

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias



LA TRANSFORMACION FINITA DE FOURIER Y SU
APLICACION A SISTEMAS ACOPLADOS

T E S I S
Que Para Obtener el Título de
F I S I C O
P R E S E N T A

ANTONIO AGUILAR AGUILAR

México, D. F.

1977



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Mi más profundo agradecimiento al Dr. Kurt Berrardo Wolf
por haberme dirigido en la elaboración de esta tesis.*

A mis padres
Antonio y
Esther

A mis queridos
Carmen y
Antonio

A:

Dr. José Luis M.
Eustolia Gómez R
Guadalupe Aguilar E.

A mis hermanas
Leticia
Susana
Maria Esther.

INDICE

Introducción

I.- Conceptos matemáticos

I.1.- El espacio Vectorial y el Producto	
Escalar	1
I.2.- Obtención de una base ortonormal	
a partir de otra	4
I.3.- Transformación de Fourier	5
I.4.- El límite de dimensión infinita	6
I.5.- Transformaciones activas	8
I.6.- Operadores autoadjuntos	10
I.7.- Diagonalización de la matriz de	
segunda diferencia Δ	16
I.8.- Simetría diedral y degeneración de	
Eigenvalores	21

II.- Sistemas mecánicos acoplados

II.1.- Sistemas mecánicos acoplados	28
II.2.- El oscilador armónico	28
II.3.- Vibraciones en una latiz finita	33
II.4.- Espacio fase	35
II.5.- Latiz simple	38
II.6.- Latiz simple con interacción a J-ésimos	
vecinos	43
II.7.- Latiz diatómica	47
II.8.- Latiz molecular	61
II.9.- Latiz infinita	64
II.10.- Defecto de masa	70

III.- Sistemas mecánicos acoplados con efectos de viscosidad	
III.- Latiz simple amortiguada	91
III.- Latiz forzada y amortiguada	95
IV.- Energía y cantidades conservadas	102
Conclusiones	114
Apéndice.- Comentarios sobre la palabra " LATIZ ".	116
Bibliografía	120

INTRODUCCION

La teoría de espacios vectoriales de dimensión finita tuvo su origen a finales del siglo pasado y fué introducida como técnica matemática, para describir procesos en los cuales a las tres dimensiones del espacio se asociaban componentes de una cantidad física como posición, velocidad, momento angular, campos eléctricos y magnéticos. Las tres componentes de estas cantidades generalmente se encuentran acopladas a través de ecuaciones como las de Maxwell.

El problema de N observables acopladas a través de una ecuación de movimiento está ejemplificada en las vibraciones de una cadena de osciladores armónicos, (masas puntuales unidas por resortes ideales sin masa) que denominaremos Latiz. Este sistema se trató aún antes de la aparición del análisis vectorial: Newton, los dos Bernoulli, Euler, Lagrange y Cauchy, entre otros, se interesaron en este problema. El primero, en particular, utilizó la latiz como un sistema modelo-atómico- para la descripción de vibraciones en un medio continuo. Los métodos de desarrollo en ondas parciales debidos a Fourier fueron adoptados al caso, cuando el dominio de las funciones es un conjunto finito de puntos, como herramienta natural para resolver este tipo de sistemas.

Este trabajo tiene la finalidad de presentar los aspectos relevantes del análisis vectorial de dimensión finita y su aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones dife--

renciales que describen sistemas acoplados. La interacción - del sistema que se considera aquí está dada por operadores - autoadjuntos expresables en términos del operador de segunda diferencia, de operadores dihedrales y de proyección. Los -- cambios de base que desacoplan el sistema serán aquellos que definen la transformada finita de Fourier. Estos conceptos - matemáticos básicos son desarrollados en el Capítulo I.

En el Capítulo II aplicamos estas herramientas a la solu- ción de la latiz simple, diatómica, molecular, con impureza - de masa y el caso infinito de la primera. Este sistema es de considerable importancia como modelo físico de medios elásti- cos dispersivos y difusivos, así como una natural aplicación de los métodos de espacios vectoriales complejos.

El Capítulo III analiza el efecto de viscosidad y el de fuerzas externas de comportamiento oscilatorio.

El Capítulo IV presenta la construcción de invariantes - que lleva a encontrar un conjunto completo de cantidades con- servadas en el movimiento de la latiz.

Quisieramos hacer notar que en el Capítulo I se encuen- tra el conjunto mas grande de transformaciones que diagonali- zan el operador de segunda diferencia. Esta construcción es nueva a nuestro saber, y nos lleva a encontrar un grupo con-

Unuo de simetrías de la ~~Partic~~ que, como todos los grupos de simetría de este tipo es el responsable de la degeneración -- de niveles de energía (en Mecánica Cuántica) e implica la -- existencia de invariantes bajo la evolución temporal del sistema.

CONCEPTOS MATEMATICOS

Este capítulo tiene la finalidad de presentar las técnicas matemáticas que utilizaremos en el estudio de sistemas de energías - interacción e introducir la notación adecuada.

.- El espacio Vectorial y el Producto Escalar. - Un espacio vectorial de N dimensiones $\mathcal{V}^N$ sobre el campo de los números complejos es un conjunto de elementos $\underline{f}, \underline{g}, \underline{h} \in \mathcal{V}^N$, llamados vectores, con dos operaciones "+" (suma de vectores) y "." (producto de un vector por un elemento de $\mathcal{C}$), que cumplen las siguientes propiedades:

$$V 1) \text{ Cerradura. - } (\underline{f} + \underline{g}) \in \mathcal{V}^N; (a \cdot \underline{f}) \in \mathcal{V}^N \\ \text{con } a, b \in \mathcal{C}; \underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{V}^N$$

$$V 2) \text{ Conmutatividad. - } \underline{f} + \underline{g} = \underline{g} + \underline{f}; a \cdot \underline{f} = \underline{f} \cdot a$$

$$V 3) \text{ Asociatividad. - } \underline{f} + (\underline{g} + \underline{h}) = (\underline{f} + \underline{g}) + \underline{h} \\ a \cdot (b \cdot \underline{f}) = (a \cdot b) \cdot \underline{f}$$

$$V 4) \text{ Existencia de elementos identidad bajo "+" y "."$$

$$\exists \underline{0} \in \mathcal{V}^N, 1 \in \mathcal{C} \ni \underline{f} + \underline{0} = \underline{f}; 1 \cdot \underline{f} = \underline{f}$$

$$V 5) \text{ Distributividad. - } a \cdot (\underline{f} + \underline{g}) = a \cdot \underline{f} + a \cdot \underline{g} \\ (a + b) \cdot \underline{f} = a \cdot \underline{f} + b \cdot \underline{g}$$

Un conjunto de vectores $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_N \in \mathcal{V}^N$ es linealmente independiente cuando:

$$(I-1) \quad \sum a_n \underline{e}_n = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 \text{ con } \underline{e}_n \neq 0 \quad \forall n$$

Cualquier conjunto maximal $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$, que cumple con la condición (I-1), forma una base de $\mathcal{V}^N$. Es un resultado conocido que todo vector $\underline{f} \in \mathcal{V}^N$ se puede expresar entonces como una combinación lineal de los N vectores $\underline{e}_n$:

$$(I-2) \quad \underline{f} = \sum_{n=1}^N f_n \underline{e}_n$$

Donde $f_n \in \mathcal{B}$ es la n -ésima coordenada de $\underline{f}$ en la base $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$.

Para espacios vectoriales de dimensión finita siempre se puede establecer un isomorfismo con la representación canónica de vectores como columnas de N elementos.

$$(I-3) \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dots; \quad \underline{e}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

Un producto escalar se define como un mapeo de $\mathcal{V}^N \times \mathcal{V}^N$ a $\mathcal{B}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$(I-4a) \quad (\underline{f}, a\underline{g} + a\underline{h}) = a(\underline{f}, \underline{g}) + a(\underline{f}, \underline{h})$$

$$(I-4b) \quad (a\underline{f} + a\underline{g}, \underline{h}) = a^*(\underline{f}, \underline{h}) + a^*(\underline{g}, \underline{h})$$

Con $(*)$ denotando conjugación compleja.

El producto escalar es entonces, lineal en el segundo término y antilineal en el primero, por lo cual se denomina sesquilineal.

Si existe una base $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$ del espacio vectorial V^N que cumpla con:

$$(I-5) \quad (\underline{e}_n, \underline{e}_m) = \delta_{n,m} \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

se dice que es ortonormal.

Empleando (I-2), (I-4), (I-5) es fácil encontrar los siguientes resultados:

$$(I-6a) \quad (\underline{f}, \underline{g}) = \sum_{n=1}^N f_n^* g_n$$

$$(I-6b) \quad (\underline{e}_n, \underline{f}) = f_n$$

$$c) \quad (\underline{f}, \underline{f}) \geq 0$$

$$(I-6d) \quad (\underline{f}, \underline{f}) = 0 \iff \underline{f} = 0$$

La propiedad (I-6d) es una consecuencia de suponer la existencia de una base ortonormal para V^N . Alternativamente, si pedimos del producto escalar que satisfaga (I-6d), se puede demostrar la existencia de una base ortonormal.

Una norma de un vector puede definirse a partir del producto escalar como:

$$(I-7) \quad \|\underline{f}\| = (\underline{f}, \underline{f})^{1/2}$$

I.2.- Obtención de una base ortonormal a partir de otra.-

Sea $\{\underline{d}_n\}_{n=1}^N$ un conjunto de vectores dados por

$$(I-8) \quad \underline{d}_n = \sum_{m=1}^N K_{nm} \underline{e}_m \quad K_{nm} \in \mathbb{C}; n=1,2,3,\dots,N$$

es decir, combinaciones lineales de los vectores base $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$ de V^N . El nuevo conjunto $\{\underline{d}_n\}_{n=1}^N$ es linealmente independiente si y sólo si la matriz $\underline{K} = \|K_{nm}\|$ satisface.

$$(I-9) \quad \text{Det } \underline{K} \neq 0$$

porque entonces, $\sum C_n \underline{d}_n = 0 \Leftrightarrow C_n = 0$, pues (I-8) es invertible.

Si se requiere que $\{\underline{d}_n\}_{n=1}^N$ forme una base ortonormal, entonces:

$$(I-10) \quad (\underline{d}_n, \underline{d}_m) = \sum_{\ell=1}^N K_{n\ell}^* K_{\ell m} = \delta_{nm}$$

Esto es, la matriz debe ser unitaria

$$1) \quad \underline{K}^+ = \underline{K}^{-1} \quad ; \quad \underline{K}^+ \underline{K} = \underline{1}$$

La transformación inversa es

$$(I-12) \quad \underline{e}_n = \sum_{m=1}^N K_{mn}^* \underline{d}_m$$

Un vector $\underline{f}$ se puede desarrollar entonces, en la base

$$\{\underline{d}_n\}_{n=1}^N \quad \text{como:}$$

$$(I-13) \quad \underline{f} = \sum_{n=1}^N \tilde{f}_n \underline{d}_n \quad \text{y} \quad \tilde{f}_n = (\underline{d}_n, \underline{f})$$

donde $\tilde{f}_n$ es la coordenada n -ésima de $\underline{f}$ en la base $\{\underline{d}_n\}_{n=1}^N$. La relación entre las coordenadas f_n y $\tilde{f}_n$ se encuentra usando el producto escalar y sus propiedades:

$$(I-14a) \quad \tilde{f}_n = (\underline{d}_n, \underline{f}) = \left(\sum_{m=1}^N K_{nm} \underline{e}_m, \underline{f} \right) = \sum_{m=1}^N K_{nm}^* (\underline{e}_m, \underline{f})$$

Inversamente.

$$(I-14b) \quad f_n = \sum_{m=1}^N K_{mn} \tilde{f}_m$$

En vista de que los vectores del espacio, fijos, son descritos en dos bases diferentes, llamaremos a esta transformación pasiva pues sólo cambia el marco de referencia.

I.3.- Transformación de Fourier. - La transformación de Fourier en $\mathcal{V}^N$ está definida por una matriz $\underline{F} = \|F_{mn}\|$ unitaria, con -- elementos

$$(I-15) \quad F_{mn} = F_{nm} = N^{-1/2} \exp[-2\pi i mn/N]$$

Para probar su carácter unitario, basta efectuar el siguiente producto

$$(I-16a) \quad \sum_{\ell=1}^N F_{m\ell}^* F_{\ell n} = N^{-1} \sum_{\ell=1}^N \exp[-2\pi i \ell (n-m)/N]$$

aplicando la suma de series geométricas

$$(I-17) \quad X^a + X^{a+1} + \dots + X^{a+b} = \begin{cases} (1-X)^{-1} X^a (1-X^{b+1}); & X \neq 1 \\ b+1 & ; X = 1 \end{cases}$$

con $X = \exp[-2\pi i(n-m)/N]$, $a=1$, $b=N-1$. Se observa que el resultado es cero si $n \neq m$ pues $X \neq 1$ pero $X^N = 1$, y la suma es unidad si $n=m$ pues $X=1$. Luego, la expresión (I-16a) se convierte en

$$(I-16b) \quad \sum_{\ell=1}^N F_{m\ell}^* F_{\ell n} = \delta_{m,n}$$

y queda demostrado que la transformación de Fourier es unitaria.

Las componentes de un vector $\underline{f}$ en dos bases ortonormales relacionadas mediante la transformación de Fourier son:

$$(I-18a) \quad y_n = N^{-1/2} \sum_{m=1}^N f_m \exp[2\pi i m n / N]$$

$$(I-18b) \quad f_n = N^{-1/2} \sum_{m=1}^N y_m \exp[-2\pi i m n / N]$$

donde el conjunto $\{y_n\}_{n=1}^N$ es llamado la Transformada de Fourier del conjunto $\{f_n\}_{n=1}^N$

7. - El límite de dimensión infinita. - Dado un espacio vectorial de $2N+1$ dimensiones, $\mathcal{V}^{2N+1}$, podemos etiquetar las coordenadas de un vector $\underline{f}$ como $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, las ecuaciones (I-18) se reescriben entonces como

$$(I-19a) \quad y_m = (2N+1)^{-1/2} \sum_{n=-N}^N f_n \exp[2\pi i m n / (2N+1)]$$

$$(I-19b) \quad f_n = (2N+1)^{-1/2} \sum_{m=-N}^N y_m \exp[-2\pi i m n / (2N+1)]$$

definimos un parámetro χ como:

$$(I-20a) \quad \chi = \pi (2m+1)/(2N+1) \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

que toma $2N+1$ valores en intervalos de

$$(I-20b) \quad \Delta\chi = 2\pi/(2N+1) \quad \text{desde } -\pi+\Delta\chi \text{ a } \pi$$

definimos también a

$$(I-20c) \quad f(\chi) = [(2N+1)/2\pi]^{1/2} g_m$$

Substituyendo (I-20b), (I-20c) en (I-19a) se tiene:

$$(I-21a) \quad f(\chi) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=-N}^N f_n \exp[i n \chi - i n \pi / (2N+1)]$$

Similarmemente, substituyendo en (I-19a)

$$(I-21b) \quad f_n = (2\pi)^{-1/2} \sum_{\chi=-\pi+\Delta\chi}^{\pi} \Delta\chi f(\chi) \exp[-i n \chi + i n \pi / (2N+1)]$$

Si dejamos crecer el número de dimensiones de $\mathcal{V}^{2N+1}$, la cantidad $\Delta\chi$ se hace cada vez más pequeña. Considérese una función escalón $g_n^{(N)}(\chi)$ sobre $(-\pi, \pi]$

$$g_n^{(N)}(\chi) = f(\bar{\chi}) \exp[-i n \bar{\chi}] \exp[i n \pi / (2N+1)]$$

con

$$\chi \in (\bar{\chi} - \frac{1}{2}\Delta\chi, \bar{\chi} + \frac{1}{2}\Delta\chi)$$

que es constante en intervalos de longitud $\Delta\chi$, centrados alrededor de un punto $\bar{\chi}$ (el origen definido por (I-20a). La

suma (I-21k) se puede reemplazar por una integral e obtenemos

$$f_n = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} g_n^{(w)}(x) dx.$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, $g_n^{(w)}(x) \rightarrow f(x) \exp[-inx]$

$$f_n = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp[-inx] dx.$$

La ecuación (I-21a) para $N \rightarrow \infty$ se convierte en

$$(I-22b) \quad f(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp[inx].$$

Las ecuaciones (I-22) reproducen formalmente el análisis de Fourier de funciones periódicas de periodo 2π . La demostración formal y las limitaciones de (I-22) constituyen el teorema de Dirichlet. Llamaremos a (I-22a) el análisis de Fourier y a (I-22b) la síntesis de Fourier. Ambas forman un par de Transformadas de Fourier.

I.5.- Transformaciones activas. - Llamaremos transformaciones activas a aquellas que actúan sobre el espacio V^N y transforman sus elementos mediante un operador A :

$$f \rightarrow f' = A f.$$

Estas transformaciones las tomaremos como lineales, es decir, $A(a f + b g) = a A f + b A g$ y no singulares, es decir $A f_0 = 0 \Rightarrow f_0 = 0$. Estas transformaciones a -

diferencia de los pasivos, son un mapeo del espacio en si mismo y no un simple cambio de coordenadas.

Consideremos la acción de $\underline{A}$ sobre los vectores base

$$(I-24) \quad \underline{g}_n = \underline{A} \underline{e}_n \quad n=1,2,3,\dots,N$$

podemos entonces definir las N^2 componentes de la matriz $\underline{A}$ de transformación asociada a $\underline{A}$ como:

$$(I-25) \quad A_{mn} = (\underline{e}_m, \underline{g}_n) = (\underline{e}_m, \underline{A} \underline{e}_n)$$

Luego

$$(I-26) \quad \underline{g}_n = \sum_{m=1}^N A_{mn} \underline{e}_m$$

En las transformaciones activas, el vector (I-23) y la base (I-24) sufren la misma transformación; las coordenadas de $\underline{f}'$ en la nueva base $\{\underline{g}_m\}_{m=1}^N$ siguen siendo f_n .

$$(I-27) \quad \underline{f}' = \sum_{n=1}^N \bar{f}_n \underline{e}_n = \sum_{m=1}^N f_m \underline{g}_m = \sum_{n,m=1}^N f_m A_{nm} \underline{e}_n$$

y

$$(I-28) \quad f'_n = \sum_{m=1}^N A_{nm} f_m ; f_m = \sum_{n=1}^N (\underline{A}^{-1})_{mn} f'_n$$

Una consecuencia de la definición (I-25) es que todo operador $\underline{A}$ lineal, se puede representar por una matriz

$\underline{A} = \| A_{mn} \|$ relativa a una base. Inversamente, dada la matriz $\underline{A}$, la acción del operador $\underline{A}$ queda completa-

mente definida sobre cualquier vector del espacio.

Aunque matemáticamente las transformaciones activas y pasivas son equivalentes, se aplican en situaciones diferentes: -- Las transformaciones pasivas son de utilidad cuando describimos un sistema físico en dos sistemas de coordenadas. Las activas serán aplicadas cuando se representen operadores de evolución, por ejemplo:

I.6.- Operadores autoadjuntos. - Hemos visto que los operadores lineales $\underline{A}$ empleados en las transformaciones activas, son representados por matrices $\underline{A}$. Definiremos el operador adjunto de $\underline{A}$, como el operador que cumple con

$$1) \quad (\underline{f}, \underline{A}^+ \underline{g}) = (\underline{A} \underline{f}, \underline{g})$$

para cada par de vectores $\underline{f}, \underline{g} \in \mathcal{V}^N$. La ecuación (I-29) define unívocamente al operador $\underline{A}^+$ para una base dada, pues mostraremos que (I-29) permite construir la matriz $\underline{A}^+$ que lo representa.

Substituyamos los vectores $\underline{f}, \underline{g}$ de la ecuación (I-29) por dos vectores $\underline{e}_n, \underline{e}_m$ que forman parte de una base ortonormal $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$.

$$(I-30) \quad (\underline{A}^+)_{nm} = (\underline{e}_n, \underline{A}^+ \underline{e}_m) = (\underline{A} \underline{e}_n, \underline{e}_m) = (\underline{e}_m, \underline{A} \underline{e}_n) = A_{mn}^*$$

entonces, $\underline{A}^+$ es el adjunto (transpuesto conjugado) de la matriz $\underline{A}$.

Una clase de operadores de gran importancia, son aquellos -- que cumplen con la identidad $H^\dagger = H$; éstos son denominados auto-adjuntos y se representan en bases ortonormales por matrices -- hermiteanas: $\underline{H}^\dagger = \underline{H}$.

Un operador de este tipo es el operador de segunda diferencia Δ que definimos a través de su representación en la base -- canónica $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$, por la matriz.

$$(I-31) \quad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En la base $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$ determinada a través de una -- transformación de Fourier sobre $\{\underline{e}_m\}_{m=1}^N$, la matriz $\tilde{\Delta}$ que representa al operador de segunda diferencia, se encuentra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta})_{mn} &= (\underline{E}^\dagger \underline{\Delta} \underline{E})_{mn} = N^{-1} \sum_{s,l=1}^N (\underline{\Delta})_{ls} \exp[2\pi i (ln - sn)/N] \\ &= N^{-1} \sum_{l=1}^N \left\{ \exp[2\pi i (ln - [l+1]m)/N] \right. \\ &\quad \left. - 2 \exp[2\pi i (ln - lm)/N] \right. \\ &\quad \left. + \exp[2\pi i (ln - [l-1]m)/N] \right\} \\ &= N^{-1} \left\{ \exp[-2\pi i m/N] - 2 + \exp[2\pi i m/N] \right\} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^N \left\{ \exp[2\pi i l (n-m)/N] \right\} \end{aligned}$$

recordando (I-16) y (I-17) se obtiene una matriz diagonal:

$$(I-32) \quad \tilde{\Delta} = \|\lambda_m \delta_{m,n}\|$$

con

$$(I-33) \quad \lambda_m = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi m}{N} = \lambda_{N-m}$$

Definiremos un operador autoadjunto, que denominaremos de inercia diatómico, $\tilde{M}_2$, por razones que veremos en el capítulo II. Este operador está representado en la base canónica por la matriz diagonal

$$(I-34) \quad \tilde{M}_2 = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_1 & & & \\ & & M_1 & & \\ & & & M_2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & M_1, M_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} M_1 \in \mathbb{R} \\ M_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Su representación en la base de Fourier se encuentra mediante (I-15):

$$\begin{aligned} (\tilde{M}_2)_{m,n} &= M_1 N^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{IMPAR}}}^{N-1} e^{2\pi i(m-n)k/N} + M_2 N^{-1} \sum_{\substack{k=2 \\ \text{PAR}}}^N e^{2\pi i(m-n)k/N} \\ &= M_1 N^{-1} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i(m-n)k/N} + (M_2 - M_1) N^{-1} \sum_{k=1}^{N/2} e^{4\pi i(m-n)k/N} \end{aligned}$$

Empleando la suma de series geométricas (I-17) se tiene

$$(\tilde{M}_2)_{m,n} = M_1 \delta_{m,n} + (M_2 - M_1) \frac{1}{2} (\delta_{m,n} + \delta_{m, n \pm N/2})$$

entonces

$$(I-35a) \quad \tilde{M}_2 = \begin{bmatrix} M_{\tau 1} & M_{\delta 1} \\ M_{\delta 1} & M_{\tau 1} \end{bmatrix},$$

con

$$(I-35b) \quad M_{\tau} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2), \quad M_{\delta} = \frac{1}{2}(M_2 - M_1).$$

Es decir tenemos una matriz con 2×2 bloques diagonales de $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ elementos.

