

24/51



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS
EN UN PLASMA FRIO MAGNETIZADO

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A

MARCO ANTONIO RODRIGUEZ VELEZ

México, D. F. 1988



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UN PLASMA
FRIO MAGNETIZADO

I N D I C E

	PAG.
INTRODUCCION	1
CAPITULO I	7
Ondas	7
1.1 Descripción físico-matemática	7
1.2 Oscilaciones Armónicas	11
1.3 Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo	15
1.4 Ondas en tres dimensiones	21
1.5 Ondas Esféricas	27
1.6 Clasificación de las Ondas	29
1.7 Características generales de las Ondas	29
CAPITULO II	32
Ondas Electromagnéticas	
2.1 Introducción	32
2.2 Ecuaciones de Maxwell	36
2.2.1 Ley de Gauss-Eléctrica	37
2.2.2 Ley de Gauss-Magnética	38
2.2.3 Ley de Inducción de Faraday	38
2.2.4 Ley Circuital de Ampere	40
2.3 La luz como onda electromagnética	42
2.4 Producción de Ondas Electromagnéticas	47
2.5 Ondas Electromagnéticas Polarizadas	48
2.6 Energía de una Onda	52
2.7 Espectro Electromagnético	55
CAPITULO III	60
Elementos de la Física de plasmas	60

	PAG.
3.1 Introducción	60
3.2 Descripción de un Plasma	64
3.3 Parámetros de un Plasma	68
3.3.1 Esfera de Debye	68
3.3.2 Frecuencia del Plasma	72
3.3.3 Frecuencia de Ciclotrón	74
3.3.4 Parámetro de Plasma	76
3.4 Ondas en Plasmas	76
CAPITULO IV	80
Propagación de Ondas Electromagnéticas en un Plasma Frío Magnetizado	80
4.1 Introducción	80
4.2 Condiciones para la propagación de ondas en un plasma frío no-magnetizado	81
4.3 Plasma como Dos Fluidos	84
4.4 Constante dieléctrica de un Plasma Frío Magnetizado	86
4.5 Relación de Dispersión	88
4.6 Ondas propagándose con dirección paralela al campo Magnético Aplicado.	93
4.6.1 Ondas de alta frecuencia	93
4.6.2 Ondas de Frecuencia Intermedia	98
4.6.3 Ondas de Baja Frecuencia	101
4.7 Ondas propagándose con dirección perpendicular al campo magnético	102
4.7.1 Ondas de Alta frecuencia	102
4.7.2 Ondas de frecuencia Intermedia y Baja	107
CONCLUSIONES	110
APENDICE	119
Bibliografía	121

INTRODUCCION,

En el año de 1929 Tonks y Langmuir emplean por primera vez la palabra plasma para definir un conjunto de partículas cargadas que se produjeron en sus estudios de oscilaciones en descargas eléctricas. Actualmente el término plasma se utiliza para definir un conjunto de partículas cargadas y neutras que exhiben un comportamiento colectivo, el cual se produce por el largo alcance de las fuerzas electrostáticas. Así, un gas ionizado en el cual todos, o un número considerable de átomos han perdido uno o varios de sus electrones, formando una mezcla de electrones libres y iones, se llama plasma. Tal ionización se puede obtener bajo varias condiciones, por ejemplo en el interior de las estrellas, donde las temperaturas son mucho más grandes que aquellas que pueden existir en la Tierra. La ionización de las atmósferas de los planetas o de un gas en la vecindad de las estrellas, tiene lugar bajo la acción de la radiación ultravioleta proveniente del Sol y de las estrellas, respectivamente. Aunque la temperatura de los plasmas es baja en estos casos la recombinación es un proceso lento en este tipo de plasmas y la ionización se mantiene por un largo período de tiempo.

Aproximadamente el 99% de la materia total existente en el universo se encuentra en estado de plasma y este, en la mayoría de los casos se encuentra inmerso en un campo magnético. Tal es la situación existente en el espacio exterior, en

partícula en el medio interplanetario, cuya principal fuente es el Sol. La emisión continua de plasma provenientes del Sol - viento solar - viajan a través del medio interplanetario, interaccionando con los campos magnéticos de los planetas que lo tienen.

Si el campo magnético de un planeta es lo suficientemente intenso, puede evitar el acceso del viento solar a la atmósfera o superficie del mismo, y formar una cavidad alrededor del planeta dentro de la cual se encuentran confinado su campo magnético, a tal región se le conoce como magnetósfera del planeta en cuestión.

Debido a que no todos los planetas del sistema solar tienen campos magnéticos intensos, como muestran las recientes mediciones espaciales hechas en Venus y Marte, se tienen complejos fenómenos de interacción entre un plasma magnetizado, el viento solar y un plasma no magnetizado en la región donde coinciden la parte superior de la ionósfera del planeta y las líneas de campo magnético.

Algunos de los principales tópicos concernientes a los plasmas en el cosmos son: la emisión, absorción y transferencia de radiación, en particular de ondas de Radio y ondas en el visible, las cuales tienen la capacidad de poder atravesar la atmósfera terrestre, brindándonos con ello la posibilidad de estudiar la ocurrencia de fenómenos que tienen su origen en el espacio exterior, mediante un análisis de datos tomados, con una serie de aparatos, como por ejemplo un te_

lescopio óptico o un radiotelescopio, desde la Tierra.

Uno de los procesos más espectaculares en los que interviene los plasmas, ocurren en las supernovas y quizá el caso más conocido sea el de la nebulosa del Cangrejo, que a diferencia de otras presenta una situación extrema en cuanto a procesos energéticos se refiere, pues la radiación que emite corresponde esencialmente a todas las frecuencias ubicadas entre las ondas de radio y rayos X.

La estrella de la cual tenemos más información, es el Sol y por lo que a esta se refiere, una gran cantidad de procesos que involucran plasmas tienen lugar en las cercanías de su superficie. La atmósfera solar se puede dividir en tres regiones: la fotosfera, la cromósfera y la corona. La primera es el disco visible del Sol que tiene como características la granulación solar y a la supergranulación.

La cromósfera y la corona son visibles durante los eclipses totales de Sol, siendo la primera una región coloreada, visible por un segundo, o bien después del comienzo del eclipse y antes de que termine. La corona, visible durante la totalidad del eclipse, se extiende varios radios solares, es inhomogénea y cambia de apariencia de un eclipse total a otro. Normalmente no es visible, pues es ópticamente delgada a su propia radiación, en ella se encuentran los hoyos coronales, que son regiones de densidad inferior al resto de la corona, que conectan regiones enormemente separadas de la superficie solar. Esta corona se encuentra a

una temperatura de más de un millón de grados, por lo que la materia que la constituye está altamente ionizada y es por lo tanto, un plasma. En la superficie y en la atmósfera del Sol se generan ondas electromagnéticas de todas las longitudes de onda, desde las enormes ondas de radio, hasta los ultracortos rayos γ . Para llegar a la Tierra, estas ondas deben propagarse por el plasma de la corona y del viento solar y de su observación y de las características conocidas de la interacción entre un plasma y una onda electromagnética, se pueden deducir propiedades de este, pues todas las ondas que llegan a la Tierra, traen de alguna manera información de las propiedades y características del medio a través del cual se propagan.

Las ondas electromagnéticas se pueden usar también como sondas controladas desde la tierra, para conocer el estado de los plasmas circundantes, principalmente la ionósfera.

La breve discusión precedente nos permite concluir que al existir interacción entre las ondas electromagnéticas y los plasmas, éstas resultan ser una herramienta bastante útil y económica para obtener un mejor y más amplio conocimiento de los plasmas espaciales, por dónde viajan, qué son los plasmas particulares a los cuales se va a aplicar la teoría expuesta en el presente trabajo. Tales plasmas incluyen, la corona solar, el viento solar - como se mencionó anteriormente - las magnetósferas, el medio interestelar, las colas de los cometas, las ionósferas, etc.

Parte de la radiación de estos plasmas se observa en longitudes de ondas de radio, siendo una parte importante de la teoría de plasmas astrofísicos asociada con los procesos de radiación. Los procesos de emisión de los plasmas involucran varias etapas, la primera es la generación de ondas de Langmuir, que son ondas longitudinales originadas por el movimiento de los electrones del plasma. Las otras etapas, que no serán tratadas en el presente trabajo, involucran la conversión de la energía de las ondas de Langmuir en energía de escape de ondas transversales de frecuencia cercana a la del plasma. Unicamente las ondas transversales ligeramente modificadas por el campo magnético, debido al carácter magnetoiónico del medio, pueden escapar de una fuente astrofísica.

Así, el objetivo del presente trabajo es combinar, tanto la teoría electromagnética, como la física de plasmas, para analizar, desde el modelo a desarrollar, la manera en que se propagan las ondas electromagnéticas en un plasma frío magnetizado, siendo éste el estado en que se encuentran la mayoría de los plasmas espaciales.

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma, es por lo general bastante complicado, además de extenso. Por ello nos limitaremos al caso de un plasma en las condiciones mencionadas anteriormente, lo cual nos permite desprestigiar el efecto de las colisiones entre partículas. El modelo a emplear será el de considerar al plasma como formado por dos fluidos conductores,

acoplados entre sí: un fluido de electrones y un fluido de iones. La razón para emplear tal modelo, se debe principalmente a dos cosas: la primera, a su simplicidad en comparación con un tratamiento estadístico y la segunda y más importante, es que a frecuencias de la onda lo suficientemente altas como para que el movimiento de los iones pueda ser despreciado, en comparación con el de los electrones, se tendrá la creación de densidades de carga local, resultando así inadecuado el modelo de un fluido.

Sin embargo, el modelo también presenta algunas desventajas que se derivan de no conocer las velocidades de las partículas, de modo que los efectos que dependen de este dato no pueden ser estudiados en este contexto, como por ejemplo el amortiguamiento de Landau.

El estudio comienza con una revisión de los conceptos indispensables para una comprensión óptima del problema.

CAPÍTULO I

O N D A S

1.1 Descripción físico-matemática.

Al observar, el continuo movimiento de las cosas que conforman nuestra naturaleza, podemos percibir que aquello que se mueve (además de hacerlo de muy diversas formas), no necesariamente tiene que ser un objeto material; tal es el caso de la propagación de una vibración, en una cuerda tensa, cuando se interacciona con alguna parte de la misma.

Existen movimientos muy peculiares, que tienen la característica de repetirse en igual forma cada determinado tiempo; ejemplos de este movimiento es el realizado por un péndulo en su ir y venir y también el de la cuerda mencionada anteriormente; movimientos como éstos se conocen como: movimientos armónicos o periódicos.

Estudiamos el caso de una perturbación que se propaga de una forma ψ de período τ , tal que:

$$\psi(t) = \psi(\tau + t) \quad (1.1)$$

Como la perturbación se está propagando en una dimen_

sión, ψ debe ser función, tanto de la posición, como del tiempo, es decir:

$$\psi = f(x, t) \quad (1.2)$$

en la cual x , representa la coordenada espacial y t la coordenada temporal; de este modo si se desea conocer la forma de la perturbación en cualquier instante, digamos $t = t_0$, habría que mantener el tiempo constante en ese valor, de tal suerte que:

$$\psi(x, t) \Big|_{t=t_0} = f(x, t_0) \quad (1.3)$$

resulta ser una especie de "fotografía" de la perturbación que se está propagando y esto no es otra cosa que la forma o perfil de la onda, siendo la onda la manera en que se propaga la perturbación.

Dentro de este estudio nos limitaremos al caso de una onda que viaja sin deformación en la dirección que se indica, lo cual se conoce como movimiento ondulatorio.

Sea S' un sistema de referencia que se mueve con velocidad V , con respecto al sistema S , de tal modo que en S' , ψ deje de ser función del tiempo, teniéndose así un perfil constante, estacionario, con la forma dada por la ec. (1.3) para $t_0 = 0$, dando como resultado

$$\psi = f(x') \quad (1.4)$$

Observando la figura 1.1 notamos que:

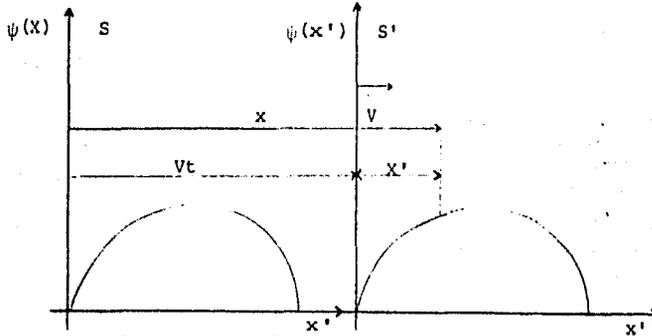


Fig. (1). Sistema móvil S', que se desplaza a una velocidad V, respecto al sistema S.

$$x' = x - Vt \quad (1.5)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.4), se tiene que:

$$\psi(x, t) = f(x - Vt) \quad (1.6)$$

Esta expresión representa la forma más general de una función periódica unidimensional, que se desplaza con una velocidad V, como se verifica al examinar ψ , después de un cambio Δt en el tiempo y un cambio $V\Delta t$ en x, esto es:

$$f[(x + V\Delta t) - V(t + \Delta t)] = f(x - Vt)$$

Así, encontramos que el perfil se vuelve a repetir.

Procedamos con toda esta información a obtener una ex-

presión diferencial de onda en una dimensión; con esta idea en mente, calculemos la derivada parcial de la ec. (1.6), con respecto a x y luego con respecto a t .

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial x'} \quad (1.8)$$

Sustituyendo la expresión para $\frac{\partial f}{\partial x'}$, de la ecuación (1.7) en la ecuación (1.8), tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.9)$$

Lo cual significa que la rapidez de cambio de ψ con respecto al tiempo, es igual, excepto por una constante multiplicativa, a la rapidez de cambio de ψ con respecto a la coordenada temporal.

Derivando por segunda ocasión de las ecs. (1.7) y (1.8) tenemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad (1.10.1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = v \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (1.10.2)$$

a lo cual se llega haciendo uso del hecho de que $x' = x - vt$

siendo válido el cambio en la derivación, porque

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{ver ec. (1.8)})$$

Sustituyendo en la ec. (1.10.1), el valor para $\frac{\partial f}{\partial t}$, tomado de la ec. (1.8), se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

donde se ha hecho uso de la ec. 1.10.1.

La ecuación (1.11), es la ecuación diferencial que describe el movimiento ondulatorio que se propaga a una velocidad finita v , en las direcciones $x = 0 - x$. Es claro entonces que la solución más general de la ec. (11) es:

$$\psi(x, t) = C_1 f_1(x - vt) + C_2 f_2(x + vt) \quad (1.12)$$

con C_1 y C_2 constantes, la cual además de conservar la forma de la perturbación, nos dice que podemos expresar la solución como la superposición de dos movimientos ondulatorios, que viajan en igual dirección y sentidos opuestos y con un perfil que no necesariamente tiene que ser el mismo.

1.2 Oscilaciones Armónicas.

Con bastante frecuencia nos encontramos con fenómenos no periódicos, que guardan cierta semejanza con los fenómenos periódicos; por ejemplo, las oscilaciones de un péndulo

lo, que decrecen gradualmente en amplitud, por la fricción que existe con el aire y/o medio en el que se encuentre inmerso el sistema. Movimientos como éste y similares, se conocen como oscilaciones.

Las oscilaciones armónicas forman son un caso de las oscilaciones en general, sin embargo desempeñan un papel fundamental y de gran importancia, pues constituyen un fenómeno periódico dentro del cual la variación de una magnitud observada presenta un comportamiento senoidal cosenoidal.

Especifiquemos por tanto, la forma de nuestra función de onda $\psi(x,t)$; en otras palabras, demos una dependencia funcional explícita para $\psi(x,t)$, de tal forma que el perfil de la onda cumpla con la ec. (1.11). Sea la función:

$$\psi(x,t) \Big|_{t_0=0} = \psi(x) = A \text{ sen } kx = f(x) \quad (1.13)$$

Esta es la representación del perfil de onda, donde k es una constante positiva, conocida como número de propagación; de tal forma que kx esté en radianes.

Por otro lado tenemos que al variar la función seno entre 1 y -1, la función $\psi(x)$ tiene como máximo valor el valor de A , que se conoce como amplitud de la onda.

Ahora bien, para obtener una onda "viajera", que se propague con una velocidad V en la dirección x , sólo tenemos que sustituir x por $x - Vt$ en la ec. (1.13) dando como

resultado:

$$\psi(x,t) = A \operatorname{sen} k (x - Vt)^b$$

esta ecuación es de la forma de la ec. (1.12) y por lo tanto, es una solución de la ecuación diferencial de onda (ec. 1.11).

Si derivamos parcialmente dos veces la ec. (1.14), con respecto a x o t , el resultado será una función senoidal, lo cual significa que la onda es periódica, tanto en el espacio, como en el tiempo.

El período espacial λ , será aquel para el cual se cumpla que:

$$\psi(X \pm \lambda, t) = \psi(X, t) \quad \text{ec. (1.15)}$$

donde a λ se le conoce como longitud de onda.

Pedir que se cumpla la ec. (1.15) en nuestro caso, equivale a incrementar o disminuir el argumento de la función seno por 2π , por lo tanto se tiene que cumplir que:

$$\operatorname{sen} k \left\{ (X \pm \lambda) - Vt \right\} = \operatorname{sen} \left\{ k(X - Vt) \pm 2\pi \right\} = \operatorname{sen} k(X - Vt)$$

o bien que: $|k\lambda| = 2\pi$ y puesto que k y $\lambda > 0$, se requiere que:

$$\lambda k = 2\pi \quad (1.16)$$

^b A este tipo de ondas, se les conoce también como armónicas simples o simplemente armónicas.

Con igual razonamiento examinemos el caso, para el pe ríodo temporal que denotaremos con la letra τ y que es el tiempo que tarda la onda en completar un ciclo. Ahora re querimos que se cumpla:

$$\psi(X, t) = \psi(X, t \pm \tau)$$

o bien

$$\text{sen}\left(k(X - Vt) \pm 2\pi\right) = \text{sen } k\left[X - V(t \pm \tau)\right]$$

de donde:

$$kV\tau = 2\pi \quad (1.17)$$

sustituyendo en esta última expresión el valor para k obtenido de la ec. (1.16) se tiene:

$$\tau = \frac{\lambda}{V} \quad (1.18)$$

Existe otra cantidad importante, que es el recíproco del período y que nos da información sobre el número de os cilaciones que ocurren por unidad de tiempo. Tal cantidad se conoce como frecuencia y se denota por la letra f o ν .

$$f = \nu = \frac{1}{\tau} \quad (1.19)$$

Las unidades de ν son ciclos/seg o bien Hertz.

