

24.50



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## MODELO DE FENOMENO DE ESPERA "UNA APLICACION"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
A C T U A R I O  
P R E S E N T A :  
MA. DE LOURDES SANCHEZ MENDEZ



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## C O N T E N I D O

Introducción .....	1
I Análisis del modelo del sistema.	
1.1 Aspectos y ambiente del sistema .....	3
1.2 Problemática detectada .....	9
II Metodología de los modelos de teoría de colas.	
2.1 Teoría de colas .....	11
2.2 Modelo matemático y derivaciones .....	18
III Tratamiento de la Información.	
3.1 Estado del sistema y proceso de obtención .....	37
3.2 Procedimiento del tratamiento de la información ...	41
3.3 Solución matemática .....	73
IV Análisis de los resultados .....	79
V Conclusiones .....	84
Bibliografía .....	87

## INTRODUCCION

El presente documento pretende presentar un modelo de aplicación de la teoría de colas, donde el común denominador es la espera.

En todo sistema existen dos grandes clases de costos, el referente al tiempo de espera de un servicio y el asociado al consumo de recursos que requiere ese servicio.

Para ilustrar esta situación se considera el problema de un abastecimiento de gasolina "Gasolinera" y el posible incremento de su servicio, donde se tiene por objetivo explorar, conocer y comparar varias situaciones del sistema de gasolinera y conseguir una optimización.

Se plantea un modelo para cuantificar una línea de espera y así poder producir resultados óptimos, estos con respecto a la naturaleza de las llegadas de los clientes, el tiempo de servicio, el número de servidores y la estructura del sistema.

La teoría de colas es una rama de la matemática aplicada que utiliza distintos procesos de probabilidad y estadísticas para su desarrollo.

En este enfoque se exige que las llegadas al servicio sigan una distribución Poisson y Tiempos de servicio exponencial, satisfaciendo estas restricciones el problema se reduce a la Teoría básica de colas y a un proceso de sustitución dentro de las formulas derivadas.

Se tiene como objetivo hacer notar que un estudio de la teoría de colas puede proporcionar elementos de información para el análisis y apoyo en la toma de decisiones.

# C A P I T U L O I

## ANALISIS DEL MODELO DEL SISTEMA

### 1.1 ASPECTOS DEL MODELO DEL SISTEMA.

Un concepto básico en el análisis de un proceso de colas es el modelo del sistema. En este se da la descripción de un sistema que proporcione una base suficiente para predecir su comportamiento.

El análisis se hará describiendo el procedimiento del servicio así como el ambiente y recursos con que cuenta la gasolinera.

Para la apertura de una gasolinera, PEMEX elaboró un estudio del medio donde se localizará ésta, toma en cuenta si realmente es necesaria su ubicación en ese determinado lugar, dependiendo del número de gasolineras que se encuentran alrededor del lugar, así como la distancia que existe entre ellas y si en ellas hay suficiente abastecimiento, toma también en cuenta las características del terreno donde se pretende su ubicación, etc.

Si el análisis que elaboró determina que tanto su ubicación como las características del medio es necesaria su apertura, se establece un convenio de concesión.

PEMEX elaboró el diseño de ubicación y el tipo de bombas

necesarias para la instalación, así como los medios para la prevención de accidentes. Se determina la capacidad en volumen de litros y el tipo de abastecimiento.

En la gasolinera donde se realizó el análisis, el diseño de la estructura se hizo hace más de 15 años y es el que permanece en la actualidad, sin haberse hecho ninguna modificación. Por esta razón los concesionarios de la gasolinera contemplan la posibilidad de agregar un módulo más de bombas y remodelar su estructura.

La gasolinera cuenta con las siguientes características.

#### UBICACION

El establecimiento se encuentra entre las siguientes avenidas:

Norte	Av. Ramos Millán, Eje vial cinco sur. Sentido este a oeste.
Sur	Calle Monosabio Sentido doble.
Este	Av. Cumbres de Maltrata. Sentido doble.
Oeste	Calle Sutano. Sentido doble.

Se observa que por la ubicación de la gasolinera, la entrada y las salidas se encuentran con dirección a las avenidas más transitadas siguiendo el sentido de éstas. Las avenidas Ramos Millán y Cumbres de Maltrata son las avenidas en las que se observa mayor tránsito de vehículos.

#### LLEGADAS Y SALIDAS DE VEHICULOS.

La llegada de los vehículos a la gasolinera es de la siguiente forma:

Todos los vehículos entran por la esquina que forman las avenidas Cumbres de Maltrata y Ramos Millán.

Al entrar los vehículos a la gasolinera se dirigen hacia cualquiera de los dos módulos de bombas.

El módulo I tiene cuatro carriles de acceso con salida hacia la avenida Ramos Millán.

El módulo II tiene también cuatro carriles de acceso con salida hacia la avenida Cumbres de Maltrata.

Por facilidad y mejor manejo de la información se han tomado por separado los módulos, nombrándose Módulo I y Módulo II como anteriormente se mencionó.

#### TIPO DE SERVICIO

En general para toda la gasolinera existen cinco tanques de 20 000 litros cada uno, que abastecen a todas las bombas de la gasolinera.



El abastecimiento de combustible que realiza PEMEX es de dos pipas de 20,000 litros diarios y en algunas ocasiones una adicional.

Existen dos tipos de bombas dentro de la gasolinera, de una sola pistola, la cual solo da servicio a un solo vehículo y de doble pistola las cuales atienden a dos vehículos a la vez.

### PERSONAL

En esta gasolinera existen tres turnos de trabajo para la atención al público, que son los siguientes.

Matutino            6:30 a 14:30 hrs.

Vespertino        14:30 a 22:30 hrs.

Nocturno           22:30 a 6:30 hrs.

En total se cuenta con ocho servidores por turno de trabajo, para los servidores existe un día de descanso, el cual lo turnan entre ellos, quedando solo seis servidores, esto sucede para los turnos matutino y vespertino.

Para el turno nocturno solo se trabaja en un solo módulo y es atendido por dos servidores. Para este turno no se tiene ningún problema de formación de colas por lo tanto no se piensa en ninguna modificación, ni en personal ni en el servicio.

Para cada módulo se tiene la siguiente descripción:

#### Modulo I

- Cuatro carriles de acceso.
- Dos bombas con pistola normal.
- Dos bombas con pistola doble.
- Tres a cuatro servidores en turno Matutino y Vespertino

#### Modulo II

- Cuatro carriles de acceso.
- Dos bombas con pistola normal.
- Dos bombas con pistola doble.
- Dos a tres servidores en los dos primeros turnos.

La gasolinera cuenta con servicios adicionales que se atienden dentro de los mismos carriles de acceso que son : aire, agua, aceite , etc. Y con servicios de cambio de aceite y servicio fuera de la área del servicio de gasolina.

En el análisis que se desarrollo se observa que la hora en que más se forman las colas es en la mañana de 7:30 a 9:30 y en las tardes de 18:30 a 20:00 hrs.

La obtención de la información captada fue de 8:00 a 10:00 hrs quedando dentro de uno de los horarios en los cuales se llega a la formación de colas.

En la siguiente figura se muestra la ubicacion y estructura de la gasolinera.

Av. Ramos Millán

SALIDA

ENTRADA

MODULO I

Av. Cumbres de Maltrata

OFICINAS

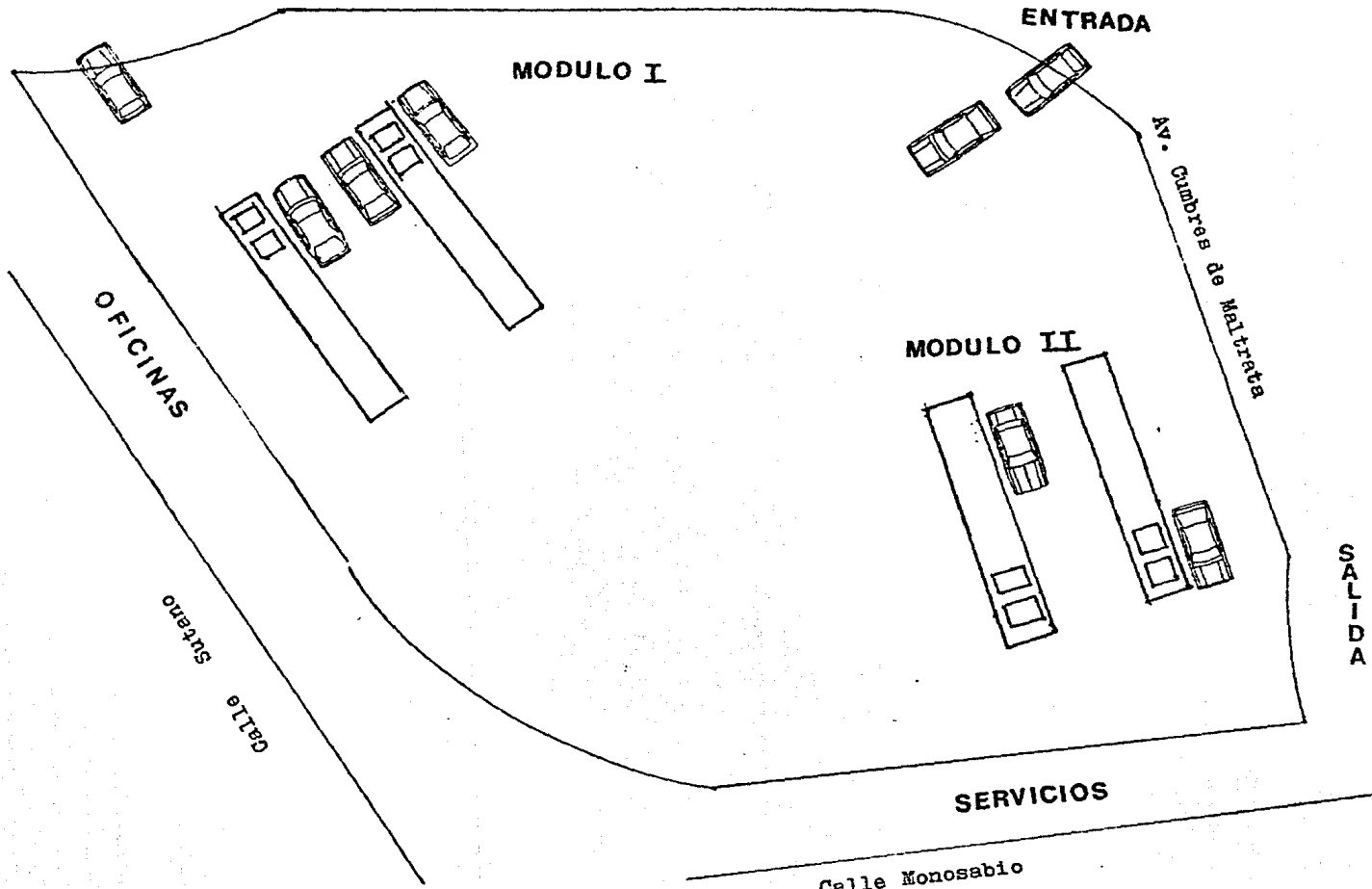
MODULO II

Calle Sitano

SALIDA

SERVICIOS

Calle Monosabio



## 1.2 PROBLEMATICA DETECTADA.

Con las condiciones actuales de la gasolinera y con la información captada de llegadas y tiempos de servicio se realizará una aplicación para el modelo de colas. Para este estudio se toma en cuenta la solicitud del concesionario para analizar una posible ampliación a un módulo más de bombas y conocer la situación del servicio con esta ampliación.

