

20
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES AGATLAN

**UNA APLICACION DEL ANALISIS DE FOURIER
EN DINAMICA ESTRUCTURAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
FRANCISCO JAVIER MORENO FIERROS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	INTRODUCCION	5
I	RESPUESTA DINAMICA ESTRUCTURAL EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.	10
	I.1 ECUACION DE MOVIMIENTO	11
	I.1.1 Conceptos básicos.	
	I.1.2 Tipos de cargas prescritas.	
	I.1.3 Características de un problema dinámico.	
	I.1.4 Formulación de la ecuación de movimiento.	
	I.2 VIBRACION LIBRE	19
	I.2.1 Vibración libre no amortiguada.	
	I.2.2 Vibración libre amortiguada.	
	I.3 VIBRACION FORZADA	29
	I.3.1 Excitación armónica.	
	I.3.2 Excitación por impulsos.	
	I.3.3 Excitación arbitraria.	
	I.3.4 Excitación periódica.	
II	SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER.	50
	II.1 INTRODUCCION	51
	II.2 SERIES DE FOURIER	52
	II.2.1 Fórmulas de Euler-Fourier.	
	II.2.2 Serie coseno de Fourier y serie seno de Fourier.	
	II.2.3 Extensión del intervalo.	
	II.2.4 Forma compleja de la serie de Fourier.	
	II.3 TEMAS ADICIONALES EN SERIES DE FOURIER	70
	II.3.1 Funciones ortogonales.	
	II.3.2 Convergencia media de las series de Fourier.	
	II.3.3 Particularidad de la convergencia de la serie de Fourier.	
	II.3.4 Integración y diferenciación de las series de Fourier.	

II.4	LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	88
II.4.1	Conceptos básicos.	
II.4.2	Propiedades de la transformada de Fourier.	
II.4.3	Teorema de convolución.	
II.4.4	Teorema de Parseval.	
II.4.5	Transformadas de Fourier de funciones especiales.	
III	LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER.....	103
III.1	INTRODUCCION	104
III.2	TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	105
III.2.1	Conceptos básicos.	
III.2.2	Propiedades de la transformada discreta de Fourier.	
III.3	LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER	117
III.3.1	Desarrollo del algoritmo.	
III.3.2	Descripción del programa.	
IV	APLICACION A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL.	140
IV.1	INTRODUCCION	141
IV.2	SISTEMAS LINEALES	141
IV.2.1	Conceptos básicos.	
IV.2.2	Excitación periódica.	
IV.3	ANALISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	152
IV.3.1	Función de transferencia de un sistema lineal.	
IV.3.2	Obtención de la función de transferencia de un sistema de UGDL.	
IV.3.3	Análisis de la respuesta a través del dominio de la frecuencia.	
IV.4	EJEMPLOS	164
	CONCLUSIONES.	175
	APENDICES	179
1	TABLAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER	
2	TRES FORMAS DE LAS SERIES DE FOURIER	
3	LISTADOS DE PROGRAMAS DE COMPUTADORA	
4	SIMBOLOGIA	
	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	196

El estudio profundo de la naturaleza es la más fértil fuente de los descubrimientos matemáticos. Este estudio, al ofrecer un objetivo determinado para la investigación, no sólo tiene la ventaja de excluir discusiones vagas y suposiciones sin fin; es además un método seguro para constituir un análisis por sí mismo, para descubrir los elementos que nos interesa conocer y que las ciencias naturales debieran preservar eternamente: son los elementos fundamentales que se reproducen en todos los fenómenos naturales.

Vemos, por ejemplo, que una misma expresión cuyas propiedades geométricas abstractas han sido consideradas y que con este respecto pertenecen a un análisis general, representa del mismo modo al movimiento de la luz en la atmósfera, determina también las leyes de la difusión del calor en la materia sólida y entra asimismo en los principales problemas de la teoría de la probabilidad.

Las ecuaciones analíticas, desconocidas para los antiguos geómetras, las cuales Descartes fué el primero en introducir en el estudio de curvas y superficies, no están restringidas a las propiedades de las figuras y a aquéllas que son el objeto de la mecánica racional; ellas se extienden en general a todos los fenómenos. No puede existir un lenguaje más universal y más simple, más libre de errores y de oscuridades, es decir, más valioso para expresar las relaciones invariables de las cuestiones naturales.

Considerado desde este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones perceptibles, mide tiempos, espacios, fuerzas, temperaturas; esta compleja ciencia se ha formado lentamente, pero preserva cada uno de los principios una vez que los ha adquirido; crece y se fortalece a sí misma, incesantemente, en medio de la infinidad de variaciones y errores de la mente humana.

Su principal atributo es la claridad; no tiene huellas que expresen concepciones confusas. Presenta juntos a los más diversos fenómenos y descubre las analogías que los unen. Si la materia se nos escapara, del mismo modo que el aire y la luz, por su extrema sutileza; si los cuerpos se encontraran lejos de nosotros en la inmensidad del espacio, si el hombre deseara conocer el aspecto de los cielos en épocas sucesivas distantes por un gran número de siglos, si las acciones de la gravedad y del calor fueran ejercidas en el interior de la tierra a profundidades que siempre serán inaccesibles, el análisis matemático podrá proporcionar de igual manera el fundamento de las leyes de tales fenómenos. Los hace presentes y medibles, y se manifiesta como una facultad de la mente humana destinada a complementar la fugacidad de la vida y la imperfección de los sentidos; y lo que es aun más extraordinario, sigue el mismo curso en el estudio de todos los fenómenos, los interpreta con el mismo lenguaje como si atestiguara la unidad y simplicidad del plan del universo, e hiciera aun más evidente ese orden inalterable que predomina sobre todas las causas naturales.

Jean Baptiste Joseph Fourier,
La Théorie Analytique de la Chaleur, 1822.

Traducción de un fragmento del prólogo [15] *

* Los números entre corchetes corresponden a la Bibliografía que se presenta al final del trabajo.

I N T R O D U C C I O N

INTRODUCCION

Entre los diferentes problemas que se presentan en la dinámica estructural, tal vez el principal consiste en la obtención de la respuesta de sistemas sometidos a excitaciones específicas debido a que tanto las excitaciones como las respuestas -medidas éstas últimas en forma de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos, etc.- varían con el tiempo; por lo cual en un análisis dinámico no se obtiene solamente una solución, sino que se presentan distintas soluciones, una para cada instante, resultando ser consecuentemente este tipo de análisis más laborioso que uno estático.

Si un sistema estructural es sometido a una excitación dinámica, las deformaciones resultantes producirán aceleraciones, y éstas a su vez inducirán fuerzas de inercia que resistan el movimiento del sistema. De igual manera, las fuerzas de inercia provocarán otras deformaciones, convirtiéndose por lo tanto el problema en uno de características cíclicas, cuya resolución requiere el uso de ecuaciones diferenciales, expresando a las fuerzas de inercia en términos de derivadas del desplazamiento en función del tiempo.

Evidentemente, la obtención de la respuesta se vuelve más compleja cuando se consideran las fuerzas inducidas por el amortiguamiento y la rigidez del sistema, y cuando éste es, a su vez, sometido a excitaciones de características arbitrarias, como podría suceder con la correspondiente a algún temblor.

Sin embargo, existen formas alternativas de solución, efectivas y relativamente más simples a este tipo de problemas, pudiendo hacerse el análisis dinámico no en términos del tiempo sino de la frecuencia, aprovechando algunos de los conceptos que ofrece el análisis de Fourier.

Los principios del análisis de Fourier fueron introducidos por el físico y matemático francés Jean Baptiste Fourier en 1822 en su libro *La théorie analytique de la chaleur*, donde dio a conocer métodos para la solución de problemas de valor en la frontera que se presentan en el tratamiento analítico de la conducción del calor. Desde entonces, la teoría se ha extendido y se le ha encontrado aplicación en muchas otras áreas de la física y de las matemáticas.

Sin lugar a dudas, uno de los conceptos fundamentales del análisis de Fourier es el de la *transformada de Fourier*, la cual constituye una entidad tan universal que sirve como herramienta técnica para resolver problemas de materias tan distintas como diseño de antenas, óptica, procesos estocásticos, teoría de la probabilidad, física cuántica, problemas de valor en la frontera o sistemas lineales. Por esta razón, Brigham [8] habla de la

omnipresencia de la transformada de Fourier, debido a que con ella pueden tratarse gran variedad de temas aparentemente no afines. Adicionalmente, tanto a la serie de Fourier, como a la transformada discreta de Fourier de una función, se les puede considerar como casos especiales de aquella.

Sin embargo, en la práctica, desde su introducción y hasta la década de 1950, la mayoría de las aplicaciones del análisis de Fourier estuvieron limitadas a determinar soluciones a problemas específicos cuya formulación incluyera funciones que pudiesen representarse en forma relativamente simple. Ahora bien, con el advenimiento de la computadora digital, las técnicas numéricas relacionadas con la transformada de Fourier, empezaron a recibir amplia atención por parte de investigadores de diferentes disciplinas aplicadas y no fue sino hasta 1965 cuando, como consecuencia de los adelantos en tecnología y como resultado de un eficiente algoritmo conocido como *La transformada rápida de Fourier*, fue revolucionado el procesamiento digital de señales y se originó lo que se ha dado en llamar *análisis digital de Fourier*.

Posiblemente la aplicación más conocida de esta técnica matemática se da en el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Y es precisamente este tema sobre el cual versará el presente trabajo. Específicamente se abordará el caso de sistemas estructurales de un grado de libertad, prescindiendo de otras posibles aplicaciones que pudiesen existir en las demás áreas mencionadas o en alguna otra.

Resulta ciertamente ambicioso y un tanto complejo

pretender abordar un tema tan extenso y profundo como lo es el análisis de Fourier en una tesis profesional de ingeniería civil. No obstante, es importante considerar que la inquietud principal al hacerlo, no ha sido la de tratar de demostrar, descubrir o aportar algo nuevo a esta teoría matemática, sino la de dar a conocer e intentar ilustrar la aplicación real que pudiese tener en el área de la ingeniería estructural, en particular en la dinámica estructural, utilizando sus principios fundamentales como una efectiva herramienta para la obtención de la respuesta dinámica de sistemas estructurales. Consecuentemente, el desarrollo del presente trabajo se expone en el siguiente orden: En el primer capítulo se muestra un resumen del estudio correspondiente a la obtención de la respuesta dinámica de estructuras de un grado de libertad, tomando como marco de referencia a la teoría clásica de la dinámica, para ubicar el problema a resolver desde un punto de vista físico y resaltar su interés en el campo de la ingeniería civil. Es en el segundo capítulo donde se presentan con cierta formalidad algunos de los principales conceptos del análisis de Fourier con objeto de establecer las bases matemáticas de la solución del problema citado. En el capítulo III se desarrolla y explica el método numérico de la transformada rápida de Fourier que permitirá aplicar la teoría expuesta a los casos particulares y, en el último, se muestra la aplicación de los conceptos anteriores para la obtención de la respuesta dinámica estructural de sistemas de un grado de libertad sometidos a excitaciones específicas. En apéndices, por separado, se presentan algunas tablas de transformadas y series de Fourier, los listados de los programas para computadora y la simbología utilizados a lo largo del desarrollo de la presente tesis.

CAPITULO I

RESPUESTA DINAMICA ESTRUCTURAL EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD

La théorie de la chaleur de Fourier est un des premiers exemples de l'application de l'analyse à la physique; on partent d'hypothèses simples qui ne sont autre chose que des faits expérimentaux généralisés, Fourier en a déduit une série de conséquences dont l'ensemble constitue une théorie complète et cohérente.

Poincaré, 1891.

I RESPUESTA DINÁMICA ESTRUCTURAL EN SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD.

I.1 ECUACION DE MOVIMIENTO.

I.1.1 Conceptos básicos.

La Dinámica es la parte fundamental de la mecánica. Se encarga de estudiar el movimiento de los sistemas materiales y las causas que lo producen. En términos más simples, podría decirse que la palabra dinámica implica una variación en el tiempo; de esta manera, una fuerza dinámica es cualquier fuerza de la cual su magnitud, dirección o posición varían con el tiempo. Similarmente, la respuesta estructural a una fuerza dinámica, por ejemplo las deflexiones y esfuerzos resultantes, presenta también una variación en el tiempo, es dinámica.

Para evaluar la respuesta estructural a una excitación dinámica existen básicamente dos aproximaciones diferentes: determinísticas y no determinísticas. La elección del método a usarse en cualquier caso, depende de la forma como está definida la carga. Si la variación de ésta con respecto al tiempo es completamente conocida, aunque sea altamente oscilatoria o de carácter irregular, se le refiere como una carga dinámica prescrita, y el análisis de la respuesta a tal excitación, se define como un análisis determinístico. Por otra parte, si la variación en el tiempo no es completamente conocida pero puede definirse en un sentido estadístico, la carga es llamada carga dinámica aleatoria.

En general, la respuesta estructural a cualquier excitación dinámica se expresa básicamente en términos de los desplazamientos de la estructura. Así, un análisis determinístico lleva a una historia desplazamiento-tiempo correspondiente a la historia de la carga prescrita; otros aspectos de la respuesta estructural, tales como tensiones, compresiones, fuerzas internas, etc., se obtienen como una fase secundaria del análisis, a partir de los patrones de desplazamiento establecidos previamente.

Por otra parte, un análisis no determinístico provee información estadística sobre los desplazamientos que resultan de una carga estadísticamente definida.

I.1.2 Tipos de cargas prescritas.

Casi cualquier tipo de sistema estructural puede estar sujeto a una u otra forma de excitación dinámica durante su tiempo de vida. Desde un punto de vista analítico, conviene dividir a las cargas determinísticas o prescritas en dos categorías básicas: periódicas y no periódicas. En la *fig. 1.1.1* se muestran algunas formas típicas de cargas prescritas con ejemplos en los cuales podrían desarrollarse tales cargas.

Como se indica en las *figs. 1.1.1a* y *1.1.1b*, las cargas periódicas son cargas repetitivas, las cuales presentan la misma variación en el tiempo sucesivamente durante un gran número de ciclos. La excitación periódica más simple es la variación senoidal (*fig. 1.1.1a*), la cual es llamada armónica simple. Otras formas de excitación periódica, frecuentemente más complejas, son las generadas por maquinaria de vaivén (movimientos alternativos), o por presiones hidrodinámicas, por ejemplo, de la hélice de un barco. En todo caso, el análisis de la respuesta a

cualquier excitación periódica sigue el mismo principio general. Esto se estudiará más adelante.

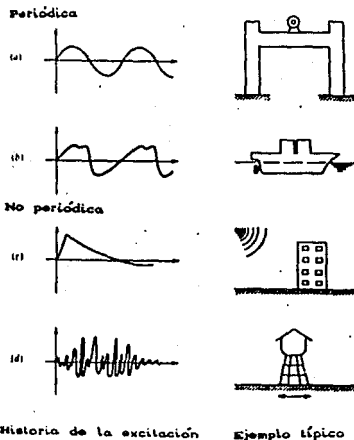


fig. I.1.1 Características y fuentes de excitaciones dinámicas típicas (a) armónica simple; (b) compleja; (c) impulsiva; (d) larga duración.

Las cargas no periódicas pueden ser impulsivas, de corta o de larga duración. Una explosión es una fuente típica de carga impulsiva, para este tipo de cargas pueden emplearse formas especiales simplificadas de análisis.

Por otra parte, en general una carga de larga duración, tal como la que podría resultar de un sismo, puede tratarse solamente por procedimientos generales de análisis dinámico.

I.1.3 Características de un problema dinámico.

Un problema dinámico estructural difiere de uno estático en dos aspectos importantes. La primera diferencia es la naturaleza de la variación en el tiempo de un problema dinámico. Debido a que tanto la carga como la respuesta varían con el tiempo, un problema dinámico no tiene sólo una solución como la tiene uno estático, sino que se debe establecer una sucesión de soluciones correspondientes a todos los tiempos de interés en la historia de la respuesta. Así, un análisis dinámico es más complejo y largo que un análisis estático.

La otra diferencia fundamental entre problemas estático y dinámico se describe a continuación mediante un ejemplo y se ilustra en la *fig. I.1.2*.

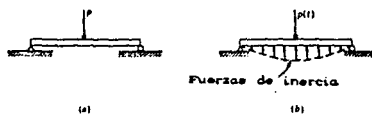


fig. I.1.2 Diferencia básica entre cargas dinámica y estática (a) Carga estática (b) Carga dinámica

Si una viga simple está sujeta a una carga estática P , como se muestra en la *fig. I.1.2a*, sus momentos y cortantes internos y la forma de la deflexión dependen directamente de la carga aplicada, y pueden calcularse a partir de P por equilibrio de fuerzas. Por otra parte, si se aplica la carga $p(t)$ dinámicamente, como se muestra en la *fig. I.1.2b*, los desplazamientos resultantes de la viga

están asociados con aceleraciones, las cuales producen fuerzas de inercia que resisten tales aceleraciones. Así, los momentos y cortantes internos en la viga de la *fig. I.1.2b* deben equilibrar no sólo la fuerza aplicada externamente, sino también las fuerzas de inercia resultantes de las aceleraciones de la viga.

De este modo, las fuerzas de inercia que resisten las aceleraciones de la estructura, son la característica más importante que distingue a un problema dinámico estructural. Si estas fuerzas son significativas, entonces debe tomarse en cuenta el carácter dinámico del problema para su solución. Por otra parte, si los movimientos son tan lentos que puedan despreciarse las fuerzas de inercia, el análisis para cualquier instante puede hacerse por un procedimiento de análisis estructural estático.

Uno de los pasos más importantes en cualquier análisis dinámico, es la creación de un modelo matemático de la estructura. Dichos modelos se clasifican en dos categorías: continuos y discretos. La *fig. I.1.3a* muestra un modelo continuo de una viga en cantiliver. Al número de desplazamientos que se consideren para representar los efectos de todas las fuerzas de inercia significativas, se le denomina número de grados de libertad del sistema. Así, un modelo continuo representa un sistema de infinitos grados de libertad. Por otra parte, las *figs. I.1.3b* y *I.1.3c* ilustran sistemas de un número finito de grados de libertad. En los modelos discretos mostrados aquí, la masa del sistema se idealiza en un pequeño número de puntos de masa. De este modo, el modelo de la *fig. I.1.3b* será un sistema de un grado de libertad y el de la *fig. I.1.3c* será de tres grados de libertad. En el presente trabajo se tratarán únicamente sistemas de un grado de libertad.

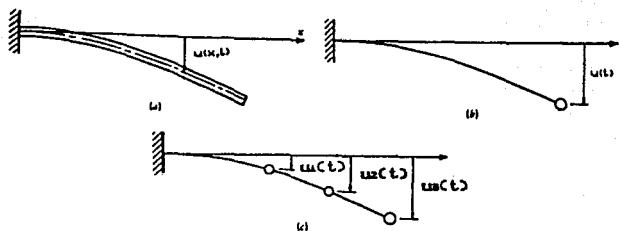


fig. I.1.3 (a) Modelo continuo; (b) Modelo discreto de un grado de libertad; (c) Modelo discreto de tres grados de libertad.

I.1.4 Formulación de la ecuación de movimiento.

La formulación de las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico es posiblemente la fase más importante (y a veces la más difícil) del procedimiento completo. Para la formulación de tales ecuaciones existen diferentes métodos. Aquí se usará el llamado *principio de d'Alembert*.

La ecuación de movimiento de cualquier sistema dinámico representa expresiones de la segunda ley del movimiento de Newton, la cual establece que la razón de cambio de la cantidad de movimiento de cualquier masa m , es igual a la fuerza actuante en ella. Esta relación puede expresarse matemáticamente como la ecuación diferencial

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du}{dt} \right) \quad \text{I.1.1}$$

donde $p(t)$ es el vector fuerza aplicado y $u(t)$ es el vector de posición de la masa m . Para la mayoría de los problemas en dinámica estructural, puede suponerse que la masa no varía con el tiempo, en cuyo caso la ec. I.1.1 puede escribirse

$$p(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2} \equiv m \ddot{u}(t) \quad \text{I.1.1a}$$

donde cada punto representa diferenciación con respecto al tiempo.

La ec. I.1.1a puede escribirse también así

$$p(t) - m \ddot{u}(t) = 0$$

en la cual, el segundo término $m\ddot{u}(t)$ es llamado fuerza de inercia resistente a la aceleración de la masa.

El concepto de que una masa desarrolla una fuerza de inercia proporcional a su aceleración y opuesta a ella, es conocido como *principio de d'Alembert*. Este, permite expresar a las ecuaciones de movimiento de un problema dinámico estructural como ecuaciones de equilibrio dinámico.

Las propiedades físicas esenciales de cualquier sistema estructural linealmente elástico sujeto a excitación dinámica, incluyen su masa, sus características elásticas (flexibilidad o rigidez), su mecanismo de disipación de energía o amortiguamiento, y la fuente externa de excitación o carga actuante. En el modelo más simple de un sistema de un grado de libertad^a, cada una de tales propiedades se suponen concentradas en un solo elemento físico.

En la *fig. I.1.4a* se muestra un sistema como tal. La masa completa, m , de este sistema, está incluida en el bloque rígido, el cual puede moverse únicamente en una dirección simple, así el único desplazamiento coordinado u define completamente su posición en cualquier instante. La

^a Para abreviar: sistema de UGDL.

resistencia elástica al desplazamiento está representada por el resorte idealizado (sin masa) de rigidez k , mientras que el mecanismo de disipación de energía se representa por el coeficiente de amortiguamiento c . El mecanismo externo de excitación que produce la respuesta dinámica de este sistema, es la carga con variación en el tiempo $p(t)$.

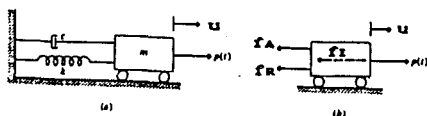


fig. 1.1.4 Sistema de UGDL. (a) Componentes físicos; (b) Fuerzas en equilibrio.

La ecuación de movimiento para el sistema de la fig. 1.1.4 puede derivarse por el procedimiento mencionado.

Como se muestra en la fig. 1.1.4b, las fuerzas actuantes en la dirección del desplazamiento incluyen a la carga aplicada $p(t)$ y a las tres fuerzas resultantes del movimiento: la fuerza de inercia f_i , la fuerza de amortiguamiento f_a y la fuerza de restitución del resorte elástico f_r . De esta forma, la ecuación de movimiento es una expresión del equilibrio de tales fuerzas, como se indica.

$$f_i + f_a + f_r = p(t)$$

I.1.2

Cada una de las fuerzas representadas en el miembro izquierdo de esta ecuación es una función del desplazamiento u o de sus derivadas.

Si se considera primero la fuerza elástica, ésta estará dada por el producto de la constante de rigidez del resorte y el desplazamiento

$$f_e = k u(t). \quad I.1.3a$$

Similarmente, por el principio de d'Alembert, la magnitud de la fuerza de inercia es el producto de la masa y la aceleración

$$f_i = m \ddot{u}(t). \quad I.1.3b$$

Finalmente, si se supone amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento es el producto de la constante de amortiguamiento y la velocidad

$$f_a = c \dot{u}(t) \quad I.1.3c$$

Si se sustituyen las ecs. I.1.3 en I.1.2, la ecuación de movimiento de este sistema de UGDL está dada por

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p(t). \quad I.1.4$$

I.2 VIBRACION LIBRE

Se acaba de mostrar que la ecuación de movimiento para cualquier sistema de UGDL puede escribirse

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p(t). \quad I.2.1$$

Para obtener la solución de la ec. I.2.1 se considerará primero la ecuación homogénea, haciendo el

mienbro derecho igual a cero:

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0. \quad \text{I.2.2}$$

Los movimientos que toman lugar con la fuerza excitadora igualada a cero son conocidos como vibraciones libres. A continuación se examinará la respuesta a vibración libre de un sistema de UGDL.

La solución de la ecuación I.2.2 es de la forma

$$u(t) = G e^{st}. \quad \text{I.2.3}$$

Sustituyendo este valor en la ec. I.2.2, lleva a

$$(m s^2 + c s + k) G e^{st} = 0 \quad \text{I.2.4}$$

Dividiendo después por $m G e^{st}$ e introduciendo la notación

$$\omega^2 = k / m \quad \text{I.2.5}$$

La ec. I.2.4 se vuelve

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \omega^2 = 0. \quad \text{I.2.6}$$

El valor de s que se deriva de esta expresión depende del valor de c ; así el tipo de movimiento representado por la ecuación I.2.3 dependerá del amortiguamiento en el sistema.

I.2.1 Vibración libre no amortiguada.

Si el sistema es no amortiguado, entonces $c = 0$ y puede verse que el valor de s dado por la ec. I.2.6 es

$$s = \pm i \omega. \quad \text{I.2.7}$$

Así, la respuesta dada por la ec. I.2.3 es

$$u(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad \text{I.2.8}$$

en la cual los dos términos resultan de los dos valores que toma s , y las constantes G_1 y G_2 representan las amplitudes arbitrarias del movimiento. Introduciendo la fórmula de Euler

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad \text{I.2.9}$$

la ec. I.2.8 puede escribirse en una forma más conveniente

$$u(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \text{I.2.10}$$

en donde las constantes A y B pueden expresarse en términos de las condiciones iniciales, por ejemplo, el desplazamiento $u(0)$ y la velocidad $\dot{u}(0)$ en el tiempo $t=0$, en el cual se iniciaron las vibraciones libres del sistema:

$$\begin{aligned} u(0) &= B \\ \dot{u}(0) &= A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t \\ \dot{u}(0) &= A \omega \Rightarrow A = [\dot{u}(0) / \omega] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ec. I.2.10

$$u(t) = [\dot{u}(0)/\omega] \sin \omega t + u(0) \cos \omega t \quad \text{I.2.11}$$

Esta solución representa un movimiento armónico simple (MAS) y está representado en la fig. I.2.1. La cantidad ω es la frecuencia circular o velocidad angular del movimiento, medida en radianes por unidad de tiempo.

La frecuencia cíclica f , a la que se le refiere usualmente como frecuencia del movimiento simplemente, está dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{I.2.12}$$

y su recíproco es el periodo T ,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad \text{I.2.13}$$

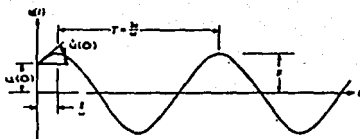


fig. 1.2.1 Respuesta a vibración libre no amortiguada.

El movimiento representado por la ec. 1.2.11 puede expresarse también en la forma

$$u(t) = p \cos(\omega t - \theta) \quad 1.2.14$$

como puede observarse en el diagrama de Argand de la fig. 1.2.2.

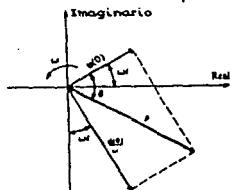


fig. 1.2.2 Representación del vector rotante de vibraciones libres.

La respuesta está dada por la parte real, o proyección horizontal de los dos vectores rotatorios. Así, la amplitud de movimiento está dada por la resultante

$$\rho = \sqrt{[u(\omega)]^2 + [\dot{u}(\omega)/\omega]^2} \quad \text{I.2.15}$$

y el ángulo de fase es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}(\omega)}{\omega u(\omega)} \quad \text{I.2.16}$$

En la *fig. I.2.2* se nota que el ángulo de fase representa la distancia angular por la cual el movimiento resultante viene detrás en el término coseno en la respuesta.

I.2.2 Vibración libre amortiguada.

Si el sistema presenta amortiguamiento, la solución de la ec. I.2.8 que define la respuesta es

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{(c/2m)^2 - \omega^2} \quad \text{I.2.17}$$

De acuerdo al carácter de la cantidad dentro del radical -la cual puede ser positiva, negativa o nula- son tres los tipos de movimiento representados por esta expresión, los cuales se estudiarán a continuación:

a) AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO.

Si el radicando en la ec. I.2.17 es igual a cero, se presenta la condición de amortiguamiento crítico, la cual se cumple cuando $c/2m = \omega$; de esta forma se encuentra el valor del amortiguamiento crítico c_c :

$$c_c = 2 m \omega \quad \text{I.2.18}$$

Entonces el valor de s en I.2.17 es

$$s = -c/2m = -\omega \quad \text{I.2.19}$$

y la respuesta dada por la ec. I.2.3 es

$$u(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad \text{I.2.20}$$

en la que el segundo miembro está multiplicado por t , ya que únicamente está disponible un sólo valor de s en la solución, ec. I.2.19.

Introduciendo condiciones iniciales en la ec. I.2.20 se obtiene la forma final de la respuesta críticamente amortiguada

$$u(t) = [u(0) (1 + \omega t) + \dot{u}(0) t] e^{-\omega t} \quad \text{I.2.21}$$

la cual está graficada en la fig. I.2.3. Puede observarse que la respuesta libre de un sistema críticamente amortiguado no incluye oscilación sobre la posición de deflexión igual a cero; sino que el desplazamiento regresa a cero de acuerdo con el término declinatorio exponencial de la ec. I.2.21. Una definición usual de la condición críticamente amortiguada, es que es la mínima cantidad de amortiguamiento para la cual no ocurre oscilación en la respuesta libre.



fig. I.2.3
crítica.

Respuesta a vibración libre con amortiguamiento

b) SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS.

Si el amortiguamiento es menor que el crítico, entonces de la ec. I.2.18, $c < 2 \approx \omega$ y de esta forma el radicando en la ec. I.2.17 resulta negativo. Para evaluar la respuesta a vibración libre en este caso, es conveniente expresar el amortiguamiento en términos de una relación β , al valor del amortiguamiento crítico; esto es

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 \approx \omega} \quad \text{I.2.22}$$

en la cual β se llama fracción de amortiguamiento. Sustituyendo la ec. I.2.22 en I.2.17, se obtiene

$$s = -\beta \omega \pm \sqrt{(\beta \omega)^2 - \omega^2}$$

cambiando el signo al radicando e introduciendo un nuevo símbolo ω_A ,

$$s = -\beta \omega \pm \omega \sqrt{\beta^2 - 1} = -\beta \omega \pm \omega \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{-1} \\ s = -\beta \omega \pm i \omega_A \quad \text{I.2.23}$$

donde

$$\omega_A = \omega \sqrt{1 - \beta^2}. \quad \text{I.2.24}$$

La cantidad ω_A se llama frecuencia de vibración amortiguada; para fracciones de amortiguamiento esperadas en sistemas estructurales típicos ($\beta < 20\%$), ω_A difiere muy poco de la frecuencia no amortiguada, como puede notarse en la ec. I.2.24. Para estimar la influencia del amortiguamiento en la frecuencia, conviene hacer una gráfica de la relación de frecuencia amortiguada a frecuencia no amortiguada (ω_A / ω) contra la fracción de amortiguamiento β ; donde se aprecia que es un círculo de radio unitario, *fig. I.2.4*.

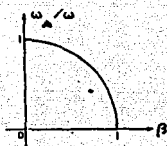


fig. 1.2.4

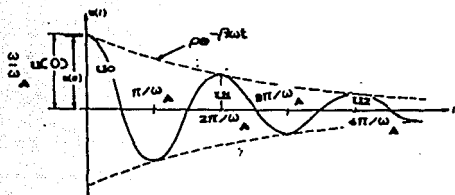


fig. 1.2.5

Gráfica ω_A / ω vs β . Respuesta a vibración libre de un sistema subamortiguado

La respuesta a vibración libre de un sistema subamortiguado puede evaluarse sustituyendo I.2.23 en I.2.3

$$u(t) = G_1 e^{-\beta\omega_A t + i\omega_A t} + G_2 e^{-\beta\omega_A t - i\omega_A t} \\ = e^{-\beta\omega_A t} (G_1 e^{i\omega_A t} + G_2 e^{-i\omega_A t})$$

El término entre paréntesis representa un movimiento armónico simple (puede compararse con la ec. I.2.8); así esta expresión puede escribirse más convenientemente como

$$u(t) = e^{-\beta\omega_A t} (A \sin \omega_A t + B \cos \omega_A t) \quad \text{I.2.25}$$

Finalmente, cuando se introducen condiciones iniciales $u(0)$ y $\dot{u}(0)$, pueden evaluarse las constantes de I.2.25 quedando

$$u(t) = e^{-\beta\omega_A t} \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0) \beta \omega_A}{\omega_A} \sin \omega_A t + u(0) \cos \omega_A t \right] \quad \text{I.2.26}$$

Esta expresión de la respuesta puede escribirse alternativamente en forma de vector rotatorio

$$u(t) = \rho e^{-\beta \omega_A t} \cos(\omega_A t - \theta) \quad \text{I.2.27}$$

en donde

$$\rho = \left\{ \left[\frac{\dot{u}(0) + u(0)\beta\omega}{\omega_A} \right]^2 + [u(0)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\dot{u}(0) + u(0)\beta\omega}{\omega_A u(0)} \quad \text{I.2.28}$$

En la *fig. I.2.5* se muestra una gráfica de la respuesta de un sistema subamortiguado a un desplazamiento inicial $u(0)$ pero empezando con velocidad igual a cero ($\dot{u}(0)=0$). Puede notarse que el sistema subamortiguado oscila sobre la posición neutral, con una frecuencia circular ω_A constante. La representación de la ec. I.2.27 es equivalente a la *fig. I.2.2*, excepto porque la longitud del vector disminuye exponencialmente a medida que la respuesta se amortigua.