Si multiplicamos v por 2π tenemos la frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi v \quad (1.20)$$

en radianes/seg

También se define el número de onda χ como

$$\chi \equiv \frac{1}{\lambda}$$

Todos estos parámetros: λ , τ , v , ω y χ nos dan información acerca de la naturaleza repetitiva de una onda en el espacio y en el tiempo.

Para concluir esta sección, cabe mencionar que el estudio de ondas armónicas no es pobre, ni débil en cuanto a conocimiento y aplicabilidad, pues cualquier onda se puede expresar como una superposición de ondas armónicas, inclusive si la onda es anarmónica o no-periódica; esto último se lleva a cabo con ayuda del Análisis de Fourier, que por estar más allá del objetivo del presente trabajo, no se discutirá.

1.3 Velocidad de Fase y Velocidad de Grupo.

Supongamos que se tiene una perturbación de la forma

$$\psi(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t) \quad (1.21)$$

definimos el argumento de la función seno, en este caso $(kx - \omega t)$ como la fase ϕ de la onda ψ .

En el caso particular $t = 0, X = 0$, se tiene: $\psi(0,0)=0$, lo cual, evidentemente significa que el origen del sistema de referencia en el que se analiza la onda, coincide en posición con el generador de la perturbación para el tiempo $t = 0$, en cuyo caso diremos que la fase inicial de la onda es cero. Sin embargo, esto no tiene necesariamente que ser así, por lo que una forma más general sería la siguiente:

$$\psi(x,t) = A \text{ sen } (kx - \omega t + \phi_0) \quad (1.22)$$

donde ϕ_0 sería una fase inicial arbitraria.

Físicamente ϕ_0 representa la no coincidencia del origen de nuestro sistema, con la posición del generador de la perturbación para $t = 0$, teniéndose por ello una contribución constante del generador, que nos indica un inicio diferente para dos perturbaciones, sin que esto modifique la naturaleza de la perturbación.

La fase de la perturbación representada por la ec. (1.22) está dada por:

$$\phi(X,t) = kX - \omega t + \phi_0 \quad (1.22.1)$$

Derivando esta función parcialmente, respecto a la posición y al tiempo, se obtiene primero, la rapidez de cam-

bio de la fase con la distancia para $t = \text{cte}$, dada por:

$$\left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_t \right| = k \quad (1.23)$$

Igualmente, la rapidez de cambio de la fase con respecto - al tiempo para $x = \text{cte}$, está dada por:

$$\left| \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_x \right| = \omega \quad (1.24)$$

Haciendo uso del siguiente resultado de la teoría de ecuaciones diferenciales

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_\phi = \frac{- \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_x}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)_t}$$

se tiene que:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (1.25)$$

donde el primer término representa la velocidad de propagación de un punto de fase constante: la velocidad de fase.

Para comprender esto, elijamos cualquier punto sobre el perfil mostrado en la figura 2; al ser la fase la única variable en la función, resulta ser también constante, lo que significa que al moverse la onda en el espacio, el desplazamiento en la dirección \vec{y} del punto elegido permanece cons_

tante. El punto se mueve junto con el perfil con la velocidad V y así también lo hace la condición de fase constante, pues la fase está fija en un valor tal que el desplazamiento en y permanece invariable.

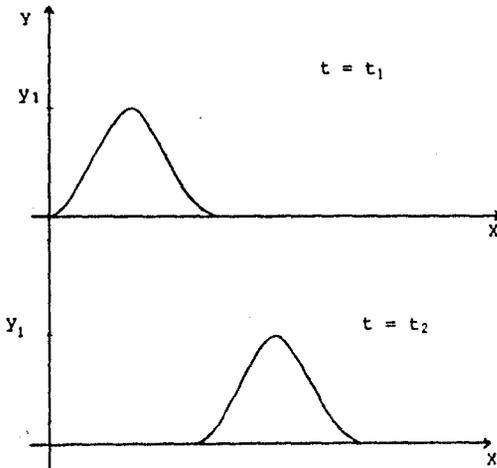


Fig. 2. Al mantenerse la fase constante, el desplazamiento y_1 de un punto del perfil permanece constante, conforme viaja la onda.

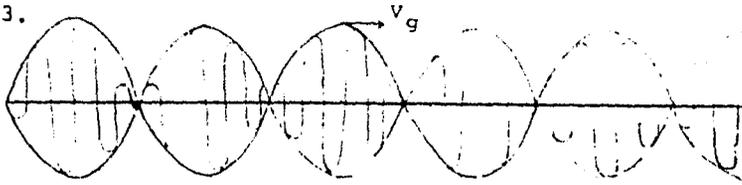
Efectuando las operaciones indicadas por la ec. (1.25), empleando la ec. (1.22.1), tenemos:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \pm \frac{\omega}{k} = \pm V \quad (1.26)$$

donde V , es la rapidez con la cual se mueve el perfil y , se conoce como la velocidad de la onda, o bien como la velocidad de fase.

La velocidad de fase es positiva si la onda se desplaza en la dirección en que aumenta X y negativa si lo hace en sentido contrario.

La ec. (1.26) nos dice cómo calcular la velocidad de una onda armónica, de frecuencia angular ω y longitud de onda λ ; sin embargo al observar un movimiento ondulatorio, no necesariamente es V la velocidad que medimos en especial si se trata de una onda como la mostrada en la figura 3.



Una onda de esta forma se conoce como pulso. De inmediato observamos que la velocidad con que se propaga el pulso no es $V = \omega/k$, pues no se trata de una onda armónica; porque su amplitud no es constante a lo largo del eje X. Entonces para calcular la velocidad, debemos llevar a cabo lo que se conoce como análisis de Fourier de la onda.

Para simplificar el problema, consideremos el caso en el que la onda está constituida por otras dos, de frecuencias ω_1 y ω_2 , tales que: $\omega_1 - \omega_2 \approx 0$. Supondremos además que las amplitudes son las mismas, que k_1 y k_2 son casi iguales. Entonces, al realizar la superposición tenemos:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \operatorname{sen}(k_1 X - \omega_1 t) + \psi_0 \operatorname{sen}(k_2 X - \omega_2 t) = \\ &= \psi_0 [\operatorname{sen}(k_1 X - \omega_1 t) + \operatorname{sen}(k_2 X - \omega_2 t)] = \end{aligned}$$

$$= 2\psi_0 \cos \frac{1}{2} [(k_2 - k_1)X - (\omega_2 - \omega_1)t] \sin \frac{1}{2} [(k_2 + k_1)X - (\omega_2 + \omega_1)t] \quad (1.27)$$

Como ω_1 y ω_2 , lo mismo que k_1 y k_2 son casi iguales, podemos reemplazar $\frac{1}{2} (\omega_2 + \omega_1)$ por ω_1 y $\frac{1}{2} (k_2 + k_1)$ por k_1 con lo cual la ec. (1.27) toma la forma:

$$\psi = 2\psi_0 \cos \frac{1}{2} |(k_2 - k_1)X - (\omega_2 - \omega_1)t| \sin(k_1 X - \omega_1 t) \quad (1.28)$$

esta ecuación representa un movimiento ondulatorio de amplitud modulada, siendo el factor de modulación:

$$2\psi_0 \cos \frac{1}{2} |(k_2 - k_1)X - (\omega_2 - \omega_1)t| \quad (1.29)$$

que corresponde en sí a un movimiento ondulatorio que se propaga con una velocidad:

$$V_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.30)$$

llamada velocidad de grupo. Esta es la velocidad con la cual se propaga la onda punteada de la fig. 3.

Puesto que $\omega = kV$, la ec. (1.30) toma la forma

$$V_g = V + k \frac{dV}{dk} \quad (1.31)$$

de la cual observamos que si la velocidad de fase es independiente de la longitud de onda (o frecuencia), la velocidad de grupo y aquélla, coinciden. En otras palabras, se tiene coincidencia cuando no hay dispersión.

Aunque hemos derivado la ec. (1.31) para el caso de dos frecuencias solamente, ésta es verdadera para el caso en que el pulso esté formado por frecuencias de $\omega - \Delta\omega$ a $\omega + \Delta\omega$.

Por último, cabe mencionar que este tipo de ondas son las adecuadas para transmitir señales, pues una señal tiene un tiempo de inicio y otro de término, es decir, se trata de un pulso.

1.4 Ondas en tres dimensiones.

El tipo de onda tridimensional más simple que podemos encontrar, es el de una onda plana.

Una onda plana se define como aquella que, en un instante dado, presenta la misma fase para todos los puntos que se encuentren sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Sea \vec{k} la dirección en que se propaga la onda; la ecuación del plano perpendicular a \vec{k} , que pasa por un punto (X_0, Y_0, Z_0) , es:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{cte} = a \quad (1.32)$$

por lo que el conjunto de planos sobre los cuales una perturbación ψ varía senoidalmente será:

$$\psi(\vec{r}) = A \operatorname{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.33)$$

o bien en notación compleja:

$$\psi(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (1.34)$$

Puesto que ψ es una función periódica, podemos escribir:

$$\psi(\vec{r}) = \psi\left(\vec{r} + \frac{\lambda}{k} \vec{k}\right) \quad (1.35)$$

donde k es la magnitud de \vec{k} .

En forma exponencial esto equivale a

$$Ae^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = Ae^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \lambda \vec{k} / k)} = Ae^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\lambda k} \quad (1.36)$$

lo cual es cierto si:

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi} \quad (1.37)$$

por lo tanto

$$\lambda k = 2\pi \quad (1.38)$$

o bien

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.39)$$

La magnitud del vector \vec{k} es el número de propagación k , a tal vector se le conoce como vector de propagación.

Si observamos un punto en el espacio para el cual \vec{r} se mantiene constante, la función $\psi(\vec{r})$ también es constante, lo que significa que los planos están inmóviles; con la intención de hacer que los planos se propaguen, introduciremos una dependencia temporal de $\psi(\vec{r})$ en forma análoga a la realizada en el caso de una onda unidimensional, teniendo así:

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (1.40)$$

donde A , ω y k son constantes.

Conforme esta perturbación se propaga a lo largo del vector \vec{k} , podemos asignar a cada punto en el espacio y tiempo una fase. En cualquier instante las superficies que unen puntos de igual fase se conocen como frentes de onda o superficies de onda.

Cabe mencionar que la función de onda tiene un valor constante sobre el frente de onda, si la amplitud se mantiene constante, lo cual en general no ocurre, pues para la mayoría de los casos $A = A(\vec{r})$.

Calculemos ahora la velocidad de propagación del frente de onda.

De la figura 4 observamos que la componente de \vec{r} en la

dirección de \vec{k} es r_k

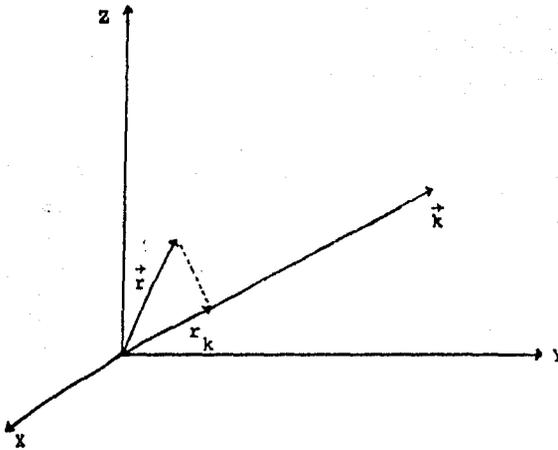


Fig. 4. Ondas planas propagándose en la dirección \vec{k} .

Por ser constante la perturbación en un frente de onda, después de un tiempo dt , si el frente se ha desplazado a lo largo de \vec{k} , una distancia dr_k , se debe cumplir que:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \quad (1.41)$$

o bien

$$Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} = Ae^{i(kr_k + kdr_k \mp \omega t \mp \omega dt)} = Ae^{i(kr_k \mp \omega t)} \quad (1.42)$$

de donde

$$kdr_k = \pm \omega dt$$

o

$$\frac{dr_{\vec{k}}}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (1.43)$$

Hemos demostrado así, que la velocidad de fase de una onda plana es equivalente a la velocidad de propagación del frente de onda.

Frecuentemente la ecuación de onda armónica plana se escribe como:

$$\psi(X, Y, Z, t) = Ae^{i(k_x X + k_y Y + k_z Z \mp \omega t)} \quad (1.44)$$

$$\psi(X, Y, Z, t) = Ae^{i[k(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \pm \omega t]} \quad (1.45)$$

donde α , β y γ son los cosenos directores del vector \vec{k} , cuya magnitud está dada por:

$$|\vec{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (1.46)$$

La importancia de las ondas armónicas planas se debe a que pueden generarse con relativa facilidad con alguna forma de oscilador armónico, además, cualquier onda tridimensional se puede expresar como una combinación de ondas planas, con amplitud y dirección de propagación distintas.

Hasta aquí se ha manejado el hecho de que la onda se mueve a través del espacio con un perfil que no cambia, lo cual generalmente no ocurre, por ello se deducirá una ecuación de onda tridimensional cuyas soluciones sean, entre otras, ondas planas.

En el espacio tridimensional, cada una de las direcciones X, Y y Z carecen de distinciones que hagan que al cambiar el nombre de las variables se altere la ecuación diferencial de onda. Por ello se tienen en cada una de las direcciones, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = -\alpha^2 k^2 \psi \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\beta^2 k^2 \psi \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\gamma^2 k^2 \psi \quad (1.49)$$

correspondiendo cada una a las direcciones a lo largo de los ejes X, Y y Z, respectivamente.

También se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \quad (1.50)$$

Sumando las ecs.(1.47),(1.48) y(1.49) se deduce que:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -k^2 \psi \quad (1.51)$$

donde se ha hecho uso del resultado $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Empleando la ec. (1.50) y recordando que $V = \omega/k$ se llega a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.52)$$

la ecuación diferencial de onda tridimensional que puede reescribirse como:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.53)$$

Evidentemente si se tienen dos soluciones arbitrarias f y g dadas por:

$$\psi(X, Y, Z, t) = f(\alpha X + \beta Y + \gamma Z - vt) \quad (1.54)$$

$$\psi(X, Y, Z, t) = g(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + vt) \quad (1.55)$$

Cualquier combinación lineal de ellas

$$\Psi(\vec{r}, t) = C_1 f(\vec{r} \cdot \vec{k}/k - vt) + C_2 g(\vec{r} \cdot \vec{k}/k + vt) \quad (1.56)$$

es también solución de la ec. (1.53), con C_1 y C_2 constantes.

1.5 Ondas Esféricas.

Supongamos que tenemos una pequeña esfera pulsante inmersa en un fluido, si ésta se contrae y se expande, se generan variaciones en la presión que se propagan como ondas esféricas.

Pensemos ahora en una fuente puntual ideal de luz; la radiación que emana de la fuente viaja hacia afuera uniformemente en todas direcciones, teniéndose así una fuente isotrópica y como fuentes de onda esferas concéntricas.

Debido a la simetría, es conveniente emplear la ec. (1.53) en coordenadas esféricas, haciendo además la suposición de que tienen ondas esféricamente simétricas, ésto es, que no existe dependencia del ángulo ecuatorial ϕ ni del ángulo azimutal θ . Con esto, el Laplaciano resulta ser:

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (1.57)$$

Resultando que se puede expresar como:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) \quad (1.58)$$

Con lo que, la ecuación diferencial de onda se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) \quad (1.59)$$

Cuya solución general es una ecuación de la forma

$$\psi(r, t) = C_1 \frac{f(r - vt)}{r} + \frac{C_2 g(r + vt)}{r} \quad (1.60)$$

1.6 Clasificación de las Ondas.

Existen dos clases de ondas, que se distinguen entre sí por una diferencia entre la dirección de la perturbación y la dirección a lo largo de la cual viaja la perturbación.

Para visualizarlo fácilmente, pensemos en un medio material deformable y elástico.

Tenemos una onda longitudinal cuando los puntos materiales que conforman el medio se desplazan de su posición de equilibrio y se mueven en forma paralela a la dirección de propagación de la onda.

Si la dirección en que se mueven los puntos materiales es perpendicular a la dirección de propagación de la onda, ésta recibe el nombre de onda transversal.

Supongamos que tenemos una onda transversal que se propaga confinada en un plano; en este caso diremos que la onda está linealmente polarizada, de este modo una onda transversal puede considerarse como la superposición de dos ondas linealmente polarizadas, en direcciones perpendiculares.

1.7 Características Generales de las Ondas.

Hasta aquí hemos expuesto un resumen de la imagen físico-matemática que se tiene de las ondas en general. Usé-

mosla entonces como base para discutir propiedades inherentes a las ondas como lo son: la interferencia, difracción y polarización.

Uno de los múltiples ejemplos que podemos observar a simple vista del fenómeno de interferencia, es el producido por una mancha de aceite sobre el pavimento asfáltico mojado. Los intrincados patrones de color que resplandecen se deben a que el asfalto negro absorbe la luz transmitida, evitando la reflexión posterior que tendería a oscurecer las franjas.

Por lo que a difracción se refiere, podemos observar el fenómeno al interponer un objeto entre una pantalla y una fuente puntual intensa, obteniéndose así una sombra formada por regiones claras y oscuras.

Físicamente no existe diferencia alguna entre interferencia y difracción. Sin embargo, es común, aunque no apropiado, hablar de interferencia cuando se tiene la interacción de pocas fuentes y de difracción cuando se tiene un gran número de fuentes.

En ambos casos podemos afirmar que la interacción de las ondas da una resultante que se desvía de la suma de las componentes, pero como la ecuación que describe este tipo de perturbaciones es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, ec. (1.53), obedecen el principio de superposición, por lo que una perturbación en un punto en el espacio donde dos o más ondas se superpongan es igual a la suma vectorial

de las perturbaciones constitutivas individuales.

Otra de las características importantes de las ondas, que sólo presentan las ondas transversales, pues las longitudinales no presentan sección transversal alguna, que exhiba a manera de fotografía la perturbación, es la polarización, la cual se tiene cuando la vibración transversal de la onda puede localizarse dentro de, por ejemplo, un solo plano(plano de vibración) dando lugar así a lo que se conoce como polarización lineal.

Dentro del siguiente capítulo se hablará de este tipo y otros de polarización, en un contexto exclusivo para ondas electromagnéticas, así como del procedimiento a seguir para obtener diferentes polarizaciones. En particular, la polarización circular y elíptica que se origina bajo ciertas condiciones, al interaccionar la onda con el plasma, esto último se trata en el último capítulo.

CAPÍTULO II

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

2.1 Introducción.

Los momentos más espectaculares en el desarrollo de la física se producen cuando ocurren grandes síntesis en las cuales se descubre que fenómenos, aparentemente distintos, no son sino diferentes manifestaciones de una misma cosa.