En el análisis que se realizó se observa que la demanda del servicio es mayor en el módulo I, se detecta que este problema se debe a que la avenida a cual tiene salida es la mayor transitada.

Este problema se debe a que los vehículos que transitan sobre las avenidas al entrar a la gasolinera desean salir hacia esa misma avenida. Esto ocasiona que en el modulo I se forme una cola numerosa dentro de las hofas pico de servicio y que algunas veces llega a obstruir el tráfico de las avenidas. Por otro lado los clientes que observan este problema desisten de tomar servicio.

En el caso del módulo II hay ocasiones que se encuentra con muy pocos vehículos e incluso vacío. Aquí se hace notorio el tiempo de espera de los clientes en el módulo I y el tiempo ocioso de los servidores del módulo II.

Teniendose el problema de los dos grandes costos, el social y el de los recursos del servicio.

Como anteriormente se había mencionado se tiene cuatro bombas con un total de seis pistolas las cuales son atendidas por tres o cuatro servidores, en este caso se desperdician recursos del servicio. El problema de esta situación es que las bombas se encuentran ubicadas al final del carril de acceso y juntas, no permitiendo que se puedan atender a otros vehículos.

A través de la teoría de colas se tratará de conocer y analizar la situación en la que se encuentra actualmente la gasolinera con el número de módulos y servidores que atienden ésta, comparando distintas situaciones.

El mismo procedimiento se seguirá para conocer la situación de ampliar la gasolinera a un módulo más, y más tarde poder determinar si es necesario su adquisición para satisfacer las necesidades.

Dentro del procedimiento se verán los siguientes puntos:

- El número de servidores que deben atender la gasolinera, variando el número.
- Los recursos disponibles para un adecuado consumo de estos.
- El ambiente adecuado para el sistema.

## C A P I T U L O II

### METODOLOGIA DE LOS MODELOS DE TEORIA DE COLAS

#### 2.1 TEORIA DE COLAS.

La formación de colas o líneas de espera es un fenómeno que se presenta cuando la demanda de un servicio es mayor que la capacidad de proporcionar ese servicio, es decir hay ocasiones en que llegan más clientes de los que pueden atenderse en un momento dado y algunos clientes deben esperar el servicio.

La estructura básica de una cola esta constituida por clientes que requieren un servicio y los servidores que proporcionan dicho servicio.

La teoría de colas es una rama de las matemáticas aplicadas que utiliza distintos procesos de probabilidad y estadística para su desarrollo, teniendo los siguientes objetivos:

- Caracterizar cuantitativamente y cualitativamente una cola.
- Poder determinar un balance entre el tiempo de espera y los costos relacionados al consumo de los recursos.

## Características de las colas.

Una cola se caracteriza por su tamaño, es decir por el número máximo de clientes que pueda contener.

Las colas pueden ser:

- Finitas (también llamadas limitadas) usualmente implican un conjunto contable pequeño.
- Infinitas (o ilimitadas) en este se requiere de un gran conjunto o un conjunto impredecible.

Dado que los cálculos son más fáciles para el caso infinito a menudo se hace esta suposición para un conjunto finito realmente grande, ya que el tratar con una cota superior de este tipo sería un factor de complicación en el análisis.

## Proceso básico de las colas.

En la mayor parte de los modelos de colas se sigue un modelo básico, que es el siguiente:

- Fuente de entrada
- Mecanismo de servicio
- Disciplina en la cola.

## Fuente de entrada

La manera más usual de describir la fuente de entrada o patrón de llegadas es mediante intervalos de tiempo, entre cada una de las llegadas, siendo estos intervalos sucesivos.

Los patrones de llegadas pueden ser:

- Llegadas regulares.- En este tipo de llegadas, los clites llegan uno a uno en instantes de tiempo igualmente espaciados, es decir el tiempo entre llegadas es constante.
- Llegadas aleatorias.- En estas los clientes se comportan todos uno independiente de otro, cuando las llegadas varían aleatoriamente es necesario definir la función de probabilidad de los tiempos entre llegadas
- Llegadas regulares con impuntualidad .- Este caso es cuando los clientes tienen citas para llegar en intervalos igualmente espaciados pero son impuntuales.

Y pueden existir otras fuentes de llegadas que pueden surgir en las aplicaciones pero de hecho, las llegadas aleatorias y regulares son las más comunes en el trabajo matemático.



Mecanismo de servicio.

El mecanismo de servicio consiste en la forma en que se distribuye el servicio:

Este mecanismo consiste de:

- Tiempo de servicio.
- Capacidad del sistema .
- Disponibilidad.

Tiempo de servicio.

El tiempo de servicio es en el cuál se dá un servicio a un cliente. En casi todos los casos se supone que los tiempos de servicio para diferentes clientes son variables aleatorias independientes, todas con la misma distribu-  
ción de probabilidad a ésta se le da nombre de distribu  
ción de los tiempos de servicio.

Las distribuciones más comúnmente usadas son las siguientes:

- Tiempos de servicio constantes
- Tiempos de servicio exponencial
- Tiempos de servicio estacionarios.

Para la aplicación que se realizó en este trabajo se utiliza tiempos de servicio exponencial que más adelante se tratará.

## Capacidad del sistema.

Aquí se define el número máximo de clientes que pueden ser atendidos simultáneamente, es decir la forma en que podrán ser atendidos los clientes.

Esto dependiendo del servicio y la disponibilidad del servicio, pueden ocuparse un servidor o varios servidores.

## Disponibilidad.

Para la disponibilidad es necesario describir y establecer las facilidades del servicio, así como las restricciones que podrían reducir el número de clientes que pueden atenderse por debajo de la capacidad del sistema.

## Disciplina de la cola.

La disciplina en la cola es el orden en que se selecciona los miembros de la cola para que puedan recibir su servicio, las diferentes formas de disciplinas en la cola son las siguientes:

- Disciplina del primero en entrar el primero en salir.

Ocurre cuando los clientes que llegan se reúnen en el orden de tiempo en que llegan pero se ofrece el servicio al cliente que ha esperado el máximo de tiempo.

- Disciplina del último en entrar primero en salir.

Cuando los clientes forman una cola en el orden en que llegan pero se ofrece el servicio primero al que llega más recientemente.

- Disciplina aleatoria.

Esto significa que se hace una selección entre todos los clientes, teniéndose igual oportunidad de ser elegidos.

### Clasificación de las colas.

Dado un sistema de servicio las colas pueden tener las siguientes formas básicas, que depende del número de servidores y el número de colas o líneas de espera que prestan su servicio.

- Una línea de espera un servidor.

Los clientes llegan a una cola donde es un solo servidor el que presta el servicio.

- Múltiples líneas - múltiples servidores.

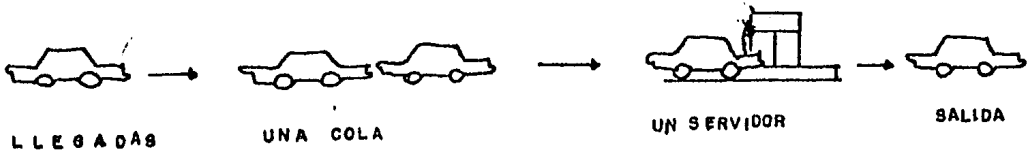
Los clientes escogen entre varias líneas para recibir el servicio.

- Estación a estación o llegadas en serie.

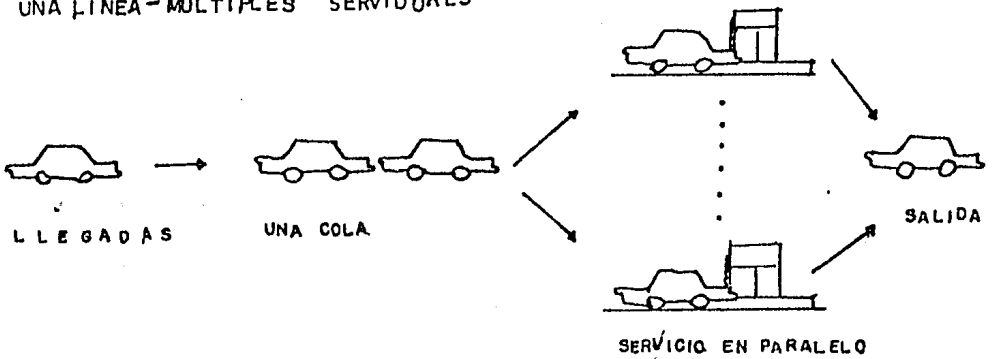
Los clientes reciben parte de un servicio en una cola y pasan a formar parte de otra hasta terminar el servicio.

# CLASIFICACION DE LAS COLAS

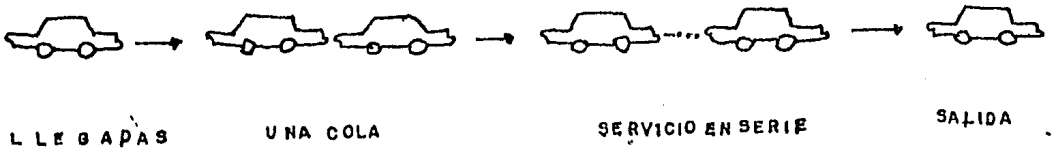
## UNA LINEA DE ESPERA - UN SERVIDOR



## UNA LINEA - MULTIPLES SERVIDORES



## SERVICIO EN SERIE



## 2.2 MODELO MATEMATICO Y DERIVACIONES.

La distribución Poisson es un modelo importante no solo en la teoría de colas si no en muchos fenómenos de la física, química, economía, ingeniería y otras.

La distribución Poisson se refiere a la ocurrencia de variables aleatorias discretas que toman valores en los enteros no negativos en un intervalo dado.

Las características de un proceso Poisson serían las siguientes :

- i) El número de ocurrencias en intervalos independientes son valores de variables aleatorias independientes.
- ii) La distribución de las variables aleatorias que proporciona el número de ocurrencias, depende de la longitud del intervalo y no de sus extremos.
- iii) La dependencia que se menciona en el postulado precedente es de proporcionalidad o sea la probabilidad de obtener exactamente una ocurrencia en un intervalo dado es directamente proporcional a la longitud de este intervalo.
- iv) La probabilidad de obtener dos o más ocurrencias en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

En base a las características expresadas se deducirá la distribución Poisson. La finalidad que se tiene es la de determinar la probabilidad del número de variaciones que ocurren durante el intervalo  $(t)$ .

$$\text{Sea } P_n(t) = P(x_t = n) \quad \dots(1)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$

La probabilidad de tener  $n$  ocurrencias en el intervalo de longitud  $t$ .



Considerando primero la probabilidad de tener  $n$  ocurrencias en el intervalo  $t + \Delta t$ .

Sea  $\lambda$  igual al promedio de variaciones en un intervalo igual a la unidad, que es la constante de proporcionalidad que se menciona en iii).