Como una extensión del operador de inercia diatómico, se puede definir el operador de inercia poliatómico M_p , representado en la base canónica por una matriz diagonal M_p con elementos $M_1, M_2, \dots, M_p$ que se repiten q veces, ($p \neq N$), ordenados de manera similar que en (I-34).

Se puede demostrar análogamente que en la base de Fourier, las componentes de la matriz $\tilde{M}_p$ son $q \times q$ bloques diagonales de $p \times p$ elementos cada uno.

$$(I-36) \quad (\tilde{M}_p)_{mn} = \frac{1}{p} \sum_{s=0}^{p-1} \delta_{m,n \pm sq/p} \sum_{\ell=1}^p M_{\ell} \exp[\mp 2\pi i s(p-\ell)/p],$$

donde estamos identificando índices congruentes módulo N , ($n \equiv n \bmod N$).

Un operador de particular importancia será el operador de desplazamiento $\underline{D}$, representado en la base canónica por la matriz

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

donde en la última expresión estamos considerando los índices como congruentes módulo N .

Este operador recibe tal nombre porque su matriz $\underline{D}$ asociada en la base canónica desplaza los renglones de una matriz $\underline{G}$ cualquiera en el orden $(1 \rightarrow N, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, \dots, N \rightarrow N-1)$ si se aplica por la izquierda y desplaza las columnas en el orden contrario $(1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, \dots, N-1 \rightarrow N, N \rightarrow 1)$ si se aplica por la derecha.

Cualquier potencia $\underline{D}^k$ del operador $\underline{D}$, tiene las mismas propiedades, pero en lugar de correr los renglones o columnas de una matriz $\underline{G}$ un solo lugar, los corre k lugares, esto es fácil de ver efectuando directamente la elevación de $\underline{D}$ a cualquier potencia y observando que el resultado es

$$(I-38) \quad \underline{D}^k = \parallel \delta_{m, n+k} \parallel, \quad (n+k) = (n+k) \bmod N$$

La representación del operador $\mathbb{D}$ y en general de $\mathbb{D}^k$ en la base de Fourier, se determina aplicando la transformada de Fourier a la matriz $\underline{\underline{D}}^k$

$$\begin{aligned} (\tilde{\underline{\underline{D}}}^k)_{m,n} &= (\underline{\underline{F}}^+ \underline{\underline{D}} \underline{\underline{F}})_{m,n} = N^{-1} \sum_{s,l=1}^N e^{2\pi i (ml - sn)/N} (\underline{\underline{D}}^k)_{ls} \\ &= e^{-2\pi i kn/N} N^{-1} \sum_{l=1}^N e^{2\pi i l(m-n)/N} \end{aligned}$$

empleando la suma (I-17) se obtiene

$$(\tilde{\underline{\underline{D}}}^k)_{mn} = e^{-2\pi i kn/N} \delta_{m,n}$$

entonces

$$(I-39) \quad \tilde{\underline{\underline{D}}}^k = \| e^{-2\pi i kn/N} \delta_{m,n} \|$$

El operador $\mathbb{D}$ es unitario pero no hermiteano. Sin embargo se utilizará para construir otros que si lo sean; por ejemplo, definamos un operador Δ_l representado en la base canónica - por

$$(I-40) \quad \underline{\underline{\Delta}}_l = -2 \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{D}}^l + \underline{\underline{D}}^{-l}$$

esta expresión permite encontrar fácilmente, mediante (I-39) la matriz que representa al operador Δ_l en la base de Fourier

$$(I-41) \quad \tilde{\Delta}_\ell = \|-4 \sin^2 \pi \ell m / N \delta_{m,n}\| = \|\lambda_m^\ell \delta_{m,n}\|$$

nótese que el operador Δ de segunda diferencia, es un caso particular del operador Δ_ℓ .

Diagonalización de la matriz de segunda diferencia Δ .

En la sección anterior fue definida la matriz Δ , que representa al operador de segunda diferencia Δ en la base canónica y se mostró que la Transformación de Fourier permite representarlo por una matriz $\tilde{\Delta}$ diagonal en otra base denominada de Fourier. En esta sección emplearemos los mecanismos básicos de diagonalización de una matriz dada para encontrar las matrices Φ con la propiedad

$$(I-42) \quad \Delta \Phi = \Phi \tilde{\Delta} \quad \tilde{\Delta} = \|\delta_{m,n} \lambda_n\|$$

y mostraremos en la sección siguiente que la Transformada de Fourier es sólo un caso particular de matriz Φ con estas propiedades.

Los elementos de $\Phi = \|\phi_{mn}\|$ que diagonaliza a Δ están condicionados por (I-42)

$$(I-43a) \quad -(2 + \lambda_n) \phi_{1,n} + \phi_{2,n} + \phi_{N,n} = 0$$

$$(I-43b) \quad \phi_{m-1,n} - (2 + \lambda_n) \phi_{m,n} + \phi_{m+1,n} = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N-1$$

$$(I-43c) \quad \phi_{1,n} + \phi_{N-1,n} - (2 + \lambda_n) \phi_{N,n} = 0 \quad m=1,2,3,\dots,N$$

Las dos primeras relaciones de recurrencia muestran que $\bar{z}_{m+1,n}$ puede expresarse en términos de $\bar{z}_{1,n}$ y $\bar{z}_{N,n}$, con coeficientes polinomiales de $(2+\lambda_n)$,

$$(I-44a) \quad \bar{z}_{m+1,n} = U_m(X_n) \bar{z}_{1,n} + V_{m-1}(X_n) \bar{z}_{N,n}$$

$$(I-44b) \quad X_n = 1 + \lambda_n/2$$

donde $U_p(x)$ y $V_p(x)$ son polinomios de grado p en x .
 Substituyendo (I-44a) en (I-43b):

$$\begin{aligned} \bar{z}_{m+1,n} &= 2 X_n \bar{z}_{m,n} - \bar{z}_{m-1,n} \\ (I-45) \quad &= [2 X_n U_{m-1}(X_n) - U_{m-2}(X_n)] \bar{z}_{1,n} \\ &= [2 X_n V_{m-2}(X_n) - V_{m-3}(X_n)] \bar{z}_{N,n} \end{aligned}$$

encontramos la relación de recurrencia para $U_m(x)$

$$(I-46) \quad U_m(X_n) = 2 X_n U_{m-1}(X_n) - U_{m-2}(X_n) \quad m=2,3,\dots,N-1$$

y otra idéntica para $V_m(x)$. La base de las recurrencias se encuentra considerando $\bar{z}_{1,n} = 1 \cdot \bar{z}_{1,n} + 0 \cdot \bar{z}_{N,n}$ que implica $U_0(X_n) = 1$ y $V_{-1}(X_n) = 0$; la ecuación (I-43a) lleva a $U_1(X_n) = 2X_n$ y $V_0(X_n) = -1$, entonces $V_1(X_n) = -2X_n$. De aquí se sigue que $V_m(X_n) = -U_m(X_n)$

El hecho de que $\underline{\underline{\Delta}}$ sea una matriz tridiagonal, con términos constantes en la diagonal principal y sus primeras vecinas, limita a $U_m(x)$ a satisfacer una relación de recurrencia de tres ter

minos con coeficientes independientes de m , que podemos comparar con la fórmula de Christoffel-Darboux para polinomios ortogonales. La ecuación (I-46) caracteriza a los polinomios de Chebyshev de segundo grado. (Ref. 1)

$$U_m(x) = \text{Sen} \left((m+1) \arccos x / \text{sen} (\arccos x) \right)$$

Empleando la relación de recurrencia y las expresiones (I-43) podemos obtener los valores de X_n de (I-44) para $m=N-1$ y reanexando términos

$$(I-48a) \quad U_{N-1}(X_n) \bar{z}_{1n} - [U_{N-2}(X_n) + 1] \bar{z}_{Nn} = 0$$

De (I-44) para $m=N-2$ y (I-43c) tenemos

$$(I-48b) \quad [U_{N-2}(X_n) + 1] \bar{z}_{1n} - [U_{N-3}(X_n) + 2X_n] \bar{z}_{Nn} = 0$$

Los valores X_n para los cuales (I-48) es un sistema consistente de ecuaciones homogéneas conduce a los eigenvalores de $\underline{A}$. Si los coeficientes en (I-48) son cero, los eigenvalores son doblemente degenerados y $\bar{z}_{1n}$ y $\bar{z}_{Nn}$ son independientes. Si (I-48) tiene coeficientes no nulos y no proporcionales, los eigenvalores son no degenerados. En ambos casos, el determinante del sistema (I-48) debe anularse:

$$(I-49a) \quad U_{N-1}(X_n) [U_{N-3}(X_n) + 2X_n] - [U_{N-2}(X_n) + 1]^2 = 0$$

Substituyendo (I-47) en (I-49a) y desarrollando un álgebra que involucra identidades trigonométricas llegamos a

$$(I-49b) \quad \text{Sen } \theta_n [1 - \cos N \theta_n] = 0 ; \quad \cos \theta_n = X_n = 1 + \lambda^{1/2}.$$

Las raíces de (I-49b) se encuentran en $\theta_n = 2\pi k/N$ para k entero, entonces la variable X_n toma los valores

$$(I-50) \quad X_n = \cos (2\pi k/N) ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2.$$

Como el número de raíces distintas es menor que N , algunas de estas son degeneradas y pueden ser analizadas como sigue: Las raíces de $U_m(X)$ se encuentran para $X = \cos \frac{k\pi}{m+1}$ y por otro lado $U_m(\pm 1) = (\pm 1)^m$. Examinando el sistema (I-48) vemos que para N impar, con $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ los coeficientes son cero. Lo mismo sucede para N par en $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$. Entonces los eigenvalores deben ser doblemente degenerados. Esto nos lleva a un eigenvalor omitido para N impar, $k = 0$; i.e. $X_n = 1$ para el cual $\zeta_{1n} = \zeta_{Nn}$. Cuando N es par los eigenvalores omitidos se encuentran para $k = 0$ como antes, mas $k = \frac{N}{2}$ i.e. $X_n = -1$, para el cual $\zeta_{1n} = -\zeta_{Nn}$. La ordenación de eigenvalores presentes es como al principio, libre de escogerse. Esto es un tanto trivial y común en todo proceso de diagonalización. Si $\underline{\Phi}$ diagonaliza a $\underline{\Delta}$ como $\underline{\Phi}^{-1} \underline{\Delta} \underline{\Phi} = \underline{\tilde{\Delta}}$, entonces $\underline{\Phi} \underline{P}$, donde $\underline{P}$ es una matriz de permutación, también diagonaliza a $\underline{\Delta}$. Las matrices de permutación tienen un solo elemento no nulo en cada columna y en cada renglón

$$\left[\underline{P} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & N \\ \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) & \dots & \rho(N) \end{pmatrix} \right]_{mn} = \delta_{\rho(m), n}$$

donde $\rho(m)$ es una función uno a uno de el conjunto de puntos

$(1, 2, \dots, N)$ sobre si mismo. Las matrices de permutación son reales y unitarias. La permutación idéntica es $\underline{P} = \underline{1}$ o sea $P(n) = n$, la matriz inversa a $\underline{P}$ es $\underline{P}^{-1}$ dada como $(\underline{P}^{-1})_{mn} = \delta_{P(m),n} = (\underline{P})_{nm}$. Actuando sobre una matriz diagonal $\underline{\Delta}$, $\underline{P}^{-1} \underline{\Delta} \underline{P} = \underline{\tilde{\Delta}}$ reemplaza a λ_n por $\lambda_{P(n)}$; esto es un simple cambio de orden de los eigenvalores λ_n contenidos en (I-44) a (I-50), usando el número k , que ahora escribiremos como:

$$(I-51a) \quad \lambda_n = 2 \left[\cos(2\pi n/N) - 1 \right] = -4 \sin^2 \frac{n\pi}{N}; \quad n=1, 2, \dots, N$$

Los eigenvalores doblemente degenerados son $\lambda_n = \lambda_{N-n}$ el no degenerado es $\lambda_N = 0$ y cuando N es par, $\lambda_{N/2} = -4$. De acuerdo con el orden implicado por (I-51a), las componentes de los eigenvectores degenerados están dados por (I-44) (I-47) y (I-50)

$$(I-51b) \quad \zeta_{m,n} = \zeta_{N,n} \left\{ \cos(2\pi m n/N) + [\gamma_n - \cos(2\pi n/N)] \frac{\sin(2\pi m n/N)}{\sin(2\pi n/N)} \right\}$$

$$(I-51c) \quad \gamma_n = \zeta_{1n} / \zeta_{Nn} \quad ; \quad \frac{N}{2} \neq n=1, 2, \dots, N-1$$

Los eigenvectores correspondientes a eigenvalores no degenerados son

$$(I-51d) \quad \zeta_{m,N} = \zeta_{N,N} \text{ y cuando } N \text{ es par } \zeta_{m,N/2} = (-1)^m \zeta_{N,N/2}$$

I-8.-Simetría diedral y degeneración de eigenvalores.-La matriz que representa al operador de segunda diferencia en la base canónica, es invariante bajo ciertas transformaciones de similitud que involucran permutaciones de renglones y columnas. Podemos determinar fácilmente las matrices $\underline{P}$ de permutación para las cuales $\underline{P}^{-1} \underline{\Delta} \underline{P} = \underline{\Delta}$. El elemento de el lado izquierdo de esta ecuación es:

$$\begin{aligned}
 (\underline{P}^{-1} \underline{\Delta} \underline{P})_{mn} &= \sum_{r,s} (\underline{P}^{-1})_{mr} (\underline{\Delta})_{rs} (\underline{P})_{sn} \\
 &= \sum_{r,s} \delta_{P(m),r} [-2\delta_{r,s} + \delta_{r,s-1} + \delta_{r,s+1}] \delta_{s,P(n)} \\
 (I-52a) \quad &= -2\delta_{m,n} + \delta_{m,P^{-1}(P(n)-1)} + \delta_{m,P^{-1}(P(n)+1)}
 \end{aligned}$$

donde todos los índices de renglones y columnas se consideran congruentes módulo N . La ecuación (I-52a) es igual al término $(\underline{\Delta})_{mn}$ si y solo si:

$$(I-52b) \quad P(n \pm 1) = P(n) \pm 1 \quad \text{o} \quad P(n \pm 1) = P(n) \mp 1$$

El primer caso define rotaciones mientras que el segundo se refiere a reflexiones, como detallaremos después. El conjunto de todas las permutaciones que dejan a $\underline{\Delta}$ invariante define el grupo diedral de matrices $\mathcal{P}$. Si $\underline{\Phi}$ diagonaliza $\underline{\Delta}$ y $\underline{D}$ es elemento de $\mathcal{P}_N$, es claro que $\underline{D} \underline{\Phi}$ también diagonaliza a $\underline{\Delta}$; esto involucra transformaciones diedrales entre renglones de $\underline{\Phi}$. Las permutaciones trivia-

les tratadas en la sección anterior involucran permutaciones de las columnas de esta matriz.

La condición (I-52b) implica que dos puntos vecinos en una latiz circular (vease secciones II-1 y II-3) permanecen adyacentes después de la transformación. Esto puede cumplirse solamente para rotaciones o inversiones a través de un diámetro (Fig. I-1). Consideremos primero la matriz de rotación $\underline{R} = \|\delta_{m, n+1}\|$ (como antes, todos los renglones y columnas están numerados módulo N), que actúa por la izquierda de $\underline{\Phi}$, ésta cambia los renglones de $\underline{\Phi}$ un lugar abajo de su posición original y el N -ésimo renglón pasa a ser el primero de $\underline{R}\underline{\Phi}$. Todas las otras permutaciones cíclicas de renglones pueden ser producidas por potencias de la matriz:

$$\underline{R}^k = \|\delta_{m, n+k}\| = \begin{bmatrix} \underline{O} & \underline{1}_k \\ \underline{1}_{N-k} & \underline{O} \end{bmatrix}; \quad \underline{R}^N = \underline{1}_N$$

Donde $\underline{1}_q$ es la matriz $q \times q$ unitaria y las $\underline{O}$ son matrices rectangulares nulas apropiadas. Las inversiones pueden ser caracterizadas por los renglones que permanecen invariantes. Si N es impar, un renglón permanecerá invariante. Definamos las matrices:

$$\underline{I}_k = \|\delta_{m, n+2k-m}\| = \begin{bmatrix} \underline{A}_{N-k-1} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{A}_{k+1} \end{bmatrix} = \underline{R}^k \underline{I}_0 \underline{R}^{-k}$$

Donde $\underline{A}_q$ es la matriz unitaria antidiagonal. Cuando N es par además del k -ésimo renglón, el $(\frac{N}{2}+k)$ -ésimo renglón será también invariante. Cuando N es par tenemos además otra clase de inversiones, aquellas donde ningún renglón permanece invariante, éstas se producen mediante las matrices:

$$\underline{K}_k = \|\delta_{m, N+2k+1-n}\| = \begin{bmatrix} \underline{A}_{N-k} & \underline{O} \\ \underline{O} & \underline{A}_k \end{bmatrix} = \underline{R}^k \underline{K}_0 \underline{R}^{-k}$$

Por simple conteo podemos verificar que en todo caso, $\mathcal{D}_N$ tiene $2N$ elementos para cada matriz $\underline{\Phi}$ que diagonaliza a $\underline{\Delta}$, produciendo todas las matrices $\underline{\Phi}$. En términos de la latiz física las $\underline{R}^k$ rotan al sistema k veces el ángulo intermasa (Fig I-1a)), las $\underline{I}^k$ reflejan el sistema a través de un diámetro que pasa por la masa k en tanto que -- las $\underline{K}^k$ ejecutamos mismo a través de un diámetro (Fig I-1b) -- que cruza el punto medio de los resortes que unen las masas k y $k+1$, y las masas $\frac{N}{2}+k$ y $\frac{N}{2}+k+1$. Aunque estas son todas las simetrías manifiestas de la latiz, están lejos de ser todas las simetrías. Considere la matriz diagonal $\underline{\tilde{\Delta}}$ que es equivalente a través de una Transformación de Fourier a $\underline{\Delta}$. Claramente si $\underline{\tilde{e}}_n$ y $\underline{\tilde{e}}_{N-n}$ son dos eigenvectores linealmente independientes, correspondientes al mismo eigenvalor $\lambda_n = \lambda_{N-n}$, dos combinaciones linealmente independientes de ellos también definirán una eigenbase para $\underline{\Delta}$. Si denotamos por $\underline{T}_n$ una matriz $N \times N$ no singular que tiene -- los elementos de la matriz unitaria excepto para las intersec-

ciones del n -ésimo y $(N-n)$ -ésimo renglones y columnas, entonces $\underline{T}_n^{-1} \underline{\tilde{\Delta}} \underline{T}_n = \underline{\tilde{\Delta}}$. Consecuentemente, si $\underline{\Phi}$ diagonaliza a $\underline{\Delta}$, también lo hará $\underline{\Phi} \underline{T}_n$.

Cada $\underline{T}_n$ puede tener cuatro parámetros complejos y $\underline{T}_n \underline{T}_{n'} = \underline{T}_{n'} \underline{T}_n$ para $n \neq n'$. Para N impar existen cuatro parámetros complejos libres para cada uno de las $(N-1)/2$ parejas de eigenvalores degenerados, mientras que para N impar tenemos $\frac{N}{2} - 1$ pares degenerados. Además los eigenvalores no degenerados pueden tener sus correspondientes eigenvectores multiplicados por cualquier número complejo. Para éste fin podemos definir $\underline{T}_N$ como una matriz diagonal con elementos 1 excepto para el elemento $N-N$, y similarmente $\underline{T}_{N/2}$ cuando N es par.

El número total de parámetros complejos libres es entonces $2N-1$ para N impar y $2N-2$ para N par.

Este total es igual al número de parámetros libres en la matriz de Fourier (I-51b) - (I-51d). En efecto, a través de productos con las $\underline{T}_n$'s podemos producir, independientemente de la $\underline{\Phi}$ dada cualquier otra matriz de diagonalización de $\underline{\Delta}$.

Resulta notable que para cada matriz $\underline{D}$ de $\mathcal{D}_N$ tenemos un producto correspondiente $\underline{\Pi}_n \underline{T}_n = \underline{T}_n$ tal que

$$\underline{D} \underline{\Phi} = \underline{\Phi} \underline{T}$$

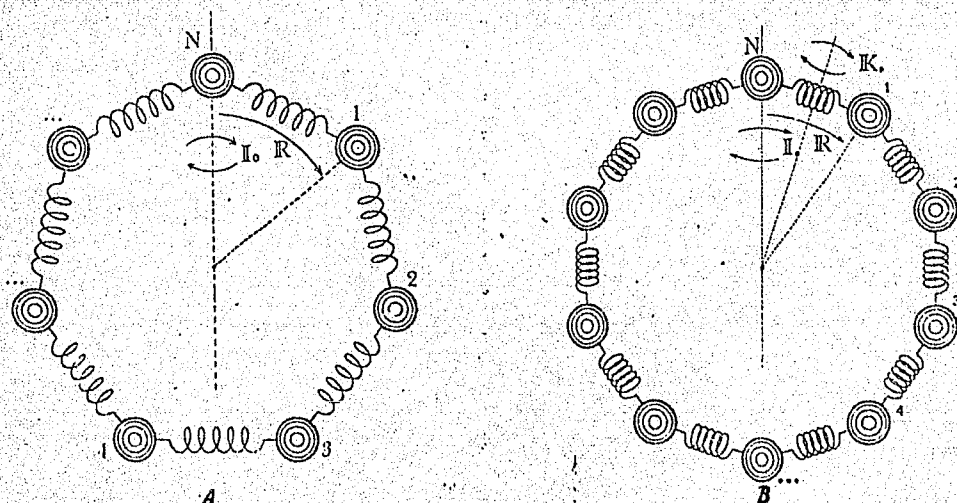


Fig. I-1

Se muestra una lctiz cerrada de N masas M y resortes k .

- Cuando N es impar las rotaciones R e inversiones I se hacen sobre una masa.
- Cuando N es par además de las rotaciones e inversiones - sobre una masa, se pueden hacer inversiones K sobre el centro de cualquier resorte.