Uno de estos grandes momentos tuvo lugar en el siglo XIX, alrededor de 1860, cuando el físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) resumió, e incluso amplió en forma por demás brillante, todo el conocimiento empírico que en la época se tenía del electromagnetismo, en cuatro ecuaciones que ahora llevan su nombre.

Pero, no termina aquí la contribución de Maxwell a la física; a partir de sus ecuaciones pudo comprobar que la luz no es otra cosa que ondas electromagnéticas, uniendo así la óptica con el electro-magnetismo.

Maxwell calculó la velocidad a que iría una onda y descubrió que coincidía exactamente con la velocidad de la luz. La coincidencia era demasiado notable para pasarla por alto. Maxwell dedujo así, que la luz misma debía ser una onda electromagnética.

Veinte años después de publicar Maxwell su teoría, en

1887, el físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894) comprobó la existencia de ondas electromagnéticas de longitud de onda larga, generándolas con violentas oscilaciones eléctricas en un circuito electrónico y detectándolas con otro circuito que, situado a unos cuantos metros de distancia y sin estar conectado a alguna fuente de energía, produjo oscilaciones eléctricas de la misma frecuencia.

La consideración de la luz como ondas electromagnéticas, tuvo que cuestionarse alrededor del año 1900, año en que, para poder explicar el problema de la radiación de cuerpo negro el físico alemán Max Planck sugirió que la luz es un fenómeno cuántico: la energía radiante no es emitida en forma continua, sino en pequeñas cantidades discontinuas que llamó "quanta". Además, sobre bases puramente teóricas, concluyó que cada quanta lleva consigo una cantidad de energía expresada por la ecuación: $E = hv$, donde v es la frecuencia de radiación y h una constante llamada ahora constante de Planck.

A pesar de la gran significación de esta postulación, nadie hizo caso de ella y no fue, sino hasta el año de 1905 cuando Albert Einstein llevó la teoría de los quantum a un nuevo dominio del conocimiento, postulando que todas las formas de energía radiante, luz, calor, rayos X, etc., viajan a través del espacio en paquetes discontinuos que llamó fotones.

Einstein verificó esta idea, formulando una ley que

describe exactamente el extraño fenómeno conocido con el nombre de Efecto Fotoeléctrico. Los físicos de la época no habían podido explicarse el hecho de que cuando un haz de luz violeta se lanza sobre una placa de metal, ésta expelle una lluvia de electrones y si se manda luz de frecuencia más baja, amarilla o roja, por ejemplo, los electrones salen con una velocidad menor. La energía de los electrones arrancados, depende de la frecuencia de la luz y no de su intensidad.

Einstein resolvió el problema, pensando en la luz como un conjunto de fotones y cuando uno de ellos golpea un electrón, el fotón es absorbido y la velocidad con que los electrones se desprenden de la placa de metal, depende de la energía contenida en el fotón que la golpea.

Otro fenómeno importante que constituye una prueba seria en favor de la teoría cuántica de la radiación, es el llamado: Efecto Compton, en el cual se estudia la dispersión que sufre un "haz" de fotones al incidir sobre una partícula.

Sin embargo, existen indudablemente fenómenos de la luz que sólo pueden explicarse mediante la teoría ondulatoria; por ejemplo la sombra indefinida de objetos ordinarios, que indica que los rayos luminosos se han doblado, de igual modo que las ondas de agua se doblan alrededor de una roca.

Por otro lado, si hacemos pasar luz a través de un agujero muy pequeño y proyectamos sobre una pantalla, observaremos bandas circulares concéntricas alternantes, luminosas y oscuras, este fenómeno se conoce como difracción y ha sido comparado con la tendencia que tienen las ondas del mar a doblarse y divergir al pasar a través de una estrecha boca de un puerto.

Análogamente, si ahora tenemos dos agujeros, las dos conformaciones de difracción se fundirán en una serie de bandas paralelas, justo como ocurre con dos sistemas de ondas de agua que se encuentran en una piscina, se reforzaran recíprocamente, cuando coinciden cresta con cresta y anularán el uno al otro, cuando la cresta de una ola coincide con el valle de la otra, entonces en el caso presente, las bandas luminosas aparecerán cuando dos ondas luminosas se refuercen recíprocamente y las bandas oscuras en caso contrario; este fenómeno se conoce como interferencia.

Ambos fenómenos, difracción e interferencia, son estrictamente características de ondas y no ocurrirían si la luz estuviese compuesta de corpúsculos.

De este modo, la pregunta fundamental ¿está la luz formada de ondas o de partículas?, la respuesta es que de ambas. El carácter dual de la luz, es sin embargo, solamente un aspecto de una más profunda y extraordinaria dualidad, que llena toda la naturaleza y de la cual fotones y ondas electromagnéticas son sólo distintas manifestaciones.

La primera insinuación de este extraño dualismo, se hizo en 1925, cuando el físico francés llamado Luis de Broglie sugirió que los fenómenos envueltos en las relaciones recíprocas de materia y radiación, se entenderían mejor si se pensara en los electrones no como partículas, sino como sistemas de ondas.

Poco tiempo después de que de Broglie hiciera pública su idea, un físico vienés llamado Erwin Schrödinger desarrolló la misma idea en forma matemáticamente coherente, creando un sistema que explicaba los fenómenos cuánticos, atribuyendo funciones de onda específicas a electrones y protones.

2.2 Ecuaciones de Maxwell.

El conjunto de ecuaciones que comunmente se conocen como ecuaciones de Maxwell, resume y explica la teoría electromagnética clásica.

Este conjunto, que consiste de cuatro ecuaciones, debe su nombre al físico escocés que apoyándose en los resultados experimentales de Faraday, formuló matemáticamente la teoría del electromagnetismo, para lo cual tuvo que corregir una de las leyes ya conocidas: a saber la Ley de Ampère. Esta corrección tiene una importancia crucial para campos que oscilan a altas frecuencias, sin ella no existiría radiación electromagnética.

Las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

2.2.1 Ley de Gauss-Eléctrica.

Esta ley debe su nombre al matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855); en ella se relaciona el flujo de la intensidad de un campo eléctrico \vec{E} a través de una superficie cerrada, con la carga total que encierra dicha superficie.

El flujo a través de una superficie cerrada A , está dado por:

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.1)$$

donde el vector $d\vec{S}$ tiene una dirección normal hacia afuera de la superficie. Ahora bien, si V es el volumen encerrado por A y si dentro existe una distribución continua de carga de densidad ρ , la Ley de Gauss nos dice que:

$$\iint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV \quad (2.2)$$

El primer término representa la diferencia entre la cantidad de flujo hacia adentro y hacia afuera de una superficie cerrada A , así la ley de Gauss dice que si hay una diferencia, será debida a la presencia de fuentes o sumideros de campo eléctrico (cargas eléctricas) dentro de la su-

perficie.

La constante ϵ se denomina permitividad eléctrica del medio.

Haciendo uso del teorema de la divergencia y si tenemos densidad de carga uniforme, la ecuación (2.2) se puede escribir como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.3)$$

2.2.2 Ley de Gauss-Magnética.

Hasta el momento no se conoce un equivalente magnético de la carga eléctrica, es decir, no se han encontrado polos magnéticos aislados, por lo que la inducción magnética \vec{B} no diverge o converge a alguna clase de carga magnética. Por lo tanto, cualquier superficie cerrada en un campo magnético, tiene el mismo número de líneas entrando y saliendo, lo cual implica que:

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.4)$$

o bien

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

2.2.3 Ley de Inducción de Faraday.

De entre las numerosas aportaciones de Michael Faraday

al electromagnetismo, una de las más importantes fue el descubrimiento de que un flujo magnético que varía con el tiempo, cuando pasa a través de un circuito cerrado produce una corriente eléctrica a lo largo del circuito.

El flujo magnético a través de un área abierta A , limitada por el circuito conductor es:

$$\phi_B = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

La fuerza electromotriz inducida (f_{em}) alrededor del circuito, es entonces:

$$f_{em} = - \frac{d\phi}{dt} \quad (2.6)$$

Sin embargo esta f_{em} existe como resultado de la existencia de un campo eléctrico dado por:

$$f_{em} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.7)$$

donde c es la curva que corresponde al circuito.

Así, sustituyendo las ecs. (2.6) y (2.7) en (2.4) obtenemos:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

Cabe mencionar que esta expresión no tiene referencia física alguna al circuito, lo cual significa que la trayectoria se puede elegir arbitrariamente y no necesita estar dentro o cerca de ningún conductor. Si la trayectoria está fija en el espacio y no cambia de forma, la ec. (2.8) se puede escribir como:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.9)$$

Empleando el teorema de Stokes esta última expresión se puede reescribir como:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.10)$$

Notamos que en este caso, el campo eléctrico no es producto de cargas eléctricas, sino de un campo magnético variable en el tiempo.

2.2.4. Ley Circuital de Ampere.

Esta ley debe su nombre a su descubridor André Marie Ampère (1775-1836). En ella se relaciona la integral de línea de un campo magnético \vec{B} a lo largo de una curva cerrada C , con la corriente total i que pasa dentro de los confines de C ; según la ecuación:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu i \quad (2.11)$$

en la cual A está limitada por c , \vec{J} es la densidad de corriente y μ la permeabilidad del medio.

La ec. (2.11) puede reescribirse con ayuda del teorema de Stokes como:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (2.12)$$

Como la divergencia de cualquier rotacional es cero, entonces tenemos que la divergencia de \vec{J} es cero, es decir, el flujo total de corriente a través de cualquier superficie cerrada vale cero. Para que esto se cumpla, es necesario que la carga dentro de la superficie tienda a cero, pues en general las cargas pueden estar moviéndose dentro de la superficie, de un lugar a otro, dando lugar así a una corriente.

De este modo, la ec. (2.12) nos lleva a la conclusión de que la carga no se conserva; para salvar esta dificultad, Maxwell propuso sumar a la ec. (2.12) el término $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ con lo cual se tiene la relación correcta dada por:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.13)$$

Veamos ahora cómo el término adicional es necesario para no violar la ley de conservación de la carga, que, dicho sea de paso, es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell.

Tomando la divergencia de la ec. (2.13), tenemos:

$$\nabla \cdot \frac{\vec{J}}{\epsilon} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.14)$$

cambiando el orden de derivación en el segundo término, se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.15)$$

haciendo uso de la ec. (2.3) concluimos:

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.16)$$

que es la ecuación que expresa la ley de conservación de la carga.

Para concluir, diremos que si aceptamos las ecuaciones de Maxwell como verdaderas (lo cual tenemos que hacer, pues nadie ha encontrado que no funcionen), aceptaremos la conservación de la carga.

2.3. La Luz Como Onda Electromagnética.

El principal resultado que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell es quizá, la deducción de que la luz no es otra cosa que ondas electromagnéticas, las cuales una vez generadas se mueven más allá de su fuente, e inde-

pendientemente de ella.

Viajando ligados el uno al otro, los campos eléctrico y magnético, variables en el tiempo, se regeneran mutuamente en un ciclo que no tiene fin, como lo muestra el hecho consistente en que las ondas que a nosotros llegan desde el centro de nuestra galaxia, han estado viajando durante treinta mil años, aproximadamente y recibimos ondas de fuera de ella que se generaron en el principio mismo del universo.

Para comprobar lo anteriormente dicho, tomemos el rotacional de la ec. (2.13):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \mu\sigma (\nabla \times \vec{E}) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) \quad (2.17)$$

donde se ha hecho uso del resultado conocido como Ley de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.18)$$

siendo σ la conductividad del medio, y donde se supone también que \vec{E} es una función que se "comporta bien", por lo que las derivadas respecto a la posición y al tiempo se pueden intercambiar.

Si ahora sustituimos la ec. (2.10) en (2.17), tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

Reescribiendo este triple producto vectorial como:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \quad (2.19)$$

y tomando en cuenta que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, se tiene:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, se obtiene una ecuación satisfecha por la intensidad del campo eléctrico, a saber:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.21)$$

Si suponemos el caso especial del vacío, tenemos que: $\rho = \sigma = 0$ y $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$ con lo cual las ecs. (2.20) y (2.21) toman la forma:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

Ambas ecuaciones describen campos dependientes del espacio y del tiempo, además de tener la forma de la ecuación diferencial de onda dada por la ec. (1.53); estas ecuaciones representan una onda que viaja con la velocidad c dada por:

$$c = \frac{1}{(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} \quad (2.24)$$

Haciendo uso de los resultados experimentales de μ_0 y ϵ_0 , Maxwell realizó el cálculo, obteniendo una velocidad para las ondas electromagnéticas en el vacío de

$$C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

valor que estaba en notable acuerdo con la velocidad de la luz medida por Fizeau en 1849, ante tales circunstancias Maxwell comentó:

"Esta velocidad está tan cerca de la de la luz, que parece que tenemos una fuerte razón para concluir que la luz en sí misma (incluyendo calor radiante, y otras radiaciones, si las hay), es una perturbación electromagnética en la forma de ondas propagadas a través del campo electromagnético, de acuerdo con las leyes electromagnéticas".

Si la luz es una onda ¿Qué tipo de onda es?.

Experimentalmente se ha comprobado que la luz es una onda transversal, trataremos pues, de deducir este resultado a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Consideremos el caso de una onda plana propagándose en la dirección positiva de X. De esta forma la solución de la ec.(2.22) es solo función de X y t, es decir $\vec{E} = \vec{E}(X, t)$, siendo además constante sobre cada uno de un conjunto infinito de planos perpendiculares al eje X.

De la ec.(2.3) se deduce ahora que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial X} = 0 \quad (2.25)$$

la componente del campo en la dirección X es constante, pero para que la onda se propague, el campo debe variar en el tiempo, entonces la variación en el tiempo del campo ocurre en una dirección perpendicular a la dirección de propagación por lo que tenemos una onda transversal.

Ahora orientemos nuestra onda, de tal forma que el campo eléctrico sea paralelo al eje Y, es decir:

$$\vec{E} = \hat{j}E_y(X, t) \quad (2.26)$$

de la ec. (2.10) se deduce que:

$$\frac{\partial E_y}{\partial X} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (2.27)$$

y que B_x y B_y son constantes. La variación del campo magnético con el tiempo, sólo ocurre en la dirección Z; hemos así concluido, de una forma diferente, que una onda plana electro magnética es transversal.

Veamos ahora qué relación existe entre E_y y B_z . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que E_y es una onda armónica, esto es:

$$E_y(X, t) = E_{0y} \cos(\omega(t - X/C) + \epsilon) \quad (2.28)$$

con C = velocidad de propagación.

Integrando la ec. (2.27) para obtener B_z , se tiene:

$$B_z = - \int \frac{\partial E_y}{\partial X} dt = \frac{1}{C} E_{0Y} \cos[\omega(t - X/C) + \epsilon] \quad (2.29)$$

Comparando con la ec.(2.28) se deduce que

$$E_y = CB_z \quad (2.30)$$

Es decir como E_y y B_z difieren solamente por un escalar, tienen la misma dependencia en el tiempo y están en fase. Además son mutuamente perpendiculares, siendo la dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$ la dirección de propagación de la onda.

2.4. Producción de Ondas Electromagnéticas.

De lo discutido anteriormente, se deduce que el requisito indispensable para generar ondas electromagnéticas, es conseguir campos \vec{B} y \vec{E} variables en el tiempo. La forma de lograr esto, es esencialmente acelerando carga(s) eléctrica(s). El dispositivo más sencillo para ello es el dipolo oscilante en el cual existe un desplazamiento periódico de la carga a lo largo de él, de modo que sus extremos se cargan con signos opuestos, o dicho de otra forma, periódicamente se invierten sus cargas.

Al estar la carga en reposo, tiene un campo eléctrico asociado a ella de extensión infinita; al empezar a moverse, el campo eléctrico en las vecindades de la carga se altera; tal cambio se propaga con velocidad finita, generando un campo magnético según la ec. (2.13). Si la carga está ace-

lerándose, el término $\partial E/\partial t$ no es constante, por lo que \vec{B} es también dependiente del tiempo, generando a su vez un campo eléctrico, según la ec. (2.10). Dicho proceso continúa con \vec{E} y \vec{B} acoplados uno a otro en forma de pulso, de modo que a medida que un campo cambia, genera un nuevo campo que se extiende más allá de esta forma el pulso se mueve de un punto al siguiente a través del espacio.

2.5. Ondas Electromagnéticas Polarizadas.

Supongamos que tenemos dos ondas armónicas, linealmente polarizadas, propagándose en la misma dirección, pero con vectores de campo eléctrico perpendiculares entre sí.

Estas perturbaciones pueden representarse en la forma:

$$\vec{E}_Z(X,t) = \hat{K}E_{0Z}\cos(kX - \omega t) \quad (2.31)$$

y

$$\vec{E}_Y(X,t) = \hat{J}E_{0Y}\cos(kX - \omega t + \epsilon) \quad (2.32)$$

donde ϵ es la fase relativa entre las ondas, viajando en la dirección X. La perturbación resultante es entonces:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_Z(X,t) + \vec{E}_Y(X,t) \quad (2.33)$$

lo cual nos muestra que una onda linealmente polarizada puede verse como la suma de otras dos perpendiculares entre sí.

Como caso particular, vamos a suponer que ambas pertur

baciones tienen la misma amplitud, es decir, $E_{0z} = E_{0y}$ que además $\epsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$ y así se tiene que:

$$\vec{E}_z(X,t) = \hat{K}E_0 \cos(kX - \omega t) \quad (2.34)$$

y

$$\vec{E}_y(X,t) = \hat{J} E_0 \sin(kX - \omega t) \quad (2.35)$$

por consiguiente, la ecuación 2.33 toma la forma:

$$\vec{E}_T = E_0 [\hat{K} \cos(kX - \omega t) + \hat{J} \sin(kX - \omega t)] \quad (2.36)$$

De esta expresión podemos observar que la amplitud de \vec{E}_T es constante e igual a E_0 mientras que su dirección es variable con el tiempo y no está restringida a permanecer en un plano, como lo estaba anteriormente. El resultado es que, para un observador que ve a la onda acercarse, el vector campo eléctrico está rotando en dirección de las manecillas del reloj, con una frecuencia ω , en tal caso se dice que la onda tiene polarización circular derecha.

Por otro lado, si en la ec. (2.33) $\epsilon = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

$$\vec{E}_T = E_0 [\hat{K} \cos(kX - \omega t) - \hat{J} \sin(kX - \omega t)] \quad (2.37)$$

y en este caso, el campo eléctrico gira, para el mismo observador, en contra de las manecillas del reloj, con fre_

cuencia ω , caso en el cual diremos que la onda tiene polarización circular izquierda.

Al observar las ecs. (2.36) y (2.37) notamos el hecho de que la onda linealmente polarizada se puede expresar como la suma de dos ondas con polarización circular opuesta, pues sumando (2.36) y (2.37) se tiene:

$$\vec{E}_T = 2E_0 \hat{k} \cos(kX - \omega t) \quad (2.38)$$

una onda linealmente polarizada con amplitud constante e igual a $2E_0$.