La probabilidad de una ocurrencia en  $t$  es :

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$$

$$\text{si } P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) - \sum_{n=2}^{\infty} P_n(\Delta t) \quad \dots(2)$$

Por iv) si  $t$  es suficientemente pequeño  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\Delta t)$  tiende a cero.

$$\text{Por lo tanto } P_0(\Delta t) = 1 - P_1(\Delta t) \quad \dots(3)$$

Considerando el intervalo  $t + \Delta t$  la probabilidad de cero arribos en ese intervalo es

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) \quad \dots(4)$$

Esto nos dice que no existe ninguna ocurrencia en este intervalo y esto solo puede ocurrir si no se tiene ninguna ocurrencia en  $t$  y además no ocurre ninguna en el intervalo restante  $\Delta t$ .

Por 1) se reconoce que son eventos independientes y se utiliza la ley de multiplicación de probabilidades.

Sustituyendo en (3) y (4)

$$\begin{aligned} P_0(t + \Delta t) &= P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) \\ &= P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t \end{aligned}$$

$$P_0(t + \Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\lambda\Delta t$$

Dividiendo entre  $\Delta t$

$$\frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

Aplicando límite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad \dots (5)$$

Resolviendo esta ecuación diferencial por el método de separación de variables:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda dt$$

$$d \ln P_0(t) = -\lambda dt$$

Integrando

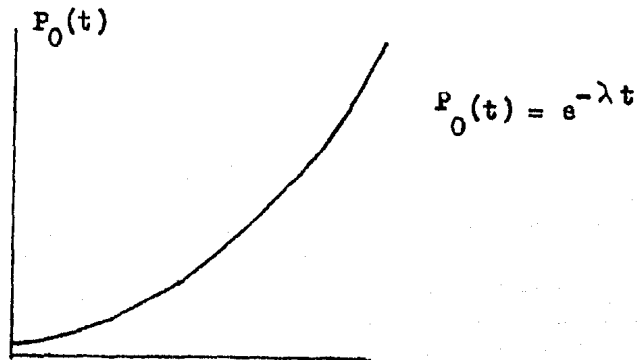
$$\ln P_0(t) = -\lambda t + c \quad \dots (6)$$

Se toma como condición inicial para encontrar el valor de la constante de integración el hecho de que la probabilidad de ninguna ocurrencia en un intervalo de longitud cero es uno, es decir  $P_0(0) = 1$

Sustituyendo en (6) podemos ver que  $c = 0$  y aplicando exponencial a ésta ecuación.

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Gráficamente esta función se representa





Generalizando para  $n$  ocurrencias en el intervalo  $t + \Delta t$ .  
 Siguiendo el procedimiento anterior y analizando de cuantas formas puede tener  $n$  ocurrencias en  $t + \Delta t$ , esto es

$$X_{t + \Delta t} = n$$

Se pueden tener  $X$  ocurrencias en  $t$  y  $n-X$  en  $t + \Delta t$

$$X_t = X \quad \text{y} \quad X_{t+\Delta t} - X_t = n - X \quad X = 0, 1, \dots, n$$

Ya con eventos, podemos calcular sus probabilidades

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \sum_{x=0}^n P_x(t) P_{n-x}(t) \\ &= \sum_{x=0}^{n-1} P_x(t) P_{n-x}(\Delta t) + P_n(t) P_0(\Delta t) \end{aligned}$$

Por  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= P_{n-1}(t) P_1(\Delta t) + P_n(t) P_0(\Delta t) \\ &= P_{n-1}(t) \lambda \Delta t + P_n(t) (1 - \lambda \Delta t) \quad \dots (8) \\ &= P_{n-1}(t) \lambda \Delta t + P_n(t) - \lambda \Delta t P_n(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)$$

$$dP_n(t) = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad n=1,2,\dots$$

Para resolver este sistema se soluciona de la forma

$$P_n(t) = q_n(t)e^{-\lambda t}$$

Y puesto que

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)$$

Sustituyendo  $P_n(t)$  y  $P_{n-1}(t)$  por la expresión planteada

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda q_{n-1}(t) e^{-\lambda t} - \lambda q_n(t) e^{-\lambda t}$$

Despejando  $q_n(t)$

$$q_n(t) = P_n(t)e^{\lambda t}$$

$$q_n(t) = P_n(t)e^{\lambda t} + P_n(t)e^{-\lambda t}$$

$$= (\lambda q_{n-1}(t)e^{-\lambda t} - \lambda q_n(t)e^{-\lambda t})e^{\lambda t} + \lambda P_n(t)e^{\lambda t}$$

$$= \lambda q_{n-1}^q(t) - \lambda q_n^q(t) + \lambda q_n^q(t)e^{-\lambda t}$$

$$= \lambda q_{n-1}^q(t) - \lambda q_n^q(t) + \lambda q_n^q(t)$$

$$= \lambda q_{n-1}^q(t)$$

Por lo tanto

$$q_n(t) = \lambda q_{n-1}^q(t)$$

Por lo tanto si

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \lambda q_{n-1}^q(t) e^{-\lambda t} - \lambda q_n^q(t) e^{-\lambda t} \\ &= q_n(t) e^{-\lambda t} - \lambda q_n^q(t) e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Si tenemos

$$P_0(t) = q_0(t) e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \Rightarrow q_0(t) = 1$$

Si consideramos  $n=1$

$$q_n(t) = \lambda q_{n-1}^q(t)$$

$$q_1(t) = \lambda \Rightarrow q_1(t) = \lambda t$$

y si

$$P_n(t) = q_n(t) e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = q_1(t) e^{-\lambda t}$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Si  $n=2$

$$q_n(t) = \lambda q_{n-1}^q(t)$$

$$q_2(t) = \lambda q_1(t)$$

$$= \lambda \cdot \lambda t = \lambda^2 t \Rightarrow q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Si  $n=3$

$$\begin{aligned}q_3(t) &= \lambda q_2(t) \\ &= \lambda(\lambda t)^2 \quad q_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}\end{aligned}$$

$$P_3(t) = q_3(t)e^{-\lambda t}$$

$$P_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

Con esto es claro que

$$q_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad n=1,2,\dots$$

El número  $n$  de arribos es un intervalo de longitud  $t$  sigue una distribución Poisson.

Distribución exponencial.

Consideremos la distribución de probabilidades de los intervalos que forman dos arribos sucesivos.

Sea  $f(t)$  la función de Probabilidad de la variable aleatoria  $t$ . Como consideramos que el número de arribos sigue un proceso Poisson, la probabilidad de que no se produzca ningún arribo en el tiempo  $t$  es.

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

La probabilidad de que no produzca ningún arribo en  $t$

$$P_0(t) = \frac{(\lambda \Delta t)^0 e^{-\lambda \Delta t}}{0!} = e^{-\lambda \Delta t}$$

La probabilidad de que se produzca " cuando menos " un arribo en  $t$  es:

$$1 - P(\text{no ocurra ninguno})$$

$$1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Dividiendo  $t$  y haciendo tender  $t$  a cero tenemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} \right) = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - e^{-\lambda \Delta t})}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (0 + e^{-\lambda \Delta t})}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} 1}$$

Por lo tanto

$$f(t) = e^{-\lambda t} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} \right) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Entonces la densidad de probabilidad de  $t$  es

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{con } t > 0$$



La distribución de los intervalos entre arribos sucesivos que siguen la distribución Poisson sigue una distribución exponencial.

Con estos medios y conceptos que se han desarrollado es fácil deducir las ecuaciones y fórmulas para el modelo de una fila, servidores múltiples.

Relacionando las llegadas con la distribución Poisson de la siguiente manera:

$$P_n(\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^n e^{-\lambda \Delta t}}{n!}$$

Para el caso de  $n=1$

$$P_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$$

Si la probabilidad de que más de un vehículo en este caso llegue a solicitar servicio durante  $\Delta t$  es tan pequeña, que puede pasar por alto, con esto podemos deducir que la probabilidad de que en el sistema no entre ningún vehículo durante  $\Delta t$  es

$$1 - \lambda \Delta t$$

De igual manera la probabilidad de que ninguna unidad pida servicio durante  $\Delta t$  es

$$1 - \mu \Delta t$$

Y la probabilidad de una partida durante  $\Delta t$  se expresa mediante  $\mu \Delta t$ .

Tomando  $N$  elementos en el sistema y  $S$  canales de servicio.

se tendrá para este modelo dos situaciones.

- 1) El número de elementos en la fila de espera y en servicio es mayor que el número de canales de servicio ( $n > S$ ), la probabilidad de una partida durante  $\Delta t$  es entonces  $S\mu\Delta t$ .
- 2) El número de canales es mayor que el número de elementos en el sistema ( $S > n$ ) entonces la probabilidad de una partida es  $n\mu\Delta t$ .

Con estos datos es posible expresar la probabilidad de que en el sistema haya  $n$  unidades en el tiempo  $t + \Delta t$

Para el caso de  $L$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)(1 - \lambda\Delta t)(1 / S\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(S\mu\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) \\ + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)(1 - S\mu\Delta t) + P_n(t)(\lambda\Delta t)(S\mu\Delta t) \dots$$

Si  $n=0$  entonces  $P_n(t + \Delta t) = P_0(t + \Delta t)$

Donde  $P_{n-1}(t)$  sea definida.

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - S\mu\Delta t) + P_1(t)(S\mu\Delta t)(1 - \lambda\Delta t) \\ + P_0(t)(\lambda\Delta t)(S\mu\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)(\lambda\Delta t) - P_0(t)S\mu\Delta t + P_0(t)S\mu\lambda(\Delta t)^2 \\ + P_1(t)(S\mu\Delta t) - P_1(t)S\mu\lambda(\Delta t)^2 + P_0(t)S\mu\lambda(\Delta t)^2$$

Dividiendo entre  $\Delta t$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) - P_0(t)S\mu + P_1(t)S\mu$$

Y si  $\Delta t \rightarrow 0$

$$P_0(t)(\lambda + S\mu) = P_1(t)S\mu$$

$$P_1(t) = P_0(t) \left( 1 - \frac{\lambda}{S\mu} \right)$$

Como anteriormente se había visto  $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Deduciendo que

$$-(\lambda + S\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + S\mu P_{n+1}(t) = 0$$

Trasponiendo términos

$$P_{n+1}(t) = \frac{\lambda}{S\mu} P_n(t) + P_n(t) + \frac{-\lambda}{S\mu} P_{n-1}(t)$$

Resolviendo para  $n=1$

$$P_2(t) = \frac{\lambda}{S\mu} P_1(t) + P_1(t) - \frac{\lambda}{S\mu} P_0(t)$$

Sustituyendo

$$P_1(t) = P_0(t) \left( 1 + \frac{\lambda}{S\mu} \right)$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda}{S\mu} \left[ 1 + \frac{\lambda}{S\mu} \right] P_0(t) + \left[ 1 + \frac{\lambda}{S\mu} \right] P_0(t) - \frac{\lambda}{S\mu} P_0(t)$$

$$P_2(t) = \left( \frac{\lambda}{S\mu} \right)^2 P_0(t) + \left( \frac{\lambda}{S\mu} \right) P_0(t) + P_0(t)$$



$$P_2(t) = P_0(t) \left[ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{S^n} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}}{S^{n-1}} + \dots + 1 \right]$$

Por lo tanto

$$P_n(t) = \frac{1}{S! S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0(t) \quad \text{para } n \geq S.$$

Para el caso 2.