Las verdaderas características del amortiguamiento de sistemas estructurales típicos son complejas y difíciles de definir. De todos modos, es práctica común expresar el amortiguamiento de tales sistemas reales en términos de la fracción de amortiguamiento β .

Considérense dos amplitudes positivas consecutivas, como se muestra en la *fig. I.2.5*, esto es u_n y u_{n+1} . De la ec. I.2.27, la relación de tales dos valores consecutivos está dada por

$$u_n/u_{n+1} = \exp \left(2\pi\beta \frac{\omega}{\omega_A} \right) \quad \text{I.2.29}$$

Tomando el logaritmo natural (\ln) de ambos lados, se obtiene el decremento logaritmico δ

$$\delta \equiv \ln (u_n / u_{n+1}) = 2\pi\beta \frac{\omega}{\omega_A} \quad \text{I.2.30}$$

o bien, con I.2.24,

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{I.2.31}$$

Para bajos amortiguamientos, la ec.I.2.31 puede aproximarse a

$$\delta \approx 2\pi\beta. \quad \text{I.2.32}$$

En tales casos, la ec.I.2.29 puede escribirse como una expansión en serie

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\delta} \approx e^{2\pi\beta} = 1 + 2\pi\beta + \frac{(2\pi\beta)^2}{2!} + \dots \quad \text{I.2.33}$$

Para bajos valores de β puede obtenerse suficiente aproximación sumando sólo los dos primeros términos en la serie, en cuyo caso

$$\beta \approx \frac{u_n - u_{n+1}}{2\pi u_{n+1}} \quad \text{I.2.34}$$

Para sistemas ligeramente amortiguados se puede obtener una mayor exactitud evaluando la fracción de amortiguamiento, considerando amplitudes de respuesta separadas varios ciclos, por ejemplo m ciclos; entonces

$$\ln \frac{u_n}{u_{n+m}} = 2m\pi\beta \frac{\omega}{\omega_A} \quad \text{I.2.35}$$

que puede simplificarse para muy bajos amortiguamientos a la relación aproximada

$$\beta = \frac{Un - Un+m}{2m\Gamma Un+m} \quad \text{I.2.36}$$

C) SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS.

Aunque es difícil encontrar sistemas estructurales con amortiguamiento mayor que el crítico en condiciones normales, en este caso la fracción de amortiguamiento es mayor que uno ($\beta > 1$), y la ec. I.2.17 puede escribirse

$$s = -\beta\omega \pm \omega \sqrt{\beta^2 - 1} = -\beta\omega \pm \bar{\omega} \quad \text{I.2.37}$$

en donde

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Sustituyendo I.2.37 en I.2.3 y simplificando, se obtiene

$$u(t) = e^{-\beta\omega t} (A \sinh \bar{\omega} t + B \cosh \bar{\omega} t) \quad \text{I.2.38}$$

en la cual, las constantes A y B pueden evaluarse considerando condiciones iniciales. La respuesta de un sistema sobreamortiguado no es oscilatoria; es similar al movimiento del sistema críticamente amortiguado de la fig.1.2.2, pero el regreso a su posición neutral, se retarda más en tanto se incrementa la fracción de amortiguamiento.

I.3 VIBRACION FORZADA.

Se ha visto que un sistema sufre pérdida de energía por causa del amortiguamiento. Cuando ésta se compensa inyectando energía adicional mediante la aplicación de fuerzas externas, las oscilaciones sostenidas así se llaman vibraciones forzadas.

La ecuación del movimiento se halla a partir del

equilibrio dinámico del cuerpo oscilante, al igual que en los casos anteriores. Se tendría entonces la ecuación general del movimiento, ec.I.1.4, en la cual, la fuerza excitadora $p(t)$ varía comúnmente con el tiempo, y puede ser de diferentes tipos entre los que se encuentran:

- i) Excitación armónica
- ii) Excitación por impulsos
- iii) Excitación arbitraria
- iv) Excitación periódica.

A continuación se estudiarán cada uno de ellos.

I.3.1 Excitación armónica.

a) SISTEMA NO AMORTIGUADO.

Se supondrá ahora que el sistema de la *fig.1.1.4a* está sujeto a una fuerza excitadora $p(t)$ que varía armónicamente, de amplitud p_0 y frecuencia circular Ω (frecuencia de la fuerza excitadora). En este caso la ecuación diferencial del movimiento es

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin \Omega t. \quad \text{I.3.1}$$

Antes de considerar el caso general con amortiguamiento, se examinará primero la respuesta de un sistema no amortiguado, para el cual la ecuación de movimiento se vuelve

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin \Omega t \quad \text{I.3.2}$$

La solución complementaria de esta ecuación es la respuesta a vibración libre de la ec.I.2.10:

$$u_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \text{I.3.3}$$

La solución general incluye también la solución particular, como lo es el comportamiento específico

generado por la forma de la excitación dinámica. La respuesta a la excitación armónica puede suponerse armónica y en fase con la excitación; así

$$u_p(t) = G \operatorname{sen} \Omega t \quad \text{I.3.4}$$

donde se evaluará la amplitud G . Sustituyendo la ec. I.3.4 en I.3.2 se tiene

$$-m \Omega^2 G \operatorname{sen} \Omega t + k G \operatorname{sen} \Omega t = p_0 \operatorname{sen} \Omega t \quad \text{I.3.5}$$

Dividiendo por $\operatorname{sen} \Omega t$ y por k , y recordando que $\omega^2 = k/m$, resulta

$$G (1 - \Omega^2/\omega^2) = p_0/k \quad \text{I.3.6}$$

Por lo tanto la amplitud de la respuesta es

$$G = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-r^2} \quad \text{I.3.7}$$

en donde r representa la relación de la frecuencia de la fuerza excitadora a la frecuencia natural de vibración

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad \text{I.3.8}$$

La solución general a la excitación armónica del sistema no amortiguado está dada entonces por la combinación de la solución complementaria y la solución particular, en la cual el valor de G está dado por la ec. I.3.7; de este modo

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-r^2} \operatorname{sen} \Omega t \quad \text{I.3.9}$$

En esta ecuación, los valores de A y B dependen de las condiciones en las cuales se inició la respuesta. Para un sistema que empieza del reposo, las condiciones iniciales son $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ y se puede mostrar que las constantes toman los siguientes valores:

$$A = - \frac{p_0 r}{k} \frac{1}{1-r^2}; \quad B = 0 \quad \text{I.3.10}$$

Entonces la respuesta dada por I.3.9 se vuelve

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-r^2} (\text{sen } \Omega t - r \text{ sen } \omega t) \quad \text{I.3.11}$$

donde:

- $p_0/k = u_{est}$ = desplazamiento estático, desplazamiento que se produciría por la carga p_0 aplicada estática - mente.
- $1/(1-r^2)$ = factor de amplificación, representa el efecto de amplificación dinámica de la carga aplicada armónicamente.
- $\text{sen } \Omega t$ = componente de respuesta en la frecuencia de la fuerza excitadora = respuesta en estado estacionario, relacionada directamente con la carga.
- $r \text{ sen } \omega t$ = componente de respuesta en la frecuencia natural de vibración = efecto de vibración libre inducido por las condiciones iniciales.

Debido a que en la práctica, el amortiguamiento causa que el último término desaparezca eventualmente, se le denomina respuesta en estado transitorio.

Una medida conveniente de la influencia del carácter dinámico de la excitación, se indica por la relación $R(t)$ de la respuesta dinámica al desplazamiento que se produciría por la aplicación estática de la misma carga. Se tiene entonces la relación de respuesta:

$$R(t) = \frac{u(t)}{u_{est}} = \frac{u(t)}{p_0/k} \quad \text{I.3.12}$$

De la ec. I.3.11 puede deducirse que la relación de respuesta resultante de la excitación armónica de un sistema no amortiguado (comenzando desde el reposo) es

$$R(t) = \frac{1}{1-r^2} z (\sin \Omega t - r \sin \omega t) \quad \text{I.3.13}$$

b) SISTEMA AMORTIGUADO.

Recordando la ec. I.3.1 que incluye amortiguamiento, dividiendo por m y observando que de I.2.22 $c/m = 2\beta\omega$, se tiene

$$u(t) + 2\beta\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \sin \Omega t \quad \text{I.3.14}$$

La solución complementaria a esta ecuación es la respuesta a vibración libre dada por la ec. I.2.25, suponiendo que la estructura tiene amortiguamiento menor que el crítico

$$u_0(t) = e^{-\beta\omega t} (A \sin \omega_A t + B \cos \omega_A t) \quad \text{I.3.15}$$

La solución particular es de la forma

$$u_p(t) = G_1 \sin \Omega t + G_2 \cos \Omega t \quad \text{I.3.16}$$

en la que se requiere del segundo término, ya que en general, la respuesta de un sistema amortiguado no está en fase con la excitación.

Sustituyendo la ec. I.3.16 en I.3.14 y separando los múltiplos de $\sin \Omega t$ de los múltiplos de $\cos \Omega t$:

$$[-G_1 \Omega^2 - G_2 (2\beta\omega) + G_1 \omega^2] \sin \Omega t = \frac{p_0}{m} \sin \Omega t \quad \text{I.3.17a}$$

$$[-G_2 \Omega^2 + G_1 (2\beta\omega) + G_2 \omega^2] \cos \Omega t = 0 \quad \text{I.3.17b}$$

Las dos relaciones deben satisfacerse

individualmente ya que los términos seno y coseno desaparecen en casos diferentes. Dividiendo ambas por ω^2 , reagrupando términos y cancelando las expresiones trigonométricas

$$\begin{aligned} G_1 (1 - r^2) - G_2 (2\beta r) &= \frac{p_0}{k} \\ G_2 (1 - r^2) + G_1 (2\beta r) &= 0 \end{aligned} \quad \text{I.3.18}$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas, resultan expresiones para los factores de amplitud de respuesta:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{p_0}{k} \frac{1 - r^2}{(1 - r^2)^2 + (2\beta r)^2} \\ G_2 &= \frac{p_0}{k} \frac{-2\beta r}{(1 - r^2)^2 + (2\beta r)^2} \end{aligned} \quad \text{I.3.19}$$

Introduciendo tales expresiones en la solución particular ec.I.3.18 y combinando con la solución complementaria, se encuentra finalmente la solución general:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\beta \omega t} (A \operatorname{sen} \omega_A t + B \operatorname{cos} \omega_A t) \\ &+ \frac{p_0}{k} \frac{(1 - r^2) \operatorname{sen} \Omega t - 2\beta r \operatorname{cos} \Omega t}{(1 - r^2)^2 + (2\beta r)^2} \end{aligned} \quad \text{I.3.20}$$

El primer término en la ec.I.3.20 representa la respuesta en estado transitorio a la excitación aplicada. Las constantes A y B podrían evaluarse para cualesquiera condiciones iniciales dadas, pero este término disminuye rápidamente y generalmente es de poco interés por lo que no se evaluarán aquí.

El segundo término en la misma expresión es la respuesta en estado estacionario en la frecuencia de la

fuerza excitadora, pero fuera de fase con ella. El comportamiento del desplazamiento en estado estacionario puede interpretarse más facilmente graficando sus dos vectores en el diagrama de Argand mostrado en la fig. I.3.1. La resultante, ρ , de los dos vectores representa la amplitud de la respuesta en estado estacionario

$$\rho = \frac{p_0}{k} [(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2]^{-1/2} \quad \text{I.3.21}$$

y el ángulo de fase, θ , por el cual la respuesta se retrasa de la fuerza excitadora está dado por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2\beta r}{1-r^2} \quad \text{I.3.22}$$

donde el ángulo de fase está limitado al rango $0 < \theta \leq 180^\circ$.

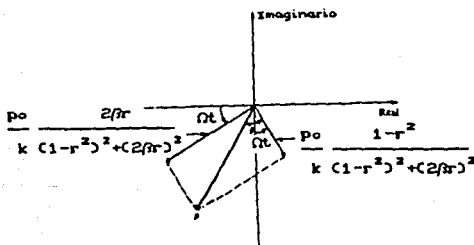


fig. I.3.1

Respuesta (desplazamiento) en estado estacionario.

Así, la respuesta en estado estacionario puede escribirse también

$$u(t) = p \operatorname{sen}(\Omega t - \theta) \quad \text{I.3.23}$$

La relación de la amplitud de la respuesta resultante al desplazamiento estático que se produciría por la fuerza p_0 se llama factor de amplificación dinámica, D ; así

$$D \equiv \frac{p}{p_0/k} = [(1-r^2)^2 + (2\beta r)^2]^{-1/2} \quad \text{I.3.24}$$

Es interesante considerar también el equilibrio de fuerzas actuantes sobre la masa en esta condición de vibración en estado estacionario. Las componentes de fuerza pueden expresarse en términos del factor de amplificación dinámica y graficarse en el diagrama de Argand de la fig. 1.3.2. Se puede observar que la fuerza elástica actúa en la dirección opuesta al vector resultante de

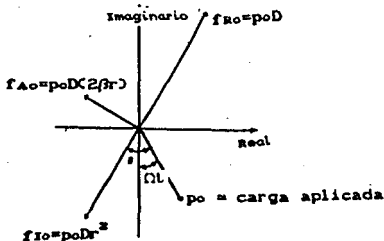


fig. 1.3.2

Equilibrio de fuerzas. Respuesta en estado estacionario.

desplazamiento de la *fig. 1.3.1*. De manera similar, las fuerzas de amortiguamiento y de inercia actúan en direcciones opuestas a los vectores de velocidad y aceleración, respectivamente. Finalmente, la resultante de tales fuerzas resistentes equilibra a la carga aplicada exactamente, como debe ser para mantener el equilibrio dinámico.

De la ec. I.3.24 puede notarse que el factor de amplificación dinámica D varía con la relación de frecuencias r y con la fracción de amortiguamiento β ; en la *fig. 1.3.3* se muestran gráficas de tales relaciones. El ángulo de fase también varía con las cantidades mencionadas, como puede verificarse en la ec. I.3.22 y se muestra en la *fig. 1.3.4*.

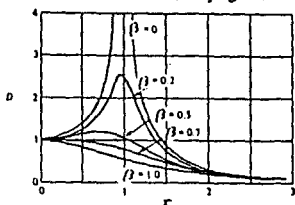


fig. 1.3.3

Variación del factor de amplificación dinámica con respecto al amortiguamiento y frecuencia.

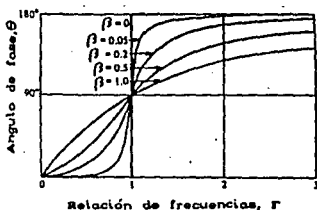


fig. 1.3.4

Variación del ángulo de fase con amortiguamiento y frecuencia.

En la *fig. 1.3.3* puede observarse que el máximo de la respuesta en estado estacionario ocurre con una relación

de frecuencias cercana a la unidad para sistemas ligeramente amortiguados. Cuando la relación de frecuencias es la unidad, es decir, cuando la frecuencia de la fuerza excitadora es igual a la frecuencia natural de vibración, se da la llamada condición de resonancia.

Aparentemente, de la ec.I.3.13 la respuesta en estado estacionario de un sistema no amortiguado tiende a infinito en la resonancia. Se puede obtener un resultado más general de la ec.I.3.24, la cual muestra que para la resonancia ($r=1$), el factor de amplificación dinámica es inversamente proporcional a la fracción de amortiguamiento:

$$D_{res} = \frac{1}{2\beta} \quad \text{I.3.25}$$

Como quiera que sea, aunque se acerque al valor máximo, éste no representa la respuesta máxima para cualquier sistema amortiguado; la relación de frecuencias para la respuesta máxima puede encontrarse diferenciando la ec.I.3.24 con respecto a r o igualando a cero. Para estructuras prácticas que tienen relaciones de amortiguamiento ($\beta < 1/\sqrt{2}$) [11], la relación-pico de frecuencias puede encontrarse así

$$r_{pico} = \sqrt{1-2\beta^2} \quad \text{I.3.26a}$$

y su correspondiente respuesta-pico es

$$D_{max} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{I.3.26b}$$

Para fracciones pequeñas de amortiguamiento, la diferencia entre las ecs.I.3.26b y I.3.25 puede despreciarse.

A fin de comprender mejor la naturaleza de la respuesta resonante de una estructura, a excitación armónica, es necesario considerar la ecuación de la respuesta general I.3.20, que incluye los términos en estado transitorio y en estado estacionario. En la frecuencia de excitación resonante esta ecuación se vuelve

$$u(t) = e^{-\beta \omega t} (A \sin \omega_A t + B \cos \omega_A t) - \frac{p_0}{k} \frac{\cos \omega t}{2\beta} \quad \text{I.3.27}$$

Asumiendo que el sistema empieza del reposo [$u(0) = \dot{u}(0) = 0$], las constantes son

$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_A} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\beta^2}}; \quad B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\beta} \quad \text{I.3.28}$$

Así, I.3.27 se vuelve

$$u(t) = \frac{1}{2\beta} \frac{p_0}{k} \left[e^{-\beta \omega t} \left(\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta^2}} \sin \omega_A t + \cos \omega_A t \right) - \cos \omega t \right] \quad \text{I.3.29}$$

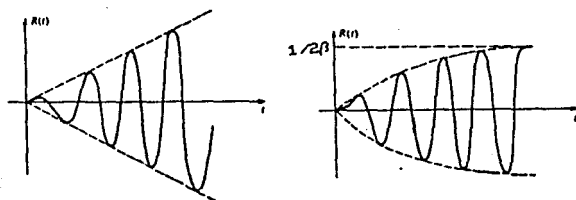
Para las cantidades de amortiguamiento que se esperan en un sistema estructural, el término seno en esta ecuación contribuye muy poco a la amplitud de la respuesta; además, la frecuencia amortiguada es casi igual a la frecuencia no amortiguada. Así la relación de la respuesta en este caso es aproximadamente

$$R(t) = \frac{u(t)}{p_0/k} \approx \frac{1}{2\beta} (e^{-\beta \omega t} - 1) \cos \omega t \quad \text{I.3.30}$$

Para amortiguamiento nulo, la ec. I.3.29 se vuelve indeterminada, pero aplicando la regla de L'Hôpital, la respuesta resonante de un sistema no amortiguado es

$$R(t) = \frac{1}{2} (\text{sen } \omega t - \omega t \cos \omega t). \quad \text{I.3.31}$$

En la *fig. I.3.5* se muestran gráficas de las ecuaciones I.3.30 y I.3.31, y se aprecia cómo aumenta la respuesta en casos de excitación resonante, con amortiguamiento y sin él; en ambos casos la respuesta aumenta gradualmente. En el sistema no amortiguado, la respuesta crece continuamente una cantidad π en cada ciclo, de esta manera se produciría eventualmente una calamidad en el sistema, a menos de que se modificara la frecuencia. Por otra parte, se puede apreciar la manera como el amortiguamiento limita la amplitud de la respuesta resonante. El número de ciclos requerido para alcanzar esencialmente su amplitud pico, depende de la cantidad de amortiguamiento.



(a) Sistema no amortiguado

(b) Sistema amortiguado.

fig. I.3.5
condiciones

Respuesta a excitación resonante $r = 1$ para
iniciales en el reposo.
 $R(t)$: relación de respuesta

I.3.2 Excitación por impulsos.

A continuación se considerará otra clase especial de excitación dinámica de un sistema de UGDL: la carga impulsiva. Dicha carga consiste de un sólo impulso principal, como se ilustra en la *fig. 1.3.6* y generalmente es de relativa corta duración. Las cargas impulsivas o de choque frecuentemente son de importancia en el diseño de ciertas clases de sistemas estructurales, como p.ej. vehículos, etc.

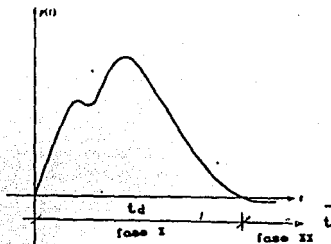


fig. 1.3.6 Carga impulsiva arbitraria.

El amortiguamiento tiene mucha menos importancia para controlar la respuesta máxima de una estructura sujeta a cargas impulsivas, que para excitación armónica y periódica. La respuesta máxima a una carga impulsiva se alcanzará en muy poco tiempo, antes de que las fuerzas de amortiguamiento puedan absorber la energía de la estructura. Por esta razón, para excitación por impulsos solamente se considera la respuesta no amortiguada.

Algunas cargas impulsivas pueden ser expresadas por funciones analíticas simples, como el impulso onda seno, el rectangular y el triangular. En todo caso la respuesta se dividirá en dos fases, la primera correspondiente al intervalo durante el cual actúa la carga (tiempo de duración del impulso: t_d), seguido por la fase de vibración libre.

La respuesta máxima producida en una estructura no amortiguada de UGDL por una forma dada de excitación impulsiva, depende únicamente de la relación del tiempo de duración del impulso al periodo natural de la estructura t_d/T . De esta forma, conviene graficar el factor de amplificación dinámica D como una función de (t_d/T) para diferentes formas de excitación impulsiva.

Por ejemplo, en la *fig. I.3.7* se han graficado algunos datos obteniéndose diferentes curvas que corresponden a diversas formas de excitación impulsiva. Estas curvas se conocen como espectros de respuesta de cargas impulsivas, y generalmente se usan para predecir el efecto máximo esperado de una forma dada de excitación impulsiva actuante sobre una estructura simple.

Del estudio del espectro de respuesta de la *fig. I.3.7* y de otros espectros similares para otras formas de excitación, se pueden concluir los siguientes dos aspectos relacionados con la respuesta de estructuras a cargas impulsivas:

(1) Para una excitación de larga duración (por ejemplo $t_d/T > 1$), el factor de amplificación dinámica depende principalmente de la relación del incremento de la carga a su valor máximo. Una excitación impulsiva de suficiente duración produce un factor de amplificación de 2; un

incremento gradual causa un factor de amplificación de 1.

(ii) Para una excitación de corta duración (por ejemplo $td/T < 1/4$), la amplitud del desplazamiento máximo depende principalmente de la magnitud del impulso aplicado $I = \int_0^d p(t) dt$ y no está fuertemente influenciado por la forma de la excitación. Sin embargo, el factor D es totalmente dependiente de la forma de la excitación, ya que es proporcional a la relación del área del impulso a la amplitud-pico de la carga, como puede observarse comparando las curvas de la *fig. 1.3.7* en el rango de período corto. De este modo, u_{max} es la medida de respuesta más significativa.

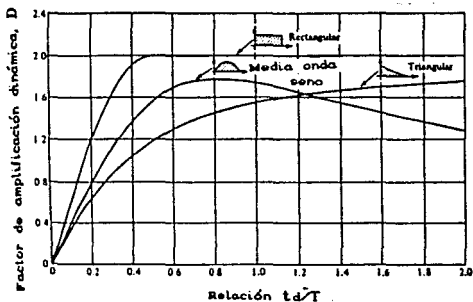


fig. 1.3.7 Espectro de respuesta-desplazamiento para tres formas de impulso.

Para evaluar la respuesta máxima a una carga impulsiva de corta duración, puede seguirse un procedimiento aproximado, el cual representa una expresión matemática de esta segunda conclusión. La correspondencia impulso-momento para la masa m puede escribirse [11]

$$m \Delta \dot{u} = \int_0^{t_d} [p(t) - k u(t)] dt \quad \text{I. 3. 32}$$

en donde Δu representa el cambio de velocidad producido por la excitación. Se puede observar en esta expresión que para pequeños valores de t_d , el desplazamiento desarrollado durante la excitación $u(t_d)$ es de orden $(t_d)^2$ mientras que el cambio de velocidad $\Delta \dot{u}$ es de orden t_d . Así, debido a que el impulso también es de orden t_d , el término de la fuerza elástica $k u(t)$ desaparecerá de la expresión cuando t_d tienda a cero, y es tan pequeño que puede omitirse para cargas de corta duración. Con estos fundamentos, la correspondencia aproximada puede escribirse

$$m \Delta \dot{u} \approx \int_0^{t_d} p(t) dt \quad \text{I. 3. 33}$$

o bien,

$$\Delta \dot{u} \approx \frac{1}{m} \int_0^{t_d} p(t) dt \quad \text{I. 3. 34}$$

La respuesta, después de terminada la excitación es una vibración libre

$$\dot{u}(\bar{t}) = \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + u(t_d) \cos \omega \bar{t}$$

donde $\bar{t} = t - t_d$. Pero, ya que el término de desplazamiento $u(t_d)$ es demasiado pequeño y la velocidad $\dot{u}(t_d) = \Delta \dot{u}$, se puede usar la siguiente aproximación:

$$u(t) \approx \frac{1}{m \omega} \left[\int_0^t p(\tau) d\tau \right] \sin \omega t. \quad \text{I.3.35}$$

I.3.3 Excitación arbitraria.

a) SISTEMA NO AMORTIGUADO.

El procedimiento que se acaba de describir para aproximar la respuesta de una estructura a un impulso de corta duración, puede usarse como base para desarrollar una fórmula para evaluar la respuesta a una excitación dinámica arbitraria.

Considérese la excitación arbitraria general $p(t)$ mostrada en la *fig. I.3.8*, específicamente la intensidad de la carga $p(\tau)$ actuante en el tiempo $t = \tau$. Esta excitación actuante durante un corto intervalo de tiempo $d\tau$ produce un impulso de corta duración $p(\tau)d\tau$ en la estructura, y puede usarse la ec. I.3.35 con el fin de evaluar la respuesta a este impulso.

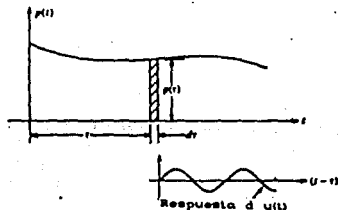


fig. I.3.8 Derivación de la integral de Duhamel (sistema no amortiguado).

Puede notarse que, aunque el procedimiento es aproximado sólo para impulsos de duración finita, puede volverse exacto cuando la duración de la excitación tiende a cero. Así, para el intervalo diferencial de tiempo dr , la respuesta producida por la excitación $p(r)$ es exactamente (para $t > r$)

$$du(t) = \frac{p(r)dr}{m \omega} \text{ sen } \omega(t-r) \quad \text{I.3.36}$$

En esta expresión, el término $du(t)$ representa la respuesta diferencial al impulso diferencial sobre la historia completa de la respuesta para $t > r$, de ninguna manera quiere decir el cambio del desplazamiento u durante un intervalo de tiempo dt .

Puede considerarse que la historia completa de la excitación consiste de una sucesión de tales impulsos cortos, cada uno produciendo su propia respuesta diferencial de la forma de la ec. I.3.36. Para este sistema linealmente elástico, se puede obtener la respuesta total, sumando todas las respuestas diferenciales desarrolladas durante la historia de la excitación, esto es, integrando la ec. I.3.36 como sigue:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t p(r) \text{ sen } \omega(t-r) dr \quad \text{I.3.37}$$

La ec. I.3.37 se conoce generalmente como la *integral de Duhamel* para un sistema no amortiguado, y puede usarse para evaluar la respuesta de un sistema de UGDL no amortiguado sujeto a cualquier forma de excitación dinámica $p(t)$. Esta última ecuación puede también expresarse en la forma

$$u(t) = \int_0^t p(r) h(t-r) dr \quad \text{I.3.38}$$

donde el nuevo símbolo tiene la definición

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} \text{sen } \omega(t-\tau) \quad \text{I.3.39}$$

La ec. I.3.38 es la llamada *integral de convolución**; cuando se evalúa la respuesta de una estructura a una excitación arbitraria usando esta integral, se conoce cómo obtener la respuesta a través del dominio del tiempo. La función $h(t-\tau)$ se refiere generalmente a la respuesta al impulso unitario (definida en este caso para un sistema no amortiguado), ya que expresa la respuesta del sistema a un impulso de magnitud unitaria, aplicado en el tiempo $t = \tau$.

En la ec. I.3.37 se ha asumido implícitamente que la excitación inició en el tiempo $t = 0$ y que la estructura partió del reposo. Para cualesquiera otras condiciones iniciales especificadas, $u(0) \neq 0$ y $\dot{u}(0) \neq 0$, se debe agregar a esta solución la respuesta a vibración libre; así, en general

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \text{sen } \omega t + u(0) \text{cos } \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t p(\tau) \text{sen } \omega(t-\tau) d\tau \quad \text{I.3.40}$$

b) SISTEMAS AMORTIGUADOS.

La deducción de la ecuación integral de Duhamel que expresa la respuesta de un sistema amortiguado a una excitación dinámica general arbitraria, es equivalente al análisis no amortiguado, excepto porque la respuesta a vibración libre iniciada por la carga diferencial impulsiva $p(\tau)d\tau$, estará sujeta a un decremento exponencial. Así, estableciendo que $u(0) = 0$ y haciendo $u(0) = [\int_0^t p(\tau) d\tau]/m$

* Esto se estudiará con mayor profundidad en la secc. II. 4.3

en la ec. I.2.26, lleva a

$$du(t) = e^{-\beta\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)dr}{m \omega_A} \text{sen } \omega_A(t-\tau) \right], \quad t > \tau \quad \text{I.3.41}$$

en donde el decrecimiento exponencial empieza tan pronto la carga es aplicada en el tiempo $t = \tau$.

Sumando estos términos diferenciales de respuesta sobre el intervalo completo de la excitación, resulta

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_A} \int_0^t p(\tau) e^{-\beta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_A(t-\tau) dr \quad \text{I.3.42}$$

la cual es la respuesta amortiguada, equivalente a la ec. I.3.37.

Si se compara I.3.42 con la integral de convolución de la ec. I.3.38 se puede mostrar que la respuesta a un impulso unitario para un sistema amortiguado está dada por

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m \omega_A} e^{-\beta\omega(t-\tau)} \text{sen } \omega_A(t-\tau) \quad \text{I.3.43}$$

I.3.4 Excitación periódica.

Frecuentemente se encuentran fuerzas periódicas actuantes sobre algunas estructuras, o bien pueden ser muy aproximadas por fuerzas periódicas. Por ejemplo, la fuerza que ejerce un automóvil que viaja a una velocidad constante sobre la superficie de cierta carretera o puente puede considerarse periódica, o bien, el movimiento de algunos tipos de maquinaria como se mencionó en la sección I.1.2.

Un movimiento periódico, simplemente es aquél que se repite a si mismo en intervalos de tiempo regulares. Una forma de excitación periódica es el movimiento armónico simple del cual se habló en la secc.I.3.1, pero también existen funciones periódicas que no pueden ser descritas por una función senoidal única.

El problema sería entonces, encontrar una función para representar una fuerza $p(t)$ con periodo T . En todo caso, cualquier fuerza periódica puede representarse como la suma de componentes armónicos simples por medio de una expansión en *serie de Fourier*. En el siguiente capítulo se estudiará el tema de las series y transformadas de Fourier, que servirán como instrumento para representar algunas formas de excitación tanto periódica como no-periódica, y en el capítulo IV se tratará con mayor profundidad este tipo de excitación.

C A P I T U L O I I

S E R I E S Y T R A N S F O R M A D A S D E F O U R I E R

Fourier's theorem is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but it may be said to furnish an indispensable instrument in the treatment of nearly every recalcitrant question in modern physics.

Lord Kelvin.

II SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER.

II.1 INTRODUCCION.

Como consecuencia de la invención del cálculo por Newton y Leibnitz (S. XVIII), las ciencias físico-matemáticas experimentaron una gran actividad. Uno de los temas que atrajo más la atención de los grandes científicos, fué el relacionado con el problema de la cuerda vibrante, el cual se asoció con teorías matemáticas de vibraciones musicales. Los primeros científicos en mostrar interés en la teoría de la cuerda vibrante fueron Brook Taylor, Daniel Bernoulli, Leonard Euler y Jean d'Alembert. Los tres últimos, a mediados del siglo XVIII, habían avanzado en tal teoría y con el concepto de modo fundamental de vibración llegaron a una solución de la forma

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{n\pi at}{c},$$

donde aparece una serie de funciones trigonométricas para representar una función arbitraria [9]. Más tarde, Euler dio las fórmulas para los coeficientes en las series.

El físico y matemático francés Jean Baptiste Fourier presentó muchos ejemplos instructivos de expansiones en series trigonométricas en relación con problemas con valor de contorno en la conducción del calor. Su libro *La théorie analytique de la chaleur* (1822) fué el origen de lo que hoy se conoce como *análisis de Fourier*. En este, Fourier ilustró los procedimientos básicos de la

separación de variables y superposición, despertando mucho interés en la representación de funciones definidas en un intervalo, mediante series trigonométricas de senos y cosenos.

