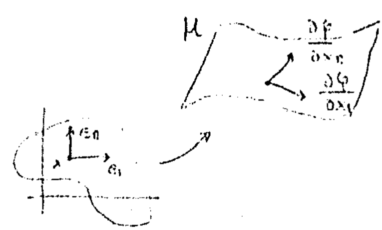
$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

**Proposición 1.-** Si $r$ está parametrizada por longitud de arco, entonces la longitud de arco de $r(t_0)$ a $r(t_1)$ es $t_0 - t_1$. □

La demostración es inmediata, esto justifica el nombre de parametrización por longitud de arco.

**Observación.-** Como una isometría es una función que preserva las distancias (hecho que no probaremos); por ésta proposición, las parametrizaciones por longitud de arco son isometrías, es decir, nos dan una representación fiel de la curva en una recta ($I \subset \mathbb{R}$); como éstas siempre existen, bajo el segundo enfoque todas las curvas son planas (o rectas), luego las curvas no se pueden curvar intrínsecamente.

## § 4 CURVATURA EXTRÍNSECA



Trabajaremos en $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ variedad diferenciable, con carta $(\varphi, U)$. Como $\varphi$ es regular, para cada $x \in U$ tenemos que $d\varphi_x : T_x\mathbb{R}^n \to T_{\varphi(x)}M$ es inyectiva, y por lo tanto $\{d\varphi_x(e_i) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|_x\}_{i=1}^n$ la imagen de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (base canónica de $\mathbb{R}^n \simeq T_x\mathbb{R}^n$) es base de $T_{\varphi(x)}M$.

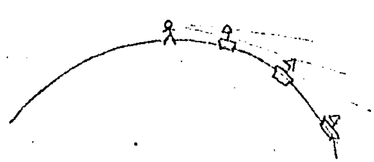
Tenemos $T_{\varphi(x)}M \subset T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^{n+k} \simeq \mathbb{R}^{n+k}$ es subespacio de dimensión $n$, a su complemento ortogonal lo llamamos $N_pM = (T_pM)^\perp$, es tal que $T_pM \oplus N_pM = T_p\mathbb{R}^{n+k}$ y lo llamaremos el *espacio normal* a $M$ en $p$.

Omitiremos la demostración de los siguientes hechos :

Como estamos trabajando en variedades que constan de una sola carta, existen campos vectoriales suaves en $\mathbb{R}^{n+k}$ $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$, definidos para cada $p \in M$, tales que $\{Y_1(p), \ldots, Y_k(p)\}$ es base de $N_pM$ (en el caso de variedades que no se pueden cubrir con una sola carta, hacemos esto localmente).

Dado un campo vectorial definido en $M$ (o en un subconjunto), existe otro campo vectorial (no necesariamente único) definido en una vecindad de $M$ en $\mathbb{R}^{n+k}$, del cual es restricción.

En ésta sección, construiremos un objeto de modo que bajo el primer enfoque nos diga en que medida deja de ser plana una variedad. Para esto sigamos la idea de observar el mástil de un barco, como sabemos este se "acorta" o cambia de posición cuando el barco se aleja del punto de observación en cierta dirección.



Para seguir ésta idea, consideremos $\nu \in N_pM$ y $v \in T_pM$ con $p \in M$ (la idea del mástil y la dirección en que se aleja). Sean $\sigma : I \to M$ con $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = v$, una *curva adaptada* a $v$ (no es única), y un campo $Y : W \to T\mathbb{R}^{n+k}$ ($T\mathbb{R}^{n+k}$ es el haz tangente), tal que

$Y(x) \in N_xM$ para cada $x \in W$, donde $W$ es vecindad de $M$ en $\mathbb{R}^{n+k}$ y $Y(p) = \nu$. Considero $\overline{Y}(t) = Y(\sigma(t))$ que corresponde a las posiciones de los mástiles, nos interesa lo que sucede en $p$, por eso nos fijaremos en $\overline{Y}'(0)$, pero como en el caso de las curvas lo descompondremos como sigue:

$$\overline{Y}'(0) \in T_p\mathbb{R}^{n+k} = T_pM \oplus N_pM, \text{ así, } \overline{Y}'(0) = \overline{Y}'_T(0) + \overline{Y}'_N(0).$$

Intuitivamente $\overline{Y}'_N(0)$, la variación de $\overline{Y}$ en la dirección normal a $M$, me mide cuanto cambia $\overline{Y}$ en la dirección de sí mismo (normal), como se estira, gira, etc. pues no hemos puesto restricciones sobre $Y$ en este sentido (los mástiles sí tienen restricciones).

En cambio $\overline{Y}'_T(0)$, la variación de $\overline{Y}$ en la dirección del espacio tangente, me da información de la forma de $M$, de la variación que está obligado a tener $\overline{Y}$ por ser normal, pasar por $\nu$, e ir en la dirección $v$; pues probaremos que $\overline{Y}'_T(0)$ sólo depende de $\nu$ y $v$.

**Proposición 2.-** $\overline{Y}'_T(0)$ sólo depende de $\nu$ y $v$, es decir, si $\sigma_1$ y $Y_1$ son otros curva y campo, tales que $\sigma_1(0) = v$ y $Y_1(p) = \nu$, entonces para $\overline{Y}_1 = Y_1 \circ \sigma_1$ se tiene $\overline{Y}'_1(0)_T = \overline{Y}'(0)_T$.

**Demostración.-** Basta mostrar, $\overline{Y}'_1(0) - \overline{Y}'(0)$ tiene componente tangencial igual a cero, o equivalentemente, $w \cdot (\overline{Y}'_1(0) - \overline{Y}'(0)) = 0$ para toda $w \in T_pM$. Sea $w \in T_pM$ fija, arbitraria, sea $X$ un campo vectorial definido en una vecindad de $M$ de forma que restringido a $M$ es tangente y $X(p) = w$. Sea $\overline{X}(t) = X(\sigma(t))$; como $\overline{X}$ es tangente y $\overline{Y}$ es normal, se tiene $X(\sigma(t)) \cdot \overline{Y}(t) = 0$, derivando

$$D_{\sigma(t)}X(\sigma'(t)) \cdot \overline{Y}(t) + \overline{X}(t) \cdot \overline{Y}'(t) = 0$$

y evaluando en cero tenemos:

$$D_pX(v) \cdot \nu + w \cdot \overline{Y}'(0) = 0, \qquad \text{- - - - - - - - -} \qquad (2)$$

si hacemos lo mismo para $Y_1$ tenemos

$$D_pX(v) \cdot \nu + w \cdot \overline{Y}'_1(0) = 0$$

y restando hemos terminado. □

**Definición 13.-** Definimos $A_p$ como sigue:

$$A_p: N_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$(\nu, v) \longmapsto \overline{Y}'(0)_T = A_p(\nu, v).$$

Intuitivamente, $A_p(\nu, v)$ no depende de como se estire $Y$, sino de la forma de la variedad $M$, esto es, por muy derecho que quisieramos construir $Y$, éste está obligado a tener ésta componente en su variación en la dirección de $v$, por el hecho de ser normal a la variedad.

**Observación.-** La construcción de $A_p$ depende de que pudimos ver como varía un campo normal a $M$ "desde afuera", es decir, usamos el espacio ambiente.

**Proposición 3.-** $A_p$ es un operador bilineal.

**Demostración.-** Sea $\{w_i\}_{i=1}^n$ base ortonormal de $T_pM$, y $X_i$ los campos correspondientes como en la demostración anterior, de la fórmula (2) de la demostración anterior tenemos que para $w \in T_pM$,

$$D_pX(v)\cdot\nu = -w\cdot\overline{Y}'(0),$$

así,

$$A_p(\nu,v) = \overline{Y}'(0)_T = \sum_{i=1}^{n}(w_i\cdot\overline{Y}'(0))w_i = -\sum_{1}^{n}(D_pX_i(v)\cdot\nu)w_i,$$

por linealidad de las $D_pX_i$ y la bilinealidad del producto escalar tenemos el resultado. □

Consideremos por un momento el caso $k=1$ (codimensión uno), $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie; en tal caso para $p\in M$ $N_pM$ es de dimensión uno, esto nos permite escoger uno de los dos vectores unitarios, digamos $N_p\in N_pM\subset T_p\mathbb{R}^{n+1}\simeq\mathbb{R}^{n+1}$, lo cual nos da una aplicación suave

$$G\colon M\longrightarrow\mathbb{S}^n$$
$$p\longmapsto N_p$$

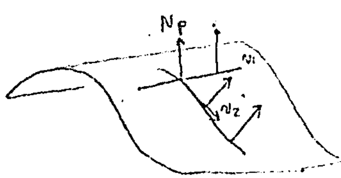
llamada la aplicación de Gauss; tenemos para cada punto $p$ :

$$A_p\colon T_pM\to T_pM \text{ dada por } A_p(v)=A_p(G(p),v)$$

que es la diferencial de la aplicación de Gauss, y nos mide como "cae" $N_p$ al moverlo sobre $M$ en la dirección de $v$.

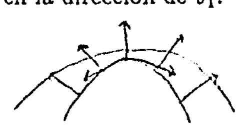
En el caso general, cuando la variedad no se puede cubrir con una sola carta, necesitamos para este análisis la hipótesis extra de que se puede definir esta aplicación $G$ continuamente en toda la variedad, decimos así, que $M$ es orientable.

Veamos unos ejemlos:

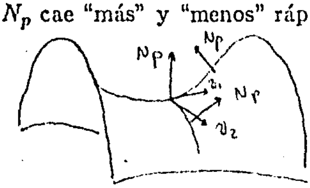



Consideremos el cilindro de la figura, para cada $p\in M$ hay dos direcciones distinguidas, los vectores propios de $A_p$, $v_1$ y $v_2$, y son tales que $A_p(v_1)=0$ y $A_p(v_2)=\lambda v_2$, es decir, al mover $N_p$ en la dirección de $v_2$ no "cae", pero al moverlo en la dirección de $v_1$ "cae" en la misma dirección de $v_1$, y para cualquier otra dirección, el vector $N_p$ "cae" en la dirección de $v_1$.

Para un casquete esférico no hay direcciónes privilegiadas, pues el vector $N_p$ siempre "cae" en la misma dirección en que se mueve, $A_p=\lambda 1_{T_p\mathbb{S}^2}$.



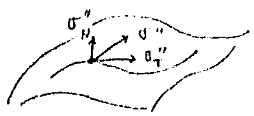
En un elipsoide, se puede ver, hay dos direcciones distinguidas en las cuales el vector $N_p$ cae "más" y "menos" rápido, respectivamente.




Otro ejemplo interesante es el de un punto silla, aquí tenemos un valor propio positivo y uno negativo, en una dirección el vector normal "cae" hacia atrás, al avanzar en esa dirección .

Como vemos en los ejemplos, en el caso de codimensión uno, se puede sacar mucha información de la aplicación $A_p$ (vectores propios, valores propios, etc.); pero en general es más difícil (para $k\neq 1$).

Enseguida haremos otra construcción aparentemente diferente, para entender ésta aplicación mejor:



Consideremos $v \in T_pM$ y $\sigma: I \to M$ curva adaptada a $v$, es decir, $\sigma'(0) = v$, $\sigma(0) = p$.

Nos preguntamos ¿qué tanto se curva $\sigma$?, para esto debemos observar $\sigma''$, y ahora lo descompondremos en sus componentes tangencial y normal a la variedad (no a la misma curva como antes):

$$\sigma''(0) = \sigma''(0)_N + \sigma''(0)_T \quad \text{con} \quad \sigma''(0)_T \in T_pM \text{ y } \sigma''(0)_N \in N_pM.$$

Se tiene como antes $\sigma''(0)_N$, es la componente que debe tener toda curva por estar contenida en la variedad, y pasar por $p$ con velocidad $v$, por más "derecha" que tratemos de ponerla.

En cambio, $\sigma''(0)_T$ es responsabilidad de la curva y nos mide qué tanto se curva $\sigma$ en la variedad.

Tenemos una aplicación

$$C_p: T_pM \to N_pM \quad \text{dada por } C_p(v) = \sigma''(0)_N$$

con la siguiente propiedad: $C_p(\lambda v) = \lambda^2 C_p(v)$ (basta tomar $\sigma_1(t) = \sigma(\lambda t)$ ); esto nos hace suponer que proviene de una aplicación bilineal, buscamos: $B_p: T_pM \times T_pM \to N_pM$ tal que $C_p(v) = B_p(v, v)$.

Observamos que, para definir $C_p$ el vector $v$ se usó en dos sentidos, pues da la dirección en la que se deriva el campo al cual el mismo dió origen (el campo $\sigma'(t)$), desdoblando estos papeles:

Sean $v, w \in T_pM$ y $X$ un campo de vectores definido en una vecindad de $M$, tal que $X(q) \in T_qM$ para toda $q \in M$ y $X(p) = v$, considero ahora $DX(w)$ y su componente normal.

**Definición 14.-** Se define $B_p: T_pM \times T_pM \to N_pM$ por $B_p(v, w) = DX(w)_N$, la segunda forma fundamental.

Observemos, por la definición de diferencial, para $\sigma$ curva adaptada a $w$, y $\overline{X}(t) = X(\sigma(t))$ se tiene $B_p(v, w) = \overline{X}'(0)_N$. Además por definición $B_p(v, v) = C_p(v)$.

**Proposición 4.-** $B_p$ es bilineal y está bien definida (i.e., sólo depende de $v, w \in T_pM$).

**Demostración.-** Sean $X_1$ y $\sigma_1$ otros campo y curva, tales que $X_1(p) = v$ y $\sigma_1'(0) = w$, debemos demostrar $\overline{X}'(0)_N = \overline{X}_1'(0)_N$ o que para toda $u \in N_pM$ $u \cdot \overline{X}'(0) = u \cdot \overline{X}_1'(0)$. Para esto, sea $u \in N_pM$ y $Y$ campo vectorial definido en una vecindad de $M$, tal que su restricción a $M$ es normal a $M$ y $Y(p) = u$; así, $Y(\sigma(t)) \cdot \overline{X}(t) = 0$ y derivando $D_{\sigma(t)}Y(\sigma'(t)) \cdot \overline{X}(t) + Y(\sigma(t)) \cdot \overline{X}'(t) = 0$, evaluando en cero, tenemos:

$$u \cdot \overline{X}'(0) = -DY(v) \cdot w,$$

y haciendo lo mismo para $\overline{X}_1'(0)$ tenemos que $B_p$ está bien definida y ésta expresión nos da la bilinealidad. $\square$

Con esto tenemos que, $B_p(v,w)$ es la componente de la variación de todo campo tangente a $M$ en la dirección de $w$, y que en $p$ vale $v$.

Observemos que las definiciones de $B_p$ y $A_p$ son duales, pues para $A_p$ consideramos la componente tangencial de la variación de un campo normal a lo largo de una curva, y $B_p$ es la componente normal de la derivada de un campo tangente a lo largo de una curva. Para relacionar estos dos operadores consideremos: $\nu \in N_pM$ , $v, w \in T_pM$ , $\sigma$ curva adaptada a $v$ y $X, Y$ campos definidos en una vecindad de $M$, tales que para toda $q \in M$ se tiene que $X(q) \in T_qM, Y(q) \in N_qM$ y $X(p) = w$, $Y(p) = \nu$, y sean $\overline{X}(t) = X(\sigma(t))$ y $\overline{Y}(t) = Y(\sigma(t))$, entonces como $X$ es tangente y $Y$ es normal a $M$: $\overline{X}(t) \cdot \overline{Y}(t) = 0$ para toda $t$, derivando $\overline{X}'(t) \cdot \overline{Y}(t) + \overline{X}(t) \cdot \overline{Y}'(t) = 0$, evaluando en cero y descomponiendo tenemos:

$$0 = \overline{X}'(0)_N \cdot \nu + \overline{X}'(0)_T \cdot \nu + w \cdot \overline{Y}'(0)_N + w \cdot \overline{Y}'(0)_T = \overline{X}'(0)_N \cdot \nu + w \cdot \overline{Y}'(0)_T,$$

hemos probado la siguiente proposición:

**Proposición 5.-** Los operadores $A_p$ y $B_p$ cumplen para $n \in N_pM$, $v, w \in T_pM$ la siguiente relación:

$$A_p(\nu, v) \cdot w + B_p(v, w) \cdot \nu = 0$$

$\square$

**Observación.-** Esta relación me permite conocer $B_p$ a partir de $A_p$ y viceversa.

**Proposición 6.-** $B_p\colon T_pM \times T_pM \to N_pM$, es una aplicación simétrica.

**Demostración.-** Usaremos la parametrazación $\varphi$ para expresar a $B_p$. Sabemos $\{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_p : i = 1, \ldots, n\}$ es base de $T_pM$. Sean $v, w \in T_pM$ , $\sigma$ y $X$ el campo y la curva correspondientes, luego, $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_p$, $w = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_p$.