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(n\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) \\ + P_{n+1}(t)(\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t) = P_n(t)(\lambda\Delta t)(n\mu\Delta t) \dots\dots\dots$$

Supongamos  $n=0$

$P_n(t+\Delta t) = P(t+\Delta t)$  donde  $P_n(t)$  es indefinida

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t)(1-n\mu\Delta t) + P_1(t)(n\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t) + P_0(t)(\lambda\Delta t) \\ = P_0(t) - P_0(t)(\lambda\Delta t) - P_0(t)n\mu\Delta t(\Delta t)^2 \\ + P_1(t)(n\mu\Delta t) - P_1(t)n\mu\lambda(\Delta t)^2 + P_0(t)n\mu\lambda(\Delta t)^2$$

Dividiendo

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t) - P_0(t)n\mu + P_1(t)n\mu \quad \text{si } \Delta t \rightarrow 0$$

$$P_0(t)(\lambda + n\mu) = P_1(t)n\mu$$

$$P_1(t) = P_0(t) \left( 1 + \frac{\lambda}{n\mu} \right)$$

Como anteriormente  $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$

Deduciendo que

$$-(\lambda + n\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + n\mu P_{n+1}(t) = 0$$

$$P_{n+1}(t) = \frac{\lambda}{n\mu} P_n(t) + P_n(t) - \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-1}(t)$$

Resolviendo para  $n=1$

$$P_2(t) = \frac{\lambda}{n\mu} P_1(t) + P_1(t) - \frac{\lambda}{n\mu} P_0(t)$$

Sustituyendo

$$P_1(t) = P_0(t) \left( 1 + \frac{\lambda}{n\mu} \right)$$

$$P_2(t) = \frac{\lambda}{n\mu} \left[ 1 + \frac{\lambda}{n\mu} \right] P_0(t) + P_0(t) \left( 1 + \frac{\lambda}{n\mu} \right) - \frac{\lambda}{n\mu} P_0(t)$$

$$P_2(t) = \left( \frac{\lambda}{n\mu} \right)^2 P_0(t) + \frac{\lambda}{n\mu} P_0(t) + \dots + P_0(t)$$

$$P_2(t) = P_0(t) \left[ \frac{\left( \frac{\lambda}{n\mu} \right)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n} + \dots + 1 \right]$$

Por lo tanto

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0(t)$$

De las dos ecuaciones anteriores para  $n \geq S$  y  $n < S$  se deducirá la fórmula para  $P_0(t)$

Se considera la tabla siguiente para  $S=4$

Valor $n$	Tamaño de la cola	$P_n$	Condición
0	0	$\frac{1}{0!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 P_0(t)$	$n < S$
1	0	$\frac{1}{1!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0(t)$	$n < S$
2	0	$\frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0(t)$	$n < S$
3	0	$\frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0(t)$	$n < S$
4	0	$\frac{1}{4!} \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0(t)$	$n = S$
5	1	$\frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0(t)$	$n > S$
6	2	$\frac{1}{4!} \frac{1}{4!^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 P_0(t)$	$n > S$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Dado que  $P_n(t) = 1$  Por 1 tanto

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + \dots = 1$$

De aquí 
$$P_0(t) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) + \sum_{n=S}^{\infty} P_n(t)}$$

Para el caso de  $S=4$

$$P_n(t) = P_0(t) \left\{ \left[ \frac{1}{0!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \right] + \left[ \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \right] \right\}$$

$$P_n(t) = P_0(t) \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{4^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots \right] \right] \right\}$$

El primer término de la ecuación es  $P_n(t)$  cuando  $n < S$  y el segundo término corresponde a la ecuación cuando  $n > S$ , después del factorial se encuentra una progresión geométrica infinita. Aplicando una progresión geométrica donde  $a=1$  y  $r=1/4 (\lambda/\mu)$

$$P_n(t) = P_0(t) \left\{ \left[ \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - 1/4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} \right] \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - 1/4 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{4\mu}{4\mu - \lambda}$$

El segundo término se expresa en términos de  $S$  teniendo lo siguiente:

$$\frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{S\mu}{S\mu - \lambda}$$

Por lo tanto expresando  $P_n(t)$

$$P_n(t) = P_0(t) \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \frac{1}{S!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \left( \frac{S\mu}{S\mu - \lambda} \right) \right\}$$

ya que  $P_n(t) = 1$  entonces

$$P_0(t) = \frac{1}{\left\{ \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \left[ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu-\lambda} \right] \right\}}$$

$$= \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] + \left[ \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu-\lambda}\right) \right] \right\}^{-1}$$

Ahora para expresar  $E_w$

Analizando lo anterior se puede ver

$$E_w = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) P_n(t)$$

$E_w$  empieza con  $n=5$  entonces

$$E_w = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) P_n(t)$$

$$= P_0(t) \left[ \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + 2 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 + \dots \right]$$

$$= P_0(t) \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \left[ 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 3 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots \right] \right\}$$

Haciendo que sea igual  $\lambda/4\mu$

$$E_w = P_0(t) \left\{ \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots) \right\}$$

$$= P_0(t) \left\{ \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 (1-x)^{-2} \right\} \quad \text{para } x^2 \ll 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right]^{-2} P_0(t)$$

$$= \frac{1}{s!} \cdot \frac{1}{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} \left[ \frac{s\mu-\lambda}{s\mu} \right]^{-2} P_0(t)$$

$$E_w = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0(t)$$

Seguindo el ejemplo de  $s = 4$

$$\begin{aligned} E_s &= E_s - E_w = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(t) - \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) P_n(t) \\ &= [P_1(t) + 2P_2(t) + 3P_3(t) + \dots] - [1P_5(t) + 2P_6(t) + 3P_7(t) + \dots] \\ &= [P_1(t) + 2P_2(t) + 3P_3(t) + 4P_4(t) + 4P_5(t) + 4P_6(t) + 4P_7(t) + \dots] \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{s-1} n P_n(t) + \sum_{n=s}^{\infty} s P_n(t) \right] \\ &= P_0(t) \left[ \frac{1}{1!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{2}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{3}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \frac{4}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{4!4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + \frac{4}{4!4^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 + \dots \right] \\ &= \frac{\lambda}{\mu} P_0(t) \left[ 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4!4} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 + \frac{1}{4!4^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6 + \dots \right] \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \right] = \frac{\lambda}{\mu} (1) = \frac{\lambda}{\mu} \end{aligned}$$

$$E_n = E_w + E_s = E_w + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0(t) + \frac{\lambda}{\mu}$$

Como  $E_s = \frac{\lambda}{\mu}$  se sigue que  $\mu E_s$  es el promedio de servicios en un periodo de tiempo. Sustituyendo  $\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \lambda$  Lo cual demuestra que el promedio de servicios es impuesto por el promedio de llegadas.

Por lo tanto

$$E_t = \frac{E_w}{\lambda} = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)(s\mu - \lambda)^2} P_0(t)$$

$$E_v = E_t + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)(s\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}$$

## C A P I T U L O I I I

### TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

#### 3.1 ESTADO DEL SISTEMA Y PROCESO DE OBTENCION

Según lo visto anteriormente la definición del problema se hace siguiendo los lineamientos que proporciona la teoría de colas y con el objetivo relevante de encontrar solución a los problemas que se plantearon en el análisis.

Siguiendo el proceso básico de las colas, se describirá los elementos del modelo para ésta aplicación.

Fuente de entrada.

Como se había planteado la entrada a la gasolinera es solo por una esquina, la que forman entre las dos avenidas más transitadas y de ahí pasa a cualquiera de los dos módulos de bombas para recibir servicio.

Por está razón se tomará la entrada como una fila, ya que es en este lugar donde se forma la cola.

En la mayoría de los casos los vehículos pasan a formar parte de otra cola dentro del carril donde van a ser atendidos.



Otra razón por lo cual se tomo solo una línea de entrada o cola, es debido a que el modelo de varias colas en paralelo sería muy complicada la captación de la información así como el manejo de los procedimientos matemáticos.

Para cada uno de los módulos se tomo por separado los tiempos de llegadas, y este es a partir del momento en que el vehículo entra a la gasolinera y se dirige hacia el módulo que le va a proporcionar el servicio.

#### Mecanismo de servicio.

El mecanismo de servicio consiste en la forma en que se hace la prestación del servicio, y existen tres aspectos primordiales que se requieren.

#### Tiempos de servicio.

Para este sistema el tiempo de servicio se ha tomado desde el momento que el vehículo pasa con el servidor e indica la cantidad de gasolina por consumir. En este tipo de servicio se involucran distintos tipos de servicio adicionales que requieren algunos clientes, como son: nota de consumo, revisión aceite, aire, agua, etc.

Para la muestra tomada el tiempo de servicio se incluyeron ya que si se descartaban se alteraría los tiempos de espera de los otros vehículos de la cola.

## Capacidad del sistema.

Dentro de la capacidad del sistema se toma en cuenta el número de bombas y el número de servidores que atienden la gasolinera.

Para el caso de la gasolinera se tomará el número de \_  
servidores que son realmente los que proporcionan el \_  
servicio, haciendo notar que existen más pistolas dis-  
ponibles para dar servicio .

Para cada módulo se tiene lo siguiente:

### Módulo I.

Número de servidores : 3 a 4

Número de bombas : 4

Número de pistolas : 6

### Módulo II.

Número de servidores : 2 a 3

Número de bombas : 4

Número de pistolas : 6

## Disponibilidad.

Debido a que las instalaciones de la gasolinera, no han sufrido ninguna remodelación, y observando que en las horas picos de servicio se forman grandes colas para tomar el servicio, se cuenta con la disposición de los conccionarios para remodelar las instalaciones e incluso de aumentar otro modulo de bombas . Para ello necesitan de información en la cual quedan analizar la situación y proyectar sus resultados para una toma de decisiones adecuada, que pueda satisfacer la demanda de los clientes, sin traer como consecuencia el desperdicio de los recursos.

Otra posibilidad con la que se cuenta es la de aumentar el número de servidores en las horas picos de servicio , y poder reducir un poco el número de vehículos que se encuentran dentro de la cola.

## Disciplina en la cola.

Al entrar los vehículos a la gasolinera, se dirigen hacia el módulo en el cual tomarán servicio, formando una cola o recibiendo el servicio inmediatamente.

Al entrar los vehículos a cualquiera de los módulos se sigue la disciplina del primero en entrar primero en salir.

### 3.2 PROCEDIMIENTO DEL TRATAMIENTO DE LA INFORMACION.

Como se había planteado en el capítulo anterior en el modelo matemático se deben seguir las restricciones siguientes:

- Llegadas al sistema con una función de distribución Poisson.
- Tiempos de servicio con una función de distribución Exponencial.
- Disciplina del primero en entrar primero en salir.

Primero se hará el tratamiento de la información captada en la muestra para ajustar los tiempos de llegadas a una distribución Poisson y los tiempos de servicio a una distribución exponencial.

Ya que las fórmulas no mantienen su validez si el ingreso, las salidas o ambas no proceden con las restricciones anteriores.

Los problemas de colas que tienen otras distribuciones, o cuyas distribuciones no se definen fácilmente, se resuelven mejor mediante técnicas de simulación.

Información de los datos reales captados.

La gasolinera tiene servicio durante las 24 horas del día, observando que la mayor demanda del servicio es de lunes a viernes de 7:00 a 10:00 a.m y de 18:00 a 21:00 p.m siendo dentro de estas horas la formación de colas que realmente causan problemas. Las demás horas del día, así como sábados y domingos se observa una cola con muy pocos vehículos que en poco tiempo se disipa.