Hasta aquí hemos supuesto que la vibración en Y y la vibración en Z tienen amplitudes iguales con un desfase de cualquier múltiplo entero π , sin embargo, no siempre tiene que ser de esta manera. El resultado general es que cuando la vibración en Y y la vibración en Z no están en fase, el vector campo eléctrico se mueve en una elipse.

Para demostrar lo anterior escribamos una expresión para la curva trazada por la punta del vector campo eléctrico resultante. La ecuación que buscamos no debe ser función, ni de la posición, ni del tiempo, es decir, debemos eliminar la dependencia del término $(kX - \omega t)$.

Desarrollando la ec. (2.32) tenemos:

$$\frac{E_Y}{E_{0Y}} = \cos(kX - \omega t) \cos \epsilon - \sin(kX - \omega t) \sin \epsilon \quad (2.39)$$

combinando esta ecuación con el valor de $\cos(kX - \omega t)$ obtenido de la ec. (2.31), se tiene:

$$\frac{E_Y}{E_{0Y}} - \frac{E_Z}{E_{0Z}} \cos \epsilon = - \operatorname{sen}(kX - \omega t) \operatorname{sen} \epsilon \quad (2.40)$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ aplicada a la expresión (2.31) se deduce que:

$$\operatorname{sen}(kX - \omega t) = \left| 1 - \left(\frac{E_Z}{E_{0Z}} \right)^2 \right|^{1/2} \quad (2.41)$$

resultado con el cual la ec. (2.40) puede escribirse como:

$$\left(\frac{E_Y}{E_{0Y}} - \frac{E_Z}{E_{0Z}} \right)^2 = \left| 1 - \left(\frac{E_Z}{E_{0Z}} \right)^2 \right| \operatorname{sen}^2 \epsilon \quad (2.42)$$

Finalmente desarrollando y agrupando tenemos:

$$\left(\frac{E_Y}{E_{0Y}} \right)^2 + \left(\frac{E_Z}{E_{0Z}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_Z}{E_{0Z}} \right) \left(\frac{E_Y}{E_{0Y}} \right) \cos \epsilon = \operatorname{sen}^2 \epsilon \quad (2.43)$$

Esta ecuación corresponde a la de una elipse que se encuentra rotada un ángulo β en el sistema coordenado (Y, Z) .

Como caso particular notamos que cuando ϵ es un múltiplo entero impar de $\frac{\pi}{2}$, la ec. (2.43) se reduce a:

$$\frac{E_Y^2}{E_{0Y}^2} + \frac{E_Z^2}{E_{0Z}^2} = 1 \quad (2.44)$$

que aún representa una elipse, excepto para el caso en que

que $E_{0y} = E_{0z}$ condición con la cual se tiene un círculo.

2.6 Energía de una Onda.

Una de las características más importantes de las ondas electromagnéticas es su capacidad para transportar energía de una región del espacio a otra. Aún cuando una onda luminosa proveniente de alguna fuente estelar tiene que viajar millones de millones de kilómetros para llegar a la Tierra, arriba con la energía suficiente para efectuar trabajo sobre los electrones de los átomos que forman el ojo humano por ejemplo, permitiéndonos con ello poseer un camino a través del cual nos conducimos para tener un mejor y vasto conocimiento del mundo que nos rodea.

Debido a que cualquier campo electromagnético existe siempre ocupando una región en el espacio, es conveniente definir la energía radiante por unidad de volumen, que también se conoce como la densidad de energía U .

Dados un campo eléctrico y otro magnético, uno puede calcular por separado la energía de cada uno de ellos, para obtener:

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.45)$$

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (2.46)$$

respectivamente. Por otro lado, sabemos que $E = CB$, razón por la cual se deduce que el flujo de energía de una onda

electromagnética a través del espacio es compartido en igualdad por los dos campos que constituyen la onda, es decir, debido a que:

$$U_E = U_B \quad (2.47)$$

la densidad de energía de la onda es entonces:

$$U = U_E + U_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 \quad (2.48)$$

Sea S el transporte de energía por unidad de tiempo a través de un área unitaria. Si tenemos una onda electromagnética que viaja en el espacio durante un intervalo de tiempo Δt a través de un área A , la energía contenida en este volumen será: $UCA\Delta t$, de modo que S tendrá el valor de:

$$S = \frac{UCA\Delta t}{\Delta t A} = UC \quad (2.49)$$

o bien, empleando las ecs. (2.46) y (2.48)

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB \quad (2.50)$$

Resulta lógico suponer que la dirección en la que la energía fluye es la misma dirección de propagación de la onda, por lo tanto, el vector \vec{S} con magnitud S correspondiente resulta ser:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.51)$$

Tal vector conocido como vector de Poynting, es tal que su magnitud es la potencia por unidad de área que cruza una su perficie, cuya normal es paralela a \vec{S} .

Las variaciones en el tiempo del vector $\vec{E} \times \vec{B}$ son tan rápidas que no tiene sentido hablar del valor instantáneo de \vec{S} ; en vez de ello hablaremos de la energía radiante durante un intervalo finito de tiempo, es decir, hablaremos de su promedio, el cual recibe el nombre de irradiancia $I = \langle S \rangle$.

Para el caso de una onda plana armónica, linealmente polarizada que viaja en el espacio con la dirección \vec{k} se tiene que:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.52)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

con lo cual \vec{S} resulta ser:

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.53)$$

y la irradiancia que es lo que podemos medir experimentalmente será:

$$\langle S \rangle = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} |\vec{E} \times \vec{B}_0| = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (2.54)$$

La irradiancia es, por tanto, proporcional al cuadrado

de la amplitud del campo eléctrico.

Para un medio dieléctrico isotrópico, homogéneo y lineal, la irradiancia queda como:

$$I = \epsilon V \langle E^2 \rangle \quad (2.55)$$

En el caso que se analiza en la presente tesis, debido a la pérdida de isotropía vemos que existen direcciones preferentes en las cuales las ondas se van a propagar y por lo tanto, direcciones preferentes para el flujo de energía.

2.7. El espectro electromagnético.

La radiación electromagnética se presenta en una extensa gama de frecuencias o longitudes de onda.

Existen distintas fuentes de producción en cada frecuencia, aunque algunas de ellas emiten en varias frecuencias, por lo cual no existe un límite definido en la clasificación de las ondas electromagnéticas, sino que existen superposiciones.

Comúnmente las ondas se clasifican de la siguiente manera:

Ondas de Radio.

Son generadas, principalmente por circuitos electrónicos, en particular por la corriente alterna de 60 Hz que circula en las líneas. Su longitud de onda es de algunos $k\mu$

10 metros a 3 dm; su frecuencia comprende de unos cuantos Hz a 10^4 Hz. El extremo alto de la banda de frecuencia se usa para radio y televisión. Aunque individualmente existan fuentes naturales extensas que emiten este tipo de radiación, poca de ella podemos observar, pues la atmósfera no permite el paso hasta la superficie de la Tierra de ondas con longitudes mayores de 1 mt, ya que éstas son reflejadas en la ionósfera. Por esta misma razón pueden usarse para comunicaciones terrestres de largo alcance.

Microondas.

Estas ondas son de gran importancia, por ser de las ondas que pueden atravesar la atmósfera de la Tierra, las cuales tienen una longitud de onda de poco menos de 1 cm a 30 m. Es gracias a ello que se conoce mucho de la estructura de las galaxias, incluyendo la nuestra, y de las estrellas (en particular el Sol). También se producen mediante circuitos electrónicos y se usan para comunicaciones solo que como no son reflejadas por la ionósfera deben usarse satélites reflectores y retransmisores.

Infrarrojo

Comprenden longitudes de onda entre 10^{-3} m y 7.8×10^{-7} m y un intervalo de frecuencias de 3×10^{11} Hz a 4×10^{14} Hz. Esta región se encuentra dividida en cuatro subregiones que son: El infrarrojo cercano (780 -

3000 nm), el infrarrojo intermedio (3000 - 6000 nm), el infrarrojo lejano (6000 - 15000 nm) y el infrarrojo extremo (15000 - 1.0 nm). Esta radiación es emitida por cuerpos calientes y moléculas y sólo parte del infrarrojo cercano puede registrarse en la superficie de la Tierra.

Luz Visible

Comprende una franja angosta del espectro electromagnético, su longitud de onda va de 7.8×10^{-7} m a 3.8×10^{-4} m, y su frecuencia de 4×10^{14} Hz a 8×10^{14} Hz. La atmósfera terrestre es transparente a esta radiación y fue la primera ventana por la que empezó a observarse el mundo exterior.

La exploración del universo de ondas de radio y microondas se inició después de la Segunda Guerra Mundial.

Esta radiación es producida por un rearrreglo de electrones (exteriores en su mayoría) en átomos y moléculas.

El ojo humano es sensible a esta radiación, teniendo su mayor sensibilidad para longitudes de onda del orden de 5.6×10^{-7} m. La luz provoca diferentes reacciones en el ojo, dependiendo de su frecuencia, lo cual da lugar a lo que se denomina colores, que son los siguientes:

COLOR	λ (nm)	ν (Hz)
Rojo	780 - 622	384 - 482
Naranja	672 - 597	482 - 503
Amarillo	597 - 577	503 - 520

Verde	577 - 492	520 - 610
Azul	492 - 455	620 - 659
Violeta	455 - 390	659 - 769

Rayos Ultravioleta.

Comprende longitudes de onda que van de 3.8×10^{-7} m a 6×10^{-10} m y de frecuencias de 8×10^{14} Hz a 3×10^{17} Hz.

Estos rayos son producidos por átomos y moléculas en descargas eléctricas. El Sol es una enorme fuente de rayos ultravioleta que poseen la energía necesaria para ionizar la capa alta de la atmósfera, generando así la ionósfera. Su energía es suficiente como para producir ciertas reacciones químicas; este tipo de rayos es letal, afortunadamente el ozono de la atmósfera lo absorbe y solo muy pocos de ellos llegan a la superficie de la Tierra.

Rayos X

Descubiertos en 1895 por Wilhem Conrad Röntgen (1845-1923), tienen longitudes de onda de 10^{-9} m a 6×10^{-12} m y frecuencias de 3×10^{17} Hz a 5×10^{19} Hz. Estos rayos son producidos por transiciones de los electrones más fuertemente ligados o cuando se cambia el movimiento de alta energía de una partícula cargada. Producen serios daños en tejidos y organismos vivos; una exposición prolongada provocaría la muerte. Aunque existen fuentes estelares de este tipo de radiación, y el Sol en ocasiones emite rayos X con gran intensidad, estos son absorbidos en las capas

altas de la atmósfera y no llegan a la superficie de la Tierra.

Rayos Gamma

Estas radiaciones son de origen nuclear y son las de más alta energía. Presentan longitudes de onda que van de 10^{-10} m a 10^{-14} m y frecuencias de 3×10^{18} Hz a poco más de 3×10^{22} Hz. También hay fuentes estelares que emiten este tipo de radiación; el Sol eventualmente es emisor de rayos γ , pero de igual manera, estos son absorbidos por la atmósfera, por lo que no producen daños en los organismos terrestres. Así, observamos el espacio exterior a través de dos ventanas: microondas y el visible, las observaciones de otras λ deben hacerse con vehículos espaciales fuera de la atmósfera.

La interacción de cualquiera de estos tipos de radiación con la materia dependerá tanto de las características de la radiación misma como de las de la materia a través de la cual se propaga; si la radiación presenta fotones de energía comparable a la de los electrones o átomos de las moléculas de un material interactúan en mayor grado con éste. En particular en un plasma magnetizado las interacciones dependerán de las frecuencias que caracterizan al mismo, como de la dirección de propagación de la radiación con respecto al campo que magnetiza al plasma y esto lo discutiremos más adelante.

CAPITULO III

ELEMENTOS DE LA FÍSICA DE PLASMAS

3.1. Introducción.

El inicio de la física de plasmas se llevó a cabo por dos caminos paralelos, uno empírico y otro teórico. El tipo de investigaciones en "descargas eléctricas en gases" eran, en gran modo, experimentales y fenomenológicas, alcanzando, muy lentamente, cierto grado de complejidad teórica. Los primeros físicos que se enteraron del tema, miraban con cierto desprecio este rudo y complicado campo, en el cual los plasmas mostraban estriaciones y capas dobles, además de que la distribución electrónica no era Maxwelliana y había muchos tipos de oscilaciones e inestabilidades.

Se llegó a pensar que con un poco de trabajo, la teoría cinética de los gases ordinarios se podría extender, hasta incluir a los gases ionizados lo cual condujo a teorías matemáticamente elegantes, pero con un alto grado de discrepancia con la realidad.

En 1908, Birkeland se convirtió en el primer hombre que trata de sintetizar lo que hoy se conoce como: Física de plasmas de laboratorio y Física de Plasmas cósmicos, habiendo sido éstos estudiados por él mismo.

A pesar de esto, el desarrollo de las teorías se fue llevando a cabo sin contacto alguno con los plasmas en el labo-

ratorio, metodología que se practicó mientras se pudo evitar la confrontación con la realidad. La teoría concluyó que los plasmas podían ser confinados fácilmente en campos magnéticos y calentados a temperaturas tales que hicieran posible la liberación termonuclear de energía. Cuando se intentó la construcción de reactores termonucleares, el resultado fue desastroso, los plasmas no se comportaban como las teorías predecían, sino que mostraban un gran número de efectos importantes no incluidos en ellas.

Este problema no motivó grandes cambios en la física de plasmas cósmicos, pues al ser las teorías erróneas para plasmas de laboratorio, no necesariamente tenían que serlo para plasmas cósmicos. Tal estado de "fe" desapareció cuando las misiones espaciales se hicieron a la magnetósfera y espacio interplanetario: los plasmas cósmicos eran tan complicados como los de laboratorio.

Esta segunda confrontación trajo como consecuencia un segundo enfoque a la física de plasmas cósmicos.

La tabla siguiente muestra las características de ambos enfoques:

PRIMER ENFOQUE.	SEGUNDO ENFOQUE
Modelos Homogéneos.	Los plasmas espaciales frecuentemente tienen estructuras complicadas e inhomogéneas.
Conductividad $\sigma = \infty$	σ depende de la corriente y con frecuencia, se hace cero repentinamente.
Las líneas de campo magnético están congeladas y se mueven con el plasma.	Con frecuencia la imagen de líneas congeladas se pierde por completo.
Las capas dobles electrostáticas son despreciables.	Dichas capas son de importancia decisiva en plasmas de baja densidad.
Se desprecian las inestabilidades.	Muchas configuraciones de plasma no son realistas, porque son inestables.
Las condiciones electromagnéticas están ilustradas por las imágenes de líneas de campo magnético. Las estructuras filamentosarias y las hojas de corriente se desprecian o se tratan inadecuadamente.	Es igualmente importante trazar las líneas de corriente y discutir el circuito eléctrico. Las corrientes producen filamentos o flujo en capas delgadas.
Distribución Maxwelliana de velocidades.	Los efectos no-maxwellianos son con frecuencia decisivos.
Las teorías son matemáticamente elegantes y bien desarrolladas.	Las teorías no están muy bien desarrolladas y son parcialmente fenomenológicas.

La diferencia entre ambos enfoques se ilustra, en cierto modo por los términos gas ionizado y plasma, los cuales, aunque sinónimos, implican diferentes nociones, el primero da la impresión de un medio similar a un gas, en tanto que el segundo y en particular, un plasma totalmente ionizado y magnetizado, es un medio con propiedades básicamente diferen

tes: es fuertemente inhomogéneo y consiste en una red de filamentos producidos por corrientes lineales y superficiales de discontinuidad, que se deben algunas veces a hojas de corrientes y otras a capas dobles electrostáticas.

De acuerdo con Birkeland los primeros experimentos de laboratorio relativos a la física cósmica fueron del tipo de experimentos con modelos a escala. Sin embargo, muy pronto se descubrió que no era posible hacer un escalamiento real de los fenómenos cósmicos al tamaño del laboratorio, en parte por el gran número de parámetros involucrados que obedecen diferentes leyes de escala.

Por lo tanto, los experimentos de laboratorio podrían servir para aclarar algunos fenómenos básicos de importancia para la física cósmica, en vez de tratar de reproducir una versión a pequeña escala de un ejemplo cósmico

De este modo se encuentra que las investigaciones de laboratorio empiezan a demostrar muchas propiedades básicas de un plasma previamente desconocidas o menospreciadas. Propiedades que difieren drásticamente de las supuestas en muchas teorías astrofísicas. La diferencia entre el plasma de laboratorio y el de estas teorías puede deberse en algunos casos a la disimilaridad entre el laboratorio y el espacio, pero con más frecuencia, refleja la confrontación entre el primero y segundo enfoques. En otras palabras, es la diferencia entre un medio hipotético y uno que tiene realidad física. El tratamiento del primero conduce a teorías especulati-

vas de poco interés, excepto como ejercicio intelectual. El último medio es básico para el entendimiento del mundo en que vivimos.

3.2. Descripción de un Plasma.

Si interaccionamos con un gas por medio de colisiones, radiación o calentamiento, hasta hacer posible la ionización, tendremos como resultado lo que a menudo se conoce como cuarto estado de la materia y que recibe el nombre de "Plasma", el cual se caracteriza por encontrarse en un estado de cuasi neutralidad eléctrica. Además, presenta como principal característica un comportamiento colectivo debido al largo alcance de las fuerzas electrostáticas.

De acuerdo con la definición anterior, la física de plasmas comprende también al estado sólido, pues los electrones en los metales y en los semiconductores caen en esta categoría; así mismo, la sustancia salina de un electrolito. Sin embargo, el tema concierne principalmente a gases ionizados y en particular a aquellos en los que la energía potencial debida a los primeros vecinos, sea mucho menor que la energía cinética de una partícula.

Por otro lado, supondremos que la cuasineutralidad del plasma es suficiente como para poder tomar iguales densidades de iones y electrones, pero no suficiente como para que las fuerzas electromagnéticas entre las partículas que lo componen se anulen.

A una temperatura mayor de $100\ 000^{\circ}\text{K}$, la mayoría de la materia existe en un estado ionizado. El estado de plasma puede existir a temperaturas menores de $100\ 000^{\circ}\text{K}$, si hay algún mecanismo que ionice el gas y si la densidad es lo suficientemente baja, como para que la recombinación no sea rápida.