Sea $u(t) = \varphi^{-1}(\sigma(t))$ y $X(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_x$ para cada $x \in U$ y restringiendo a $u$ tenemos $\overline{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u(t))$, derivando

$$\overline{X}'(t) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i'(u(t)) \frac{du_j}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(u(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(u(t)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{du_j}{dt}(t),$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "u"'] & & M \\ & U \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

evaluando en cero, proyectando en el espacio normal, y observando $\frac{du_j}{dt}(0) = a_j$ y $b_i(u(0)) = b_i$ tenemos:

$\overline{X}'(0)_N = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i x_j})_N$ que nos da otra vez la bilinealidad y por la simetría de las parciales terminamos. $\square$

**Observación.-** $A_{p,\nu}\colon T_pM \to T_pM$ dado por $A_{p,\nu}(v) = A_p(\nu, v)$, para $\nu \in N_pM$ fijo, por lo anterior es autoadjunto, todos sus valores propios son reales y se conocen como las *curvaturas principales*; los vectores propios forman una base ortogonal y se conocen como las *direcciones principales* (intuitivamente indican en cuales direcciones el vector $n$ "cae" más o "menos" rápido). A partir de los $A_{p,\nu}$ se puede caracterizar una vecindad de $p$ como alguna de las formas canónicas (puntos elípticos, puntos silla, etc.).

**Observación.-** Para $\tau$ una curva parametrizada por longitud de arco se tiene de la definición 10:

$$C_p(\tau'(0)) = \overrightarrow{k(p)}.$$

Con estos tres operadores $A_p, B_p, C_p$, los cuales se anulan simultáneamente (si uno es idénticamente cero en un punto lo son los tres), hemos construído los objetos que queríamos para medir la curvatura extrínsecamente.

**Observación.-** Para terminar observemos, dada $T: \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ isometría y $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ variedad diferenciable, por la definición de los operadores $A_p, B_p$ y $C_p$, resulta que se preservan bajo $T$, es decir, para

$$p \in M, \quad DT_p(A_p(n,v)) = A_{T(p)}(DT_p(n), DT_p(v))$$

y análogamente para $B_p$ y $C_p$.

## § 5 CURVATURA RIEMANNIANA

Nos ocuparemos ahora del segundo enfoque. Diremos que una variedad $M$ es plana, si existe una isometría $\varphi$ de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en la variedad $M^n$, no si está contenido en un plano como en el caso anterior.

$U \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} M$

Como observamos al final de la sección 3, para las curvas (dimensión 1), las parametrizaciones por longitud de arco nos resuelven el problema de representar fielmente, por eso, este problema deberá involucrar por lo menos dos dimensiones.

Dada $\sigma: I \to M^n$ teníamos $\sigma''(t) = \sigma''(t)_N + \sigma''(t)_T$, donde $\sigma''(t)_N = C_{\sigma(t)}(\sigma'(t))$ depende únicamente de $\sigma'(t)$, es la componente que está obligada a tener $\sigma''$; en cambio $\sigma''_T$ depende específicamente de la curva, ésta componente de la aceleración habrá curvas que la tengan mayor, menor o cero.

Nos interesan curvas en $M$ con la menor aceleración posible, pero lo más que podemos pedir es $\sigma''_T$ cero, pues sabemos que $\sigma''_N$ depende no de la curva sino de la variedad $M$, tenemos la siguiente:

**Definición 15.-** Una geodésica es una curva $\sigma: I \to M$ tal que $\sigma''(t)_T = 0$ para toda $t \in I$.

Las geodésicas, son las curvas en $M$ "más derechas" en este sentido. Dada una curva $\sigma$, el campo $\sigma''(t)_T$ mide que tanto deja de ser geodésica $\sigma$.

**Definición 16.-** La curvatura geodésica de $\sigma$ en $t$ es $\sigma''_T(t)$.

Para generalizar esta definición, no sólo al caso del campo de vectores tangentes a $\sigma$, sino a cualquier campo de vectores a lo largo de $\sigma$, recordemos que dado $X$, un campo vectorial tangente a $M$ y $\sigma$ una curva en $M$, para $\overline{X}(t) = x(\sigma(t))$ tenemos $\overline{X}'(t) = \overline{X}'(t)_N + \overline{X}'(t)_T$, donde $\overline{X}'(t)_N = B_{\sigma(t)}(\sigma'(t), \overline{X}(t))$ es la componente obligada por ser $X$ tangente, sin embargo $\overline{X}'(t)_T$ se puede tener o nó, esto da origen a la siguiente:

**Definición 17.**-La *derivada covariante* del campo $X$ en la dirección de $\sigma'(t)$ es

$$\overline{X}'(t)_T = D_{\sigma'(t)}X = \frac{D}{\partial t}Y(t).$$

Es la proyección al plano tangente a $M$ de la derivada direccional usual. Con esta definición, la curvatura geodésica es la derivada covariante del campo de velocidades de un curva en la dirección de él mismo.

**Definición 18.**- Un campo $X$ de vectores tangentes a $M$ es *paralelo* a lo largo de una curva $\sigma$, si $D_{\sigma'(t)}\overline{X}(t) = 0$ para toda $t$.

Las geodésicas son curvas tales que el campo de vectores tangentes a lo largo de ellas mismas es paralelo.

Nos preguntamos ahora si dado $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe una geodésica en $M$ que pase por $p$ con velocidad $v$; para responder a esto analicemos lo que sucede en coordenadas locales.

Sea $(U, \varphi)$ la carta de $M^n$ y supongamos $\sigma: I \to M$ es una curva, sea $u(t) = \varphi^{-1}(\sigma(t))$, entonces $\sigma'(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(u(t))u_i'(t)$, derivando

$$\sigma''(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}u_i''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(u(t))u_i'(t)u_j'(t),$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "u"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

para que $\sigma$ sea geodésica nos interesa que su componente tangencial o equivalentemente sus proyecciones en la base $\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\}$ sean cero, es decir:

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}u_i'u_j' + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}u_i'' = 0$ para $k = 1, \ldots, n$.

Denotamos $g_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, los llamados *coeficientes de la métrica*. La matriz $(g_{ij})$ es la matriz del producto interior restringido a $T_pM$ respecto a la base $\{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\}$, y es por lo tanto invertible; esto me permite despejar las $u_i''$, y obtener un sistema de ecuaciones diferenciables de segundo orden, por la diferenciabilidad que hemos supuesto siempre tendrá solución local dadas condiciones iniciales de posición y velocidad ($p$ y $v$), luego existen las geodésicas que queremos.

Denotaremos $\Gamma_{ijk} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, y observamos:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$$

usando la simetría de los primeros indices de las $\Gamma_{ijk}$ obtengo que se pueden expresar en términos de las $g_{ij}$ y sus derivadas.

**Definición 19.**- Dada $\sigma$ una curva y $v \in T_pM$, con $\sigma(0) = p$; un campo $X$ paralelo a lo largo de $\sigma$, tal que $X(p) = v$, se dice es el *transporte paralelo* de $v$ a lo largo de $\sigma$.

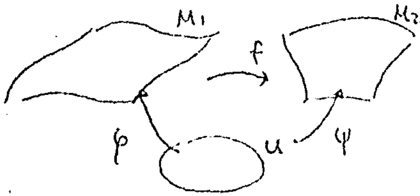
Un campo $X$ es paralelo a largo de $\sigma$ si:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'(t) g_{ik}(\sigma(t)) + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(t)\Gamma_{ijk}(\sigma(t)) u_j'(t) = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, n$$

donde $\overline{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, como para el caso de las geodésicas, también existe siempre el transporte paralelo.

**Observación.-** Las $g_{ij}$ (y sus derivadas) determinan las geodésicas y el transporte paralelo.

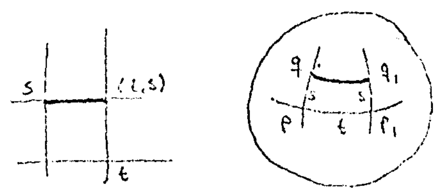
**Teorema.-** Sea $f: M_1 \to M_2$ una isometría, entonces, $f$ manda geodésicas en geodésicas y campos paralelos en campos paralelos.




**Demostración.-** Sea $(\varphi, U)$ carta de $M_1$, consideremos $\psi = f \circ \varphi$, entonces, $(\psi, U)$ es carta de $M_2$ (pues $f$ es difeomorfismo). Tenemos $Df(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, y como f es isometría:

$\overline{g}_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_j} = Df(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) \cdot Df(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = g_{ij}$, esto es, las funciones $g_{ij}$ de $M_1$ en $(\varphi, U)$ toman el mismo valor que $\overline{g}_{ij}$ de $M_2$ en $(\psi, U)$ bajo puntos correspondientes, por la observación anterior, esto prueba el teorema. □

Bajo este segundo enfoque, nos interesa medir qué tan difícil es que una variedad sea isométrica a un abierto de $\mathbb{R}^n$, para eso, consideremos un ejemplo. Trataremos de construir una isometría $f$ de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{S}^2$ la esfera. Usaremos el hecho de que las geodésicas en $\mathbb{S}^2$ son los circulos máximos.

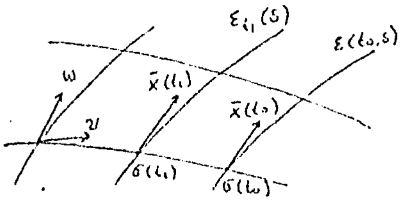



Sea $p = f(0)$, la imagen del eje $X$ será un circulo máximo al que consideraremos como el ecuador con vector tangente $Df_0(e_1)$ ortogonal a $Df_0(e_2)$, la imagen del eje $Y$ será el meridiano por $p$, la imagen del punto $(t, 0)$ es un punto $p_1$ en el ecuador a distancia $t$ de $p$, la imagen de $(0, s)$ es $q$ en el meridiano por $p$ a distancia $s$ de $p$, la recta $x = t$, tendrá como imagen el meridiano por $p_1$, por lo tanto, el punto $(t, s)$ tendrá imagen $q_1$ en el meridiano por $p_1$ a distancia $s$ de $p_1$, la recta $y = s$ se transforma en un paralelo el cual no es geodésica, pero esto no sería posible si $f$ fuera isometría.

Centraremos nuestra atención en esta dificultad, el objeto que construirémos nos medirá, qué tanto dejan de ser geodésicas las curvas obtenidas al "trasladar" o "empujar" una geodésica en determinada dirección (lo que en el ejemplo es el paralelo que empujamos una distancia $s$ del ecuador), o más generalmente, dado un campo paralelo a lo largo de una curva, lo "empujaremos" en cierta dirección y veremos que tanto deja de ser paralelo.

Sean $M^n$ variedad diferenciable $p \in M$, $v \in T_pM$, $\sigma: I \to M$ la única geodésica tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = v$, y sea $w \in T_pM$. Primero empujaremos a $\sigma$ en la dirección de $w$. Para esto sea $X(t): I \to TM(\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} T_xM)$ el campo paralelo a lo largo de $\sigma$ con $X(0) = w$, para empujar a $\sigma$ lo más "parejo" posible en la dirección de $X$ consideremos:

Para cada $t$, $\Sigma_t: J_t \to M$ la geodésica $\Sigma_t(s)$ tal que $\Sigma_t(0) = \sigma(t)$ y $\Sigma_t'(0) = X(t)$; por la compacidad de $I$ podemos considerar $J_t = J$ para cada $t$ en $I$, tenemos:




**Definición 20.-** Se define:
$\Sigma: I \times J \to M$ dada por $\Sigma(t,s) = \Sigma_t(s)$, $\Sigma$ resulta diferenciable (pues las soluciones de las ecuaciones diferenciales que definen las geodésicas, son diferenciables como función del parámetro y de las condiciones iniciales), y depende de $v$ y $w$.

Las curvas $\Sigma(t,s_0)$ para $s_0$ fija son las trasladadas de $\sigma$ y queremos saber si son geodésicas o nó, luego debemos calcular su curvatura geodésica, la derivada covariante del campo $\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(t,s_0)$,esto es $\frac{D}{\partial t}(\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(t,s_0))$, pero nos interesa su variación al desplazar $\sigma$ ($s_0 = 0$) por eso consideraremos $\frac{D}{\partial s}(\frac{D}{\partial t}(\frac{\partial\Sigma}{\partial t}(0,0)))$; como derivamos dos veces respecto a $t$ es de suponer es cuadrático en $v$ y por involucrar únicamente derivadas covariantes ha de ser lineal en $w$. Pero mejor analicemos el caso más general de empujar campos paralelos, desdoblando los dos papeles que está jugando $v$.

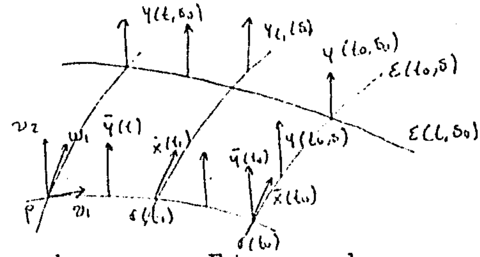
Para esto sean $v_1, v_2; w_1 \in T_pM$:

$v_1$) Considero $\sigma: I \to M$ la geodésica tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = v_1$.

$v_2$) Sea $\overline{Y}: I \to TM$ campo paralelo a lo largo de $\sigma$, tal que $Y(0) = v_2$.

$w_1$) $X: I \to TM$ otro campo paralelo a lo largo de $\sigma$, con $X(0) = w_1$.

Sea $\Sigma$ como en la definición 20 (usando $v_1$ $y$ $w_1$), y sobre estas curvas considero:
Para cada $t \in I$, sea $Y_t: J \to TM$ el campo paralelo a lo largo de $\Sigma_t$ tal que $Y_t(0) = \overline{Y}(t)$, y como antes tenemos:




**Definición 21.-** Definimos
$Y: I \times J \to TM$ como $Y(t,s) = Y_t(s)$, tambien resulta diferenciable (corresponde al campo $\frac{\partial\Sigma}{\partial t}$ en el caso $v_1 = v_2 = v$); y nos interesa saber si restringido a la curva $\Sigma(t,s_0)$ es paralelo,es decir, debemos calcular la derivada covariante de $Y(t,s_0)$ y ver su variación en la dirección de $w$ al pasar por $p$. Esto nos conduce a la siguiente:

**Definición 22.-**

$$R_p: T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$(v_1, w_1, v_2) \mapsto \frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t}(0,0),$$

como veremos, sólo depende de $v_1, w_1$ y $v_2$, pero se acostumbra manejar como:

**Definición 23.-**

$$K_p: T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$
$$(v_1, w_1, v_2, w_2) \longmapsto R_p(v_1, w_1, v_2) \cdot w_2,$$

se conoce como el tensor de curvatura Riemanniana de $M$ en $p$ y resulta ser (como enseguida veremos) una función cuatrilineal, definida para cada $p \in M$.

**Observación.-** Para definir a $K_p$ no usamos la carta $(\varphi, U)$, es decir $K_p$ no depende de una parametrzación particular, luego podemos definirla globalmente en toda la variedad $M$.

**Observación.-** Para definir $K_p$ usamos: geodésicas, campos paralelos y derivada covariante, los cules junto con el producto escalar, son invariantes bajo isometrías. Esto justifica el decir que $K_p$ es intrínseco a la geometría de $M$.

**Proposición 7.-** $R_p$ es trilineal y sólo depende de $v_1, w_1$ y $v_2 \in T_pM$.

**Demostración.-** Sabemos $\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{DY}{\partial t} + B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial t})$ por las definiciones 14 y 17, si derivamos respecto a $s$ tenemos

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial t} = \frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t} + (\frac{\partial}{\partial s}\frac{DY}{\partial t})_N + A_p(B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial t}), \frac{\partial \Sigma}{\partial s}) + (\frac{\partial}{\partial s}B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial t}))_N$$

por la definición 13, sabemos $\frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial s}$ con lo que:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}((\frac{\partial Y}{\partial s})_T + B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial s})) = A_p(B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial s}), \frac{\partial \Sigma}{\partial t}) + (\frac{\partial}{\partial t}B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial s}))_N,$$

pues $(\frac{\partial Y}{\partial s})_T = \frac{DY}{\partial s} = 0$ ya que $Y(t_0, 0)$ es paralelo a lo largo de $\Sigma(t_0, s)$; igualando las componentes tangenciales de las dos expresiones, se tiene:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t} = A_p(B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial s}), \frac{\partial \Sigma}{\partial t}) - A_p(B_p(Y, \frac{\partial \Sigma}{\partial t}), \frac{\partial \Sigma}{\partial s})$$

evaluando en $(0,0)$ y usando $\frac{\partial \Sigma}{\partial s}|_{(0,0)} = w_1$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}|_{(0,0)} = v_1$, $Y(0,0) = v_2$ llegamos a:

$$R_p(v_1, w_1, v_2) = \frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t}\bigg|_{(0,0)} = A_p(B_p(v_2, w_1), v_1) - A_p(B_p(v_2, v_1), w_1) \qquad (3)$$

recordando la bilinealidad de $A_p$ y $B_p$ tenemos la demostración. □

**Corolario.-** $K_p$ es tetralineal y solo depende de $v_1, w_1, v_2$ y $w_2 \in T_pM$ □

**Observación.-** Recordando la relación $A_p(n, v) \cdot w = -B_p(v, w) \cdot n$ que vimos en la proposición 5, de la expresión (3) tenemos:

$$K_p(v_1, w_1, v_2, w_2) = A_p(B_p(v_2, w_1), v_1) \cdot w_2 - A_p(B_p(v_2, v_1), w_1) \cdot w_2 =$$
$$= B_p(w_1, w_2) \cdot B_p(v_2, v_1) - B_p(v_1, w_2) \cdot B_p(v_2, w_1) = B_p(v_1, v_2) \cdot B_p(w_1, w_2) - B_p(v_1, w_2) \cdot B_p(w_1, v_2) =$$

$$\det \begin{vmatrix} B_p(v_1, v_2) & B_p(v_1, w_2) \\ B_p(w_1, v_2) & B_p(w_1, w_2) \end{vmatrix} = K_p(v_1, w_1, v_2, w_2)$$

donde al multiplicar en éste "determinante" lo hacemos escalarmente. Esto nos da una forma de calcular $K_p$ en términos de la segunda forma fundamental. .