Las contribuciones de Fourier se limitaron a aplicaciones y métodos y no incluyeron condiciones de validez [8]. En 1829, el matemático alemán *Lejeune Dirichlet*, fué el primero en establecer condiciones generales para asegurar la convergencia de la serie de Fourier de una función.

La teoría ha sido perfeccionada y extendida desde entonces, hasta el nivel que actualmente tiene.

En este capítulo se expondrá el concepto de series de Fourier, el cual es un poderoso instrumento en el tratamiento de diversos problemas que implican funciones periódicas; y el de la transformada de Fourier, con la cual se extiende la teoría al caso de funciones arbitrarias.

II.2 SERIES DE FOURIER.

II.2.1 Fórmulas de Euler-Fourier.

Las series trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos nx + b_k \operatorname{sen} nx) \quad \text{II.2.1}$$

son requeridas para resolver muchos problemas físicos, como en la teoría del sonido, conducción del calor, ondas

electromagnéticas, circuitos eléctricos, vibraciones mecánicas, etc. Una ventaja importante de la serie II.2.1 sobre las series de Taylor por ejemplo, es que puede representar funciones discontinuas.

Supóngase que $f(x)$ en II.2.1 es conocida en $(-\pi, \pi)$ y que tienen que encontrarse los coeficientes a_n y b_n . Para determinar a_0 , se integra la ec. II.2.1 término por término de $-\pi$ a π . Debido a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

ya que la integral es sobre n periodos completos, el cálculo da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = a_0 \pi. \quad \text{II.2.2}$$

El coeficiente a_n se determina de manera similar, así, multiplicando II.2.1 por $\cos nx$, resulta

$$f(x)\cos nx = \frac{1}{2} a_0 \cos nx + \dots + a_n \cos^2 nx + \dots, \quad \text{II.2.3}$$

donde los términos no escritos implican productos de la forma $\sin mx \cos nx$ o de la forma $\cos mx \cos nx$ con $m \neq n$.

Se puede verificar entonces que para los distintos valores de m y n , la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx = 0,$$

en todos los casos, y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx = 0,$$

cuando $m \neq n$, y de aquí, la integración de II.2.3 da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \pi.$$

Por esta razón,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad \text{II.2.4a}$$

Por la ec. II.2.2, este resultado es también válido para $n = 0$. Similarmente, multiplicando II.2.1 por $\sin nx$ e integrando, resulta

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad \text{II.2.4b}$$

Las fórmulas II.2.4 son las llamadas *fórmulas de Euler-Fourier*, y la serie II.2.1 que resulta cuando a_n y b_n son determinadas, se llama *serie de Fourier de $f(x)$* . Más específicamente, una serie de Fourier es una serie trigonométrica en la cual los coeficientes están dados por II.2.4, para alguna función $f(x)$ absolutamente integrable. En otros términos, no existe una función absolutamente integrable $f(x)$, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{\pi}{\log(1+n)}.$$

Por otra parte, una serie de Fourier para alguna función $f(x)$ puede ser divergente. No se hablará aquí de tales funciones, aunque son frecuentes en problemas de filtración y ruido; sólo se mencionará que aun cuando sea divergente, una serie de Fourier representa lo más parecido a $f(x)$ [22].

Como una ilustración se calculará la serie de Fourier de la función $f(x) = x$. Por las ecs. II.2.4

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi = \frac{2}{n} (-1)^{n+1},$$

sustituyendo en II.2.1,

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right). \quad \text{II.2.5}$$

La serie II.2.5 converge a x para $-\pi < x < \pi$. Para discutir la convergencia fuera de este intervalo, se introducirá el concepto de periodicidad.

Se dice que una función $f(x)$ es periódica, si $f(x+T) = f(x)$ para todo valor de x , donde T es una constante diferente de cero. Cualquier número T con esta propiedad es un periodo de $f(x)$; por lo tanto, $\sin x$ tiene los periodos $2\pi, -2\pi, 4\pi, \dots$.

Cada término de la serie II.2.5 tiene periodo 2π , y consecuentemente la suma también tiene periodo 2π . Por lo tanto, la gráfica de la suma tiene la apariencia mostrada en la *fig. II.2.1*.

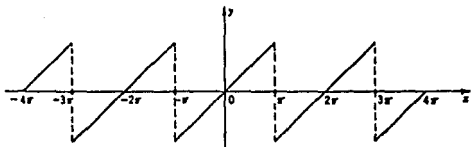


fig. II.2.1

Evidentemente, la suma es igual a x solamente en el intervalo $-\pi < x < \pi$, y no en todo el intervalo $-\infty < x < \infty$. Faltaría describir lo que sucede en los puntos $x = \pm\pi, \pm3\pi,$

etc., donde la suma de la serie muestra un salto abrupto de $-\pi$ a π .

Haciendo $x = \pi, 3\pi, \dots$ en II.2.5, puede verse que todo término es cero y consecuentemente la suma es cero. Esto se indica en la *fig. II.2.1* con un punto en tales sitios.

El término $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ en II.2.1 es llamado en ocasiones la *n*-ésima armónica (por la analogía con la teoría de los instrumentos musicales) [17]. Las primeras cuatro armónicas de la serie II.2.5 son

$$2\sin x, -\sin 2x, \frac{2}{3}\sin 3x, -\frac{1}{2}\sin 4x.$$

Estas armónicas y las dos siguientes están graficadas en las curvas de la *fig. II.2.2*. La suma de las cuatro armónicas es

$$y = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x.$$

Esto es una suma parcial de la serie de Fourier, y puede esperarse que sea una aproximación de la función x .

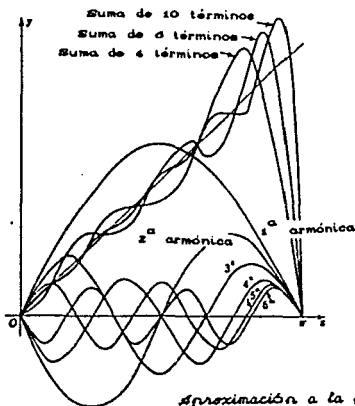


fig. II.2.2

En la *fig. II.2.2* puede apreciarse que en tanto el número de términos aumenta, la aproximación de las curvas se acerca a $y = x$ para toda x en el intervalo $-\pi < x < \pi$, pero no para $x = \pm \pi$.

En el ejemplo anterior se ilustran ciertos rasgos característicos de las series de Fourier en general, los cuales se discutirán desde un punto de vista general.

Cada término de la serie II.2.1 tiene período 2π , entonces la suma $f(x)$ debe tener también un período 2π . Siempre que se considere una serie como la II.2.1, se supondrá que $f(x)$ está dada para $-\pi \leq x < \pi$ y que fuera de este intervalo, $f(x)$ está determinada por la condición de periodicidad $f(x+2\pi) = f(x)$.

Se usa el término discontinuidad simple para describir la situación que se presenta cuando la función $f(x)$ sufre un salto finito en el punto $x = x_0$.

Analíticamente, esto significa que los dos valores límite de $f(x)$, cuando $x \rightarrow x_0$ por los lados derecho e izquierdo, existen, pero son diferentes; esto es

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \epsilon), \quad \epsilon > 0.$$

Tales límites por la derecha y por la izquierda se escribirán aquí como $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$, respectivamente, así que la desigualdad anterior puede escribirse

$$f(x_0+) \neq f(x_0-).$$

Se dice que una función $f(x)$ está limitada si se cumple la desigualdad $|f(x)| \leq M$ para alguna constante

M y para toda x bajo consideración. Puede demostrarse que si una función limitada tiene solamente un número finito de máximos y mínimos y sólo un número finito de discontinuidades, entonces todas sus discontinuidades son simples. Esto es, $f(x+0)$ y $f(x-0)$ existen para toda x .

Con estos preliminares, se puede establecer el siguiente teorema, el cual establece la convergencia de las series de Fourier para una muy grande clase de funciones.

TEOREMA DE DIRICHLET. Supóngase $f(x)$ bien definida para $-\pi \leq x < \pi$, limitada, con un número finito de máximos y mínimos y con un número finito de discontinuidades.

Sea $f(x)$ definida para otros valores de x por la condición de periodicidad $f(x+2\pi) = f(x)$. Entonces la serie de Fourier para $f(x)$ converge a $\frac{1}{2} [f(x+0)+f(x-0)]$ para todo valor de x (y de aquí, converge a $f(x)$ en puntos donde $f(x)$ es continua) [10].

Las condiciones impuestas sobre $f(x)$ son las llamadas *condiciones de Dirichlet*, después de que el matemático Dirichlet descubrió el teorema [22].

II.2.2 Serie coseno de Fourier y serie seno de Fourier.

Para muchas funciones, los coeficientes de Fourier seno o coseno se pueden determinar por inspección. Tal posibilidad se investigará a continuación.

Se dice que una función $f(x)$ es par si

$$f(-x) = f(x)$$

II.2.6

y la función $f(x)$ es impar si

$$f(-x) = -f(x). \quad \text{II.2.7}$$

La gráfica de una función par es simétrica sobre el eje y , *fig. II.2.3*, y la gráfica de una función impar es simétrica oblicua, *fig. II.2.4*. Es evidente que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \text{si } f(x) \text{ es par,} \quad \text{II.2.8}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad \text{si } f(x) \text{ es impar,} \quad \text{II.2.9}$$

ya que las integrales representan las áreas bajo las curvas.

Los productos de funciones pares e impares obedecen las reglas (par)(par)=par, (par)(impar)=impar, (impar)(impar)=par. Como prueba, sea $F(x) = f(x)g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son pares. Entonces $F(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = F(x)$, lo que demuestra que el producto $f(x)g(x)$ es par.

Las otras dos relaciones se verifican similarmente. Como ejemplo, el producto $\cos nx \sin mx$ es impar, ya que $\cos nx$ es par y $\sin mx$ impar. Por lo tanto, de II.2.9,

$$\int_{-a}^a \cos mx \sin nx dx = 0$$

sin detallar el cálculo.

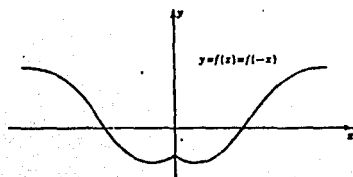


fig. II.2.3

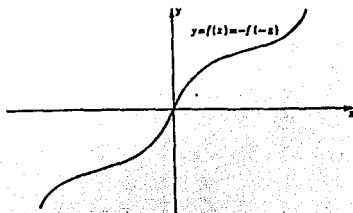


fig. II.2.4

La aplicación de estos resultados se facilita por el siguiente

TEOREMA. Si $f(x)$ definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$ es par, la serie de Fourier tiene términos en coseno solamente y los coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = 0. \quad \text{II.2.10}$$

Si $f(x)$ es impar, la serie tiene términos en seno solamente y los coeficientes están dados por

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad \text{II.2.11}$$

Para visualizar mejor esto, sea $f(x)$ par. Entonces $f(x) \cos nx$ es el producto de una función par con una función par, y por lo tanto es par. Por esto

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

por II.2.8. Por otra parte $f(x) \sin nx$ es una función par con una función impar, por lo tanto es impar. Por II.2.9,

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

El resultado de II.2.11 se establece similarmente.

Esto significa que, con una función impar, la serie de Fourier se reduce a una serie seno y no es necesario escribir ni calcular los términos coseno.

Puede hablarse entonces de la *serie seno de Fourier* y de la *serie coseno de Fourier*. Cualquier función $f(x)$

definida en $(0, \pi)$ la cual satisfaga las condiciones de Dirichlet, puede ser expandida en una serie seno y en una serie coseno en $0 < x < \pi$. Para obtener una serie seno, se extiende $f(x)$ sobre el intervalo $-\pi < x < 0$ de tal manera que la función extendida es impar. Esto es, se define

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad \text{en } 0 < x < \pi, \\ F(x) &= -f(|x|) \quad \text{en } -\pi < x < 0. \end{aligned}$$

La serie de Fourier para $F(x)$ consiste de términos seno solamente, ya que $F(x)$ es impar. Los coeficientes están dados por la ec. II.2.11 porque $F(x) = f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Similarmente, si se desea obtener una serie coseno para $f(x)$ en $0 < x < \pi$, los coeficientes están dados por II.2.10.

Se puede establecer el siguiente

TEOREMA DE UNICIDAD. Si dos series trigonométricas de la forma II.2.1 convergen a la misma suma para todos los valores de x , entonces los coeficientes correspondientes son iguales [22].

II.2.3 Extensión del intervalo.

Los métodos desarrollados hasta este punto restringen el intervalo de expansión a $(-\pi, \pi)$. Muchas veces se requiere desarrollar $f(x)$ en una serie de Fourier que sea válida para un intervalo mayor. Dejando que la longitud del intervalo se incremente indefinidamente se puede esperar obtener una expansión válida para toda x .

Para obtener esto sobre un intervalo $(-l, l)$, se cambiará la variable de x a $bx/2\pi$. Si $f(x)$ satisface las

condiciones de Dirichlet en $(-l, D)$, entonces la función $f(x/2\pi)$ puede desarrollarse en una serie de Fourier en z ,

$$f(x/2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nz \quad \text{II.2.12}$$

para $-\pi \leq z < \pi$.

Debido a que $z = 2\pi x/l$, la serie II.2.12 se vuelve

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nx}{l} \quad \text{II.2.13}$$

Aplicando II.2.4 a la serie II.2.12, puede observarse que

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x/2\pi) \cos nz \, dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos(2\pi nx/D) \, dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x/2\pi) \operatorname{sen} nz \, dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen}(2\pi nx/D) \, dx.$$

Si n es cualquier entero, entonces

$$\cos \frac{2\pi n(x+l)}{l} = \cos \left(\frac{2\pi nx}{l} + 2\pi n \right) = \cos(2\pi nx/D),$$

y similarmente para la función seno. De aquí, cada término de la serie II.2.13 tiene un período l , y por consiguiente la suma tiene también período l . Por esta razón, la suma no puede representar una función arbitraria en $(-\infty, \infty)$, solamente representa funciones periódicas.

Sujeta a las condiciones de Dirichlet en cualquier caso, la función puede escogerse arbitrariamente en el intervalo $(-l, D)$, y es natural investigar si es posible obtener una representación para funciones arbitrarias sobre $(-\infty, \infty)$, haciendo $l \rightarrow \infty$.

Tal representación es posible. El proceso lleva al llamado *Teorema de la integral de Fourier*, el cual tiene muchas aplicaciones prácticas y será tratado más adelante.

Puede suponerse que $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en todo intervalo $(-l, D)$ y que la integral

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

converge.

Como se ha visto, $f(x)$ está dada por la ec. II.2.13, donde*

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{\ell} dt, \quad b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{\ell} dt.$$

Sustituyendo estos valores de los coeficientes en II.2.13,

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{2n\pi(t-x)}{\ell} dt \quad \text{II.2.14}$$

se sabe que

$$\cos(2n\pi t/D) \cos(2n\pi t/D) + \sin(2n\pi t/D) \sin(2n\pi t/D) = \cos(2n\pi(t-x)/D).$$

Ya que se supone que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ es convergente,

$$\left| \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(t)| dt \leq \frac{M}{2\ell},$$

lo cual obviamente tiende a cero a medida que ℓ se incrementa indefinidamente. También si el intervalo $(-l, D)$ se hace suficientemente grande, la cantidad $2\pi/\ell$, que

* Se usa t como variable de integración para evitar confusión con la x en II.2.13. Si $f(x)$ es discontinua en $x=x_0$, el lado izquierdo de II.2.13 significa $1/2[f(x_0+) + f(x_0-)]$.

aparece en los integrandos de la suma, puede hacerse tan pequeña como se desee.

Por lo tanto, la suma en la ec. II.2.14 puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left[\Delta\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos \Delta\alpha (t-x) dt \right. \\ & + \Delta\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos 2\Delta\alpha (t-x) dt \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \Delta\alpha \int_{-l}^l f(t) \cos n\Delta\alpha (t-x) dt \\ & \left. + \dots \dots \dots \right] \quad \text{II.2.15} \end{aligned}$$

donde $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{l}$.

Esta suma sugiere la definición de la integral definida de la función

$$F(\alpha) = \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha(t-x) dt$$

en la cual los valores de la función $F(\alpha)$ se calculan en los puntos $2\pi/l, 4\pi/l, \dots$.

Ahora para valores muy grandes de l

$$\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha(t-x) dt$$

difiere muy poco de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt$$

y se manifiesta que a medida que α crezca indefinidamente, la suma II.2.15 se aproximará al límite

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt.$$

Si tal es el caso, entonces II.2.14 puede escribirse como

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt. \quad \text{II.2.16}$$

La discusión anterior es heurística y no puede considerarse como una prueba rigurosa. De cualquier manera, la validez de la fórmula II.2.16 puede ser establecida rigurosamente si la función $f(x)$ satisface las condiciones enunciadas arriba. La integral II.2.16 tiene el nombre de *integral de Fourier*. Esta fórmula supone una forma más simple si $f(x)$ es una función par o impar, lo cual se explica a continuación.

Expandiendo el integrando de II.2.16 resulta

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} da \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos at \cos ax dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin at \sin ax dt \right]$$

para el miembro de la derecha. Si $f(t)$ es impar, entonces $f(t)\cos at$ es una función impar por una función par, por lo tanto es impar. Similarmente, $f(t)\sin at$ es par cuando $f(t)$ es impar. Además aplicando la ec. II.2.9 a la primera integral en la expresión anterior y II.2.8 a la segunda integral, se observa que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} f(t) \sin at \sin ax dt \quad \text{II.2.17}$$

cuando $f(x)$ es impar. Un argumento similar muestra que si

$f(x)$ es par, entonces

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} f(t) \cos at \cos ax dt. \quad \text{II.2.18}$$

Si se define a $f(x)$ únicamente en el intervalo $(0, \infty)$, entonces pueden usarse II.2.17 y II.2.18, ya que se puede pensar en definir a $f(x)$ en $(-\infty, 0)$ haciéndola, ya sea impar o par. Esto corresponde al hecho de que una función dada sobre $(0, \pi)$ puede expandirse en una serie seno o en una serie coseno.

Ya que la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ en puntos de discontinuidad, la integral de Fourier también lo hace. En particular, para una función impar la integral converge a cero en $x = 0$, y este hecho puede verificarse haciendo $x = 0$ en II.2.17.*

II.2.4 Forma compleja de las series de Fourier.

La serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{II.2.19}$$

con

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt$$

* Es necesario notar que toda función impar, definida en $x=0$, satisface $f(0)=0$ (aunque para una función par $f(0)$ es arbitraria). De aquí que una función definida para $x=0$ debe ser a veces redefinida en $x=0$, antes de que esta pueda ser convertida en una función impar.

puede escribirse, con ayuda de la fórmula de Euler

$$e^{iu} = \cos u + i \operatorname{sen} u \quad \text{II.2.20}$$

en una forma equivalente, a saber,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx} \quad \text{II.2.21}$$

donde los coeficientes C_n están definidos por la ecuación

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad \text{II.2.22}$$

El índice de suma n en II.2.21 corre a través del conjunto de todos los valores enteros positivos y negativos incluyendo el cero.

La equivalencia de II.2.21 y II.2.19 puede establecerse de la siguiente manera: sustituyendo II.2.20 en II.2.22 da, para $n > 0$,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \operatorname{sen} nt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt - i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt \\ &= \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2}. \end{aligned}$$

Un cálculo similar da

$$C_{-n} = \frac{a_n}{2} + i \frac{b_n}{2}$$

mientras

$$C_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Ahora, II.2.21 puede escribirse en la forma

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-inx}.$$

Haciendo uso de las expresiones para C_n acabadas de encontrar,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - i \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}. \end{aligned} \quad \text{II.2.23}$$

Por II.2.20

$$e^{iu} + e^{-iu} = 2\cos u \quad \text{y} \quad e^{iu} - e^{-iu} = 2i\sin u$$

y de aquí, la serie II.2.23 es idéntica a la serie II.2.19.

Los métodos de la sección anterior producen

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/l},$$

con

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i2n\pi t/l} dt, \quad \text{II.2.24}$$

para la expansión en un intervalo arbitrario $(-l, l)$.

En general, haciendo $l \rightarrow \infty$, se obtiene el teorema de la integral de Fourier en la forma

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt \quad \text{II.2.25}$$

cuando $f(x)$ satisface las condiciones postuladas para II.2.23.

Definiendo

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx, \quad \text{II.2.26}$$

entonces después de renombrar variables, II.2.25 puede escribirse

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A F(u) e^{iux} du. \quad \text{II.2.27}$$

La transformada \mathcal{F} , definida por

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx \quad \text{II.2.28}$$

es la llamada transformada de Fourier, la cual es una poderosa herramienta del análisis moderno. Aunque se le relaciona con la transformada de Laplace, \mathcal{F} es más fácil de invertir, esto es, se puede encontrar rápidamente $f(x)$ por II.2.27 cuando es conocida \mathcal{F} .

El tema de la transformada de Fourier será estudiado con mayor amplitud en el subcapítulo II.4.

II.3 TEMAS ADICIONALES EN SERIES DE FOURIER.

II.3.1 Funciones ortogonales.

Se dice que una secuencia de funciones $\theta_n(x)$ es ortogonal en el intervalo (a, b) si

$$\int_a^b \theta_m(x) \theta_n(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ \neq 0 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad \text{II.3.1}$$

De hecho, pueden formarse series análogas a las series de Fourier por medio de cualquier conjunto ortogonal. Estas series de Fourier generalizadas son ayuda indispensable en muchas ramas de las ciencias físico - matemáticas.

La fórmula para los coeficientes de Fourier es especialmente simple si la integral II.3.1 tiene el valor 1 para $m = n$. Las funciones $\theta_n(x)$ se llaman entonces normalizadas, y $\{\theta_n(x)\}$ es un conjunto ortonormal.

Si

$$\int_a^b [\theta_n(x)]^2 dx = A_n$$

en II.3.1, puede verse fácilmente que las funciones

$$\phi_n(x) = (A_n)^{-1/2} \theta_n(x)$$

son ortonormales; en otros términos,

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) dx \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ = 1 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad \text{II.3.2}$$

por ejemplo, la secuencia

$$1, \operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x, \operatorname{sen} 2x, \operatorname{cos} 2x, \dots, \quad \text{II.3.3}$$

es ortogonal en $(0, 2\pi)$, aunque no en $(0, \pi)$.

Ahora bien,

$$\int_0^{2\pi} dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{cos}^2 nx \, dx = \pi$$

para $n \geq 1$, el conjunto ortonormal correspondiente al conjunto ortogonal II.3.3 es

$$(2\pi)^{-1/2}, \pi^{-1/2} \operatorname{sen} x, \pi^{-1/2} \operatorname{cos} x, \dots, \pi^{-1/2} \operatorname{sen} nx, \pi^{-1/2} \operatorname{cos} nx, \dots$$

Cuando se integra de 0 a 2π , el producto de dos funciones diferentes en este conjunto da cero, pero al integrar el cuadrado de cada función da 1.

Sea $\langle \phi_n(x) \rangle$ un conjunto ortonormal de funciones en (a, b) , y suponiendo que otra función $f(x)$ se expande en la forma

$$f(x) = C_1 \phi_1(x) + C_2 \phi_2(x) + \dots + C_n \phi_n(x) + \dots \quad \text{II.3.4}$$

Para determinar los coeficientes C_n se multiplica esta expresión por $\phi_n(x)$, obteniendo

$$f(x)\phi_n(x) = C_1 \phi_1(x)\phi_n(x) + \dots + C_n [\phi_n(x)]^2 + \dots$$

Aquí, los términos no escritos implican productos $\phi_m(x)\phi_n(x)$ con $m \neq n$. Si se integra de a hasta b , estos términos desaparecen, y por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x) \, dx = \int_a^b C_n [\phi_n(x)]^2 \, dx = C_n. \quad \text{II.3.5}$$

La fórmula II.3.5 es la fórmula de Euler-Fourier.

los coeficientes C_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ con respecto a $\langle \phi_n(x) \rangle$, y la serie resultante II.3.4 es la serie de Fourier de $f(x)$ con respecto a $\langle \phi_n(x) \rangle$.

Considérese la siguiente ecuación en un intervalo dado a $a \leq x \leq b$,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad \lambda = \text{cte.} \quad \text{II.3.6}$$

o, en forma abreviada,

$$(p y')' + q y = \lambda r y, \quad ' = \frac{d}{dx}.$$

Será conveniente requerir la condición adicional

$$\int_a^b r y^2 dx \neq 0,$$

la cual no admite la solución trivial $y \equiv 0$.

Sea y_m una solución cuando λ toma el valor λ_m , y sea y_n una solución cuando λ tenga un valor diferente, λ_n . Así,

$$(p y_m')' + q y_m = \lambda_m r y_m, \quad \text{II.3.7}$$

$$(p y_n')' + q y_n = \lambda_n r y_n. \quad \text{II.3.8}$$

Si se multiplica II.3.7 por y_n y II.3.8 por y_m , se tiene

$$y_n(p y_m')' - y_m(p y_n')' = \lambda_m r y_m y_n - \lambda_n r y_m y_n \quad \text{II.3.9}$$

restando las expresiones resultantes. Ya que

$$\begin{aligned} [y_n(p y_m') - y_m(p y_n')] &= y_n(p y_m')' + y_n'(p y_m) - y_m(p y_n')' - y_m'(p y_n) \\ &= \text{miembro izquierdo de II.3.9,} \end{aligned}$$

el resultado II.3.9 puede escribirse

$$\frac{d}{dx} [p(x)y_m' - y_m y_n'] = (\lambda_m - \lambda_n) r y_m y_n.$$

Integrando de a a b se llega a la fórmula fundamental

$$p(x)y_m' - y_m y_n' \Big|_a^b = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r y_m y_n dx, \quad \text{II.3.10}$$

Si las condiciones en a y b son tales que el miembro izquierdo en la ec. II.3.10 es cero, puede deducirse que

$$\int_a^b r y_m y_n dx = 0, \quad m \neq n, \quad \text{II.3.11}$$

ya que $\lambda_m \neq \lambda_n$. La relación II.3.11 puede escribirse

$$\int_a^b (\sqrt{r} y_m)(\sqrt{r} y_n) dx = 0, \quad m \neq n,$$

y de aquí, la secuencia $\theta_n(x)$ definida por

$$\theta_n(x) = \sqrt{r} y_n = \sqrt{r(x)} y_n(x), \quad \text{II.3.12}$$

satisface el criterio de ortogonalidad II.3.1. Un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ puede ser obtenido de $\{\theta_n\}$ como se describió previamente.

II.3.2 Convergencia media de las series de Fourier.

Si se intenta aproximar una función $f(x)$ por otra función $p_n(x)$, la cantidad

$$|f(x) - p_n(x)| \quad \text{o} \quad [f(x) - p_n(x)]^2 \quad \text{II.3.13}$$

da una medida del error de aproximación. La secuencia $p_n(x)$ converge a $f(x)$ siempre y cuando las aproximaciones II.3.13

se aproximen a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Estas medidas del error son apropiadas para discutir la convergencia en cualquier punto fijo x . Pero frecuentemente es útil tener una medida de error, la cual se aplique simultáneamente a todo el intervalo de valores de x , $a \leq x \leq b$. Tal medida puede encontrarse integrando II.3.13 de a a b .

$$\int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx \quad \text{o} \quad \int_a^b [f(x) - p_n(x)]^2 dx. \quad \text{II.3.14}$$

Estas expresiones son llamadas error en la media y error cuadrático medio, respectivamente. Si cualquiera de las expresiones II.3.14 se aproxima a cero cuando $n \rightarrow \infty$, se dice que la secuencia $p_n(x)$ converge en la media a $f(x)$ y se puede hablar entonces de convergencia media. [17]

Aun cuando II.3.14 implica una integración que no está presente en II.3.13, para series de Fourier es más fácil discutir el error cuadrático medio y la correspondiente convergencia media, que la convergencia ordinaria. Tal discusión se presenta ahora.

Sea $\phi_n(x)$ un conjunto de funciones ortonormal en $a \leq x \leq b$, tal que, como en la sección anterior,

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx \quad \begin{cases} = 0 & \text{para } m \neq n, \\ = 1 & \text{para } m = n. \end{cases} \quad \text{II.3.15}$$

Se busca aproximar $f(x)$ por una combinación lineal de $\phi_n(x)$,

$$p_n(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x).$$

de manera que el error cuadrático medio sea mínimo^o:

$$E = \int_a^b [f - (a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n)]^2 dx = \min. \quad \text{II.3.16}$$

Desarrollando el cuadrado, se ve que II.3.16 lleva a

$$\int_a^b f^2 dx - 2 \int_a^b f(a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n) dx + \int_a^b (a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n)^2 dx \quad \text{II.3.17}$$

Si los coeficientes de Fourier de f relativos a ϕ_k se denotan por

$$C_k = \int_a^b f\phi_k dx,$$

entonces la segunda integral en II.3.17 es

$$\int_a^b f(a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n) dx = a_1C_1 + a_2C_2 + \dots + a_nC_n.$$

La tercera integral en II.3.17 puede escribirse

$$\begin{aligned} & \int_a^b (a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n)(a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n) dx \\ &= \int_a^b (a_1^2\phi_1^2 + a_2^2\phi_2^2 + \dots + a_n^2\phi_n^2 + \dots) dx \\ &= a_1^2 + \dots + a_n^2. \end{aligned}$$

donde el segundo grupo de términos "+ ..." implica productos cruzados $\phi_i\phi_j$, con $i \neq j$. Por II.3.15 estos términos integran a cero, y la expresión se reduce al valor

^o Se usó f y ϕ_n para abreviar $f(x)$ y $\phi_n(x)$, respectivamente. Se supone que f y ϕ_n son integrables en $a \leq x \leq b$. Si las integrales son impropias, se requiere la convergencia de $\int_a^b f^2 dx$ y $\int_a^b \phi_n^2 dx$.

indicado.

De aquí, II.3.17 lleva a

$$E = \int_a^b f^2 dx - 2 \sum_{k=1}^n a_k C_k + \sum_{k=1}^n a_k^2 \quad \text{II.3.18}$$

para el error cuadrático medio en la aproximación.

Considerando que

$$-2 a_k C_k + a_k^2 = -C_k^2 + (a_k - C_k)^2,$$

el error E en II.3.18 es también igual a

$$E = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n C_k^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - C_k)^2. \quad \text{II.3.19}$$

y se establece un teorema muy importante:

TEOREMA II.3.1. Sea ϕ_n un conjunto de funciones normal y ortogonal, entonces el error cuadrático medio II.3.18 puede escribirse en la forma II.3.19, donde C_k son los coeficientes de Fourier de f relativos a ϕ_k .

Volviendo a las dos expresiones II.3.18 y II.3.17, pueden obtenerse teoremas interesantes y significativos. En primer lugar, los términos $(a_k - C_k)^2$ en II.3.19 son positivos, a menos que $a_k = C_k$, en cuyo caso son cero. De aquí, la elección de a_k que hace mínimo a E es obviamente $a_k = C_k$, y se tiene el siguiente

COROLARIO II.3.1.1 Las sumas parciales de la serie de Fourier

$$C_1\phi_1 + \dots + C_n\phi_n, \quad C_k = \int_a^b f \phi_k dx$$

dan un pequeño error cuadrático medio $\int_a^b (f - p_n)^2 dx$ que está dado por cualquier otra combinación lineal

$$p_n = a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n.$$

Haciendo $a_k = C_k$ en II.3.18, puede verse que el mínimo valor de error es

$$E_{\min} = \int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n C_k^2 \quad \text{II.3.20}$$

Ahora, la expresión II.3.18 muestra que $E \geq 0$, porque el integrando en II.3.18, siendo un cuadrado, es no negativo. Ya que $E \geq 0$ para todas las elecciones de a_k , el mínimo de E (el cual se incrementa cuando $a_k = C_k$) es también ≥ 0 .

La expresión II.3.20 es entonces

$$\int_a^b f^2 dx - \sum_{k=1}^n C_k^2 \geq 0 \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^n C_k^2 \leq \int_a^b f^2 dx.$$

Haciendo además $n \rightarrow \infty$, se obtiene*

COROLARIO II.3.1.2. Si $C_k = \int_a^b f \phi_k dx$ son los coeficientes de Fourier de f relativos al conjunto ortonormal ϕ_n , entonces la serie $\sum C_k^2$ converge y satisface la llamada *desigualdad de Bessel*.

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad \text{II.3.21}$$

* Ya que $C_k^2 \geq 0$, la serie $\sum_{k=1}^n C_k^2$ es no decreciente y tiene límite.

Debido a que el término general de una serie convergente debe aproximarse a cero [22], se puede deducir lo siguiente, del corolario II.3.1.2:

COROLARIO II.3.1.3. Los coeficientes de Fourier $C_n = \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx$ tienden a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Para aplicaciones, es importante conocer si el error cuadrático medio se aproxima o no a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Evidentemente el error se aproxima a cero, para alguna elección de los $\phi_n(x)$, sólo si el error mínimo II.3.20 lo hace.