El Sol y las estrellas están lo suficientemente calientes, como para estar casi completamente ionizados y el gas interestelar está también ionizado, debido a la acción de la radiación estelar. Esto significa que el 99.9% de la materia del universo está en estado de plasma, siendo la Tierra una excepción por su baja temperatura y alta densidad, las cuales aunadas al efecto protector de la atmósfera cercana, impiden la formación de plasmas naturales en nuestro entorno inmediato, excepto por los plasmas temporales formados por los relámpagos y los manifestados ocasionalmente en las auroras boreales. Sin embargo, en la parte superior de la atmósfera, conocida como ionósfera, existe plasma, creado por fotoionización. Más afuera, los anillos de radiación de la Tierra (anillos de Van Allen), consisten de electrones y protones atrapados en el campo magnético terrestre. En realidad, todo el espacio alrededor de la Tierra hasta la magnetopausa (región que limita el dominio terrestre del medio interplanetario) está lleno de un plasma de protones y electrones sumamente diluido y el propio medio interplanetario es continuamente atravesado por el flujo de plasma proveniente del Sol, llama

do "viento solar"

Aquí es interesante destacar que el viento solar, a pesar de ser un gas muy diluido ($\approx 5 - 10$ part./cm³) puede ser tratado como fluido, debido precisamente al comportamiento colectivo que se observa y en el cual no puede ser producto de las colisiones coulombianas que debido a la baja densidad son altamente improbables.

En los casos de plasma sin colisiones, las causas del comportamiento colectivo siguen siendo un misterio, pero las observaciones muestran que este existe.

Para producir un plasma, se requiere suministrar energía a los electrones, para que estos puedan escapar del campo de fuerzas del átomo. En general, esta energía se proporciona mediante colisiones.

La tabla 3.1 muestra las energías requeridas por algunos gases para su ionización.

GAS	ENERGIA DE IONIZACION (eV)
Cesio	3.9
Litio	5.4
Mercurio	10.4
Hidrógeno	13.6
Molécula de Hidrógeno	15.4
Argón	15.7
Molécula de Nitrógeno	15.8
Neón	21.6
Helio	24.6

Tabla 3.1. Energía requerida para la ionización de algunos átomos y moléculas.

Los plasmas que se obtienen en el laboratorio no presentan, generalmente, ionización total, pero muchas de las características del plasma son independientes, tanto de la presencia de partículas neutras, como de otros electrones aún atrapados en los átomos ionizados, por lo que para muchos propósitos es conveniente analizar el caso de un plasma completamente ionizado. En este caso los efectos cuánticos se pueden, en general, ignorar, excepto para una interacción pequeña con el campo de radiación. De este modo, la mayoría de los tratamientos teóricos de un plasma se reducen al caso de ionización total.

La física de plasmas constituye un estudio bastante reciente, que se ha ido llevando a cabo mediante desarrollos teóricos y experimentos de laboratorio.

La extensión de las observaciones realizadas con plasmas de laboratorio a los sistemas astrofísicos no es inmediata, pues el cambio de escalas espaciales y temporales presentan una diferencia fundamental. Además, los efectos que las fronteras ejercen en los plasmas confinados en el laboratorio no existen para los plasmas en el espacio.

En presencia de un campo magnético externo, los cuales parecen llenar el universo, el acoplamiento entre éste y la dinámica del plasma, da lugar a novedosos fenómenos y constituyen la magnetohidrodinámica, que es una forma de tratar a los plasmas, considerándolos fluidos.

3.3. Parámetros de un Plasma.

3.3.1. Esfera de Debye.

Anteriormente mencionamos que en los plasmas densos los efectos colectivos se deben al largo alcance de las fuerzas electrostáticas.

Debido a la atracción electrostática, cada ion del plasma se ve rodeado por una nube de electrones que tenderán a anular su carga; la distancia máxima a la que esto ocurre, recibe el nombre de "Longitud de Debye" y se denota por λ_D .

Así, el parámetro λ_D nos proporciona una medida del radio dentro del cual la influencia de una sola partícula es dominante; más allá de ella, la influencia de la partícula se ve apantallada, predominando los efectos térmicos.

Cada una de las partículas que forman el plasma tiene su esfera de Debye y es debido a la superposición de éstas que el plasma presenta comportamientos colectivos.

Supongamos que tanto iones como electrones se encuentran en equilibrio termodinámico, por lo que ambos obedecen una distribución maxwelliana caracterizada por la temperatura, es decir:

$$n_e = n_0 \exp \left(\frac{q\phi}{kT_e} \right) \quad (3.1)$$

$$n_i = n_0 \exp \left(\frac{q\phi}{kT_i} \right) \quad (3.2)$$

en estas expresiones n_e y n_i son las densidades de los electrones y los iones, respectivamente, T_e y T_i las temperatu_

ras correspondientes, ϕ el potencial eléctrico, ρ la unidad de carga, n_0 la densidad inicial ($\phi = 0$) y K la constante de Boltzmann.

La ecuación de Poisson que relaciona el potencial ϕ con las densidades de carga de iones y electrones representadas por las ecs. (3.1) y (3.2), toma la forma:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi e(n_e - n_i) \quad (3.3)$$

Haciendo uso del hecho de que en un plasma la energía potencial de una partícula debida a su vecino más cercano, es mucho menor que su energía cinética, $e\mu \ll KT_e$ y $e\mu \ll KT_i$

La ec. (3.3), en coordenadas esféricas toma la forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\phi}{dr} \right] = 4\pi n_0 e^2 \left(\frac{1}{KT_e} + \frac{1}{KT_i} \right) \phi \quad (3.4)$$

donde se ha hecho un desarrollo en serie de Taylor, considerando sólo los dos primeros términos.

Si ahora definimos la longitud de Debye para electrones e iones como:

$$\lambda_{e,i} \equiv \left(\frac{K T_{e,i}}{4\pi n_0 e^2} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

y como la longitud total de Debye:

$$\lambda_D \equiv \lambda_i + \lambda_e \quad (3.6)$$

La ec. (3.4) toma la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \lambda_D^{-2} \phi \quad (3.7)$$

Suponiendo una solución de la forma $\phi = \psi/r$ la ec.(3.7) se convierte en:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = \lambda_D^{-2} \psi \quad (3.8)$$

cuyas soluciones a largas distancias son $\psi \sim \exp(-r/\lambda_D)$, en tanto que para distancias muy cercanas a $r = 0$ las soluciones son $\psi = q/r$; por lo tanto, la solución a la ec. (3.3), para cualquier distancia, es:

$$\phi = \frac{q}{r} \exp \left(\frac{-r}{\lambda_D} \right) \quad (3.9)$$

Observando la ec.(3.9) notamos que el potencial debido a una carga q (en un plasma) decrece mucho más rápido que en el vacío, tal suceso se conoce como "Apantallamiento de Debye".

En otras palabras si $r \gg \lambda_D$ entonces $\phi \rightarrow 0$, pues la carga q se ve apantallada por la nube de cargas opuestas a su alrededor.

Finalmente como consecuencia de lo anteriormente discutido notamos que para la existencia de un plasma es necesario que su longitud lineal sea mucho mayor que la longitud de Debye, además de que el número de partículas en una esfera de Debye que proporcionan el decrecimiento lento del campo requerido en la deducción de λ_D , debe ser mucho mayor que la

unidad. Es decir, para la existencia de un plasma requerimos de:

$$L \gg \lambda_D \quad (3.10)$$

$$\frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 n \gg 1 \quad (3.11)$$

Supongamos que se tiene una muestra de plasma con densidades n_e y n_i para los electrones y los iones, respectivamente, en una esfera de un cm de radio. El potencial será entonces:

$$V = \frac{\text{carga total}}{r} = \frac{4}{3} \pi (n_i - n_e) e \quad (3.12)$$

Si un plasma presentando una $n_e = 10^{14}$ electrones por cm^3 es suficientemente desviado de la neutralidad, como para que n_i exceda a n_e en un por ciento, el potencial sería $V \approx 6 \times 10^5$ volts. Potenciales de este orden pueden mantenerse sólo en condiciones muy especiales y puesto que existe poca restricción para el movimiento de partículas cargadas en un plasma, excepto donde actúan fuerzas magnéticas, las partículas se moverán libremente para neutralizar cualquier exceso de carga, razón por la cual el plasma tiende a permanecer en un estado de cuasineutralidad eléctrica, es decir $n_e \approx n_i$.

3.3.2. Frecuencia del Plasma.

Supongamos que se tiene un plasma bidimensional de longitud L . Si un grupo de electrones es desplazado una distancia δ de su posición de equilibrio X_0 , experimentará una fuerza que lo hará tender a regresar a X_0 . Cuando se encuentren en su posición de equilibrio tendrán una energía cinética igual a la energía potencial en su desplazamiento inicial, pasarán así por X_0 y seguirán moviéndose hasta que se reconvierta la energía cinética en potencial y así sucesivamente. La frecuencia de este movimiento armónico simple se conoce como: "Frecuencia del Plasma" y la denotaremos por ω_p .

La ecuación de Poisson en una dimensión es:

$$\frac{\partial E}{\partial X} = 4\pi\rho \quad (3.13)$$

donde ρ es la densidad de carga y E el campo eléctrico producido en el interior del plasma, debido al desplazamiento de las cargas, por lo cual $E(X_0) = 0$, supongamos además que $\delta \ll L$.

El campo eléctrico producido es:

$$E = 4\pi n_0 e \delta \quad (3.14)$$

donde $n_0 e$ es la densidad superficial de carga, tanto de iones como de electrones.

La fuerza por unidad de area actuando sobre un electrón en el interior del plasma es la carga por unidad de área multiplicada por E, esto es:

$$(Ln_0e)E = 4\pi n_0^2 e^2 L\delta \quad (3.15)$$

Así, la segunda Ley de Newton puede escribirse como:

$$Lm_e n_0 \frac{d^2\delta}{dt^2} = - 4\pi n_0^2 e^2 L\delta \quad (3.16)$$

en la cual el término $Lm_e n_0$ es la masa por unidad de área sobre la cual actúa la carga y m_e es la masa del electrón.

La ec. (3.16) puede reescribirse como:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \left[\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right] \delta = 0 \quad (3.17)$$

que es la ecuación del oscilador armónico con frecuencia característica dada por:

$$\omega_e = \left[\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right]^{1/2} \quad (3.18)$$

expresión conocida como "Frecuencia del Plasma".

La frecuencia del plasma es utilizada muy a menudo, pa
ra determinar la densidad de un plasma, es también una medi
da del tiempo empleado por un ion o electrón para recorrer
una longitud de Debye.

Las colisiones entre iones y electrones tenderán a amortiguar las oscilaciones colectivas; para que éstas solo sean ligeramente amortiguadas, la frecuencia de las colisiones debe ser mucho menor que ω esto es:

$$\omega_e \gg \omega_{col} \quad (3.19)$$

Por lo tanto la ec. (3.19) resulta ser una condición más para la existencia de un plasma, es decir para que una colección de partículas cargadas exhiba una conducta de plasma.

3.3.3. Frecuencia de Ciclotrón.

Los plasmas existentes en la naturaleza se encuentran en general inmersos en campos magnéticos como lo son los plasmas del medio interplanetario. Es por ello que resulta importante analizar el movimiento de las partículas en un campo magnético \vec{B} .

El campo magnético \vec{B} ejerce una fuerza sobre una partícula de carga q , solo si la velocidad de ésta tiene una componente perpendicular a la dirección del campo.

Por ello, si consideramos la velocidad de la partícula como la suma de una componente paralela y otra perpendicular a \vec{B} es decir:

$$\vec{V} = \vec{V}_{||} + \vec{V}_{\perp} \quad (3.20)$$

La ecuación de la fuerza de Lorentz para una partícula

de masa m , carga q y velocidad \vec{V} moviéndose en un campo \vec{B} toma la forma:

$$\frac{dV_L}{dt} = \frac{q}{m}(\vec{V}_L \times \vec{B}) \quad (3.21)$$

de donde el primer término resulta ser siempre perpendicular a \vec{V}_L y a \vec{B} ; razón por la cual el movimiento es circular.

La aceleración en el movimiento circular de radio r es $\frac{V^2}{r}$ y debe ser igual a $\frac{dV_L}{dt}$, esto es:

$$\frac{V_L^2}{r} = q \frac{V_L B}{m} \quad (3.22)$$

a partir de esto encontramos que la frecuencia angular

$\omega_c = \frac{V_L}{r}$ es:

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (3.23)$$

cantidad que recibe el nombre de "frecuencia ciclotrónica".

Si la velocidad inicial no es perpendicular a \vec{B} , la componente paralela al mismo permanecerá constante y la componente perpendicular a \vec{B} obedecerá la ec. (3.21). La trayectoria de la partícula con esta velocidad inicial tendrá la forma de una hélice de paso constante.

En un campo magnético uniforme, la partícula gira con radio constante alrededor de una línea de campo. En el siguiente capítulo veremos las consecuencias de este efecto.

3.3.4. Parámetro de Plasma.

El parámetro de Plasma denotado por el símbolo Λ nos indica el número de partículas del plasma contenidas en un cubo cuyos lados tienen una longitud igual a la Longitud de Debye, esto es:

$$\Lambda = n_0 \lambda_D^3 \quad (3.24)$$

Cabe mencionar que si $\Lambda \rightarrow 0$ se tendrá una disminución en la frecuencia de colisiones entre las partículas del plasma.

El parámetro de plasma es también una medida dentro de la cual los efectos colectivos dominan sobre los efectos de partículas individuales, pues si Λ es pequeño, el plasma es tratado como un gas ideal de partículas cargadas, es decir, como un gas en el cual no hay interacción entre partículas.

3.4. Ondas en Plasmas.

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas a través de un plasma, nos permite conocer lo que ocurre dentro del mismo. Al transportar energía de un lugar a otro, las ondas electromagnéticas resultan ser el vehículo ideal de interacción con el plasma, para que por medio de ella podamos tener un mejor y más amplio conocimiento de este cuarto estado de la materia.

Debido a la extensión y complejidad del tema, nos limitaremos al estudio de la propagación de ondas en un plasma frío magnetizado, el cual presenta la propiedad importante de poder transmitir una gran variedad de ondas.

A primera vista parece que existe un número ilimitado en cuanto a variedad de ondas electromagnéticas que se pueden transmitir en un plasma, sin embargo, existen muchas ondas que se propagan con diferencias muy pequeñas.

Esencialmente existen cuatro tipos de ondas electromagnéticas que se pueden propagar a través de un plasma y éstas son:

a) Ondas de Radio: cuya propagación a través de la ionósfera fue estudiada a principios de los 20 por Appleton y Hartree. La ionósfera es considerada como un plasma parcialmente ionizado, inmerso en el campo magnético terrestre, lo cual tiene como consecuencia la carencia de isotropía.

El comportamiento de las ondas de radio, depende de su dirección de propagación, con respecto al campo magnético, el estudio detallado de tal comportamiento está fuera de los objetivos del presente trabajo, por lo que no será tratado en detalle.

b) Ondas de Langmuir: Estas ondas fueron estudiadas en el laboratorio, poco después de las anteriores, por Langmuir y Tonks. Para este tipo de ondas se supone que los iones de masa infinita, no podrán moverse con la misma frecuencia de

la onda y por ello su contribución a la misma es nula.

c) Ondas Iónicas: este tipo de ondas aparece cuando se toma en cuenta el movimiento de los iones.

Tales ondas pueden propagarse en ausencia de campo magnético y tienen diferentes características, dependiendo del tamaño de su longitud de onda, comparada con la longitud de Debye. Cuando se introduce el campo magnético, además de convertirse en una onda muy compleja, llega a ser una especie de onda hidromagnética.

d) Ondas hidromagnéticas: Una de las contribuciones más importantes en el estudio de ondas en plasmas, fue hecha por Alfvén en 1942, quien observó que si las líneas de campo magnético eran dibujadas como cuerdas elásticas bajo tensión, deberían existir ondas semejantes a las ondas en cuerdas elásticas ordinarias; en la actualidad a tales ondas se les conoce como ondas de Alfvén o hidromagnéticas.

Supongamos que una onda electromagnética se propaga en un plasma magnetizado, a lo largo de la dirección del campo magnético, que se supone uniforme y estático. El campo magnético de la onda es transversal y por ello perpendicular al campo estático. La superposición de ambos campos da como resultado la ondulación del campo estático, así la tensión magnética tiende a restaurar a las líneas de campo en su configuración inicial, provocando con ello una oscilación transversal, cuya velocidad de propagación, en analogía con ondas que se propagan a lo largo de una cuerda, donde la velo

cidad depende de la tensión y densidad de la misma, es:

$$V_A = \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

donde $B^2/4\pi$ es la tensión magnética a lo largo de las líneas de campo y ρ la densidad del plasma.

La velocidad de Alfvén es en general la máxima velocidad con que se pueden transmitir las ondas hidromagnéticas de baja frecuencia en un plasma magnetizado.

En el siguiente capítulo se estudiará bajo qué condiciones una onda electromagnética se propaga en un plasma frío magnetizado, así como el tipo de ondas que pueden propagarse.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

CAPITULO IV

PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN UN PLASMA FRÍO MAGNETIZADO

4.1. Introducción.

Una característica importante de los plasmas magnetizados, es su gran capacidad para transmitir una gran variedad de ondas, que entre otras cosas, transportan energía de una parte del plasma a otra, además de enviar información fuera del plasma que nos permite conocer que está ocurriendo dentro de él, así como su densidad.

El primer desarrollo importante del tema ocurrió en 1902 cuando por sugerencia de Kennelly y Heaviside fue posible propagar ondas de radio a través del Atlántico, haciendo que se reflejaran en la atmósfera. El problema fue examinado teóricamente por vez primera en 1924 por Larmor y resuelto en 1925 por Appleton y su equipo de trabajo en Gran Bretaña, simultáneamente con Nichols and Schelleng en Estados Unidos.

La teoría completa fue desarrollada en 1931 por Hartree.

Otra contribución importante fue realizada en 1942 por Alfvén, quien observó que al dibujar líneas de campo magnético como cuerdas elásticas bajo tensión, deberían existir ondas análogas a las ondas ordinarias en las cuerdas elásti-

cas.

Debido a la gran variedad de ondas que se pueden propagar en un plasma magnetizado, resulta conveniente limitar el presente trabajo y es por ello que se estudiarán sólo ondas electromagnéticas en un plasma frío, en el cual la temperatura de los electrones T_e y la temperatura de los iones T_i son aproximadamente iguales y muy bajas, por lo cual, las presiones del plasma serán despreciadas, así como las colisiones entre las partículas del plasma.

Para mostrar cómo afecta a la propagación de ondas electromagnéticas la magnetización del plasma, se estudiará en primer lugar bajo qué condiciones existe propagación en un plasma no-magnetizado. Enseguida se analizará cómo se propagan las ondas electromagnéticas de alta y baja frecuencia en un plasma magnetizado, que por ser de esta naturaleza pierde su isotropía, existiendo entonces direcciones preferentes en las cuales se moverán iones y electrones.