Es posible que resulte sorprendente que en el análisis de la estructura de $\underline{\Phi} \underline{T} \underline{\Phi}^{-1}$ encontremos que el grupo diédral $\mathcal{D}_N$ de las simetrías manifiestas de la latiz, está incluido como un subgrupo discreto en grupo continuo de todos los $\Pi_n \underline{T}_n$, que forman el grupo de simetrías "no evidentes" del sistema.

Una propiedad muy conocida de los eigenvectores de matrices hermiteanas es que aquellos correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales al producto escalar definido en (I-4); los correspondientes al mismo eigenvalor, en nuestro caso $\lambda_n = \lambda_{N-n}$, no necesitan serlo.

En efecto, de (I-51b) y usando la fórmula de suma (I-17)

$$(I-53) \quad (\underline{c}_n, \underline{c}_{N-n}) = \underline{c}_{N-n}^* \underline{c}_{N-n} \frac{N}{2} \left[\gamma_n^* \gamma_{N-n} - (\gamma_n^* + \gamma_{N-n}) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 1 \right] \\ \times \operatorname{Sen}^{-2}\left(\frac{2\pi n}{N}\right); \quad \frac{N}{2} \neq n=1, 2, 3, \dots, N-1$$

A fin de que los dos eigenvectores independientes sean ortogonales es necesario que γ_{N-n} y γ_n estén relacionados como

$$(I-54) \quad \gamma_{N-n} = \left[\gamma_n^* \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - 1 \right] / \left[\gamma_n^* - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right]$$

Finalmente, cada eigenvector puede ser normalizado como $(\underline{z}_n, \underline{z}_n) = 1$. Esto implica, un proceso paralelo al seguido en (I-53), entonces, $\underline{z}_{N,n}$ y γ_n están relacionados como

$$(I-55a) \quad |\underline{z}_{N,n}| = \left\{ \frac{N}{2} \left[1 + |\gamma_n|^2 - 2 \operatorname{Re}(\gamma_n) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right] \right\}^{-1/2} \sin\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$\frac{N}{2} \neq n = 1, 2, \dots, N-1$$

mientras que para los dos eigenvalores no degenerados

$$(I-55b) \quad |\underline{z}_{N,n}| = N^{-1/2} \text{ y para } N \text{ par } |\underline{z}_{N,N/2}| = N^{-1/2}$$

La transformación comúnmente definida como de Fourier (I-15) es una matriz unitaria (I-16b) que proviene de la elección

$$\gamma_n^F = \exp[-2\pi i n/N] \quad n = 1, 2, \dots, [N-1]/2$$

y $\underline{z}_{N,n}^F = N^{-1/2}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Es claro que para $\underline{F}$ podemos obtener cualquier otra matriz $\underline{\Phi}$ que diagonalice $\underline{\Delta}$ mediante la multiplicación por la derecha por matrices $\underline{T}_n$ como $\underline{\Phi} = \underline{F} \underline{\Pi}_n \underline{T}_n$.

CAPITULO II

SISTEMAS MECANICOS ACOPLADOS.

II.1.- Sistemas mecánicos acoplados. - Un sistema de N elementos interactuantes forman una estructura que se denominará LIT-2. - Uno de los sistemas mecánicos modelo de importancia en la física es aquel dado por un conjunto de N masas unidas por medio de resortes ideales que cumplen la ley de Hooke. Consideremos -- que las masas se encuentran ordenadas formando una cadena cerrada y su interacción mas significativa es entre primeros vecinos, (Fig. II-1). En esta latiz se pueden presentar las siguientes situaciones:

- a) Todas las masas y resortes son iguales y sólo interaccionan primeros vecinos (latiz simple).
- b) Las masas son diferentes y los resortes son iguales (latiz poliatómica).
- c) Las masas son iguales y los resortes son diferentes.
- d) Existe una masa diferente de las demás (latiz con impureza).

Se pueden considerar además efectos de viscosidad, fuerzas externas, interacciones a J -ésimos vecinos (Fig. II-2) y restricciones de frontera; varios de estos casos serán estudiados aquí.

II.2.- El oscilador armónico. - Antes de analizar el sistema de osciladores, es conveniente estudiar el comportamiento de uno solo. Un ejemplo sencillo de oscilador armónico lineal es una masa M conectada a dos resortes de Hooke idénticos, con masa

cero, constante k y longitud sin deformación L . La masa se encuentra oscilando longitudinalmente en ausencia de efectos de gravedad y fricción.

Denotando con f el desplazamiento de la masa con respecto a su posición de equilibrio, las fuerzas aplicadas sobre la masa son:

$$F_d = -k \left[\frac{L}{2} + f - L \right] \quad (\text{resorte derecho})$$

$$F_r = -k \left[\frac{L}{2} - f - L \right] \quad (\text{resorte izquierdo})$$

la fuerza total es

$$F = F_d + F_r = -2kf$$

Usando la segunda ley de Newton

$$M \ddot{f} = -2kf$$

que se puede escribir

$$(II-1) \quad \ddot{f} = -\omega^2 f \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

donde ω será la frecuencia angular de oscilación.

La ecuación (II-1) es una expresión exacta que determina el comportamiento del sistema y cuya solución general es de la forma

$$(II-2) \quad f = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$$

donde A y B coeficientes por determinar a partir de dos condiciones de frontera, que podemos tomar como las condiciones iniciales $\dot{f}_0$ y f_0 a un tiempo t_0 .

Si en lugar de oscilaciones longitudinales, se consideran oscilaciones transversales en el sistema anterior, (Fig. II-3), veremos que no se sigue el movimiento de un oscilador armónico simple.

Suponiendo que las oscilaciones transversales son sobre un plano, la fuerza total que actúa sobre la masa M es:

$$F = -2k \left[\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2} - l \right] \sin \theta$$

$$F = -2kF \left[1 - l \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2 \right)^{-1/2} \right]$$

La ecuación de movimiento es entonces:

$$(II-3) \quad \ddot{f} = -\frac{2k}{M} f \left[1 - l \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2 \right)^{-1/2} \right]$$

que no corresponde a la ecuación diferencial lineal de un oscilador armónico simple. Existen dos situaciones en las que se puede aproximar las oscilaciones transversales (II-3) con las de un oscilador armónico simple. El primer caso es cuando la longitud original de los resortes, l , es mucho menor a la longitud que tienen durante la oscilación.

$$l \left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2 \right]^{-1/2} \approx 0$$

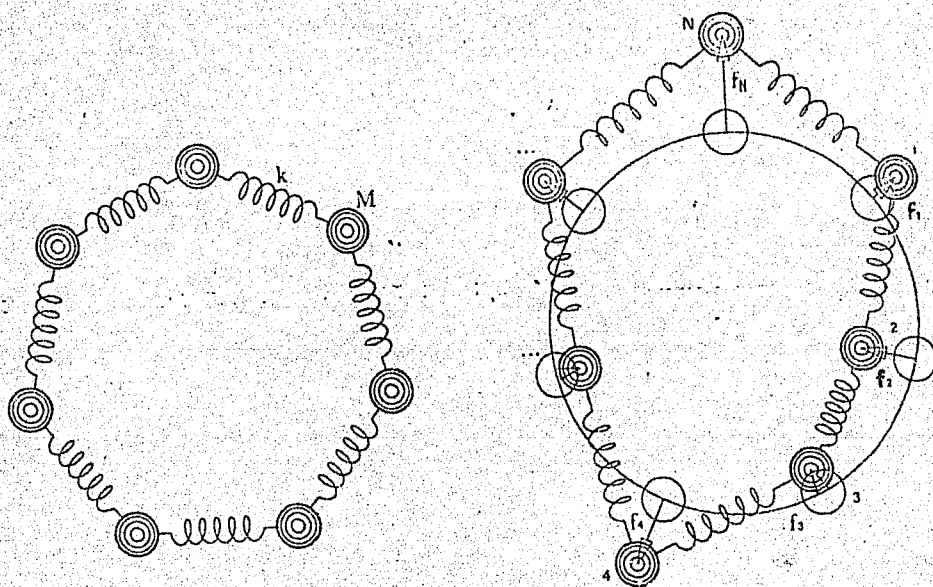


Fig. II-1

- a) Se muestra una latiz cerrada formada por masas M y resortes k
- b) La misma latiz en movimiento. Las coordenadas $f_n(t)$ $n = 1, 2, \dots, N$ de las masas definen - las coordenadas del vector $\underline{f}(t)$

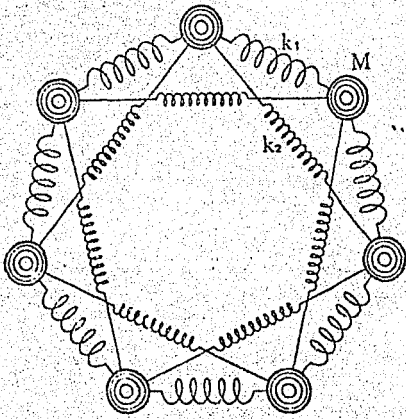


Fig. II-2

*Latiz con interacción a
primeros y segundo veci-
nos.*

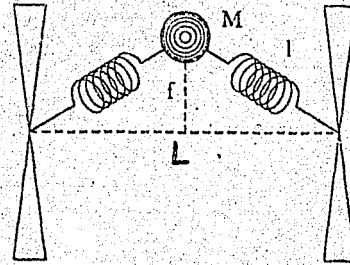


Fig. II-3

*Una masa oscilando transversal-
mente debido a la influencia -
de dos resortes.*

El segundo caso es cuando se consideran oscilaciones pequeñas

$$f/l \approx 0$$

Substituyendo cualesquiera de las dos condiciones anteriores en (II-3), la ecuación de movimiento para oscilaciones transversales toma la forma

$$\ddot{f} \approx -\omega_T^2 f,$$

es decir, la misma que se tiene en el caso de oscilaciones longitudinales aunque las frecuencias de oscilación ω_T serán diferentes de ω .

II.3.- Vibraciones en una latiz finita. - El sistema mecánico - que vamos a considerar está formado por N masas $M_1, M_2, \dots, M_N$ que oscilan unidas por resortes ideales que siguen la ley de Hooke, (Fig. II-2). Sea $f_n(t)$ el desplazamiento de la partícula n medido desde su posición de equilibrio y sea k_{nm} la constante del resorte que une a la masa m con la n , - si cada partícula se encuentra ligada a su posición de equilibrio por un resorte de constante k_{nn} , la fuerza total - sobre la masa M_n es:

$$\begin{aligned} \text{(II-4)} \quad \sum_{m \neq n} k_{nm} (f_n(t) - f_m(t)) + k_{nn} f_n(t) &= \sum_m k_{nm} f_n(t) - \sum_{m \neq n} k_{nm} f_m(t) \\ &= \sum_m (-k_{nm} + \delta_{n,m} [k_{nn} + \sum_r k_{nr}]) f_m(t) \\ &= \sum_m K_{nm} f_m \end{aligned}$$

Si suponemos adicionalmente que cada masa está sujeta a una fuerza de fricción viscosa (proporcional a su velocidad), $G_n \dot{f}_n(t)$, las ecuaciones de movimiento, para la masa M_n que involucran las condiciones anteriores son:

$$(5) \quad M_n \ddot{f}_n(t) + G_n \dot{f}_n(t) + \sum_{m=1}^N K_{nm} f_m(t) = 0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. No se puede resolver cada una por separado, y es necesario encontrar un mecanismo que permita transformarlas en otro conjunto de ecuaciones desacoplado.

Si formamos un vector $\underline{f}$ en la base canónica $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$ con los N desplazamientos $\{f_n(t)\}_{n=1}^N$ y similarmente estableceremos las siguientes matrices

$$(II-6) \quad \underline{M} = \|M_n \delta_{m,n}\|, \quad \underline{G} = \|G_n \delta_{m,n}\|, \quad \underline{K} = \|K_{nm}\|$$

donde M_n, G_n, K_{nm} son respectivamente las masas, coeficientes de fricción y las constantes de interacción. Estas últimas, por su definición en (II-4) constituyen una matriz her-

matear. El conjunto de ecuaciones (II-5) se puede expresar como una ecuación vectorial.

$$(II-7) \quad M \ddot{\underline{f}}(t) + C \dot{\underline{f}}(t) + K \underline{f} = 0$$

donde M es el operador de inercia, C el de fricción y K el de interacción. Los tres son autoadjuntos y están expresados en la base $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$, por las matrices (II-6). La forma (II-7) es independiente de la elección de base, esto es, podemos determinar su solución en una base conveniente y después volver a la base original $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^N$, en la que se ha planteado el problema.

II.4.- Espacio Fase. - Las coordenadas de posición o desplazamientos $\underline{f}_n(t)$ pueden ser empleados para definir un espacio vectorial de N dimensiones $\mathcal{V}^N$ denominado espacio de configuración. Similarmente, empleando un nuevo vector de N coordenadas definidas por la identidad $\underline{g}_n = M_n \dot{\underline{f}}_n$, llamado vector momento $\underline{g}$, (que no es el momento canónicamente conjugado a $\underline{f}_n$ cuando existen efectos de viscosidad) se puede construir otro espacio vectorial $\mathcal{V}^N$ denominado espacio momental.

La suma directa del espacio de configuración y el momental forma un nuevo espacio $\mathcal{V}^{2N}$ llamado espacio fase. Si a un

tiempo dado, t_0 , todas las posiciones $\underline{f}_n(t_0)$ y momentos $\underline{g}_n(t_0)$ son conocidos, la evolución en el tiempo en la que está unívocamente determinada como lo veremos más adelante.

Sea $\underline{h}(t)$ un vector en el espacio fase definido por:

$$(II-8) \quad \underline{h}(t) = \begin{pmatrix} \underline{f}(t) \\ \underline{g}(t) \end{pmatrix}$$

La ecuación (II-7) en este espacio es:

$$?) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{CM}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}(t) \\ \underline{g}(t) \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underline{f}(t) \\ \underline{g}(t) \end{bmatrix}$$

6

$$(II-10) \quad \underline{A} \underline{h}(t) = \dot{\underline{h}}(t)$$

El primer renglón de (II-9) corresponde a la identidad que define el vector momento y el segundo es idénticamente (II-7). La forma (II-10) es una ecuación diferencial de primer orden - con $2N$ componentes que substituye a (II-7). La introducción del espacio fase en el problema ha permitido reducir el orden

de la ecuación diferencial que describe el movimiento de la luz. El precio por esta simplificación ha sido el de duplicar la dimensión del espacio vectorial.

Cualquier función $\Psi(t)$ analítica en una región del plano complejo que contenga un punto t_0 , puede desarrollarse en serie de Taylor para cualquier valor t dentro de un disco cuyo radio está determinado por su distancia a la singularidad mas cercana. Supondremos (sin especificar el radio) -- que éste existe para la solución de (II-10):

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial t_1^n} \Psi(t_1) \right|_{t_1=t_0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(t-t_0) \frac{\partial}{\partial t_1} \right]^n \Psi(t_1) \Big|_{t_1=t_0}\end{aligned}$$

$$(II-11) \quad \Psi(t) = \exp \left[(t-t_0) \frac{\partial}{\partial t_1} \right] \Psi(t_1) \Big|_{t_1=t_0}$$

En el último paso se ha empleado el desarrollo en serie de la función exponencial para definir el operador

$\exp \left[(t-t_0) \frac{\partial}{\partial t} \right]$. Sea ahora $\underline{h}(t)$ el vector solución del sistema (II-9) cuyas coordenadas han sido desarrolladas en serie de Taylor en una región común alrededor de t_0 .

$$\underline{h}(t) = \exp \left[(t-t_0) \frac{d}{dt} \right] \underline{h}(t_0)$$

Empleando (II-10) podemos substituir $\frac{d}{dt}$ por Δ

$$(II-12) \quad \underline{h}(t) = \exp[(t-t_0)A] \underline{h}(t_0)$$

Esta ecuación describe la evolución en el tiempo de una solu
ción $\underline{h}(t)$ en términos de las condiciones iniciales
 $\underline{h}(t_0)$. Diremos que:

$$(II-13) \quad G(t-t_0) = \exp[(t-t_0)A]$$

es el operador de evolución y que A genera el mismo. La solu
ción a la ecuación de movimiento, se reduce ahora a determinar
 $G(t-t_0)$

II.5.- Látiz simple.- Apliquemos los mecanismos desarrollados
en la sección anterior a una látiz formada por N masas M
iguales (monotómica), con interacción sólo entre primeros ve-
cinos (Fig. II-1) con resortes iguales de constante k , en la
que no se presenta efecto de fricción. En este caso los opera-
dores son:

$$(II-14) \quad M = M \mathbb{1}, \quad G = 0, \quad K = k \Delta$$

luego

$$(II-15) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \mathbb{1} \\ k \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar explícitamente el operador $G(t-t_0)$ emplearemos el desarrollo en serie de la función exponencial; para esto, es necesario conocer las potencias de A :

$$A^2 = \begin{bmatrix} kM^{-1}\Delta & 0 \\ 0 & kM^{-1}\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (kM^{-1}\Delta)$$

$$A^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (kM^{-1}\Delta)^n$$

$$A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}I \\ k\Delta & 0 \end{bmatrix} (kM^{-1}\Delta)^n$$

Luego

$$\begin{aligned} (II-16) \quad \exp[(t-t_0)A] &= \left(\sum_{\text{par}} + \sum_{\text{impar}} \right) \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left[(t-t_0)(kM^{-1}\Delta)^{1/2} \right]^{2n} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}I \\ k\Delta & 0 \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[(t-t_0)(kM^{-1}\Delta)^{1/2} \right]^{2n+1} \\ &\quad \times [kM^{-1}\Delta]^{-1/2} \end{aligned}$$

Empleando los desarrollos en serie de $\sinh$ y $\cosh$ se encuentra:

$$\exp[(t-t_0)A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}] + \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ k\Delta & 0 \end{bmatrix} \frac{\sinh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}]}{\sqrt{kM^{-1}\Delta}}$$

Mótese que aunque en la expresión anterior aparecen funciones hiperbólicas y raíces de un operador, la serie consiste únicamente de potencias enteras del operador. Finalmente,

$$(II-17) \quad G(t-t_0) = \begin{bmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}] & \frac{M^{-1}\sinh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}]}{\sqrt{kM^{-1}\Delta}} \\ \frac{k\Delta \sinh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}]}{\sqrt{kM^{-1}\Delta}} & \cosh[(t-t_0)\sqrt{kM^{-1}\Delta}] \end{bmatrix}$$

Mótese que

$$A G(t-t_0) \underline{h}(t_0) = \dot{G}(t-t_0) \underline{h}(t_0),$$

la cual verifica que el vector $G(t-t_0) \underline{h}(t_0)$ es la solución a la ecuación de movimiento.

En la sección (I-6), ecuación (I-32), se encontró que el -

operador de segunda diferencia Δ , está representado en la base $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ por una matriz diagonal $\tilde{\Delta} = \|\lambda_m \delta_{m,n}\|$. Entonces, empleando la transformada de Fourier podemos determinar la matriz que representa a (II-17) en la base de Fourier.

$$(II-18) \quad \tilde{G}(t-t_0) = \begin{pmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}] \delta_{m,n} & \frac{M' \sinh[(t-t_0)\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}] \delta_{m,n}}{\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}} \\ \frac{k\lambda_n \sinh[(t-t_0)\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}] \delta_{m,n}}{\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}} & \cosh[(t-t_0)\sqrt{KM^{-1}\lambda_n}] \delta_{m,n} \end{pmatrix}$$

La evolución en el tiempo del vector $\tilde{h}(t)$ se encuentra - de (II-12) y (II-13)

$$\tilde{h}(t) = \tilde{G}(t-t_0) \tilde{h}(t_0) \quad \text{o} \quad \tilde{h}_n(t) = \sum_m \tilde{G}_{nm} \tilde{h}_m(t_0)$$

Recordando (II-8) y usando (II-18) se obtiene un conjunto de $2N$ soluciones a la ecuación de movimiento de la latiz simple en la base $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$.

$$(II-19a) \quad \tilde{F}_n(t) = \cos[(t-t_0)\omega_n] \tilde{F}_n(t_0) + \frac{1}{\omega_n} \sin[(t-t_0)\omega_n] \dot{\tilde{F}}_n(t_0)$$

$$(II-19b) \quad \dot{\tilde{F}}_n(t) = -\sin[(t-t_0)\omega_n] \omega_n \tilde{F}_n(t_0) + \cos[(t-t_0)\omega_n] \dot{\tilde{F}}_n(t_0)$$

$$n=1, 2, 3, \dots, N$$

donde hemos definido las frecuencias angulares de oscilación ω_n

$$(II-20) \quad \omega_n = \sqrt{-KM'\lambda_n} = \omega_{N-n} \quad n=1, 2, 3, \dots, N$$

Obsérvese que las N ecuaciones (II-19a) son las derivadas temporales de los primeros N ecuaciones (II-19a). Para obtener las soluciones en la base original $\{ \underline{\underline{x}}_n \}_{n=1}^N$ basta con encontrar su transformada inversa de Fourier.

$$(II-21) \quad f_n(t) = N^{-1/2} \sum_m \tilde{F}_m(t) \exp[-2\pi i m n / N]$$

Las frecuencias angulares ω_n permitidas en la vibración están dados por (II-20) y marcados en la figura (II-4). Como $\omega_n = \omega_{N-n} = |\omega_n|$, seguiremos la convención de -- considerar los valores de n centrados en cero:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{1}{2}(N-1) \text{ si } N \text{ es impar}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \text{ si } N \text{ es par}$$

Este intervalo se conoce como la primera zona de Brillouin; los intervalos de n más allá de esta zona no representan valores diferentes de ω_n y se conocen como segunda, tercera, etc. zonas de Brillouin.

En las secciones siguientes analizaremos varios casos diferentes de celdas, determinando sus frecuencias angulares para los modos normales, y sus soluciones en la base de Fourier o en alguna otra base adecuada. No nos detendremos a obtener las so-

luciones en la base canónica puesto que el procedimiento a seguir, sería el mismo que el utilizado en esta sección.

II.6.- Lattice simple con interacción a J-ésimos vecinos.- Si cada masa de una lattice monoatómica interacciona con sus primeros vecinos a través de resortes de constante k_1 , con sus segundos vecinos con resortes de constante k_2 y así sucesivamente, el operador de interacción es de la forma:

$$(II-22) \quad K = - \sum_{\ell=1}^J k_{\ell} \Delta_{\ell} \quad J < \frac{N}{2}$$

donde Δ_{ℓ} es el operador representado en la base canónica por la matriz $\underline{\Delta}_{\ell}$ definida en la ecuación (II-0a).