Para terminar, observamos algunas propiedades de $K_p$ inmediatas de la simetría de $B_p$ y de las propiedades de determinantes:

$K_p(v_1, w_1, v_2, w_2) = -K_p(w_1, v_1, v_2, w_2) = -K_p(v_1, w_1, w_2, v_2) = K_p(v_2, w_2, v_1, w_1)$.

También se cumple la identidad:

$$K_p(v_1, w_1, v_2, w_2) + K_p(w_1, v_2, v_1, w_2) + K_p(v_2, v_1, w_1, w_2) = 0$$

se conoce como la identidad de Bianchi, y se demuestra haciendo el cálculo a pie usando la expresión del determinante.

Hemos construido para cada $p \in M$ un operador tetralineal, el que conocemos como al tensor de curvatura.

Detengámonos un momento a ver lo que sucede si $K_p$ es el operador cero para todo $p$ en alguna vecindad $V$ en $M^n$; en tal caso, esto implica que $R_p$ es también el operador cero en dicha vecindad, esto quiere decir que $\frac{DY}{\partial t}$ es un campo paralelo a lo largo de las curvas $\Sigma_{t_0}$, esto es, que es el transporte paralelo a lo largo de dichas curvas del vector $\frac{DY}{\partial t}(t_0, 0)$, para cada $t_0 \in I$; pero estos vectores son cero en vista de que el campo $Y(t, 0)$ es paralelo a lo largo de la godésica $\sigma$; esto quiere decir que $\frac{DY}{\partial t}$ es constante igual a cero en $V$; lo cual implica que el campo $Y$ es paralelo a lo largo de las curvas $\Sigma(t, s_0)$ para cada $s_0 \in J$ fija. Aplicando esto al campo paralelo de vectores tangentes a la geodésica $\sigma$, obtenemos que la curvas $\Sigma(t, s_0)$ son tales que su campo de vectores tangentes es paralelo, esto es, son geodésicas. En limpio, si $K_p$ es constante igual a cero en una vecindad, entonces en esa vecindad al "empujar" una geodésica en cualquier dirección, obtenemos nuevamente una geodésica; esto nos sugiere la existencia de una isometría de la vecindad con un abierto de $\mathbb{R}^n$.

# CAPITULO 2

## § 1 INTRODUCCION

Hasta el momento hemos dado una construcción geométrica del tensor de curvatura, que nos ayuda un poco a entender que es lo que mide. Ahora lo que haremos es generalizar los conceptos del capítulo anterior, para variedades no solo contenidas en algún $\mathbb{R}^{n+k}$. Para esto introduciremos las variedades en un sentido más abstracto, y manejaremos el lenguaje moderno de la geometría diferencial. Como la mayoria de las definiciones y demostraciones que veremos se encuentran en la mayoria de los libros de este tema, hay muchas de las demostraciones que no las daremos, pero a cambio daremos la referencia de algún lugar en donde se pueden encontrar. La idea de este capítulo es, una vez que hayamos generalizado lo del capítulo anterior, introducir otros conceptos con los que trabajaremos después.

## § 2 DEFINICIONES GENERALES

**Definición[1] 1.-** Una *variedad $C^k$-diferenciable* $M^n$ de dimensión $n$, es un espacio topológico paracompacto $M$ de Hausdorff y un sistema de subconjuntos abiertos $\Phi = \{U_\alpha\}$, con las siguientes propiedades:

i) $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de $M$ (i.e. $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$).

ii) Para cada $\alpha$ se tiene, una aplicación
$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n,$$
tal que $\varphi_\alpha$ es un homeomorfismo de $U_\alpha$ en un abierto de $\mathbb{R}^n$.

iii) Para cualesquiera $\alpha$ y $\beta$, la aplicación
$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathbb{R}^n$$
es un aplicación de clase $C^k$.

iv) $\Phi$ es maximal relativa a las condiciones ii) y iii).

En adelante supondremos $k = \infty$, es decir, las variedades diferenciables a las que nos referimos son $C^\infty$. Los conjuntos $U_\alpha$ son llamados *vecindades coordenadas*; las aplicaciones $\varphi_\alpha$ o las parejas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son llamadas *sistemas coordenados o parametrizaciones*; las aplicaciones $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ son los *cambios de coordenadas*; y si $\varphi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n) : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ entonces cada $x_i$ es llamada la *i-esima función coordenada* en $U_\alpha$.

**Definiciones[2] 2.-** Una aplicación entre variedades $f : M^n \to N^m$ es, *diferenciable*

[1] ver *[Sch] cap. I teo. (1) y (2) y [Hic] cap. I*

[2] ver *[Sch] cap. I teo. (1) y (2) y [Hic] cap. I*

(o suave) en $p \in M$; si existen $U_\alpha \subset M$ y $V_\beta \subset N$ vecindades coordenadas, con $p \in U_\alpha$ y $f(p) \in V_\beta$, tales que $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}^m$ es $C^\infty$. Decimos que $f$ es suave o diferenciable (a secas) si es suave para cada $p \in M$. En particular si $f$ es diferenciable, biyectiva, con $f^{-1}$ diferenciable, decimos que $f$ es un difeomorfismo.

Denotamos: $C^\infty(M,N)$ las aplicaciones suaves de $M$ en $N$, $C^\infty(M,\mathbb{R}) = C^\infty(M)$ y por $C^\infty(p)$ para $p \in M$ el conjunto de funciones reales diferenciables en $p$. Como podemos ver $C^\infty(M)$ y $C^\infty(p)$ son álgebras sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales de suma, multiplicación de funciones y producto por escalares.

**Definición[3] 3.-** Una derivación $D$ en un álgebra $A$ sobre $\mathbb{R}$ es, una aplicación lineal $D: A \to A$, tal que:

$$D(f \cdot g) = f \cdot (Dg) + (Df) \cdot g, \quad \text{para culesquiera } f, g \in A$$

**Definiciones[4] 4.-** Un vector tangente a $M^n$ en $p$ es, una derivación de $C^\infty(p)$. El espacio tangente a $M$ en $p$, denotado por $T_pM$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a $M$ en $p$, y resulta un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$; con la suma de funciones lineales como suma y el producto por escalares. Un campo vectorial en $M$ es una derivación de $C^\infty(M)$; y se puede hacer corresponder a una colección de vectores tangentes, uno por cada $p \in M$. Denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos vectoriales en $M$, el cual tiene un estructura de $C^\infty(M)$-módulo, en donde definimos el Parentesis de Poisson como

$$[X,Y] = XY - YX \in \mathfrak{X}(M).$$

Observamos que para $f \in C^\infty(M)$ constante y $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $Xf = 0$. Para $x_1, \ldots, x_n$ un sistema local de cooordenadas alrededor de $p$, consideremos los vectores $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ dados por

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p))$$

para $f \in C^\infty(p)$ donde $(U,\varphi)$ es la parametrización (o carta) correspondiente a $x_1, \ldots, x_n$. Estos vectores $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1}^n$ forman una base de $T_pM$ [5], el cual es por lo tanto de dimensión $n$.

Hacemos notar que los vectores $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ corresponden a los $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})_p$ del capítulo anterior. Y tenemos $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

**Definición[6] 5.-** Sean $M$ y $N$ variedades diferenciables. Sea $f: M \to N$ una aplicación suave. La diferencial de $f$ en $p \in M$ es, la aplicación lineal $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ dada para $v \in T_pM$ y $g \in C^\infty(f(p))$ por

$$(df_p(v))(g) = v(g \circ f).$$

**Observación[7].-** Para $f: M \to \mathbb{R}$ suave, tenemos que $df_p(v) = vf$.

**Definiciones[8] 6.-** Sea $M$ una variedad diferenciable. Definimos:

---

[3] *ver [Hel] cap I §2*

[4] *ver [Hic] cap I secc 1.3 y [Hel] cap 1 §2*

[5] *como podemos ver en [Hic]*

[6] *ver [Sin] cap V secc. 5.1 y [Hic] cap I secc. 1.4*

[7] *ver [Sin] remark en cap V §1 paj.103*

[8] *ver [Sin] cap V secc.5.2*

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM \quad \text{y} \quad T^*M = \bigcup_{p\in M} (T_pM)^*$$

el haz tangente y el haz cotangente a $M$ respectivamente, donde $(T_pM)^*$ es el espacio dual de $T_pM$; que resultan ser variedades diferenciables. Para las cuales tenemos $\pi: TM \to M$ la proyección, definida en $v \in TM$ donde $v \in T_pM$ para un único $p \in M$ (en tal caso denotaremos $v = (p, v)$) como $\pi(v) = p$. Análogamente la proyección para $T^*M$, la cual también denotaremos por $\pi$.

Con estas definiciones podemos considerar para $f: M \to N$ suave, $df = f_*: TM \to TN$ como $df(p, v) = (f(p), df_p(v))$.

En estos términos, un campo vectorial es, una aplicación $v: M \to TM$ suave, tal que $\pi \circ v = 1d_M$, es decir, una sección de $TM$.

**Definición 7.-** Sea $M$ una variedad $C^\infty$. Sea $\bigwedge^1(M)$ el dual del $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Los elementos de $\bigwedge^1(M)$ son llamados 1-formas diferenciales en $M$ y se puede ver[9], $w \in \bigwedge^1(M)$ es una aplicación $w: M \to T^*M$ suave, tal que, $\pi \circ w = 1d_M$.

Sea $U$ una vecindad coordenada en $M^n$ variedad diferenciable, con $(x_1, \ldots, x_n)$ funciones coordenadas en $U$, entonces $\{(dx_i)_p\}_{i=1}^n$ es base de $(T_pM)^*$ dual de $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$, por lo cual $w \in \bigwedge^1(U)$ tiene un expresión de la forma:

$$w = \sum_j f_j dx_j,$$

la diferenciabilidad de las $f_j$ es equivalente a la diferenciabilidad de $w$.

**Definición[10]8.-** Un campo tensorial covariante de orden $r$ en una variedad $M$ es, una función $r$-lineal en el $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. Una forma diferencial de orden $r$ (una $r$-forma) es, una función $r$-lineal alternante

$$w: \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}^{r-\text{veces}} \longrightarrow C^\infty(M),$$

esto es, una asignación de un elemento de grado $r$ en $\bigwedge(T_pM)^*$ (el álgebra exterior[11] sobre $(T_pM)^*$) para cada punto $p \in M$, al hacer corresponder una colección de vectores a un campo vectorial.

Si denotamos $\bigwedge^r(M) = \bigcup_{p\in M} \bigwedge^r(T_pM)^*$, una $r$-forma en $M$ es una aplicación

$$w: M \to \bigwedge^r(M),$$

tal que $\pi \circ w = 1d_M$ para la proyección $\pi: \bigwedge^r(M) \to M$ definida de manera obvia.

**Notación.-** Denotamos por $\mathfrak{D}^r(M)$ el conjunto de las $r$-formas en $M$, el cual tiene una estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

**Definición[12]9.-** Dadas $\theta \in \mathfrak{D}^r(M)$ y $w \in \mathfrak{D}^s(M)$, el producto exterior (producto cuña) de $\theta$ y $w$ es:

$$w \wedge \theta \in \mathfrak{D}^{r+s}(M),$$

---

[9] *en [Hel] cap I §2 2.2 y 2.3 y en [Kob] cap I prop 3.1*

[10] *ver [Mat] cap III §2 y el teorema de §3, [Sin] cap V §5.2, [Hel]cap I §2 inciso 2 y [Hic] cap 4 §4*

[11] *ver [Kob] cap 1 §2, [Mat] cap IV §2 y [Spi] cap 4 §preliminares algebráicos*

[12] *[Mat] cap III §3 y §2*

definido por:

$(w \wedge \theta)(x_1, \ldots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma w(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}) \theta(x_{\sigma(r+1)}, \ldots, x_{\sigma(r+s)})$

para $x_i \in \mathfrak{X}(M)$ con $i = 1, \ldots, r+s$.

Una propiedad inmediata del producto exterior, es que

$$w \wedge \theta = (-1)^{r \cdot s} \theta \wedge w.$$

**Observación.-** Si $(x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema local de coordenadas en $U$, entonces, $w \in \mathfrak{D}^r(U)$ tiene una expresión única de la forma

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \alpha_{i_1, \ldots, i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \\ &= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1, \ldots, i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}, \end{aligned}$$

donde las $\alpha_{i_1, \ldots, i_r} \in C^\infty(U)$.

Dada $f: M \to N$ suave, induce $f^*: \mathfrak{D}^r(N) \to \mathfrak{D}^r(M)$, definida por:

$$w \in \mathfrak{D}^r(N) \qquad f^*(w)(x_1, \ldots, x_r) = w(f_* x_1, \ldots, f_* x_r)$$

para $x_i \in \mathfrak{X}(M)$ con $i = 1, \ldots, x_r$, y se dice que $f^*(w)$ que en ocasiones denotaremos por $w^*$, es la *inducida* (o el pull-back) en $M$ de $w$ bajo $f$.

**Definición[13] 10.-** La *diferencial exterior* o derivada exterior es, la aplicación lineal (como $\mathbb{R}$ espacios vectoriales)

$$d: \mathfrak{D}^r(M) \to \mathfrak{D}^{r+1}(M)$$

caracterizada por:

(1) Si $f \in C^\infty(M) = \mathfrak{D}^0(M)$, entonces $d(f) = df$ es la diferencial usual de $f$.

(2) Si $w \in \bigwedge^r(M)$ y $\pi \in \bigwedge^s(M)$, entonces

$$d(w \wedge \pi) = dw \wedge \pi + (-1)^r w \wedge d\pi.$$

(3) $d \circ d = 0$.

**Observación.-** Es útil conocer formas explicitas de calcular $dw$ para $w \in \mathfrak{D}^r(M)$. Sea $(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema coordenado en $M$, luego se tiene

$$w = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \alpha_{i_1, \ldots, i_n} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r},$$

entonces $dw$ tiene una expresión de la forma[14]

$$dw = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} d\alpha_{i_1, \ldots, i_n} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Dados $x_1, \ldots, x_n$ campos vectoriales, tenemos[15]

$dw(x_1, \ldots, x_{r+1}) =$

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} x_i(w(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{r+1})) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([x_i, x_j], x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_{r+1}).$$

**Definición[16] 11.-** Una variedad $M$ de dimensión $n$, se dice que es *orientable*, si existe una forma diferencial $w$ de orden $n$ que no se anule en ningún punto de $M$. A una eleccion de una tal $w$, se le llama una *orientación*.

---

[13] *[Sin] cap. 5 §5.2 teo. 1 y [Hel] cap. I teo. 2.5*

[14] *[Hel] cap. I teo. 2.5, [Sin] cap. §5.2 teo. 1, [Spi] teo. 4-10 y [Kob] cap. 1 §5 paj. 7*

[15] *[Mat] cap. III §4 B) y D), [Hel] cap. I teo. 2.5 y [Kob] prop. 3.11*

[16] *[Mat] cap. V §1 def. 1*

**Observación.-** Esto nos permite decir cuando una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $T_pM$ para cada $p \in M$, está positivamente orientada, esto es, cuando

$$w_p(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

**Definición 12.-** Una *variedad con frontera* es, una variedad en donde pedimos lo mismo que para una variedad diferenciable, pero ahora para abiertos de $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_n \geq 0\}$. Los puntos de una variedad con frontera, tales que no tienen una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$ constituyen la frontera de $M$.