Los tiempos de llegadas de los vehículos fueron tomados de 8:00 a 10:00 a.m que es una de las horas picos de la gasolinera.

Estos tiempos se tomaron para cada módulo desde el momento que entraron a la gasolinera.

Siguiendo las restricciones del modelo matemático de seguir los tiempos de llegadas una distribución Poisson se determinó el intervalo fijo para el número de llegadas.

En este caso  $t = 5$  minutos.

En la figura siguiente se muestra las llegadas de los vehículos en intervalos de 5 minutos.



La frecuencia del número de llegadas en cada intervalo de tiempo de un minuto se observa en las siguientes tablas 3.2.1 y 3.2.2 respectivamente para cada módulo.

Ya que los tiempos de llegadas fueron tomados en un lapso de tiempo de dos horas se tienen 120 intervalos de un minuto registrados.

Los datos ordenados y resumidos en la distribución de frecuencia anterior se presentan a continuación en el histograma y polígono de frecuencia para cada uno de los módulos considerados.

Figura 3.2.3 y 3.2.4.

Apartir de los datos de las tablas anteriores se calcula la media de tiempos de llegadas para cada módulo siendo las siguientes:

Módulo I

$$\bar{X} = \frac{fX}{N} = \frac{191}{120} = 1.591666667$$

Módulo II

$$\bar{X} = \frac{fX}{N} = \frac{134}{120} = 1.116666667$$

Como se observa en la media existe un 43% más de llegadas en el módulo I que en el módulo II.

ESTACION DE GASOLINERIA

MODULO I

NUMERO DE LLEGADAS EN INTERVALOS DE UN MINUTO	NUMERO DE LLEGADAS OBSERVADAS
---	-------------------------------------

0	24
1	42
2	28
3	16
4	7
5	1
6	2

Tabla 3.2.1



ESTACION DE GASOLINERIA  
MODULO II

---

NUMERO DE LLEGADAS EN INTERVALOS DE UN MINUTO	NUMERO DE LLEGADAS OBSERVADAS
---	-------------------------------------

---

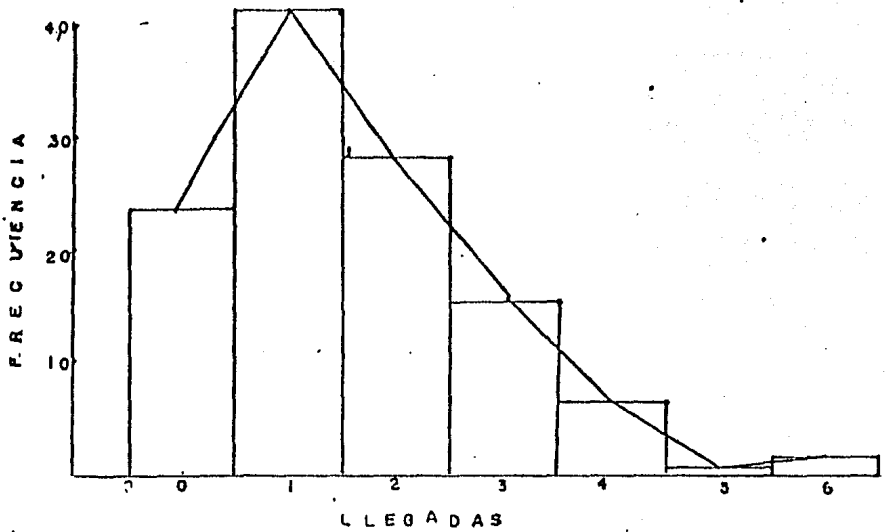
0	40
1	41
2	26
3	11
4	2
5	0

---

Tabla 3.2 .2

# HISTOGRAMAS DE LLEGADAS

## MODULO I



## MODULO II

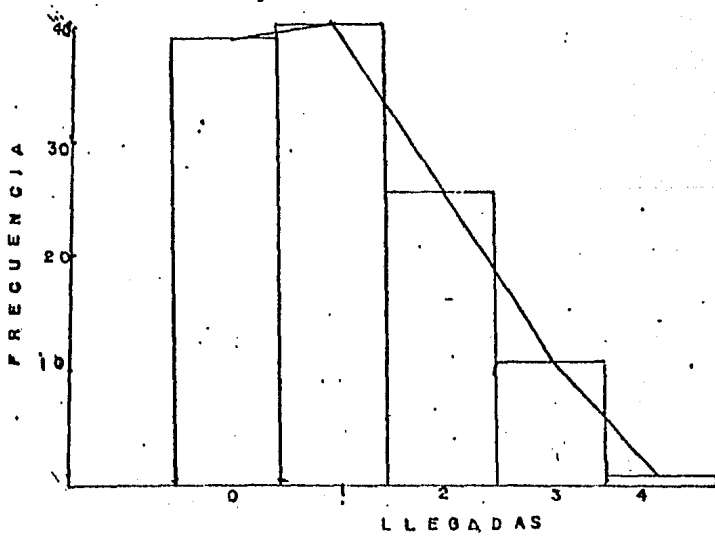


Figura 3 . 2 . 3

AJUSTE DE LA DISTRIBUCION POISSON A LA DISTRIBUCION DE  
FRECUENCIAS MUESTRALES

Teniendo la indicación que la distribución de los tiempos de llegadas sigue una distribución Poisson se ajustan los datos como sigue:

Módulo I

Se tiene  $\bar{X} = 1.59166667 = \lambda$

Para  $X=0$  Caro llegadas en un intervalo de un minuto

Entonces de acuerdo a la distribución Poisson

$$P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X=0) = \frac{(1.59166667)^0 e^{-1.59166667}}{0!} = .203586018$$

En la tabla 3.2.5 en la tercera columna aparecen las probabilidades para las llegadas, en la cuarta columna se dan los números teóricos de vehículos que se presentan en  $X$  llegadas (obteniéndose multiplicando las correspondientes probabilidades por 120)

Para conveniencia de la comparación, la segunda columna da las llegadas observadas.

En la tabla 3.2.6 se muestra el ajuste de llegadas para el módulo II .

AJUSTE DE TIEMPO DE LLEGADAS  
A UNA DISTRIBUCION POISSON  
MÓDULO I

NÚMERO DE LLEGADAS EN INTERVALOS DE UN MINUTO	NÚMERO DE LLEGADAS	PROBABI- LIDAD	NÚMERO DE LLEGADAS ESPERADAS
0	24	.203536018	24.43032335
1	42	.324041078	38.98492994
2	28	.2573322691	30.94592303
3	16	.136821094	16.41353129
4	07	.054443394	6.533207228
5	1	.017331147	2.079737651
6	2	.00459763	.551708182

Para el cálculo de las llegadas esperadas:

$$\lambda = 1.59166666$$

Con la función de distribución Poisson

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Tabla 3.2.5

AJUSTE DE TIEMPOS DE LLEGADAS  
A UNA DISTRIBUCION POISSON  
MODULO II

NUMERO DE LLEGADAS EN INTERVALOS DE UN MINUTO	NUMERO DE LLEGADAS	PROBABI L BILIDAD	NUMERO DE LLEGADAS ESPERADAS
0	40	0.327369208	39.23430505
1	41	0.365562293	43.36747396
2	26	0.204105607	24.49267259
3	11	0.105785927	12.6943132
4	2	0.021209029	2.5430035

Para el calculo de llegadas esperadas

$$\lambda = 1.11666667$$

Tabla 3.2.6

## APLICACION DE LA ESTADISTICA $\chi^2$ (JI-CUADRADA)

Como ya se ha visto muchas veces, los resultados obtenidos de muestras no siempre concuerdan exactamente con los resultados teóricos esperados, según las reglas de probabilidad. Se desea ver si las frecuencias observadas difieren significativamente de las frecuencias esperadas.

La idea básica de la prueba Ji-cuadrada es el de comparar la función de distribución de las llegadas  $\bar{F}_x$  con la función  $F_x$  la función de distribución Teórica Poisson.

Tenemos que saber que tanto difieren  $\bar{F}_x$  de  $F_x$ , para tomar en cuenta si la distribución muestral sigue la distribución Poisson y así poder aplicar las derivaciones matemáticas de la teoría de colas.

Tomaremos  $m$  intervalos de acuerdo a la distribución muestral considerada se calcula para cada valor  $i$

$$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

Donde  $O_i$  Llegadas observadas

$e_i$  Llegadas esperadas

Se calcula 
$$\sum_{i=1}^m \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

Se tomarán los niveles de significancia 5% y 1%.

Aplicando la distribución  $\chi^2$  para cada módulo se tiene lo siguiente:

#### Módulo I

Bajo la hipótesis de que la función de distribución de llegadas sigue una distribución Poisson.

Se calcula  $\chi_0^2$  en la tabla 3.2.7 se dan los calculos de la aplicación.

$$\text{Si } \chi_0^2 = 1.73196469$$

Escogiendo el nivel de significancia del 5% para i-1 grado de libertad se tiene

$$P(\chi_0^2 = c) = 1 - \alpha = 0.95 \quad c = 12.84$$

Por lo tanto  $\chi_0^2 < c$  no se rechaza la hipótesis

Con el nivel de significancia del 1% para i-1 grado de libertad se tiene

$$P(\chi_0^2 = c) = 0.90 \quad c = 22.46$$

Por lo tanto no se rechaza la hipótesis ya que  $\chi_0^2 < c$

#### Módulo II

Bajo la misma hipótesis del módulo anterior se calcula

Los calculos de esta aplicación se muestran en la tabla 3.2.8

Se tiene  $\chi_0^2 = 0.66121142$

Para el nivel de significancia del 5% para i-1 grado de libertad se tiene

$$P(\chi_0^2 < c) = 1 - \alpha = 0.95 \quad c = 9.49$$

Por lo tanto  $\chi_0^2 < c$  no se rechaza la hipótesis

Con el nivel de significancia del 1% para i-1 grado de libertad se tiene

$$P(\chi_0^2 < c) = 1 - \alpha = 0.90 \quad c = 18.47$$

Por lo tanto  $\chi_0^2 < c$  no se rechaza la hipótesis.

Para los dos casos es evidente que la función de distribución correspondiente a la muestra de tiempos de llegadas,  $\bar{F}(x)$  es una aproximación de  $F(x)$  una distribución Poisson.

Esto se puede observar en la gráficas 3.2.9 para el módulo I y 3.2.10 para el módulo II, donde se hace una representación de  $\bar{F}(x)$  y  $F(x)$ .