En ausencia de viscosidad, el operador A es:

$$(II-23) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \mathbf{1} \\ -K & 0 \end{bmatrix}$$

y el operador $G(t-t_0)$ determinado a partir de un desarrollo de Taylor, como en la sección (II-5) es:

$$(II-24) \quad G(t-t_0) = \begin{bmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}] & \frac{M^{-1} \sinh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}]}{\sqrt{-M^{-1}K}} \\ \frac{-K \sinh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}]}{\sqrt{-M^{-1}K}} & \cosh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}] \end{bmatrix}$$

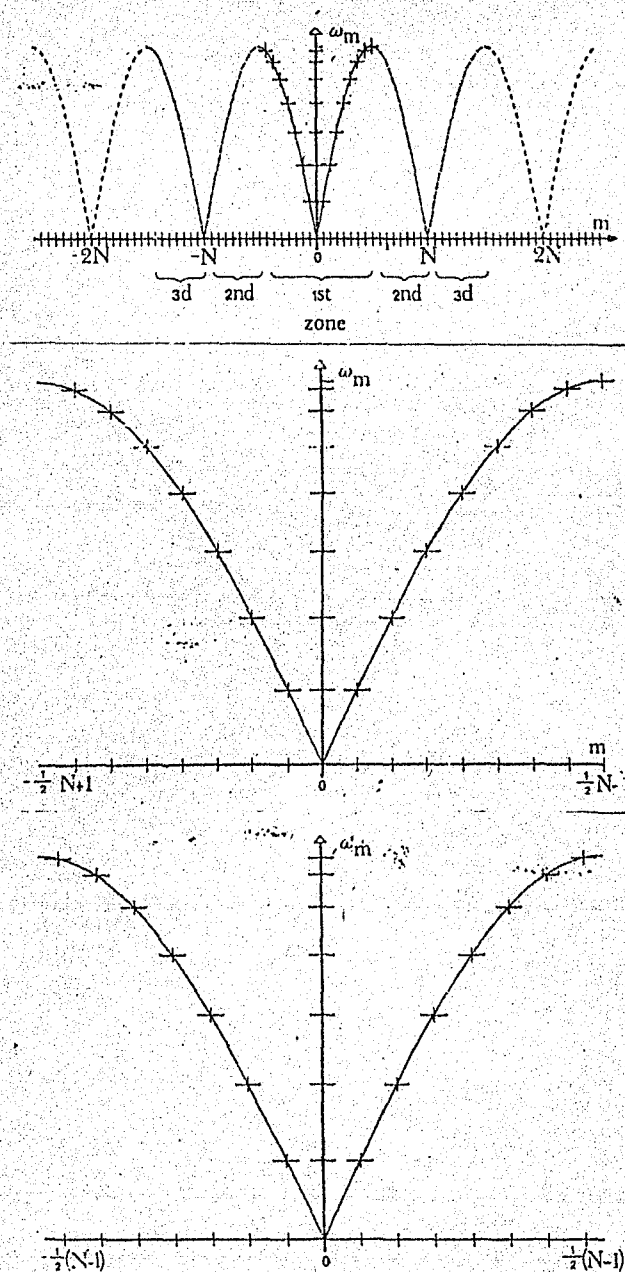


Fig. II-4

- Diagrama de Brillouin mostrando la frecuencia ω_m como función de m .
- Se muestra en detalle la primera zona para N par.
- Se muestra la primera zona para N non.

Empleando (I-41) el operador $G(t-t_0)$ queda representado en la base de Fourier por la matriz

$$(II-25) \quad \tilde{G}(t-t_0) = \begin{pmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}] \delta_{mn} & \frac{M^{-1} \sinh[(t-t_0)\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}] \delta_{m,n}}{\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}} \\ \frac{(\sum k_x \lambda_n^2) \sinh[(t-t_0)\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}] \delta_{m,n}}{\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}} & \cosh[(t-t_0)\sqrt{M^{-1}\sum k_x \lambda_n^2}] \delta_{mn} \end{pmatrix}$$

Las frecuencias angulares de oscilación serán

$$(II-26) \quad \omega_n^J = \sqrt{-M^{-1} \sum k_x \lambda_n^2} = \omega_{N-n}^J$$

véase Fig. (II-5). Finalmente se obtienen las N soluciones y sus derivadas temporales:

$$(II-27a) \quad \tilde{f}_n(t) = \cos[(t-t_0)\omega_n^J] \tilde{f}_n(t_0) + \frac{1}{\omega_n^J} \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^J] \dot{\tilde{f}}_n(t_0)$$

$$(II-27b) \quad \dot{\tilde{f}}_n(t) = -\omega_n^J \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^J] \tilde{f}_n(t_0) + \cos[(t-t_0)\omega_n^J] \dot{\tilde{f}}_n(t_0)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

La latiz simple con interacción a J -ésimos vecinos se describe pues en la base de Fourier por un sistema de ecuaciones desacopladas donde cada una corresponde a una masa independiente y a la acción de un resorte de constante $k_n = \frac{1}{2} \omega_n^2 M$.

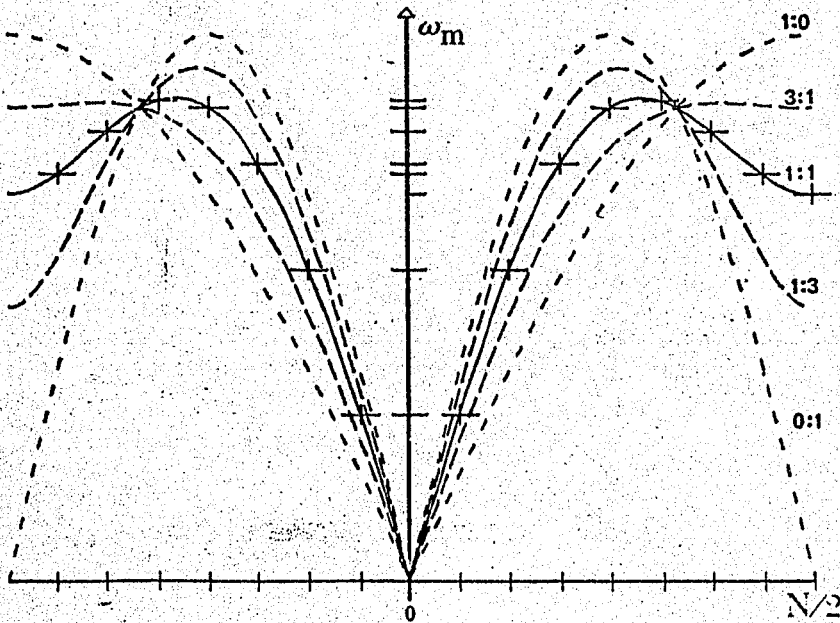


Fig (II-5)

Diagrama de Brillouin para una latiz simple con interacción a primeros y segundos vecinos con resortes de constante k_1 y k_2 . Las curvas se han graficado para diferentes valores de la razón k_1/k_2 .

El cambio de base nos ha permitido sustituir un problema físico complejo por uno más sencillo.

II.7.- Lattice dinámica.— Consideremos una lattice formada por masas M_1 y M_2 alternadas, que interaccionan a J -ésimos vecinos y en ausencia de fricción. En este caso, el operador de inercia M_2 está representado en la base crónica por la matriz (I-34) y en la base de Fourier por (I-35). El operador M_2^{-1} tiene como representación una matriz formada al sustituir M_1 y M_2 por M_1^{-1} y M_2^{-1} en (I-35)

$$(II-28) \quad \tilde{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} \mathbb{1} & M_2^{-1} \mathbb{1} \\ M_2^{-1} \mathbb{1} & M_1^{-1} \mathbb{1} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} M_1^{-1} &= \frac{M_1 + M_2}{2 M_1 M_2} \\ M_2^{-1} &= \frac{M_1 - M_2}{2 M_1 M_2} \end{aligned}$$

y el operador de interacción es el mismo de la sección anterior

$$(II-29) \quad K = - \sum_{\alpha=1}^J k_{\alpha} \Delta_{\alpha} \quad J < N/2$$

Nótese que M_2^{-1} y K no conmutan. Los operadores A y G son:

$$(II-30) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & M_2^{-1} \\ -K & 0 \end{bmatrix}$$

$$(II-31) \quad G(t-t_0) = \begin{bmatrix} \cosh[(t-t_0)\sqrt{-M_2^{-1}K}] & \frac{M_2^{-1} \sinh[(t-t_0)\sqrt{-M_2^{-1}K}]}{\sqrt{-M_2^{-1}K}} \\ \frac{-K \sinh[(t-t_0)\sqrt{-M_2^{-1}K}]}{\sqrt{-M_2^{-1}K}} & \cosh[(t-t_0)\sqrt{-M_2^{-1}K}] \end{bmatrix}$$

Esto se puede ver repitiendo el cálculo de (II-15) a - - (II-17) con (II-28) y (II-29) teniendo cuidado en no conmutar los operadores M_2 y K .

Como $\tilde{M}_2$ no es una matriz diagonal, el producto de las matrices que representan al operador de inercia (inverso) y al de interacción en la base de Fourier, no es diagonal. Para de sacoplar y determinar las soluciones de las ecuaciones de movimiento empleando el operador de evolución G , es necesario encontrar una base donde el producto $M^{-1}K$ esté representado por una matriz diagonal $\tilde{M}^{-1}\tilde{K}$. De esta manera -- los desarrollos en serie de $\sinh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}]$ y $\cosh[(t-t_0)\sqrt{-M^{-1}K}]$ se podrán escribir en forma cerrada y la matriz $\underline{G}$ que representa al operador G podrá evaluarse.

Antes de continuar analizando la luz diatómica, nos detendremos a estudiar de una forma general la ecuación de movimiento (II-7) expresada en la base de Fourier y su reducción a una forma diagonal. Esto nos permitirá resolver el problema de diagonalización que hemos estado pendiente.

Sea

$$(II-32) \quad \underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{\tilde{F}}}(t) + \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{F}}(t) = 0$$

la ecuación de movimiento para una latiz en la base de Fourier donde $\underline{\tilde{M}}$ y $\underline{\tilde{K}}$ son dos matrices hermiteanas que en general no son diagonales y no conmutan, formadas por elementos $(\underline{\tilde{M}})_{nm}$ y $(\underline{\tilde{K}})_{nm}$ respectivamente (cuando ambos son diagonales, el problema corresponde a una latiz simple el cual fué estudiado en secciones anteriores). Es de hacerse notar que (II-32) se obtiene de la ecuación vectorial (II-7) con $\underline{Q} = 0$ tomando la base $\underline{y}$ para definir componentes y elementos de matriz. Indicamos esto al colocar la tilde sobre vectores y matrices. Proponemos una solución de carácter oscilatorio

$$(II-33) \quad \underline{\tilde{F}} = \underline{a} e^{i(\omega t + \alpha)}$$

donde $\underline{a}$ es un vector columna de componentes a_n constantes. Substituyendo (II-33) en (II-32) tenemos:

$$(II-34) \quad (\underline{\tilde{K}} - E \underline{\tilde{M}}) \underline{a} = 0 \quad E = \omega^2$$

Los eigenvalores E son los cuadrados de las frecuencias angulares ω y están determinados por ser las soluciones de la ecuación secular

$$(II-35) \quad \det[\underline{\tilde{K}} - E \underline{\tilde{M}}] = 0$$

Como $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$ son matrices de $N \times N$, existen a lo mas N eigenvalores diferentes que corresponden a los N modos normales de vibración. Para cada eigenvalor, existe un correspondiente eigenvector $\underline{a}$ determinado por (II-34) y por una condición de normalización que detallaremos despues.

Multipliquemos (II-34) por $\underline{a}^+$ por la izquierda transpongamos la ecuación resultante y tomemos su complejo conjugado

$$(II-36a) \quad \underline{a}^+ \tilde{K} \underline{a} = E \underline{a}^+ \tilde{M} \underline{a}$$

$$(II-36b) \quad \underline{a}^+ \tilde{K}^+ \underline{a} = E^* \underline{a}^+ \tilde{M}^+ \underline{a}$$

como $\tilde{K}$ y $\tilde{M}$ son hermiteanos

$$(II-37) \quad \underline{a}^+ \tilde{K} \underline{a} = E^* \underline{a}^+ \tilde{M} \underline{a}$$

De (II-36a) y (II-37) concluimos que los eigenvalores deben ser reales.

Sean E_1 y E_2 dos eigenvalores distintos con eigenvectores $\underline{a}_1$ y $\underline{a}_2$, entonces:

$$\tilde{K} \underline{a}_1 = E_1 \tilde{M} \underline{a}_1, \quad \tilde{K} \underline{a}_2 = E_2 \tilde{M} \underline{a}_2$$

Multipliquemos la primera ecuación por $\underline{a}_2^+$ y la segunda por $\underline{a}_1^+$

$$\underline{a}_2^+ \underline{\tilde{K}} \underline{a}_1 = E_1 \underline{a}_2^+ \underline{\tilde{M}} \underline{a}_1, \quad \underline{a}_1^+ \underline{\tilde{K}} \underline{a}_2 = E_2 \underline{a}_1^+ \underline{\tilde{M}} \underline{a}_2$$

obteniendo la transpuesta conjugada de la primera ecuación, restando con la segunda y cancelando el término que hemos requerido que sea no nulo, $(E_1 - E_2)$, llegamos a:

$$(II-38) \quad \underline{a}_1^+ \underline{\tilde{M}} \underline{a}_2 = 0$$

La ecuación (II-34) no determina totalmente a los vectores

$\underline{a}_n$. Si requerimos que los vectores estén normalizados y elegimos dentro de cada subespacio correspondiente a un eigenvalor, una base ortonormal respecto a la forma sesquilineal (II-38)

$$\underline{a}_i^+ \underline{\tilde{M}} \underline{a}_j = \delta_{ij}$$

tendremos las condiciones necesarias para determinar unívocamente estos vectores.

Construyamos una matriz $\underline{D}$ formada por los vectores $\underline{a}^+$ como renglones; de esta manera, la generalización de la expresión anterior es:

$$(II-39) \quad \underline{D} \underline{\tilde{M}} \underline{D}^+ = \underline{1}$$

Nótese que la matriz inversa a $\underline{D}^+$ es $\underline{D}\tilde{M}$. Si construimos una matriz diagonal con los eigenvalores

$$(II-40) \quad \underline{E} = \parallel \underline{E}_n \delta_{m,n} \parallel$$

las ecuaciones de eigenvalores (II-34) pueden escribirse como - una sola

$$\underline{\tilde{K}} \underline{D}^+ = \underline{E} \underline{\tilde{M}} \underline{D}^+$$

conduciendo a la expresión

$$(II-41) \quad \underline{D} \underline{\tilde{K}} \underline{D}^+ = \underline{E}$$

Ahora consideremos un nuevo conjunto de coordenadas $\{\underline{F}\}$ de terminadas por la transformación

$$(II-42a) \quad \underline{\bar{F}} = \underline{D} \underline{\tilde{M}} \underline{\tilde{F}}$$

o su inversa

$$(II-42b) \quad \underline{\tilde{F}} = \underline{D}^+ \underline{\bar{F}}$$

Este nuevo conjunto de coordenadas se encuentra en una base - que llamaremos de los modos normales, pues llevarán como en los

casos anteriores, a soluciones separadas en n y t

Las ecuaciones de movimiento (II-32) las expresaremos como:

$$\tilde{\underline{\underline{M}}} D^+ \ddot{\underline{\underline{F}}} + \tilde{\underline{\underline{K}}} D^+ \underline{\underline{F}} = 0$$

Multiplicando por $\underline{\underline{D}}$ y empleando (II-39), (II-41) tenemos:

$$(II-43a) \quad \ddot{\underline{\underline{F}}} + \underline{\underline{E}} \underline{\underline{F}} = 0$$

Un conjunto de ecuaciones desacopladas de la forma

$$(II-43b) \quad \ddot{\underline{\underline{F}}}_n + E_n \underline{\underline{F}}_n = 0 \quad n=1,2,3,\dots,N$$

Hemos encontrado una base, la de los modos normales, en la que el operador de inercia y el de interacción son representados por matrices diagonales, y el producto $\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}}$ también es diagonal

$$(II-44) \quad \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} = \parallel E_n \delta_{mn} \parallel = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^{-1}$$

entonces, ésta es la base conveniente para calcular el operador $\underline{\underline{G}}(t-t_0)$.

En la base de Fourier (ecuaciones (I-35) y (I-41)) el ope-

radon de inercia y el de interacción están representados por:

$$(II-45a) \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M_r \mathbb{I} & M_s \mathbb{I} \\ M_s \mathbb{I} & M_r \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad M_r = \frac{M_1 + M_2}{2}, \quad M_s = \frac{M_2 - M_1}{2}$$

$$(II-45b) \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} \|K_n \delta_{m,n}\| & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \|K_{n+\mu/2} \delta_{m,n}\| \end{bmatrix} \quad K_n = \sum_{\ell=1}^J k_\ell \lambda_n^\ell$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N/2$

La ecuación secular (II-35) es:

$$\det \begin{bmatrix} \|(K_n - EM_r) \delta_{m,n}\| & \|(-EM_s) \delta_{m,n}\| \\ \|(-EM_s) \delta_{m,n}\| & \|(K_{n+\mu/2} - EM_r) \delta_{m,n}\| \end{bmatrix}$$

El determinante de una matriz diagonal por bloques es nula si las $\frac{N}{2}$ matrices formadas por los elementos $m - n$ de cada bloque tienen determinante nulo. Las soluciones

$$(II-46a) \quad E_n^\pm = (\omega_n^\pm)^2 = \frac{M_r}{2(M_r^2 - M_s^2)} \left[(K_n + K_{n+\mu/2})^\pm \pm \sqrt{(K_n - K_{n+\mu/2})^2 + 4 \left(\frac{M_s}{M_r}\right)^2 K_n K_{n+\mu/2}} \right]$$

$n = 1, 2, 3, \dots, N$

integrar la matriz de eigenvalores

$$(II-46b) \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \|E_n^+ \delta_{m,n}\| & 0 \\ 0 & \|E_n^- \delta_{m,n}\| \end{bmatrix} \quad n=1,2,3,\dots, N/2$$

Los eigenvectores se determinan empleando (II-34) y (II-46)

$$\begin{bmatrix} \|(K_n - E_n^+ M_\tau) \delta_{m,n}\| & \|(-E_n^+ M_\delta) \delta_{m,n}\| \\ \|(-E_n^+ M_\delta) \delta_{m,n}\| & \|(K_{n+N/2} - E_n^+ M_\tau) \delta_{m,n}\| \end{bmatrix} \underline{a}_n^\pm = \underline{0}$$

Las razones entre los elementos de los eigenvectores $\underline{a}_n$ son

$$(II-47) \quad (\underline{a}_n^\pm)_{n+N/2} = \frac{K_n - E_n^+ M_\tau}{E_n^+ M_\delta} (\underline{a}_n^\pm)_n = \frac{E_n^+ M_\delta}{K_{n+N/2} - E_n^+ M_\tau} (\underline{a}_n^\pm)_n$$

$$(\underline{a}_n^\pm)_r = 0 \quad \text{si } n \neq r \neq n+N/2$$

Utilizando la condición de normalización (II-39) y (II-47) tenemos

$$(II-48) \quad (\underline{a}_n^\pm)_n = \sqrt{\frac{E_n^+ (K_{n+N/2} - E_n^+ M_\tau)}{(K_{n+N/2} - E_n^+ M_\tau) K_n + (K_n - E_n^+ M_\tau) K_{n+N/2}}}$$

entonces, la matriz de diagonalización, en base a (II-47) y (II-48) es:

$$(II-49) \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} (a_n^+) \delta_{m,n} & \left\| \frac{E_n^+ M \delta}{K_{m+\frac{1}{2}} - E_n^+ M_T} (a_n^+) \delta_{m,n} \right\| \\ (a_n^-) \delta_{m,n} & \left\| \frac{E_n^- M \delta}{K_{m+\frac{1}{2}} - E_n^- M_T} (a_n^-) \delta_{m,n} \right\| \end{bmatrix}$$

El operador $\underline{G}$ en la base de los modos normales es:

$$(II-50) \quad \underline{G}(t-t_0) = \begin{bmatrix} \left\| \cos[(t-t_0)\omega_n^+] \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc & \left\| \frac{\text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^+]}{\omega_n^+} \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc \\ \bigcirc & \left\| \cos[(t-t_0)\omega_n^-] \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc & \left\| \frac{\text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^-]}{\omega_n^-} \delta_{m,n} \right\| \\ \left\| -\omega_n^+ \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^+] \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc & \left\| \cos[(t-t_0)\omega_n^+] \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc \\ \bigcirc & \left\| -\omega_n^- \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^-] \delta_{m,n} \right\| & \bigcirc & \left\| \cos[(t-t_0)\omega_n^-] \delta_{m,n} \right\| \end{bmatrix}$$

con $\omega_n^\pm$ dada por (II-46a).

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento en la base de los modos normales, son:

$$(II-51a) \quad \bar{F}_n(t) = \cos[(t-t_0)\omega_n^+] \bar{F}_n(t_0) + \frac{1}{\omega_n^+} \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^+] \dot{\bar{F}}_n(t_0)$$

$$(II-51b) \quad \bar{F}_{n+\frac{1}{2}}(t) = \cos[(t-t_0)\omega_n^-] \bar{F}_n(t_0) + \frac{1}{\omega_n^-} \text{Sen}[(t-t_0)\omega_n^-] \dot{\bar{F}}_n(t_0)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \frac{N}{2}$$

Empleando (II-42), encontramos las soluciones en la base de Fourier:

$$(II-52a) \quad \tilde{f}_n(t) = \dot{B}(n, n, n, t-t_0) \tilde{f}_n(t_0) + \dot{B}(n, n, n+\nu/2, t-t_0) \tilde{f}_{n+\nu/2}(t_0) \\ + B(n, n, n, t-t_0) \dot{\tilde{f}}_n(t_0) + B(n, n, n+\nu/2, t-t_0) \dot{\tilde{f}}_{n+\nu/2}(t_0)$$

$$(II-52b) \quad \tilde{f}_{n+\nu/2}(t) = \dot{B}(n, n+\nu/2, n, t-t_0) \tilde{f}_n(t_0) + B(n, n+\nu/2, n+\nu/2, t-t_0) \tilde{f}_{n+\nu/2}(t_0) \\ + B(n, n+\nu/2, n, t-t_0) \dot{\tilde{f}}_n(t_0) + B(n, n+\nu/2, n+\nu/2, t-t_0) \dot{\tilde{f}}_{n+\nu/2}(t_0)$$

$$n=1, 2, 3, \dots, \nu/2$$

con

$$B(n, r, s, t-t_0) = \frac{(a_n^+)(a_n^+)}{E_n^+ \omega_n^+} \frac{K_s \text{Sen}[\omega_n^+(t-t_0)]}{E_n^+ \omega_n^+} + \frac{(a_n^-)(a_n^-)}{E_n^- \omega_n^-} \frac{K_s \text{Sen}[\omega_n^-(t-t_0)]}{E_n^- \omega_n^-}$$

En la figura (II-6) se ha graficado $\omega_n^\pm$ como función de n . Notamos que $\omega_n^\pm$ es una función periódica de n con período $\nu/2$, la primera zona de Brillouin se toma como es costumbre a ambos lados de $n=0$. Los valores permitidos de ω_n^+ y ω_n^- se dividen en dos ramas: la rama acústica ω_n^- y la rama óptica ω_n^+ .