Dada una variedad con frontera, es fácil ver que la frontera es nuevamente una variedad. A la frontera $\partial M$ de una variedad con frontera $M^{n+1}$, le damos la siguiente orientación inducida por $M$: una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $T_p\partial M$ es positiva, si $\{w, v_1, \ldots, v_n\}$ es base positiva de $T_pM$, donde $w \in T_pM$ es el vector normal que apunta para "afuera".

En adelante al referirnos a variedades, nos referiremos a variedades sin frontera, a menos de que lo hagamos explicitamente.

## § 3 VARIEDADES RIEMANNIANAS

**Definición 13.-** Una *métrica Riemanniana* en $M$ variedad diferenciable es, una función $g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$-bilineal (i.e. un campo tensorial covariante en $M$ de orden 2), tal qué:

(1) $g$ es local, es decir, $g(fu, hv) = fhg(u, v)$, para $u, v \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, h \in C^\infty(M)$.

(2) $g$ es simétrica, es decir, $g(u, v) = g(v, u)$, para $u, v \in \mathfrak{X}(M)$

(3) $g$ es positiva definida, i.e. $g(u, u) \geq 0$ y $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

**Observación.-** Una métrica Riemanniana nos dá, para cada $p \in M$ un producto interior $g_p$ en $T_pM$, y denotamos para $u, v \in T_pM$

$$g_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p.$$

**Definición 14.-** Dada $M^n$ variedad Riemanniana, orientada, con orientación $w$. *La forma de volumen* $\sigma$ de $M$ es la forma que en las bases ortonormales toma el mismo valor que el signo de $w$.

Una métrica Riemanniana en $M$ nos permite definir la *longitud de arco* de una curva $\alpha: [a, b] \to M$ diferenciable, de la forma:

$$\|\alpha\| = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\,dt$$

y de forma obvia para una curva diferenciable por tramos. De esta manera es posible definir una métrica en $M$ como sigue:

$$d(p, q) = inf\{\|\alpha\| \mid \alpha \text{ es una curva diferenciable por tramos de } p \text{ a } q\},$$

$d$ es una pseudo-métrica y la topología que define coincide con la topología de $M$; usando que $M$ es un espacio de Hausdorff, $d$ resulta ser una métrica[17].

**Definición 15.-** Una *variedad Riemanniana* es una variedad con una métrica

---

[17] *ver [Hic] cap. 6 § 6.1 y [Hel] cap. I corolario 9.5*

Riemanniana dada.

Con lo anterior, toda variedad Riemanniana es metrizable, de hecho la estructura Riemanniana nos dá una métrica particular.

**Definición 16.-** Sean $M$ y $N$ variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f: M \to N$ es llamado una *isometría* si,

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_p,$$

para todas $u, v \in T_pM$ y $p \in M$.

**Proposición[18] 1.-** Toda variedad diferenciable $M$ posee una métrica Riemanniana.

**Demostración.-** Sea[19] $\{f_\alpha\}$ una partición de la unidad en $M$ subordinada a una cubierta $\{U_\alpha\}$ de $M$ por vecindades coordenadas, localmente finita; donde cada $f_\alpha$ es diferenciable; para cada $p \in U_\alpha$ y $u, v \in T_pM$, con $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ y $v = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, donde $x_i$ son las funciones coordenadas en $U_\alpha$ definimos:

$$\langle u, v\rangle_p^\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

esto define una métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle^\alpha$ en $U_\alpha$. Haciendo

$$\langle u, v\rangle = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle u, v\rangle_p^\alpha$$

para todo $u, v \in T_pM$, $p \in M$, y obtenemos una métrica Riemanniana en $M$ □

Para $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ una vecindad coordenada en $M$, definimos

$$g_{ij} = \langle \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\rangle \in C^\infty(U),$$

que son los llamados *coeficientes de la métrica* en $(U, (x_1, \ldots, x_n))$.

La idea de este capítulo es generalizar los conceptos del capítulo anterior, hasta este momento hemos generalizado grán parte de estos, nos faltan conceptos como el de geodésica, transporte paralelo, etc., para los cuales como podemos recordar es fundamental el concepto de derivada covariante; con el objeto de definirlo es que introduciremos a continuación el concepto de conexión, a partir del cual podremos obtener los conceptos que nos ocuparán en adelante.

**Definición 17.-** Una *conexión afín* en $M$ es una función $\mathbb{R}$-bilineal

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(x, y) \longmapsto \nabla_x y$$

tal que

i) $\nabla_{fx} y = f\nabla_x y$

ii) $\nabla_x fy = f\nabla_x y + (xf)y$

para $x, y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in C^\infty(M)$

**Proposición[20] 2.-** $\nabla_x y(p)$ depende solamente del valor de $x(p)$ y del valor de $y$ a lo largo de una curva adaptada a $x(p)$.

**Demostración.-** Para un sitema coordenado $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ en $M$ se definen las funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ llamados *símbolos de Christoffel*, de la forma:

---

[18] ver *[Doc] cap. I prop. 2.10, [Kob] cap. I ejemplo 5.5 y 5.7 y [Sin] cap. 6 teo. 13*

[19] ver *[Doc] cap. 0 prop. 5.4*

[20] ver *[Doc] cap. II obs. 2.3*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

y si $x = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $y = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se tiene que

$$\nabla_x y = \sum_k \left(\sum_{ij} u_i v_j \Gamma_{ij}^k + x(v_i)\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

lo cual prueba la proposición. □

**Definición 18.-** La derivada covariante del campo $\overline{X}$ a lo largo de la curva $\sigma: I \to M$ está dada por,

$$\frac{D}{dt}\overline{X} = \nabla_{\sigma'(t)} X,$$

para algún campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $\overline{X}(t) = X(\sigma(t))$.

**Definición 19.-** Sea $M$ una variedad con conexión afín $\nabla$ y $V$ un campo vectorial a lo largo de una curva $\alpha: I \to M$. $V$ es un campo paralelo a lo largo de $\alpha$ si,

$$\frac{DV}{dt} = 0 \qquad \text{para toda } t \in I.$$

Nos referimos a [Doc] cap. $II$ prop. 2.6, para la prueba de la siguiente:

**Proposición 3.-** Sea $\alpha: I \to M$ curva diferenciable en $M$ y $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$, para algún $t_0 \in I$. Entonces, existe un único campo paralelo de vectores $V$ a lo largo de $\alpha$, tal que $V(t_0) = V_0$.

En tal caso llamamos a $V$ el transporte paralelo de $V_0$ a lo largo de $\alpha$.

**Definición 20.-** Una conexión afín $\nabla$ se dice que es simétrica si

$$\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y].$$

**Ejemplo.-** Podemos considerar a $\mathbb{R}^m = M$, variedad Riemanniana, en este caso la derivada covariante es la derivada direccional usual, en donde los coeficientes de Christoffel son 1 si $i = j = k$ y cero en otro caso. En el caso de $m = n+k$ como en el capítulo anterior, la conexión en $\mathbb{R}^{n+k}$ dada por esta derivada covariante; induce en una variedad $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ una derivada covariante tal como se definió en el capítulo anterior.

**Observación.-** Una conexión es simétrica, si y solo si, los coeficientes de Christoffel cumplen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

**Definición 21.-** Una conexión afín en una variedad Riemanniana $M$, se dice que es compatible con la métrica $\langle\ ,\ \rangle$, si:

$$x\langle y, z\rangle = \langle \nabla_x y, z\rangle + \langle x, \nabla_x z\rangle$$

para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{X}(M)$.

**Teorema (Levi-Civita)**[21]

Dada una variedad Riemanniana $N$, existe una única conexión afín $\nabla$ en $M$ que satisface:

i) $\nabla$ es simétrica,

ii) $\nabla$ es compatible con la métrica Riemanniana de $M$.

**Demostración.-** Demostraremos primero la unicidad. Sea $\nabla$ una tal conexión. Entonces,

---

[21] *[Doc] cap II teo. 3.7*

$$
\begin{aligned}
x\langle y,z\rangle &= \langle\nabla_x y,z\rangle + \langle y,\nabla_x z\rangle\\
y\langle z,x\rangle &= \langle\nabla_y z,x\rangle + \langle z,\nabla_y x\rangle\\
z\langle x,y\rangle &= \langle\nabla_z x,y\rangle + \langle x,\nabla_z y\rangle
\end{aligned}
$$

usando la simetría de $\nabla$, tenemos

$$
x\langle y,z\rangle + y\langle z,x\rangle - z\langle x,y\rangle = \langle [x,z],y\rangle + \langle [y,z],x\rangle + \langle [x,y],z\rangle + 2\langle z,\nabla_y x\rangle
$$

por lo tanto

$$
\langle\nabla_y x,z\rangle = \tfrac{1}{2}\{x\langle y,z\rangle + y\langle z,x\rangle - z\langle x,y\rangle - \langle [x,z],y\rangle - \langle [y,z],x\rangle - \langle [x,y],z\rangle\}
$$

esta expresión muestra la unicidad de $\nabla$ para una métrica Riemanniana dada; y nos dá una forma de definir $\nabla$, es inmediato verificar que, $\nabla$ definida de esta forma cumple con las propiedades deseadas. □

**Definición 22.-** A la conexión del teorema anterior le llamaremos la conexión de Levi-Civita o conexión Riemanniana de $M$.

En adelante cuando nos referimos a la conexión de una variedad Riemanniana $M$ nos referimos a la conexión de Levi-Civita de $M$.

**Definición 23.-** Una curva parametrizada $\gamma: I \to M$ es una geodésica en $t_0 \in I$ si,

$$
\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = 0.
$$

Si $\gamma$ es una geodésica en $t$ para todo $t\in I$, decimos que $\gamma$ es una geodésica.

Por comodidad llamaremos geodésicas, a las curvas tales que $\|\frac{d\gamma}{dt}\| \neq 0$ y que cumplen la definición anterior, es decir no consideraremos a los puntos como geodésicas.

Para probar la existencia de geodésicas[22], podemos hacer algo análogo a lo que hicimos en el capítulo I, esto es, analizar la expresión que caracteriza las geodésicas en coordenadas locales, lo cual nos lleva a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo oreden; ahora podemos considerar las geodésicas como curvas en $TM$ (haciendo $t \mapsto (\gamma(t),\gamma'(t))$), el sistema de ecuaciones anterior, se transforma en $TM$ en un sistema de ecuaciones de primer orden, usando el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, tenemos como consecuencia la existencia de geodésicas.

Aprovechandonos del campo vectorial que dá origen al sistema de ecuaciones en $TM$, se puede definir la aplicación siguiente. Sea $p\in M$, entonces existe[23] un abierto $U\subset TM$ vecindad de $(p,0)\in TM$, un número $\delta$)0 y una aplicación

$$
\varphi: (-\delta,\delta)\times U \longrightarrow TU,
$$

tal que para $t\mapsto \varphi(t,q,v) = (\gamma(t),v(t))$, se tiena que $\gamma(t)$ es una geodésica con $\gamma'(t) = v(t)$, $\gamma(0) = q$ y $v(0) = v$. Esta aplicación nos permite, utilizando las propiedades de las geodésicas, definir la aplicación:

$$
\begin{aligned}
exp: U &\longrightarrow M\\
(q,v) &\mapsto \varphi(1,q,v) = \varphi(|v|,q,\tfrac{v}{|v|})
\end{aligned}
$$

22 *ver [Doc] cap. III inscisos 2.3, 2.4 y 2.7 y [Mil] lema 10.2*

23 *[Doc] cap. II inscisos 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 y 2.8 y [Mil] lema 10.2*

llamada la *aplicación exponencial* en $U$, y resulta ser diferenciable. Usaremos comunmente la restricción

$$exp_p: B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$$
$$v \longmapsto exp(p,v).$$

**Proposición[24] 4.-** Dado $p \in M$, existe una vecindad $V$ de 0 en $T_pM$, tal que

$$exp_p: V \longrightarrow M$$

es un difeomorfismo de $V$ en un abierto de $M$.

**Demostración.-**

$$d(exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}(exp_p(tv)))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(1,q,tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t,q,v))|_{t=0} = v$$

con esto, $d(exp_p)_0$ es la identidad, por el teorema de la función inversa terminamos la demostración. □

**Definición 24.-** En tal caso $exp_p(V) = U$ es llamada una *vecindad normal de* $p$ *en* $M$.

**Observación.-** Si $U$ es una vecindad normal de $p$ en $M$ y $U = exp_p(V)$; supondremos en adelante que $V$ es tal que para toda $v \in V$, la recta que une a $v$ con $0 \in V$, está contenida en $V$; con esto para cada punto $q \in U$ existirá una única geodésica que une a $p$ con $q$.

## §4 EL TENSOR DE CURVATURA

En esta sección definiremos el tensor de curvatura de una variedad Riemanniana con conexión de Levi-Civita $\nabla$. Posteriormente daremos las definiciones de otros conceptos de curvatura que se desprenden del tensor de curvatura. También demostraremos que este tensor de curvatura, coincide con el que se definió en la última sección del capítulo anterior.

**Definición 25.-** La *curvatura Riemanniana* $R$ de una variedad Riemanniana $M$ es, la aplicación:

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por $R(X,Y,Z) = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$, donde $\nabla$ es la conexión Riemanniana de $M$.

**Proposición 5.-** La curvatura Riemanniana de una variedad $M$, cumple las siguientes propiedades:

i) $R(fX+gX',Y,Z) = fR(X,Y,Z) + gR(X',Y,Z)$.

ii) $R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$.

iii) $R(X,Y,fZ+gZ') = fR(X,Y,Z) + gR(X,Y,Z')$.

iv) $\langle R(X,Y,Z),W\rangle = -\langle R(X,Y,W),Z\rangle$.

v) $\langle R(X,Y,Z),W\rangle = -\langle R(Z,W,X),Y\rangle$.

vi) $R(X,Y,Z) + R(Y,Z,X) + R(Z,X,Y). = 0$

---

[24] *[Doc] cap. III prop. 2.9*

para cualesquiera $X, Y, Z, W, X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$.

La demostración[25] se sigue de la definición. □

Observamos que las propiedades i) y iii) nos dicen que $R$ es $C^\infty(M)$-lineal; y a la identidad iv) se le conoce como la identidad de Bianchi

**Definición[26] 26.-** Una *superficie parametrizada* en $M$ variedad diferenciable, es una aplicación $s: A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ diferenciable ($A$ abierto).

**Definición 27.-** Un *campo de vectores* $V$ *a lo largo de* $s$ es, una aplicación que asocia a cada $q \in A$ un vector $V(q) \in T_{s(q)}M$, diferenciable en el siguiente sentido: sea $f$ una función diferenciable en $M$, entonces la aplicación $q \mapsto Vf(q)$ es diferenciable.

**Proposición 6.-** dada $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ una superficie parametrizada, sean (t,s) las coordenadas de $\mathbb{R}^2$. sea $V = V(t,s)$ un campo se vectores a lo largo de $f$. Si denotamos $\frac{\partial f}{\partial t} = df(\frac{\partial}{\partial t})$, y análogamente para $s$, tendremos

$$R(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, V) = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V.$$

**Demostración[27].-** Haremos un cálculo que nos conducirá al resultado, para eso sea $(U, \varphi)$ un sistema local de coordenadas en torno de $p \in M$, y sea $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces:

$$\frac{D}{\partial s}V = \frac{D}{\partial s}(\sum_i v_i \frac{\partial}{x_i}) = \sum_i v_i \frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ y}$$

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = \sum_i v_i \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

intercambiando $s$ con $t$, y restando tenemos:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = \sum v_i(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}). \quad ------ \quad (*)$$

Por otro lado, como $f(t,s) = (x_1(t,s), \ldots, x_n(t,s))$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}$, así tenemos

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j})}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\frac{\partial}{\partial x_i}) \text{ y}$$

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\nabla_{(\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k})}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}) =$$

$$\sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i})$$

o sea

$$(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s})(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{ijk} v_i \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i})$$

substituyendo en $(*)$

$$(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s})V = \sum_{ijk} v_i \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}R(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}) = R(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, V)$$

□

[25] *[Doc] cap IV prop 2.2 y 2.5, y [Mil] parte II S 9 lemas 9.1 y 9.3*

[26] *[Doc] cap. III def. 3.3*

[27] *[Doc] cap IV lema 4.1 y [Mil] parte II §9 lema 9.2*

**Corolario.-** La curvatura Riemanniana definida arriba y la del capítulo anterior (def. 22), coinciden. Por esto las denotaremos igual.

**Observación.-** $\Sigma$ de la definición 20 del capítulo anterior, es una superficie parametrizada, y $Y$ de la definición 21, es un campo de vectores a lo largo de $\Sigma$.