4.2. Condiciones para la Propagación de Ondas en un Plasma Frío No-Magnetizado.

La ecuación que describe el movimiento de un electrón libre de moverse bajo la acción de campos aplicados, pero sujeto a una fuerza de amortiguamiento, debido a colisiones es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + mg\vec{v} = e\vec{E}(\vec{x}, t) \quad (4.1)$$

donde m es la masa del electrón, e su carga, \vec{v} su velocidad, \vec{E} el campo eléctrico aplicado y g la constante de amortiguamiento.

Si el campo aplicado es de alta frecuencia, y además armónico, el desplazamiento de los electrones será pequeño, comparado con la longitud de onda, por lo que aproximadamente la ec. (4.1) toma la forma:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + mg\vec{v} = e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (4.2)$$

donde \vec{E}_0 es el campo eléctrico en la posición promedio del electrón y ω la frecuencia del campo aplicado.

La solución de la ec. (4.2) está dada por:

$$\vec{v} = \frac{e}{m(g - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (4.3)$$

de este modo, la conductividad estará representada por:

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m(g - i\omega)} \quad (4.4)$$

donde n_0 es la densidad de electrones.

Como el plasma que se considera es un plasma sin colisiones, la conductividad del plasma σ_p , se expresa como:

$$\sigma_p \approx i \frac{n_0 e^2}{m\omega} \quad (4.5)$$

la cual es puramente imaginaria.

La propagación de ondas electromagnéticas en un plasma, obedece la ecuación:

$$k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right) \quad (4.6)$$

como se mostrará en otra sección, donde \vec{k} es el vector de propagación, μ y ϵ las constantes de permeabilidad y dieléctrica, respectivamente, c la velocidad de la luz y σ la conductividad.

Si ahora se sustituye la ec. (4.5) en la (4.6), se tiene:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad (4.7)$$

donde:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m} \quad (3.18)$$

es la ya conocida frecuencia del plasma. Puesto que k puede ser escrita en términos del índice de refracción n como:

$k = n\omega/c$, éste puede escribirse para el plasma como:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.8)$$

De acuerdo con esta última expresión, si la frecuencia de la radiación $\omega > \omega_p$ el índice de refracción es real y las ondas se propagan a través del plasma, si por el contra

rio $\omega < \omega_p$ el índice de refracción es puramente imaginario, significando ésto la disipación de la onda, lo cual trae como resultado que al incidir la onda en el plasma se refleje en el punto donde $\omega = \omega_p$, tal punto se conoce como: posición de densidad crítica.

Al introducir el campo magnético los resultados que se obtienen son, como veremos más adelante, bastante diferentes, pues se tienen dos valores para el índice de refracción.

4.3. Plasma como Dos Fluidos.

El comportamiento de un plasma puede estudiarse, en principio, sumando las contribuciones e interacciones de cada una de las partículas que lo constituyen. En la práctica, dicho análisis resulta ser complicado, por ello resulta ser mucho más conveniente un tratamiento macroscópico del plasma.

Existen varios modelos macroscópicos, cuyas únicas diferencias las determinan las condiciones y suposiciones hechas de acuerdo con el comportamiento del plasma que se vaya a estudiar; tales modelos consideran al plasma como un fluido conductor.

En el presente trabajo el plasma se supone un fluido conductor, formado a su vez por un fluido conductor de iones y un fluido conductor de electrones, modelo dentro del cual no es necesario considerar el hecho de que tanto electrones como iones presentan diferentes velocidades; de hecho los movi_

mientos térmicos serán despreciados, pues se analizará un plasma frío.

La razón por la cual se considera al plasma en este estudio como un fluido conductor formado por dos fluidos conductores acoplados entre sí, es que para una onda de frecuencia suficientemente alta como para que sólo los electrones oscilen, se tendrá la creación de densidades de carga local, destruyéndose así la cuasineutralidad del plasma y por ende el plasma mismo como tal.

Las variables en el modelo de dos fluidos conductores para un plasma son: la densidad, presión y velocidad, para cada una de las especies (iones y electrones) relacionadas entre sí, por las ecuaciones de continuidad y momento. El modelo consiste de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{V} = 0 \quad \text{ec. de continuidad} \quad (4.9)$$

$$n_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \vec{V}_{\alpha} = n_{\alpha} q_{\alpha} \left(\vec{E} + \frac{\vec{V}_{\alpha} \times \vec{B}}{c} \right) \quad \text{ec. de momento} \quad (4.10)$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \quad (4.12)$$

Además, cada fluido requiere una ecuación de estado, -

tal como lo son las de los siguientes procesos:

Adiabático

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^{5/3}} \right) = 0 \quad (4.13)$$

Incompresible

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.14)$$

Isotérmico

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Conjunto de ecuaciones en el cual α denota cada una de las especies, n la densidad, \vec{V} la velocidad promedio, q la carga, p , la presión y m la masa.

4.4. Constante Dieléctrica de un Plasma Frío Magnetizado.

Supongamos que se tiene un plasma con una densidad de electrones n_0 inmerso en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{k}$. Si se introduce una perturbación de la forma $e^{-i\omega t}$ de tal modo que:

$$n = n_0 + n_1 e^{-i\omega t} \quad (4.16)$$

y

$$n_1 \ll n_0 \quad (4.17)$$

al evaluar las ecs. (4.9) a (4.12) para las cantidades perturbadas \vec{B}_1 , \vec{E}_1 y \vec{V}_1 se tiene, eliminando los términos no-lineales o bien, dicho en otras palabras, los términos que involucran productos de cantidades perturbadas, que:

Ecuación de continuidad

$$-i\omega n_{\alpha 1} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \vec{V}_{\alpha 1} = 0 \quad (4.18)$$

Ecuación de momento

$$-i\omega \vec{V}_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\vec{E}_1 + \frac{\vec{V}_{\alpha 1} \times \vec{B}_0}{c} \right) \quad (4.19)$$

Ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -\frac{i\omega}{c} \vec{B}_1 \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \vec{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{V}_{\alpha 1} \quad (4.21)$$

Haciendo uso de la ec. (4.19) para obtener $\vec{V}_{\alpha 1}$ en términos de \vec{E}_1 , así como de las ecuaciones para las frecuencias ciclotrónicas para iones y electrones, la ec. (4.21) puede reescribirse, después de un poco de álgebra, como:

$$\nabla \times \vec{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1 \quad (4.22)$$

donde:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

en la cual:

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \quad (4.24)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (4.25)$$

$$\epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \quad (4.26)$$

La ec. (4.22) nos dice que la constante dieléctrica ahora es un tensor, esta generalización corresponde al hecho de haber perdido la isotropía.

4.5. Relación de Dispersión.

Una vez establecidas las condiciones del problema que nos ocupa, junto con las aproximaciones a realizar, el problema se traduce en encontrar la ecuación de onda, de la cual se derivarán las propiedades de las ondas que se propagan a través del plasma, a partir de las ecuaciones de Maxwell.

La ecuación de onda para ondas en un plasma sin colisiones se obtiene de las ecuaciones de Maxwell con la densidad de corriente identificada con la que se origina debido a la respuesta lineal del plasma. La aproximación es similar a la usada en la teoría de ondas en dieléctricos, pero con una generalización importante, que considera que la respuesta del medio es una función de \vec{k} y ω .

Así, para nuestro propósito inmediato, resultan necesarias las siguientes transformadas de Fourier:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(\vec{r}, t) \longrightarrow (-i\omega)^n F(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{grad } f(\vec{r}, t) \longrightarrow i\vec{k} F(\vec{k}, \omega) \quad (4.27)$$

$$\text{div } \vec{f}(\vec{r}, t) \longrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{F}(\vec{k}, \omega)$$

$$\text{rot } \vec{f}(\vec{r}, t) \longrightarrow i\vec{k} \times \vec{F}(\vec{k}, \omega)$$

donde (\longrightarrow) denota la aplicación de la Transformada de Fourier definida como:

$$F(\vec{k}, \omega) = \int dt \int d\vec{r}^3 \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] f(\vec{r}, t)$$

para poder transformar las ecuaciones de Maxwell, lo cual constituye nuestro punto de partida.

Tomando la Transformada de Fourier de las ecuaciones de Maxwell, tenemos:

$$\vec{k} \times \hat{E}_1(\vec{k}, \omega) = \frac{\omega}{c} \hat{B}(\vec{k}, \omega) \quad (4.28.1)$$

$$\vec{k} \cdot \hat{B}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (4.28.2)$$

$$\vec{k} \times \hat{B}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\omega}{c} \hat{E}_1(\vec{k}, \omega) \quad (4.28.3)$$

$$\vec{k} \cdot \hat{E}_1(\vec{k}, \omega) = -4\pi i n_\alpha(\vec{k}, \omega) \quad (4.28.4)$$

Resulta sorprendente, a primera vista notar que una de

estas ecuaciones es redundante, a saber la ec. (4.28.2) es tá implícita en la ec. (4.28.1). Es obvio que no podemos haber reducido cuatro ecuaciones linealmente independientes por el solo hecho de haber realizado una manipulación matemática: el significado que ésto tiene es que se ha perdido cierta información, el sistema dado por (4.28) tiene menos información que el dado por (4.27). Un estudio más detallado muestra que la información perdida concierne únicamente al campo estático; éste debe especificarse independientemente por separado. En nuestro caso, un plasma magnetizado, el campo estático es el campo magnético.

Una vez establecido el sistema (4.28), combinamos las ecs. (4.28.1) en (4.28.2) para obtener la ecuación:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \hat{E}_1) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{c}^+ \cdot \hat{E}_1 = 0 \quad (4.29)$$

que puede reescribirse como:

$$\hat{E}_1 - \hat{k}(\hat{k} \cdot \hat{E}_1) - \frac{1}{n^2} \vec{c}^+ \cdot \hat{E}_1 = 0 \quad (4.30)$$

cuyas soluciones son:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \hat{E}_1(\vec{k}, \omega) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \quad (4.30.1)$$

ecuaciones en las cuales $\vec{k} = \hat{k} \frac{\omega}{v}$, siendo v la velocidad de la onda, $n = \frac{c}{v}$ el índice de refracción y \hat{E}_1 la Transformada de Fourier de \vec{E}_1 .

La ec. (4.30) es la ecuación de onda que buscamos para derivar las propiedades de las ondas que se propagan a través del plasma. Tal información está contenida en la expresión que se conoce como relación de dispersión, que no es otra cosa que una ecuación que relaciona ω y \vec{k} .

Sin pérdida de generalidad podemos elegir un sistema de referencia en el cual el campo magnético \vec{B}_0 se encuentre en dirección Z e igualmente que el vector \vec{k} se encuentre en el plano YZ formando un ángulo θ con \vec{B}_0 .

Haciendo uso de estas condiciones y notando que la ecuación (4.30) es en realidad un sistema homogéneo de 3 ecuaciones para las componentes de \hat{E}_1 , podemos reescribirla en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\epsilon_1}{n^2} - i \frac{\epsilon_2}{n^2} & 0 & 0 \\ \frac{i\epsilon_2}{n} \cos^2\theta - \frac{\epsilon_1}{n^2} - \text{sen}\theta \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta \cos\theta \text{sen}^2\theta - \frac{\epsilon_3}{n^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{1X} \\ \hat{E}_{1Y} \\ \hat{E}_{1Z} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

donde \hat{E}_{1X} , \hat{E}_{1Y} y \hat{E}_{1Z} denotan las componentes del vector unitario \hat{E}_1 en las direcciones X, Y y Z, respectivamente.

El sistema tiene solución distinta de la trivial, si y sólo si el determinante del sistema es igual a cero, esto ocurre cuando:

$$\left[\frac{(\epsilon_D + \epsilon_I)}{2} \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta \right] k^4 - \left[\epsilon_D \epsilon_I \sin^2 \theta + \epsilon_3 \left(\frac{\epsilon_D + \epsilon_I}{2} \right) \right. \\ \left. (1 + \cos^2 \theta) \right] \frac{k^2}{C^2} K^2 + \epsilon_3 \epsilon_D \epsilon_I \frac{k^4}{C^4} = 0 \quad (4.32)$$

ecuación que representa la relación de dispersión buscada.

La ec. (4.32) puede escribirse, después de cierta manipulación algebraica y dividiendo por $\cos^2 \theta$, en una forma más conveniente dada por:

$$\tan^2 \theta = - \frac{(1/n^2 - 1/\epsilon_D)(1/n^2 - 1/\epsilon_I)}{(1/n^2 - 1/\epsilon_3) \left[1/n^2 - \frac{1}{2} (1/\epsilon_D + 1/\epsilon_I) \right]} \quad (4.33)$$

donde $\epsilon_D \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2$ y $\epsilon_I \equiv \epsilon_1 - \epsilon_2$.

Así, la ec. (4.33), conocida también como la ecuación de Appleton-Hartree, es la relación de dispersión, para ondas propagándose en un plasma frío, homogéneo y sin colisiones, inmerso en un campo magnético uniforme.

Podemos observar que al evaluar la ec. (4.33) para una dirección dada, existen varias raíces, esto significa que hay distintos modos de propagación.

La diferencia entre estos modos de propagación reside también en las distintas polarizaciones del campo electromagnético.

Por otro lado y como veremos más tarde, la ec. (4.32) nos dice que ω es real o puramente imaginaria, significando con ello una onda propagándose o bien, una onda desvaneciéndose, respectivamente.

De la relación de dispersión podemos obtener toda la información acerca de cómo se propaga la onda a través del plasma. Para simplificar el estudio nos limitaremos a dos direcciones de propagación de la onda respecto al campo magnético que son de importancia fundamental. Como primer caso se supondrá que la onda se propaga paralela al campo magnético; en el segundo la onda se propagará perpendicular al campo magnético con su campo eléctrico paralelo y perpendicular al campo magnético \vec{B}_0 .

4.6. Ondas Propagándose con Dirección Paralela al Campo Magnético.

4.6.1. Ondas de alta frecuencia.

Por una onda de alta frecuencia propagándose en un plasma magnetizado, se entiende una onda cuya frecuencia $\omega \gg \omega_{ci}$ condición con la cual las ecuaciones (4.24) a (4.26) toman la forma:

$$\epsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \quad (4.34)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} \quad (4.35)$$

$$\epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.36)$$

respectivamente, donde $\omega_p = \omega_{pe}$. A su vez, las expresiones para ϵ_D y ϵ_I se convierten en:

$$\epsilon_D = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \quad (4.37)$$

$$\epsilon_I = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \quad (4.38)$$

con la misma convención para ω_p .

Ahora bien, de la ec. (4.33) observamos que para $\theta = 0$ debe cumplirse que:

$$\epsilon_D = n^2 \quad (4.39)$$

$$\epsilon_I = n^2 \quad (4.40)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (4.41)$$

lo cual significa que existen dos valores para el índice de refracción $n = \frac{kC}{\omega}$, los cuales, en términos del número de onda k son:

$$k_D = \frac{\omega}{C} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \right]^{1/2} \quad (4.42)$$

$$k_I = \frac{\omega}{C} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \right]^{1/2} \quad (4.43)$$

Para ver a que ondas corresponden estos dos valores del número de onda, retomamos el sistema dado por ec. (4.31) que para el caso en que $\theta = 0$ da lugar al siguiente sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} (n^2 - \epsilon_1)\hat{E}_{1X} - i\epsilon_2 \hat{E}_{1Y} &= 0 \\ i\epsilon_2\hat{E}_{1X} + (n^2 - \epsilon_1)\hat{E}_{1Y} &= 0 \\ \epsilon_3\hat{E}_{1Z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

El sistema anterior establece que:

$$\hat{E}_{1X} = i\hat{E}_{1Y} \quad \text{y} \quad \hat{E}_{1Z} = 0 \quad (4.45)$$

lo cual significa que el vector campo eléctrico de la onda que se propaga tiene sólo dos componentes, una en la dirección X y otra en la dirección Y. Además, estas componentes tienen la particularidad de tener la misma amplitud y de estar desfasadas en un ángulo de 90° , por consiguiente, la superposición de ambas da como resultado una onda con polarización circular, según se discutió en la sección 1.7.

Supongamos que \hat{E}_{1X} tiene la forma:

$$\hat{E}_{1X} = E_0 \cos(kX - \omega t) \quad (4.46)$$

entonces \hat{E}_{1Y} será de la forma:

$$\hat{E}_{1Y} = E_0 \cos(kX - \omega t + \pi/2) = E_0 \text{sen}(kX - \omega t) \quad (4.47)$$

Considerando que el valor del número de onda es k , la superposición de las expresiones (4.46) y (4.47) da como resultado:

$$\vec{E}_D = \hat{E}_1 \exp[i(k_D z - \omega t)] (\hat{i} + i\hat{j}) \quad (4.48)$$

una onda electromagnética con polarización circular. Así k_D es el número de onda de una onda circularmente polarizada,

que se mueve con los electrones en su movimiento ciclotrónico, es decir, la ec. (4.48) corresponde a una onda con polarización circular derecha. Análogamente, k_1 es el número de onda de una onda con polarización circular que rota en sentido opuesto al movimiento de ciclotrón de los electrones, esto es, una onda con polarización circular izquierda.

Debido a que cada una de las ondas con polarización circular gira en el sentido en que lo hace cada una de las partículas del plasma, existe un fuerte acoplamiento con el movimiento de la partícula correspondiente. Esta preferencia en el acoplamiento con partículas de masas distintas, es la causa de que las dos ondas tengan constantes de propagación distintas con la consecuencia evidente de que cada una de las constantes está asociada a una diferente velocidad de la onda, es decir, la onda que se propaga en el plasma ve a este como un medio formado por otros dos medios diferentes.

Al observar la ec. (4.42) notamos que cuando $\omega = |\omega_{ce}|$ k tiende a infinito, significando con ello la existencia de una resonancia: el campo eléctrico de la onda con polarización circular derecha acelera continuamente a los electrones. Por otro lado, de la ec. (4.43) vemos que la onda con polarización circular izquierda no presenta resonancia alguna, lo cual se explica por el hecho de que tal onda gira en sentido contrario al movimiento de giro de los electrones.

Las frecuencias de corte se obtienen haciendo $k_D = k_1 = 0$

en las ecuaciones 4.42 y 4.43, de lo cual se obtiene:

$$\omega_1 = -\frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\omega_p^2 + \omega_{ce}^2/4 \right)^{1/2} \quad (4.49)$$

$$\omega_2 = +\frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\omega_p^2 + \omega_{ce}^2/4 \right)^{1/2} \quad (4.50)$$

soluciones correspondientes a $K_I + K_D$, respectivamente.