Para terminar esta sección, analizemos el comportamiento de las ecuaciones que aparecen en el estudio de latiz atómica cuando las masas se tornan iguales ($M_1 \rightarrow M_2 = M$)

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} E_n^+ = (\omega_n^+)^2 \quad (\text{véase II-26})$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} E_n^- = (\omega_{n+\nu/2}^+)^2$$

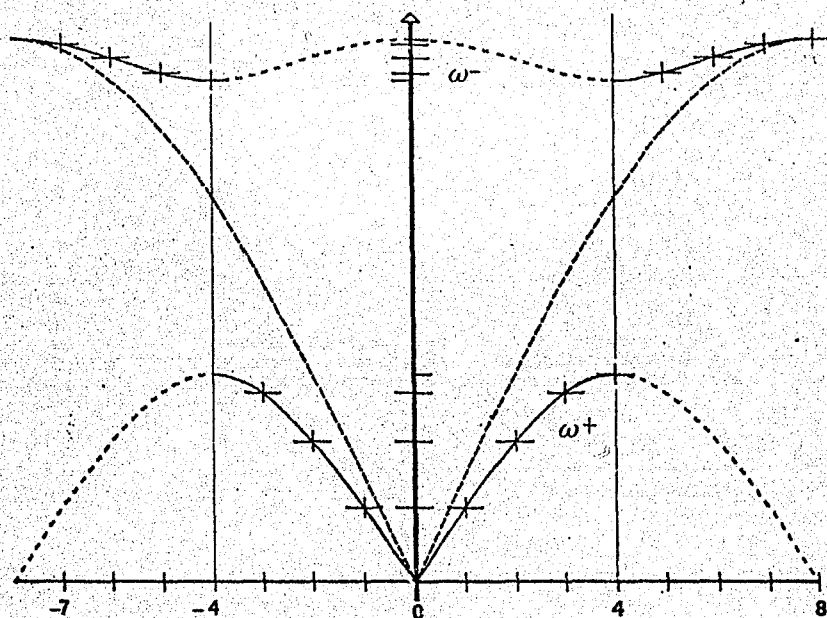


Fig (II-6a)

Diagrama de Brillouin para las frecuencias de una latiz diatómica de N masas, cuando $\frac{N}{2}$ es par.

La línea punteada que sale del origen corresponde al diagrama de Brillouin para una latiz simple. Las frecuencias angulares $\omega^{\pm}$ se separan en dos ramas, la óptica y la acústica.

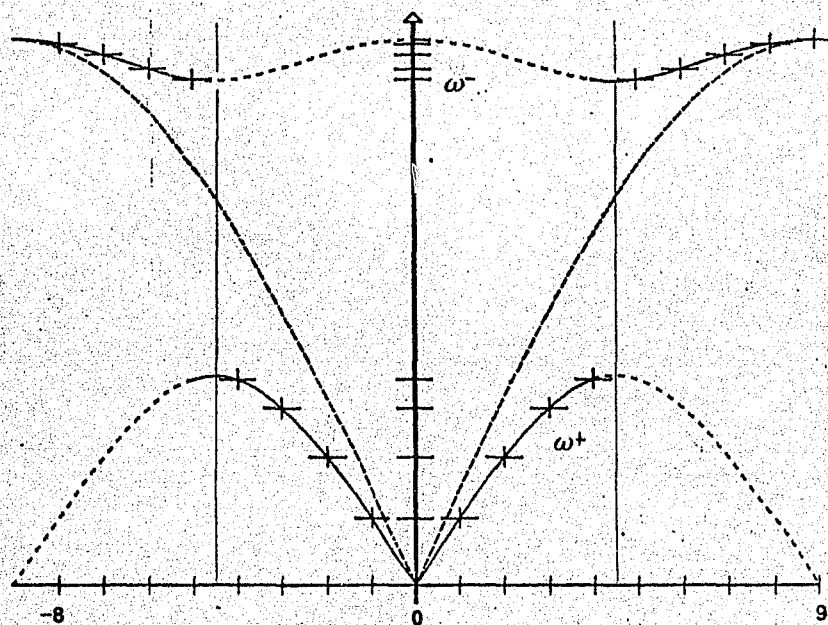


Fig.(II-6b)

Diagrama de Brillouin para una latiz diatómica de N masas cuando $\frac{N}{2}$ es impar.

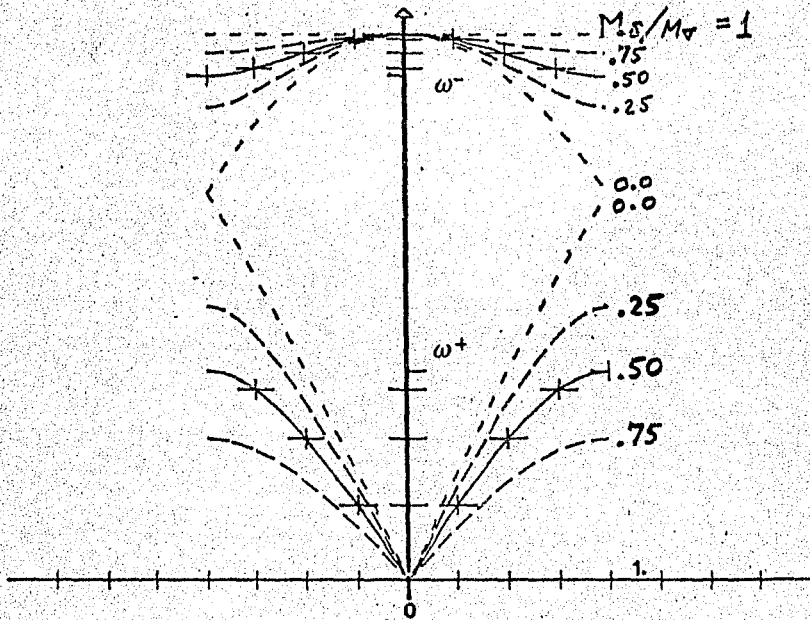


Fig. (II-6c)

Diagrama de Brillouin para una latiz diatómica. Se ha graficado para diferentes razones de M_S/M_T

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} (\underline{a}_n^+) = \lim_{M_1 \rightarrow M} (\underline{a}_n^-)_{n+1/2} = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} (\underline{a}_n^+)_{n+1/2} = \lim_{M_1 \rightarrow M} (\underline{a}_n^-) = 0$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow M} \underline{D} = \parallel \delta_{m,n} \parallel \frac{1}{\sqrt{M}}$$

En el paso al límite las soluciones (II-51) y (II-52) se reducen a las encontradas en la sección (II-6) para la latiz simple.

II.8.- Latiz molecular. - Supóngase un arreglo de N masas -- iguales, que interaccionan sólo a primeros vecinos por medio de resortes de dos constantes de Hooke diferentes, alternados. Sea k_1 la constante del primer tipo de resortes y k_2 la de los segundos. Los operadores de inercia y de interacción -- están dados en la base de configuración por:

$$(II-53a) \quad \underline{M} = M \parallel \delta_{m,n} \parallel$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ k_2 & -(k_1+k_2) & k_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & -(k_1+k_2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & k_1 & \cdots & -(k_1+k_2) & k_1 \\ k_1 & 0 & 0 & \cdots & k_2 & -(k_1+k_2) \end{bmatrix}$$

Por medio de una transformada de Fourier encontramos su representación en la base $\{\underline{y}_n\}_{n=1}^N$ como:

$$\underline{\tilde{M}} = M \parallel \delta_{m,n} \parallel$$

(II-53d)

$$\underline{\tilde{K}} = \begin{bmatrix} \parallel -2k_r \text{Sen}^2 \frac{\pi m}{N} \delta_{m,n} \parallel & \parallel ik_0 \text{Sen} \frac{2\pi m}{N} \delta_{m,n} \parallel \\ \parallel -ik_0 \text{Sen} \frac{2\pi m}{N} \delta_{m,n} \parallel & \parallel -k_r 2 \cos^2 \frac{\pi m}{N} \delta_{m,n} \parallel \end{bmatrix} \begin{matrix} k_r = k_1 + k_2 \\ k_0 = k_1 - k_2 \\ m = 1, 2, \dots, N/2 \end{matrix}$$

Como en la sección anterior, el producto $\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{M}}^{-1}$ no es diagonal, de modo que nos trasladaremos a la base de los modos normales. Los resultados que se obtienen son los siguientes:

Eigenvalores:

$$(II-54a) \quad E_n^{\pm} = (\omega_n^{\pm})^2 = \frac{k_r}{M} \left[-1 \pm \sqrt{1 - \left\{ 1 - \left(\frac{k_0}{k_r} \right)^2 \right\} \text{Sen}^2 \frac{2\pi n}{N}} \right]$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

Matriz de eigenvalores.

$$(II-54b) \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \parallel E_n^+ \delta_{m,n} \parallel & \parallel 0 \parallel \\ \parallel 0 \parallel & \parallel E_n^- \delta_{m,n} \parallel \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, 3, \dots, N/2$$

Matriz de diagonalización.

$$(II-55) \quad D = \begin{bmatrix} (a_n^+)_{m,n} \delta_{m,n} \left\| \frac{2ik_0 \sin \frac{\pi n}{N} \cos \frac{\pi n}{N}}{2k_r \cos^2 \frac{\pi n}{N} + M E_n^+} (a_n^+)_{n,m} \delta_{m,n} \right\| \\ (a_n^-)_{m,n} \delta_{m,n} \left\| \frac{2ik_0 \sin \frac{\pi n}{N} \cos \frac{\pi n}{N}}{2k_r \cos^2 \frac{\pi n}{N} + M E_n^-} (a_n^-)_{n,m} \delta_{m,n} \right\| \end{bmatrix}$$

donde

$$(II-56) \quad (a_n^\pm)_n = \sqrt{\frac{2k_r \cos^2 \frac{\pi n}{N} + M E_n^\pm}{(2k_r + 2M E_n^\pm) M}}$$

y

$$(II-57) \quad (a_n^\pm)_{n+N/2} = \frac{2ik_0 \sin \frac{\pi n}{N} \cos \frac{\pi n}{N}}{2k_r \cos^2 \frac{\pi n}{N} + M E_n^\pm} (a_n^\pm)_n$$

La matriz $\bar{G}$ y las soluciones a la ecuación de movimiento en la base de los modos normales $\bar{f}_m(t)$, son idénticas a las de la sección anterior, tomando como frecuencias angulares de oscilación los valores (II-54a)

Las soluciones en la base de Fourier tienen la forma - - (II-52) y sus coeficientes son:

$$B(n,r,s,t-t_0) = \left[(a_n^+)_{r,n} (a_n^+)_{s,n} \frac{\sin \omega_n^+(t-t_0)}{\omega_n^+} + (a_n^-)_{r,n} (a_n^-)_{s,n} \frac{\sin \omega_n^-(t-t_0)}{\omega_n^-} \right] M$$

Finalmente del paso al límite cuando $k_1 \rightarrow k_2 = k$ tenemos:

$$\lim_{k_1 \rightarrow k} E_n^+ = -(\omega_n)^2$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow k} E_n^- = -(\omega_{n+1/2})^2$$

$$\lim_{k_1 \rightarrow k} D_{m,n} = \left\| \delta_{m,n} \frac{1}{\sqrt{M}} \right\|$$

La solución se convierte en la de una latiz simple. Cuando $k_1 \rightarrow 0$ se reduce a la de un conjunto de osciladores armónicos desacoplados.

II.9.- Latiz Infinita. - En la sección (II-5) estudiamos una latiz simple (con interacción a primeros vecinos, masas y resortes iguales y sin fricción), con un número finito N de masas. - Aquí trabajaremos con una latiz simple pero con un número de masas infinito.

Las ecuaciones algebraico diferenciales acopladas que corresponden a una latiz infinita son,

$$(II-58) \quad M \ddot{f}_n(t) = k [f_{n+1}(t) - 2f_n(t) + f_{n-1}(t)] \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$$

Para desacoplar estas ecuaciones, emplearemos la transformada de Fourier. Consideraremos las elongaciones $\{f_n(t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ como los coeficientes de Fourier de una función $f(X, t)$ que determinaremos a través de una síntesis de Fourier (I-224) y una vez conocida esta función, retornaremos a las funciones originales $f_n(t)$ mediante un análisis

sis de Fourier (I-22b).

Empleando (I-22b), su segunda derivada e identidades trigonométricas, la ecuación (II-58) se convierte en:

$$(II-59a) \quad \ddot{f}(x, t) = -\omega^2(x) f(x, t) \quad ; x \in (-\pi, \pi]$$

con

$$(II-59b) \quad \omega(x) = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \left| \text{Sen } \frac{x}{2} \right|$$

Vemos que el método de transformación desacopla las ecuaciones y nos permite escribir las soluciones de (II-59) como una función de X por una función de t . En t la función por determinar satisface una ecuación diferencial ordinaria cuyas soluciones son

$$(II-60) \quad f(x, t) = f(x, t_0) \cos[\omega(t-t_0)] + \dot{f}(x, t_0) \text{sen}[\omega(t-t_0)] \omega^{-1}$$

donde $f(x, t_0)$ y $\dot{f}(x, t_0)$ están determinadas por las condiciones iniciales $\{f_n(t_0)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\dot{f}_n(t_0)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ a través de (I-22b) y su primera derivada.

Estas soluciones tienen una forma semejante a la de una latiz simple finita (II-19a) aunque ahora tenemos un continuo de modos normales y de frecuencias angulares $\omega(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Esto define la primera zona de Brillouin (Fig II-7). Se ve que $\omega(X)$ no es proporcional a X , entonces el medio es dispersivo, esto es, señales de frecuencia diferente se propagan con diferente velocidad.

Una vez determinadas las soluciones $F(X, t)$ recobramos las soluciones $F_n(t)$ mediante el análisis de Fourier aplicado a (II-60)

$$(II-61) \quad F_n(t) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(t_0) \int_{-\pi}^{\pi} dX \cos[\omega(t-t_0)] e^{i(m-n)X} \\ + (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{F}_m(t_0) \int_{-\pi}^{\pi} dX \omega^{-1} \sin[\omega(t-t_0)] e^{i(m-n)X}$$

La integral del primer término multiplicada por el factor $(2\pi)^{-1}$ es igual a la función de Bessel (véase Ref I')

$$(II-62) \quad \dot{G}_{n,m}(t-t_0) = 2\pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} dX \cos[\omega(t-t_0)] e^{i(m-n)X} = J_{2(m-n)}(2\sqrt{\frac{k}{M}}(t-t_0))$$

La integral del segundo término multiplicada por el factor $(2\pi)^{-1}$ es igual a la integral sobre el tiempo de la función de Bessel anterior y puede ser desarrollada explícitamente a través de series de Taylor. Con los resultados anteriores, podemos escribir la expresión (II-61) como

$$(II-63) \quad F_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{G}_{n,m}(t-t_0) F_m(t_0) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{n,m}(t-t_0) \dot{F}_m(t_0)$$

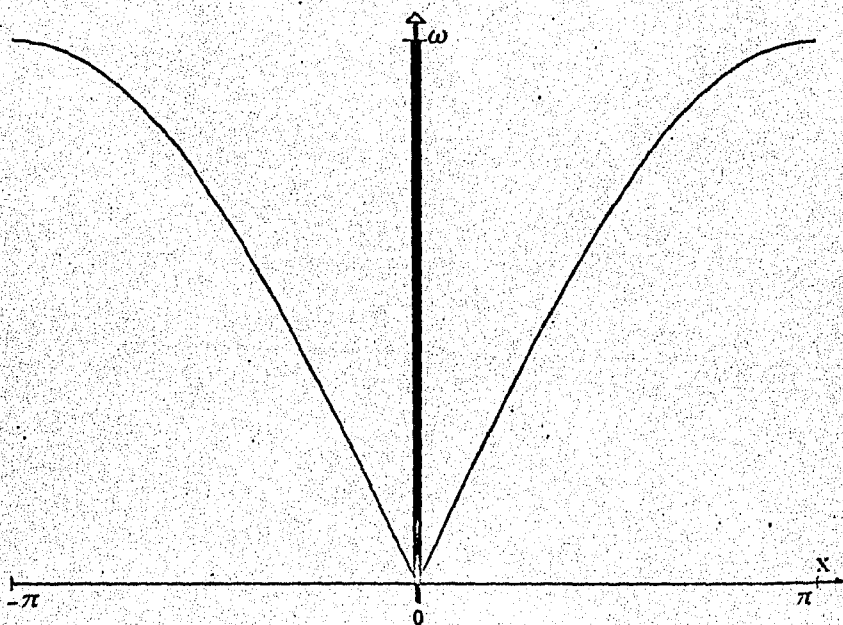


Fig.(II-7).

Primera zona de Brillouin para una latiz monoatómica infinita con interacción a primeros vecinos.

o en forma vectorial

$$(II-64) \quad \underline{f}(t) = \underline{G}(t-t_0) \underline{f}(t_0) + \underline{G}(t-t_0) \dot{\underline{f}}(t_0).$$

En la figura (II-8) se ha graficado para $n=0$, $m \in \mathbb{Z}$ y t en el rango positivo, una latiz inicialmente en reposo y con una masa con elongación unitaria. La figura muestra cómo progresa el disturbio en el tiempo. Se observa que la propagación es simétrica con respecto a la masa perturbada inicialmente, esto es un resultado de la propiedad

$$J_{2m}(y) = J_{-2m}(y) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Nótese que al tiempo $t = t_0$; $J_{2(m-n)}(y) = 0$ para toda $m-n$ excepto para $J_0(y) = 1$ este resultado satisface automáticamente la ecuación (II-64).

Resulta paradójico que exista una velocidad de propagación infinita en la latiz, sin embargo para y pequeña se obtiene aproximando por serie de Taylor,

$$y_{2k}(y) = \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2k}}{2k!}$$

entonces cada masa de la latiz recibe la información de cualquier disturbio en la latiz instantáneamente. Una latiz física con resortes masivos, por supuesto, presentará siempre

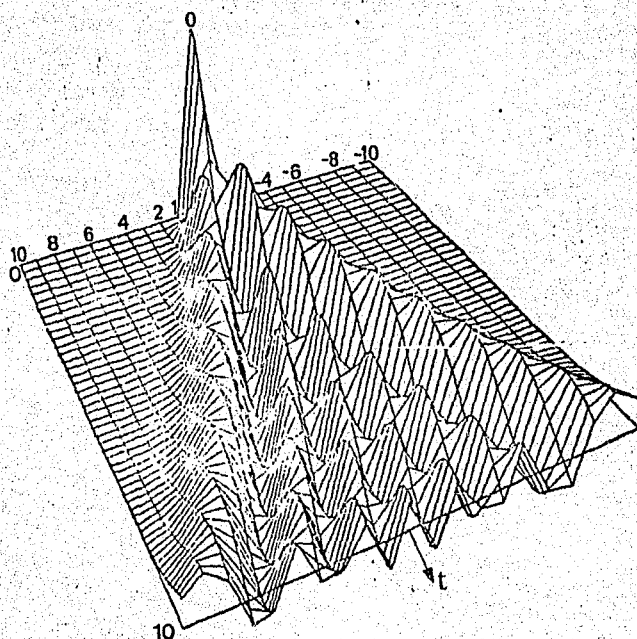


Fig.(II-8).

Se muestra la evolución en el tiempo de una latiz infinita, para $n=0$, $m \in \mathbb{Z}$ y t positivo. Inicialmente, todas las masas están en reposo y en su posición de equilibrio, salvo una que tiene elongación unitaria. Nótese que la propagación es simétrica con respecto a la masa perturbada.

una velocidad de propagación finita.

La naturaleza de las funciones de Bessel, permite establecer una forma para medir la velocidad de propagación. Como la figura (II-8) sugiere, a medida que las masas están más alejadas del foco de disturbio, las elongaciones de sus oscilaciones son menores y se atrasan con respecto a las de la masa central. Este cambio de respuesta sucede a un tiempo dado aproximadamente en el primer cero de la función de Bessel. Para grandes ordenes de N la primera raíz de $J_n(y)$ tiene un valor asintótico (Ref 2)

$$N + 1.8557571 N^{1/3} + 1.033150 N^{-1/3} + \dots$$

Una masa situada a $|N|$ unidades de cualquier lado del disturbio, para N muy grande, cruza el punto de equilibrio al tiempo $\tau = N \left(\frac{N}{M} \right)^{-1/2}$ como se puede ver de (II-62) y define una velocidad de propagación $V = \left(\frac{N}{M} \right)^{1/2}$ en unidades de separación interparticular por unidad de tiempo.

Una justificación diferente a esta estimación ha sido dada por Weinstock (ref 9), Merchant y Brill (ref 19) y J. Jones (ref 20).

3.- Defecto de masa. - Consideremos una latiz simple con interac-

ción sólo a primeros vecinos, que tiene una masa diferente - m en su estructura. La ubicación de esta masa defecto o extraño, no es relevante por el carácter cíclico de la latiz, - entonces, el hecho de especificar la posición del extraño, no condiciona la forma de la solución de las ecuaciones de movimiento. Para simplificar el desarrollo matemático, consideraremos que el defecto de masa está colocado en la posición N .

Las ecuaciones de movimiento son

$$(II-65) \quad \ddot{f}_n(t) = \frac{k}{M} \left(1 - \frac{M}{m} \delta_{N,n} \right) (f_{n+1}(t) - 2f_n(t) + f_{n-1}(t))$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

donde M es la masa de las partículas iguales y m es la masa del extraño.

Las N ecuaciones diferenciales anteriores, se encuentran acopladas, es necesario establecer un mecanismo que las transforme en un nuevo conjunto de expresiones, de preferencia no acopladas. El método de solución que desarrollaremos, consistirá en examinar combinaciones lineales de las N -- coordenadas, que varíen armónicamente en el tiempo.

$$(II-66) \quad \bar{f}_r(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_{rn} f_n(t)$$

o sea, se busca un nuevo conjunto de continuas $\{\bar{F}_r\}_{r=1}^N$, llamadas coordenadas normales de la latiz, que satisfagan ecuaciones de la forma

$$(II-67) \quad \ddot{\bar{F}}_r(t) = -\omega_r^2 \bar{F}_r(t) \quad \omega_r \geq 0$$

donde los posibles valores ω_r son las frecuencias angulares de oscilación.