**Demostración.-** Tenemos que para $p \in M$, $v_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0,0), v_2 = Y(0,0), w_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(0,0)$, entonces por la definición 22 del capítulo $I$

$$R_p(v_1, w_1, v_2) = \frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t}(0,0) = \frac{D}{\partial s}\frac{DY}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{DY}{\partial s},$$

pues $\frac{DY}{\partial s} = 0$ ya que $Y_t$ es paralelo a lo largo de $\Sigma_t$, y por la proposición anterior

$$R_p(v_1, w_1, v_2) = R(\frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \frac{\partial \Sigma}{\partial s}, Y) = R(v_1, w_1, v_2)$$

□

**Definición 28.-** Definimos el tensor de curvatura Riemanniana de la variedad $M$,

$$K: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

como

$$K(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y, Z), T\rangle$$

**Corolario.-** También coinciden los tensores de curvatura □

A continuación daremos la definición de conceptos que se desprenden del tensor de curvatura, y están íntimamente relacionados con éste.

**Notación.-** Dado un espacio vectorial $V$ denotamos,

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$$

que representa el area del paralelogramo generado por $x, y \in V$.

**Proposición 7.-** Sea $S \subset T_pM$ un subespacio de dimensión 2 del espacio tangente $T_pM$, sean $x, y \in S$ dos vectores linealmente independientes, entonces

$$k_p(x, y) = \frac{K(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

no depende de los vectores $x, y \in S$.

**Demostración.-** Sea $\{x', y'\}$ otra base de $S$, observemos que por medio de las transformaciones

$$\{x, y\} \to \{y, x\} \quad \{x, y\} \to \{\lambda x, y\} \quad \{x, y\} \to \{x + \lambda y, y\}$$

se puede llevar $\{x, y\}$ en $\{x', y'\}$. Como $k_p$ es invariante bajo estas transformaciones, se sigue el resultado □

**Definición 29.-** Dado un punto $p \in M$ y un subespacio $S \subset T_pM$ de dimensión dos, el numero real $k_p(x, y) = k_p(S)$ donde $\{x, y\}$ es una base de $S$, es llamado la curvatura seccional de $S$ en $p$.

**Proposición 8.-** Sean $p \in M$ y $S \subset T_pM$ como arriba, $U \subset T_pM$ una vecindad de cero, tal que $exp_p(U) = V$ es una vecindad coordenada normal de $p$. Sea $B_r(0)$ una bola con centro en 0 y radio $r$ contenida en $S \cap U$, denotemos por $A_0(r)$ el area de $B_r(0)$ y por $A(r)$ la de $exp_p(B_r(0))$, entonces

$$k_p(S) = \lim_{r \to 0} 12\frac{A_0(r) - A(r)}{r^2 A_0(r)}.$$

Para la demostración nos referimos a [Hel] cap. $I$ §12 teo 12.2 □

Un hecho importante es que las curvaturas seccionales de una variedad $M$, contienen toda al información del tensor de curvatura, en el siguiente sentido.

**Proposición 9.-** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión mayor o igual a dos, con producto interior. Sean $R, R': V \times V \times V \to V$ aplicaciones trilineales, que cumplen las propiedades siguientes:

i) $(x,y,z,t) = -(y,x,z,t)$

ii) $(x,y,z,t) = -(x,y,t,z)$

iii) $(x,y,z,t) = (z,t,x,y)$

para $(x,y,z,t) = \langle R(x,y,z),t\rangle$ y análogamente para $(x,y,z,t)' = \langle R'(x,y,z),t\rangle$, si $x, y$ son linealmente independientes escribimos

$$k(S) = \tfrac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \qquad k'(S) = \tfrac{(x,y,x,y)'}{|x\wedge y|^2}$$

donde $S$ es el subespacio generado por $x, y$. Si para todo $S \subset V$ se tiene $k(S) = k'(S)$, entonces $R = R'$.

Para la demostración ver [Doc] cap. $IV$ lema 3.3 □

Observamos en el capítulo anterior, que para la curvatura Riemanniana necesitabamos por lo menos dos dimensiones. Esta porposición, nos dice que conocer el cmportamiento en dos dimensiones basrta para conocer la curvatura en un punto.

Son usuales ciertas combinaciones de curvaturas seccionales que mencionamos a continuación, para tener un panorama amplio.

Sea $\{z_1, \ldots, z_n\}$ base ortonormal de $T_pM$, denotamos $x = z_n$, consideremos

$$Ric(x) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i, x, z_i),$$

$$k(p) = \tfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Ric(z_j).$$

Probaremos que estas expresiones no dependen de las bases ortonormales escogidas; son llamadas la curvatura de Ricci en la dirección de $x$, y la curvatura escalar (o media) en $p$, respectivamente.

Para demostrar que estas expresiones no dependen de la base ortonormal, consideremos

$$Q(x,y) = \text{traza de la aplicación } z \to R(x,z,y),$$

que es bilineal, escogiendo una tal base ortonormal de $T_pM$, tenemos

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(x,z_i,y), z_i\rangle = \sum_i \langle R(y,z_i,x), z_i\rangle = Q(y,x)$$

es decir $Q$ es simética y $Q(x,x) = (n-1)Ric(x)$, lo cual demuestra que $Ric(x)$ está intrínsecamante definida. Por otro lado a la forma $Q$ en $T_pM$ le corresponde una aplicación autoadjunta $H$, dada por

$$\langle H(x), y\rangle = Q(x,y),$$

tenemos que la traza

$$k = \sum_{j=1}^{n} \langle H(z_j), z_j\rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) =$$

$$(n-1)\sum_j Ric(z_j) = n(n-1)k(p),$$

lo que prueba nuestra afirmación. □

## §5 LA CURVATURA GAUSSIANA

En lo que resta del capítulo nos ocuparemos de definir la curvatura Gaussiana o total de una variedad $M$. En adelante usaremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ una familia de marcos ortonormales definidos en una vecindad $U$ de $p \in M^n$, esto es, para cada $q \in U$ $\{e_1(q), \dots, e_n(q)\}$ es base ortonormal de $T_qM$ positivamente orientada.

Definimos

$$\bar{d}: \mathfrak{X}(U) \to End(T_pM)$$
$$x \longmapsto \nabla_{\_} x$$

es decir $\bar{d}x(v) = \nabla_v x$ que resulta aditiva.

Definimos las 1-formas $w_{ij}$ en $U$ como sigue

$$w_{ij}(x) = \langle \nabla_x e_i, e_j \rangle \quad \text{- - - - - - - - - - - -} \quad (1)$$

con lo cual $\bar{d}e_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} e_j$.

Observamos que para $x \in \mathfrak{X}(U)$, en vista de que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, constante

$$0 = x\langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_x e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_x e_j \rangle = w_{ij}(x) + w_{ji}(x)$$

en conclusión

$$w_{ij} + w_{ji} = 0$$

definimos ahora las 2-formas en $U$

$$\Omega^i_j(x, y) = \langle R(x, y, e_j), e_i \rangle \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (2)$$

**Observación.-**

$$\Omega^i_j = -\Omega^j_i.$$

Las $\Omega^i_j$ contienen toda la información de la curvatura, pues

$$K(x, y, z, t) = \sum_{ij=1}^{n} z_i t_j \Omega^j_i(x, y).$$

Usando la definición de $R$ tenemos

$$R(x, y, e_i) = \nabla_y \nabla_x e_i - \nabla_x \nabla_y e_i + \nabla_{[x,y]} e_i =$$

$$\nabla_y\Big(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x) e_j\Big) - \nabla_x\Big(\sum_j w_{ij}(y) e_j\Big) + \sum_j w_{ij}([x, y]) e_j =$$

$$\Big(\sum_j y w_{ij}(x) e_j + \sum_j w_{ij}(x)\Big(\sum_k w_{jk}(y) e_k\Big)\Big) - \Big(\sum_j x w_{ij}(y) e_j + \sum_j w_{ij}(y)\Big(\sum_k w_{jk}(x) e_k\Big)\Big) + \sum_j w_{ij}([x, y]) e_j$$

si nos fijamos ahora en al componente en la dirección de $e_j$, tenemos

$$\Omega^j_i(x, y) =$$

$$y w_{ij}(x) - x w_{ij}(y) + w_{ij}([x, y]) + \sum_k (w_{ik}(x) w_{kj}(y) - w_{ik}(y) w_{kj}(x)) =$$

$$\Omega^j_i(x, y) = -d w_{ij}(x, y) + \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}(x, y)$$

y esto nos dice que

$$d w_{ij} = -\sum_k w_{ik} \wedge w_{jk} + \Omega^i_j \quad \text{- - - - - - - - - - -} \quad (3)$$

Consideraremos otra familia de marcos ortonormales $\{e'_i\}$, entonces existe una matriz $(t_{ij})$ con cada $t_{ij} \in C^\infty(U)$, tal que

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} e_j \quad \text{y} \quad e_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e'_j.$$

Con esto tenemos que las $w'_{ij}$ relativas a la nueva familia, tiene la forma

$$w'_{ij}(x) = \langle \nabla_x e'_i, e'_j \rangle = \langle \sum_r \nabla_x t_{ir} e_r, e'_j \rangle =$$

$$\sum_r \langle x t_{ir} e_r + t_{ir} \nabla_x e_r, e'_j \rangle = \sum_{rs} t_{js} dt_{ir}(x) \langle e_r, e_s \rangle + t_{js} t_{ir} w_{rs}(x)$$

como $\{e_i\}$ es base ortonormal

$$w'_{ij}(x) = \sum_r t_{jr} dt_{ir}(x) + \sum_{rs} t_{ir} t_{js} w_{rs}(x)$$

en limpio

$$w'_{ij} = \sum_{r=1}^{n} t_{jr} dt_{ir} + \sum_{rs=1}^{n} t_{ir} t_{js} w_{rs} \quad - - - - - - - - - \quad (4)$$

como $(t_{ij})$ es una matriz ortonormal,

$$\sum_k t_{ik} t_{jk} = \delta_{ij} \in C^\infty(U) \quad - - - - - - - - - - \quad (5)$$

considerando la derivada de la funcion $\delta_{ij}$,

$$\sum_k t_{ik} dt_{jk} = - \sum_k t_{jk} dt_{ik}. \quad - - - - - - - - - - \quad (6)$$

Con esto, de (4)

$$\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{kj} =$$

$$\sum_k ((-1)(\sum_r t_{ir} dt_{kr} + \sum_{rs} t_{is} t_{kr} w_{rs}) \wedge (-1)(\sum_t t_{kt} dt_{jt} + \sum_{tl} t_{kl} t_{jt} w_{tl})$$

multiplicando

$$\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{kj} =$$

$$\sum_{krt} t_{ir}(dt_{kr} t_{kt}) dt_{jt} + \sum_{krtl} t_{ir}(dt_{kr} t_{kl}) t_{jt} w_{tl} - \sum_{krst} t_{is}(t_{kr} t_{kt}) dt_{jt} w_{rs} + \sum_{krslt} t_{is}(t_{kr} t_{kl}) t_{jt} w_{rs} w_{tl}$$

por (5) y (6)

$$\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{kj} =$$

$$-\sum_{krt} (t_{ir} t_{kr}) dt_{kt} dt_{jt} - \sum_{krtl} (t_{ir} t_{kr}) dt_{kl} t_{jt} w_{tl} - \sum_{rst} t_{is} (\delta_{rt}) dt_{jt} w_{rs} + \sum_{rslt} t_{is} (\delta_{rl}) t_{jt} w_{rs} w_{tl} =$$

$$- \sum_{kt} (\delta_{ik}) dt_{kt} dt_{jt} - \sum_{ktl} (\delta_{ik}) dt_{kl} t_{jt} w_{tl} - \sum_{rs} t_{is} dt_{jr} w_{rs} + \sum_{rst} t_{is} t_{jt} w_{rs} w_{tr}$$

finalmente

$$\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{kj} =$$

$$-\sum_t dt_{it} dt_{jt} - \sum_{tl} dt_{il} t_{jt} w_{tl} - \sum_{rs} t_{is} dt_{jr} w_{rs} + \sum_{rst} t_{is} t_{jt} w_{rs} w_{tr}. \quad - - - \quad (7)$$

Con lo anterior, de (4)

$$dw'_{ji} = \sum_{r=1}^{n} dt_{ir} \wedge dt_{jr} + \sum_{rs=1}^{n} dt_{is} t_{jr} w_{rs} + \sum_{sr=1}^{n} t_{is} dt_{jr} w_{rs} + \sum_{rs=1}^{n} t_{is} t_{jr} dw_{rs},$$

de (3)

$$dw'_{ji} =$$

$$\sum_{r=1}^{n} dt_{ir} \wedge dt_{jr} + \sum_{rs=1}^{n} dt_{is} t_{jr} w_{rs} + \sum_{sr=1}^{n} t_{is} dt_{jr} w_{rs} + \sum_{rks} t_{is} t_{jr} w_{rk} w_{ks} + \sum_{rs} t_{is} t_{jr} \Omega^r_s$$

de (7) tenemos

$$dw'_{ji} = -\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{kj} + \sum_{rs} t_{is} t_{jr} \Omega^r_s$$

es decir

$$dw'_{ij} = -\sum_k w'_{ik} \wedge w'_{jk} + \sum_{rs} t_{is} t_{jr} \Omega^s_r$$

despejando, de (3) tenemos en limpio

$$\Omega'^i_j = \sum_{rs=1}^{n} t_{is} t_{jr} \Omega^s_r. \quad \text{- - - - - - - - - - - - -} \quad (8)$$

Definimos finalmente la curvatura Gaussiana de $M^n$ en $p$, para $n = 2m$ par, como la $n$-forma:

$$\Omega = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} \sum_{i_j=1}^{n} \epsilon_{i_1 \ldots i_n} \bigwedge_{j=1}^{m} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}$$

donde

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 \ldots i_n \text{ es una permutación par de } 1, \ldots, n \\ -1 & \text{si } i_1 \ldots i_n \text{ es una permutación impar de } 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Proposición 10.-** $\Omega$ es intrínseca, es decir, no depende del marco $\{e_1\}$ escogido y está por lo tanto definida en toda la variedad $M$.

Dejaremos la demostración pendiente pues en el capítulo siguiente la obtendremos como un corolario de la proposición 1.

La definición de $\Omega$ resulta tan oscura, que es bueno darle una interpretación un poco más geométrica, en los casos en que esto sea posible. Ensuguida haremos esto en un caso particular; supondremos $M^n$ variedad diferenciable de dimensión par, compacta, con $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ como en el capítulo anterior.

En el caso de tales variedades tenemos (como lo observamos en el capítulo anterior) una aplicación diferenciable

$$G: M \to \mathbb{S}^n,$$

llamada la aplicación de Gauss[28]. Démosle a $M$ la orientación en cada espacio tangente $T_pM$, como sigue

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ base de } T_pM, \text{ es positiva, si y solo si}$$
$$\{G(p), v_1, \ldots, v_n\} \text{ es base positiva de } T_p\mathbb{R}^{n+1}.$$

Con esta orientación de $M$, queda definida la forma de volumen $dv$ en $M$. Llamaremos $d\sigma$ a la forma de volumen de $\mathbb{S}^n$ (obtenida de forma análoga).

Con lo anterior

$$G^*(d\sigma) = K dv$$

para una función $K$, con $K \in C^\infty(M)$.

Observamos que dado $p \in M$, entonces $T_pM$ y $T_{G(p)}\mathbb{S}^n$ coinciden por tener ambos a $G(p)$ como vector normal, de este modo $dG_p: T_pM \to T_pM$, y es claro que

[28] *para probar su existencia se usa la compacidad de $M$ y el teorema de Jordan-Brower.*

$$K(p) = \det(dG_p). \text{ - - - - - - - - - - - - - } \quad (9)$$

Por otro lado podemos considerar a la segunda forma fundamental

$$B_p : T_pM \times T_pM \to N_pM \quad \text{como}$$
$$B'_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

donde $B_p(v, w) = B'_p G(p)$. Esto nos permite hablar de $\det B_p$ (como $\det B'_p$).

**Lema.-** Dados $v, w \in T_pM$

$$\langle dG_p(v), w\rangle = -\langle B_p(v, w), G(p)\rangle \text{ - - - - - - - } \quad (10)$$

**Demostración.-** Sea $Y$ un campo vectorial tangente a $M$, tal que $Y(p) = w$, entonces $\langle G, Y\rangle \in C^\infty(M)$ es constante igual a cero, por lo tanto para $\sigma(t)$ una curva adaptada a $v$

$$0 = \tfrac{d}{dt}\langle G(\sigma(t)), Y(\sigma(t))\rangle|_{t=0} = \langle dG_p(v), Y(p)\rangle + \langle G(p), \tfrac{DY}{dt} + B_p(w, v)\rangle$$
$$0 = \langle dG_p(v), w\rangle + \langle G(p), B_p(v, w)\rangle$$

$\square$

En estos términos, de la definición de $\Omega^i_j$ (fórmula (2)), de la proposición 6 y de la última observación del capítulo anterior, tenemos que dada $\{e_i\}_{i=1}^n$ familia de marcos ortonormales que definen a $\Omega^i_j$

$$\Omega^i_j(e_k, e_l) = \langle B(e_i, e_k), B(e_j, e_l)\rangle - \langle B(e_i, e_l), B(e_j, e_k)\rangle \text{ - - - - - - } \quad (11)$$

**Proposición 11.-** Sea $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ variedad diferenciable compacta con $n = 2m$, entonces

$$\Omega = n!\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}K\,dv = n!\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}G^*(d\sigma).$$

**Demostración.-** Para $\{e_i\}$ una familia de marcos ortonormales, demostraremos primero que $\Omega(e_1, \ldots, e_n) = n!\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}\det B_p$. Por simplicidad denotaremos $\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!} = h$.