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en II.3.20 se obtiene la llamada *igualdad de Parseval*^{*}

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad \text{II.3.22}$$

En otras palabras, la serie de Fourier converge a f en el sentido de cuadrático medio si y sólo si II.3.22 se cumple. Si esto sucede para toda elección de f , se dice que el conjunto $\phi_n(x)$ es cerrado. Un conjunto cerrado, entonces, es un conjunto que puede ser usado para obtener una aproximación cuadrática media de funciones arbitrarias. Puede mostrarse que las funciones trigonométricas $\cos nx$ y $\sin nx$ son cerradas en $0 \leq x \leq 2\pi$, aunque la prueba es demasiado larga para incluirse.[#]

Se dice que un conjunto $\phi_n(x)$ es completo si no hay

^{*} En la sección II.4.4 se hablará del teorema de Parseval.

[#] Puede encontrarse en la referencia [23].

función no trivial^{*} $f(x)$ la cual sea ortogonal a todos los ϕ_k . Esto es, el conjunto es completo si

$$C_k = \int_a^b f(x)\phi_k(x)dx = 0 \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{II.3.23}$$

implica que

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0. \quad \text{II.3.24}$$

Siempre y cuando II.3.22 se cumpla, II.3.23 lleva a II.3.24 enseguida. De aquí, se tiene:

CONOLARIO II.3.1.4. Todo conjunto cerrado es completo.^{*}

II.3.3 Particularidad de la convergencia de la serie de Fourier.

Ahora se obtendrá una fórmula explícita para la diferencia entre una función y la n -ésima suma parcial de su serie (trigonométrica) de Fourier.

Si $f(x)$ es una función limitada integrable de período 2π , la n -ésima suma parcial de su serie de Fourier es

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{II.3.25}$$

donde los coeficientes están dados por

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \quad \text{II.3.26}$$

^{*} En la teoría de la convergencia media $f(x)$ se considera como trivial

si $f(x) = 0$ para valores de x tales que $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 0$.

^{*} La inversa también se cumple: Todo conjunto completo es cerrado [22]

Sustituyendo II.3.26 en la serie II.3.25, se obtiene

$$\begin{aligned} S_{n\omega} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt. \end{aligned}$$

Si se define el llamado núcleo de Dirichlet por

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku, \quad \text{II.3.27}$$

el resultado anterior toma la forma más simple

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt. \quad \text{II.3.28}$$

Ahora, haciendo $u = t-x$ en II.3.28,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du. \quad \text{II.3.29}$$

$D_n(u)$ tiene período 2π por inspección de la ec. II.3.27, y $f(x)$ tiene también período 2π . De aquí, la integral de $f(x+u)D_n(u)$ sobre cualquier intervalo de longitud 2π es la misma que la integral sobre cualquier otro intervalo de longitud 2π , y II.3.29 puede ser reemplazada por

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du. \quad \text{II.3.30}$$

Ya que $D_n(-u) = D_n(u)$ por II.3.27, u se puede reemplazar por $-u$ en II.3.30 para obtener la forma alternativa

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int f(x-u) D_n(u) du. \quad \text{II.3.31}$$

La suma de II.3.30 y II.3.31 produce

$$2S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] D_n(u) du.$$

Debido a que el integrando es una función par de u , la integral de 0 a π es la mitad de la integral de $-\pi$ a π , y de este modo se establece que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] D_n(u) du. \quad \text{II.3.32}$$

Para presentar $f(x)$ en las consideraciones, se puede observar que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(u) du, \quad \text{II.3.33}$$

ya que los términos con $\cos ku$ en II.3.27 integran a cero.

Multiplicando II.3.33 por $2f(x)$ (lo cual es constante con respecto a la variable de integración u), se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2f(x) D_n(u) du. \quad \text{II.3.34}$$

Substrayendo II.3.34 de II.3.32 se obtiene la fórmula fundamental

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - 2f(x) + f(x-u)] D_n(u) du, \quad \text{II.3.35}$$

la cual se usará para estudiar la convergencia de $S_n(x)$ a $f(x)$.

Se dice que $f(x)$ es seccionalmente suave, si la gráfica de $f(x)$ consiste de un número finito de curvas, en cada una de las cuales, $f'(x)$ existe. Se supone también

que la derivada existe en los puntos finales de tales curvas, en el sentido

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \quad \text{o} \quad \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{f(x-u) - f(x)}{-u}, \quad \text{II.3.36}$$

donde $u \rightarrow 0^+$ significa que $u \rightarrow 0$ a través de valores positivos. Tal función puede tener un número finito de discontinuidades. Sin embargo, ya que los coeficientes de Fourier de $f(x)$ no se alteran si $f(x)$ es redefinida en un número finito de puntos, se puede suponer que

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} \quad \text{II.3.37}$$

en cualquier punto x , sea $f(x)$ continua o no en x [9].

Estos preliminares llevan al siguiente

TEOREMA II.3.2. Si $f(x)$ es periódica, de periodo 2π , es seccionalmente suave y está definida en puntos de discontinuidad por la ec. II.3.37, entonces la serie de Fourier para $f(x)$ converge a $f(x)$ en todo valor de x .

Del **COROLARIO II.3.1.3**^{*} se puede continuar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \operatorname{sen} (n + \frac{1}{2}) u \, du = 0.$$

Del mismo modo se puede observar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \operatorname{sen} (n + \frac{1}{2}) u \, du = 0.$$

^{*} $\operatorname{sen} (n + \frac{1}{2}) u = \operatorname{sen} nu \cos \frac{1}{2} u + \cos nu \operatorname{sen} \frac{1}{2} u$. El **COROLARIO II.3.1.3** se aplica a cada término.

y por lo tanto la integral que representa $S_n(x) - f(x)$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Esto muestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$, y completa la prueba del teorema.

II.3.4 Integración y diferenciación de las series de Fourier.

Sea $f(x)$ seccionalmente continua en $[-\pi, \pi]^*$, entonces la función

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad \text{II.3.38}$$

es continua y seccionalmente suave. Además, $F(x)$ permanece continua si cuando se define para tener periodo 2π , $F(-\pi) = F(\pi)$.

Ya que en II.3.38 $F(-\pi) = 0$, la última condición se reduce a

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \pi a_0 = 0 \quad \text{II.3.39}$$

donde $1/2 a_0$ es el primer coeficiente de Fourier de $f(x)$.

Aplicando el TEOREMA II.3.2, se puede deducir que la serie de Fourier para la función periódica $F(x)$ converge a $F(x)$ para todo valor de x .

Se mostrará que la serie de Fourier para $F(x)$ es obtenida integrando la serie para $f(x)$. Si $n \geq 1$, el coeficiente coseno de Fourier, A_n , de $F(x)$ satisface

* Esto quiere decir que el intervalo $[-\pi, \pi]$ puede ser dividido por puntos x_1, x_2, \dots, x_n en un número finito de intervalos, en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua. También $f(x)$ debe tener un límite cuando $x \rightarrow x_k^+$ así como cuando $x \rightarrow x_k^-$ en el intervalo.

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} F'(x) \, dx$$

cuando se integra por partes. Ahora, ya que $F(-\pi) = F(\pi) = 0$, la parte integrada se anula, y como $F'(x) = f(x)$, la expresión queda

$$\pi A_n = -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f(x) \, dx = -\pi \frac{b_n}{n}.$$

De la misma forma $B_n = a_n/n$, y también

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) \, dx. \quad \text{II.3.40}$$

Estas consideraciones establecen el siguiente

TEOREMA II.3.3. Sea $f(x)$ una función de período 2π , la cual tiene una serie de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad \text{II.3.41}$$

Entonces, con A_0 dado por II.3.40,

$$\int_{-\pi}^x f(t) \, dt = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right). \quad \text{II.3.42}$$

y esta ecuación se verifica para toda x , aun si la serie de Fourier II.3.41 no converge. Además, la serie II.3.42 es de hecho la serie de Fourier de la función en el miembro izquierdo.

En el caso en el que $a_0 \neq 0$, tal que la serie de

Fourier para $f(x)$ sea $1/2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
se aplica el TEOREMA II.3.3 a $f(x) - 1/2 a_0$.

En vista de que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\beta} f(x) dx - \int_{-\pi}^{\alpha} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

para todo α y β , se puede deducir por el TEOREMA II.3.3, que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (1/2 a_0) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

II.3.43

Este resultado puede resumirse como sigue

TEOREMA II.3.4. Cualquier serie de Fourier (sea convergente o no) puede integrarse término por término entre cualquier límite. La serie integrada converge a la integral de la función periódica correspondiente a la serie original.

Para poder diferenciar una serie de Fourier, es preciso que la función periódica que genere la serie tenga derivada para todo valor de x . Por otra parte, cuando esta condición se cumple, normalmente se puede diferenciar, como se demuestra con el siguiente

TEOREMA II.3.5. Tenga $f(x)$ período 2π , y supóngase también que $f'(x)$ existe para todo valor de x , sin excepción. Si $f'(x)$ es continua*, la serie de Fourier para $f'(x)$ puede obtenerse diferenciando la serie de Fourier para $f(x)$. Si $f'(x)$ es continua y tiene solamente un número finito de máximos y mínimos en $[-\pi, \pi]$, la serie diferenciada converge

* Puede demostrarse que si $f'(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet, entonces $f'(x)$ es continua necesariamente [5].

de hecho a $f'(x)$ para todo valor de x .

La aplicación repetida del teorema da el resultado correspondiente para derivadas superiores. Por ejemplo, la serie para $f''(x)$ puede encontrarse diferenciando la serie para $f(x)$ dos veces, siempre que $f''(x)$ satisfaga las condiciones del teorema.

El TEOREMA II.3.3 se debe establecer aplicando el TEOREMA II.3.3 a la función $f'(x)$. Siendo continua $f'(x)$ tiene una serie de Fourier, y el término constante a_0 puede encontrarse de

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0.$$

Así, la serie para $f'(x)$ tiene la forma II.3.41, a saber,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad \text{II.3.44}$$

Como consecuencia del TEOREMA II.3.3, la serie de Fourier para la función

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) dt = f(x) - f(-\pi)$$

tiene la forma II.3.42, y por lo tanto la serie para $f(x)$ es

$$f(-\pi) + \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right). \quad \text{II.3.45}$$

Puede observarse que la diferenciación de II.3.45 da II.3.44. En otras palabras, la serie de Fourier para $f'(x)$ puede encontrarse diferenciando la serie para $f(x)$, y ésta es la afirmación principal del TEOREMA II.3.3.

Ya que la serie diferenciada es una serie de Fourier, su convergencia puede probarse por métodos usuales. En particular, si $f'(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet y es continua, entonces la serie de Fourier para $f'(x)$ converge a $f'(x)$.

De este modo queda establecido el TEOREMA II.3.5.

Los métodos anteriores llevan a algunas desigualdades importantes para los coeficientes de Fourier. Cuando una función $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet, puede mostrarse [21] que los coeficientes de Fourier tienen el orden de magnitud $1/n$. Esto es, existe una constante M dependiente de $f(x)$ pero no de n , tal que

$$|a_n| \leq \frac{M}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n}. \quad \text{II.3.46}$$

Ahora, si los coeficientes de Fourier de $f'(x)$ en II.3.44 satisfacen tales condiciones, entonces II.3.46 muestra que los coeficientes de $f(x)$ están limitados por M/n^2 .

Más generalmente, se puede empezar con $f^{(k)}(x)$ e integrar k veces. Las constantes de integración se anulan como en la derivación de II.3.44, y se obtiene:

TEOREMA II.3.6. Tenga $f(x)$ periodo 2π , y suponiendo que la k -ésima derivada de $f(x)$ satisface las condiciones de Dirichlet en $[-\pi, \pi]$. Entonces los coeficientes de Fourier de $f(x)$ satisfacen las desigualdades

$$|a_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{M}{n^{k+1}},$$

donde la constante M depende de $f(x)$, pero no de n .

II.4 LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

II.4.1 Conceptos básicos.

Lo que se ha tratado hasta este punto en este capítulo se refiere a funciones periódicas. Debido a que muchos problemas prácticos involucran funciones no periódicas, se hablará ahora de un método del análisis de Fourier que incluye funciones arbitrarias.

En la sección II.2.4 se definió a la transformada de Fourier con la ec. II.2.28. Renombrando variables (x por t y ω por Ω), se define a la función $F(\Omega)$ a la que se conoce como *transformada de Fourier de $f(t)$* , y el operador de integración se simboliza frecuentemente por \mathcal{F} ; esto es

$$F(\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad \text{II.4.1}$$

El operador inverso \mathcal{F}^{-1} se obtiene cambiando el signo a t en la exponencial, de tal modo que la ecuación anterior pueda escribirse

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega, \quad \text{II.4.2}$$

y $f(t)$ se denomina *transformada inversa de Fourier de $F(\Omega)$* . A las ecuaciones II.4.1 y II.4.2 también se les conoce como *par de transformadas de Fourier*.

Se puede observar que la transformada de Fourier de

* Se cambiaron los nombres de las variables para hacerlas coincidir con la frecuencia circular Ω y el tiempo t , y visualizar mejor la relación con la dinámica estructural en los capítulos posteriores.

$f(t)$ está bien definida si f es continua por tramos en cada intervalo finito y f es absolutamente integrable de $-\infty$ a ∞ , esto es, si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ es finita.

Para la representación de f por medio de su integral de Fourier, es suficiente que f sea suave por tramos en cada intervalo finito e igual al valor medio en los saltos. En otros términos, la condición para que $F(\Omega)$ exista, está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \quad \text{II.4.3}$$

lo cual se demuestra de la siguiente manera:

Puesto que $e^{-i\Omega t} = \cos \Omega t - i \sin \Omega t$
 de donde $|e^{-i\Omega t}| = \sqrt{\cos^2 \Omega t + \sin^2 \Omega t} = 1$
 $|f(t) e^{-i\Omega t}| = |f(t)|,$

se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-i\Omega t}| dt$$

es finita, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt \text{ es finita, es decir, } \mathcal{F}\{f(t)\} \text{ existe.}$$

La ec. II.4.3 es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de $\mathcal{F}\{f(t)\}$; algunas funciones que no satisfacen II.4.3 pueden también tener transformada de Fourier; éstas funciones se estudiarán más adelante.

En general, la función $F(\Omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ es compleja, es decir, puede escribirse

$$F(\Omega) = R(\Omega) + i I(\Omega),$$

donde $R(\Omega)$ e $I(\Omega)$ son funciones reales. Además

$$F(\Omega) = |F(\Omega)| e^{i\phi(\Omega)}$$

donde $|F(\Omega)|$ y $\phi(\Omega)$ son también reales y se conocen como espectro de magnitud y espectro de fase de $f(t)$, respectivamente.

Si $f(t)$ es real, entonces, mediante la identidad

$$e^{-i\Omega t} = \cos \Omega t - i \sin \Omega t,$$

es posible expresar la relación II.4.1 como sigue,

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt \\ &= R(\Omega) + i I(\Omega). \end{aligned} \quad \text{II.4.4}$$

Igualando las partes real e imaginaria, se tiene

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt, \quad \text{II.4.5}$$

$$I(\Omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt. \quad \text{II.4.6}$$

Puede demostrarse que $R(\Omega)$ e $I(\Omega)$ son funciones par e impar de Ω , respectivamente,

$$R(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\Omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt = R(\Omega),$$

$$I(-\Omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\Omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt = - I(\Omega).$$

Además,

$$F(-\Omega) = R(-\Omega) + i I(-\Omega) = R(\Omega) - i I(\Omega) = F^M(\Omega),$$

donde $F^M(\Omega)$ denota al conjugado complejo de $F(\Omega)$.

De lo anterior puede concluirse que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es real, entonces $f(t)$ es una función par de t ; y que si la transformada de Fourier de una función real $f(t)$ es imaginaria pura, entonces $f(t)$ es una función impar de t .

Si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$ se puede definir $f(t)$ para valores negativos de t por la ecuación $f(-t) = f(t)$, por lo que la función resultante es par. En este caso se supone un comportamiento conveniente de $f(t)$ para valores negativos del tiempo, pero al interpretar los resultados debe tenerse presente que $f(t)$ está definida sólo para $t > 0$.

Si ahora se define [16]

$$\mathcal{F}_c\{f(t)\} = F_c(\Omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \Omega t \, dt, \quad \text{II.4.7}$$

entonces

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(\Omega)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\Omega) \cos \Omega t \, d\Omega \quad \text{II.4.8}$$

donde $F_c(\Omega)$ se conoce como *transformada coseno de Fourier* de $f(t)$, y el par de transformadas coseno de Fourier está dado por las ecs. II.4.7 y II.4.8.

De la misma manera, si $f(t)$ está definida sólo para $0 < t < \infty$, se puede definir también $f(t)$ para valores negativos de t por la ecuación $f(-t) = -f(t)$, por lo que la función resultante es impar.

Si se define

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F_s(\Omega) = \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \Omega t \, dt, \quad \text{II.4.9}$$

entonces

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_s(\Omega)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\Omega) \operatorname{sen} \Omega t \, d\Omega \quad \text{II.4.10}$$

en donde $F_s(\Omega)$ se denomina *transformada seno de Fourier de $f(t)$* , y las ecs. II.4.9 y II.4.10 son el par de transformadas seno de Fourier.

La interpretación que se dará a la transformada de Fourier en este trabajo es la siguiente:

Supóngase que cualquier función f , tiene dos modos equivalentes de representación, uno en el dominio del tiempo, $f(t)$, y otro en el dominio de la frecuencia, $F(\Omega)$. Entonces la ec. II.4.1 transforma la función $f(t)$, en el dominio del tiempo, a su función equivalente $F(\Omega)$, en el dominio de la frecuencia, y la ec. II.4.2 invierte el proceso. La transformada de Fourier analiza la función del tiempo en un espectro de frecuencia y la transformada inversa de Fourier sintetiza el espectro de frecuencia para obtener nuevamente la función en términos del tiempo.

Por último, es conveniente mencionar que en ocasiones se define a la transformada de Fourier en otra forma [17], que difiere de II.4.1 por factores de escala, de la siguiente manera

La transformada de Fourier de la función $f(t)$ se define

$$F(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} \, dt, \quad \text{II.4.11a}$$

y la transformada inversa de Fourier correspondiente se vuelve

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad \text{II.4.2bis}$$

II.4.2 Propiedades de la transformada de Fourier.

A cada función adecuada $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, la transformada de Fourier le asocia una función $F(\Omega)$, $-\infty < \Omega < \infty$. Usualmente $f(t)$ tiene valores reales, pero normalmente $F(\Omega)$ tiene valores complejos; la teoría también cubre el caso en el que $f(t)$ tenga valores complejos [17].

A continuación se presentan algunas de las propiedades de la transformada de Fourier.

a) LINEALIDAD. Si $F_1(\Omega) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\Omega) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$, y a_1 y a_2 son dos constantes arbitrarias, entonces

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\Omega) + a_2 F_2(\Omega). \quad \text{II.4.11}$$

Esto se verifica de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-i\Omega t} dt \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\Omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\Omega t} dt \\ &= a_1 F_1(\Omega) + a_2 F_2(\Omega). \end{aligned}$$

b) ESCALONAMIENTO. Si a es una constante real y $F(\Omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\Omega/a).$$

Lo cual se demuestra así

Para $a > 0$,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\Omega t} dt.$$

Sea $at = x$; entonces,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\Omega/a)x} dx.$$

Como la variable de integración es muda, puede representársele con cualquier símbolo, de este modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\Omega/a)t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} F(\Omega/a). \end{aligned} \quad \text{II.4.13}$$

Para $a < 0$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\Omega t} dt.$$

Si se tiene de nuevo $at = x$, entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-i(\Omega/a)x} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\Omega/a)t} dt \\ &= \frac{1}{|a|} F(\Omega/a). \end{aligned} \quad \text{II.4.14}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\Omega/a).$$

La función $f(at)$ representa la función $f(t)$ contraída en la escala del tiempo por un factor a . Análogamente la función $F(\Omega/a)$ representa la función $F(\Omega)$

expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor a . La propiedad de escalonamiento, por consiguiente, afirma que la contracción en el dominio del tiempo es equivalente a la expansión en el dominio de la frecuencia, y viceversa.

c) Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\Omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\Omega) \quad \text{II.4.15}$$

Lo cual se prueba de la siguiente forma: por la ec. II.4.12, se tiene

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F(\Omega/a).$$

Haciendo $a = -1$,

$$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-\Omega).$$

d) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO. Si $F(\Omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces,

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\Omega)e^{-i\Omega t_0}. \quad \text{II.4.16}$$

Esto se demuestra así: la transformada de Fourier requerida es

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-i\Omega t} dt.$$

Haciendo $t - t_0 = x$, $dt = dx$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\Omega(t_0+x)} dx \\ &= e^{-i\Omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\Omega x} dx \\ &= e^{-i\Omega t_0} F(\Omega). \end{aligned}$$

e) DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA. Si Ω_0 es una constante real y $F(\Omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i\Omega_0 t}\} = F(\Omega - \Omega_0). \quad \text{II.4.17}$$

Lo cual se verifica de la siguiente forma: la transformada de Fourier requerida es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) e^{i\Omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) e^{i\Omega_0 t}] e^{-i\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\Omega - \Omega_0)t} dt \\ &= F(\Omega - \Omega_0).\end{aligned}$$

f) SIMETRÍA. Si $F(\Omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\Omega). \quad \text{II.4.18}$$

Recordando la ec. II.4.2, se puede escribir,

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad \text{II.4.19}$$

Cambiando t por $-t$ en esta expresión,

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad \text{II.4.20}$$

Ahora, intercambiando t y Ω en la ec. II.4.20, se obtiene

$$2\pi f(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\Omega t} dt = \mathcal{F}\{F(t)\}. \quad \text{II.4.21}$$

g) TRANSFORMADA DE LA DERIVADA. Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\Omega)$ y $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$, entonces

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\Omega F(\Omega) = i\Omega \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad \text{II.4.22}$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\Omega t} dt = f(t) e^{-i\Omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\Omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad \text{II.4.23}$$

Puesto que $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm \infty$, se tiene que

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\Omega t} dt = i\Omega F(\Omega) = i\Omega \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Se acaba de demostrar que la diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de la transformada de Fourier por $i\Omega$, dado que $f(t) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \pm \infty$.

También se observa que si $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades súbitas, entonces $f'(t)$ contiene impulsos.

Mediante la aplicación repetida de II.4.22, se obtiene

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\Omega)^n F(\Omega) = (i\Omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad n=1,2,\dots \quad \text{II.4.24}$$

Esta última ecuación no garantiza la existencia de la transformada de Fourier de $f^{(n)}(t)$, sólo indica que si la transformada existe, entonces está dada por $(i\Omega)^n F(\Omega)$.

h) TRANSFORMADA DE LA INTEGRAL. Si $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\Omega)$, con $\Omega \neq 0$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0, \quad \text{II.4.25}$$

entonces,

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x) dx\right] = \frac{1}{i\Omega} F(\Omega) = \frac{1}{i\Omega} \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad \text{II.4.26}$$

Esto se puede demostrar así, sea la función ϕ tal que

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx; \quad \text{II.4.27}$$

entonces, $\phi'(t) = f(t)$. De donde, si $\mathcal{F}[\phi(t)] = \delta(\omega)$, entonces, de II.4.22, se tiene

$$\mathcal{F}[\phi'(t)] = \mathcal{F}[f(t)] = i\omega \delta(\omega) \quad \text{II.4.28}$$

con tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = F(0) = 0. \quad \text{II.4.29}$$

Por consiguiente,

$$\delta(\omega) = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{i\omega} F(\omega), \quad \text{II.4.30}$$

esto es,

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}[f(t)].$$

La ec. II.4.28 se aplica sólo cuando $\omega \neq 0$. Cuando $\omega = 0$,

$$\mathcal{F}[\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt. \quad \text{II.4.31}$$

Por otra parte, cuando $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \neq 0$, se tiene

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx\right] = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega). \quad (18)$$

donde δ es la función impulso unitario.*

II.4.3 Teorema de convolución.

Para $f_1(t)$ y $f_2(t)$ definidas en $-\infty < t < \infty$, se define la convolución $f_1 * f_2 = f$ por la ecuación

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \quad \text{II.4.33}$$

* $\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y se cumple que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, x > 0$.

y se expresa simbólicamente como

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t). \quad \text{II.4.34}$$

Esta tiene sentido si las funciones f_1 y f_2 son continuas por tramos, una de ellas es absolutamente integrable en $-\infty < t < \infty$, y la otra está acotada.

Si $f_1(t) = 0$ y $f_2(t) = 0$ para $t < 0$, entonces la ec. II.4.33 se reduce a

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x) dx. \quad \text{II.4.35}$$

La importancia de la operación II.4.33 descansa en el siguiente

TEOREMA DE CONVOLUCION. Sean f_1 , f_2 , $|f_1|^2$ y $|f_2|^2$ integrables, y sean todas las integrales infinitas, interpretado esto en el sentido de la convergencia media. Entonces el producto de las transformadas es igual a la transformada de la convolución [22].

En símbolos,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [f_1(t) * f_2(t)] &= \mathcal{F} [f_1(t)] \mathcal{F} [f_2(t)] & \text{II.4.36} \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega). \end{aligned}$$

Aunque una prueba completa requiere conocimiento de la integral de Lebesgue y de la convergencia media, ésta propiedad puede entenderse como sigue: Se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-x) e^{-i\omega t} dt \right] f_1(x) dx, \end{aligned}$$

asumiendo que el orden de la integración puede ser invertido.

Si se hace un cambio de variable en la integral que involucra a dt , con $z = t - x$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) e^{-i(z+x)\Omega} dz \right] f_1(x) dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\Omega x} dx \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(z) e^{-i\Omega z} dz \right],$$

y este resultado es $\mathcal{F}\{f_1\} \mathcal{F}\{f_2\}$.

La convolución obedece otras reglas formales, algunas de las cuales se presentan a continuación sin detallar la demostración de cada una de ellas [18].

a) LEY CONMUTATIVA.

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad \text{II. 4. 37}$$

b) LEY ASOCIATIVA.

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad \text{II. 4. 38}$$

c) La convolución de una función $f(t)$ con una función impulso unitario, $\delta(t)$, conduce a la misma función $f(t)$.

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad \text{II. 4. 39}$$

d) TEOREMA DE CONVOLUCION EN EL TIEMPO.

Si $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\Omega)$ y $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\Omega)$, entonces

$$\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\Omega) F_2(\Omega). \quad \text{II. 4. 40}$$

e) TEOREMA DE CONVOLUCION EN LA FRECUENCIA.

Si $\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\Omega)\} = f_1(t)$ y $\mathcal{F}^{-1}\{F_2(\Omega)\} = f_2(t)$, entonces

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_1(\Omega) F_2(\Omega)\} = 2\pi f_1(t) f_2(t), \quad \text{II. 4. 41}$$

o también,

$$\mathcal{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\Omega) F_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\Omega - y) dy.$$

II. 4. 42

II.4.4 Teorema de Parseval.

El teorema de Parseval afirma que si la transformada de Fourier de $f(t)$ es $FC(\omega)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |FC(\omega)|^2 d\omega. \quad \text{II.4.43}$$

La demostración a este teorema puede encontrarse en las referencias [8,9,16,20], y se omite en este trabajo.

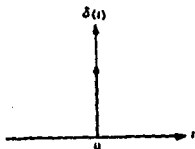
II.4.5 Transformada de Fourier de funciones especiales.

En la sección II.4.1 se vio que la condición suficiente para la existencia de la transformada de Fourier de una función está dada por la ec. II.4.3, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad \text{II.4.44}$$

Sin embargo, algunas funciones no satisfacen la condición anterior. A continuación se presentarán algunas de estas funciones, sin detallar las demostraciones correspondientes, las que pueden encontrarse en las referencias [8,9,16].

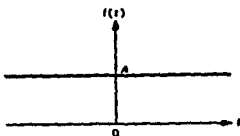
a) Transformada de Fourier de la función impulso unitario $\delta(t)$ mostrada en la *fig. II.4.1*



$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1. \quad \text{II.4.45}$$

fig. II.4.1

b) Transformada de Fourier de una constante (fig. 11.4.2)



$$\mathcal{F}\{A\} = 2A\pi\delta(\Omega) \quad \text{II.4.45}$$

fig. 11.4.2

c) Transformada de Fourier de la función escalón unitario $v(t)$, definida por

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad \text{II.4.47}$$

(La función no está definida para $t = 0$)

$$\mathcal{F}\{v(t)\} = \pi\delta(\Omega) + 1/j\Omega. \quad \text{II.4.48}$$

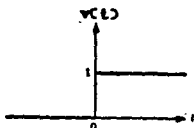


fig. 11.4.3

d) Transformada de Fourier de una función periódica $f(t)$ con período T .

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\Omega - n\Omega_0) \quad \text{II.4.49}$$

donde $\Omega_0 = 2\pi/T$ y C_n son los coeficientes de Fourier de $f(t)$.

e) Transformada de Fourier de funciones generalizadas.

En el apéndice A se encuentra una tabla de transformadas de Fourier de algunas de estas funciones.

C A P I T U L O I I I

L A T R A N S F O R M A D A R A P I D A D E F O U R I E R

The term "ubiquitous" means to be everywhere at the same time. Because of the great variety of seemingly unrelated topics which can be effectively dealt with using the Fourier transform, the modifier ubiquitous is certainly appropriate.

E. O. Brigham, 1974.

III LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER.

III.1 INTRODUCCION.

En el primer capítulo se estudió la manera como se puede obtener la respuesta de un sistema dinámico, haciendo un análisis a través del dominio del tiempo. Ahora bien, algunas veces, en especial cuando se trata de excitaciones arbitrarias, es preferible que tal análisis se haga a través del dominio de la frecuencia. Sobre esto se hablará con mayor profundidad en el capítulo IV, pero es conveniente mencionar en esta parte, que para realizar este último tipo de análisis, es necesario utilizar el par de transformadas de Fourier, que como se vio en la sección II.4.1, permite transformar una función definida en el tiempo a otra equivalente, pero en términos de la frecuencia.

La aplicación formal de este procedimiento está limitada a los casos para los cuales se dispone de las transformadas de Fourier de las funciones de la excitación aplicada, pero aun en tales casos, la evaluación de las integrales resultantes puede convertirse en un proceso tedioso.

De esta manera, para poder hacer un uso práctico del método, es necesario formularlo en términos de un procedimiento de análisis numérico. Esta formulación numérica puede dividirse convenientemente en dos fases:

(1) Derivación de las expresiones de la transformada discreta de Fourier (TDF) que correspondan a las expresiones integrales de las ecuaciones II.4.1 y II.4.2.

(i) Desarrollo de un método numérico eficiente que permita evaluar las transformadas discretas de Fourier. Este último es el método de la transformada rápida de Fourier (the radix-two fast Fourier transform, FFT), algoritmo publicado en abril de 1965 por J. W. Cooley y J. W. Tukey.*

Cada una de estas dos fases será discutida en las secciones siguientes.

III.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

III.2.1 Conceptos básicos.

Muchas veces es necesario llevar a cabo medidas experimentales digitalmente, por esta razón es conveniente que una función típica, $f(t)$, pueda muestrearse en una serie de tiempos regularmente espaciados, como se muestra en la *fig. III.2.1*. Si el intervalo muestral, Δt , es constante, entonces el valor discreto de $f(t)$ en el tiempo $t = r\Delta t$, puede escribirse como f_r , y la secuencia $\{f_r\}$, $r = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, puede llamarse serie de tiempo discreta.

* An algorithm for the machine computation of complex Fourier series [8,18].

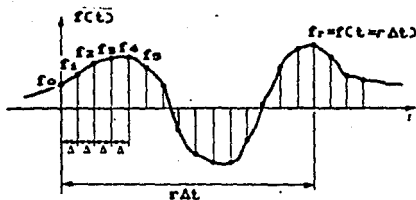


fig.III.2.1 Muestras de una función continua en el tiempo en intervalos regulares.

Según se estudió en el capítulo II, si una función $f(t)$ es periódica con periodo T , entonces es posible escribirla en la forma de la ec.II.2.13. Renombrando variables, se tiene

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sen \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad \text{III.2.1}$$

donde los coeficientes se obtienen de las expresiones

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt ,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sen \frac{2\pi n t}{T} dt . \quad \text{III.2.2}$$

Utilizando notación compleja, las ecs.III.2.2 pueden combinarse en una sola; definiendo

$$F_n = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2} , \quad \text{III.2.3}$$

lo cual es equivalente al coeficiente C_n de la sección II.2.4, y recordando la fórmula de Euler,

$e^{-i2\pi nt/T} = \cos \frac{2\pi nt}{T} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T}$, se obtiene

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi nt/T} dt, \quad \text{III.2.4}$$

la cual puede compararse con la ec. II.2.24.