Derivando dos veces respecto al tiempo la expresión -- (II-66) y haciendo uso de (II-65) y (II-67) tenemos

$$(II-68) \quad \frac{k}{M} \sum_{n=1}^N \alpha_{rn} \left(1 - \frac{M}{m} \delta_{Nn}\right) (f_{n+1}(t) - 2f_n(t) + f_{n-1}(t)) = -\omega_r^2 \sum_{n=1}^N \alpha_{rn} f_n(t)$$

definamos un nuevo parámetro β_{rn} como:

$$(II-69) \quad \beta_{rn} = \alpha_{rn} \frac{k}{M} \left(1 - \frac{M}{m} \delta_{Nn}\right),$$

corriendo los índices por separado en el lado izquierdo de la expresión (II-68)

$$(II-70) \quad \sum_{n=1}^N (\beta_{r,n-1} - 2\beta_{rn} + \beta_{r,n+1}) f_n(t) = -\omega_r^2 \sum_{n=1}^N \alpha_{rn} f_n(t)$$

con $\beta_0 = \beta_N$ y $\beta_{N+1} = \beta_1$. Esta ecuación representa --

una combinación lineal de las coordenadas $\{f_n\}_{n=1}^N$ y dado que éstas son linealmente independientes, se debe satisfacer:

$$(II-71) \quad \beta_{r,n-1} - 2\beta_{r,n} + \beta_{r,n+1} = -\omega_r^2 \alpha_{r,n} \quad n=1,2,3,\dots,N$$

haciendo uso de (II-69) encontramos

$$(II-72) \quad \beta_{r,n+1} = 2X_r \beta_{r,n} - \beta_{r,n-1}$$

$$(II-73) \quad \beta_{r,n-1} = (2X_r - \xi_r) \beta_{r,n} - \beta_{r,1}$$

donde

$$(II-74) \quad 2X_r = 2 - \omega_r^2 \frac{M}{k}$$

y

$$(II-75) \quad \xi_r = \omega_r^2 \frac{m-M}{k}$$

La identidad (II-72) permite determinar el valor de cualquier parámetro $\beta_{r,n}$ en función de sus dos antecedentes. -- Empleandola repetidamente, podremos establecer el valor de --

cualquier parámetro $\beta_{r,n}$ en función de $\beta_{r,1}$ y $\beta_{r,n}$.
La serie de resultados que se tiene es la siguiente:

$$\begin{aligned} \beta_{r,2} &= (2X_r) - \beta_{r,n} \\ \beta_{r,3} &= (4X_r^2 - 1)\beta_{r,1} - (2X_r)\beta_{r,n} \\ \beta_{r,4} &= (8X_r^3 - 4X_r)\beta_{r,1} - (4X_r^2 - 1)\beta_{r,n} \\ \beta_{r,5} &= (16X_r^4 - 12X_r^2 + 1)\beta_{r,1} - (8X_r^3 - 4X_r)\beta_{r,n} \end{aligned}$$

Nótese que los polinomios en X_r que van apareciendo, son los de Chebyshev de segunda especie $U_n(X_r)$ - (vease (I-46)) entonces, la fórmula de recurrencia para $\beta_{r,n}$ es:

$$(II-77) \quad \beta_{r,n+1} = U_n(X_r)\beta_{r,1} - U_{n-1}(X_r)\beta_{r,n}$$

y la relación de recurrencia para $U_n(X_r)$ es:

$$(II-78) \quad U_n(X_r) = 2X_r U_{n-1}(X_r) - U_{n-2}(X_r)$$

En la literatura referente a polinomios ortogonales, se encuentra la expresión: (vease (I-47))

$$(II-79) \quad U_n(X_r) = \frac{\text{Sen}[(n+1) \arccos X_r]}{\text{Sen}[\arccos X_r]}$$

que será de utilidad en cálculos posteriores.

Determinemos ahora los valores permitidos para el parámetro X_r . De (II-77) valuado en $n = N-1$

$$(II-80a) \quad U_{N-1} \beta_{r,1} - [U_{N-2} + 1] \beta_{r,N} = 0$$

de (II-77) valuado en $n = N-2$ y (II-73)

$$(II-80b) \quad [U_{N-2} + 1] \beta_{r,1} + [\xi - 2X_r - U_{N-3}] \beta_{r,N} = 0$$

El par de ecuaciones (II-80) es consistente si y solo si el determinante de los coeficientes se anula; haciendo uso - de esta propiedad y despues de una serie de arreglos trigonométricos se obtiene:

$$(II-81a) \quad \frac{M-m}{M} \tan \frac{\theta_r}{2} = \tan \frac{N\theta_r}{2}$$

$$(II-81b) \quad \text{Sen } \frac{N\theta_r}{2} = 0$$

donde

$$(II-82) \quad \cos \theta_r = X_r$$

Las condiciones anteriores dan los valores permitidos de θ_r y a partir de estos, empleando (II-74) y (II-82), quedan

determinadas las frecuencias angulares de oscilación; notemos que el único agente que condiciona los valores de Θ_r es el coeficiente $\frac{M-m}{M}$. Si no existe defecto de masa, (II-81a) - y (II-81b) se convierten en una misma ecuación y las frecuencias ω_r son las de una latiz simple con interacción sólo a primeros vecinos.

Si $M \neq m$ existen N soluciones para Θ_r ; aproximadamente la mitad están dadas por (II-81a) y el resto por -- (II-81b). Exploremos la posibilidad de existencia de soluciones Θ_r complejas; notemos que los polinomios de Chebyshev de segunda especie introducidos en esta sección, son ortogonales si $\chi_r = \cos \Theta_r$ tiene como intervalo de valores permitidos a $[-1, 1]$, por lo tanto, aunque Θ_r sea complejo, -

$\cos \Theta_r$ debe permanecer real y menor que la unidad; consideremos que Θ_r es de la forma $\Theta_r = \gamma_r + i \zeta_r$ entonces:

$$\cos \Theta_r = \cos \gamma_r \cosh \zeta_r - i \sin \gamma_r \sinh \zeta_r; \gamma_r, \zeta_r \in \mathbb{R}$$

Para que $\cos \Theta$ sea real, tenemos $\gamma = k\pi$, donde K es un entero, además, como $\cosh \zeta_r \geq 1$ el resultado sólo será menor a la unidad si $\cos \gamma_r < 0$, luego entonces γ_r es un múltiplo impar de π ; hemos encontrado finalmente, que de existir una solución compleja para el parámetro Θ_r , ésta debe ser de la forma

$$(II-83) \quad \Theta_r = K\pi + i \zeta_r$$

Con K un entero impar y ζ_r un número real.

Substituyamos (II-83) en (II-81a) y notemos que se presentan dos situaciones.

Para N non:

$$(II-83a) \quad \frac{M-m}{M} \coth h \frac{\zeta_r}{2} = \coth h \frac{N\zeta_r}{2}$$

Para N par:

$$(II-83b) \quad \frac{M-m}{M} \coth h \frac{\zeta_r}{2} = \tanh h \frac{N\zeta_r}{2}$$

En el caso de N non existe una solución compleja si - -
 $\frac{1}{N} < \frac{M-m}{M} < 1$, o equivalentemente si $m < M \frac{N-1}{N}$
 el valor de $\Theta_r = \pi + i \zeta_r$ está dado por el punto de cruce
 en la figura (II-9); las soluciones para Θ_r real se encuentran mediante la figura (II-10) de (II-81a) y la ecuación - -
 (II-81b); en total, para una latiz con defecto de masa tendremos tener siempre N soluciones.

En el caso de N par existe una solución compleja si - -
 $0 < \frac{M-m}{m} < 1$, o sea $m < M$, (vease Fig II-11), las - -
 soluciones reales se encuentran de la gráfica (II-11) de - -
 (II-81a) y la ecuación (II-81b).

Una vez que hemos determinado todos los posibles valores -
 para el ángulo Θ_r y por lo tanto todos los valores de las

frecuencias angulares de oscilación, analizaremos el significado físico de estos resultados.

Para cualquier valor de la masa defecto $m \neq M$, - empleando (II-81b) se obtienen $N/2$ frecuencias angulares si N es par, y $(N+1)/2$ frecuencias angulares si N es impar; entonces, la mitad de las ω_r coinciden con las de una latiz simple con interacción sólo a primeros vecinos, esto implica que la latiz no se ve afectada por el extraño - en aproximadamente la mitad de los modos normales de vibración, esto sólo puede suceder si la masa defecto no se mueve en estos modos normales, así que, cuando la posición del extraño coincide con un nodo de un modo normal de vibración, - la frecuencia angular de oscilación correspondiente, no se altera. Contrariamente, si la masa defecto no coincide con la posición de un nodo, la frecuencia angular de oscilación aumenta o disminuye dependiendo del valor del cociente $\frac{M}{m}$.

Si la masa defecto es mayor que las masas de la latiz, - las frecuencias angulares que se afectan son menores con respecto a las de una latiz simple; de las figuras (II-10) y - (II-11) podemos ver que, a medida que la diferencia de masas es mayor, las frecuencias disminuyen y a medida que $\frac{M}{m}$ tiende a la unidad las frecuencias coinciden con las de una latiz simple.

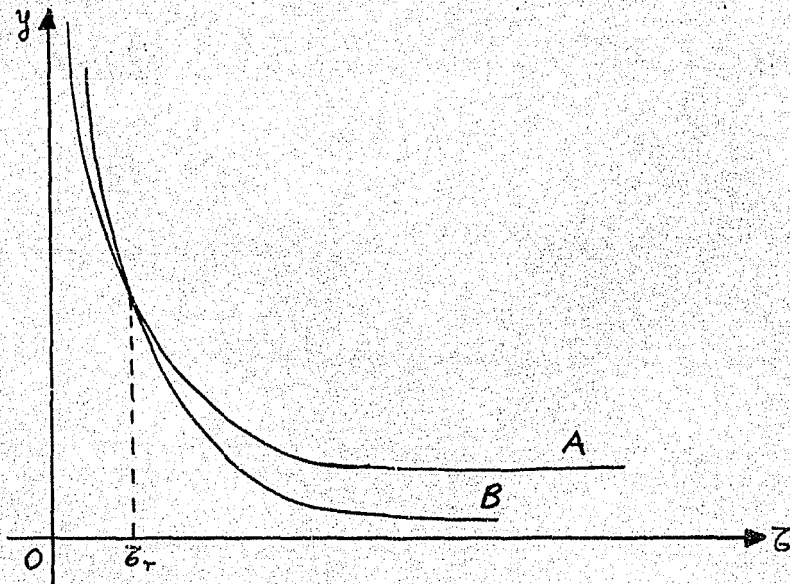


Fig. II- 9

La curva A corresponde a la ecuación $y = \coth \frac{Nz}{2}$
 La curva B corresponde a la ecuación $y = \frac{M-m}{M} \coth \frac{z}{2}$
 y la solución a la ecuación (II-83a) es (z_r)

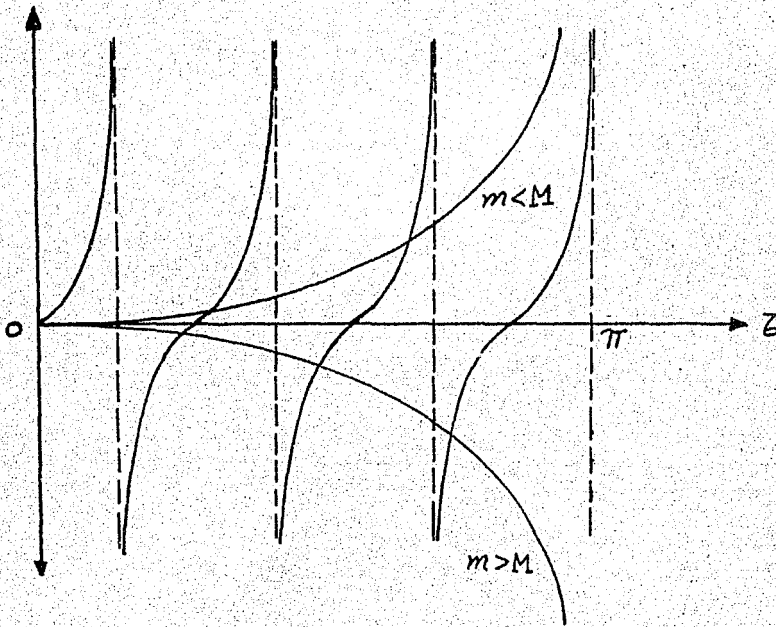


Fig. II-10

Los puntos de cruce corresponden a las soluciones reales para N impar. (El gráfico se muestra para $N = 7$)

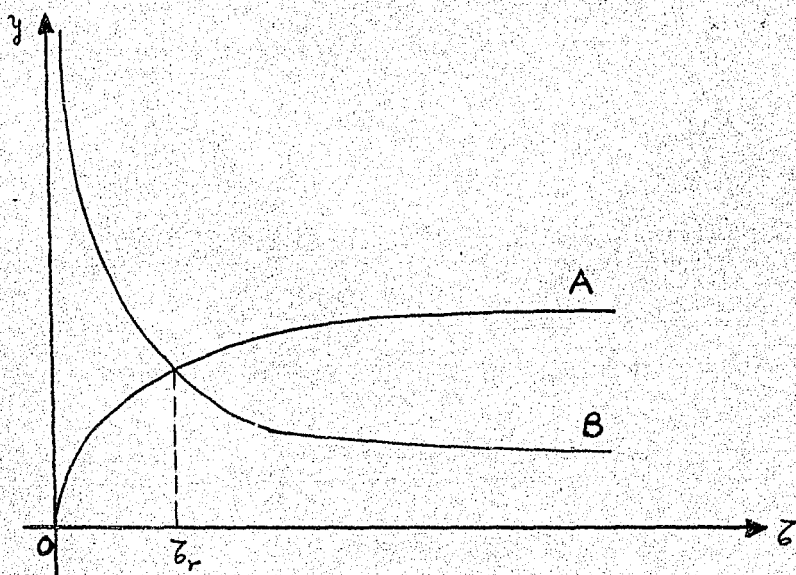


Fig. II-11

La curva A corresponde a la ecuación $y = \tanh \frac{Nz}{2}$
 la curva B corresponde a $y = \frac{M-m}{M} \coth \frac{z}{2}$
 y la solución a la ecuación (II-83b) es z_r

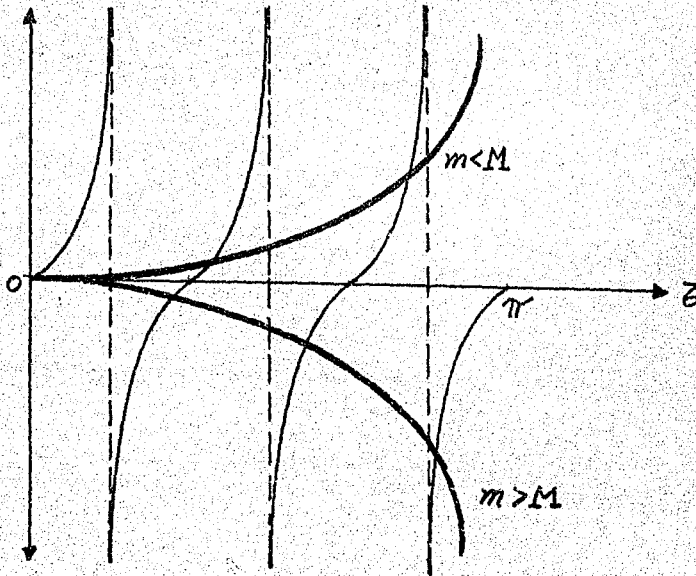


Fig. II-12

Los puntos de cruce corresponden a las soluciones reales para N par. (El gráfico se muestra para $N = 6$)

Si $m < M$, las ω_r para los modos normales que no tienen nodos en la posición de la masa defecto, son mayores que las de una latiz simple; la frecuencia de oscilación mas alta, está dada por la solución compleja $\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{M}} \cosh \frac{\zeta_r}{2}$ $\zeta_r \in \mathbb{R}$, si esta existe.

En este capítulo hemos desarrollado y aplicado mecanismos de solución para algunos tipos de sistemas mecánicos acoplados. Compararemos nuestros resultados con los presentados en las referencias bibliográficas.

Fan Y. Chen (Ref. 3) estudia una latiz simple con interacción a primeros vecinos y con extremos libres; plantea las ecuaciones (II-58) para $N = 2, 3, \dots, N-1$ y las condiciones adicionales

$$M\ddot{f}_1 = k(f_2 - f_1), \quad M\ddot{f}_N = k(f_{N-1} - f_N),$$

propone una solución particular

$$f_n = A_n e^{i\omega t},$$

para reducir el problema a un conjunto de ecuaciones algebraicas. Encuentra las frecuencias para los modos normales

$$\omega_m^2 = \frac{4k}{M} \operatorname{Sen}^2 \frac{(m-1)\pi}{2N}$$

y una expresión para los desplazamientos $f_n(t)$ de la forma

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \alpha_k f_k(t)$$

En la referencia (4) se plantea la ecuación de movimiento (II-58) ($n = 1, 2, \dots, N$; $f_0 = f_{N+1} = 0$) para una latiz simple con extremos fijos e interacción a primeros vecinos; - se discuten y aceptan como válidas las siguientes suposiciones:

1) Es posible dar a las N masas desplazamientos iniciales tales que, partiendo del reposo, todas las masas oscilen con la misma frecuencia.

2) A mayor número de modos en la configuración inicial corresponde una frecuencia mayor, y de ahí una mayor energía, cuando las amplitudes máximas son iguales. Para un cierto número de modos hay una y sólo una frecuencia normal. El número de - nodos intermedios es igual a $(N-1)$.

Para que la latiz oscile desde un principio sólo en un modo normal m específico, se encuentra que las condiciones - iniciales para los desplazamientos, f_n^m , deben ser de la forma

$$f_n^m(t_0) = A_m \text{Sen} [m n \pi / (N+1)]$$

estas se substituyen en (II-58) y se determinan las frecuencias angulares para los modos normales.

$$(II-84) \quad \omega_m^2 = 4 \frac{k}{M} \text{Sen}^2 \frac{m \pi}{2[N+1]} \quad m = 1, 2, \dots, N$$

En la referencia (5), J. D. Louck, considera una latiz - simple con interacción a primeros vecinos y con extremos ligados a paredes rígidas mediante resortes diferentes K y K' plantea la ecuación (II-58) para $n = 2, 3, \dots, (N-1)$ y las condiciones adicionales

$$M \ddot{F}_1 = -(K+k)F_1 + kF_2$$

$$M \ddot{F}_N = -(K'+k)F_N + kF_{N-1}$$

propone soluciones de caracter oscilatorio y al substituirse obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones de diferencias que -- resuelve por un método iterativo. Finalmente llega a la ex-- presión

$$F_n^m(t) = A_{nm} \cos(\omega_m t + \delta_m)$$

para la forma de oscilación de cada masa en un modo normal -- m específico. Las frecuencias angulares se dan en fun-- ción de un ángulo Θ_m que a su vez depende del valor -- K y K' .

$$\omega_m^2 = 4 \frac{k}{M} \sin^2 \frac{\Theta_m}{2}$$

Para el caso particular $K=K'=k$, encuentra las fre-- cuencias angulares (II-84)

Si en el modelo de latiz simple periódica se considera

N par y se escogen los modos normales que tengan nodos en las masas 1 y $(\frac{N}{2}+1)$, se tienen las frecuencias angulares para una latiz simple con extremos fijos

$$\omega_m^2 = 4 \frac{k}{M} \text{Sen}^2 \frac{m\pi}{2(\frac{N}{2}+1)} \quad m=1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

Entonces, nuestro tratamiento incluye los resultados de la referencia (4) y (5).

Wallis, (Ref. 6) estudia una latiz diatómica con interacción a primeros vecinos y extremos libres. Plantea las ecuaciones de acoplamiento en el espacio de configuración, propone una solución exponencial y encuentra un conjunto de ecuaciones algebraicas. Las frecuencias angulares ω_m que reporta son:

$$\omega_m^2 = \frac{2M_T k}{(M_T^2 - M_D^2)} \left[1 \pm \sqrt{\cos^2 \frac{m\pi}{N} + \left(\frac{M_D}{M_T}\right)^2 \text{Sen}^2 \frac{m\pi}{N}} \right]$$

$$m=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

$$\omega_0^2 = 0, \quad \omega_s^2 = \frac{2M_T k}{(M_T^2 - M_D^2)}$$

Además estudia efectos de superficie y analiza la rama óptica y acústica.

Drillovin, (Ref. 7) trabaja con una latiz diatómica cerrada con interacción a primeros vecinos, plantea las ecuaciones

ciones de movimiento en el espacio de configuración y propias soluciones de carácter oscilatorio. Las frecuencias angulares que encuentra son:

$$\omega_m^2 = \frac{2M_V k}{(M_V^2 - M_D^2)} \left[1 \pm \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi m}{N} + 2 \left(\frac{M_D}{M_V} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi m}{N}} \right]$$

$$m = 1, 2, \dots, N$$

En este capítulo se plantea la ecuación de movimiento para la latiz diatómica con interacción a J -ésimos vecinos en el espacio fase y se encuentran las frecuencias angulares

ω_m . Si se emplea (II-46a) para primeros vecinos, el resultado coincide con el obtenido por Brillouin. Por otro lado vemos que se tienen también los modos consignados por Wallis con excepción de ω_s que corresponde a un efecto de superficie cuando la latiz termina en una masa menor. Entonces, a diferencia del modelo monoatómico, media latiz cerrada diatómica, no corresponde a una latiz diatómica con extremos libres.

Chaturvedi y Bajal (Ref. 8) emplean el método de Louch para estudiar una latiz molecular y una diatómica con interacción a primeros vecinos, sujetas en los extremos por resortes de constantes arbitrarias K y K' . Los resultados que obtienen para $K = K' = 0$ coinciden con los de Wallis y cuando consideran todas las masas y resortes iguales, llegan a los resultados de Louch.

Weinstock (Ref. 9) estudia una latiz semiinfinita con las condiciones

$$\underline{f(t_0)} = 0, \dot{f}_n(t_0) = 0, n=1, 2, \dots; \dot{f}_0(t) = V.$$

Plantea las ecuaciones de movimiento (II-58) para $n=1, 2, \dots$ aplica el cambio de variable $S_n = f_n - Vt$ e introduce -- una función auxiliar $q(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) e^{in\theta}$. Las soluciones que obtiene son:

$$(II-85) \quad f_n(t) = Vt - \frac{V}{\pi} \int_0^{\pi} \Omega^{-1} \cot \frac{\theta}{2} \sin \Omega t \sin n\theta d\theta$$

$$(II-86) \quad \dot{f}_n(t) = 2nV \int_0^{2\omega t} y^{-1} J_{2n}(y) dy \quad \forall n \neq 0$$

donde J es la función de Bessel de segundo grado, $\Omega = 2\omega \sin \frac{\theta}{2}$ y $n = 1, 2, \dots$

En la referencia (10) se utiliza la expresión

$$f_n = \frac{V}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2n+2k+1}(2\omega t)$$

encontrada por Monshie e Ingard (Ref. 21) para el problema de Weinstock (Ref. 9) y se encuentra la ecuación (II-86) empleando únicamente propiedades de la función de Bessel de 2º grado.