El comportamiento de las ondas dado por las relaciones de dispersión, ecs. (4.42) y (4.43), junto con las frecuencias de corte, se muestran en la gráfica 4.5.1. en la cual podemos observar que la onda con polarización circular derecha tiene dos bandas de propagación, la primera para frecuencias ω tales que: $0 < \omega < |\omega_{ce}|$ y la segunda para $\omega > \omega_2$; estas bandas están separadas por otra banda de frecuencias $|\omega_{ce}| < \omega < \omega_1$ dentro de la cual no hay propagación, esto se debe a que para dicho intervalo $n^2 < 0$, teniéndose así un decaimiento de la onda.

La onda con polarización circular izquierda se propaga sólo para $\omega > \omega_2$, región dentro de la cual $n^2 > 0$.

Para $\omega > \omega_2$, ambas ondas circularmente polarizadas pueden propagarse y si sus amplitudes son iguales, el efecto de su superposición es una onda plana con un plano particular de polarización, lo cual se debe a que ambas ondas se propagan con una velocidad diferente; este fenómeno se conoce como: Rotación de Faraday. En el límite, cuando $k \rightarrow \infty$, las dos ondas tienden a propagarse con la misma velocidad C , lo

cual significa que si la frecuencia de la onda está muy por arriba del valor de la frecuencia del plasma, simplemente ignora al plasma propagándose como si estuviera en el vacío.

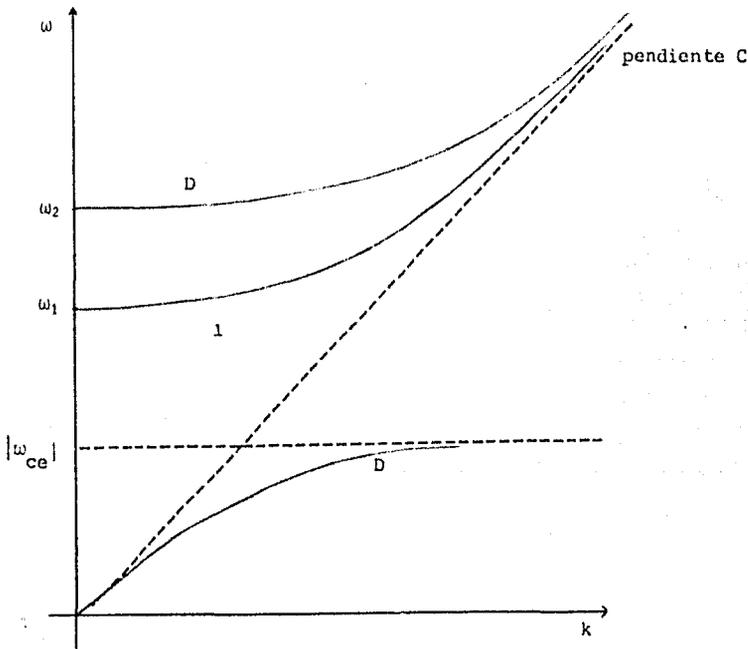


Fig. 4.6.1. Diagrama de dispersión para ondas electromagnéticas propagándose paralelas al campo magnético \vec{B}_0 .

4.6.2. Ondas de frecuencia intermedia.

Si la onda tiene una frecuencia ω muy por debajo del valor de la frecuencia ciclotrónica electrónica ω_{ce} , entonces los iones responderán a su paso, de modo que, ya no será posible despreciar el término ω_{ci} porque ahora existe resonancia en tal frecuencia.

Haciendo $\theta = 0$ en la ec. (4.33), con las componentes del tensor dieléctrico dadas por las ecs. (4.24) a (4.26) y sin despreñar ω , las relaciones de dispersión para las ondas con polarización circular derecha e izquierda resultan ser:

$$k_D = \frac{\omega^2}{C^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})} \right| \quad (4.51)$$

$$k_I = \frac{\omega^2}{C^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})} \right| \quad (4.52)$$

respectivamente. Debido a la cuasineutralidad del plasma, tenemos que: $\pm \omega_{pe}^2 \omega_{ci} + \omega_{pi}^2 \omega_{ce} = 0$ y así las ecuaciones anteriores pueden escribirse como:

$$k_D^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})} \right| \quad (4.53)$$

$$k_I^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega + \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})} \right| \quad (4.54)$$

De estas expresiones podemos observar que para frecuencias muy altas $\omega \gg \omega_{pe}$, las ondas electromagnéticas no ven al plasma.

La gráfica de las últimas expresiones nos muestran que para $\omega \approx \omega_p$ existen frecuencias de corte ω_1 y ω_2 análogas a las representadas en la figura 4.6.1. Por debajo de la frecuencia ciclotrónico electrónica, la onda con polarización circular derecha se propaga de nuevo y para frecuencias aún

más bajas $\omega \approx \omega_{ci}$ se manifiesta el efecto del movimiento de los iones: una onda ciclotrónica iónica con polarización circular izquierda, aparece con una frecuencia menor que ω_1 .

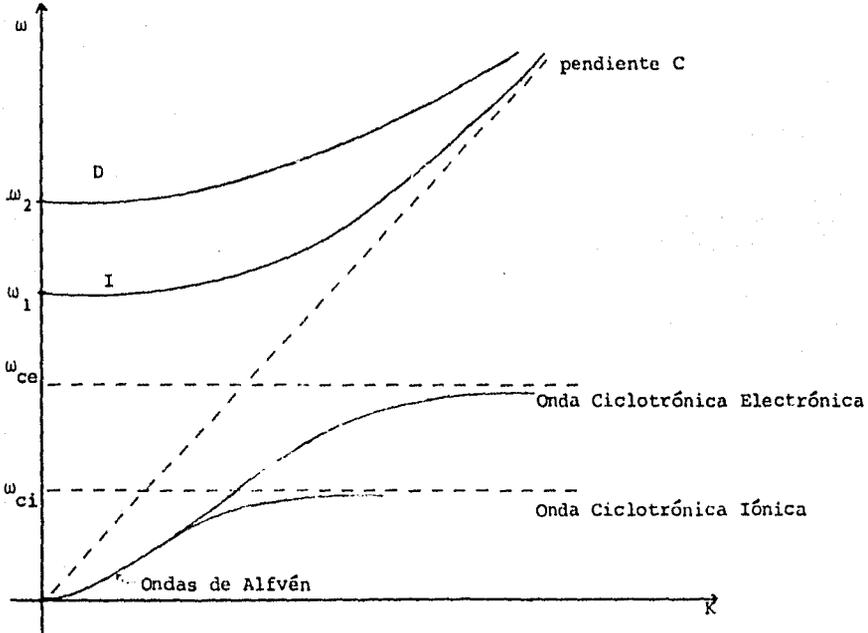


Fig. 4.6.2. Diagrama de dispersión para ondas electromagnéticas, de frecuencia intermedia y baja, propagándose paralelas a \vec{B}_0 .

Cabe mencionar que ω_1 y ω_2 son las frecuencias de corte en el sentido de ser los extremos bajo los cuales hay una banda de frecuencias, en donde no existe propagación, pero las ondas se vuelven a propagar a frecuencias superiores.

Para finalizar, mencionaremos que para las frecuencias tratadas en esta parte, existe resonancia de la onda con po

larización circular izquierda y se tiene cuando la frecuencia de ésta es muy cercana a la frecuencia ciclotrónica iónica.

4.6.3. Ondas de baja frecuencia.

Por una onda de baja frecuencia entendemos una onda cuya $\omega \ll \omega_{ci}$, condición con la cual las ecs. (4.48) y (4.49) toman la forma:

$$k_I^2 = k_D^2 = \frac{\omega^2}{C^2} \left| 1 + \frac{4\pi n_0 (m_e + m_i) C^2}{B_0^2} \right| \quad (4.55)$$

Esto significa que para este rango de frecuencias las ondas circularmente polarizadas viajan con la misma velocidad dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{C}{\sqrt{1 + 4\pi\rho C^2/B_0^2}} = \frac{V}{(1 + V_A^2/C^2)^{1/2}} \quad (4.56)$$

donde $\rho = n_0 (m_e + m_i)$ es la densidad de masa del plasma y $V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$ es la velocidad de Alfvén.

En realidad, si los términos ω/ω_{ci} no se desprecian, las ondas polarizadas circularmente viajan con velocidades muy parecidas, por lo que las Ondas de Alfvén casi son ondas transversales electromagnéticas linealmente polarizadas que se propagan paralelas al campo magnético aplicado. Debido a que el campo magnético de la onda \vec{B}_1 es perpendicular a \vec{B}_0 aparecen ondulaciones en las líneas de campo magnético.

Estas ondulaciones se propagarían en ausencia de plasma, a la velocidad de la luz, pero en su presencia lo hacen a velocidades menores.

Las líneas del campo magnético de la onda están congeladas en el plasma, forzando a éste a moverse a lo largo de las líneas de flujo y los efectos inerciales de las partículas del plasma hacen que la velocidad disminuya.

4.7. Ondas Propagándose con dirección perpendicular al Campo Magnético.

4.7.1. Ondas de Alta Frecuencia.

Las ondas que se propagan perpendicularmente al campo magnético externo, presentan, principalmente dos posibles orientaciones del vector campo eléctrico de la onda, pues cualquier otra orientación se puede escribir como una combinación de ellas. La primera orientación se tiene cuando el vector de campo eléctrico de la onda incidente es paralelo al campo magnético estático, en el cual se encuentra inmerso el plasma, esta onda recibe el nombre de onda ordinaria. La segunda orientación corresponde a aquella en la cual el vector campo eléctrico de la onda es perpendicular al campo magnético externo, recibiendo así, el nombre de onda extraordinaria.

El efecto de una onda ordinaria es que su campo eléctrico ejerce una fuerza sobre iones y electrones, a lo largo del campo magnético, razón por la cual ni unos, ni otros sienten su presencia, por esta razón la relación de disper

sión para una onda ordinaria es, de la ec.(4.33), la siguiente:

$$n^2 = \epsilon_1 \quad (4.57)$$

o bien, en términos del número de onda y haciendo uso de la ec.(4.26).

$$k_0 = \pm \frac{\omega}{C} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (4.58)$$

expresión de la cual podemos concluir que una onda ordinaria de frecuencia $\omega \gg \omega_p$ se propaga como si no existiera plasma, esto es: $k_0 = \omega/C$ correspondiente a una onda transversal linealmente polarizada.

Si la onda que se propaga en el plasma magnetizado es una onda extraordinaria, el índice de refracción está dado, según la ec.(4.33), por la siguiente expresión:

$$n^2 = \frac{2\epsilon_D \epsilon_I}{\epsilon_D + \epsilon_I} \quad (4.59)$$

o bien, en términos del número de onda y haciendo uso de las ecs.(4.25) y (4.26) por la siguiente relación de dispersión:

$$k_E = \pm \frac{\omega}{C} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2 - \omega_H^2} \right]^{1/2} \quad (4.60)$$

donde ω_1 y ω_2 son las mismas frecuencias que las definidas por las ecuaciones

$$\omega_1 = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[-1 + \left(1 + \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.61)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right] \quad (4.62)$$

y representadas en los diagramas 4.5.1 y 4.5.2.

Las ondas que corresponden a la ec.(4.60) se obtienen al resolver el siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} (n^2 - \epsilon_1) \hat{E}_{1X} - i\epsilon_2 \hat{E}_{1Y} &= 0 \\ i\epsilon_2 \hat{E}_{1X} - \epsilon_1 \hat{E}_{1Y} &= 0 \\ (n^2 - \epsilon_3) \hat{E}_{1Z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

el cual se ha obtenido al resolver 4.31 para el caso en que $\theta = \pi/2$.

El sistema anterior establece que:

$$\hat{E}_{1X} = i\alpha \hat{E}_{1Y} \quad (4.64)$$

$$\text{donde } \alpha = \frac{\epsilon_2}{n^2 - \epsilon_1} = \frac{\frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}}{\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} - \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2} \right)}$$

de lo cual se concluye que el vector de campo eléctrico de la onda que se propaga, tiene dos componentes, una en la dirección de propagación y otra perpendicular a ésta, que di_

fieren entre sí en fase según la ec.(4.64). Así, las componentes de la onda, a lo largo del eje X y a lo largo del eje Y, resultan ser las componentes de una onda con polarización elíptica, según se discutió en la sección 1.7.

Como la dirección de propagación de la onda extraordinaria es la dirección Y, una vez que ésta se ha polarizado elípticamente, podemos escribirla como:

$$\vec{E}_E = \hat{E}_E (\alpha \hat{i} + \hat{j}) \exp \left\{ i(k_E Y - \omega t) \right\} \quad (4.66)$$

Así, podemos observar que la ec.(4.66) no representa una onda totalmente transversal, sino que representa una onda parcialmente longitudinal, dependiendo de los valores que tome α como por ejemplo:

$$\begin{array}{lll} \alpha \rightarrow \infty & \text{cuando } \omega \rightarrow \infty & \text{en cuyo caso } \vec{E} \perp \vec{k} \\ \alpha \rightarrow & \text{cuando } \omega \rightarrow \omega_H & \text{en cuyo caso } \vec{E} \parallel \vec{k} \end{array}$$

La frecuencia ω_H definida como:

$$\omega_H = (\omega_p^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2} \quad (4.67)$$

y llamada frecuencia superior híbrida, resulta ser de la ec. (4.60) una frecuencia de resonancia para el modo extraordinario, para el cual se tienen dos índices de refracción en dos rangos de frecuencias diferentes y ellos son:

$$\text{Para } \omega \gg \omega_H ; \quad n^2 = \left(\frac{\omega C}{\omega} \right)^2 = 1$$

$$\text{Para } \omega \leq \omega_H ; \quad n^2 \gg 1$$

La gráfica de la ec.(4.60) nos muestra que las bandas donde no existe propagación son: para el modo ordinario $0 < \omega < \omega_p$, en tanto que para el modo extraordinario se tienen dos bandas, la primera dada por $0 < \omega < \omega_1$ y la segunda por $\omega_H < \omega < \omega_2$. La no propagación se debe a que para estas regiones $n^2 < 0$ para $\omega > 0$, lo cual implica que k es imaginario, significando que las ondas se desvanecen.

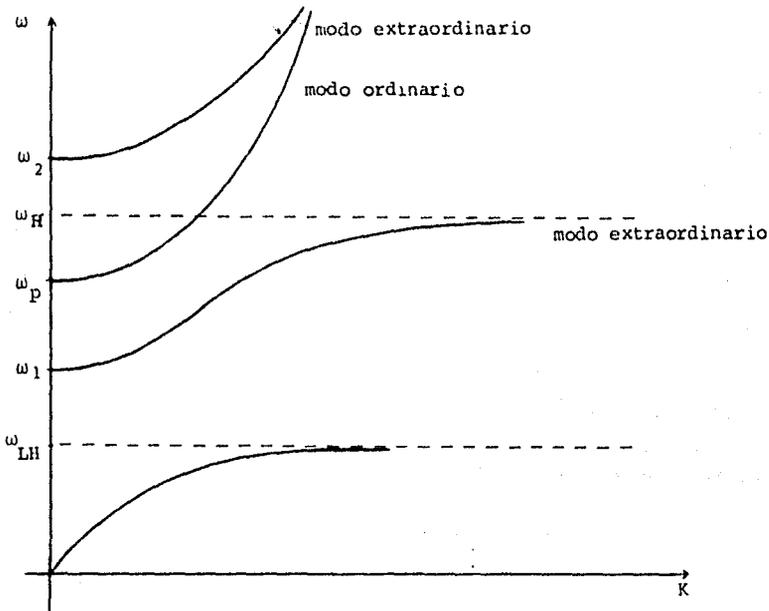


Fig. 4.7.1. Diagrama de dispersión de ondas electromagnéticas propagándose en un plasma magnetizado con dirección perpendicular al campo magnético.

En ausencia del campo magnético \vec{B}_0 , una onda transversal linealmente polarizada propagándose en dirección Y daría lugar a que los iones y electrones tuvieran una componente transversal adicional, de movimiento, en el plano XZ. La presencia de \vec{B}_0 en la dirección Z acopla la componente del movimiento de las partículas en dirección X con la componente del movimiento de las mismas en dirección Y, este último es un movimiento longitudinal oscilatorio de las partículas en dirección de \vec{k} que da origen a una onda electrostática con la misma dirección de \vec{k} .

La superposición de ambos modos da como resultado que el vector campo eléctrico de la onda esté polarizado elípticamente en un plano perpendicular a \vec{B}_0 rotando hacia la derecha o hacia la izquierda.

4.7.2. Ondas de Frecuencia Intermedia y Baja.

Debido a que las ondas se propagan perpendiculares al campo magnético aplicado \vec{B}_0 , no puede existir resonancia en las frecuencias de ciclotrón de iones y electrones, pues no existe componente alguna de la onda que acompañe a las partículas en su movimiento que resulta ser sumamente complejo.

Si la onda es de baja frecuencia, el movimiento debe ser considerado y con ello la relación de dispersión para este tipo de ondas resulta ser:

$$n^2 = - \frac{\omega_{ce}^2 (\omega_{ci}^2 - \omega^2) (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)}{\omega_{Hi}^2 \left[\omega^2 - \omega_{ce} \omega_{ci} \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce} \omega_{ci}}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \right]} \quad (4.68)$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 están definidos por las ecs. (4.24) y (4.25) respectivamente, además se ha hecho uso de la aproximación $\omega \ll \omega_{ce}$.

La ec. (4.68) nos muestra que el modo extraordinario se propaga de nuevo a bajas frecuencias, existiendo además resonancia cuando su frecuencia ω toma el valor ω_{IH} definido por:

$$\omega_{IH} = \frac{\omega_{ce}^2 \omega_{ci}^2 + \omega_{pe}^2 \omega_{ci} \omega_{ce}}{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2} = \frac{\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2}{1 + \left(\omega_{pe}/\omega_{ce}\right)^2} \quad (4.69)$$

A la frecuencia ω_{IH} se le conoce como: frecuencia inferior híbrida.

Si se tiene un plasma denso en un campo magnético débil, entonces $\omega_{pi} \gg \omega_{ci}$ por lo que la ec.(4.69) se puede escribir como:

$$\omega_{IH} = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2} \quad (4.70)$$

y si además se supone que $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ entonces:

$$\omega_{IH} = \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}}\right)^2 \omega_{ce}^2 = \omega_{ci} \omega_{ce} \quad (4.71)$$

donde al igual que en la ec.(4.69) se ha hecho uso del resultado $\omega_{pi}^2 = \frac{\omega_{pe} \omega_{ci}}{\omega_{ce}}$

Por otro lado, si la onda es de muy baja frecuencia,

$\omega \ll \omega_{ci}$, $n^2 \approx \epsilon_1$ de modo que:

$$n^2 = \frac{k^2 C^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \quad (4.72)$$

o bien:

$$\omega = \pm \frac{k B_0}{\sqrt{4\pi n m_i}} \frac{1}{1 + \frac{B_0^2}{4\pi n m_i C^2}} \quad (4.73)$$

que en términos de la velocidad de Alfvén toma la forma

$$\omega = \frac{k v_A}{1 + v_A^2 / C^2} \quad (4.74)$$

Esta onda de baja frecuencia recibe el nombre de: onda magnetosónica y se propaga en dirección \hat{k} , resultando ser por ello la onda longitudinal mencionada anteriormente.