CALCULO DE LA ESTADISTICA  $\chi^2$  (JI-CUADRADA)

MODULO I

i	NUMERO DE LLEGADAS OBSERVADAS $O_i$	NUMERO DE LLEGADAS ESPERADAS $e_i$	$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$
1	24	24.4303225	.00757982
2	42	38.88492994	.249543131
3	28	30.94592303	.230439607
4	16	16.41853139	.010663952
5	7	6.53320728	.071449243
6	1	2.079737651	.560567528
7	2	.551708188	.551708188

$$\chi^2_0 = 1.731961469$$

Tabla 3.2.7

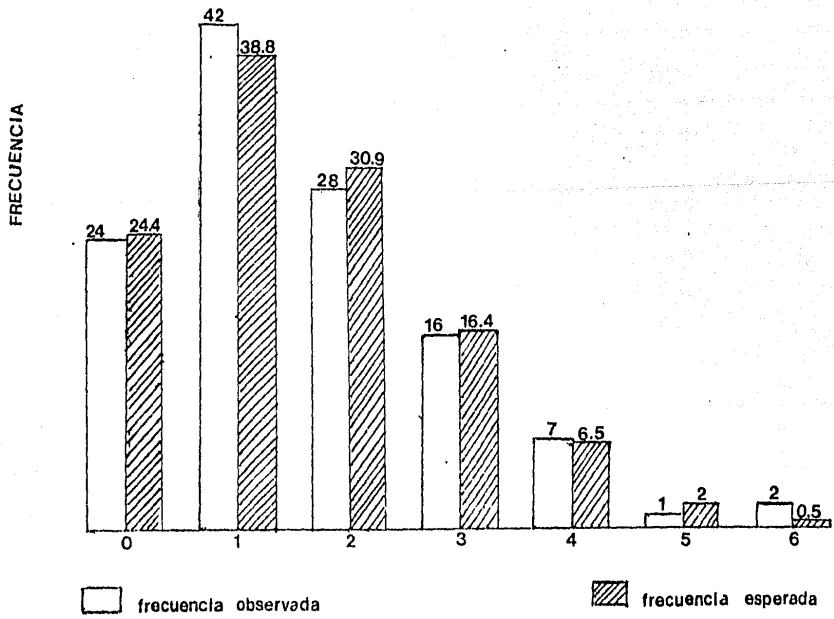
CALCULO DE LA ESTADISTICA  $\chi^2$  (JI-CUADRADA)

MODULO II

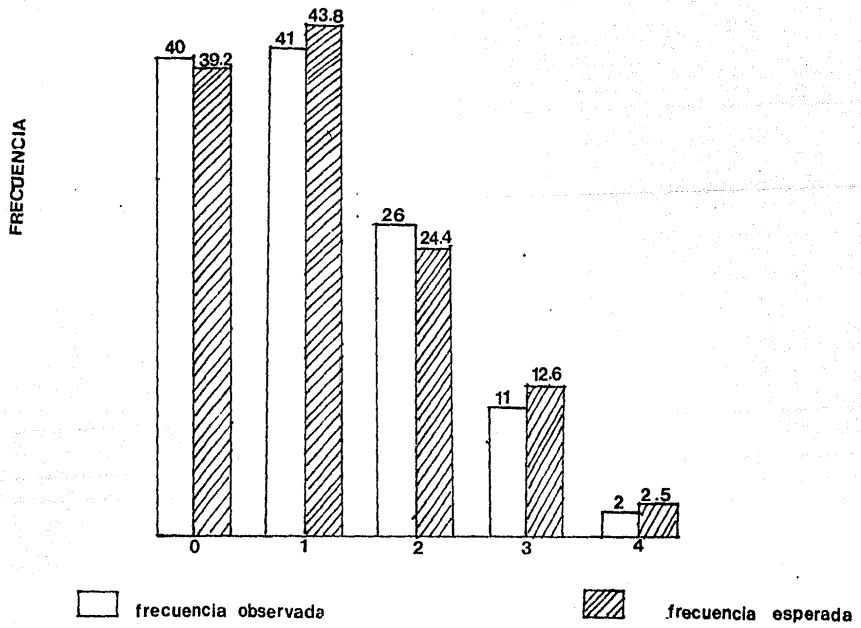
<u>i</u>	NUMERO DE LLEGADAS OBSERVADAS	NUMERO DE LLEGADAS ESPERADAS	$\frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$
1	40	39.28430502	0.013033777
2	41	43.86747396	0.187437439
3	26	24.49267239	0.092763365
4	11	12.69431152	0.22613993
5	2	2.5450835	0.116741168
			$\chi^2_0$ 0.636121142

Tabla 3.2.8

MODULO I



MODULO II



## TIEMPOS DE SERVICIO

Como restricción se tiene que los tiempos de servicio deben seguir una función de distribución exponencial.

Primero se hará el tratamiento de la información captada en la muestra para ajustar los tiempos de llegadas a una distribución exponencial.

Los tiempos de servicio fueron tomados desde el momento en que piden al servidor la cantidad de gasolina a consumir hasta el momento en que salen de la gasolinera.

Estos tiempos incluyen servicios adicionales, por esta razón los tiempos de servicio varían demasiado, ya que algunos clientes solo cargan gasolina, otros piden nota de consumo, revisan aceite, agua, aire, etc.

Como se dispone de un gran número de datos se distribuyeron en intervalos de 10 segundos.

Los datos ordenados y resumidos se muestran en la distribución de frecuencias. Tabla 3.2.11 y 3.2.12 para el módulo I y módulo II respectivamente.

En las tablas se muestra la siguiente información:

En la primera columna se muestra el rango de agrupación para los tiempos de servicio.

En la segunda columna la frecuencia o el número de clientes que tuvieron un tiempo de servicio entre ese rango de servicio.

En la tercera columna la frecuencia relativa, donde esta es la frecuencia de clientes en ese intervalo dividido entre el total de frecuencias de la muestra.

Para el caso del módulo I se tienen 193 tiempos de servicio y en el módulo II 141 tiempos de servicio.

En la cuarta columna la frecuencia acumulada que es el valor total de los valores menores que el límite superior del intervalo.

En la quinta columna la frecuencia relativa acumulada, que es la suma de la frecuencia relativa de los valores menores que el límite superior.

DI. TRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO

MODULO I

INTERVALO	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
10 - 19	1	0.005	1	0.005
20 - 29	4	0.020	5	0.025
30 - 39	3	0.067	18	0.092
40 - 49	11	0.056	29	0.148
50 - 59	12	0.062	41	0.21
60 - 69	18	0.093	59	0.303
70 - 79	18	0.093	77	0.396
80 - 89	13	0.067	90	0.463
90 - 99	16	0.082	106	0.545
100 - 109	14	0.072	120	0.617
110 - 119	13	0.067	133	0.684
120 - 129	12	0.062	145	0.746
130 - 139	5	0.025	150	0.771
140 - 149	2	0.010	152	0.781
150 - 159	7	0.036	159	0.817
160 - 169	7	0.036	166	0.853
170 - 179	5	0.025	171	0.878
180 - 189	6	0.031	177	0.909
190 - 199	0	-	177	0.909
200 - 209	0	-	177	0.909
210 - 219	6	0.031	183	0.94
220 - 229	4	0.020	187	0.96
230 - 239	1	0.005	188	0.965
240 - 249	0	-	188	0.965
250 - 259	2	0.010	190	0.975
260 - 269	0	-	190	0.975
270 - 279	1	0.005	191	0.98
280 - 289	1	0.005	192	0.985
290 - 299	1	0.005	193	.99

TABLA 3.2.11

DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS DE LOS TIEMPOS DE SERVICIO  
MODULO LI

INTERVALO	FRECUENCIA	FRECUENCIA RELATIVA	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
10 - 19	0	0	0	0
20 - 29	5	0.035	5	0.035
30 - 39	24	0.170	29	0.205
40 - 49	18	0.127	47	0.332
50 - 59	14	0.099	61	0.431
60 - 69	15	0.106	76	0.537
70 - 79	11	0.072	87	0.609
80 - 89	14	0.099	101	0.708
90 - 99	5	0.035	106	0.743
100 - 109	8	0.056	114	0.799
110 - 119	6	0.042	120	0.841
120 - 129	3	0.021	123	0.862
130 - 139	1	0.007	124	0.869
140 - 149	0	-	124	0.869
150 - 159	3	0.021	127	0.89
160 - 169	5	0.035	132	0.925
170 - 179	0	-	132	0.925
180 - 189	2	0.014	134	0.939
190 - 199	0	-	134	0.939
200 - 209	1	0.007	135	0.946
210 - 219	0	-	135	0.946
220 - 229	1	0.007	136	0.953
230 - 239	0	-	136	0.953
240 - 249	2	0.014	138	0.967
250 - 259	0	-	138	0.967
260 - 269	2	0.014	140	0.981
270 - 279	1	0.007	141	0.988

TABLA 3.2.12



AJUSTE DE TIEMPOS DE SERVICIO A UNA  
DISTRIBUCION EXPONENCIAL NEGATIVA

Calculando el estimador de máxima verosimilitud

$$\text{Si } f_x(x) = e^{-\lambda x}$$

$$L = e^{-\lambda x_1} e^{-\lambda x_2} e^{-\lambda x_3} \dots e^{-\lambda x_n}$$

$$= \lambda^n e^{-n\lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}$$

$$= \lambda^n e^{-n\lambda \bar{x}}$$

$$L_n \quad L = n \ln \lambda - n\lambda \bar{x}$$

$$\frac{d L_n}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} = n\bar{x}$$

$$\frac{n}{\lambda} - n\bar{x} = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = n\bar{x} \quad n = n\bar{x} \lambda \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

La media de los valores para cada caso es:

Módulo I  $\mu = 104.704$  segundos por servicio y  $\hat{\lambda} = .0095507$

## Módulo II

= 80.599 servicios por segundo

= 0.0124071

En la tabla 3.2.13 y 3.2.14 se muestran los valores calculados para el módulo I y II respectivamente.

Tomando

$$\bar{F}_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

En la segunda columna se muestra  $\bar{F}_x(x)$  por la frecuencia total.

AJUSTE DE TIEMPOS DE SERVICIO A UNA  
DISTRIBUCION EXPONENCIAL NEGATIVA

MODULO I

INTERVALO	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
10 - 19	32.0285	0.1659511
20 - 29	46.69113	0.241923
30 - 39	60.018119	0.3109747
40 - 49	72.131172	0.3737366
50 - 59	83.40872	0.4307317
60 - 69	93.14772	0.4826377
70 - 79	102.24577	0.5297568
80 - 89	110.50993	0.5725473
90 - 99	118.02379	0.6115222
100 - 109	124.35322	0.6469779
110 - 119	131.06058	0.6790703
120 - 129	136.70251	0.7031332
130 - 139	141.83054	0.7348733
140 - 149	146.49146	0.7590231
150 - 159	150.72783	0.7809732
160 - 169	154.578332	0.8009239
170 - 179	158.07807	0.8190574
180 - 189	161.25904	0.8355391
190 - 199	164.15026	0.8505195
200 - 209	166.77813	0.8641354
210 - 219	169.16663	0.8765111
220 - 229	171.33756	0.8877594
230 - 239	173.31075	0.8979332
240 - 249	175.1042	0.9072757
250 - 259	176.7343	0.9157217
260 - 269	178.21591	0.9233985
270 - 279	179.56256	0.930376
280 - 289	180.78655	0.9367129
290 - 299	181.89905	0.9424321
300 - 309	182.91021	0.9477213
310 - 319	183.82927	0.9524333

TABLA 3.2.13

AJUSTE DE TIEMPOS DE SERVICIO A UNA  
DISTRIBUCION EXPONENCIAL NEGATIVO

MODULO II

INTERVALO	FRECUENCIA ACUMULADA	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA
10 - 19	29.61111	0.2102824
20 - 29	42.603	0.3021802
30 - 39	54.039	0.3836109
40 - 49	64.230	0.455523
50 - 59	73.157	0.512953
60 - 69	81.10039	0.5751301
70 - 79	88.089249	0.6247433
80 - 89	94.263301	0.6575145
90 - 99	99.716744	0.717811
100 - 109	104.53379	0.7411744
110 - 119	108.73313	0.7715516
120 - 129	112.54727	0.7962976
130 - 139	115.86722	0.8217593
140 - 149	118.79973	0.8425517
150 - 159	121.39017	0.8609232
160 - 169	123.6733	0.8771511
170 - 179	125.69945	0.8914354
180 - 189	127.42476	0.9041472
190 - 199	129.06176	0.9153316
200 - 209	130.45475	0.925211
210 - 219	131.6859	0.933955
220 - 229	132.77277	0.9416459
230 - 239	133.73213	0.9484548
240 - 249	134.53417	0.9544693
250 - 259	135.99093	0.9597319
260 - 269	136.09168	0.9644749
270 - 279	137.13987	0.968199

TABLA 3.2.14

## PRUEBA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

La prueba de Kolmogorov-smirnov es apropiada únicamente para distribuciones continuas.