A. H. Nayfeh (Ref. 11) considera el mismo problema substituyendo la condición $\dot{f}_0(t) = V$ por $\dot{f}_0(t) = \Phi(t)$

con $\Phi(t)$ una función arbitraria. Plantea la ecuación - - (II-58) con $n=1, 2, \dots$ y empleando la transformada de Laplace así como propiedades de la función de Bessel encuentra la expresión

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Omega \sin n\theta \cot \frac{\theta}{2} \left(\int_0^t \Phi(t-z) \sin \Omega z dz \right) d\theta$$

con $\Omega = 2\omega \sin \frac{\theta}{2}$

que se reduce a la solución de Weinstock cuando $\Phi(t) = V$

El mismo Nayfeh (Ref. 12) analiza cual debería ser la fuerza $F(t)$ que provoque el comportamiento de la primera masa en la latiz de la referencia (11). Encuentra una expresión para esta fuerza y muestra que en particular, cuando $\Phi(t) = V$ se tiene

$$F(t) = \sqrt{kM} V \int_0^t y^{-1} J_1(y) dy$$

En este capítulo nosotros trabajamos con una latiz infinita, planteamos las ecuaciones de movimiento en el espacio fase y encontramos las frecuencias ω_m . Aparentemente el problema de una latiz semiinfinita es totalmente ajeno al nuestro, sin embargo el tratamiento matemático que nosotros hicimos fué inspirado en un principio por las referencias (9) a (12).

La referencia (4) considera cualitativamente una latiz simple con una impureza de masa y muestra el comportamiento de las frecuencias angulares cuando se van cambiando las masas originales por masas iguales a la impureza hasta formar una cadena diatómica con extremos fijos.

Weinstock (Ref. 13) estudia la impureza de masa en una latiz simple con interacción a primeros vecinos. Considera extremos fijos, uno fijo y uno libre, libres y la latiz cerrada; plantea las ecuaciones de movimiento (II-65) y encuentra las frecuencias ω_m para cada tipo de condiciones a la frontera. En particular, cuando considera la latiz cíclica, sus resultados coinciden con los nuestros.

Finalmente, en la referencia (14) se considera el defecto de resorte en una latiz molecular, se utiliza la función de Green y en general una herramienta matemática complicada para su solución. Se encuentra que todas las frecuencias ω_m de los modos normales simétricos al extraño, corresponden a las de una latiz sin el mismo, y todos los modos antisimétricos al extraño, si cambian su frecuencia ω_m . También muestra que existe un isomorfismo entre una latiz molecular con defecto de resorte y una latiz diatómica con defecto de masa.

SISTEMAS MECANICOS ACOPLADOS CON EFECTOS DE VISCOSIDAD

En el capítulo precedente se estableció el mecanismo para resolver las ecuaciones de movimiento de una latiz en el espacio fase y se usó en el caso de la latiz simple, la atómica y la molecular. Presentaremos ahora la inclusión de viscosidad en estos sistemas.

III.1.- Latiz simple amortiguada.- Si las masas de una latiz están sujetas a fuerzas de fricción proporcionales a su velocidad, $(-G_n \dot{f}_n(t), G_n > 0)$, las ecuaciones de movimiento son (II-7) las cuales ahora reescribimos como:

$$(III-1) \quad A \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -K & -GM^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{f}(t) \\ \underline{g}(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \underline{h}$$

que ya ha aparecido en (II-9)

Los operadores K y M^{-1} son los empleados en la sección (II-6), (interacción a J-ésimos vecinos), y el operador G está representado en la base canónica por la matriz $\underline{G} = G \underline{1}$, múltiplo de la unidad, es decir $G_n = cte.$ En este caso K, M^{-1} y G conmutan entre sí.

Apliquemos una transformación de semejanza al operador A en su forma (III-1) mediante una matriz $\underline{D}$ de 2×2 que permita trasladarlo a una base donde tenga una forma diagonal

$$(III-2) \quad \underline{D} A = E \underline{D}$$

donde E es un operador formado por una matriz diagonal de 2×2 elementos (operadores) E^+ , E^- . Como los operadores K , M , y G conmutan entre sí, el procedimiento es el mismo que para el caso de matrices de 2×2 con elementos numéricos. Los eigenvalores y la matriz $\underline{D}$, determinados por los métodos usuales, son:

$$(III-3a) \quad E^{\pm} = \frac{-GM^{-1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM^{-1}}{2}\right)^2 - KM^{-1}} = \frac{-GM^{-1}}{2} \pm \sqrt{U}$$

$$(III-3b) \quad \underline{D} = \begin{bmatrix} E^+ E^- & E^+ E^+ \\ M^- E^- & M^- E^+ \end{bmatrix}$$

La ecuación de evolución en el tiempo (II-12) es entonces

$$(III-4) \quad \begin{aligned} h(t) &= \exp[At] h(t_0) = \exp[\underline{D} A \underline{D}^{-1} t] h(t_0) \\ &= \underline{D}^{-1} \exp[E t] \underline{D} h(t_0) = G^{\pi}(t-t_0) h(t_0) \end{aligned}$$

Utilizando (III-3a) y (III-3b) llevamos a la forma

$$(III-5) \quad \underline{h}(t) = \begin{bmatrix} \dot{G}^c(t) + CM^{-1}G^c(t) & M^{-1}G^c(t) \\ -KG^c(t) & G^c(t) \end{bmatrix} \underline{h}(t_0) = G^c(t-t_0) \underline{h}(t_0)$$

con

$$(III-6) \quad G^c(t-t_0) = \exp\left[-\frac{1}{2} CM^{-1}t\right] \text{sen } h[\sqrt{U}(t-t_0)](\sqrt{U})^{-1}$$

vemos que solo aparecen potencias enteras y positivas de U

El primer renglón de (III-5) establece las soluciones a las ecuaciones de movimiento en el espacio de configuración:

$$(III-7) \quad \underline{f}(t) = [\dot{G}^c(t) + CM^{-1}G^c(t)] \underline{f}(t_0) + G^c(t-t_0) \underline{\dot{f}}(t_0)$$

Notemos que (III-5), (III-6) y (III-7) son expresiones independientes de cualquier base. La forma explícita de (III-6) - en la base de Fourier es, con la ayuda de los desarrollos de la sección (II-7)

$$(III-8) \quad \tilde{G}(t-t_0) = \left\| e^{-\frac{C}{2M}(t-t_0)} \text{sen} \left(\sqrt{\omega_n^J - \left(\frac{CM}{2}\right)^2} (t-t_0) \right) \left(\omega_n^J - \left(\frac{CM}{2}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \delta_{m,n} \right\|$$

donde ω_n^J son el conjunto de frecuencias propias de una latiz con interacción a J -ésimos vecinos dadas en (II-26). Esta ecuación representa diferentes tipos de movimiento de la latiz en función de los valores ω_n^J . Cuando $\omega_n^J > \frac{C}{2M}$ el movimiento es denominado débilmente amortiguado pues --

(III-5) ; (III-7) representan un movimiento oscilatorio con de-
crecimiento exponencial. Si existe alguna $\mathcal{N}$, pero la cual --

$\omega_n^J = \frac{d}{2M}$ el movimiento es críticamente amortiguado. --
Si $\omega_n^J < \frac{c}{2M}$, el movimiento es sobreamortiguado. En es-
tos dos últimos casos las soluciones son puramente exponencia-
les decrecientes. En vista de que $0 \leq \omega_n^J \leq 2\sqrt{\frac{K}{M}}$
algunos modos normales altos pueden quedar débilmente amorti-
guados mientras que siempre habrá modos normales bajos (al me-
nos ω_0) sobreamortiguados.

En la base canónica el operador $\underline{G}$ tiene como matriz re-
presentativa:

$$\begin{aligned} \text{(III-9)} \quad [\underline{G}(t-t_0)]_{nl} &= (\underline{F} \underline{G} \underline{F}^{-1})_{nl} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{m=1}^N \frac{1}{\omega_m^e} \left\{ \text{Sen} [\omega_m^e (t-t_0) - 2\pi m (l-n)/N] \right. \\ &\quad \left. + \text{Sen} [\omega_m^e (t-t_0) + 2\pi m (l-n)/N] \right\} e^{-\frac{c}{2M}(t-t_0)} \end{aligned}$$

donde las frecuencias efectivas de oscilación son

$$\omega_m^e = \sqrt{(\omega_m^J)^2 - \left(\frac{c}{2M}\right)^2}$$

Conforme avanza el tiempo, la amplitud de las oscilaciones
decrece exponencialmente. La expresión $\underline{G}(t-t_0)$ define la
función de Green del sistema; es real y por en $|l-n|$.

La derivada temporal $\dot{\underline{G}}(t-t_0)$ tiene las mismas propiedades. En consecuencia, disturbios recibidos en $t=t_0$ siguen siendo recorridos, y el efecto en una posición $\underline{l}$ debido a un disturbio en $\underline{n}$ depende sólo de la distancia relativa $|\underline{n}-\underline{l}|$. Para $\underline{l}$ fija (o $\underline{n}$ fija) $[\underline{G}(t-t_0)]_{nl}$ y $[\dot{\underline{G}}(t-t_0)]_{nl}$ son las soluciones fundamentales de la ecuación de movimiento de la latiz amortiguada.

En el límite cuando la viscosidad desaparece, $\zeta \rightarrow 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{G}}(t-t_0)_n &= \frac{\text{Sen}[\omega_n^J(t-t_0)]}{\omega_n^J} \\ \tilde{\underline{f}}_n(t) &= \cos[\omega_n^J(t-t_0)]\underline{f}_n(t_0) + \frac{\text{Sen}[\omega_n^J]t}{\omega_n^J} \dot{\underline{f}}_n(t_0) \\ n &= 1, 2, 3, \dots, N\end{aligned}$$

la solución se reduce a la encontrada en (II-27) para una latiz simple con interacción a J -ésimos vecinos.

III.2.- La latiz forzada y amortiguada.- Sea $\underline{F}_n(t)$ una fuerza que actúa sobre la n -ésima partícula de una latiz simple con interacción a J -ésimos vecinos.

El conjunto $\{\underline{F}_n(t)\}_{n=1}^N$ forma un vector N -dimensional $\underline{F}(t)$ en la base canónica que contribuye a la aceleración.

La ecuación de movimiento es una extensión inhomogénea de - -
(II-9) y (II-10)

$$\text{II-10a)} \quad \underline{A} \underline{h}(t) = \frac{d}{dt} \underline{h}(t) + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{F}(t) \end{pmatrix}$$

En la base de Fourier

$$\text{(III-10b)} \quad \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{h}}(t) - \underline{\dot{\tilde{h}}} - \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{\tilde{F}}(t) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

donde $\underline{\tilde{F}}(t)$ está formado por el conjunto $\{\tilde{F}_n(t)\}_{n=1}^N$ de los coeficientes de Fourier de $F_n(t)$, coordenados de $\underline{F}(t)$ en esta base, y $\underline{\tilde{A}}$ es la matriz que representa al operador $\underline{A}$ en la misma base, formada por las matrices - -

$$\underline{\tilde{K}} = \left\| \sum_k k_x \lambda_n^k \delta_{m,n} \right\|, \underline{\tilde{M}}^{-1} = \underline{M}^{-1} \underline{1} \quad \text{y} \quad \underline{\tilde{C}} = \underline{C} \underline{1}$$

La solución general a una ecuación diferencial inhomogénea como (III-10) es la solución general de la parte homogénea más una solución particular. Dado que ya se tiene la solución de la parte homogénea (III-5), falta solamente encontrar las soluciones particulares $\underline{F}^i(t)$ de la parte inhomogénea; éstas dependen de la forma explícita de $F_n(t)$. Consideremos un caso particular de cierto interés que se presta a solución sencilla. Sea $\underline{F}(t)$ un vector formado por - fuerzas de carácter oscilatorio, todas con la misma frecuencia ω^F

$$(III-11) \quad \underline{F}(t) = \underline{F} e^{i\omega^F t} \quad \omega^F = cte, \underline{F}_n = cte$$

La fuerza aplicada sobre la N -ésima partícula es:

$$(III-12) \quad F_n(t) = F_n e^{i\omega^F t}$$

Las componentes de su transformada de Fourier son

$$(III-13) \quad \tilde{F}_n(t) = \tilde{F}_n e^{i\omega^F t}$$

La solución particular de la parte inhomogénea que encontraremos para (III-10b) será la solución estacionaria. El movimiento de la latiz tiende asintóticamente a esta solución cuando las oscilaciones debidas a posibles condiciones iniciales (soluciones de la ecuación homogénea) decaen a cero.

Se propone una solución de la forma

$$(III-14) \quad \tilde{F}_n(t) = \tilde{A}_n e^{i\omega^F t}$$

la cual substituida en (III-10b) con la ayuda de (II-8) conduce a N ecuaciones de la forma

$$(III-15) \quad -M(\omega^F)^2 \tilde{A}_m + i\omega^F \zeta \tilde{A}_m - \sum_k k_x \lambda_m^2 \tilde{A}_m - \tilde{F}_m = 0$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N$$

de donde

$$(III-16) \quad \tilde{A}_m = \frac{\tilde{F}_m}{M(\omega^F)^2 - iG\omega^F + \sum_k k_k \lambda_m^2}$$

Empleando (II-26) y el hecho de que $\tilde{A}_m$ es compleja obtenemos

$$(III-17) \quad |\tilde{A}_m| = |\tilde{F}_m| M^{-1} \{ [(\omega^F)^2 - (\omega_m^J)^2]^2 + [G\omega^F/M]^2 \}^{-1/2}$$

$$(III-18) \quad \arg \tilde{A}_m = \arg \tilde{F}_m + \arctan [G\omega^F M^{-1} ((\omega_m^J)^2 - (\omega^F)^2)^{-1}]$$

Las características de la respuesta de la latiz a las - - fuerzas aplicadas se pueden leer de (III-17) y (III-18). La - amplitud del modo normal m , $|\tilde{A}_m|$ es máxima cuando ω^F es igual a la frecuencia natural (no amortiguada) de ese modo, ω_m^J , pues entonces

$$|\tilde{A}_m| = |\tilde{F}_m| / \omega_m^J G$$

En ese caso, $|\tilde{A}_m|$ es inversamente proporcional a la constante G de amortiguamiento y todos los demás modos normales tendrán amplitud menor. Se dirá entonces que el modo normal m está en resonancia con la fuerza aplicada.

La fase compleja de $\tilde{F}_m$, $\phi_m = \arg \tilde{F}_m$, puede ser absorbida en la exponencial $\exp[i\omega^F t]$ para pro

ducir un desplazamiento en el tiempo de la oscilación forzante, $\exp[i(\omega^F t + \Phi_m)]$. La ecuación (III-18) muestra que la respuesta $\tilde{F}_m(t)$ contiene un desplazamiento temporal -- análogo con $\alpha_m = \text{Arg } \tilde{A}_m$. Cuando la frecuencia de oscilación forzante es menor a la de un modo normal -- amortiguado, la fase de respuesta α_m se adelanta a la fase de la fuerza aplicada; el segundo sumando de (III-18) es positivo y $\alpha_m > \Phi_m$. Cuando ω^F pasa a través de ω_m^T la diferencia de fase pasa por $\pi/2$ en el punto de resonancia. A medida que ω^F aumenta más, $\alpha_m - \Phi_m$ tiende a π la fuerza aplicada y la resultante estarán exactamente fuera de fase conforme $\omega^F \rightarrow \infty$. Notemos que si la viscosidad desaparece, $|\tilde{A}_m| \rightarrow \infty$ y $\arg \tilde{A}_m = \arg \tilde{F}_m$.

Habiendo estudiado separadamente la solución a la ecuación homogénea (III-5) que denotaremos por $\underline{h}^h(t)$ y a la inhomogénea $\underline{f}_m^i(t)$ que permite definir $\underline{h}^i(t)$ como en (II-8), la solución mas general de (III-1C) es la adición de las dos. Es aún necesario ajustar las constantes de $\underline{h}^h(t)$ para satisfacer las condiciones iniciales $\underline{h}(t_0)$ y $\dot{\underline{h}}(t_0)$ de la solución total. En vista que

$$\underline{h}(t_0) = \underline{h}^h(t_0) + \underline{h}^i(t_0),$$

la solución final es

$$\begin{aligned} \underline{h}(t) &= G^H(t-t_0)(\underline{h}(t_0) - \underline{h}^i(t_0)) + \underline{h}^i(t) \\ &= \underline{h}^T(t) + \underline{h}^i(t), \end{aligned}$$

donde $\underline{h}^T(t)$ es la respuesta transitoria, que depende de las condiciones iniciales mientras que $\underline{h}^i(t)$ se debe exclusivamente a la fuerza externa. La primera decrece exponencialmente con el tiempo mientras que la segunda persiste.

Para terminar, haremos como en el capítulo anterior una comparación entre el contenido de algunas referencias bibliográficas y el de este capítulo.

En la referencia (15) se plantea el problema de una latiz seminfinita y una infinita, se considera que las masas y resortes son en general diferentes y se incluyen fuerzas externas así como efectos de viscosidad. Como los sistemas considerados son muy generales, la expresión para los desplazamientos $\underline{F}_N(t)$ reportada, es una cuadratura en función de polinomios ortogonales. Finalmente trata latices mas simples y encuentra cuadraturas mas sencillas.

En la referencia (16) se desarrolla el estudio de una latiz amortiguada así como de una forzada y amortiguada usando el mismo procedimiento que nosotros empleamos. Se encuentran las frecuencias angulares ω y la evolución en el tiempo.

Queremos hacer notar que todos los tipos de latiz incluidos en este trabajo los hemos estudiado empleando la transformación de Fourier y con excepción del sistema con impureza de masa, siempre se da la evolución en el tiempo. Creemos

con esto haber logrado en buena medida una estandarización en el tratamiento de estos sistemas mecánicos acoplados.

Finalmente, en las referencias (17) y (18) se reportan resultados experimentales encontrados sobre modelos de una latiz simple y una diatómica, los cuales, concuerdan con los nuestros.

CAPÍTULO IV.

ENERGÍA Y CANTIDADES CONSERVADAS.

En este capítulo estudiaremos la energía y otros invariantes de movimiento asociados a un estado de vibración de una latiz. E desarrollo lo haremos primero en el espacio de configuración donde la ecuación de movimiento (véase la sección I-3) es:

$$(IV-1) \quad M \ddot{f} + C \dot{f} + K f = 0$$

La energía cinética de la n -ésima partícula en la latiz es

$$(IV-2) \quad T_n(t) = \frac{1}{2} M_n (\dot{f}_n(t))^2$$

La energía potencial de la misma partícula, en cambio, es la integral de la fuerza de restitución a lo largo del recorrido desde su posición de equilibrio a su posición final al tiempo t , considerando a todas las demás masas fijas:

$$(IV-3) \quad V_n(t) = \int_0^{f_n(t)} \left(\sum_{m \neq n} K_{nm} f_m + K_{nn} x \right) dx \quad (\text{véase ec. (II-4)})$$

$$= \sum_{m \neq n} K_{nm} f_n f_m + \frac{1}{2} K_{nn} f_n^2$$

Si no existen otras formas de energía, la energía total de cada masa que es en este caso puramente mecánica es

$$(IV-4) \quad E_n(t) = T_n(t) + V_n(t).$$

Como las soluciones $f_n(t)$ fueron determinadas en capítulos anteriores, las energías asociadas $\{E_n(t)\}_{n=1}^N$ se conocen. Esto no es en sí muy interesante, pues las masas intercambian entre sí continuamente la energía potencial. Será de mayor importancia conocer la energía mecánica total de la latiz y su expresión en términos de las coordenadas en la base de Fourier donde no habrá términos de acoplamiento para $V_n(t)$.

La energía cinética total de la latiz es

$$(IV-5a) \quad T(t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) = \frac{1}{2} \sum_n \dot{f}_n^* M_n \dot{f}_n = \frac{1}{2} (\dot{\underline{f}}, \underline{M} \dot{\underline{f}}).$$

En esta expresión hemos reemplazado uno de los factores f_n por su complejo conjugado. Para el movimiento real de una latiz física no hay diferencia, al hacer esto podemos usar los resultados obtenidos sobre el producto escalar.

La energía potencial es la suma de todas las energías $V_n(t)$. Debe tenerse cuidado de no sumar dos veces los términos cruzados del tipo $f_n f_{n+1}$ de modo que dividiremos entre dos la suma algebraica de las energías potenciales obteniendo

$$(5b) \quad V(t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} f_n^* K_{nm} f_m = \frac{1}{2} (\underline{f}, \underline{K} \underline{f})$$

y la energía total

$$(IV-6) \quad E(t) = T(t) + V(t) = \frac{1}{2}(\dot{\underline{E}}, M \dot{\underline{E}}) + \frac{1}{2}(\underline{E}, K \underline{E})$$

Podemos investigar el comportamiento de la energía total si derivamos estas expresiones y explicamos la derivada de K, M y C así como la ecuación de movimiento -- (IV-1). Tenemos

$$(IV-7) \quad \frac{d}{dt} E(t) = \frac{1}{2}(\ddot{\underline{E}}, M \dot{\underline{E}}) + \frac{1}{2}(\dot{\underline{E}}, M \ddot{\underline{E}}) + \frac{1}{2}(\dot{\underline{E}}, K \underline{E}) + \frac{1}{2}(\underline{E}, K \dot{\underline{E}}) \\ = (\dot{\underline{E}}, M \ddot{\underline{E}} + K \underline{E}) = -(\dot{\underline{E}}, C \underline{E})$$

Esta ecuación muestra que la variación de la energía es sólo función del operador de viscosidad. Si $C = 0$, esto es, si no hay fricción, la energía total se conserva.

Para una latiz simple, los operadores C, M y K están representados en la base de Fourier por medio de matrices -- diagonales que conmutan. Veamos entonces de (IV-6) que la -- energía total de la latiz aparece como una suma de términos

$$(IV-8a) \quad E = \sum_n E_n^F$$

$$(IV-8b) \quad E_n^F = \frac{1}{2} M |\dot{\tilde{F}}_n|^2 + \tilde{K}_n |\tilde{F}_n|^2, \quad n=1, 2, 3, \dots, N$$

Donde no aparecen términos cruzados que indiquen acoplamiento de los modos de vibración. Puesto que no existen términos acoplados podemos esperar que la energía de cada modo en ausencia de fricción debe conservarse. Esto se puede demostrar fácilmente calculando la derivada temporal

$$\frac{d}{dt} E_n^f(t) = \frac{1}{2} M (\ddot{\tilde{f}}_n \dot{\tilde{f}}_n^* + \dot{\tilde{f}}_n \ddot{\tilde{f}}_n^*) + \frac{1}{2} \tilde{K}_n (\dot{\tilde{f}}_n \tilde{f}_n^* + \tilde{f}_n \dot{\tilde{f}}_n^*)$$

Y usando la ecuación de movimiento, también desacoplada,

$$M \ddot{\tilde{f}}_n + \tilde{K}_n \tilde{f}_n + \alpha \dot{\tilde{f}}_n = 0$$

El procedimiento es el análogo a (IV-7) para "vectores" unidimensionales

$$\frac{d}{dt} E_n^f(t) = - \alpha |\dot{\tilde{f}}_n|^2$$

En consecuencia, si no hay efectos de viscosidad, la energía mecánica de cada modo se conserva para una latiz simple.