Si se desea representar ahora a la serie continua, $f(t)$, por una serie discreta $\{f_r\}$, $r=0,1,2,\dots,(N-1)$, será necesario disponer de muestras igualmente espaciadas, haciendo $t = r\Delta t$ y $\Delta t = T/N$. En este caso, la integral III.2.4 puede escribirse en la forma aproximada

$$F_n = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i(2\pi n/T)(r\Delta t)} \Delta t. \quad \text{III.2.5}$$

Puede asumirse que el área total bajo la curva de la *fig. III.2.2* está dada, aproximadamente, por la suma de todos los rectángulos sombreados.

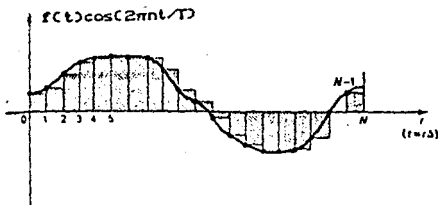


fig. III.2.2 Aproximación que implica el cálculo de los coeficientes de Fourier de una serie discreta.

Sustituyendo $T = N\Delta t$ en III.2.6, se obtiene

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi nr/N} \quad \text{III.2.6}$$

lo cual puede tomarse como una forma aproximada para calcular los coeficientes de la serie de Fourier, ec. III.2.1.

Aunque la ec. III.2.6 no provee información completa para obtener la serie continua $f(t)$, es importante el hecho de que permite recuperar exactamente a todos los valores discretos de la serie $\{f_r\}$. Cualquier valor $f(t)$ de la serie $\{f_r\}$ puede obtenerse de la fórmula inversa [18]

$$f_r = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi nr/N} \quad \text{III.2.7}$$

Con esto se ha llegado a la definición formal de la transformada discreta de Fourier de la serie $\{f_r\}$, para $r=0,1,2,\dots,(N-1)$, la cual está dada por la ec. III.2.6; y la transformada discreta inversa de Fourier correspondiente, dada por la ec. III.2.7.

Conviene mencionar que existen diferentes expresiones para la definición del par de transformadas discretas de Fourier [8,13,18], y esta es una de ellas. Como uno de los objetivos del presente trabajo es el de proporcionar un programa que obtenga tanto la transformada de Fourier, como la transformada inversa de Fourier de funciones arbitrarias, es preferible utilizar una forma alternativa para el par de transformadas discretas de Fourier, del modo siguiente: para encontrar la

transformada discreta de Fourier de la serie $\langle f_r \rangle$, se utilizará la ecuación

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi rn/N}, \quad n=0,1,2,\dots,(N-1), \quad \text{III.2.8}$$

y para la transformada discreta inversa de Fourier

$$f_r = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi nr/N}, \quad r=0,1,2,\dots,(N-1). \quad \text{III.2.9}$$

Es preciso aclarar que la definición que se utilice deberá ser la misma tanto para transformar como para antitransformar. En la sección III.3.2 se explicará por qué se prefirió usar esta definición, y enseguida se verificará la validez de la ec. III.2.9, habiendo definido a la transformada discreta de Fourier con la ec. III.2.8.

Haciendo $r = s$ en la ec. III.2.8 y después sustituyendo en el miembro de la derecha de la ec. III.2.9,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi nr/N} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} f_s e^{-i2\pi sn/N} \right] e^{i2\pi nr/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_s e^{-i(2\pi n/N)(s-r)}. \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias

$$= \sum_{s=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi n/N)(s-r)} \right] \frac{1}{N} f_s,$$

como n, s, r y N son enteros, todas las exponenciales suman

a cero, a menos que $s = r$, de manera que el término entre corchetes (el cual es la relación de ortogonalidad), esté dado, ya sea por

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi n/N)(s-r)} = 0, \quad \text{para } s \neq r$$

o bien, por

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi n/N)(s-r)} = N, \quad \text{para } s = r,$$

y de aquí

$$\sum_{s=0}^{N-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(2\pi n/N)(s-r)} \right] \frac{1}{N} f_s = f_r$$

con lo que se verifica III.2.9.

El rango de las componentes de Fourier, F_n , está limitado de $n = 0$ a $n = (N-1)$, correspondientes a armónicas de frecuencia

$$\Omega_n = \frac{2\pi n}{T} = \frac{2\pi n}{N\Delta t}, \quad \text{III.2.10}$$

con el fin de mantener la simetría del par de transformadas, ecs. III.2.8 y III.2.9.

Conviene mencionar que las propiedades de la transformada discreta de Fourier se cumplen de igual manera que las de la transformada continua de Fourier correspondiente. De esto se hablará en la siguiente sección.

III.2.2 Propiedades de la transformada discreta de Fourier.

Por la forma como se dedujo, se puede considerar a la transformada discreta de Fourier como un caso particular de la transformada de Fourier. Debido a esto, las propiedades de ésta lo son también de aquélla y es posible reestablecer tales propiedades para la IDF. A continuación se presentan algunas de las propiedades estudiadas en el subcapítulo II.4.

a) LINEALIDAD.

Si las transformadas discretas de Fourier de f_r y g_r son F_n y G_n , entonces (6)

$$\mathcal{F} [f_r + g_r] = F_n + G_n \quad \text{III.2.11}$$

b) SIMETRÍA.

Si f_r y F_n forman un par de transformadas de Fourier, entonces

$$\mathcal{F} [F_r] = f_{-n}. \quad \text{III.2.12}$$

Sustituyendo en III.2.9

$$f_{-r} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n(-r)/N}, \quad \text{III.2.13}$$

intercambiando los parámetros r y n

$$f_{-n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} F_r e^{-i2\pi nr/M} \quad \text{III.2.14}$$

C) DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO.

Si f_r es desplazada por el entero k , entonces

$$\mathcal{F}\{f_{r-k}\} = F_n e^{-i2\pi nk/M} \quad \text{III.2.15}$$

Esto se verifica sustituyendo $j = r-k$ en la transformada discreta inversa de Fourier, de la siguiente forma

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi nj/M}$$

$$f_{r-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n(r-k)/M}$$

$$f_{r-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[F_n e^{-i2\pi nk/M} \right] e^{i2\pi nr/M} \quad \text{III.2.16}$$

D) DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA.

Si F_n es desplazada por el entero k , entonces su transformada discreta inversa de Fourier es multiplicada por $e^{i2\pi kr/M}$, es decir,

$$\mathcal{F}\{f_r e^{i2\pi kr/M}\} = F_{n-k} \quad \text{III.2.17}$$

lo cual se verifica sustituyendo $j = n-k$ en la IDF,

$$F_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi r j / N}$$

$$F_{n-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi(n-k)r/N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} [f_r e^{i2\pi k r / N}] e^{-i2\pi n r / N} \quad \text{III.2.18}$$

• FUNCIONES PARES.

Sea f_r una función par, entonces $f_r = f_{-r}$ y la transformada discreta de Fourier de f_r es una función par y es real, esto es, escribiendo $F_n = R_n + iI_n$, entonces,

$$\mathcal{F}\{f_r\} = R_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos \frac{2\pi r n}{N}. \quad \text{III.2.19}$$

Esto se puede demostrar de la siguiente manera

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi r n / N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos \frac{2\pi r n}{N} + i \sum_{r=0}^{N-1} f_r \operatorname{sen} \frac{2\pi r n}{N} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos \frac{2\pi r n}{N}$$

$$= R_n.$$

El término imaginario es cero debido a que la

sumatoria es sobre un número par de ciclos de una función impar.

Por otra parte,

$$f_r \cos \frac{2\pi r n}{N} = f_r \left[\cos \frac{2\pi(-n)r}{N} \right],$$

entonces, $F_n = F_{-n}$, y la función en la frecuencia es par. La fórmula inversa se prueba de manera similar. De aquí, si F_n está dada como una función par y es real, entonces, su transformada discreta inversa de Fourier es una función par.

f) FUNCIONES IMPARES.

Si $f_k = -f_{-k}$, entonces f_k es una función impar y su transformada discreta de Fourier es una función impar e imaginaria;

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi r n / N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{r=0}^{N-1} f_r \cos \frac{2\pi r n}{N} - i \sum_{r=0}^{N-1} f_r \sin \frac{2\pi r n}{N} \right] \\ &= -i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \sin \frac{2\pi r n}{N} \\ &= i I_n. \end{aligned}$$

La suma real es cero ya que la sumatoria es sobre un número par de ciclos de una función impar. Para F_n dada como una función impar e imaginaria, la prueba de que f_k es una función impar se establece de manera similar; de

donde

$$\mathcal{F}\{f_k\} = (I_N = -1) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r \operatorname{sen} \frac{2\pi nr}{N} \quad \text{III.2.21}$$

⊙ TEOREMA DE CONVOLUCION EN EL TIEMPO.

Considerando la convolución en el tiempo

$$g_r = \sum_{k=0}^{N-1} h_k f_{r-k} = h * f_r \quad \text{III.2.22}$$

puede hacerse una serie de sustituciones en III.2.9

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k f_{r-k} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} H_m e^{i2\pi mk/N} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i2\pi n(r-k)/N} \right]$$

intercambiando sumatorias

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} H_m F_n e^{i2\pi nr/N} \left[\sum_{r=0}^{N-1} e^{-i2\pi nk/N} e^{i2\pi mk/N} \right]$$

donde el término entre corchetes es la relación de ortogonalidad y es igual a N si $m = n$, e igual a cero si $m \neq n$; por tanto

$$h * f_r = \sum_{k=0}^{N-1} h_k f_{r-k} = \sum_{n=0}^{N-1} H_m F_n e^{i2\pi nr/N} \quad \text{III.2.23}$$

y se establece el teorema de convolución en el tiempo para la transformada discreta de Fourier

$$\mathcal{F}\{h * f_r\} = \frac{1}{\sqrt{N}} H_m F_n \quad \text{III.2.24}$$

TEOREMA DE CONVOLUCION EN LA FRECUENCIA.

Si se considera ahora a la convolución en la frecuencia

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_{n-k}, \quad \text{III.2.25}$$

se puede establecer el teorema de convolución en la frecuencia, sustituyendo en la ec. III.2.25

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_{n-k} &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} h_m e^{-i2\pi mk/N} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi r(n-k)/N} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} h_m f_r e^{-i2\pi rn/N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi mk/N} e^{i2\pi rk/N} \right] \end{aligned}$$

donde el término entre corchetes es otra vez la relación de ortogonalidad y es igual a N si $m=r$ e igual a cero para $m \neq r$; por lo que

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k F_{n-k} = \sum_{r=0}^{N-1} h_r f_r e^{-i2\pi nr/N} \quad \text{III.2.27}$$

y puede establecerse lo siguiente

$$\mathcal{F}\{h * f\} = \frac{1}{\sqrt{N}} H * F = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_{n-k} \quad \text{III.2.28}$$

(i) TEOREMA DE PARSEVAL.

Para funciones discretas, se puede establecer la siguiente relación

$$\sum_{r=0}^{N-1} f_r^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 \quad \text{III.2.29}$$

Para verificarla, sea $g_r = f_r f_r$. La transformada discreta de Fourier de g_r está dada por el teorema de convolución en la frecuencia, ec. III.2.28, como

$$\sum_{r=0}^{N-1} f_r^2 e^{-i2\pi nr/N} = \sum_{k=0}^{N-1} F_k F_{N-k} \quad \text{III.2.30}$$

donde, haciendo $n = 0$, esta ecuación se vuelve

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} f_r^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k F_{N-k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 \end{aligned} \quad \text{III.2.31}$$

con lo que demuestra el llamado *teorema de Parseval*.

III.3 LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.

III.3.1 Desarrollo del algoritmo.

La transformada rápida de Fourier (TRF) es un algoritmo de computadora que permite calcular las transformadas discretas de Fourier. Se vio en la sección III.2.1 que la TDF de una secuencia finita $\langle f_r \rangle$, $r=0,1,2,\dots,N-1$, es una nueva secuencia $\langle F_n \rangle$ definida por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi nr/N}, \quad n=0,1,\dots,(N-1).$$

Si se deseara encontrar valores para F_n por medio de una aplicación directa, se tendrían que hacer N multiplicaciones de la forma $(f_r)Ce^{-i2\pi nr/N}$ para cada uno de los N valores de F_n ; de este modo el trabajo total para hacer el cálculo completo de toda la secuencia F_n requeriría de $(N)(N) = N^2$ multiplicaciones. La TRF reduce este trabajo a un número de operaciones del orden $N \log_2 N$. Por ejemplo, si $N = 2^{15}$, $N^2 \cong 1.1 \times 10^9$, mientras que $N \log_2 N = 4.9 \times 10^5$, lo cual es sólo 1/2000 del número de operaciones, por lo que la TRF ofrece una reducción enorme en el tiempo de procesamiento de la computadora. Adicionalmente existe un incremento en la exactitud, ya que se reducen errores por redondeo debidos al truncamiento de productos. La *fig. III.3.1* muestra una comparación entre el número de operaciones que requiere el cálculo directo de la TDF con respecto al número de puntos en la muestra, y el número de operaciones requeridas en la TRF.

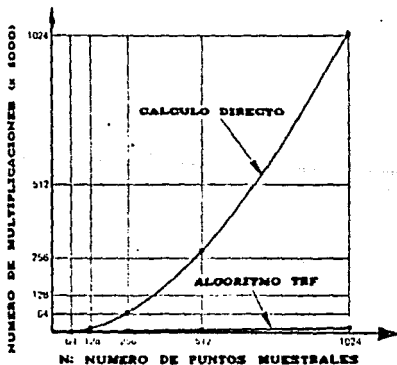


fig. III.3.1 Comparación de las multiplicaciones requeridas por el cálculo directo y el algoritmo de la TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER.

La manera como trabaja la TRF es haciendo particiones a la secuencia completa $\langle f_r \rangle$, formando así secuencias más pequeñas. Busca las TDFs de éstas y las combina ingeniosamente, para de este modo, encontrar la TDF de la secuencia original.

Supóngase que $\langle f_r \rangle$, $r=0,1,2,\dots,(N-1)$ es la secuencia mostrada en la *fig. III.3.2a*, donde N es par, y que se le ha dividido en dos secuencias más pequeñas $\langle g_r \rangle$ y $\langle h_r \rangle$ como se muestra en la *fig. III.3.2b*, donde

$$g_r = f_{2r} \quad r=0,1,2,\dots,(N/2-1). \quad \text{III.3.1}$$

$$h_r = f_{2r+1}$$

Las TDFs de las dos secuencias resultantes son G_n y H_n donde, de III.2.8,

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{r=0}^{N/2-1} g_r e^{-j \frac{2\pi n r}{N/2}} \quad n = 0,1,2,\dots,(N/2-1). \quad \text{III.3.2}$$

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{N/2}} \sum_{r=0}^{N/2-1} h_r e^{-j \frac{2\pi n r}{N/2}}$$

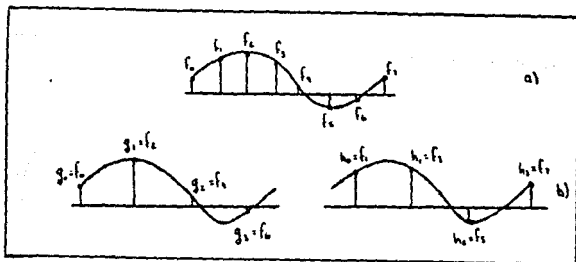


fig. III.3.2 Partición de la secuencia $\langle f_r \rangle$ en dos medias-secuencias $\langle g_r \rangle$ y $\langle h_r \rangle$.

Regresando a la TDF de la secuencia original $\langle fr \rangle$ y reordenando las sumatorias de manera similar a la ec. III.3.2. Se separan los términos impar y par de la secuencia $\langle fr \rangle$ para obtener

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi nr/N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r} e^{-i2\pi(2r)n/N} + \sum_{r=0}^{N/2-1} f_{2r+1} e^{-i2\pi(2r+1)n/N} \right].$$

Sustituyendo de III.3.1,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{r=0}^{N/2-1} g_r e^{-i2\pi rn/(N/2)} + e^{-i2\pi n/N} \sum_{r=0}^{N/2-1} h_r e^{-i2\pi rn/(N/2)} \right]$$

comparando con III.3.2 se puede observar que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + e^{-i2\pi n/N} H_n \right] \quad \text{III.3.3}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$.

La TDF de la secuencia original puede, por lo tanto, obtenerse directamente de las TDFs de las dos medias-secuencias G_n y H_n de acuerdo con III.3.3. Esta ecuación es el corazón del método de la TRF. Si el número N de muestras en la secuencia original $\langle fr \rangle$ es una potencia de 2, entonces las medias-secuencias $\langle gr \rangle$ y $\langle hr \rangle$ pueden dividirse asimismo en cuartas-secuencias, y así hasta que, eventualmente las últimas subsecuencias tengan solamente un término cada una de ellas.

El método III.3.3 sólo se aplica para valores de n entre 0 y $(N/2 - 1)$, es decir, para la mitad de los coeficientes de la serie $\{F_n\}$. Pero como se necesita F_n para el intervalo completo de 0 a $(N - 1)$, hay una mitad adicional al método para $N/2 \leq n \leq (N-1)$, la cual aprovecha el que G_n y H_n son periódicas en n y se repiten a sí mismas con período $N/2$ tal que

$$\begin{aligned} G_{n-N/2} &= G_n, & \text{y} \\ H_{n-N/2} &= H_n. \end{aligned} \quad \text{III.3.4}$$

El método computacional para calcular los valores de F_n a partir de G_n y H_n , sería

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + e^{-i2\pi n/N} H_n \right], \quad \text{para } n=0,1,2,\dots,(N/2-1) \quad \text{III.3.5}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_{n-N/2} + e^{-i2\pi n/N} H_{n-N/2} \right], \quad \text{para } n=N/2,(N/2+1),\dots,(N-1)$$

o bien si se permite correr a n sólo de 0 a $N/2$, entonces un método alternativo equivalente es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + e^{-i2\pi n/N} H_n \right] \quad n=0,1,2,\dots,(N/2-1) \quad \text{III.3.6}$$

$$F_{n+N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + e^{-i2\pi(n+N/2)/N} H_n \right]$$

el cual tomando en cuenta que $e^{-i\pi} = -1$, puede simplificarse a

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + e^{-i2\pi n/N} H_n \right] \quad n=0,1,2,\dots,(N/2-1) \quad \text{III.3.7}$$

$$F_{n+N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n - e^{-i2\pi n/N} H_n \right]$$

Finalmente, definiendo una nueva variable compleja W ,

$$W = e^{-i 2\pi/N} \quad \text{III.3.8}$$

se puede obtener la llamada mariposa computacional

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n + W^n H_n \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N/2-1), \quad \text{III.3.9}$$

$$F_{n+N/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[G_n - W^n H_n \right]$$

la cual está presente en la mayoría de los programas de computadora de la TRF.

Con el fin de ilustrar en acción a la TRF, se considerará un caso simple en el que la secuencia original $\{f_r\}$ tenga pocos términos, por ejemplo cuatro. Esta puede dividirse en subsecuencias hasta que las cuartas-secuencias tengan cada una un sólo término, *fig.III.3.3*. Considerando la definición básica, *ec.III.2.8*, de una TDF, es evidente que si sólo hay un término en la secuencia $\{f_r\}$, entonces

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i2\pi nr/N} = f_0, \quad \text{para } N=1, r=0 \text{ y } n=0 \quad \text{III.3.10}$$

de tal forma que la TDF de una secuencia de un sólo elemento es el mismo elemento. Por tanto, automáticamente se pueden conocer las TDFs de las cuartas-secuencias y sólo se tendrían que combinar éstas en dos partes para encontrar la TDF de la secuencia original, como se ilustra en la mitad inferior de la *fig.III.3.3*.

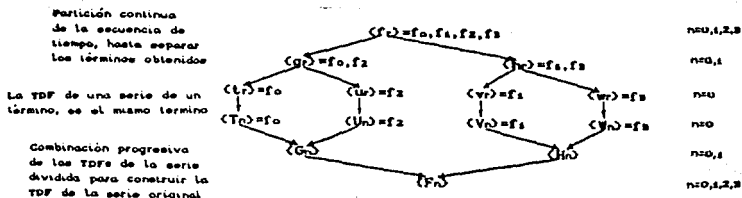


fig. III.3.3 Paso lógico durante la operación del algoritmo de la FFT de una secuencia $\langle f_r \rangle$ de 4 términos.

Usando la notación de la figura, las TDF de las cuatro cuartas-secuencias son $\langle T_r \rangle = f_0$, $\langle U_r \rangle = f_2$, $\langle V_r \rangle = f_1$, $\langle W_r \rangle = f_3$, entonces puede usarse III.3.9 para combinar $\langle T_r \rangle$ y $\langle U_r \rangle$ y obtener $\langle G_r \rangle$, y $\langle V_r \rangle$ y $\langle W_r \rangle$ para $\langle H_r \rangle$. Ya que, en este caso $N/2 = 1$, $W = e^{-i2\pi/N} = e^{-i\pi} = -1$, y así, de III.3.9,

$$\begin{aligned}
 G_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f_0 + f_2) & H_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 + f_3) \\
 G_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f_0 - f_2) & H_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (f_1 - f_3)
 \end{aligned}
 \quad \text{y} \quad \text{III.3.11}$$

Para la segunda aplicación de III.3.9, $N/2 = 2$ y $W = e^{-i2\pi/N} = e^{-i\pi/2} = -i$, tal que

$$F_0 = \frac{1}{2} [f_0 + f_2 + f_1 + f_3]$$

$$F_1 = \frac{1}{2} [f_0 - f_2 - (f_1 - f_3)]$$

III.3.12

$$F_2 = \frac{1}{2} [f_0 + f_2 - (f_1 + f_3)]$$

$$F_3 = \frac{1}{2} [f_0 - f_2 + (f_1 - f_3)].$$

Los pasos que combinan progresivamente los términos simples de las TDFs para generar todos los términos de la TDF de la secuencia original pueden mostrarse en los diagramas de mariposa, mencionados anteriormente, de la *fig. III.3.4.*

Las dos mariposas superiores representan las ecuaciones III.3.11 y muestran cómo $\langle G_n \rangle$ y $\langle H_n \rangle$ son generadas a partir de las cuatro TDFs de un término simple f_0 , f_2 , f_1 y f_3 . Un punto (•) en la mariposa representa una variable y las flechas que llegan a cada punto indican qué otras variables contribuyen a su valor. Todas las contribuciones son sumas, a menos que aparezca un factor junto a la flecha correspondiente, por ejemplo (-) indica resta.

Considerando el caso cuando $N = 2^k$ y los datos iniciales de la secuencia han sido divididos sucesivamente en subsecuencias hasta dar N secuencias de un término simple, se puede dividir por \sqrt{N} desde el principio, para mantener la división por $\sqrt{2}$ en cada etapa del cálculo, como se requiere por el método III.3.9, y los términos

simples resultantes pueden llamarse $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$.

TDFs de secuencias de un término simple

TDFs de secuencias de dos términos

TDF de la secuencia de cuatro términos

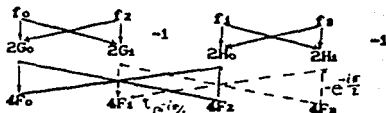


fig.III.3.4 Gráficas del flujo de señales de mariposa que muestran los pasos sucesivos en el algoritmo de la TRF.

En la fig.III.3.5, la fila superior de mariposas separadas indica cómo se combinan tales términos por pares de acuerdo a III.3.9, para obtener las TDFs de las secuencias correspondientes de dos términos. En lugar de nombrar a tales TDFs como $\langle G_n \rangle$, $\langle H_n \rangle$, etc., como en la fig.III.3.4, se pueden escribir los valores en los mismos registros de donde fueron tomados los valores originales, ya que éstos necesitan mayor longitud para cómputos

* Se prefiere empezar por 1 y no por 0 por costumbre en el uso de subíndices en lenguajes de programación.

posteriores. De este modo se logra economizar espacio de memoria de computadora. El significado de la fila superior en la *fig. III.3.5* se vuelve más claro tan pronto como se entienda que los nuevos valores a_1, a_2, \dots, a_N , son ahora componentes de las TDFs de dos términos.

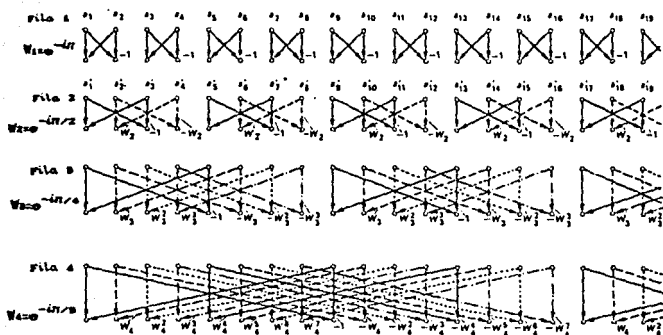


fig. III.3.5 Gráfica del flujo de señales de mariposa para ilustrar la lógica en la programación de la FFT.

En la segunda fila de la figura, cada mariposa implica términos alternos en la secuencia a_1, a_2, \dots, a_N y el factor $w_2 = e^{-in/2}$ aparece en las flechas

correspondientes como se requiere por III.3.9. En la tercera fila, las mariposas son ahora de 2^2 términos y aparece el factor $W_3 = e^{-i\pi/4}$ en potencias ascendentes hasta W_3^2 . En la cuarta fila, las mariposas tienen una amplitud de 2^3 términos y aparece $W_4 = e^{-i\pi/8}$ en potencias hasta W_4^7 , y así sucesivamente.

Un camino lógico para el cálculo de principio a fin, es proceder secuencialmente de una fila de mariposas a la siguiente. Para la fila m , los puntos de datos se toman en grupos de 2^m y cada mariposa tiene una amplitud de $k = (1/2)(2^m) = 2^{m-1}$. El factor $W_m = e^{-i\pi/n}$ aparecerá en potencias hasta $W_m^{(n-1)}$.

Podría hacerse una aproximación calculando

$$W_m^r = e^{-i\pi r/n} = \cos \frac{\pi r}{n} - i \sin \frac{\pi r}{n}$$

y almacenando los valores en la memoria de la computadora cuando fuera necesario. Sin embargo esto implicaría un gran número de evaluaciones de senos y cosenos y emplearía una cantidad considerable de espacio de almacenamiento.

Una aproximación alternativa sería calcular solamente un valor del factor (para $r=0$) en cada etapa del cálculo y después generar los demás, multiplicando continuamente el valor inicial W_m por sí mismo para obtener W_m^2 , W_m^3 , etc. Esto quiere decir que el valor inicial debe de ser suficientemente exacto para que, cuando se eleve a la mayor potencia, su exactitud sea todavía adecuada.

En la *fig. III.3.6* se muestra un diagrama de flujo de programación para llevar a cabo el cálculo descrito. Este comienza con el paso $m=1$ correspondiente a la fila superior de mariposas en la *fig. III.3.5*. En este caso $U=1$, $j=1$, $n=1$, $W=1$ y $l=1$, de tal forma que la computadora asigna el valor de a_2 a t , y el cálculo de mariposas da

$$\text{nuevo valor de } a_2 = \text{anterior } a_1 - \text{anterior } a_2$$

$$\text{nuevo valor de } a_1 = \text{anterior } a_1 + \text{anterior } a_2$$

o bien, usando una comilla (') para denotar nuevos valores,

$$a_2' = a_1 - a_2$$

$$a_1' = a_1 + a_2$$

de acuerdo con la primera fila de la *fig. III.3.5*.

En el diagrama de flujo se introdujo el parámetro mudo t , para conservar en él al valor anterior de a_2 y poder computar la segunda línea. Continuando con el diagrama, l se incrementa de 1 a 3 para entrar en el ciclo (1) y hacer $t = a_4$, de este modo

$$a_4' = a_3 - a_4$$

$$a_3' = a_3 + a_4$$

y así en lo sucesivo, a lo largo de la fila superior de mariposas en la *fig. III.3.5*, hasta alcanzar el final de la fila, al exceder el valor de l a 2^n . Termina entonces el ciclo (1) y se continúa hacia abajo. La variable j se incrementa de 1 a 2, lo cual excede de $2^{m-1} = 2^0 = 1$, y así m se incrementa a 2, para continuar con el ciclo (3) en la segunda fila de mariposas. Aquí se reasigna 1 a U y a j , n se vuelve 2 y $W = e^{-i\pi/2}$. Prosiguiendo, $t = a_5$ y la primera mariposa de la segunda fila es

$$a_5' = a_1 - a_3$$

$$a_1' = a_1 + a_3,$$

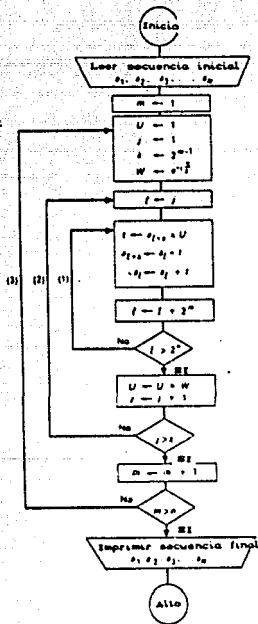
l se incrementa de 1 a 5, regresando al ciclo (1) para

obtener $t = a7$ y entonces

$$a7' = a8 - a7$$

$$a8' = a9 + a7$$

lo cual concuerda con la segunda fila de la fig. III.3.5.



Notas

Entrada de la secuencia en orden bit-invertido después de haber dividido cada término por N

Longitud de la secuencia $N=2^k$
El cálculo procede en k pasos

Para el paso m las mariposas son $n/2^{m-1}$ de amplitud y los datos se organizan en bloques de 2^m de amplitud (fig. III.3.5)

El ciclo (1) hace el cálculo de bloque a bloque en la misma mariposa.

El ciclo (2) hace el cálculo de una mariposa a la siguiente (en cada bloque)

El ciclo (3) hace el cálculo de una fila de mariposas a la siguiente

fig. III.3.6 Diagrama de flujo de programación para un algoritmo ómple de la FFT.

Mediante iteraciones repetidas en el ciclo (1) se llega al final de esta fila y se prosigue nuevamente para obtener $U = e^{-i\pi/2}$ y $j = 2$ lo cual lleva al ciclo (2) para hacer $l = j = 2$, de este modo se obtiene $t = a_2 e^{-i\pi/2}$ y de aquí

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2 - a_4 e^{-i\pi/2} \\ a_2' &= a_2 + a_4 e^{-i\pi/2} \end{aligned}$$

continuando en el ciclo (1) hasta que la totalidad de la segunda fila de mariposas en la *fig. III.3.5* sea completada.

Se mueve entonces el cálculo a la tercera fila de mariposas entrando otra vez al ciclo (3), y así hasta completar el cálculo entero.

Una particularidad que no ha sido discutida, es el procedimiento para hacer la partición de los N términos en N secuencias de términos simples al principio del cálculo ilustrado en la *fig. III.3.6*.

Puede observarse de la *fig. III.3.3*, que ha sido cambiado el orden de la secuencia original durante el proceso de partición y, correspondiendo a la secuencia inicial f_0, f_1, f_2, f_3 , se ingresarían $a_1 = f_0/2$, $a_2 = f_2/2$, $a_3 = f_1/2$, $a_4 = f_3/2$ en el diagrama de flujo recordando que se dividió por \sqrt{N} antes de empezar, a fin de reemplazar la división por $\sqrt{2}$ en cada una de las etapas de los cálculos de mariposa).

Se podría preparar un programa de computadora, el cual a través del proceso de particiones, primero dividiera la secuencia original en dos medias secuencias, dividiera cada una de éstas en dos cuartas-secuencias y

así en adelante. Sin embargo, esto requeriría memoria de computadora extra, porque para una secuencia de N términos, se necesitarían $N/2$ registros extras para almacenar la primera media-secuencia, mientras la otra estuviese siendo ensamblada. Debido a que podría no haber suficiente memoria extra disponible, es preferible llevar a cabo el proceso de ordenamiento en el lugar, es decir, sin tener que usar almacenamiento adicional.