La hipótesis a probar es que cierta función  $F(x)$  es la función de distribución que se tomó de una población con una muestra  $x_1 x_2 \dots x_n$ .

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

- Se calcula los valores de la función de distribución  $\bar{F}(x)$  de la muestra  $x_1 x_2 \dots x_n$

Estos valores son calculados en la tabla 3.2.13 y 3.2.14 para el módulo I y II respectivamente.

- Se calcula los valores de la función de distribución  $F(x)$ , que fueron calculados en las tablas anteriores.
- Se determina la distancia máxima entre  $F(x)$  y  $\bar{F}(x)$

$$a = \max | \bar{F}(x) - F(x) |$$

- Se escoge el nivel de significancia del  $\alpha = 5\%$  y  $\alpha = 1\%$

Se plantea la siguiente hipótesis:

$H_0$  = La función de distribución de la muestra, sigue una distribución exponencial.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/t} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$H_1$  = La distribución de la muestra no es exponencial.

Los valores comparados de  $F(x)$  y  $\bar{F}(x)$  se muestran en la tabla 3.2.15 y 3.2.16 para el módulo I y II respectivamente.

Módulo I El valor máximo  $a = 0.2257366$

$\alpha = 0.05$        $1-\alpha = 95\%$  el valor es 0.097894

$\alpha = 0.01$        $1-\alpha = 99\%$  el valor es 0.117329

Por lo tanto se rechaza la hipótesis. Ya que el valor de 0.2257366 no es menor a los anteriores.

Módulo II El valor máximo es  $a = 0.2671882$

$\alpha = 0.05$        $1-\alpha = 95\%$  el valor es 0.1145327

$\alpha = 0.01$        $1-\alpha = 99\%$  el valor es 0.1372708

Por lo tanto se rechaza la hipótesis ya que el valor máximo no es menor.

Los valores utilizados se encuentran en la tabla 2 del apéndice.

Con los resultados obtenidos, para los dos casos se rechaza la hipótesis.

Analizando los resultados se observa que dentro de la muestra existen tiempos de servicio que se disparan demasiado, una de las causas posibles es la variación del servicio que algunos clientes utilizan, ya que en ocasiones utilizan varios servicios adicionales.

En la figura 3.2.18 y 3.2.19 se representa  $F(x)$  y  $\bar{F}(x)$  calculadas anteriormente.

PRUEBA DE KOLMOTOROV-SMIRNOV

TIEMPOS DE SERVICIO

MODULO I

$F_x$	$\bar{F}_x$	$F_x - \bar{F}_x$
0.005	0.169511	0.169511
0.025	0.241923	0.2116923
0.092	0.3109747	0.2159749
0.148	0.3737366	0.2257366
0.21	0.4307317	0.2207317
0.303	0.5297568	0.2277568
0.396	0.5725903	0.1765903
0.463	0.6115222	0.1425222
0.545	0.6469079	0.1019079
0.617	0.6790703	0.0620703
0.634	0.7033032	0.0443032
0.746	0.7343733	0.0111267
0.771	0.7590221	0.0119739
0.731	0.7304730	0.0000268
0.817	0.8009239	0.0160751
0.853	0.8190574	0.0339426
0.878	0.8355391	0.0424679
0.909	0.8505195	0.0534705
0.909	0.8641354	0.0446646
0.909	0.876511	0.032489
0.94	0.8877594	0.0522406
0.96	0.8979382	0.0620163
0.965	0.9072757	0.0577143
0.965	0.9157217	0.0432733
0.975	0.9233985	0.0516015
0.975	0.930376	0.044624
0.98	0.9367179	0.0422221
0.985	0.9424821	0.0425179
0.99	0.9524333	0.035167

TABLA 3.2.15



PRUEBA DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

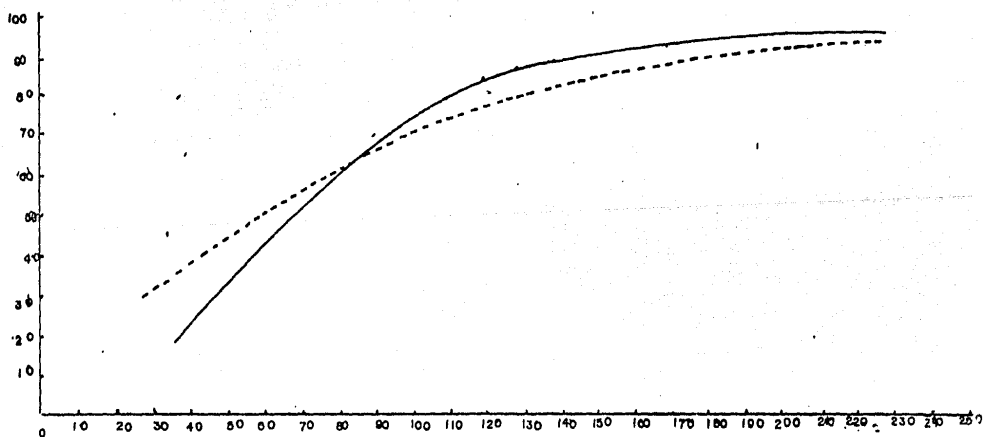
TIEMPOS DE SERVICIO

MÓDULO II

$F_x$	$\bar{F}_x$	$F_x - \bar{F}_x$
0	0.2100034	0.2100084
0.035	0.3021832	0.2671382
0.205	0.3836109	0.1736109
0.332	0.45533	0.123535
0.431	0.519063	0.083063
0.537	0.5751371	0.0381301
0.609	0.6247423	0.0157499
0.701	0.6635346	0.0394654
0.743	0.707211	0.035739
0.799	0.7413744	0.0576256
0.841	0.7715516	0.0694434
0.862	0.7992076	0.0637224
0.869	0.3217533	0.0472467
0.869	0.3425517	0.0264403
0.99	0.360932	0.029009
0.925	0.3771511	0.0473439
0.925	0.3914354	0.0335146
0.939	0.9041407	0.0343528
0.939	0.9153316	0.0236634
0.946	0.925211	0.020739
0.946	0.9339376	0.0120624
0.953	0.9416459	0.0113541
0.953	0.9544693	0.0014599
0.967	0.9597319	0.0072131
0.967	0.9644747	0.0025253
0.981	0.9636149	0.0123001
0.933	0.9722314	0.0157136
0.933	0.97555157	0.0124925
0.933	0.9733726	0.0096274

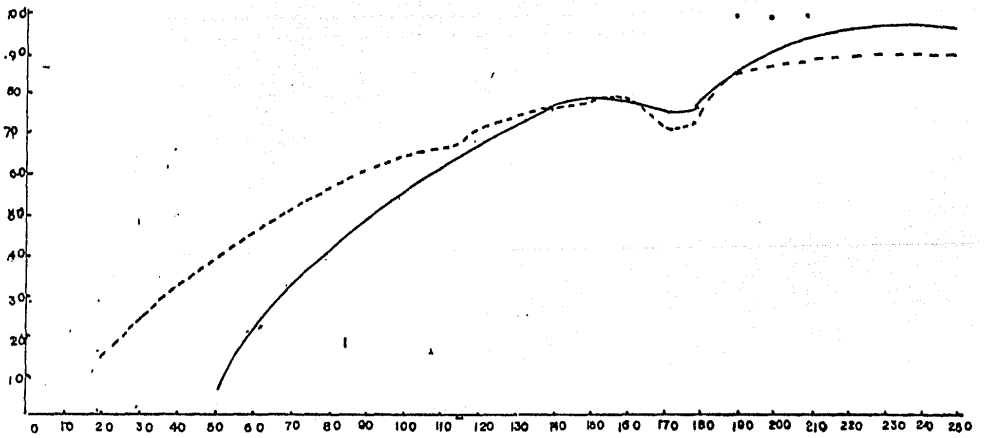
TABLA 3.2.16

MODULO II



REPRESENTACION DE  $\bar{F}(x)$  Y  $F(x)$

FIGURA 3.2.18



REPRESENTACION DE  $\bar{F}(x)$  Y  $F(x)$

MODULO I

FIGURA 3.2.19

### 3.3 SOLUCION MATEMATICA

Según el estudio realizado anteriormente las llegadas y los tiempos de servicio, siguen una distribución Poisson y exponencial respectivamente.

Se calculará para el estado actual de la gasolinera lo siguiente:

$E_w$  Longitud media esperada de la cola de espera.

$E_t$  Tiempo calculado en la cola. Es decir, promedio de tiempo que el cliente permanece en la cola.

$E_n$  Número de clientes que esperan servicio y los que están tomando el servicio.

$E_\psi$  Tiempo promedio de servicio en el sistema.

A continuación se elabora el desarrollo de estos calculos para cada módulo respectivamente, tomando en cuenta los elementos del análisis de la situación actual.

## Módulo I

En base a la información calculada anteriormente se tiene:

$$\lambda = 1.59166667$$

Llegadas por minuto.

$$\mu = .5730404$$

servicios por minuto.

Los calculos se harán para el número máximo de servidores que casi siempre laboran en el módulo.

$$s = 4$$

Calculando el coeficiente de despejamiento del sistema.

$$\frac{\lambda}{s\mu} = .9258606$$

Lo cual satisface la restricción de  $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$

Para el desarrollo de este problema, el primer paso lógico es resolver  $P_0$ , ya que este valor aparece en todas las fórmulas.

Aplicando

$$P_0(t) = \left[ \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right\} + \left\{ \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left( \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right) \right\} \right]^{-1}$$

$$P_0(t) = .571755249$$

Donde  $P_0(t)$  = Probabilidad de llegar a la gasolinera y recibir servicio de inmediato. Es decir no existe ningún vehículo en el sistema en el momento  $t$ .

La siguiente tabla representa las probabilidades para diversos valores de  $n$ .

Utilizando

$P_n(t)$  = La probabilidad de  $n$  vehículos en la gasolinera en el momento  $t$ .

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0(t) \quad \text{Para } n < s$$

$$P_n(t) = \frac{1}{s! \cdot s^{n-s}} P_0(t) \quad \text{Para } n \geq s$$

$n$	Largo de la cola	servidores inactivos	No. clientes atendidos	$P_n$
0	0	4	0	0.051755249
1	0	3	1	0.143754517
2	0	2	2	0.199644876
3	0	1	3	0.184343334
4	1	0	4	0.128354437
5	2	0	4	0.089128735
6	3	0	4	0.061890567
7	4	0	4	0.043
8	5	0	4	0.030

Una vez calculado  $P_0$ , pueden determinarse fácilmente los valores de  $E_w$ ,  $E_t$ ,  $E_n$ ,  $E$ .