Por último, de la ec.(4.73) podemos observar que la velocidad límite de propagación de las ondas magnetosónicas es la velocidad de Alfvén.

CONCLUSIONES

A primera vista, las características y propiedades de los plasmas estudiadas en el capítulo 3, nos llevarían a suponer que no existe una gran variedad de ondas que al interactuar con el plasma no puedan propagarse a través de éste. De hecho, y como se muestra en el resultado expuesto por la ec.(4.8), sólo las ondas cuya frecuencia es mayor a la frecuencia de oscilación del plasma pueden propagarse a través del mismo. Sin embargo y a pesar de la gran capacidad de los plasma para transmitir ondas, después del presente trabajo podemos concluir que tampoco existe una variedad ilimitada de ondas que se puedan propagar.

Ahora sabemos que todas las ondas existentes con la capacidad de viajar a través de un plasma magnetizado, presentan características en su propagación, con diferencias muy pequeñas, siempre y cuando se comparen ondas cuya dirección de propagación, con respecto al campo magnético estático, no varíe; a este propósito cabe mencionar que existen dos direcciones fundamentales, a saber $\theta = 0$ y $\theta = 90^\circ$. Si θ no toma estos valores, entonces las propiedades de la onda que se propaga, serán una combinación de las propiedades deducidas para el caso $\theta = 0$ y $\theta = 90^\circ$.

Así, como primera situación tenemos aquella en la que la dirección de propagación de la onda coincide con la dirección del campo magnético \vec{B}_0 , en el cual se encuentra in-

merso el plasma. Las frecuencias de la onda incidente se determinan y clasifican con base en aquellas que son características del plasma, ec.(3.18) y (3.22), siendo a su vez en las cuales se tienen los efectos más importantes e interesantes.

Para $\theta = 0$ consideramos las siguientes frecuencias:

Alta frecuencia.

Una onda se considera de alta frecuencia si su frecuencia ω cumple con $\omega \gg \omega_{ci}$ (ec. 3.23), condición con la cual las ecuaciones (4.24) a (4.26) se reducen a las ecs. (4.34) a (4.36), respectivamente. Al sustituir estas expresiones en la ec. (4.33) notamos que existen tres raíces, dos de las cuales son distintas de cero, razón por la cual podemos concluir que existen dos modos de propagación distintos.

Tales modos corresponden a dos ondas con polarización circular opuesta, que acompañan a iones y electrones en su movimiento ciclotrónico alrededor de las líneas del campo magnético \vec{B}_0 . Esta preferencia en el acoplamiento con partículas de masas distintas es la causa de que las ondas tengan constantes de propagación distintas, con la consecuencia evidente de que cada una de estas constantes está asociada a una diferente velocidad de la onda, es decir, la onda que se propaga lo hace como si se estuviera propagando a través de dos medios distintos.

Igualmente cabe mencionar que de las ecs. (4.42) y (4.43) se puede concluir que solamente la onda con polarización circular derecha da lugar al fenómeno de resonancia,

cuando su frecuencia es cercana a la frecuencia de ciclotrón de los electrones. La onda con polarización circular izquierda no presenta resonancia a estas frecuencias, por girar en sentido contrario al movimiento de giro de los electrones.

El comportamiento de las ondas polarizadas que se propagan, se muestra en la gráfica 4.6.1, de la que se puede observar que la onda con polarización circular derecha tiene dos bandas de propagación, la primera para frecuencia ω tales que: $0 < \omega < |\omega_{ce}|$ y la segunda para $\omega > \omega_2$; tales bandas están separadas por otra, cuyos extremos son $|\omega_{ce}|$ y $|\omega_1|$; estos puntos determinan una banda de frecuencias, en la que no existe propagación, debido al hecho de que para estas frecuencias $n^2 < 0$ teniéndose así, un decaimiento de la onda.

La onda con polarización circular izquierda se propaga solo para $\omega > \omega_2$ región en la cual $n^2 > 0$.

Para $\omega > \omega_2$ ambas ondas circularmente polarizadas se pueden propagar y si sus amplitudes son iguales, el efecto de su superposición es como ya sabemos, una onda plana, con un plano particular de polarización, que se observará rotado con respecto al plano de polarización de la onda incidente; tal fenómeno se conoce como rotación de Faraday y se emplea para medir densidades de plasmas, tanto de laboratorio como del espacio interestelar.

Las ondas cuyas frecuencias son mayores a ω_1 y ω_2 , tienden a propagarse con una velocidad próxima a C , lo cual

significa que si la frecuencia de la onda está muy por arriba de la frecuencia del plasma, ésta se propagará como si estuviera en el vacío.

Frecuencia Intermedia.

Una onda se considera de frecuencia intermedia, si su frecuencia $\omega \ll \omega_{ce}$. Situación en la que no será posible despreciar el término ω_{ci} de las ecs. (4.24) a (4.26), porque ahora sí, los iones responderán al paso de las ondas, de tal modo que las relaciones de dispersión, ecs. (4.51) y (4.52), nos muestran que en esta situación existe también resonancia provocada por la onda con polarización izquierda.

La gráfica de las relaciones de dispersión nos muestra que para frecuencias $\omega > \omega_1$ existe propagación para ambas ondas circularmente polarizadas; igualmente existe una banda de frecuencias $\omega_1 < \omega < \omega_{ce}$ en la que la propagación no existe. Sin embargo, para frecuencias $\omega < \omega_{ce}$ la onda con polarización circular derecha se propaga de nuevo y para frecuencias aún más bajas $\omega \approx \omega_{ci}$, el movimiento de los iones se manifiesta dando lugar a una onda ciclotrónica iónica con polarización circular izquierda. El origen de esta onda se debe estrictamente a la magnetización del plasma.

Baja Frecuencia.

Decimos que una onda es de baja frecuencia, si cumple que $\omega \ll \omega_{ci}$. Este tipo de ondas también se conocen como: Ondas Hidromagnéticas.

Para este tipo de ondas, solo existe una relación de dispersión, que describe el comportamiento de las dos ondas polarizadas que ahora viajarán con la misma velocidad dada por la ec. (4.56). Esta ecuación nos permite concluir que este tipo de ondas se propagan con una velocidad límite conocida como velocidad de Alfvén, que es la velocidad con que se propaga la perturbación originada por la superposición de los campos magnéticos \vec{B}_0 y \vec{B}_1 . El campo resultante de esta superposición es el campo magnético de una onda conocida como Onda de Alfvén, que se propaga a lo largo de las líneas del campo magnético \vec{B}_0 que se encuentran congeladas en el plasma.

Como segundo caso fundamental en el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma, se estudió aquél en el cual la dirección de propagación de la onda y la dirección del campo magnético \vec{B}_0 forman un ángulo $\theta = \pi/2$.

En este caso se tienen dos posibles orientaciones del vector campo eléctrico de la onda incidente, con respecto al campo magnético estático \vec{B}_0 . La primera de ellas corresponde a una misma dirección de \vec{B}_0 y \vec{E}_1 en cuyo caso la onda incidente se conoce como: onda ordinaria, que obedece la relación de dispersión dada por la ec. (4.57), de la cual se deduce la ec. (4.58) que nos dice que para frecuencias $\omega \gg \omega_p$ la onda incidente se propaga como lo haría en el vacío.

La segunda orientación principal, corresponde a un án-

gulo entre \vec{B}_0 y \vec{E}_1 de 90° , esta onda se conoce como onda extraordinaria, la cual da lugar a efectos más interesantes en su propagación a través del plasma.

Alta Frecuencia

La relación de dispersión que describe el comportamiento de las ondas extraordinarias está dada por la Ec. (4.60), de donde podemos concluir, al igual que en el caso anterior, que la onda se propaga como lo haría a través de dos medios diferentes, existiendo también polarización de la onda, según la ec. (4.66) correspondiente a dos ondas con polarización elíptica que dependiendo de los valores de α es parcialmente transversal y también parcialmente longitudinal.

El fenómeno de resonancia se presenta cuando la frecuencia de la onda ω se acerca al valor de la frecuencia superior híbrida definida por la ec. (4.67).

A diferencia del caso anterior, encontramos aquí la existencia de dos bandas, donde no hay propagación del modo extraordinario, la primera para $0 < \omega < \omega_1$ y la segunda para $\omega_H < \omega < \omega_2$, esto se debe al hecho de que para estas regiones $k < 0$, lo cual significa que las ondas se desvanecen. La onda correspondiente a la ec. (4.67) es una onda longitudinal electrostática, propagándose en la dirección \vec{k} , que recibe el nombre de Onda superior híbrida.

La presencia de estas ondas longitudinales, se debe estrictamente a la magnetización del plasma, pues esto da lugar a que iones y electrones tengan una componente de movi-

miento en la misma dirección que \vec{k} ; componente que es un movimiento longitudinal oscilatorio, también en dirección de \vec{k} .

Frecuencia Intermedia.

La relación de dispersión para este caso, ec. (4.68), nos muestra que existe resonancia en la frecuencia ω dada por la ec. (4.69). Esta frecuencia se conoce como frecuencia inferior híbrida, que corresponde a la onda longitudinal conocida como onda inferior híbrida, que se produce por el movimiento a lo largo de la dirección de propagación de iones y electrones.

Ondas de baja frecuencia.

Para este tipo de ondas, la relación de dispersión dada por la ec. (4.74) nos dice que tales ondas se propagan teniendo como velocidad límite la velocidad de Alfvén.

Puesto que la frecuencia es muy pequeña, tenemos una onda longitudinal conocida como onda magnetosónica, que se propaga a lo largo de \vec{k} .

Esto completa nuestra discusión de la propagación de ondas electromagnéticas en un plasma frío magnetizado, a lo largo de dos direcciones fundamentales. En la práctica pueden tenerse ondas propagándose en cualquier dirección y sus propiedades y características serán una combinación de los resultados aquí expuestos.

Para terminar, se concluye que toda la gama de ondas electromagnéticas que pueden propagarse a través del plasma

frío magnetizado pueden agruparse en un conjunto formado por cuatro tipos de ondas: Ondas de Radio, provenientes del medio interestelar, Ondas debidas al movimiento de los electrones, ondas debidas al movimiento de los Iones y ondas de baja frecuencia (hidromagnéticas).

El efecto que se tiene al interaccionar la onda con el plasma, es el de polarización circular o elíptica, dependiendo ello del ángulo entre el vector de propagación \vec{k} y el campo magnético estático \vec{B}_0 .

Para la exploración espacial, el conocer los efectos que sobre las ondas electromagnéticas se producen al interaccionar con el plasma, nos permite inferir las propiedades de plasmas espaciales, tales como el viento solar o los existentes en la corona solar, la ionósfera, etc. estudiando las características de la luz que las atraviesa. De esta manera, las ondas electromagnéticas funcionan como sondas, que nos permiten muestrear regiones, sin necesidad de colocar detectores "in situ". Así, podemos conocer características de la atmósfera del Sol y del viento solar en el medio interplanetario, utilizando la luz de otras estrellas, la cual se ve perturbada al atravesar estos plasmas. En particular, las señales de ciertas radiofuentes estelares suelen ser muy sensibles a las características del plasma en la corona y el medio interplanetario presentando un efecto denominado centelleo, que permite detectar estructuras de otro modo invisibles.

También se pueden sondear las diferentes capas de la ionósfera, enviando señales electromagnéticas desde tierra y analizando las características de la señal reflejada o no .

De este modo podemos detectar densidades electrónicas, velocidades de desplazamiento de perturbaciones, ciertas características del campo magnético y otros parámetros físicos, que nos permiten caracterizar a las plasmas espaciales y obtener de ellos mapeos extensos que no sería posible con el uso de detectores a bordo de vehículos espaciales.

APENDICE

Una forma alternativa para determinar el tipo de ondas que se propagan a través del plasma frío magnetizado, cuando el ángulo entre el vector de propagación de la onda y el campo magnético, en el cual se halla el plasma, es de cero grados, consiste en diagonalizar la matriz dada por la ec.

(4.31) con $\theta = 0$. Para tal efecto, partimos del sistema de ecuaciones dado por (4.44) multiplicando la ec. (4.44.2) por i y sumándole el resultado a (4.44.1) se tiene:

$$\left| (n^2 - \epsilon_1) - \epsilon_2 \right| (F_{1X} + iF_{1Y}) = 0 \quad \text{A1}$$

De igual modo si multiplicamos la ec. (4.44.1) por i y sumamos el resultado a (4.44.2) tenemos:

$$\left| (n^2 - \epsilon_1) + \epsilon_2 \right| (E_{1X} - iE_{1Y}) = 0 \quad \text{A2}$$

Expresando este sistema de ecuaciones en forma matricial, junto con la ec. (4.44.3) se tiene:

$$\begin{pmatrix} (n^2 - \epsilon_1) - \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & (n^2 - \epsilon_1) + \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{1X} + iE_{1Y} \\ E_{1X} - iE_{1Y} \\ E_{1Z} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{A3}$$

Así, podemos observar que la onda que se propaga tiene dos componentes que son ondas con polarización circular derecha e izquierda, respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULO I Y II.

- Alonso Marcelo y J. Finn Edward, Física, E.E.U.U. 1970.
Fondo Educativo Interamericano, Vol. II.
- Crawford Frank S., Ondas y Oscilaciones, España, 1980.
Reverté, (Berkeley Physics Course, Vol. III).
- Frédorov N. N., Fundamentos de Electrodinámica, URSS, 1982.
MIR.
- Jackson David John, Classical Electrodynamics. 4th. edition
E.E.U.U., 1962, John Wiley and Sons.
- Jenkins Francis A. Fundamentals of Optics, 4th. edition,
Tokyo, Japan, 1965, Mc. Graw-Hill.
- Kip Arthur F., Fundamentos de Electricidad y Magnetismo,
México, 1972. Mc. Graw-Hill.
- K. H. Panosfky and Phillips Melba, Classical Electricity and
Magnetism. 2nd. edition, E.E.U.U. 1964, Addison-Wesley
Publishing Co.
- M. Purcell Edward, Electricidad y Magnetismo, España 1980,
Reverté, (Berkeley Physics Course Vol. II).
- P. Feynman Richard, Lectures on Physics, E.E.U.U. 1963, Ad-
dison Wesley, Vol. I y II.
- R. Reitz John, J. Mildford Frederick y W. Christy Robert.
Fundamentos de la Teoría Electromagnética, 3a. edición
México, 1984, Fondo Educativo Interamericano.
- Richard B. McQuistan, Campos Escalares y Vectoriales, Méxi-
co, 1969, Limusa-Wiley.
- Rossi Bruno, Optics, E.E.U.U. 1957. Addison-Wesley.
- Wood Robert W, Physical Optics, 3rd. edition, E.E.U.U. 1979
Macmillan.
- W. Dungey J. Electrodinamique Comisque, Paris, 1962. Mono-
graphies Dunond.

BIBLIOGRAFÍA CAPÍTULOS III Y IV.

- A.F. Alexandriav, I. S. Bugdankeilch, Principles of Plasma Electrodynamics, Springer Series in Electrophysics Vol. 9 1984.
- Alfvén Hannes, Cosmic Plasma, Holland, 1981, D. Reidel Publishing Company, (Astrophysics and Space Science Library Vol. 82).
- Arfken George, Mathematical Methods for Physicists, United States of America, 1985, Academic Press Inc.
- Baver Sigfried J., Physics of Planetary Ionospheres. New York, 1973, Springer-Verlar (Physics and Chemistry in Space Vol. 6).
- Bultkov Eugene, Mathematical Physics, United States of America, 1968. Addison-Wesley Publishing Co.
- Chen, Francis C., Introduction to Plasma Theory, United States of America, 2nd edition, Plenum Press.
- Dwight R. Nicholson, Introduction to Plasma Theory, United States of America, 1983, John Wiley and Sons Inc.
- F. Cap Ferdinand, Handbook of plasma instabilities, United States of America, 1976, Academic Press, Vol. I.
- Ginzberg V. I. Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas, N.Y. N.Y., 1961, Gordon and Brench Publishers.
- Kulikovskiy A.G. and Lyobimov G.A., Magnetohydrodynamics. Netherlands, 1965, Addison-Wesley Publishing.
- Landau L.D. And Lifshitz E.M., Electrodynamics of continua Media. 2nd. edition. Great Britain, 1963, Pergamon (Course of Therical Physics vol. 8).
- Landsholff R.K.M. The Plasma in magnetic fields, California State, 1958, Standford University Press.
- Linhart J. G., Plasma Physics, Amsterdam, 1960, North-Nolland Publishing Company.
- M. A. Leontovich, Reviews of Plasma Physics, E.E.U.U. 1967. Consultants Bureau.
- Melrose D.B. Plasma Astrophysics, Great Britain, 1980. Gordon Brench Science Publishers.

- Methods in Stellar Atmosphere and Interplanetary Plasma Research, The Lebedev Physics Institute Series, Vol. 62. edited by D.V. Skobel'tsyn, 1974.
- Mikhailovskii A.B. Theory of Plasma Physics, United States 1974, Consultants Bureau.
- Nishida Atsuhiko, Magnetospheric Plasma Physics, Center for Academic Publications, Japan Tokyo, 1987, Vol. 4.
- Piddington, J., Cosmic Electrodynamics, E.E.U.U. 1969. Wiley Interscience Publication, Monographs and Texts in Physics and Astronomy, Vol. XXIII.
- P.H. Roberts, An Introduction to Magnetohydrodynamics. Great Britain, 1967, Longmans, Green and Col. Ltd.
- Schmith George, Physics of High Temperature Plasmas, E.E.U. U., 1979, Academic Press.
- Stacey Weston M. Fusion Plasma Analysis. E.E.U.U., 1981. John Wiley and Sons.
- Sitenko A.G., Fluctuations & Non-Linear Wave Interactions in Plasmas, 1982, Pergamon Press, (International Series in Natural Philosophy Vol. 107).
- Theory of Plasmas, The Lebedev Physics Institute Series, Edited by D. V. Skobel'tsyn Vol. 61.
- T. J. M. Boyde, Plasma Dynamics, E.E.U.U. 1968, Thomson Nelson and Sons.
- Wentzel Donat G. Plasma Instabilities in Astrophysics, E.E. U.U. 1969. Gordon and Breach Science Publishers.
- W.B. Thompson, An Introduction to Plasma Physics E.E.U.U. 1969. Addison-Wesley.