Considérese por ejemplo, una secuencia de 16 términos en la cual el orden inicial es 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16, entonces, después de realizada la partición, el nuevo orden sería 1,9,5,13,3,11,7,15,2,10,6,14,4,12,8,16. Fuera del primero y el último elementos, todos cambiaron de lugar por parejas. Por ejemplo 2 y 9, 3 y 5, etc. El problema se vuelve relativamente simple si se conoce cómo escoger las parejas [18]. Esto implica establecer en el programa dos contadores, uno de los cuales cuente normalmente en el orden de la secuencia original 1,2,3,..., y el otro que cuente en el orden de la secuencia dividida 1,9,5,... . Sincronizando los dos contadores, los números correspondientes identifican cada pareja de elementos que tengan que ser traspuestos a fin de reordenar la secuencia inicial correctamente. El problema será entonces idear el contador que opere en la secuencia reordenada. Tomando a ésta, se tiene

1,9,5,13,3,11,7,15,2,10,6,14,4,12,8,16

y, escribiendo las diferencias entre números adyacentes, queda

$$8, -4, 8, -10, 8, -4, 8, -13, 8, -4, 8, -10, 8, -4, 8.$$

De aquí se puede observar que, si j es cualquier número en la secuencia, y si $j \leq 8$, el siguiente número

Este sistema se llama usualmente contador bit-invertido porque, al expresarse como números binarios, los términos en la secuencia reordenada pueden obtenerse de los términos correspondientes en la secuencia original (si esta empieza por cero) por inversión del orden de bits (dígitos binarios). Por ejemplo, para una secuencia de ocho términos, los números 0,1,2,3,4,5,6,7 se vuelven 0,4,2,6,1,5,3,7. El número 1 = (001) en notación binaria, se ha vuelto 4 = (100). El 2 = (010) permanece igual; el número 3 = (011) se vuelve 6 = (110), etc. De esta forma, un contador que corre en el orden de la secuencia reordenada está por lo tanto, corriendo en orden invertido en bits.

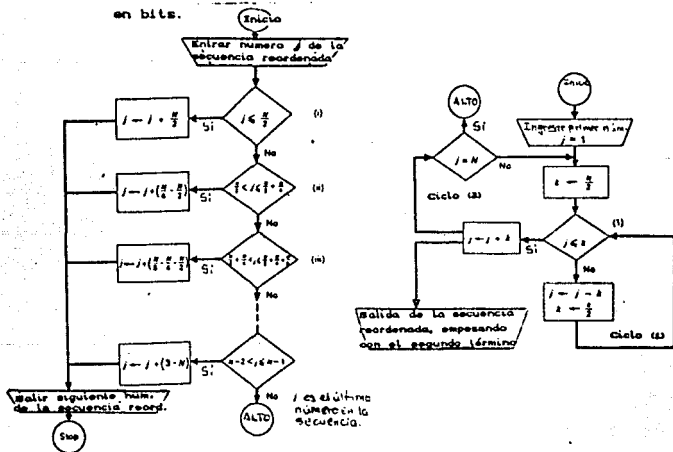


fig. III. 3.7
bit-invertido.

Diagrama de flujo para el contador

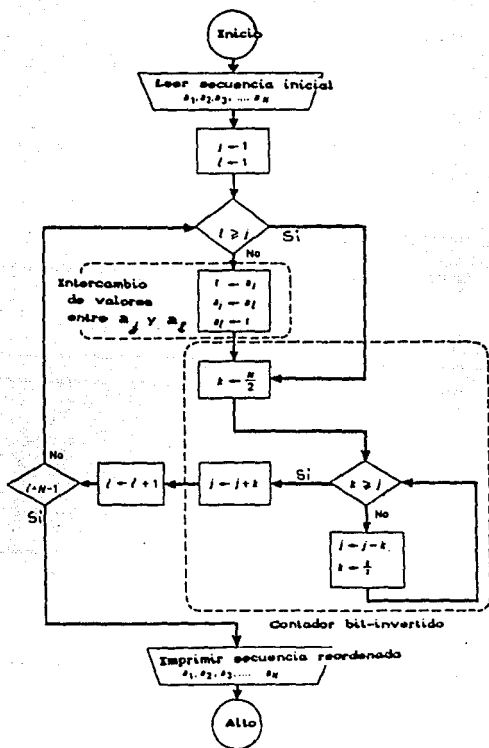


fig. III.3.8 Diagrama de flujo para reordenar los datos iniciales de la secuencia a_1, a_2, \dots, a_N , antes de entrar al algoritmo de la TRF de la fig. III.3.6.

Se tiene ahora un contador que genera la secuencia reordenada (o bit-invertida) $j = 1, 9, 5, \dots$ (para una secuencia de 16 elementos) y esto puede combinarse con un contador normal $l = 1, 2, 3, \dots$ con el fin de identificar los términos correspondientes en cada pareja, los cuales deben cambiar lugares. Se tendrá que hacer entonces la trasposición

$$a_l = a_j \quad \text{III.3.14}$$

a fin de reordenar correctamente la secuencia inicial a_1, a_2, a_3, \dots , antes de ejecutar los cálculos de mariposas ya descritos.

En la *fig. III.3.8* se muestra un diagrama de flujo del cálculo completo, el cual puede realizar la trasposición de los términos requerida por la ec. III.3.14. Debe mencionarse el ciclo que desvía III.3.14 cuando $l > j$, el cual evita una segunda trasposición.

III.3.2 Descripción del programa.

En esta sección se describe el programa de computadora utilizado en el presente trabajo para obtener la *transformada discreta de Fourier* de una secuencia de puntos muestrales (función discretizada) por el método de la *transformada rápida de Fourier*.

El programa principal tiene como finalidad la lectura e impresión de los datos correspondientes, llamado a la subrutina TRF, generación de frecuencias y ordenación e impresión de los resultados. En la *fig. III.3.9* se encuentra el diagrama de bloques del programa principal.

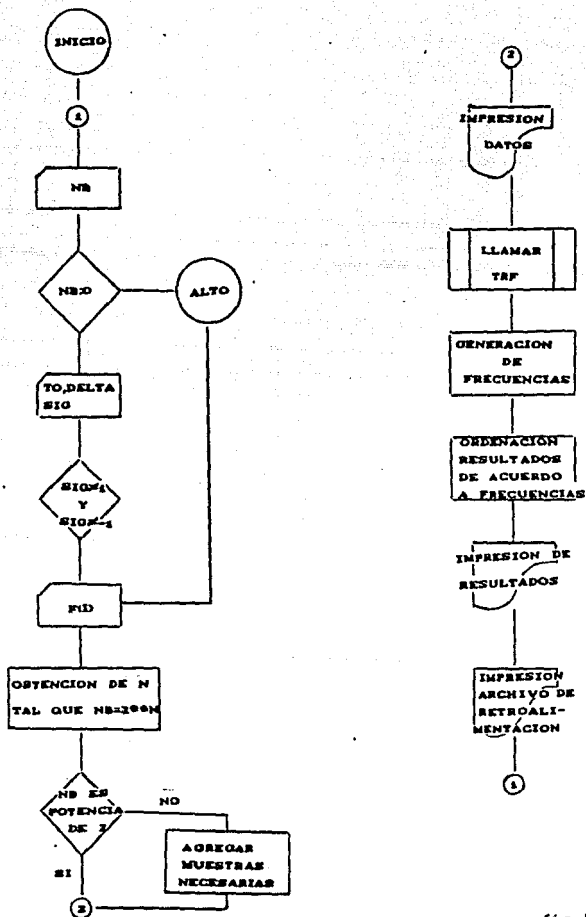


fig. III. 3.9

Diagrama de bloques del programa principal.

La parte fundamental del programa la constituye la subrutina TRF. la cual puede calcular tanto la transformada discreta de Fourier (ec.III.2.8), como la transformada discreta inversa de Fourier (ec.III.2.9), utilizando el algoritmo y los métodos de la sección anterior.

La razón por la que se prefirió utilizar estas expresiones, es porque la única diferencia entre ellas es el signo en la exponencial; es decir, basta con cambiar tal signo para encontrar indistintamente la transformada discreta o la transformada discreta inversa de Fourier. En el programa, el signo en la exponencial lo da la variable SIG. Si esta es igual a -1, el programa calcula la transformada de Fourier, y si es igual a 1, obtiene la transformada inversa.

Además de ésta, otras variables importantes usadas en el programa son:

NB Número de elementos en la secuencia. (Se manejó como N en la sección anterior).

FCI) Para calcular la transformada discreta de Fourier, como entrada es la función discretizada en el tiempo, es decir, es una secuencia de números complejos, cuyas partes reales son los valores (reales) de la serie discreta f_0, f_1, \dots, f_{N-1} , y cuyas partes imaginarias son cero; como salida es la función discretizada en la frecuencia, es decir, la transformada de la función, F_1, F_2, \dots, F_{N-1} . Para calcular la transformada inversa, como entrada es una secuencia de números complejos F_1, F_2, \dots, F_{N-1} , en la frecuencia; como salida es una secuencia real en el tiempo.

GCID Secuencia ordenada de acuerdo a las frecuencias, de los valores correspondientes a la transformada de la función.

FRECCI Secuencia de frecuencias que corresponden a cada punto de la transformada de la función. Ω , ec.III.2.10.

N Número entero tal que asegure que NB es potencia de 2. Es el número de pasos en que procede el cálculo de la transformada rápida de Fourier. (Se manejó como k).

DELTA Espaciamiento Δt entre cada punto de la función en el tiempo.

TO Tiempo inicial.

SC Raíz cuadrada de NB.

En la *fig.III.3.10* se muestra el diagrama de bloques de la subrutina TRF, la cual divide cada término por \sqrt{NB} , reordena la secuencia de acuerdo a la *fig.III.3.8* y obtiene la transformada de Fourier de acuerdo a la *fig.III.3.6*.

El programa se codificó en lenguaje FORTRAN. Fue compilado en una microcomputadora con un compilador de FORTRAN 77 y puede procesar secuencias hasta de 1024 términos.

Con el programa se obtienen dos archivos de resultados; el primero, en el cual se aprecian los datos

en el tiempo y la función en la frecuencia, y el segundo, que sirve como archivo de datos para procesos posteriores.

El listado del programa se encuentra en el apéndice 8.

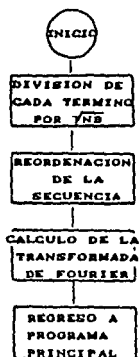


fig. 111.3.10

Diagrama de bloques de la subrutina TRF

C A P I T U L O I V

A P L I C A C I O N A L A I N G E N I E R I A E S T R U C T U R A L

Par l'importance de ses découvertes, par l'influence décisive qu'il a exercée sur le développement de la Physique mathématique, Fourier méritait l'hommage qui est rendu aujourd'hui à ses travaux et à sa mémoire.

Darboux, 1888.

IV APLICACION A LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

IV.1 INTRODUCCION

En este último capítulo se retomarán los temas estudiados en los tres anteriores, a fin de mostrar su aplicación en la solución de un problema físico específico. Este problema, como se ha venido mencionando a lo largo del presente trabajo, consiste en obtener la respuesta estructural dinámica de un sistema de UGDL y de parámetros invariantes en el tiempo, mediante la técnica de transformación más utilizada en ensayos dinámicos: la de la transformada de Fourier. Con este análisis matemático se pueden definir nuevas variables haciendo una transformación reversible de un dominio dado, por ejemplo tiempo, a otro diferente, por ejemplo frecuencia. Para esto, es necesario estudiar primero algunos conceptos sobre sistemas dinámicos lineales, excitaciones periódicas y funciones de transferencia; y, de esta manera establecer las bases para solucionar los ejemplos que se presentan al final del capítulo, con ayuda también del algoritmo de la transformada rápida de Fourier, expuesto en el capítulo anterior.

IV.2 SISTEMAS LINEALES.

IV.2.1 Conceptos básicos.

En los sistemas físicos hay una función de entrada (excitación o estímulo) y una función de salida (respuesta). Un sistema está completamente caracterizado, si se conoce la naturaleza de la dependencia de la salida sobre la entrada.

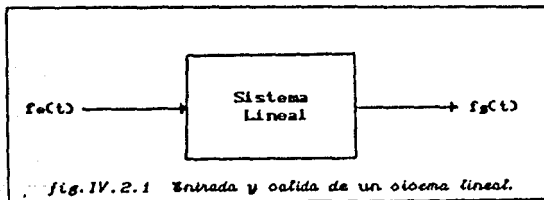
Si se supone que la respuesta de un sistema a la excitación, $f_e(t)$, es la función $f_s(t)$, y si la respuesta de éste sistema a la excitación,

$$f_e(t) = a_1 f_{e1}(t) + a_2 f_{e2}(t), \text{ es}$$

$$f_s(t) = a_1 f_{s1}(t) + a_2 f_{s2}(t),$$

cuando $f_{e1}(t)$ y $f_{e2}(t)$ son las funciones de respuesta a las excitaciones $f_{e1}(t)$ y $f_{e2}(t)$, respectivamente, se dice entonces que el sistema es un sistema lineal (fig. IV.2.1). Por lo mismo, puede definirse a un sistema lineal como aquél en el cual se satisface el principio de superposición.

Si la respuesta de un sistema a la excitación $f_e(t)$, es la función $f_s(t)$, y si la respuesta del mismo sistema a la excitación $f_e(t-t_0)$, es la función $f_s(t-t_0)$, se dice que el sistema es un sistema invariante en el tiempo (o un sistema de parámetros constantes).



Otra definición de sistema lineal es aquella que dice que la función de la excitación y la función de la respuesta del sistema, están relacionadas por una ecuación diferencial lineal; es decir,

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n f_e(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f_e(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d f_e(t)}{dt} + a_0 f_e(t) &= \\
 b_m \frac{d^m f_e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f_e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d f_e(t)}{dt} + b_0 f_e(t) &.
 \end{aligned}
 \tag{IV.2.1}$$

Si se denota $\frac{d}{dt}$ por el operador D, tal que

$$D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad D^0 f(t) = f(t),$$

entonces la ec. IV.2.1 puede expresarse como

$$\sum_{n=0}^n a_n D^n f_e(t) = \sum_{m=0}^m b_m D^m f_e(t), \tag{IV.2.2}$$

o bien,

$$ACD)f_e(t) = BCD)f_e(t), \tag{IV.2.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
 ACD) &= a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0, \\
 BCD) &= b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0.
 \end{aligned}$$

En un sistema lineal los coeficientes a_n y b_m son independientes de la función de respuesta. En el sistema invariante (o de parámetros constantes) los coeficientes a_n y b_m son constantes.

La ec. IV.2.3 puede expresarse simbólicamente en la forma

$$f_e(t) = \frac{BCD)}{ACD)} f_e(t) = HKD)f_e(t), \tag{IV.2.4}$$

donde

$$HKD) = \frac{BCD)}{ACD)}.$$

Se entiende que la ec. IV.2.4 es una expresión operacional de la ecuación diferencial IV.2.1. El operador (KD) que opera sobre la función de entrada para producir la función de salida, se denomina función operacional del sistema. Utilizando el símbolo L para (KD) , la ec. IV.2.4 puede expresarse como

$$L\{f_e(t)\} = f_s(t). \quad \text{IV.2.5}$$

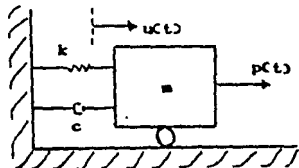
El operador lineal L en IV.2.5 indica la ley que determina la función de salida, $f_s(t)$, dada la función de entrada, $f_e(t)$. Puede mencionarse a la ec. IV.2.5 como una transformación L de la función $f_e(t)$, en la función $f_s(t)$. Con la notación de IV.2.5, un sistema lineal e invariante en el tiempo está definido por

$$L\{a_1 f_e(t) + a_2 f_e(t)\} = a_1 L\{f_e(t)\} + a_2 L\{f_e(t)\}, \quad \text{IV.2.6}$$

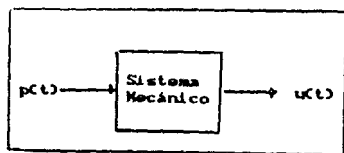
$$L\{f_e(t+t_0)\} = f_s(t+t_0),$$

donde t_0 es una constante arbitraria.

Si se considera el sistema mecánico simple que se muestra en la fig. IV.2.2a, puede obtenerse la expresión operacional de $u(t)$, que representa el desplazamiento de una masa m desde su posición de equilibrio. La excitación o fuente sería la fuerza aplicada $p(t)$, y la respuesta, el desplazamiento $u(t)$. (fig. IV.2.2b).



(a) Sistema mecánico;



(b) Representación del sistema.

fig. IV.2.2

Se sabe, del capítulo I, que la ecuación que gobierna al sistema es

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + c \frac{d u(t)}{dt} + k u(t) = p(t).$$

Utilizando operadores, esta ecuación se convierte en

$$(m D^2 + c D + k) u(t) = p(t). \quad \text{IV.2.8}$$

Por lo tanto,

$$u(t) = \frac{1}{m D^2 + c D + k} p(t) = \text{HKD} p(t) \quad \text{IV.2.9}$$

donde

$$\text{HKD} = \frac{1}{m D^2 + c D + k}. \quad \text{IV.2.10}$$

En la siguiente sección se hablará de la respuesta de un sistema lineal a excitación periódica. Esta última puede expresarse en forma de función exponencial del tiempo. Por lo mismo, es conveniente mencionar que la respuesta de un sistema lineal e invariante a una función exponencial $e^{i\Omega t}$ es también exponencial y proporcional a la entrada; es decir,

$$L(e^{i\Omega t}) = k e^{i\Omega t}, \quad \text{IV.2.11}$$

lo cual puede demostrarse de la siguiente forma:

Supóngase que la excitación en la ec. IV.2.3 es la función $f_s(t) = e^{i\Omega t}$; entonces

$$A(D)f_s(t) = B(D)e^{i\Omega t}, \quad \text{IV.2.12}$$

donde $f_s(t)$ es la respuesta del sistema. Ahora bien;

$$B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0,$$

lleva a

$$B(D)e^{i\Omega t} = B(i\Omega)e^{i\Omega t}$$

dado que

$$D^m e^{i\Omega t} = \frac{d^m}{dt^m} (e^{i\Omega t}) = (i\Omega)^m e^{i\Omega t}.$$

Por lo tanto, la respuesta $f_s(t)$ está definida por la ecuación diferencial lineal

$$ACD(f_s(t)) = BCi\Omega e^{i\Omega t}. \quad \text{IV.2.13}$$

La función excitadora de la ec. IV.2.13 es $BCi\Omega e^{i\Omega t}$, una función exponencial, y según la teoría de las ecuaciones diferenciales [15], se puede suponer que la respuesta $f_s(t)$ es también exponencial. De donde, si $f_s(t) = k_1 e^{i\Omega t}$, entonces

$$ACD(f_s(t)) = ACD(k_1 e^{i\Omega t}) = k_1 ACD(e^{i\Omega t}) = k_1 ACi\Omega e^{i\Omega t} = ACi\Omega f_s(t). \quad \text{IV.2.14}$$

Sustituyendo la ec. IV.2.14 en IV.2.13, se obtiene:

$$ACi\Omega f_s(t) = BCi\Omega e^{i\Omega t}. \quad \text{IV.2.15}$$

Por lo tanto, si $ACi\Omega \neq 0$, entonces

$$f_s(t) = \frac{BCi\Omega}{ACi\Omega} e^{i\Omega t} = H(i\Omega) e^{i\Omega t}. \quad \text{IV.2.16}$$

Esta ecuación puede expresarse simbólicamente como

$$L(e^{i\Omega t}) = H(i\Omega) e^{i\Omega t}, \quad \text{IV.2.17}$$

y la fig. IV.2.3 muestra un diagrama que ilustra la relación entre la entrada y la salida, dada por la ec. IV.2.16.

Matemáticamente, una función $f(t)$ que satisface la ecuación

$$L(f(t)) = kf(t), \quad \text{IV.2.18}$$

se denomina función propia (o función característica) y el valor correspondiente de k , valor propio (o valor característico). Puede decirse entonces, según la ec. IV.2.17, que la función característica de un sistema lineal e invariante es una función exponencial. El valor propio $HC(\omega)$ del sistema se define como la función de transferencia del sistema. Conviene notar que, indistintamente podría usarse la notación $HC(\omega)$ para representar a la función de transferencia siempre y cuando se adopte la convención de considerar $HC(\cdot)$ como una función compleja. Esto se tratará con más amplitud en la sección IV.3.1.



fig. IV.2.3 Función de transferencia del sistema

IV.2.2 Excitación periódica.

En la sección I.3.1 se desarrollaron las ecuaciones que expresan la respuesta de un sistema de UGDL a cualquier excitación armónica. Ahora se mostrará cómo esas mismas expresiones pueden usarse para evaluar la

respuesta de un sistema de UGDL a cualquier excitación periódica. Solamente se necesita expresar a ésta en términos de una serie de Fourier; la respuesta a cada término de la serie es la respuesta a una excitación armónica, y aplicando el principio de superposición, la respuesta total es la suma de las respuestas a cada término de la excitación.

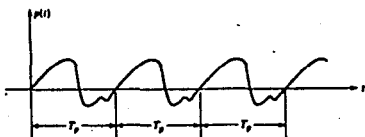


fig. IV.2.4 Excitación periódica arbitraria.

Considérese una excitación periódica cualquiera, como la que se muestra en la fig. IV.2.4. Recordando lo visto en la sección II.2.3, una función como tal puede expresarse en la forma de una serie de Fourier

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t \quad \text{IV.2.10}$$

en donde T_p representa el periodo de la función de la excitación y los coeficiente a_n, b_n , se evalúan con las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \cos \frac{2\pi n t}{T_p} dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) \sin \frac{2n\pi t}{T_p} dt. \quad \text{IV.2.20}$$

Cuando se expresa una excitación periódica arbitraria en la forma de la serie de Fourier IV.2.19, es aparente que ésta consiste de una carga constante (el valor promedio de la carga representado por el coeficiente a_0) más una serie de excitaciones armónicas de frecuencias Ω_n y amplitudes a_n y b_n . La respuesta en estado estacionario producida en una estructura no amortiguada de UGDL por cada término seno de la serie de excitaciones armónicas, está dada por una expresión de la forma de la ec.I.3.11 pero, omitiendo el término transitorio, se puede expresar de la siguiente forma:

$$u_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1-r_n^2} \sin n\Omega t \quad \text{IV.2.21a}$$

donde

$$\Omega_n = \frac{2\pi}{T_p}, \quad r_n = \frac{\Omega_n}{\omega} = \frac{n\pi}{T_p} = \frac{n\Omega_n}{\omega}.$$

Similarmente, la respuesta en estado estacionario para cada término coseno de la serie está dada por:

$$u_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1-r_n^2} \cos n\Omega t. \quad \text{IV.2.21b}$$

Finalmente, la respuesta en estado estacionario para el componente de carga constante es la deflexión estática:

$$u_0 = \frac{a_0}{k}. \quad \text{IV.2.21c}$$

Por lo tanto, la respuesta total periódica de la estructura no amortiguada puede expresarse como la suma de

los términos individuales de respuesta para todos los miembros de la serie de excitación, como se muestra:

$$u(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-r^n} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right] \quad \text{IV.2.21}$$

donde los coeficientes de amplitud de carga están dados por las expresiones IV.2.20.

Para tomar en cuenta al amortiguamiento en la evaluación de la respuesta de una estructura de UGDL a una excitación periódica, es necesario sustituir las expresiones de la respuesta armónica amortiguada de la ec. I.3.20 en las expresiones de la respuesta no amortiguada acabadas de usar. En este caso, la respuesta total en estado estacionario está dada por

$$u(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \left[(1-rn^2)^2 + (2\beta rn)^2 \right]} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \left[a_n 2\beta rn + b_n (1-rn^2) \right] \sin n\omega t + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[a_n (1-rn^2) - b_n 2\beta rn \right] \cos n\omega t \right\} \right]. \quad \text{IV.2.22}$$

Como se vio en la sección II.2.4, las expresiones de las series de Fourier de las ecs. IV.2.19 y IV.2.20 pueden también escribirse en forma exponencial haciendo uso de la fórmula de Euler, quedando

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\omega t} \quad \text{IV.2.23}$$

donde

$$P_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-in\Omega t} dt . \quad \text{IV.2.24}$$

En la ec. IV.2.23 se puede observar que a cada valor positivo de n , por ejemplo, $n = +m$, le corresponde un $n = -m$. Los dos términos $e^{im\Omega t}$ y $e^{-im\Omega t}$ pueden suponerse como vectores unitarios, que rotan contra y en el sentido de las manecillas del reloj, respectivamente; con velocidad angular $m\Omega$, como se muestra en la *fig. IV.2.5*. Los componentes imaginarios de tal par de vectores se cancelan mutuamente. Puede observarse también en la ec. IV.2.24 que P_{+m} es el conjugado complejo de P_{-m} , de este modo todos los términos imaginarios en la ecuación se cancelan, como debe suceder siendo la función excitadora real.

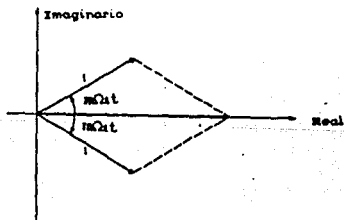


fig. IV.2.5 Representación vectorial del término de excitación exponencial.

Ya que se ha expresado una excitación periódica arbitraria en la forma exponencial de la serie de Fourier por medio de las ecuaciones IV.2.23 y IV.2.24, podría pensarse en escribir las ecuaciones que definen la respuesta, también en forma exponencial. Se considerará nuevamente sólo la respuesta en estado estacionario, esto, asumiendo que la excitación periódica ha permanecido continuamente el tiempo suficiente para que el término transitorio haya sido disipado. Introduciendo la forma compleja de la función excitadora, $e^{i\Omega t}$, en la ec.I.3.1, se tiene

$$m\dot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = e^{i\Omega t} \quad \text{IV.2.25}$$

la cual, como se vio en la sección anterior, tiene una solución en estado estacionario de la forma

$$u(t) = H(\Omega)e^{i\Omega t}, \quad \text{IV.2.26}$$

donde $H(\Omega)$ es la función de transferencia del sistema como se le definió anteriormente. En ocasiones también se le denomina función compleja de respuesta en la frecuencia. En la siguiente sección se hablará con mayor profundidad sobre esta función.

IV.3 ANALISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

IV.3.1 Función de transferencia de un sistema lineal.

Se considerará ahora el caso general de la respuesta de un sistema lineal a una excitación dada por una función cualquiera.

Se denotará por $h(t)$, a la respuesta de un sistema lineal al impulso unitario, $\delta(t)$. Esto puede expresarse

simbólicamente como

$$L\{\delta(t)\} = h(t) \quad \text{IV.3.1}$$

Si el sistema es invariante (o de parámetros constantes), entonces, según la ec. IV.2.7 se observa que su respuesta a $\delta(t-\tau)$ está dada por $h(t-\tau)$; es decir,

$$L\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau) \quad \text{IV.3.2}$$

Según lo estudiado en las secciones II.4.2 y II.4.3, puede demostrarse [18] que la respuesta $f_s(t)$ de un sistema lineal e invariante a una entrada arbitraria $f_e(t)$, se puede expresar como la convolución de la entrada, $f_e(t)$, y de la respuesta del sistema al impulso unitario, $h(t)$; es decir,

$$f_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(\tau) h(t-\tau) d\tau = f_e(t) * h(t) \quad \text{IV.3.3}$$

$$f_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(t) * f_e(t) \quad \text{IV.3.4}$$

Es interesante el resultado que presenta cualquiera de estas dos ecuaciones, pues implica que la respuesta de un sistema lineal está determinada unívocamente por el conocimiento de la respuesta al impulso unitario $h(t)$ del sistema.

Esta última afirmación permite presumir que existe alguna relación entre la respuesta de un sistema al impulso unitario y la función de transferencia del mismo, puesto que, si se observa, las ecuaciones IV.2.28 y IV.3.4 son de alguna forma equivalentes.

Para analizar esta posible relación, sean $F_e(\omega)$ y $F_s(\omega)$ las transformadas de Fourier de la entrada $f_e(t)$ y

de la salida $f_s(t)$ de un sistema lineal, entonces, de la ec. IV.3.3, se tiene

$$f_s(t) = f_e(t) * h(t).$$

Aplicando el teorema de convolución de la sección II.4.3, se obtiene

$$F_s(\Omega) = F_e(\Omega) H(\Omega), \quad \text{IV.3.5}$$

donde $H(\Omega)$ es la función definida por

$$H(\Omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad \text{IV.3.6}$$

Si se aplica la fórmula II.4.2, de la transformada inversa de Fourier, se obtiene

$$f_s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F_s(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_e(\Omega) H(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad \text{IV.3.7}$$

Por otra parte, puede verificarse que las funciones $H(\Omega)$ y $H(i\Omega)$, definidas por IV.3.6 y IV.2.17, respectivamente, son exactamente la misma función, y la diferencia aparente es sólo por cuestión de notación. Esto se demostrará onseguida.

Si la función de excitación (e de entrada) en un sistema es

$$f_e(t) = e^{i\Omega_0 t}, \quad \text{IV.3.8}$$

donde Ω_0 es una constante real, entonces, recordando la propiedad (e) de desplazamiento en la frecuencia, estudiada en la sección II.4.2, se sabe que

$$\mathcal{F}\{f_e(t)\} = F_e(\Omega - \Omega_0). \quad \text{II.4.17}$$

Ahora bien, de la sección II.4.5, la transformada de Fourier de una constante A es

$$\mathcal{F}\{A\} = A 2\pi \delta(\Omega), \quad \text{II.4.48}$$

de donde, si $A = 1$, se obtiene

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi \delta(\Omega).$$

Por lo que la transformada de Fourier de la ec. IV.3.8 es

$$F_e(\Omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \mathcal{F}\{e^{i\Omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0). \quad \text{IV.3.9}$$

De donde,

$$F_e(\Omega) \text{HK}(\Omega) = 2\pi \delta(\Omega - \Omega_0) \text{HK}(\Omega) = 2\pi \text{HK}(\Omega_0) \delta(\Omega - \Omega_0),$$

siendo esta una propiedad de la función δ [18]. Entonces, por IV.3.7, se tiene

$$\begin{aligned} f_e(t) &= L\langle e^{i\Omega_0 t} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \text{HK}(\Omega_0) \delta(\Omega - \Omega_0) e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= \text{HK}(\Omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0) e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= \text{HK}(\Omega_0) e^{i\Omega_0 t}. \end{aligned}$$

Dado que IV.3.10 se cumple para cualquier valor de Ω_0 , se puede hacer un cambio en la variable Ω_0 por Ω , de manera que se obtenga

$$f_e(t) = L\langle e^{i\Omega t} \rangle = \text{HK}(\Omega) e^{i\Omega t}. \quad \text{IV.3.11}$$

Recordando la ec. IV.2.17, se tiene

$$f_e(t) = L\langle e^{i\Omega t} \rangle = \text{HK}(\Omega) e^{i\Omega t}, \quad \text{IV.2.17}$$

por lo que puede concluirse que

$$\text{HK}(\Omega) = \text{HK}(\Omega).$$

* Puede demostrarse que siendo $g(x)$ una función continua en $x = x_0$ y $a < b$, entonces

$$\int_a^b \delta(x - x_0) g(x) dx = \begin{cases} g(x_0) & \text{para } a < x_0 < b \\ 0 & \text{para } b < x_0 < a \end{cases} \quad [18]$$

De lo anterior se puede concluir entonces que la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a la función impulso unitario es precisamente la función de transferencia del sistema definida en la sección anterior.*

De hecho, en la definición de la transformada de Fourier de $f(t)$, se tiene

$$F(\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad \text{II.4.1}$$

donde la variable Ω siempre aparece acompañada del número t , y por consiguiente, la integral se puede expresar como función de $i\Omega$. De este modo, la ec. II.4.1 puede expresarse como

$$F(i\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t} dt,$$

y, en consecuencia,

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(i\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\Omega) e^{i\Omega t} dt.$$

Por lo mismo, $F(\Omega)$ y $F(i\Omega)$ representan la misma función $\mathcal{F}[f(t)]$. De este modo, la relación IV.3.8 se puede expresar también como

$$F_e(i\Omega) = F_e(\Omega) H_c(i\Omega). \quad \text{IV.3.12}$$

Por IV.3.8 o por IV.3.12, se tiene

$$H_c(i\Omega) = \frac{F_e(i\Omega)}{F_e(\Omega)} = \frac{\mathcal{F}[f_e(t)]}{\mathcal{F}[f_e(t)]}. \quad \text{IV.3.13}$$

* De acuerdo con esta definición, la función de transferencia y la función de respuesta de un sistema a un impulso unitario, forman un par de transformadas de Fourier.

Esta última ecuación indica que la función de transferencia del sistema $HK(\Omega)$ es también el cociente entre la transformada de la respuesta y la transformada de la excitación.

Las ecs. IV.3.5 y IV.3.12 constituyen una poderosa arma en el análisis de sistemas lineales. Si se conoce la función de transferencia del sistema, entonces, para encontrar la función de respuesta del sistema a una excitación dada, bastará con obtener la transformada inversa de Fourier del producto de la función de transferencia con la transformada de Fourier de la función de entrada. De esto se hablará en la sección IV.3.3.

IV.3.2 Obtención de la función de transferencia de un sistema de UGDL.