De este modo  $E_w$  el número de vehículos que esperan en el largo de la cola sin incluir los vehículos que están siendo atendidos es :

$$E_w = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)! (\mu - \lambda)^2} P_0(t)$$

$$E_w = .954328833 \quad \text{vehículos}$$

$E_t$  Tiempo esperado en la cola. El promedio de tiempo que el vehículo que llega debe esperar antes de ser atendidos.

$$E_t = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{(s-1)! (\mu - \lambda)^2} = \frac{E_w}{\lambda}$$

$$E_t = 0.599578323 \quad \text{minutos}$$

$E_n$  Número de clientes esperando ser servidos.

$$\begin{aligned} E_n &= E_w + \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 6.509492727 \quad \text{vehículos} \end{aligned}$$

$E$  Tiempo total esperado de los clientes en la gasolinera

$$\begin{aligned} E_{\psi} &= E_t + \frac{1}{\mu} \\ &= 2.34655982 \quad \text{minutos.} \end{aligned}$$

## Módulo II

En base a la información calculada anteriormente

$$\lambda = 1.1166667 \quad \text{Llegadas por minuto.}$$

$$\mu = 0.7449234 \quad \text{Servicios por minuto.}$$

s = 3 máximo de servidores que atienden el módulo

Calculándose el coeficiente de despejamiento del sistema.

$$\frac{\lambda}{s\mu} = 0.6716798$$

La cual satisface la restricción de  $\frac{\lambda}{s\mu} < 1$

Calculándose el valor de  $P_0$

$$P_0(t) = \left[ \left\{ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right\} + \left\{ \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left( \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right) \right\} \right]^{-1}$$

$$P_0(t) = 0.208042$$

Donde  $P_0(t)$  = Probabilidad de llegar al módulo II y recibir servicio inmediatamente.

La siguiente tabla presenta las probabilidades de diversos valores de n

Utilizando las mismas fórmulas de  $P_n(t)$  que se ocuparon en el módulo I.



n	Largo de la cola	Servidores inactivos	No. de clientes atendidos	$P_n$
0	0	3	0	0.208042
1	0	2	1	0.311855697
2	0	1	2	0.233746382
3	1	0	3	0.116798046
4	2	0	3	0.078450888
5	3	0	3	0.052693876
6	4	0	3	0.035393412
7	5	0	3	0.023773039
8	6	0	3	0.01596787

Una vez calculado  $P_0$ , pueden determinarse los valores de

$$E_w \quad E_t \quad E_n \quad E_s$$

De este modo  $E_w$  el número de vehículos que esperan en el largo de la cola sin incluir los vehículos que están siendo atendidos es:

$$E_w = 0.5231722$$

$E_t$  Tiempo esperado en la cola, El promedio de tiempo que el vehículo que llega debe esperar antes de ser atendidos.

$$E_t = 0.4761689$$

$E_n$  Número de servidores o vehículos a ser servidos.

$$E_n = 2.0232146$$

$E_s$  El tiempo esperado de los vehículos en el módulo II

$$E_s = 0.5231722$$

C A P I T U L O I V

ANALISIS DE RESULTADOS

En el análisis de los resultados obtenidos de las fórmulas matemáticas del capítulo anterior, para el sistema actual se observo lo siguiente:

- Se había planteado en la problemática detectada que el módulo I tenia mayor demanda que el módulo II , y la causa probable era el tránsito de vehículos.

Este problema se verifico al tomar los tiempos de llegadas de los vehículos teniéndose el promedio siguiente:

Módulo I 1.59166 Llegadas por minuto.

Módulo II 1.11666 Llegadas por minuto.

Teniéndose mayor número de llegadas en el módulo I, un 45% más .

Para el caso específico del módulo I se observa que el tiempo de permanencia en el sistema provoca en un determinado momento la formación de la cola y el módulo II se encuentra en ocasiones sin prestar servicio.

Tomando en cuenta la situación anterior, se analizó la distribución de las bombas y el espacio en el cual transitan los vehículos dentro de la gasolinera, para tratar de encontrar una mejor distribución y encontrar un posible equilibrio entre los dos módulos ya existentes, tratando de evitar el costo que representa el aumento del módulo.

Para esta situación se verificó que el espacio para el desplazamiento de los vehículos dentro de la gasolinera es reducido, como para poder cambiar algún carril de sentido.

Si se recuerda en el análisis del sistema se menciona que cada módulo constaba de cuatro bombas, dos de las cuales eran de doble pistola, para estas bombas no se les da la explotación máxima de sus recursos, ya que estas permanecen algunas veces inactivas debido a que los servidores atienden a un cliente o a dos a la vez, teniéndose una pistola sin usar.

A continuación se mostrara la situación en caso que en el módulo I se aumentara el número de servidores a cinco o seis, para que cada servidor utilizara una pistola y se puedan atender mayor número de vehículos.

Para el caso de cinco servidores:

$P_0 = 0.059573$  Probabilidad de llegar a la gasolinera y recibir servicio inmediatamente

$$E_w = 3.87 \text{ vehiculos}$$

$$E_t = 2.43 \text{ minutos}$$

$$E_n = 6.65 \text{ Vehiculos}$$

$$E = 4.18 \text{ minutos}$$

Para el caso de seis servidores

$$P_0 = 0.06060$$

$$E_w = 2.15 \text{ vehiculos}$$

$$E_n = 4.92 \text{ vehiculos}$$

$$E = 3.09 \text{ minutos}$$

Observando todos los resultados de los distintos casos la mejor solución sería la de aumentar el módulo I a dos bombas con un servidor más, o aumentar el número de servidores en el módulo para hacer uso de las pistolas de las bombas que no se ocupan.

A continuación se mostrará distintas situaciones en la que se puede encontrar la gasolinera aumentando los mecanismos de servicio.

Para el caso del módulo II según los resultados obtenidos en las derivaciones matemáticas no se tiene el problema de la formación de colas, ya que los tiempos de llegadas, así como los tiempos de servicio son aceptables y en caso de llegarse a formar una cola numerosa se disipa en poco tiempo.

Como se cuenta con la disponibilidad de los concesionarios de la gasolinera para aumentar el número de bombas, este aumento puede ser el de crear otro módulo de cuatro bombas. Teniéndose el problema de que la formación de colas es en el módulo I, se pretende que este tenga la misma dirección de entrada y salida de vehículos que el módulo I.

A continuación se muestra la información obtenida por medio del modelo matemático en el caso de que se aumentara a otro módulo más con cuatro servidores, tomándose los datos de la muestra del módulo I se calcula lo siguiente:

$$P_0 = 0.0619$$

$$E_w = 0.1095 \text{ veh\u00edculos}$$

$$E_t = 0.0687 \text{ minutos}$$

$$E_n = 2.8870 \text{ veh\u00edculos}$$

$$E_\psi = 1.8138 \text{ minutos}$$

Como se observa la col a formarse seria nula, y este caso si se llegar\u00eda al desperdicio de recursos tanto de las bombas como el del tiempo ocioso de los servidores.

En seguida se muestra el caso en que solo se aumentara al m\u00f3dulo I dos bombas con un solo servidor.

$$P_0 = 0.0595$$

$$E_w = 3.8778 \text{ veh\u00edculos}$$

$$E_t = 2.4363 \text{ minutos}$$

$$E_n = 6.6553 \text{ veh\u00edculos}$$

$$E_\psi = 4.4813 \text{ minutos}$$

Como se observa se reduce notablemente el tiempo de servicio y el n\u00famero de elementos de la cola.

## C A P I T U L O V

### CONCLUSIONES

Análizando los resultados del desarrollo de las derivaciones matemáticas de la teoría de colas, se observa que el módulo I es realmente el problema, ya que el módulo II satisface en cualquier hora del día las capacidades de demanda.

La causa por la que el módulo I tiene mayor número de llegadas es porque su entrada y salida son hacia la avenida más transitada.

La mejor forma de aprovechar los recursos de la gasolinera sería el de aumentar dos bombas más con un servidor, o el de aumentar el número de servidores en el módulo I.

Obtenidos los resultados del estudio matemático se aclaró en la gasolinera la causa de no tener un servidor más para cada bomba de doble pistola, y se debe a que las bombas se encuentran demasiado juntas y al entrar los vehículos a los carriles de acceso la mayoría de las veces no se ubican bien dentro de este por lo tanto solo se atienden a dos clientes a la vez.

Entonces la mejor solución sería la de remodelar la ubicación de las bombas dentro de este módulo, poniendo una al principio y otra al final del carril de acceso.

Con esto se podría atender tres vehículos a la vez, y se reduciría el costo del aumento de las bombas o del módulo.

Otra solución al problema es que el área que se quiere designar para la ampliación, se destine a una área especial para que se realicen los servicios adicionales que comunmente se realizan dentro del carril de abastecimiento. Con esto se lograría un menor tiempo de servicio evitando la espera de los clientes.

Cómo hemos visto en esta aplicación del modelo de teoría de colas se tiene un panorama muy extenso para la aplicación, siendo en la mayoría de los casos sencilla y obteniéndose no precisamente una optimización, si no un análisis de las diferentes situaciones en las que podría encontrar el sistema y con esto tener una posible solución al problema.

Entre los problemas importantes que se derivan de la superpoblación, es la demanda de un servicio en un sistema y la capacidad de la gente para vivir con esa congestión.

Por esta razón, la teoría de la formación de colas tiene importancia y debe estudiarse, ya que estas ocasionan una gran desorganización en muchos aspectos de la vida.

Por lo general, la espera es una necesidad económica, ya que casi siempre los esfuerzos por imponer un sistema de servicio que satisfaga instantáneamente es demasiado costoso,



pero es necesario tanto al que esta dentro de la línea de espera como el que la organiza conocer y prevenir las colas.

Con el desarrollo del análisis de la gasolinera, se puede observar que la aplicación de la teoría de colas es sencilla, y con los resultados que se obtienen, poder diseñar \_ optimamente una cola para minimizar el tiempo de espera, \_ sin afectar los costos relacionados al sistema completo.

La teoría de colas tiene una infinidad de aplicaciones como son:

- Trafico de comunicaciones (telefonos, telegrafos, correos)
- Trafico de transportes (aereo, terrestre, marítimo)
- Servicios (teatros, restaurantes, autobuses, hospitales)
- Inventarios y procesos industriales
- Procesos fisicos
- Procesos Biologicos

## BIBLIOGRAFIA

Hillier, Frederick Lieberman, Gerarld .Introducción a la investigación de operaciones, Editorial McGraw Hill, 1986.

Larson, Harold J Introduction to probability theory and statistical inference. New York, J. Wiley, 1973.

Johnson, Norman Lloyd Discrete distributions, Boston Houghton Mifflin, 1969.

Panico, Joseph A. Queuing Theory. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.

Cox, V.R. Smith, Walter L. Estudio matemático de las colas México, Uteha.

Conover, W J . Practical Nonparametric statistics. New York, Wiley, 1971

Kreyszig, Erwin . Estadística Matemática. México, Editorial Limusa, 1979.