Por la definición del producto cuña se tiene

$$\Omega(e_1, \ldots, e_n) = h\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \tfrac{1}{2^m} \bigwedge_{j=1}^{m} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}(e_1, \ldots, e_n)$$

en donde abreviamos $i_1 \ldots i_n = (i)$

$$\Omega(e_1, \ldots, e_n) = h\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \tfrac{1}{2^m} \sum_{(k)} \epsilon_{(k)} \prod_{j=1}^{m} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}(e_{k_{2j-1}}, e_{k_{2j}})$$

por la fórmula (11)

$$\Omega(e_1, \ldots, e_n) =$$
$$h\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \tfrac{1}{2^m} \sum_{(k)} \epsilon_{(k)} \prod_{j=1}^{m} \langle B(e_{i_{2j-1}}, e_{k_{2j-1}}), B(e_{i_{2j}}, e_{k_{2j}})\rangle - \langle B(e_{i_{2j-1}}, e_{k_{2j}}), B(e_{i_{2j}}, e_{k_{2j-1}})\rangle$$

en vista de que en

$\sum_{(k)} \epsilon_{(k)} \prod_{j=1}^{m} \langle B(e_{i_{2j-1}}, e_{k_{2j-1}}), B(e_{i_{2j}}, e_{k_{2j}})\rangle - \langle B(e_{i_{2j-1}}, e_{k_{2j}}), B(e_{i_{2j}}, e_{k_{2j-1}})\rangle$ hay $2^m$ productos iguales,

$$\Omega(e_1,\ldots,e_n) = h \sum_{(i)(k)} \epsilon(i)\epsilon(k) \prod_{j=1}^{m} \langle B(e_{i_{2j-1}}, e_{k_{2j-1}}), B(e_{i_{2j}}, e_{k_{2j}})\rangle$$

como $\langle B(v,w), B(v_1,w_1)\rangle = \langle B(v,w), G(p)\rangle + \langle B(v_1,w_1,G(p)\rangle$,

$$\Omega(e_1,\ldots,e_n) = h \sum_{(i)(k)} \epsilon(i)\epsilon(k) \prod_{j=1}^{m} \langle B(e_{i_j}, e_{k_j}), G(p)\rangle$$

es decir
$$\Omega(e_1,\ldots,e_n) = hn!\det B_p.$$

Por otra parte, por (9)

$$Kdv(e_1,\ldots,e_n) = K = \det(dG_p) = \det(\langle dG_p(e_i), e_j\rangle),$$

por (10)
$$Kdv(e_1,\ldots,e_n) = (-1)^n \det(\langle B_p(e_i,e_j), G_p\rangle) = \det B_p,$$

lo cual prueba que
$$\Omega(e_1,\ldots,e_n) = n!\tfrac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}\pi^m m!}Kdv$$ □

# CAPITULO 3

## §1 INTRODUCCION

En éste capítulo nos ocuparemos de demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, cuyo planteamiento es simple. El teorema afirma: En una variedad Riemanniana $M^n$, cerrada, orientable, de dimensión par, la integral de la curvatura Gaussiana $\Omega$ sobre $M$ es igual a la característica de Euler-Poincaré $\chi$ de $M$.

La idea de la prueba es la siguiente:

i) Pasamos de $M^n$ a $T_1M$, la variedad formada por los vectores unitarios tangentes a $M$. En $T_1M$ se definirá una $(n-1)$-forma $\Pi$, cuya derivada exterior sea igual a la inducida $\Omega^*$ en $T_1M$ por $\Omega$ bajo la proyección.

ii) Definiendo un campo vectorial unitario con singularidades aisladas en $M$, obtendremos $\widetilde{M} \subset T_1M$ una subvariedad de dimensión $n$; de tal forma que la integral de $\Omega^*$ sobre $\widetilde{M}$ coincide con la integral de $\Omega$ sobre $M$.

iii) Al evaluar la integral de $\Omega^*$ sobre $\widetilde{M}$, aplicando el teorema de Stokes obtenemos la integral de $\Pi$ sobre $\partial\widetilde{M}$.

iv) Analizando $\partial\widetilde{M}$, se relaciona con las singularidades del campo vectorial definido en $M$, la suma de cuyos índices es igual a $\chi$ por el teorema de Poincaré-Hopf.

v) Con ésta interpretación, es posible evaluar la integral de $\Pi$ sobre $\partial\widetilde{M}$ y un cálculo nos lleva al resultado deseado.

Como la prueba en algunos pasos es muy técnica, daremos los detalles de cada paso en las secciones siguientes, según la prueba de Chern en [Ch].

Es de hacerse notar que, la importancia de la prueba radica, entre otras cosas, en el hecho de que es intrínseca, es decir, no utiliza el hecho de que la variedad esté encajada en algún $\mathbb{R}^n$, de hecho, pudiera no estarlo para los argumentos de la prueba..

Los resultados que supondremos los mencionaremos en su oportunidad, y para más detalles sobre éstos es conveniente revisar las referencias.

Cabe observar que el teorema que probaremos es válido para variedades de clase $C^r$ con $r \geq 4$, de hecho esta misma prueba funciona en estos casos, pero en la demostración supondremos $r = \infty$ por comodidad.

Consideremos ahora $T_1M$, la variedad diferenciable formada por los vectores unitarios tangentes a $M$; $T_1M$ resulta una variedad cerrada de dimensión $2n-1$.

Por simplificar la notación, omitiremos poner $*$ al inducido en $T_1M$ por las formas diferenciales en $M$.

Como coordenadas locales de $T_1M$ usaremos las de $M$ y las componentes $u_i$ de un vector $v \in T_pM$, respecto a la familia de marcos $\{e_i\}_{i=1}^n$ que se usaron para definir $\Omega$; es decir

$$v = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad \text{con la condición} \quad \sum_{i=1}^n u_i u_i = 1,$$

en una vecindad $U$ de $p \in M$.

Para $v$ un campo unitario en $U$, por la definición de $\overline{d}$ (ver §5 capítulo 2), tenemos:

$$\overline{d}v(x) = \overline{d}(\sum_i u_i e_i)(x) = \nabla_x \sum_i u_i e_i = \sum_i \nabla_x u_i e_i =$$
$$= \sum_i \{(du_i(x))e_i + u_i \overline{d}e_i(x)\} = \sum_i \{(du_i(x))e_i + u_i(\sum_j w_{ij}(x)e_j)\},$$

la última igualdad por definición de $w_{ij}$ (ver fórmula (1) §5 cap. 2), ahora,

$$\overline{d}v(x) = \sum_i \{du_i(x) + \sum_j u_j w_{ji}(x)\} e_i,$$

pero esto para toda $x \in T_pM$. Si definimos las uno-formas diferenciales:

$$\theta_i = du_i + \sum_{j=1}^n u_j w_{ji} \text{ - - - - - - - - - - - - - } (1)$$

tendremos que $\overline{d}v = \sum_i \theta_i e_i$.

Tenemos que $\langle v, v\rangle = 1$ es constante, usando que la conexión es compatible con la métrica, para toda $u \in \mathfrak{X}(U)$:

$$0 = u\langle v, v\rangle = 2\langle \nabla_u v, v\rangle = 2\langle \overline{d}v(u), v\rangle =$$
$$2\langle \sum_i \theta_i(u)e_i, \sum_i u_i e_i\rangle = 2\sum_i \theta_i(u)u_i$$

esto es:

$$\sum_{i=1}^n u_i\theta_i = 0 \text{ - - - - - - - - - - - - - - - } (2)$$

De la fórmula (1), tenemos:

$$d\theta_i = \sum_j (du_j w_{ji} + u_j dw_{ji}) = \sum_j \{du_j w_{ji} + u_j(\Omega_i^j + \sum_k w_{kj} \wedge w_{ik})\}$$

por una propiedad de $\Omega_i^j$ (ver fórmula (3) §5 cap. 2), y entonces:

$$d\theta_i = \sum_j u_j \Omega_i^j + \sum_j du_j w_{ji} + \sum_{jk} u_j w_{kj} \wedge w_{ik}$$
$$= \sum_j u_j \Omega_i^j + \sum_j du_j w_{ji} + \sum_{jk} (u_k w_{kj}) w_{ji} = \sum_j u_j \Omega_i^j + \theta_j w_{ji}$$

por la fórmula (1), luego tenemos que:

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \Omega_i^j + \theta_j w_{ji}. \text{ - - - - - - - - - - - -} \quad (3)$$

Por otro lado de la fórmula (3) §5 cap. 2 para $\Omega_j^i$ tenemos:

$$d\Omega_j^i = -\sum_k dw_{kj} \wedge w_{ik} + \sum_k w_{kj} \wedge dw_{ik},$$

nuevamente de esa fórmula (3) para $\Omega_j^i$

$$d\Omega_j^i = -\sum_k (\Omega_j^k - \sum_{h=1}^{n} w_{hj} \wedge w_{kh}) \wedge w_{ik} + \sum_k w_{kj} \wedge (\Omega_k^i + \sum_{h=1}^{n} w_{hi} \wedge w_{kh}),$$

agrupando y cancelando

$$d\Omega_j^i = \sum_k w_{ik} \wedge \Omega_j^k - \sum_k w_{jk} \wedge \Omega_k^i, \text{ en limpio:}$$

$$d\Omega_j^i = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} \wedge \Omega_j^k - \sum_{k=1}^{n} w_{jk} \wedge \Omega_k^i. \text{ - - - - - - - -} \quad (4)$$

Si ahora cambiamos de marco ortonormal, es decir, si consideramos $\{e_i'\}$, tendremos:

$u_i' = \sum_j t_{ij} u_j$, donde $(t_{ij})$ es la matriz de cambio de base, y es por lo tanto ortonormal, y como vimos en el capítulo anterior

$$w_{li}' = \sum_r t_{ir} dt_{lr} + \sum_{rj} t_{lr} t_{ij} w_{rj},$$

y tendremos de la fórmula (1):

$$\theta_i' = d(\sum_j t_{ij} u_j) + \sum_l \{(\sum_k t_{lk} u_k)(\sum_r t_{ir} dt_{lr} + \sum_{rj} t_{lr} t_{ij} w_{rj})\},$$

distribuyendo

$$\theta_i' = \sum_j t_{ij} du_j + \sum_j u_j dt_{ij} + \sum_{lkr} t_{lk} u_k (t_{ir} dt_{lr}) + \sum_{lkrj} t_{lk} u_k t_{lr} t_{ij} w_{rj},$$

por la fórmula (6) §5 cap. 2

$$\theta_i' = \sum_j t_{ij} du_j + \sum_j u_j dt_{ij} - \sum_{lkr} t_{lk} u_k (t_{lr} dt_{ir}) + \sum_{lkrj} t_{lk} u_k t_{lr} t_{ij} w_{rj},$$

denotando $(t_{ij})^{-1} = (t^{ij})$

$$\theta_i' = \sum_j t_{ij} du_j + \sum_j u_j dt_{ij} - \sum_{kr} (\sum_l t^{kl} t_{lr}) u_k dt_{ir} + \sum_{krj} (\sum_l t^{kl} t_{lr}) u_k t_{ij} w_{rj},$$

por ser $(t_{ij})$ ortonormal

$$\begin{aligned} \theta_i' &= \sum_j t_{ij} du_j + \sum_j u_j dt_{ij} - \sum_{kr} \delta_{kr} u_k dt_{ir} + \sum_{krj} \delta_{kr} u_k t_{ij} w_{rj} \\ &= \sum_j t_{ij} du_j + (\sum_j u_j dt_{ij} - \sum_k u_k dt_{ik}) + \sum_{kj} u_k t_{ij} w_{kj} \\ &= \sum_j t_{ij} (du_j + \sum_k u_k w_{kj}), \end{aligned}$$

y finalmente:

$$\theta_i' = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \theta_j$$

Por otro lado sabemos del capítulo anterior:

$$\Omega'^i_j = \sum_{k,l=1}^{n} t_{ik}t_{jl}\Omega^k_l$$

Definimos, para $k = 0,\ldots,p-1$ donde $p = 2n$

$$\Phi_k = \sum_{i_j=1}^{n} \epsilon_{i_1\ldots i_n} u_{i_1} \left(\bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j}\right) \left(\bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n-1)\text{-formas}$$

$$L_k = \sum_{i_j} \epsilon_{i_1\ldots i_n} \sum_{h=1}^{n} u_{i_1} u_h \Omega^h_{i_2} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad n\text{-formas}$$

$$\Psi_k = \sum_{i_j} \epsilon_{i_1\ldots i_n} \left(\bigwedge_{j=1}^{2(p-k)-2} \theta_{i_j}\right)\left(\bigwedge_{j=p-k}^{p} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n\text{-formas}$$

Reordenando, usando la antisimetría de $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ y el hecho de que $\wedge\theta_{i_j}$ tiene un número par de términos, tenemos:

$$\Psi_k = \sum_{i_j} \epsilon_{i_1\ldots i_n} \Omega^{i_1}_{i_2} \left(\bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j}\right) \left(\bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega^{i_{2j-1}}_{i_{2j}}\right).$$

**Proposición 1.-** Las formas $\Phi_k$, $L_k$ y $\Psi_k$ son intrínsecas a la variedad $M^n$, es decir, no dependen de las $\{e_i\}$ escogidas, y están por lo tanto definidas en toda la variedad.

**Demostración.-** Sea $\{e'_i\}$ otra familia de marcos ortonormales; tenemos:

$$\theta'_i = \sum_j t_{ij}\theta_j \qquad \Omega'^i_j = \sum_{kl} t_{ik}t_{jl}\Omega^k_l \qquad u'_i = \sum_j t_{ij}u_j$$

si abreviamos $\epsilon_{(i)} = \epsilon_{i_1\ldots i_n}$ y $\delta_{(i)} = |\epsilon_{(i)}|$, tenemos:

caso $\Phi_k$)

$$\Phi'_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \left(\sum_s t_{i_1 s}u_s\right) \left(\bigwedge_{m=1}^{2(p-k)} \sum_l t_{i_m l}\theta_l\right)\left(\bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \sum_{hl} t_{i_{2j-1}h}t_{i_{2j}l}\Omega^k_l\right) =$$

$$\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \left(\sum_s t_{i_1 s}u_s\right)\left(\sum_{(l)} \delta_{(l)} \bigwedge_{m=2}^{2(p-k)} t_{i_m l_m}\theta_{l_m}\right)\left(\sum_{(\tilde n)} \delta_{(\tilde n)} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} t_{i_{2j-1}\tilde n_{2j-1}} t_{i_{2j}\tilde n_{2j}} \Omega^{\tilde n_{2j-1}}_{\tilde n_{2j}}\right) =$$

$$= \sum_{(i)s(l)(\tilde n)} \epsilon_{(i)}\delta_{(l)}\delta_{(\tilde n)}\, t_{i_1 s}u_s \bigwedge_{m=2}^{2(p-k)} t_{i_m l_m}\theta_{l_m} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} t_{i_{2j-1}\tilde n_{2j-1}} t_{i_{2j}\tilde n_{2j}} \Omega^{\tilde n_{2j-1}}_{\tilde n_{2j}}) =$$

$$\sum_{s(l)(\tilde n)} \left(\sum_{(i)} \prod_{m=2}^{2(p-k)} \prod_{j=p-k+1}^{p} \epsilon_{(i)}\delta_{(l)}\delta_{(\tilde n)}\, t_{i_1 s} t_{i_m l_m} t_{i_{2j-1}\tilde n_{2j-1}} t_{i_{2j}\tilde n_{2j}}\right) \left(\bigwedge_{m=2}^{2(p-k)} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} u_s\theta_{l_m}\Omega^{\tilde n_{2j-1}}_{\tilde n_{2j}}\right)$$

si hacemos $r_1\ldots r_n = sl_1\ldots l_{2(p-k)}\tilde n_{2(p-k)+1}\ldots\tilde n_n$, tenemos:

$$\Phi'_k = \sum_{(r)} \epsilon_{(r)} \det(t_{ij}) \bigwedge_{m=2}^{2(p-k)-2} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} u_{r_1}\theta_{r_m}\Omega^{r_{2j-1}}_{r_{2j}} = \Phi_k$$

caso $\Psi_k$)

$$\Psi'_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \left(\bigwedge_{j=1}^{2(p-k)-2} \sum_l t_{i_j l}\theta_l\right)\left(\bigwedge_{j=p-k}^{p} \sum_{kl} t_{i_{2j-1}\tilde n_{2j-1}} t_{i_{2j}\tilde n_{2j}}\Omega^k_l\right) =$$

$$= \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \Big(\sum_{(l)} \delta_{(l)} \bigwedge_{m=1}^{2(p-k)-2} t_{i_m l_m} \theta_{l_m}\Big)\Big(\sum_{(\bar{n})} \bigwedge_{j=p-k}^{p} \delta_{(\bar{n})} t_{i_{2j-1}\bar{n}_{2j-1}} t_{i_{2j}\bar{n}_{2j}} \Omega_{\bar{n}_{2j}}^{\bar{n}_{2j-1}}\Big) =$$

$$\sum_{(l)(\bar{n})} \Big(\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \delta_{(l)} \delta_{(\bar{n})} \prod_{m=1}^{2(p-k)-2} \prod_{j=p-k}^{p} t_{i_m l_m} t_{i_{2j-1}\bar{n}_{2j-1}} t_{i_{2j}\bar{n}_{2j}}\Big)\Big(\bigwedge_{m=1}^{2(p-k)-2} \bigwedge_{j=p-k}^{p} \theta_{l_m} \Omega_{\bar{n}_{2j}}^{\bar{n}_{2j-1}}\Big)$$

si hacemos $(r)$ como antes

$$\Psi'_k = \sum_{(r)} \epsilon_{(r)} \det(t_{ij}) \bigwedge_{m=1}^{2(p-k)-2} \bigwedge_{j=p-k}^{p} \theta_{r_m} \Omega_{r_{2j}}^{r_{2j-1}} = \Psi_k$$

el caso $L_k$) es análogo. $\square$

**Corolario.-** $\Omega$ es intrínseca, y está por lo tanto definida en toda la variedad.

**Demostración.-** Basta observar: $\Omega = \Psi_{p-1}\left(\frac{(-1)^{p-1}}{2^{2p}\pi^p p!}\right)$ $\square$

**Lema.-** Para cada $p \in M$, existe una vecindad $U$ de $p$, y una familia de marcos $\{e_i\}_{i=1}^n$ definidos en $U$, tal que $w_{ij}(p) = 0$