Se vio en la sección IV.2.2, que al hablar de sistemas lineales de UGDL, como el de la fig. IV.3.1, la solución en estado estacionario para una función excitadora periódica es de la forma

$$u(t) = HK(\Omega) e^{i\Omega t} \quad \text{IV.2.28}$$

donde $HK(\Omega)$ es la función de transferencia del sistema. Esta función puede obtenerse a partir de las leyes físicas que gobiernan al sistema, de la siguiente forma:

La ecuación diferencial que gobierna al sistema es

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t).$$

Considerando entonces que la excitación es la fuerza, $p(t)$, y la respuesta es el desplazamiento, $u(t)$; se obtiene

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = UK(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{p(t)\} &= \mathcal{F}\{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku\} \\
 &= m\mathcal{F}\{\ddot{u}\} + c\mathcal{F}\{\dot{u}\} + k\mathcal{F}\{u\} \\
 &= m(c\omega)^2 U(\omega) + c(c\omega) U(\omega) + k U(\omega) \\
 &= (c^2 - m\omega^2 + ic\omega + k) U(\omega),
 \end{aligned}$$

luego,

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{F}\{u(t)\}}{\mathcal{F}\{p(t)\}} = \frac{U(\omega)}{(c^2 - m\omega^2 + ic\omega + k) U(\omega)}$$

y

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + ic\omega + k} \quad \text{IV.3.14}$$

que es la función de transferencia de éste sistema mecánico.

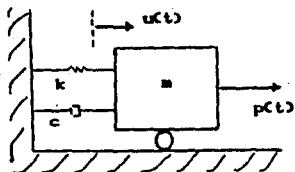


fig. IV.3.1 Sistema dinámico.

Introduciendo expresiones para la relación de frecuencias, r , y la fracción de amortiguamiento, β , esto se vuelve

$$H(\Omega) = \frac{1}{k(-r^2 + 2ir\beta + 1)} \quad \text{IV.3.15}$$

recordando que $\Omega = r\omega$, $c = 2m\omega\beta$ y $\omega^2 = k/m$.

Consecuentemente, la respuesta compleja en la frecuencia a una frecuencia excitadora $\Omega = n\omega$ será

$$H(n\Omega) = \frac{1}{k(-n^2r_1^2 + 2inr_1\beta + 1)} \quad \text{IV.3.16}$$

donde $r_1 = \Omega/\omega$. De la ec. IV.3.14 se puede observar que $H(n\Omega)$ es el conjugado complejo de $H(-n\Omega)$. De aquí, es posible expresar la respuesta en estado estacionario del sistema de UGDL a la función excitadora que representa cada término de la serie de Fourier. Aplicando el principio de superposición, la respuesta total del sistema, en estado estacionario, a cualquier tipo de excitación periódica, puede escribirse

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\Omega) P_n e^{in\Omega t}, \quad \text{IV.3.17}$$

donde P_n está definido por la ec. IV.2.24.

Es evidente la ventaja en simplicidad de la forma exponencial del análisis de la respuesta periódica, cuando la ec. IV.3.17 se compara con la expresión equivalente en forma trigonométrica de la serie IV.2.22.

IV.3.3 Análisis de la respuesta a través del dominio de la frecuencia.

Se sabe, del primer capítulo, que la manera en la que una estructura responde a una excitación dinámica dada, depende tanto de la naturaleza de la excitación, como de las características dinámicas de la estructura, esto es, de la manera como almacena y disipa la energía vibratoria. Para un sistema de un grado de libertad, estas características dinámicas están descritas simplemente por su período natural de vibración T o por su frecuencia circular ω y su amortiguamiento β . Ahora bien, la importancia del período natural o de la frecuencia natural de la estructura se demuestra por las grandes amplificaciones del movimiento de excitación en las condiciones de resonancia o cerca de ella, esto es, cuando $\Omega/\omega = 1$.

Por estas razones, aunque el análisis en el dominio del tiempo es completamente general y puede usarse para evaluar la respuesta de cualquier sistema lineal de UGDL a cualquier excitación arbitraria, en ocasiones es más conveniente realizar el análisis en el dominio de la frecuencia, con objeto de determinar las condiciones de amplificación mencionadas. Este análisis es, en concepto, similar al procedimiento del correspondiente a excitación periódica. Ambos métodos implican expresar la excitación aplicada en términos de componentes armónicos, evaluando la respuesta de la estructura para cada componente, para después superponer las respuestas armónicas y así obtener la respuesta estructural total. Como quiera que sea, para aplicar la técnica de excitación periódica a cargas arbitrarias, es necesario extender el concepto de series

de Fourier a la representación de funciones no periódicas. Para esto, es conveniente usar las expresiones de la serie de Fourier IV.2.23 y IV.2.24.

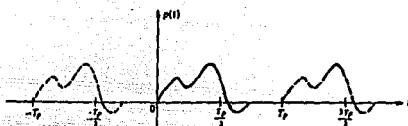


fig. IV.3.2 Excitación arbitraria representada por series de Fourier.

Considérese por ejemplo, la excitación arbitraria no periódica de la fig. IV.3.2. Si se representara esta función por una serie de Fourier, los coeficientes P_n , obtenidos por la integración de IV.2.24 sobre el intervalo $0 < t < T$ definirían de hecho la función periódica mostrada en la figura por las líneas punteadas al igual que la línea continua. En todo caso, aparentemente las excitaciones repetitivas espurias podrían eliminarse extendiendo el periodo de la excitación a infinito. Así, sería necesario reformular la expresión de la serie de Fourier, de tal forma que se extienda sobre un intervalo de tiempo infinito. Para esto, será conveniente reescribir IV.2.23 y IV.2.24 en una forma ligeramente modificada, usando la siguiente notación:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{\Delta\Omega}{2\pi}$$

$$n\Omega_1 = n\Delta\Omega = \Omega_n$$

$$P_n = \frac{1}{T_p} P_C(\Omega_n) = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} P_C(\Omega_n).$$

Con esta simbología, las ecuaciones de la serie de Fourier IV.2.23 y IV.2.24 se vuelven

$$p(t) = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \quad \text{IV.3.18}$$

$$P(\Omega_n) = T_p P_n = \int_{t_1 - T_p/2}^{t_2 + T_p/2} p(t) e^{-i\Omega_n t} dt \quad \text{IV.3.19}$$

donde los límites de integración son arbitrarios, tan grandes que puedan cubrir un período de excitación completo.

Si el período de excitación se extiende a infinito ($T_p \rightarrow \infty$), el incremento de la frecuencia se vuelve un infinitesimal ($\Delta\Omega \rightarrow d\Omega$) y las frecuencias discretas Ω_n se vuelven una función continua Ω . Así en el límite, la expresión de la serie de Fourier de la ec. IV.3.18 se convierte en la integral de Fourier

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad \text{IV.3.20}$$

en la cual, la función de amplitud de la armónica está dada por

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt. \quad \text{IV.3.21}$$

Las ecs. IV.3.20 y IV.3.21 son el par de transformadas de Fourier, por medio de las cuales la función en el tiempo puede obtenerse de la función en la frecuencia o viceversa por procesos equivalentes, según se estudió en el capítulo II.

Por analogía con la expresión en serie de Fourier de la ec. IV.3.18, la integral de Fourier de la ec. IV.3.20 puede interpretarse como la representación de una excitación arbitraria, como una suma infinita de componentes armónicos, donde $\frac{1}{2\pi}PC(\omega)$ define la amplitud por unidad de ω del componente de carga en la frecuencia ω . Multiplicando esto por la función de transferencia, $HK(\omega)$, se obtiene la amplitud por unidad de ω del componente de respuesta en la frecuencia ω . De aquí, la respuesta total puede obtenerse sumando estos componentes de respuesta sobre un intervalo de frecuencia completo. Expresando este concepto matemáticamente, se llega a la ecuación básica para el análisis de la respuesta a través del dominio de la frecuencia:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} HK(\omega) PC(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{IV.3.22}$$

Para aplicar este procedimiento en el dominio de la frecuencia, es necesario evaluar las componentes armónicas $PC(\omega)$ de la excitación dada mediante la ec. IV.3.21, y hacer uso de la función de transferencia para un sistema estructural de UGDL dada por la ec. IV.3.15. La fig. IV.3.3 esquematiza este procedimiento.

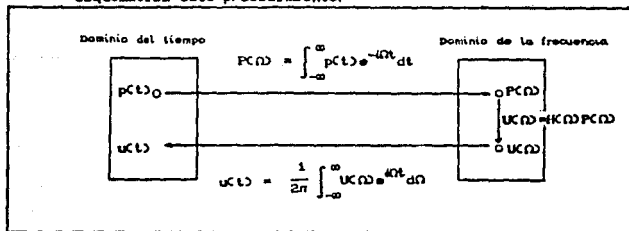


fig. IV.3.3 Reducción de la respuesta a un problema dado mediante su transformación al dominio de la frecuencia.

IV.4 EJEMPLOS.

Con objeto de mostrar ejemplos de aplicación de lo expuesto a lo largo del presente trabajo, en particular la aplicación de la teoría del análisis de Fourier en la obtención de la respuesta de un sistema de un grado de libertad sometido a excitaciones dinámicas específicas, se presentan a continuación cuatro funciones excitadoras en el dominio del tiempo (fig. IV.4.1) las cuales fueron transformadas al dominio de la frecuencia por medio de la transformada de Fourier.

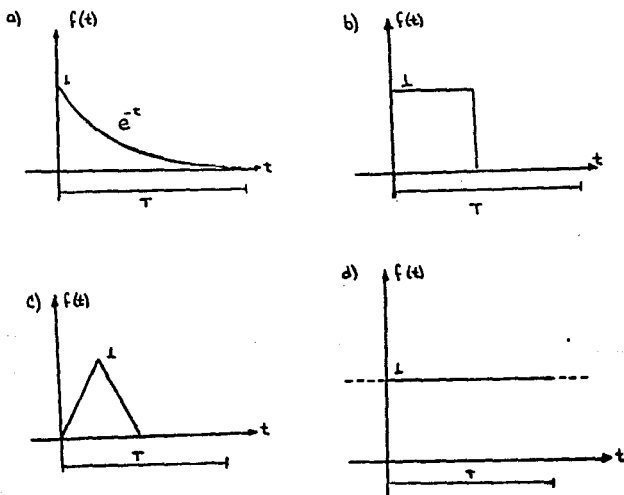


fig. IV.4.1 Funciones excitadoras en el dominio del tiempo.

Estas funciones fueron generadas por programas de computadora en forma discreta, y para su transformación se utilizó el programa de la sección II.3.2. Los resultados normalizados se muestran en la *fig. IV. 4.2*.

Como se explicó en la sección anterior, la metodología a seguir después de haber obtenido la transformada de Fourier de la función, sería multiplicar cada punto discretizado de la función en la frecuencia por el valor que le corresponda de la función de transferencia del sistema, ec. IV.3.14, que, como se recordará, depende de sus características físicas (m , k , c) y de la frecuencia Ω de la fuerza excitadora.

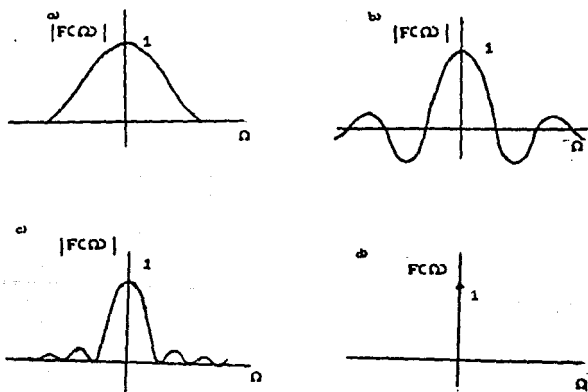


fig. IV. 4.2 Transformadas de las funciones de la *fig. IV. 4.1* al dominio de la frecuencia.

Con el fin de obtener la respuesta general de sistemas que tuviesen diferentes características físicas, se decidió obtenerla en forma de factor de amplificación dinámica, haciendo variar a éste con respecto a la relación de frecuencias, r , y a la fracción de amortiguamiento, β .

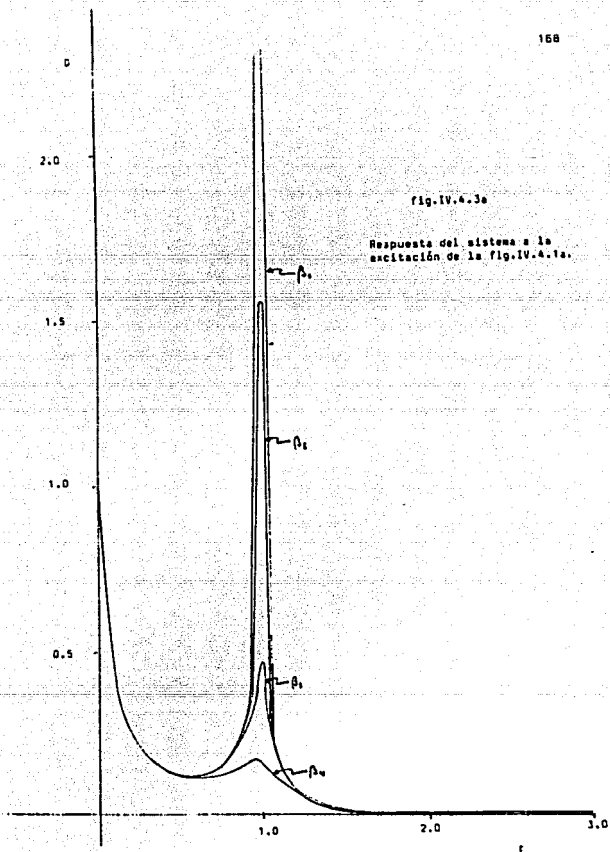
Se obtuvieron respuestas para fracciones de amortiguamiento de $\beta_1=0.005$, $\beta_2=0.015$, $\beta_3=0.05$, $\beta_4=0.15$, y para relaciones de frecuencias entre 0 y 3, utilizando la ec. IV.3.15 para la función de transferencia del sistema.

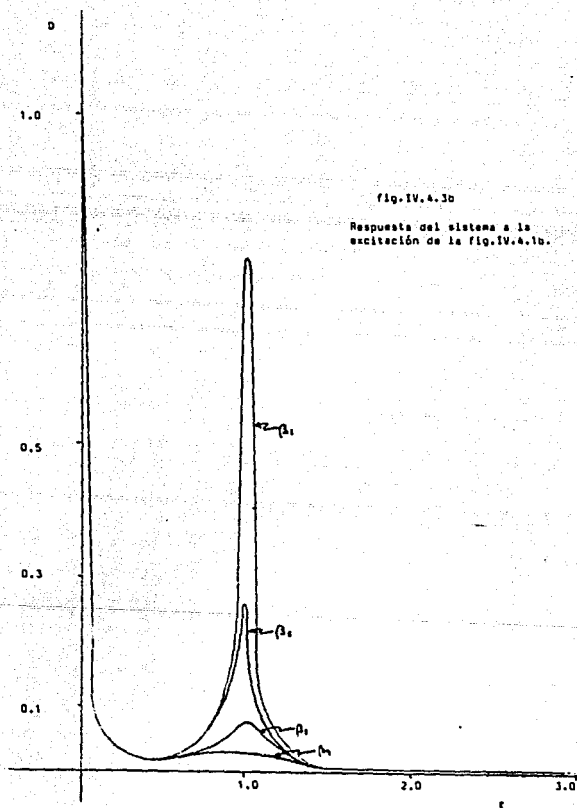
A fin de que los resultados obtenidos tengan mayor exactitud, al discretizar la función debe procurarse tomar el mayor número de puntos posibles, es decir, buscar que Δt sea muy pequeña, por lo mismo, en este trabajo se discretizaron las funciones en secuencias de 512 puntos, lo cual puede considerarse como aceptable para este tipo de problemas [13].

De esta forma se obtuvieron las respuestas del sistema a las excitaciones de las *figs. IV.4.1a* y *IV.4.1b*, respectivamente, las cuales se muestran en las gráficas de las *figs. IV.4.3a* y *IV.4.3b*.

Por último, podría mencionarse que es posible obtener de este modo la respuesta a cualquier tipo de excitación dinámica dada, siempre y cuando se le digite y se siga el procedimiento explicado anteriormente.

Los listados de los programas de computadora que sirvieron de apoyo para generar las funciones excitadoras y para generar la función de transferencia y obtener el factor de amplificación dinámica, se encuentran en el apéndice Z, y al final de esta sección se presentan algunos de los resultados en la forma como se obtuvieron por computadora. Estos corresponden a la función exponencial de la *fig. IV.4.1a*.





RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

RELACION DE AMORTIGUAMIENTO [beta] : .005000

RELACION DE FRECUENCIAS FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICO

	[r]	[D]
1	.0000000000	.100000E+01
2	.0117647100	.967705E+00
3	.0235294100	.8864926E+00
4	.0352941200	.788258E+00
5	.0470588200	.693188E+00
6	.0588235300	.610300E+00
7	.0705882300	.540861E+00
8	.0823529400	.483415E+00
9	.0941176400	.435841E+00
10	.1058823000	.396204E+00
11	.1176471000	.362906E+00
12	.1294118000	.334662E+00
13	.1411765000	.310514E+00
14	.1529412000	.289676E+00
15	.1647059000	.271561E+00
16	.1764706000	.255700E+00
17	.1882353000	.241734E+00
18	.2000000000	.229355E+00
19	.2117647000	.218327E+00
20	.2235294000	.208463E+00
21	.2352941000	.199602E+00
22	.2470588000	.191611E+00
23	.2588235000	.184376E+00
24	.2705882000	.177820E+00
25	.2823529000	.171856E+00
26	.2941177000	.166414E+00
27	.3058824000	.161456E+00
28	.3176471000	.156925E+00
29	.3294118000	.152770E+00
30	.3411765000	.148962E+00
31	.3529412000	.145476E+00
32	.3647059000	.142281E+00
33	.3764706000	.139353E+00
34	.3882353000	.136671E+00
35	.4000000000	.134226E+00
36	.4117647000	.131997E+00
37	.4235294000	.129966E+00
38	.4352941000	.128126E+00
39	.4470588000	.126467E+00
40	.4588235000	.124980E+00
41	.4705882000	.123637E+00
42	.4823530000	.122494E+00

43	.4941176000	.121484E+00
44	.5058823000	.120621E+00
45	.5176470000	.119906E+00
46	.5294118000	.119335E+00
47	.5411765000	.118906E+00
48	.5529411000	.118621E+00
49	.5647058000	.118478E+00
50	.5764706000	.118482E+00
51	.5882353000	.118632E+00
52	.6000000000	.118935E+00
53	.6117647000	.119396E+00
54	.6235294000	.120019E+00
55	.6352941000	.120814E+00
56	.6470588000	.121790E+00
57	.6588235000	.122958E+00
58	.6705883000	.124333E+00
59	.6823530000	.125929E+00
60	.6941176000	.127767E+00
61	.7058824000	.129868E+00
62	.7176471000	.132258E+00
63	.7294118000	.134972E+00
64	.7411765000	.138043E+00
65	.7529411000	.141521E+00
66	.7647058000	.145460E+00
67	.7764706000	.149925E+00
68	.7882353000	.155001E+00
69	.8000000000	.160788E+00
70	.8117647000	.167415E+00
71	.8235294000	.175044E+00
72	.8352941000	.183883E+00
73	.8470588000	.194203E+00
74	.8588236000	.206373E+00
75	.8705882000	.220884E+00
76	.8823529000	.238438E+00
77	.8941177000	.260028E+00
78	.9058824000	.287154E+00
79	.9176471000	.322179E+00
80	.9294118000	.368999E+00
81	.9411764000	.434609E+00
82	.9529412000	.532842E+00
83	.9647059000	.695387E+00
84	.9764706000	.101327E+01
85	.9882353000	.187566E+01
86	1.0000000000	.471197E+01
87	1.0117650000	.181140E+01
88	1.0235290000	.947427E+00
89	1.0352940000	.629244E+00
90	1.0470590000	.466531E+00
91	1.0588240000	.368158E+00
92	1.0705880000	.302397E+00
93	1.0823530000	.255414E+00
94	1.0941180000	.220205E+00
95	1.1058820000	.192870E+00
96	1.1176470000	.171053E+00
97	1.	
1294120000		.153245E+00
98	1.1411760000	.138454E+00
99	1.1529410000	.125981E+00
100	1.1647060000	.115328E+00

101	1.1764710000	.106128E+00
102	1.1882350000	.981131E-01
103	1.2000000000	.910700E-01
104	1.2117650000	.848396E-01
105	1.2235290000	.792898E-01
106	1.2352940000	.743203E-01
107	1.2470590000	.698449E-01
108	1.2588240000	.657971E-01
109	1.2705880000	.621183E-01
110	1.2823530000	.587645E-01
111	1.2941180000	.556953E-01
112	1.3058820000	.528775E-01
113	1.3176470000	.502819E-01
114	1.3294120000	.478836E-01
115	1.3411770000	.456656E-01
116	1.3529410000	.436053E-01
117	1.3647060000	.416897E-01
118	1.3764710000	.399051E-01
119	1.3882350000	.382371E-01
120	1.4000000000	.366774E-01
121	1.4117650000	.352152E-01
122	1.4235290000	.338429E-01
123	1.4352940000	.325517E-01
124	1.4470590000	.313365E-01
125	1.4588240000	.301912E-01
126	1.4705880000	.291099E-01
127	1.4823530000	.280877E-01
128	1.4941180000	.271204E-01
129	1.5058820000	.262034E-01
130	1.5176470000	.253337E-01
131	1.5294120000	.245071E-01
132	1.5411760000	.237217E-01
133	1.5529410000	.229743E-01
134	1.5647060000	.222630E-01
135	1.5764710000	.215849E-01
136	1.5882350000	.209386E-01
137	1.6000000000	.203210E-01
138	1.6117650000	.197315E-01
139	1.6235290000	.191674E-01
140	1.6352940000	.186287E-01
141	1.6470590000	.181121E-01
142	1.6588240000	.176172E-01
143	1.6705880000	.171426E-01
144	1.6823530000	.166873E-01
145	1.6941180000	.162502E-01
146	1.7058820000	.158302E-01
147	1.7176470000	.154272E-01
148	1.7294120000	.150392E-01
149	1.7411760000	.146662E-01
150	1.7529410000	.143071E-01
151	1.7647060000	.139619E-01
152	1.7764710000	.136285E-01
153	1.7882350000	.133075E-01
154	1.8000000000	.129979E-01
155	1.8117650000	.126992E-01
156	1.8235290000	.124106E-01
157	1.8352940000	.121322E-01
158	1.8470590000	.118635E-01

159	1.8588240000	.116034E-01
160	1.8705880000	.113523E-01
161	1.8823530000	.111094E-01
162	1.8941180000	.108743E-01
163	1.9058820000	.106469E-01
164	1.9176470000	.104266E-01
165	1.9294120000	.102130E-01
166	1.9411760000	.100066E-01
167	1.9529410000	.980623E-02
168	1.9647060000	.961203E-02
169	1.9764710000	.942366E-02
170	1.9882350000	.924096E-02
171	2.0000000000	.906378E-02
172	2.0117650000	.889173E-02
173	2.0235290000	.872492E-02
174	2.0352940000	.856273E-02
175	2.0470590000	.840540E-02
176	2.0588240000	.825219E-02
177	2.0705880000	.810352E-02
178	2.0823530000	.795909E-02
179	2.0941180000	.781846E-02
180	2.1058820000	.768179E-02
181	2.1176470000	.754879E-02
182	2.1294120000	.741935E-02
183	2.1411760000	.729333E-02
184	2.1529410000	.717063E-02
185	2.1647060000	.705113E-02
186	2.1764710000	.693473E-02
187	2.1882350000	.682157E-02
188	2.2000000000	.671098E-02
189	2.2117650000	.660320E-02
190	2.2235300000	.649836E-02
191	2.2352940000	.639590E-02
192	2.2470590000	.629620E-02
193	2.2588230000	.619895E-02
194	2.2705880000	.610407E-02
195	2.2823530000	.601149E-02
196	2.2941180000	.592114E-02
197	2.3058820000	.583295E-02
198	2.3176470000	.574707E-02
199	2.3294120000	.566299E-02
200	2.3411770000	.558086E-02
201	2.3529410000	.550062E-02
202	2.3647060000	.542244E-02
203	2.3764710000	.534605E-02
204	2.3882350000	.527141E-02
205	2.4000000000	.519826E-02
206	2.4117650000	.512696E-02
207	2.4235290000	.505725E-02
208	2.4352940000	.498887E-02
209	2.4470590000	.492218E-02
210	2.4588230000	.485695E-02
211	2.4705880000	.479294E-02
212	2.482 000	.473049E-02

213	2.4941180000	.466939E-02
214	56820000	.460959E-02
215	2.5176470000	.455124E-02
216	2.5294120000	.449395E-02
217	2.5411770000	.443804E-02
218	2.5529410000	.438313E-02
219	2.5647060000	.432955E-02
220	2.5764710000	.427707E-02
221	2.5882350000	.422549E-02
222	2.6000000000	.417514E-02
223	2.6117650000	.412640E-02
224	2.6235290000	.407712E-02
225	2.6352940000	.402975E-02
226	2.6470590000	.398315E-02
227	2.6588240000	.393764E-02
228	2.6705890000	.389267E-02
229	2.6823540000	.384914E-02
230	2.6941180000	.380628E-02
231	2.7058820000	.376441E-02
232	2.7176470000	.372320E-02
233	2.7294120000	.368279E-02
234	2.7411770000	.364315E-02
235	2.7529410000	.360427E-02
236	2.7647060000	.356613E-02
237	2.7764700000	.352871E-02
238	2.7882350000	.349200E-02
239	2.8000000000	.345598E-02
240	2.8117650000	.342078E-02
241	2.8235290000	.338609E-02
242	2.8352940000	.335205E-02
243	2.8470590000	.331878E-02
244	2.8588240000	.328612E-02
245	2.8705890000	.325393E-02
246	2.8823540000	.322232E-02
247	2.8941180000	.319142E-02
248	2.9058820000	.316095E-02
249	2.9176470000	.313103E-02
250	2.9294120000	.310178E-02
251	2.9411770000	.307292E-02
252	2.9529410000	.304472E-02
253	2.9647060000	.301702E-02
254	2.9764700000	.298968E-02
255	2.9882350000	.296295E-02
256	3.0000000000	.293670E-02

C O N C L U S I O N E S

CONCLUSIONES

El estudio de algunos de los conceptos del análisis de Fourier, permite establecer bases teóricas sólidas en las cuales se sustenta la metodología que permite obtener de manera sencilla, la respuesta de un sistema lineal sometido a una excitación dinámica específica, recurriendo al uso de tales conceptos fundamentales. Uno de estos, y tal vez el de mayor importancia, es el de la transformada de Fourier, la cual actúa como una poderosa herramienta técnica para la solución de este tipo de problemas al cumplirse la siguiente relación matemática: La transformada de Fourier de la salida (*respuesta*) de un sistema lineal, está dada por el producto de la función de transferencia del sistema con la transformada de Fourier de la función de entrada (*excitación*).

La aplicación de esta técnica matemática implica realizar el análisis dinámico en el dominio de la frecuencia. Es decir, la transformada de Fourier permite realizar una transformación reversible de una función dada en el dominio del tiempo, a otra equivalente, pero en términos de la frecuencia. Al realizar el análisis de esta forma, es suficiente con conocer la función de

transferencia del sistema para multiplicarla por la transformada de Fourier de la función excitadora, y de este modo obtener la respuesta del sistema en la frecuencia.

Si se desea, la respuesta puede permanecer en el dominio de la frecuencia, existiendo la posibilidad de generalizarla a fin de obtener gráficas que muestren la variación de la respuesta en forma de factor de amplificación dinámica, el cual depende del tipo de la excitación, del amortiguamiento del sistema y de la relación entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de la fuerza excitadora; o bien, otra posibilidad sería la de antitransformar la respuesta obtenida, para de esta manera, encontrar la historia de desplazamientos del sistema en el dominio del tiempo.

La aplicación de estos conceptos sería muy compleja y laboriosa de hacerse los cálculos de manera analítica; sin embargo, el algoritmo de la transformada rápida de Fourier expuesto en el presente trabajo, permite su aplicación de manera más simple, efectiva y sobre todo eficiente, debido al considerable ahorro en tiempo de procesamiento y cantidad de memoria utilizados, además de la factibilidad de poder realizar el proceso en una computadora personal.

Como comentario adicional, podría subrayarse simplemente, el que las matemáticas brindan los elementos teóricos y establecen las bases que permiten resolver problemas físicos, y que el auxilio de los métodos numéricos y el uso de la computadora digital, facilita su aplicación en algunos casos prácticos.

Por último, cabría mencionar que al desarrollar el presente trabajo se intentó cumplir como objetivo el mostrar la aplicación del análisis de Fourier en la obtención de la respuesta estructural dinámica de sistemas de un grado de libertad, proporcionando un programa que obtuviese la transformada de Fourier de una función por el método de la transformada rápida de Fourier.

A P E N D I C E S

APENDICE

Tabla 1

TRANSFORMADAS DE FOURIER		
N.º	$f(t)$ [$f(t)=0$ fuera del intervalo dado]	$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \phi(\omega)$
1	1 para $c_1 < t < c_2$	$\frac{e^{-i\omega c_2} - e^{-i\omega c_1}}{i\omega}$
2	1 para $-c < t < c$	$\frac{2 \operatorname{sen} c\omega}{\omega}$
3	e^{at} para $c_1 < t < c_2$	$\frac{e^{a c_2} e^{-i\omega c_2} - e^{a c_1} e^{-i\omega c_1}}{a - i\omega}$
4	e^{at} para $t > 0$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{1}{i\omega - a}$
5	e^{at} para $t > c$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{e^{a c} e^{-i\omega c}}{i\omega - a}$
6	e^{-at} para $t < 0$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{-1}{i\omega + a}$
7	e^{at} , $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{-2a}{\omega^2 + a^2}$
8	$-e^{-at}$ para $t < 0$, e^{at} para $t > 0$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{-2ia}{\omega^2 + a^2}$
9	$t^k e^{at}$ para $t > 0$, $k=1, 2, \dots$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{k!}{(i\omega - a)^{k+1}}$
10	e^{iat} para $-c < t < c$	$\frac{2 \operatorname{sen} c(\omega - b)}{\omega - b}$
11	$\frac{1}{a^2 + t^2}$, $\operatorname{Re} a < 0$	$-\frac{\pi}{a} e^{i\omega a}$
12	$\frac{1}{(a^2 + t^2)^2}$, $\operatorname{Re} a < 0$	$\frac{i\omega a}{2a} e^{i\omega a}$
13	$\frac{e^{bt}}{a^2 + t^2}$, $\operatorname{Re} a < 0$, b real	$-\frac{\pi}{a} e^{i\omega a - b}$
14	$\frac{\cos bt}{a^2 + t^2}$, $\operatorname{Re} a < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2a} (e^{i\omega a - H} + e^{i\omega a - H})$
15	$\frac{\sin bt}{a^2 + t^2}$, $\operatorname{Re} a < 0$, b real	$-\frac{\pi}{2a} (e^{i\omega a - H} - e^{i\omega a - H})$
16	1 para $0 < t < c$	$\frac{1 - e^{-i\omega c} (1 + i\omega c)}{-\omega^2}$
17	t^k para $0 < t < c$, $k=1, 2, \dots$	$\frac{k! - e^{-i\omega c} g_k(i\omega c)}{(i\omega)^{k+1}}$ $g_k(x) = x^k + kx^{k-1} + \dots + k!$
18	t para $0 < t < c$, $2t - c$ para $c < t < 2c$	$\frac{1 - 2e^{-i\omega c} + e^{-2i\omega c}}{-\omega^2}$
19	e^{-at} , $a > 0$	$\frac{\pi}{\sqrt{a}} e^{-a^2/\omega^2}$

TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES GENERALIZADAS*

N.º	$f(t)$	$\varphi(\omega) = \mathcal{O}[f]$	N.º	$f(t)$	$\varphi(\omega) = \mathcal{O}[f]$
1	$\delta(t)$	1	15	$e^{at} e^{-ct} U(t)$	$\frac{a^2}{[k(\omega-a)]^2+1} + \pi^2 \delta''(\omega-a)$
2	$\delta(t-c)$	$e^{-i\omega c}$	16	$e^{at}(t-c)^n U(t-c)$	$\frac{n! e^{-i\omega c - a c}}{[i(\omega-a)]^{n+1}} + \pi^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \times (i\omega)^{n-r} \delta^{(n-r)}(\omega-a)$
3	$\delta''(t)$	$(i\omega)^2$	17	$\frac{1}{t}$	$\pi i - 2\pi i U(\omega)$
4	$\delta''(t-c)$	$e^{-i\omega c} (i\omega)^2$	18	$\frac{1}{t^2}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
5	1	$2\pi \delta(\omega)$	19	$\frac{1}{t-c}$	$e^{-i\omega c} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
6	t	$2\pi i \delta'(\omega)$	20	$\frac{1}{(t-c)^2}$	$\frac{e^{-i\omega c} (-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
7	t^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$	21	$\frac{e^{at}}{t-c}$	$e^{-i\omega c - at} [\pi i - 2\pi i U(\omega-a)]$
8	e^{at}	$2\pi \delta(\omega-a)$	22	$\frac{e^{at}}{(t-c)^2}$	$\frac{e^{-i\omega c - at} [-k(\omega-a)]^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega-a)]$
9	$t^n e^{at}$	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega-a)$	23	$\frac{e^{at} t^{n-1}}{(n-1)!} [U(t) - \frac{1}{2}]$	$\frac{1}{(i\omega - i\omega)^2}$
10	$U(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$			
11	$t^n U(t)$	$\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + \pi^2 \delta^{(n)}(\omega)$			
12	$U(t-c)$	$\frac{e^{-i\omega c}}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$			
13	$(t-c)^n U(t-c)$	$\frac{n! e^{-i\omega c}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (i\omega)^{n-r} \delta^{(n-r)}(\omega)$			
14	$e^{at} U(t-c)$	$\frac{e^{-i\omega c - at}}{i(\omega-a)} + \pi \delta(\omega-a)$			

* Nota: En toda la tabla, $n=1, 2, 3, \dots$ y c y a son constantes reales.