La energía para una latiz puede ser expresada en términos de espacio fase como:

$$\begin{aligned} \text{(IV-9)} \quad E(t) &= \frac{1}{2} (\underline{\tilde{f}}(t), \underline{K} \underline{\tilde{f}}(t)) + \frac{1}{2} (\underline{\dot{\tilde{f}}}(t), \underline{M}^{-1} \underline{\dot{\tilde{f}}}(t)) \\ &= (\underline{\tilde{f}}^{\dagger}(t) \quad \underline{\dot{\tilde{f}}}^{\dagger}(t)) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \underline{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \underline{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tilde{f}}(t) \\ \underline{\dot{\tilde{f}}}(t) \end{pmatrix} = \underline{h}^{\dagger}(t) \underline{E}_{\pi} \underline{h}(t) \end{aligned}$$

donde $\underline{E}_I$ será llamado el operador de energía.

Ahora consideremos una evaluación infinitesimal en el tiempo con $\delta t = t - t_0$ tan pequeña como se desee. Empleando el desarrollo en serie en el segundo término de (III-4), aproximando a términos de primer orden e igualando con el último término de (III-4), tenemos:

$$\underline{h}(t) = \underline{G}^I(\delta t) \underline{h}(t_0) = e^{\delta t A} \underline{h}(t_0) = (1 + \delta t A) \underline{h}(t_0)$$

Substituyendo esta expresión en (IV-9) se llega a siguiente resultado

$$\begin{aligned} E(t) &= \underline{h}^+(t_0) (1 + \delta t A^+) \underline{E}_I (1 + \delta t A) \underline{h}(t_0) \\ &= E(t_0) + \delta t \underline{h}^+(t_0) (A^+ \underline{E}_I + \underline{E}_I A) \underline{h}(t_0) + O(\delta t^2) \end{aligned}$$

Usando (III-1) y (IV-9) podemos verificar que

$$A^+ \underline{E}_I + \underline{E}_I A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2GM^2 \end{bmatrix}$$

Esto comprueba el resultado (IV-7) y da un método para encontrar todas las constantes de movimiento de una latiz en ausencia de fricción.

Para el resto de este capítulo consideraremos $\underline{C} = 0$

Si algún operador F_{II} definido en el espacio, sea, por la forma

$$(IV-11) \quad F_{II} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$$

satisface la expresión

$$(IV-12) \quad F_{II} A + A^+ F_{II} = 0$$

Dará lugar, al igual que el operador de energía, a una forma sesquilineal $F(t) = \underline{h}^+(t) F \underline{h}(t)$ invariante en el tiempo.

Por substitución directa en la igualdad anterior en el caso sin fricción obtenemos las siguientes condiciones para los operadores componentes del operador F_{II} :

$$(IV-13) \quad \begin{aligned} M^{-1} F_{11} &= F_{22} K \\ K F_{22} &= F_{11} M^{-1} \\ K F_{21} &= -F_{12} K \\ M^{-1} F_{12} &= -F_{21} M^{-1} \end{aligned}$$

o bien, en el caso de una latiz simple, i.e, cuando $M = M \mathbb{I}$ y $K = k \Delta$, las ecuaciones (IV-13) se reducen en la base canónica a la forma

$$(IV-14a) \quad \underline{\underline{F_{22}}} \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{F_{22}}} \quad , \quad F_{11} = M k \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{F_{22}}} ,$$

$$(IV-14b) \quad \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{F_{12}}} = \underline{\underline{F_{12}}} \underline{\underline{\Delta}} \quad , \quad \underline{\underline{F_{12}}} = - \underline{\underline{F_{21}}} ,$$

entonces las submatrices de $N \times N$, $\underline{\underline{F_{12}}}$ y $\underline{\underline{F_{22}}}$ que representan en esta base a $\underline{\underline{F_{12}}}$ y $\underline{\underline{F_{22}}}$, conmutan con $\underline{\underline{\Delta}}$.

El conjunto de matrices $2N \times 2N$, $\underline{\underline{F}}$, que representan a $\underline{\underline{F_{\text{II}}}}$, con la propiedad (IV-12), forman un espacio vectorial complejo, entonces toda combinación lineal de estas matrices tienen la misma propiedad. Ahora procederemos a encontrar una base adecuada para este espacio. En la sección (I-8) vimos que las matrices que forman el grupo $\mathcal{P}_N$ conmutan con $\underline{\underline{\Delta}}$. Mas aún, vimos que el grupo de todas las simetrías producidas por las matrices $\underline{\underline{T_n}}$ que conmutan con $\underline{\underline{\Delta}}$, en la forma $\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{T_n}} \underline{\underline{\Phi}}^{-1}$ también conmutan con $\underline{\underline{\Delta}}$. Las matrices $\underline{\underline{T_n}}$ pueden escribirse como

$$(IV-15a) \quad \underline{\underline{T_n}} = \underline{\underline{1}} + \sum_{\mu=1}^4 a_n^{\mu} \underline{\underline{V_{\mu}^n}} \quad , \quad n=1, 2, \dots, [N-1/2]$$

donde $\underline{\underline{1}}$ es la matriz $N \times N$ unidad y $\underline{\underline{V_{\mu}^n}}$ son matrices cuyos elementos no nulos son

$$(IV-15d) \quad \underline{\underline{V}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \underline{\underline{V}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \underline{\underline{V}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \underline{\underline{V}}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

y están colocados en las intersecciones de las n -ésima y $(N-n)$ -ésima renglones y columnas. Para el caso particular $\mathcal{V} = N$, y cuando N es par, $\mathcal{V} = N/2$, podemos escribir

$$(IV-15c) \quad \underline{\underline{T}}_{\mathcal{V}} = \underline{\underline{1}} + \sum_{\nu=1}^{\mathcal{V}} a_{\nu} \underline{\underline{V}}^{\nu}; \quad \underline{\underline{V}}^{\nu} = \|\delta_{n,\nu} \delta_{m,\nu}\|$$

Como $\underline{\underline{1}}$ obviamente conmuta con $\underline{\underline{\Delta}}$ y puede ser expresada como una suma de $\underline{\underline{V}}$'s, una base para las matrices que conmutan con $\underline{\underline{\Delta}}$ está dada por $\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{V}}^n \underline{\underline{\Phi}}^{-1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots, N$ (excluyendo doble conteo, y cuando $n = N$ o $N/2$ simplemente omitimos el índice n y usamos (IV-15c) para esta definición). Contando el número de pares de eigenvalores degenerados con una base matricial $2N$ -dimensional (II-15a) y los no degenerados con una base unidimensional (II-15c), y doblando la cantidad debido a las dos ecuaciones (IV-14) concluimos que el espacio de formas sesquilineales

$$(16) \quad F(t) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}^{\dagger}(t) & \underline{\underline{g}}^{\dagger}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_{11} & \underline{\underline{F}}_{12} \\ \underline{\underline{F}}_{21} & \underline{\underline{F}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}(t) \\ \underline{\underline{g}}(t) \end{pmatrix}$$

es $(4N-2)$ dimensional para N impar y $(4N-4)$ dimensional para N par. Nótese que si a_n en (IV-15) es real, --

las matrices son hermiteanas.

Ahora procederemos a ver el significado físico de cada uno de los vectores base de este espacio; primero correremos $\underline{F}_{22}$ sobre todos los $\underline{\Phi} \underline{V}_\mu^n \underline{\Phi}^{-1}$ manteniendo $\underline{F}_{12} = 0$, luego consideraremos $\underline{F}_{22} = 0$ y a $\underline{F}_{12}$ corriendo sobre $\underline{\Phi} \underline{V}_\mu^n \underline{\Phi}^{-1}$. Debemos recordar que el vector $\underline{\tilde{F}} = \underline{\Phi}^{-1} \underline{F}$ es la transformada de Fourier del vector $\underline{F}$ y si $\underline{\Phi}$ es una matriz unitaria, $\underline{\tilde{F}}^\dagger = \underline{F}^\dagger \underline{\Phi}$; para simplificar el problema y por permitirle la arbitrariedad de $\underline{\Phi}$, la supondremos unitaria. De (IV-16) $\underline{F}_{12} = 0$ y $\underline{F}_{22}$ como dijimos anteriormente encontramos con la ayuda de (IV-14) las constantes de movimiento definidas como

$$(IV-17a) \quad \underline{F}_\mu^n(t) = \underline{\tilde{g}}^\dagger \underline{V}_\mu^n \underline{\tilde{g}} - M R \underline{\tilde{F}}^\dagger \underline{\tilde{\Delta}} \underline{V}_\mu^n \underline{\tilde{F}}$$

$$n = 1, 2, \dots, [N/2] \text{ ó } n = N$$

Para el caso $\underline{F}_{22} = 0$, multiplicando $\underline{F}_{12}$ por i y cambiando $\underline{F}$ por $\underline{L}$, tenemos

$$(IV-17b) \quad \underline{L}_\mu^n(t) = i (\underline{\tilde{F}}^\dagger \underline{V}_\mu^n \underline{\tilde{g}} - \underline{\tilde{g}}^\dagger \underline{V}_\mu^n \underline{\tilde{F}})$$

$$n = 1, 2, \dots, [N/2] \text{ ó } n = N$$

La primera observación es que las constantes de movimiento $\underline{F}_1^{(n)}$ y $\underline{L}_1^n$ involucran sólo las n -ésimas componentes de $\underline{\tilde{F}}$ y $\underline{\tilde{g}}$; mientras que $\underline{F}_2^n$ y $\underline{L}_2^n$ involucran --

las $(N-n)$ -ésimas componentes. Las otras dos contienen tanto las n -ésimas como las $(N-n)$ -ésimas. Las F 's tienen la forma general de energías, pues contienen expresiones cuadráticas en las elongaciones y momentos (o equivalentemente en esta latiz, velocidades), en efecto.

$$(IV-18) \quad \frac{1}{2} M^{-1} F_1^n(t) = \frac{1}{2} M^{-1} |\tilde{g}_n|^2 - \frac{1}{2} \lambda_n k |\tilde{f}_n|^2 = \frac{1}{2} M F_2^n$$

$$n=1, 2, \dots, N$$

F_1^n y F_2^n son las energías asociadas a cada una de las ondas parciales de Fourier (vease (IV-6b)), estas son N cantidades reales y positivas.

Ahora, para $\mu=3$ y 4

$$(IV-19a) \quad F_3^n(t) = 2 \operatorname{Re}(\tilde{g}_n^* \tilde{g}_{N-n} - M \lambda_n \tilde{f}_n^* \tilde{f}_{N-n})$$

$$(IV-19b) \quad F_4^n(t) = 2 \operatorname{Im}(\tilde{g}_n^* \tilde{g}_{N-n} - M \lambda_n \tilde{f}_n^* \tilde{f}_{N-n})$$

$$n=1, 2, 3, \dots, [(N-1)/2]$$

que son $2 [(N-1)/2]$ cantidades reales.

Continuando con las L 's en (IV-17b), se ve que tienen la forma de momento angular, las cantidades conservadas con:

$$(IV-20) \quad L_1^n(t) = i [\tilde{F}_n^* \tilde{g}_n - \tilde{g}_n^* \tilde{F}_n] = L_2^{N-n}(t) \\ n=1, 2, \dots, N$$

$$(IV-21a) \quad L_3^n(t) = i [\tilde{F}_n^* \tilde{g}_{N-n} + \tilde{F}_{N-n} \tilde{g}_n - \tilde{g}_n^* \tilde{F}_{N-n} - \tilde{g}_{N-n}^* \tilde{F}_n]$$

$$(IV-21b) \quad L_4^n(t) = [\tilde{F}_n^* \tilde{g}_{N-n} - \tilde{F}_{N-n} \tilde{g}_n - \tilde{g}_n^* \tilde{F}_{N-n} + \tilde{g}_{N-n}^* \tilde{F}_n] \\ n=1, 2, \dots, [(N-1)/2]$$

El total de constantes de movimiento debe ser igual a el número de las partes reales e imaginarias de los parámetros libres de $\underline{\Phi}$, o sea, $2(2N-1)$ para N impar y $2(2N-2)$ para N par. (vease la sección I-8).

Ahora reduciremos el conjunto de constantes de movimiento haciendo consideraciones sobre la latiz física que tiene elongaciones y momentos reales, y no puede tener mas de $2N$ constantes de movimiento proporcionadas por las $2N$ condiciones iniciales. Para este fin consideremos la transformada de Fourier (I-15) y las ondas parciales asociadas a ella. En tonces $F_{mn}^* = F_{m, N-n} = F_{n-m, n}$ y como $\underline{F}$ y $\underline{g}$ son reales, $\tilde{F}_m^* = \tilde{F}_{N-m}$, $\tilde{g}_m^* = \tilde{g}_{N-m}$. Con estas restricciones es fácil de ver que el número de constantes de movimiento se reduce: en (IV-18) $F_1^n = F_1^{(N-n)}$ en (IV-19) $F_3^n = F_3^{N-n}$ y $F_4^n = F_4^{N-n}$ así como en (IV-20)

$$L_1^n(t) = -i [\tilde{g}_{N-n} \tilde{F}_n - \tilde{g}_n \tilde{F}_{N-n}] = -L_1^{N-n}$$

que asigna a estas constantes el significado de un momento angular en el espacio fase de cada componente de Fourier. Finalmente, de (IV-21) L_3^n y L_4^n son idénticamente cero.

Por simple conteo vemos que hemos encontrado exactamente $2N$ constantes de movimiento con significado físico.

CONCLUSIONES

Mediante el uso de análisis vectorial hemos planteado los sistemas de ecuaciones diferenciales que describen sistemas mecánicos acoplados. La transformación finita de Fourier fue la herramienta matemática básica para la solución de estos sistemas de ecuaciones. En particular hemos fundamentado la diagonalización del operador de segunda diferencia Δ y mostrando que la transformación de Fourier sólo es un caso particular. Aplicado a la solución del problema de la latiz finita, cerrada, simple y algunas de sus variantes, hemos encontrado las frecuencias angulares de oscilación para cada uno de los sistemas mecánicos acoplados estudiados. Las variantes han sido latices con interacción a J -ésimos vecinos, forzadas, amortiguadas, moleculares diatómicas y con defecto de masa. Finalmente hemos demostrado la existencia de $2N$ cantidades conservadas en estos sistemas.

A P E N D I C E .

COMENTARIOS SOBRE LA PALABRA "LATIZ"

Kurt Bernardo Wolf

La palabra "Latiz" no existe -o al menos no está reconocida- en la lengua española. Su uso en el contexto científico está tomado de su correspondiente "lattice" en inglés. La investigación filológica de esta palabra puede ser interesante, pues hay fuertes indicaciones de que proviene del proto-lenguaje indo-europeo. El significado de la raíz es el mismo en el sánscrito, en los idiomas indo-arios y en los germánicos: vara, trozo de madera largo, tabla delgada. El plural de este término se asocia a una celosía o enrejado de este material.

El término español correcto que traduce "lattice" [la:təs] es¹⁾ "celosía, enrejado de listoncillos, rejilla,..., (fís.) celosía espacial, (quím.) red de estructura cristalina. El origen del vocábulo inglés es normando. Ha tenido una docena o más de representaciones ortográficas: la primera referencia a esta palabra²⁾ está dada por Wyclif (prov. vii) como 'latys' en 1382; aparece en la biblia del rey Jaime (2 Reyes I,2, donde se escribió 'lattice', del hebreo לַטִּיץ [səva'KHaH] "enrejado", de la raíz לָטַח "frondosidad, espesura"). Contemporáneamente significa³⁾ "framework of structure of wood or metal made by crossing laths or other thin strips so as to form a network". "Lattice", pues, aparece como un plural irregular de "lath", el cual es³⁾ "a thin narrow strip of wood in making a ground-work or in constructing a light framework". El mismo diccionario³⁾ nos informa que el término inglés medio ('lat, latte, lathe', plural: 'latis') y el inglés antiguo ('laett') proviene del

francés antiguo "latte" (plural "lattis" [lati:]). Estos términos aparecen sólo en diccionarios comprensivos como la Referencia 4. El origen de este vocábulo⁴⁾ proviene del idioma de los habitantes germánicos de Gaula y se remonta al antiguo alto alemán en "latta", cuyo significado es paralelo al the "lath". El término "latta" es también elemento del antiguo nórdico y aparece como "leið" ó "laþan" en islandés. El alemán moderno de uso corriente no contiene esta palabra, aunque sí pertenece al jargon de los carpinteros y se registra en diccionarios etimológicos⁵⁾ como "Brett, Bohle, länghches schmales, meist kantiger Holtz", que coincide con el uso de "lath". El holandés, idioma bajo alemán, utiliza "lat" y "latte". El galés³⁾, idioma también indo-europeo, aunque celta y lejano a la rama germánica, apunta "llath" como medida de longitud (una vara).

La búsqueda de contrapartes a la raíz "laθ" en idiomas mediterráneos⁶⁾ (griego antiguo y moderno, albanio, latín y los idiomas romances) no dió fruto. Tampoco lo dió en los idiomas eslavónicos⁶⁾ (ruso, bielorruso, ucraniano, polaco, checo y serbio).

Resulta por demás interesante que la palabra "latiz" remonta su origen al lenguaje madre indo-europea, con pronunciación hipotética⁷⁾ *laṣṭi, y es ubicuo en las lenguas vivientes del subcontinente indio y el Hindo-Kush. Esta conexión no parece haber sido notada en la Referencia 7, tal vez la de más autoridad en la materia. En efecto, el sánscrito, prākrito y pali registran el vocábulo "laṭṭhi" (fem.) que significa "palo o vara". El Pashto, idioma iranio que hoy se habla en Afghánistan, lo llama "laṣṭa": palo largo o polín. En Persia misma, ni el páhlavi ni el farsi parecen contener esta raíz. En India, en cambio, está muy extendida. El Hindi, el idioma más extendido del norte de la India, utiliza "लाठी" [lāṭṭhi] para designar un palo

o vara de tamaño regular, mientras que *lāthā* y *laṭṭhā* se refieren a vara y polín respectivamente. Idiomas periféricos también poseen esta raíz, como el Punjabi "ਲਾਠੀ" [latthī], Sindhi (laṭhi), Kashmiri (loṭh^u), Marāṭhī (lāṭh, laṭ). En ciertos idiomas y dialectos ha tomado significados específicos, como en Gujarati (laṭh, laṭ) y Lahndā (laṭṭh, laṭh): eje de molino de aceitunas, o en Bihārī (laṭh), de azúcar. En Sinhalés (laṭu) es una planta trepadora. Otros idiomas que también lo contienen son el Pashai, Bashkarik, Torwali, Bhalesi, Kumaunū Nepali, Asamés, Oriya y Bengali. El significado primario es el mismo.⁷⁾

Existen varias raíces cuyo significado es paralelo al de "latiz". Así, es interesante hacer notar que "peuiémka" [rɪjɪtkə] en ruso, "rácz" [ra:tʃ] en húngaro (idioma que, aunque uralo-altáico, contiene una buena proporción de vocábulos europeos) y "reja" o "red" en español, parecen contener la misma⁸⁾ raíz R-Š. (Compárese, por ejemplo "mříža" en checo). Su significado es idéntico. (Dicho sea de paso, el uso científico de "red cristalina" no es *peuiémka*, sino "čep" [tsep]). Por último, se ha sugerido⁶⁾ que la raíz de "látigo" en español puede ser un remanente de *lasti en su sentido de "palo o vara", o en su sentido de "extendido, plano, ancho, somero" puede ser el origen de "lato" (a través del latín "latus").

La aceptación de "latiz" como palabra propiamente española tal vez no sea inminente, necesaria o importante. El interés filológico de este concepto, sin embargo, puede ser comparable al de la latiz como modelo físico.

1) Appleton's New Cuyás Dictionary (5^a ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972).

2) The Oxford English Dictionary (Oxford University Press, 1933)

- 3) Webster's Third New International Dictionary. (G. & C. Merriam Co., Springfield Mass. 1966).
- 4) Dictionnaire Moderne Français-Espagnol. (Larrouse, Paris, 1967).
- 5) Der Große Duden. (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967).
- 6) Comunicación de investigadores del C.E.L.E., UNAM.
- 7) R. L. Turner, "A Comparative Dictionary of the Indo-Aryan Languages". (Oxford University Press, 1966). (Número de índice 10991).
- 8) Nótese que R y L, así como Š y θ son fonemas entre los cuales pueden ocurrir transiciones lingüísticas. En última instancia, las dos raíces pueden provenir de un tronco común, en particular si consideramos que la segunda pareja corresponde a ŠT en la raíz hipotética indo-europea.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products" (Academic Press, New York, (1965))
- 2.- M. Abramowitz, " Handbook of Mathematical Functions " .
(Dover, New York, 1965)
- 3.- F. Y. Chen, Amer. J. Phys. 38, 768-769, (1970) .
- 4.- A. Alonso, A. Calles, J. Flores, F. Ramirez, L. Rivaud
R. Rodriguez, J. Tagliera, A. Valladares, Rev. Mex. de
Fisica, 22, E11-E42, (1973) .
- 5.- J. D. Louck, Amer. J. Phys. 30, 585-590, (1962) .
- 6.- R. F. Wallis, Phys. Rev. 105, 540-545, (1957).
- 7.- L. Brillouin, " Wave propagation in periodic structures " (Mc. Graw-Hill, New York, 1946)
- 8.- D. H. Chaturvedi, J. S. Bajjal, Amer. J. Phys. 52,
64-66, (1970)
- 9.- R. Weinstock, Amer. J. Phys. 38, 1289-1298, (1970)
- 10.- E. M. Baroody, E. Drauglis, Amer. J. Phys. 39, 1412-
1413, (1971)
- 11.- A. H. Nayfeh, Amer. J. Phys. 40, 469-470, (1972)
- 12.- A. H. Nayfeh, Amer. J. Phys. 41, 430-431, (1973)
- 13.- R. Weinstock, Amer. J. Phys. 39, 484-502, (1971)
- 14.- R. W. Munn, J. Chem. Phys. 52, 64-66, (1970)
- 15.- W. G. Christian, A. G. Law, W. F. Martens, A. L. Mullikin
y M. B. Sledid, J. Math. Phys. 17, 146-158, (1976)
- 16.- K. B. Wolf, " Integral Transforms in Science and
Engineering " (Plenum Press, New York, en imprenta)

- 17.- R. B. Runk, J. L. Stull, O. L. Anderson, *Amer. J. Phys.* 31, 915-921, (1963).
- 18.- J. L. Fowler, J. T. Brooks, *Amer. J. Phys.* 35, 1065-1070, (1967)
- 19.- D. L. Merchant, O. L. Brill, *Amer. J. Phys.* 41, 55-59, (1973)
- 20.- J. Jones, *Amer. J. Phys.* 42, 43-46, (1974)
- 21.- P. M. Morse, K. U. Ingard, " *Theoretical Acoustics* ".
Mc. Graw-Hill, New York, (1968).