**Demostración.-** Sea $\{\tilde{e}_i\}$ base ortonormal de $T_pM$ y $U$ una vecindad normal de $p$ (ver def 24 cap 2). Entonces, para cada $q \in U$ existe una única geodésica $\sigma$ que une a $p$ con $q$, por la cual trasladamos paralelamente los vectores $\{\tilde{e}_i\}$, haciendo esto para cada $q \in U$ obtenemos una familia de marcos ortonormales $\{e_i\}_{i=1}^n$ con la propiedead siguiente:
para $v \in T_pM$ si $\sigma$ es la geodésica adaptada a $v$, entonces, $\nabla_v e_j = 0$ pues $e_j$ por definición es paralelo a lo largo de $\sigma$, luego, $w_{ij}(v) = \langle \nabla_v e_j, e_i \rangle = \langle 0, e_i \rangle = 0$, para toda $v \in T_pM$ $\square$

**Proposición 2.-** $\Phi_k$ y $\Psi_k$ cumplen la relación $d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p-2k-1}{2(k+1)}\Psi_k$.

**Demostración.-** Primero calculemos $d\Phi_k$:

$d\Phi_k =$

$$= \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} du_{i_1} \bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}} + \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} \Big(\sum_{r=2}^{2(p-k)} d\theta_{i_r} \bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j}\Big)\Big(\bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}\Big)$$
$$- \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} \Big(\bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j}\Big)\Big(\sum_{r=p-k+1}^{p} (-1)^{r-p+k-1} d\Omega_{i_{2r}}^{i_{2r-1}} \bigwedge_{\substack{j=p-k-1 \\ j\neq r}}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}\Big),$$

agrupando en el segundo término tenemos:

$d\Phi_k =$

$$\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} du_{i_1} \bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}} + (2p-2k-1) \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} d\theta_{i_2} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$$
$$- \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} \Big(\bigwedge_{j=2}^{2(p-k)} \theta_{i_j}\Big)\Big(\sum_{r=p-k+1}^{p} (-1)^{r-p+k-1} d\Omega_{i_{2r}}^{i_{2r-1}} \bigwedge_{\substack{j=p-k-1 \\ j\neq r}}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}\Big),$$

usando las fórmulas (1), (3) y (4) para $d\theta_{i_j}$, $du_{i_j}$ y $d\Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$ y agrupando los términos que no contienen a $w_{ij}$, se tiene:

$d\Phi_k =$

$$\sum_{(i)} \epsilon_{(i)} \bigwedge_{j=1}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}} + (2p-2k-1) \sum_h u_{i_1} u_h \Omega_{i_2}^h \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k-1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$$
$$= \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)L_k,$$

que es intrínseco, por otro lado, $d\Phi_k - (\Psi_{k-1} + (2p-2k-1)L_k)$ contiene sólo términos con $w_{ij}$, y por el lema anterior podemos escoger $\{e_i\}_{i=1}^n$ en una vecindad de $p$ tal que $w_{ij}(p) = 0$, para cada $p \in M$, por lo cual:

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)L_k. \qquad (5)$$

Introducimos ahora las siguientes abreviaciones:

$$P_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1}^2 \Omega_{i_2}^{i_1} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}},$$

$$\Sigma_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} u_{i_3} \Omega_{i_2}^{i_3} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}},$$

$$T_k = \sum_{(i)} u_{i_3}^2 \Omega_{i_2}^{i_1} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}.$$

Utilizando el hecho $\sum_{i=1}^n u_i u_i = 1$, se tiene:

$$P_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} (1 - u_{i_2}^2 - u_{i_3}^2 - \ldots - u_{i_n}^2)\, \Omega_{i_2}^{i_1} \bigwedge_{j=3}^{2(p-k)} \theta_{i_j} \bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$$
$$= \Psi_k - P_k - 2(p-k-1)T_k - 2kP_k,$$

y entonces:

$$\Psi_k = 2(k+1)P_k + 2(p-k-1)T_k. \qquad (6)$$

Usando ahora $\sum_{i=1}^n u_i\theta_i = 0$ de la fórmula (2), y de la definición de $\Sigma_k$, se tiene:

$$\Sigma_k = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} \Omega_{i_2}^{i_3} \, (-u_{i_1}\theta_{i_1} - \ldots \widehat{u_{i_3}\theta_{i_3}} \ldots - u_{i_{2p}}\theta_{i_{2p}}) \, (\bigwedge_{j=4}^{2(p-k)} \theta_{i_j}) (\bigwedge_{j=p-k+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}})$$
$$= -T_k - \Sigma_k(2k+1) - 0$$

y con esto, $T_k = 2(k+1)\Sigma_k$ de donde

$$\Sigma_k = \frac{T_k}{2(k+1)}. \qquad (7)$$

De la definición de $L_k$, se observa $L_k = P_k + 0 + \Sigma_k(2(p-k-1)) + 0$, es decir:

$$L_k = P_k + 2(p-k-1)\Sigma_k. \qquad (8)$$

Para terminar substituimos (8) en (5), y obtenemos:

$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)\{P_k + 2(p-k-1)\Sigma_k\}$,

y usando ahora (7) :

$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + (2p-2k-1)\{P_k + \frac{2(p-k-1)}{2(k+1)} T_k\}$,

es decir,

$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p-2k-1}{2(k+1)}\{2(k+1)P_k + 2(p-k-1)T_k\}$, por (6) terminamos con:

$$d\Phi_k = \Psi_{k-1} + \frac{2p-2k-1}{2(k+1)}\Psi_k$$

$\square$

**Corolario.-** $\Psi_k = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \frac{2^{m+1}(k+1)k(k-1)\cdots(k-m+1)}{(2p-2k-1)\cdots(2p-2(k-m)-1)}\, d\Phi_{k-m}.$

**Demostración.-** De la proposición tenemos:

$$\Psi_k = (d\Phi_k - \Psi_{k-1})\left(\frac{2(k+1)}{2p-2k-1}\right) = \left(d\Phi_k - (d\Phi_{k-1} - \Psi_{k-2})\frac{2((k-1)+1)}{2p-2(k-1)-1}\right)\left(\frac{2(k+1)}{2p-2k-1}\right)$$

y recursivamente, tenemos el resultado. $\square$

**Definición 1.-** Sea $\Pi = \frac{1}{\pi^p}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^m \frac{1}{2^{p+m}m!\,1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-2m-1)}\Phi_m.$

Observamos:

$$\Pi = \frac{1}{\pi^p}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^m \frac{2^{p-m}p(p-1)\ldots(m+1)}{2^{2p}p!\,1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-2m-1)}\Phi_m,$$

$$\Pi = \frac{1}{\pi^p}\sum_{m=0}^{p-1}(-1)^{m+p-1} \frac{2^{m+1}p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)}{2^{2p}p!\,1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1)}\Phi_{p-1-m},$$

y recordando $\Omega = (-1)^{p-1}\frac{1}{2^{2p}p!\,\pi^p}\Psi_{p-1}$, hemos probado:

**Proposición 3.-**

$$\Omega = d\Pi.$$

$\square$

## §3 LA VARIEDAD $\widetilde{M}$

Es conveniente en este momento, enunciar con precisión el teorema que nos ocupa en éste capítulo.

**Teorema (Gauss-Bonet)**

Sea $M^n$ una variedad Riemanniana, cerrada, orientable de dimensión $n = 2p$, entonces se tiene

$$\int_M \Omega = \chi(M).$$

Para construir la variedad $\widetilde{M}$ contenida en $T_1M$, consideremos:

**Definición 2.-** Sea $v: M \to TM$ un campo vectorial suave. $v$ es no degenerado en $z$ un cero de $v$, si para:

$$\tilde{v} = d\varphi \circ v \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n,$$

donde $(\varphi, U)$ una carta coordenada tal que $z \in U$; se tiene que, la transformación lineal $d\tilde{v}_{\varphi(z)}$ es no singular

**Observación.-** Usando que los cambios de coordenadas son difeomorfismos, se puede ver que esta definición no depende de la parametrización $\varphi$.

**Observación.-** Se sigue: $z$ es un cero aislado de $v$.

**Definición**[†] **3.-** Sea $f\colon M \to N$ aplicación suave entre variedades, $f$ es transversal a la subvariedad $Z \subset N$ si:

$$Im(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}N$$

para cada $x \in f^{-1}(Z)$.

**Lema 1.-** Un campo $v\colon M \to TM$ es transversal a la sección cero, si y solo si, $v$ tiene ceros no degenerados.

**Demostración.-** Sea $M_0 = \{(q,0) \in TM\}$ la sección cero. Primeramente observamos que los ceros de $v$ son los puntos de $v^{-1}(M_0)$. Sea $z$ un cero de $v$, consideremos:

$$\tilde{v} = d\varphi \circ v \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^n \quad \text{y}$$

$$\bar{v}\colon U \to T\mathbb{R}^n \;\; \text{dada por} \;\; \bar{v}(x) = (x, \tilde{v}(x)),$$

tenemos (usando $d\varphi_z$):

$$Im(dv_z) + T_{(z,0)}M_0 = T_{(z,0)}TM \iff Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) + T_{(\varphi(z),0)}\mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{(\varphi(z),0)}T\mathbb{R}^n$$

por esto, probaremos que $d\tilde{v}_{\varphi(z)}$ es no singular si y solo si

$$Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) + T_{(\varphi(z),0)}\mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{(\varphi(z),0)}T\mathbb{R}^n.$$

$\Rightarrow$)

como $d\tilde{v}_{\varphi(z)}$ es no singular, se tiene que $d\bar{v}_{\varphi(z)}$ es no singular (así $\dim Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) = n$)) y

$$Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) \cap T_{(\varphi(z),0)}\mathbb{R}^n \times \{0\} = \{((\varphi(z),0), d\tilde{v}_{\varphi(z)}(w)) | d\tilde{v}_{\varphi(z)}(w) = 0\} = \{((\varphi(z),0),0)\}$$

y por lo tanto tenemos:

$$Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) \oplus T_{(\varphi(z),0)}\mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{(\varphi(z),0)}T\mathbb{R}^n .$$

$\Leftarrow$)

si tenemos:

$$Im(d\bar{v}_{\varphi(z)}) + T_{(\varphi(z)},0)\mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{(\varphi(z),0)}T\mathbb{R}^n$$

entonces, $\{w | d\tilde{v}_{\varphi(z)}(w) = 0\} = \{0\}$ y por lo tanto $d\tilde{v}_{\varphi(z)}$ es no singular $\square$

**Lema**[††] **2.-** Sea $M$ una variedad compacta y conexa, $\Phi\colon N \to M$ un difeomorfismo entre variedades. Si $\Psi\colon N \to M$ diferenciable, es suficientemente cercana a $\Phi$, en el sentido $C^1$, entonces $\Psi$ es también un difeomorfismo.

**Demostración.-** $d\Phi$ es no singular en todos los puntos, si $\Psi$ es suficientemente cercana a $\Phi$ en el sentido $C^1$, tendremos que $d\Psi$ también es no singular. Entonces $\Psi$ es localmente inyectiva y manda abiertos en abiertos por el teorema de la función inversa; y como $M$ es compacta, manda cerrados en cerrados. Por la conexidad de $M$, $\Psi(M) = M$. Sólo falta mostrar que $\Psi$ es globalmente inyectiva; supongamos que no, entonces existe una sucesión $\{\Psi_n\}$ tal que $\Psi_n \to \Phi$ en la topología $C^1$ y dos sucesiones de puntos $\{q_n\}$ y $\{q'_n\}$, tales que $\Psi_n(q_n) = \Psi_n(q'_n)$ y $q_n \neq q'_n$; por la compacidad de $M$ y tomando subsucesiones adecuadas $q_n \to q$ y $q'_n \to q'$, por la continuidad de $\Phi$ se tiene $\Phi(q) = \Phi(q')$, y entonces $q = q'$, y para $n$ suficientemente grande $q_n$ y $q'_n$ están en una sola vecindad en la cual $\Psi_n$ es inyectiva; esta contradicción muestra la inyectividad de $\Psi$ $\square$

---

† *ver [Guill] Capítulo I §5*

†† *ver [Sch] capítulo II* [illegible]

**Corolario a la Demostración.-** Sea $M$ compacta, $\Phi: M \to N$ diferenciable e inyectiva y $\Psi: M \to N$ diferenciable, localmente inyectiva y suficientemente cercana en $C^1$ a $\Phi$ ; entonces, $\Psi$ es globalmente inyectiva. □

**Lema[†] 3.-** Sea $M$ una variedad compacta, $TM$ su haz tangente con $\pi: TM \to M$ la proyección canónica. Consideremos $\mathfrak{F}$ el conjunto de aplicaciones diferenciables $\{F: M \to TM\}$ con la topología $C^\infty$ y $\Gamma \subset \mathfrak{F}$ las secciones lisas de $TM$ (i.e. los campos vectoriales sobre $M$). Sea $G$ el grupo de difeomorfismos de $M$ en $M$. Sea $\Theta \subset \mathfrak{F}$ un subconjunto denso de $\mathfrak{F}$; supongamos que $\Theta$ es $G$-invariante (i.e. si $g \in G$ entonces $f \circ g \in \Theta\ \forall f \in \Theta$). Entonces: $\Gamma \cap \Theta \neq \emptyset$.

**Demostración.-** Por el lema 2, toda función diferenciable $M \to M$ suficientemente cercana a la identidad es un elemento de $G$. Así, existe una vecindad $U$ de la sección cero $(V_0: M \to TM,\ V_0(x) = (x,0))$ en $\mathfrak{F}$, tal que, si $f \in U$, entonces $\pi \circ f \in G$. Como $\Theta$ es densa en $\mathfrak{F}$, existe $F \in \Theta \cap U$. $\pi \circ F$ es un difeomorfismo, por lo cual $dF_x: T_xM \to T_{F(x)}TM$ es inyectiva para cada $x \in M$, es decir $dF_x$ es no singular y por lo tanto localmente inyectiva; por el corolario a la demostración anterior, en vista de que es suficientemente cercana a $V_0$, la cual es inyectiva, y $M$ es compacta, concluimos: $F: M \to F(M)$ es una biyección, es decir $F$ es una inmersión y $\pi|_{F(M)}: F(M) \to M$ es un difeomorfismo. Tenemos $(\pi \circ F)^{-1} = g \in G$ y por lo tanto: $V = F \circ g \in \Theta$ por ser $\Theta$ $G$-invariante y se tiene $\pi \circ V = 1d$ de donde $V \in \Gamma$ y con lo cual $\Gamma \cap \Theta \neq \emptyset$. □

**Definición 4.-** Sean $f, g: M \to N$ aplicaciones suaves entre variedades (sea $N$ metrizable), y sea $\delta(x)$ una función real, continua, positiva, definida en $M$. Entonces $g$ es una $\delta$-*aproximación* de $f$ si:

$$d(f(x), g(x)) < \delta(x) \quad \text{para toda } x \in M$$

Omitiremos la demostración del siguiente teorema, y nos referimos a [Mil 2] (teorema 1.35):

**Teorema de Transversalidad de R.Thom**

Sea $f: M^n \to N^p$ diferenciable; sea $Z^{p-q} \subset N$, una subvariedad cerrada de $N$. Sea $\delta$ una función continua positiva en $M$, entonces existe $g: M \to N$ tal que:

i) $g$ es una $\delta$-aproximación de $f$

ii) $g$ es transversal a $Z$.