Tabla # 2

TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES GENERALIZADAS*

N.º	f(t)	$\varphi(\omega) = \Phi[f]$	N.º	f(t)	$\varphi(\omega) = \Phi[f]$
1	$\delta(t)$	1	15	$e^{at} e^t U(t)$	$\frac{a!}{(a-\omega)^{a+1}} + \pi^2 \delta^{(a)}(\omega-a)$
2	$\delta(t-c)$	$e^{-i\omega c}$	16	$e^{at}(t-c)^n U(t-c)$	$\frac{n! e^{-i\omega a - a^n}}{(i\omega - a)^{n+1}} + \pi^2 \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \times (i\omega)^{r-n} \delta^{(n)}(\omega-a)$
3	$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$	17	$\frac{1}{t}$	$\pi i - 2\pi i U(\omega)$
4	$\delta^{(n)}(t-c)$	$e^{-i\omega c} (i\omega)^n$	18	$\frac{1}{t^2}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
5	1	$2\pi \delta(\omega)$	19	$\frac{1}{t-c}$	$e^{-i\omega c} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
6	t	$2\pi i \delta'(\omega)$	20	$\frac{1}{(t-c)^2}$	$\frac{e^{-i\omega c} (-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega)]$
7	t^n	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$	21	$\frac{e^{at}}{t-c}$	$e^{-i\omega a - a^n} [\pi i - 2\pi i U(\omega - a)]$
8	e^{at}	$2\pi \delta(\omega - a)$	22	$\frac{e^{at}}{(t-c)^2}$	$\frac{e^{-i\omega a - a^n} (-i\omega - a)^{n-1}}{(n-1)!} [\pi i - 2\pi i U(\omega - a)]$
9	t^n e^{at}	$2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega - a)$	23	$\frac{e^{at} t^{n-1}}{(n-1)!} [U(t-1)]$	$\frac{1}{(i\omega - a)^n}$
10	U(t)	$\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$			
11	t^n U(t)	$\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + \pi^n \delta^{(n)}(\omega)$			
12	U(t-c)	$\frac{e^{-i\omega c}}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$			
13	(t-c)^n U(t-c)	$\frac{n! e^{-i\omega c}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (i\omega)^{r-n} \delta^{(n-r)}(\omega)$			
14	e^{at} U(t-c)	$\frac{e^{-i\omega c - a^n}}{i\omega - a} + \pi \delta(\omega - a)$			

* Nota: En toda la tabla, n = 1, 2, 3, ..., y c y a son constantes reales.

APENDICE 3

TRES FORMAS DE LAS SERIES DE FOURIER

1 TRIGONOMETRICA.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \Omega_0 t + b_n \sin n \Omega_0 t).$$

2 TRIGONOMETRICA.

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n \Omega_0 t - \theta_n).$$

3 EXPONENCIAL COMPLEJA.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega_0 t}.$$

Para todas las formas anteriores

$$f(t+T) = f(t), \quad \Omega_0 = 2\pi/T.$$

FORMULAS DE CONVERSION:

Para $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = C_n^*,$$

$$C_n = |C_n| e^{i\phi_n}, \quad |C_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n),$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}\{C_n\}, \quad b_n = -2\operatorname{Im}\{C_n\},$$

$$C_n = 2|C_n| e^{i\theta_n} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n) = -\phi_n$$

Para $n = 0$

$$C_0 = \frac{1}{2}a_0$$

```

D Line# 1      7
1      PROGRAM FOURIER
2
3
4      UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
5      ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN
6      INGENIERIA CIVIL
7
8      TEMA DE TESIS PROFESIONAL:
9      "UNA APLICACION DEL ANALISIS DE FOURIER EN DINAMICA ESTRUCTURAL"
10
11      PROGRAMA: FRANCISCO JAVIER MORENO FIERRRROS
12
13
14      PROGRAMA PARA OBTENER LA TRANSFORMADA DE FOURIER
15      DE UNA FUNCION COMPLEJA, MEDIANTE EL METODO DE
16      LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER
17
18
19
20
21      COMPLEX F(1024),G(1024)
22      REAL A(1024),FREC(1024)
23      INTEGER SIG
24      DOUBLE PRECISION PI
25
26
27
28      LECTURA DEL NUMERO DE ELEMENTOS EN LA SECUENCIA
29
30
31 1      READ(1,100)NB
32      IF(NB)2,2,3
33 2      WRITE(1,700)
34      WRITE(2,700)
35      WRITE(3,100)NB
36      STOP
37
38
39      LECTURA DEL TIEMPO INICIAL, DEL INCREMENTO (DELTA) Y SIG
40
41 3      READ(1,250)TO,DELTA
42
43      SIG INDICA EL TIPO DE TRANSFORMACION QUE SE REALIZARA
44      SI SIG = -1, SIGNIFICA TRANSFORMADA DE FOURIER
45      SI SIG = 1, SIGNIFICA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER
46
47      WRITE(1,260)
48      READ(1,1)SIG
49      IF(SIG.NE.1.AND.SIG.NE.-1) GO TO 2
50      WRITE(1,1)SIG
51
52      LECTURA DE LOS VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION
53
54      READ(1,200) (F(I),I=1,NB)
55
56      WRITE(1,1)'TERMINO DE LECTURA DE DATOS'
57      PI=3.141592653589793
58
59

```

```

D Line# 1      7
60 #          OBTENCION DEL VALOR DE N, TAL QUE NB = 2**N
61
62
63          GN=ALOG(FLOAT(NB))/ALOG(2.0)
64          N=INT(GN)
65          IF((GN-FLD(N)).GT.1.0E-06)N=N+1
66          NN=2**N
67          IF(NN.EQ,NB)GO TO 5
68
69
70 #          NB NO ES POTENCIA DE DOS, SE AGREGARAN MUESTRAS NECESARIAS
71
72
73          WRITE(8,8)'SE AGREGARAN MUESTRAS NECESARIAS'
74
75          DO 4 I=NB+1,NN
1 76 4          F(I)=(0.0,0.0)
77          NB=NN
78
79
80 #          IMPRESION DE LOS DATOS
81
82 5          IF (SIG.EQ.1) GO TO 8
83
84          WRITE(8,8)'IMPRESION DE LOS DATOS'
85
86          WRITE(2,300)
87 6          B=TO
88          DO 7 I=1,NB
1 89          A(I)=REAL(F(I))
1 90          WRITE(2,400)I,B,A(I)
1 91 7          B=B+DELTA
92          IF(SIG.EQ.1)GO TO 11
93
94
95 #          LLAMADO A LA SUBROUTINA TRF
96
97
98 8          WRITE(8,8)'LLAMADO A LA SUBROUTINA TRF'
99
100         CALL TRF(F,N,NB,SIG,PI)
101
102         WRITE(8,8)'REGRESO A PROGRAMA PRINCIPAL'
103
104         IF (SIG.EQ.1) GO TO 12
105
106
107 #          ORDENAMIENTO DE LOS RESULTADOS DE ACUERDO A FRECUENCIAS
108 #          NEGATIVAS Y POSITIVAS
109
110         WRITE(8,8)'ORDENAMIENTO DE RESULTADOS'
111
112         OM=2.0*PI/(FLOAT(NB-1)*DELTA)
113         NB2=NB/2
114         FREC(NB2)=0.0
115         DO 9 I=NB2+1,NB
1 116 9         FREC(I)=OM*FLOAT(I-NB2)
117         DO 10 I=1,NB2-1
1 118         FREC(I)=-FREC(NB-I)

```

```

D Line# 1      7
1      119      G(I)=F(I+NB*1)
1      120 10    G(I+NB*1)=F(I)
1      121      G(NB-1)=F(NB)
1      122      G(NB)=F(NB*1)
1      123
1      124
1      125 *
1      126      IMPRESION DE RESULTADOS
1      127
1      128      WRITE(I,*)'IMPRESION DE RESULTADOS'
1      129
1      130      WRITE(2,500)
1      131      WRITE(2,600)(I,FREC(I),G(I),I=1,NB-1)
1      132
1      133 *
1      134      ARCHIVO DE RETRDLIMENTACION
1      135
1      136 11      WRITE(3,100)NB
1      137      WRITE(3,250)TD,DELTA
1      138      WRITE(3,200)(F(I),I=1,NB)
1      139      GO TO 1
1      140
1      141 *
1      142      SE CALCULO TRANSFORMADA INVERSA
1      143 12      WRITE(I,*)'TRANSFORMADA INVERSA'
1      144
1      145      WRITE(2,800)
1      146      GO TO 6
1      147
1      148
1      149 *
1      150      FORMATOS DE LECTURA DE DATOS
1      151
1      152 100      FORMAT(I4)
1      153 200      FORMAT(2E12.5)
1      154 250      FORMAT(2F15.10)
1      155 260      FORMAT(2X,'TRANSFORMADA [-1 3']',2X,'INVERSA [ 1 3]')
1      156
1      157
1      158 *
1      159      FORMATOS DE RESULTADOS
1      160 300      FORMAT(////,18X,'VALORES DISCRETIZADOS DE LA FUNCION',///,
1      161      -8X,'ELEMENTO',12X,'TIEMPO',15X,'VALOR DISCRETO',/)
1      162 400      FORMAT(9X,14,11X,E12.5,13X,E12.5)
1      163 500      FORMAT(////,10X,'VALORES CORRESPONDIENTES A LA TRANSFORMADA',
1      164      -' DE LA FUNCION',///,8X,'ELEMENTO',6X,'FRECUENCIA',6X,
1      165      -'PARTE REAL',5X,'PARTE IMAGINARIA',/)
1      166 600      FORMAT(9X,14,7X,E12.5,4X,E12.5,6X,E12.5)
1      167 700      FORMAT(/,2X,'FIN DE PROGRAMA')
1      168 800      FORMAT(////,18X,'RESULTADOS DE LA TRANSFORMACION INVERSA',///,
1      169      -8X,'ELEMENTO',12X,'TIEMPO',15X,'VALOR DISCRETO',/)
1      170      END

```

Name	Type	Offset	P Class
A	REAL	20482	
ALOG			INTRINSIC
B	REAL	24626	
DELTA	REAL	24590	

D Line#	1	7	
F	COMPLEX		2
FLOAT			
FREC	REAL	16786	
G	COMPLEX	8194	
GN	REAL	24610	
I	INTEGER*4	24598	
INT			
N	INTEGER*4	24614	
NB	INTEGER*4	24578	
NB2	INTEGER*4	24638	
NN	INTEGER*4	24618	
OM	REAL	24634	
PI	REAL*8	24602	
REAL			
SIG	INTEGER*4	24594	
TQ	REAL	24586	

INTRINSIC

INTRINSIC

INTRINSIC

```

171
172
173
174
175
176      SUBROUTINE TRF(F,N,NB,NSIG,PI)
177      COMPLEX F(NB),U,W,T
178      DOUBLE PRECISION PI
179
180
181
182      DIVISION POR NB DE CADA UND DE LOS ELEMENTOS
183
184      WRITE(*,*)'DIVISION POR NB'
185
186      SC=SQRT(FLOAT(NB))
187      DO 1 J=1,NB
1 188 1      F(J)=F(J)/SC
189      SIG=FLOAT(NSIG)
190
191
192      REDRDENACION DE LA SECUENCIA DE ACUERDO A LA fig.III.3.B
193
194      WRITE(*,*)'REORDENACION'
195
196      NBD2=NB/2
197      NBM1=NB-1
198      J=1
199      DO 4 L=1,NBM1
1 200      IF(L.GE.J)GO TO 2
1 201      T=F(J)
1 202      F(J)=F(L)
1 203      F(L)=T
1 204 2      K=NBD2
1 205 3      IF(K.GE.J)GO TO 4
1 206      J=J-K
1 207      K=K/2
1 208      GO TO 3
1 209 4      J=J+K
210
211

```

```

D Line# : 7                                Microsoft FORTRAN77 v3.20 02/84
212 :                                     CALCULO DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER
213 :                                     DE ACUERDO CON LA fig.111.3.6
214
215 WRITE(*,*)'CALCULO DE LA TRF'
216
217 DO 6 M=1,N
: 218   U=(1.0,0.0)
: 219   ME=2**M
: 220   K=ME/2
: 221   ANG=PI/K
: 222   W=CMPLX(COS(ANG),SIG*SIN(ANG))
: 223   DO 5 J=1,I
: 224     DO 5 L=J,NB,ME
: 225       LFI=L+K
: 226       T=F(LPK)*U
: 227       F(LFI)=F(L)-T
: 228         F(L)=F(L)+T
: 229   6 U=U*W
230 RETURN
231 END

```

Name	Type	Offset	P	Class
ANC	REAL	25280		
CMPLX				INTRINSIC
COS				INTRINSIC
F	COMPLEX	0	*	
FLOAT				INTRINSIC
J	INTEGER*4	25212		
K	INTEGER*4	25256		
L	INTEGER*4	25240		
LFI	INTEGER*4	25304		
M	INTEGER*4	25260		
ME	INTEGER*4	25276		
N	INTEGER*4	4	*	
NB	INTEGER*4	8	*	
NB02	INTEGER*4	25232		
NSM1	INTEGER*4	25256		
NSIG	INTEGER*4	12	*	
T	REAL*8	16	*	
U	REAL	25208		
SIN	REAL	25228		
SCRT				INTRINSIC
T	COMPLEX	25248		
U	COMPLEX	25268		
W	COMPLEX	25284		

Name	Type	Size	Class
FOURIE			PROGRAM
TRF			SUBROUTINE

Pass One No Errors Detected
231 Source Lines

```

D Line# 1 7
1 PROGRAM TRANS
2 COMPLEX F(1024),G(1024),H(1024)
3 REAL FREQ(1024),MAG(S12),FASE(S12),R(S12),D(S12)
4 DOUBLE PRECISION PI
5
6 1 READ(1,100)NB
7 WRITE(3,100)NB
8 IF(NB.LE.0)STOP
9 READ(1,200)TO,DELTA
10
11 * LECTURA DE LA TRANSFORMADA DE LA FUNCION
12
13 READ(1,300)(F(I),I=1,NB)
14
15 WRITE(*,*)' RIGIDEZ : K [kg/cm]
16 READ(*,*)AK
17 WRITE(*,*)' MASA : M [kg-seg2/cm]
18 READ(*,*)AM
19 WRITE(*,*)' REL. AMORTIG. : beta [adimensional]
20 READ(*,*)BETA
21
22 IF(AK.LE.0.0)AK=AM/(DELTA*DELTA)
23 C=2.0*BETA*SQRT(AK*AM)
24 FNS=SQRT(AK/AM)
25 PI=3.141592653589793
26
27 * GENERACION DE FRECUENCIAS Y ORDENACION
28
29 OM=2.0*PI/(FLOAT(NB-1)*DELTA)
30 NB2=NB/2
31 FREQ(NB2)=0.0
32 DO 2 I=NB2+1,NB
1 33 2 FREQ(I)=OM*FLOAT(I-NB2)
34 DO 3 I=1,NB2-1
1 35 FREQ(I)=-FREQ(NB-I)
1 36 G(I)=F(I+NB2+1)
1 37 3 G(I+NB2-1)=F(I)
38 G(NB-I)=F(NB2)
39 G(NB)=F(NB2+1)
40
41 * GENERACION VECTOR FUNCION DE TRANSFERENCIA Y CONVOLUCION CON G(I)
42
43 DO 4 I=1,NB
44 A=AK-AM*FREQ(I)*FREQ(I)
1 45 B=C*FREQ(I)
1 46 CC=A*A+B*B
1 47 H(I)=CMPLX(A/CC,-B/CC)
1 48 4 G(I)=G(I)*H(I)
49
50 * REORDENACION DATOS PARA ARCHIVO DE RETROALIMENTACION
51
52 DO 5 I=1,NB2-1
1 53 F(I)=G(I+NB2-1)
1 54 5 F(I+NB2+1)=G(I)
55 F(NB2)=G(NB-1)
56 F(NB2+1)=G(NB)
57 WRITE(*,*)F(1),H(1),I=1,NB)
58
59 * GENERACION MAGNITUD, ANGULO DE FASE, RELACION DE FRECUENCIAS

```

```

D Line# 1      7
60
61      DO 5 I=1,NB2
62          MAG(I)=CABS(G(NB2-1+I))
63          D(I)=MAG(I)*A1
64          FASE(I)=-ATAN(A1MAG(G(NB2-1+I))/REAL(G(NB2-1+I)))+(180.0/P1)
65 5      R(I)=FREQ(NB2-1+I)/FNS
66
67 *      IMPRESION DE RESULTADOS
68
69      WRITE(2,400)AM,AK,C,FNS,BETA
70      WRITE(2,200)
71      WRITE(2,600)(I,H(I),FREQ(I),G(I),I=1,NB-1)
72      WRITE(2,800)
73      WRITE(2,810)(I,FREQ(NB2-1+I),MAG(I),FASE(I),I=1,NB2)
74
75 *      DATOS PARA RETROALIMENTACION
76
77      WRITE(3,200)TD,DELTA
78      WRITE(3,300)(F(I),I=1,NB)
79
80 *      RESULTADOS PARA GRAFICACION
81
82      WRITE(4,820)BETA
83      WRITE(4,830)(R(I),D(I),I=1,NB2)
84      GO TO 1
85
86 *      FORMATOS
87
88 100      FORMAT(14)
89 200      FORMAT(2F15.10)
90 300      FORMAT(CE12.5)
91 400      FORMAT(////,20X,'CARACTERISTICAS DINAMICAS DEL SISTEMA',////,
92          -18X,'[ MASA ]', ' m = ',E10.5,' kg-seg2/cm',///,
93          -12X,'[ RIGIDEZ ]', ' k = ',E10.5,' kg/cm',///,
94          -12X,'[ AMORTIGUAMIENTO ]', ' c = ',E10.5,' kg-seg/cm',///,
95          -8X,'FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA', ' ',E10.5,' rad/seg',///,
96          -8X,'RELACION DE AMORTIGUAMIENTO', ' ',F10.5,////)
97 500      FORMAT(///,18X,'RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA',///,
98          -9X,'FUNCION DE TRANSFERENCIA', ' FRECUENCIA', ' RESPUESTA',
99          -'.', ' ',6X,' ',20X,' ',6X,' DE',5X,' ',20X,' ',/, ' NUMERO',
100         -' REAL', ' IMAGINARIO', ' EXCITACION', ' REAL', ' IMAGINARIO',
101         -//)
102 600      FORMAT(2X,14,SE14.5)
103 800      FORMAT(///,3X,'ELEMENTO',10X,'FRECUENCIA',5X,'MAGNITUD DE LA',
104         -'RESPUESTA',8X,'FASE',///)
105 810      FORMAT(5X,14,11X,E12.5,9X,E14.5,10X,F10.5)
106 820      FORMAT(///,7X,'GENERALIZACION DE LA RESPUESTA EN EL DOMINIO',
107         -'DE LA FRECUENCIA',///,7X,'RELACION DE AMORTIGUAMIENTO [beta]',
108         -'F10.5,///,7X,'RELACION DE FRECUENCIAS',7X,'FACTOR DE',
109         -'AMPLIFICACION DINAMICA',///,16X,'[ r ]',29X,'[ D ]',///)
110 830      FORMAT(11X,F15.10,20X,E14.6)
111      END

```

Name	Type	Offset	Class
A	REAL	36934	
A1MAG	REAL		INTRINSIC
AK	REAL	36886	
AM	REAL	36890	

D Line#	1	7		
ATAN				INTRINSIC
B	REAL	36938		
BETA	REAL	36294		
C	REAL	36893		
CABS				INTRINSIC
CC	REAL	36942		
CMPLX				INTRINSIC
D	REAL	34818		
DELTA	REAL	36874		
F	COMPLEX	2		
FASE	REAL	32770		
FLOAT				INTRINSIC
FNS	REAL	36902		
FREC	REAL	28674		
G	COMPLEX	8194		
H	COMPLEX	16386		
I	INTEGER#4	36878		
MAG	REAL	24578		
NB	INTEGER#4	36866		
NB2	INTEGER#4	36918		
OM	REAL	36914		
PI	REAL#8	36906		
R	REAL	26626		
REAL				INTRINSIC
SORT				INTRINSIC
TO	REAL	36870		

Name	Type	Size	Class
TRANS			PROGRAM

Pass One No Errors Detected
111 Source Lines

```
PROGRAMA PARA OBTENER EL FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICO
COMPLEJO F EN LA VARIACION DE LA RELACION DE FRECUENCIAS
REAL FREC(1) EN UN RANGO DADO
DOBLE PRECISION F, F*
```

PROGRAMA PARA OBTENER EL FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICO
CON RESPECTO A LA VARIACION DE LA RELACION DE FRECUENCIAS
PARA DIFERENTES TIPOS DE EXCITACION, EN EL DOMINIO DE LA
FRECUENCIA.

191

PROGRAMA: FRANCISCO JAVIER MORENO FIERROS.

LECTURA DE DATOS

```
READ(1,100)NB
WRITE(2,100)NB
IF(NR,1,0)STOP
READ(1,200)F0,DELTA
```

LECTURA DE LA TRANSFORMADA DE LA FUNCION

```
READ(1,300)(F(I),I=1,NB)
WRITE(3,4) 'RELACION DE AMORTIGUAMIENTO : [beta]'
```

```
READ(4,5)BETA
```

```
WRITE(3,6) 'AMPLITUD MAXIMA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA'
```

```
READ(4,7)G0
PI=3.141592653589793
FNS=P1*FLOAT(NB-2)/(C.*DELTA*FLOAT(NB-1))
```

GENERACION DE FRECUENCIAS Y ORDENACION

```
OM=2.0*PI/(FLOAT(NB-1)*DELTA)
```

```
NP2=NB/2
```

```
FREQ(NP2)=0.0
```

```
DO 2 I = NP2+1, NB
```

```
FREQ(I)=OM*FLOAT(I-NP2)
```

```
DO 3 I = 1, NP2
```

```
FREQ(I)=FREQ(NB-I)
```

```
G(I)=F(I)*NB+1
```

```
G(I+NB2-1)=F(I)
```

```
G(NP-1)=F(NP2)
```

```
G(NB)=F(NB2-1)
```

normalizacion de la funcion en el dominio de la frecuencia

```
DO 4 I = 1, NB
```

```
G(I)=G(I)/G0
```

GENERACION RELACION DE FRECUENCIAS Y FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICO

```
DO 5 I = 1, NB
```

```
R(I)=FREQ(I)/FNS
```

```
H(I)=CMPLX((1-R(I))*R(I),2.*BETA*R(I))
```

```
G(I)=G(I)/H(I)
```

```
D(I)=CABS(G(I))
```

REORDENACION DE DATOS PARA ARCHIVO DE RETROALIMENTACION

```
DO 6 I = 1, NB2-1
```

```
F(I)=G(I+NB2-1)*G0
```

```
F(I+NB2-1)=G(I)*G0
```

```
F(NB2)=G(NP-1)*G0
```

```
F(NB2-1)=G(NB2)*G0
```

IMPRESION DATOS PARA ARCHIVO DE RETROALIMENTACION

```
WRITE(3,200)F0,DELTA
```

```
WRITE(3,300)(F(I),I=1,NB)
```

IMPRESION DE RESULTADOS

```
WRITE(2,400)BETA
```

```
WRITE(2,500)(I,R(I+NB2-1),D(I+NB2-1),I=1,NB2)
```

GO TO 1

FORMATS

```
100 FORMAT(I4)
200 FORMAT(2F15.10)
300 FORMAT(2E12.5)
400 FORMAT(///,16X,'RESPUESTA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA',
-///,8X,'RELACION DE AMORTIGUAMIENTO [beta] :',F10.6,
-///,7X,'RELACION DE FRECUENCIAS',7X,'FACTOR DE AMPLIFICACION',
-///,DINAMICO',///,16X,'[ F ]',29X,'[ D ]',///)
500 FORMAT(I2,8X,F15.10,20X,E14.6)
```

APENDICE D

S I M B O L O G I A

a_0, a_n, b_n, c_n	Coefficientes de la serie de Fourier
a, b, A, B	Constantes arbitrarias
A_n, B_n	Coefficientes
c, c_c	Coefficiente de amortiguamiento, amortiguamiento crítico.
D	Factor de amplificación dinámica
D	Operador d/dt
$D_n(u)$	Núcleo de Dirichlet
e	Base de los logaritmos naturales
E	Error cuadrático medio
f_i	Fuerza de inercia
f_A	Fuerza de amortiguamiento
f_s	Fuerza de restitución de resorte elástico
f	Frecuencia cíclica
$f(x), g(x)$	Funciones arbitrarias
$F(u)$	Transformada de Fourier de $f(x)$
$f(t)$	Función continua en el tiempo
$F(\Omega)$	Función continua en la frecuencia.
f_r	Transformada de Fourier de $f(t)$
F_n	Función discreta en el tiempo
F_n	Función discreta en la frecuencia.
$f_e(t), f_s(t)$	Transformada discreta de Fourier de f_r
$f_e(t), f_s(t)$	Funciones de entrada y salida en un sistema lineal
$F_e(\Omega), F_s(\Omega)$	Transformadas de Fourier de $f_e(t)$ y $f_s(t)$

$F^*(\Omega)$	Conjugado complejo de $F(\Omega)$
$F_c(\Omega), F_s(\Omega)$	Transformada coseno y transformada seno de Fourier de $f(t)$
G, G_1, G_2	Constantes arbitrarias
$h(t)$	Respuesta de un sistema lineal a la función impulso unitario
$H(\Omega), H_c(\Omega)$	Función de transferencia de un sistema lineal. Transformada de Fourier de $h(t)$
i	Unidad imaginaria $\sqrt{-1}$
$IC(\Omega)$	Parte imaginaria de $F(\Omega)$
k	Constante de rigidez
k	Constante, valor característico
l	Límite de un intervalo cualquiera, subíndice
L	Operador lineal
m	Masa idealizada de un sistema lineal
k, l, m, n, e	Indices
N	Número de elementos en una secuencia discreta
P	Carga estática
$p(t)$	Carga dinámica con variación en el tiempo
p_0	Amplitud de $p(t)$
$PC(\Omega)$	Carga dinámica con variación en la frecuencia. Transformada de Fourier de $p(t)$
P_n	Coefficientes de la serie compleja de Fourier
r	Relación de frecuencias
$RC(t)$	Relación desplazamiento dinámico a desplazamiento estático
$RC(\Omega)$	Parte real de $F(\Omega)$
t	Variable independiente tiempo
t_d	Duración de un impulso
T, T_p	Periodo

u	Variable arbitraria
$u(t)$	Desplazamiento en el tiempo
$\dot{u}(t)$	Velocidad $du(t) / dt$
$\ddot{u}(t)$	Aceleración $d^2u(t) / dt^2$
$u_c(t)$	Solución complementaria de la ecuación diferencial de movimiento
$u_p(t)$	Solución particular de la ecuación diferencial de movimiento
u_{est}	Desplazamiento estático
$U(\Omega)$	Desplazamiento en la frecuencia. Transformada de Fourier de $u(t)$
x	Variable arbitraria
α	Variable arbitraria
β	Fracción de amortiguamiento ω/Ω
δ	Decremento logarítmico
$\delta(t)$	Función impulso unitario
θ	Angulo de fase
$\phi(\Omega)$	Espectro de fase
$\phi_n(x), \theta_n(x)$	Secuencias de funciones arbitrarias
$\{\phi_n(x)\}$	Conjunto ortonormal de funciones
λ	Constante
ω	Frecuencia circular, velocidad angular o frecuencia natural del sistema
ω_A	Frecuencia de vibración amortiguada del sistema
ω_s	Frecuencia de vibración sobreamortiguada del sistema
Ω	Frecuencia circular de la fuerza excitadora
Ω_n	Frecuencia n -ésima de la fuerza excitadora
ρ	Resultante de la amplitud de movimiento

Δt	Intervalo muestral de tiempo
Δv	Cambio de velocidad
\mathcal{F}	Operador de la transformada de Fourier
\mathcal{F}^{-1}	Operador de la transformada de Fourier inversa
$\mathcal{F}_c \mathcal{F}_c^{-1}$	Operadores de la transformada y de la transformada inversa de Fourier coseno
$\mathcal{F}_s \mathcal{F}_s^{-1}$	Operadores de la transformada y de la transformada inversa de Fourier seno

REFERENCIAS

BIBLIOGRAFICAS

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Arfken, G.
Mathematical Methods for Physicist
London. Academic Press. 1966.
- [2] Bajpai, A. C.; Calus, I. M.; Fairley, J. A.
Matemáticas para Estudiantes de Ingeniería y Ciencias, Vol. 2, Trad. por Pérez, J. H.,
México, D. F. LIMUSA. 1979.
- [3] Biggs, John M.
Introduction to Structural Dynamics
New York. Mc Graw-Hill. 1964.
- [4] Bracewell, Ronald Newbold.
The Fourier Transform and its applications
New York. Mc Graw-Hill. 1978.
- [5] Brand, Louis.
Advanced Calculus
New York. John Wiley & Sons, Inc. 1955.
- [6] Brigham, E. Oran.
The Fast Fourier Transform
Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc. 1974.
- [7] Burden, R. L.; Faires, J. D.; Reynolds, A. C.
Numerical Analysis
Boston. Prindle, Weber & Schmidt. 1981.
- [8] Carslaw, H. S.
An Introduction to the Theory of Fourier's series and integrals. 3rd ed.
New York. Dover Publications, Inc. 1950.
- [9] Churchill, R. V.; Brown, J. W.
Fourier Series and Boundary Value Problems
New York. Mc Graw-Hill. 1969.
- [10] Clough, R. W.; Penzien, J.
Dynamics of Structures
Tokio. Mc Graw-Hill-Kogakusha. 1975
- [11] Craig, R. R.
Structural Dynamics
New York. John Wiley & Sons, Inc. 1981.

- [12] Dahlquist, Germund; Björck, Åke.
Numerical Methods
Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall. 1969.
- [13] De Silva, C.W.
Dynamics Testing and Seismic Qualification Practice
Lexington, USA. Lexington Books. 1983.
- [14] Estrada U., G.
Estructuras Antisísmicas
México, D.F. CECSA. 1984.
- [15] Fourier, Jean Baptiste Joseph.
Analytical Theory of Heat
Translated by Freeman, A. (Great books of Western World). London. Britannica, Inc. 1982.
- [16] Hsu, Hwei P.
Análisis de Fourier
trad. por Florez, T. R.
México, D.F. Fondo Educativo Interamericano. 1973.
- [17] Kaplan, W.
Advanced Mathematics for Engineers
Reading, USA. Addison-Wesley Publishing Co, Inc. 1981.
- [18] Newland, D.E.
An introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis
London. Longman group limited. 1978.
- [19] Palencia G., Victor J.
Respuesta estructural dinámica mediante funciones de transferencia (Examen de Grado de Maestría en Estructuras. UNAM). México, D.F. 1978.
- [20] Ralston, A.; Rabinowitz, P.
A first Course in Numerical Analysis
New York. Mc Graw-Hill. 1961.
- [21] Sokolnikoff, I.S.
Advanced Calculus
New York. Mc Graw-Hill. 1939.
- [22] Sokolnikoff, I.S.; Redheffer, R.M.
Mathematics of Physics and Modern Engineering
New York. Mc Graw-Hill. 1958.

- [23] Titchmarsh, E.C.
The Theory of Functions
London. Oxford University Press. 1939.
- [24] Torres F., J.A.; Czitrom, V.
Métodos para la Solución de Problemas con
computadora digital. México, D.F.
Representaciones y Servicios de Ingeniería. 1980.
- [25] Vierk, Robert K.
Vibration Analysis
New York. Harper & Row, Publishers. 1970.
- [26] Wiener, N.
The Fourier Integral and Certain of its
Applications.
New York. Dover Publications, Inc. 1958.