**Corolario.-**[††] Dada $M$ una variedad compacta, existe un campo vectorial $V$ sobre $M$, con singularidades no degeneradas.

**Demostración.-** El teorema de transversalidad de Thom, nos dice en términos del lema 3 que, $\Theta$ el conjunto de las aplicaciones lisas de $M$ en $TM$ transversales a la sección cero es un subconjunto denso de $\mathfrak{F}$; aplicando el lema 3, tenemos que existe una sección transversal a la sección cero, y por el lema 1, es un campo vectorial con singularidades no degeneradas. □

---

† *ver [Och] Apéndice I Proposición I.1*

†† *ver [Och] §2 Lema 1 y Apéndice I (I.2)*

Consideremos ahora, un tal campo vectorial $V$, cuyos ceros serán aislados. Como $M$ es compacta, el conjunto de ceros o singularidades $\Sigma$ de $V$ es un conjunto finito de puntos de $M$ y es por tanto un cerrado de $M$.

Definimos ahora:

$$\begin{aligned} \overline{V}: M-\Sigma &\longrightarrow T_1 M \\ p &\longmapsto \frac{V(p)}{\|V(p)\|} \end{aligned}$$

el cual sigue siendo un campo vectorial suave, así $M^* = \overline{V}(M-\Sigma)$ será una subvariedad de $T_1M$ difeomorfa a $M-\Sigma$ (por ser $\overline{V}$ una sección de $T_1M$, con $\pi|_{M^*}$ y $\overline{V}$. como difeomorfismos), sea finalmente $\widetilde{M} = \overline{M^*}$ la cerradura de $M^*$ en $T_1M$.

Observamos que $M-\Sigma$, difiere de $M$ por un conjunto de medida cero (de hecho finito), lo mismo $M^*$ de $\widetilde{M}$, por lo cual tenemos:

$$\int_M \Omega = \int_{M-\Sigma} \Omega = \int_{M^*} \Omega^* = \int_{\widetilde{M}} \Omega^*.$$

Nos ocuparemos, por un momento de ver como es $\pi(\partial\widetilde{M})$.

**Afirmación.-** $\pi(\partial\widetilde{M}) \subset \Sigma$.

Para $\overset{o}{\widetilde{M}}$ el interior de $\widetilde{M}$ se tiene $\pi(\overset{o}{\widetilde{M}}) \supset M-\Sigma$, pues dado $x \in M-\Sigma$, como $\Sigma$ es cerrada en $M$, existe $W$ abierto de $M$ contenido en $M-\Sigma$, por lo tanto, $\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(W)$ es un abierto que contiene a $\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(x)$, es decir, $\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(x) \in \overset{o}{\widetilde{M}}$, con lo cual, $x \in \pi(\overset{o}{\widetilde{M}})$, así $\pi(\partial\widetilde{M}) \subset \Sigma$.

## §4 LA INTEGRAL SOBRE $\widetilde{M}$ Y $\partial\widetilde{M}$

A continuación enunciamos el Teorema de Stokes, del cual omitimos la demostración por tratarse de un tema que desviaría nuestra atención del concepto de curvatura. Se puede encontrar una demostracion en [Spi] (Teorema 5-5)

**Teorema (Stokes)**

Si $M$ en una variedad $m$-dimensional, orientada, compacta (con frontera) y $w$ una $(k-1)$-forma en $M$, entonces

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w.$$

□

Hasta el momento nuestro problema es evaluar la integral

$$\textstyle\int_{\widetilde{M}} \Omega = \int_{\widetilde{M}} d\Pi$$

la cual, por el teorema de Stokes es:

$$\textstyle\int_{\widetilde{M}} \Omega = \int_{\partial\widetilde{M}} \Pi;$$

ahora nuestro problema se ha reducido a analizar $\partial\widetilde{M}$ y evaluar la integral correspondiente. Pero antes.

Sean $M$, $N$ variedades orientadas, $n$-dimensionales (sin frontera), $f:M \to N$ diferenciable, $M$ es compacta y $N$ conexa, sea $x \in M$ punto regular de $f$, entonces $df_x: T_xM \to T_{f(x)}$ es isomorfismo entre espacios vectoriales orientados; se define el signo de $df_x$, $sign\, df_x$ como 1 ó $-1$ según $df_x$ preserve o invierta la orientación; esto da origen a la siguiente:

**Definición 5.-** el grado de f $deg\, f$ esta definido de la forma siguiente: primero consideramos,

$$deg(f;y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} sign\, df_x \quad \text{para } y \in N \text{ valor regular,}$$

se muestra (ver [Mil 1] §5 Teorema A), que $deg(f;y)$ no depende de $y$, con lo cual se define el grado de $f$ como:

$$deg\, f = deg(f;y) \quad \text{para } y \in M \text{ algún valor regular.}$$

**Definición 6.-** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $v: U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, con un cero aislado en $z \in U$. La función:

$$\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \text{ es una función suave de } \mathbb{S}_\epsilon \text{ (una esfera de radio } \epsilon \text{ con}$$

centro en $z$) en $\mathbb{S}^{n-1}$. El grado† de $\overline{v}$ es llamado el índice $i$ de $v$ en el cero $z$.

**Definición 7.-** Sea $v: M^n \to TM$ un campo vectorial con ceros aislados, sea $p \in M$ un cero y $U$ una vecindad de $p$ en $M$ que no contenga otro cero de $v$, y contenida en el dominio de una parametrización $\varphi$. Se define el índice $i$ de $v$ en $p$, $i_p(v)$ como el índice de $d\varphi \circ v \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ en $\varphi(p)$.

**Observación.-** El índice de $v$ en $p$ está bien definido; para lo cual nos referimos a [Mil 1] §6 Lema 1.

**Proposición 4.-** El índice de $v$, en un cero no degenerado es 1 ó $-1$.

Para la demostración nos referimos a [Mil 1] §6 Lema 4. □

Regresando a la variedad $\widetilde{M}$ tenemos, para $\pi: T_1M \to M$ la proyección:

$$\pi(\partial\widetilde{M}) \subset \{\text{singularidades de } V\} = \Sigma;$$

como las singularidades de $V$ son aisladas tenemos:

$$\partial\widetilde{M} = \bigsqcup_{p\in\Sigma} \pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p),$$

por lo cual, nos basta analizar $\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p)$ para cada $p \in \Sigma$.

**Proposición 5.-** Sea $p \in \Sigma$, entonces $\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p)$ es el ciclo $Z_p$ de los vectores unitarios en $T_pM$, orientado positivamente si el índice de $V$ es positivo, o negativamente si es negativo.

**Observación.-** Como $p \in \Sigma$ es un cero no degenerado de $V$, entonces $i(p) = \pm 1$.

**Demostración.-** Sea $U$ una vecindad de $p \in M$, tal que no contiene otro cero de

† *las esferas las orientemos como fronteras de discos y son sin frontera, compactas y conexas*

$V$ y está contenida en el dominio de una parametrización $\varphi$.

La contención $Z_p \supset \pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p)$ es clara, por lo tanto nos ocuparemos de la otra.

Sea $(w,p) \in Z_p$, mostraremos que existe una sucesión de puntos en $\widetilde{M}$, que convergen a $(w,p)$, por ser $\widetilde{M}$ cerrada, tendremos $(w,p) \in \pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p)$.

Consideremos:

$$v = d\varphi \circ V \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

y $\overline{v} = \frac{v}{\|v\|}$ de una esfera $\mathbb{S}_\epsilon$ con centro en $\varphi(p)$ en $\mathbb{S}^{n-1}$; como el índice de $V$ en $p$ es distinto de cero (1 ó $-1$), tenemos que $\overline{v}$ es suprayectiva (si no su grado sería cero), por lo tanto existe $x_\epsilon \in \mathbb{S}_\epsilon$, tal que $\overline{v}(x_\epsilon) = d\varphi(w) \in \mathbb{S}^{n-1}$, esto se puede hacer para $\epsilon$ tan pequeña como se quiera, con lo cual podemos obtener una sucesión de puntos $q_\epsilon = \varphi^{-1}(x_\epsilon) \in M$, tales que $\overline{V}(q_\epsilon) = w$, es decir una sucesión $(\overline{V}(q_\epsilon), q_\epsilon) \in \widetilde{M}$ que converge a $(w,p)$.

La orientación nos la da el índice, pues este depende de que $v$ (o equivalentemente $V$) invierta o no la orientación. □

Si denotamos $Z_p$, al ciclo orientado positivamente,

$$\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p) = i_p(V) Z_p,$$

donde $-Z_p$ denota a $Z_p$ con la orientección inversa.

**Corolario.-** $\pi(\partial\widetilde{M}) = \Sigma$.

**Demostración.-** La contención $\subset$ la observamos al final de la sección anterior, y la otra contención $(\supset)$ es consecuencia de la proposición de arriba. □

Con lo anterior, es fácil evaluar la integral que nos ocupa.

$$\int_{\partial\widetilde{M}} \Pi = \sum_{p\in\Sigma} \int_{\pi^{-1}|_{\widetilde{M}}(p)} \Pi = \sum_{p\in\Sigma} i_p(V) \int_{Z_p} \Pi$$

por lo cual basta conocer las integrales:

$$\int_{Z_p} \Pi$$

el cálculo de las cuales será el objeto de la siguiente sección.

## §5 LA INTEGRAL SOBRE $Z_p$

Nuestro problema ahora es evaluar las integrales

$$\int_{Z_p} \Pi \quad \text{con } p \in \Sigma.$$

Observemos que $\Phi_m = \sum_{(i)} \epsilon_{(i)} u_{i_1} (\bigwedge_{j=2}^{2(p-m)} \theta_{i_j}) (\bigwedge_{j=p-m+1}^{p} \Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}})$ para $m \neq 0$ es cero restringida a $Z_p$, pues las formas $\Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$ son cero restringidas a $Z_p$, en vista de que son las inducidas por las $\Omega_{i_{2j}}^{i_{2j-1}}$ en $M$ y $Z_p \subset \pi^{-1}|_{T_1 M}(p)$, luego:

$$\begin{aligned}\int_{Z_p} \Pi &= \int_{Z_p} \frac{1}{\pi^p} \sum_{m=0}^{p-1} (-1)^m \frac{1}{2^{p+m} m! 1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2p-2m-1)} \Phi_m \\ &= \int_{Z_p} \frac{1}{\pi^p 2^p 1\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2p-1)} \Phi_0\end{aligned}$$

donde, podemos escribir $\Phi_0 = (2p-1)! \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \theta_1 \ldots \theta_{i-1} u_i \theta_{i+1} \ldots \theta_{2p}$; por esto basta evaluar

$$\int_{Z_p} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \theta_1 \ldots \theta_{i-1} u_i \theta_{i+1} \ldots \theta_{2p}$$

**Proposición 6.-** $\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \theta_1 \ldots \theta_{i-1} u_i \theta_{i+1} \ldots \theta_{2p}$, es la forma de volumen de $Z_p$.

**Demostración.-** Sea $q = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in Z_p \subset T_p M$, y $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base positiva, ortonormal de $T_q Z_p (\simeq T_p M)$. Por la forma en que se definió la orientación de $Z_p$ tenemos, $\{q, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es base ortonormal de $T_p M$, así $1 = \det \begin{vmatrix} q \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{vmatrix}$ desarrollando por el primer renglón, tenemos:

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u_i \det \begin{vmatrix} v_{1\,1} & \ldots & v_{1\,i-1} & v_{1\,i+1} & \ldots & v_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1\,1} & \ldots & v_{n-1\,i-1} & v_{n-1\,i+1} & \ldots & v_{n-1\,n} \end{vmatrix}$$

usando $\theta_i = du_i + \sum_j u_j w_{ji}$, como en $Z_p$ $w_{ij} = 0$ (por la misma razón que las $\Omega_j^i$), se tiene $\theta_i = du_i$ en $Z_p$, es decir, $v_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_j(v_i) e_j$, entonces:

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u_i \det \begin{vmatrix} \theta_1(v_1) & \ldots & \theta_{i-1}(v_1) & \theta_{i+1}(v_1) & \ldots & \theta_n(v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \theta_1(v_{n-1}) & \ldots & \theta_{i-1}(v_{n-1}) & \theta_{i+1}(v_{n-1}) & \ldots & \theta_n(v_{n-1}) \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \theta_1 \ldots \theta_{i-1} u_i \theta_{i+1} \ldots \theta_n (v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ &= \eta(v_1, \ldots, v_{n-1})\end{aligned}$$

es decir, $\eta$ aplicada a bases ortonormales positivas es igual a 1, por lo tanto $\eta$ es la forma de volumen en $Z_p$. □

Como $Z_p$ es un esfera unitaria en $T_p M$, tenemos, por lo tanto:

$$\int_{Z_p} \eta = vol(\mathbb{S}^n)$$

y como podemos ver en [Cour] volumen 2, capítulo 4, sección 11, inciso b; se tiene $vol(\mathbb{S}^n) = \frac{2\pi^p}{(p-1)!}$, con lo cual:

$$\int_{Z_p} \Pi = \int_{Z_p} \frac{1}{\pi^p 2^p 1\cdot 3 \cdots (2p-1)} \Phi_0 =$$
$$\frac{(2p-1)!}{\pi^p 2^p 1\cdot 3 \cdots (2p-1)} \int_{Z_p} \eta = \frac{2\pi^p (2p-1)!}{\pi^p 2^p 1\cdot 3 \cdots (2p-1)} = 1$$

y finalmente:

$$\int_{\widetilde{M}} \Pi = \sum_{p\in\Sigma} i_p(V).$$

Para terminar enunciamos sin demostración el siguente Teorema †.

**Teorema de Poincaré-Hopf**

Sea $M^n$ una variedad compacta, $V$ un campo vectorial suave en $M$ con ceros aislados $\Sigma$, entonces, la suma de los índices de los ceros de $V$ es igual a la característica de Euler ‡ de $M$. Es decir,

$$\sum_{p\in\Sigma} i_p(V) = \chi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j rang\, H_j(M)$$

□

Finalmente podemos evaluar:

$$\int_M \Omega = \int_{\widetilde{M}} \Pi = \sum_{p\in\Sigma} i_p(V) = \chi(M),$$

con lo cual, terminamos la prueba del Teorema de Gauss-Bonet.

† *ver [Mil 1] §6 Teorema de Poincaré-Hopf*

‡ *aquí $H_j(M)$ denota el $j$-ésimo grupo de homología de $M$*

# BIBLIOGRAFÍA


[Ch] S.S.CHERN, *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Binnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*, Annals of Mathematics, Vol.45 (1944), pp.747-753.

[Cour] R.COURANT, F.JOHN *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Limusa (2 volúmenes).

[Doc] DO CARMO M.P., *Geometria Riemanniana*, impa (1979).

[Guill] VICTOR GUILLEMIN, ALAN POLLACK, *Differential Topology*, Pretince-Hall (1974).

[Hel] SIGURDUR HELGASON, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press (1978).

[Hic] NOEL J. HICKS, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand Reinhold (1971).

[Kob] SHOSHICHI KOBAYASHI, KATSUMI NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers (1963).

[Mat] YOZO MATSUSHIMA, *Differentiable Manifolds*, Dekker (1972).

[Mil] JOHN MILNOR, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press Número 51.

[Mil 1] JOHN MILNOR, *Topology From the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia (1965).

[Mil 2] JAMES MUNKRES, *Differential Topology, Lectures by John Milnor*, (1958).

[Och] S. OCHANINE, *Signatura Modulo 16, Invariants de Kervaire Générelisés et Nombres Caractéristiques dans la K-Théorie Réele*, Memorie de la Societe Mathematique de France, Nouvelle série No. 5.

[Sch] JACOB T.SCHWARTZ, *Differential Geometry and Topology*, Gordon and Breach (1968).

[Sin] I.M. SINGER, JOHN A THORPE, *Lecture notes on Elementary Topolology and Geometry*, Scott. Foresman and Co. (1967).

[Spi] MICHAEL SPIVAK, *Calculo en Variedades*, Reverté (1979).


Otros lugares en los que se puede encontrar temas afines y complementarios, son:


MICHAEL SPIVAK, *A Comprensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc. (5 tomos).

JOSÉ ANTONIO ALEJANDRO URIBE AHUMADA, *El Teorema de Chern-Gauss-Bonnet*, Tesis de licenciatura, U.N.A.M. (1978).