UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EMISION Y PROPAGACION DE LUZ EN LA VECINDAD DEL SOL

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN FISICA PRESENTAN

YAIR GOLDIN HALFON

GUILLERMO MONSIVAIS GALINDO

MEXICO, D. F. 1 9 7 5 .

I N D I C E .

INTRODUCCION

La curiosidad del hombre por entender los fenómenos físicos, en donde la gravedad parece jugar un papel determinante, lo ha motivado a elaborar las más diversas teorías.

Las más antiguas son simples conjeturas, como la debida a Aristóteles, en el sentido de que los cuerpos caen porque su lugar natural es la Tierra. Las más modernas y elaboradas son teorías métricas, en éstas, como su nombre lo indica, es la métrica del espacio-tiempo la que interviene directamente en las ecuaciones que describen las observables físicas en cuestión.

Cada teoría métrica difiere del resto en la forma en que la materia determina la geometría del espacio-tiempo.

La primera de este tipo de teorías fué formulada en 1916 por Alberto Einstein y es conocida con el nombre de Relatividad General.

La Relatividad General es una teoría completa, elegante y autoconsistente, cuyas predicciones son compatibles con los experimentos y observaciones efectuados a la fecha, pero no por esto -como se puede inferir de la cantidad de material publicado después de su aparición- se ha puesto punto final a las especulaciones e intentos por descubrir nuevos caminos que ayuden a entender los fenómenos gravitacionales.

Entre teorías que versan sobre un mismo campo de la física y que tienen un alto grado de compatibilidad entre sus pre--

dicciones y los resultados experimentales, la que mayor aceptación tiene es aquella en la cual sus postulados son pocos, sencillos y eventualmente verificables de una manera directa, como es el caso de la Relatividad Especial en donde la constancia de la velocidad de la luz fué tomada en 1905 como postulado y posteriormente se comprobó lo atinado de dicha elección como tal.

Sin embargo, si el deseo es optar por una de ellas, se debe pensar en experimentos decisivos que pongan a prueba la esencia misma de la teoría, o bien mostrar la equivalencia de éstas en forma similar a lo que hizo Schrodinger al probar que su Mecánica Ondulatoria era en el fondo la misma que la Mecánica Matricial de Heisenberg, las cuales en un principio se pensaron diferentes.

Afortunadamente para todos aquellos que estén interesados en el problema, y deseen de alguna manera contribuir a su solución, la Física Gravitacional no tiene hoy en día pruebas concluyentes de que la ruta a seguir para la solución de sus problemas deba encaminarse forzosamente hacia tal o cual dirección.

Es por esta razón que nosotros en este trabajo nos aventuramos a explicar por un camino original los tres fenómenos conocidos referentes al comportamiento de la luz en el campo gravitacional del Sol.

Los resultados obtenidos son sabidos como ciertos, pero lo más importante es que el postulado básico se presta, por lo menos en teoría a una comprobación directa.

Paralelamente exponemos brevemente la obtención de los efectos vía Relatividad General, el objeto de esto es permitir al lector establecer una comparación entre el camino seguido por nosotros y su equivalente en Relatividad General.

Aunque el propósito principal de la tésis está limitado a la explicación de los tres efectos de naturaleza luminosa, creemos que es necesario complementar el trabajo agregando algo sobre la precesión de Mercurio.

En este problema hemos optado por dos caminos, ambos son modificaciones plausibles sobre la Ley de Gravitación Universal de Newton.

En el primer caso se muestra que existe un cambio en la orientación de la línea de los ápsides de Mercurio, sin embargo el corrimiento del perihelio obtenido es contrario a la dirección del movimiento y en magnitud tan solo una pequeña fracción de la precesión observada. En el segundo caso, el resultado obtenido es correcto, pero a diferencia del anterior, la idea empleada no es original, salvo por un detalle como se verá más adelante.

I EL CORRIMIENTO HACIA EL ROJO COMO FENOMENO GRAVITACIONAL

El corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales de luz proveniente de estrellas, en particular del Sol, lo predijo por primera vez Alberto Einstein en uno de los artículos que precedieron a la Relatividad General (Ref.1).

A pesar de que dicha predicción se hizo a principios de siglo, no fué sino hasta fechas recientes cuando se logró su verificación experimental.

La dificultad en medir el corrimiento gravitacional es en gran parte debida a que existe una velocidad relativa entre las fuentes emisoras y el punto de observación, que trae aparejado -por efecto Doppler- un ensanchamiento y desplazamiento de las líneas espectrales que excede en magnitud varias veces al desplazamiento esperado por influencia gravitacional.

La velocidad que existe entre las fuentes emisoras y la Tierra se puede considerar como la composición del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, movimiento de naturaleza térmica de los elementos emisores en la corona solar, y la convección de gases en la atmósfera solar.

La influencia que ejercen estos fenómenos en las líneas espectrales es calculable con relativa sencillez para los dos primeros casos, pero no así para el tercero en donde se requiere de técnicas observacionales muy delicadas y minuciosas.

Los problemas mencionados motivaron a Pound y Rebka en -

1958 a pensar en experimentos terrestres que pudieran producir y detectar este fenómeno. Un año después, utilizando como pilar del experimento al efecto Mossbauer, lograron su propósito detectando el enrojecimiento de luz que subía tan solo 22.5 m. contra el campo gravitacional de la tierra (ref. 2).

Para obtener la ecuación de corrimiento, nosotros haremos uso del principio de la conservación de la energía y de un experimento pensado.

Para este propósito consideremos al Sol como una distribución de masa con simetría esférica y montemos en su centro un sistema cartesiano de referencia; siendo así, una de las líneas de campo corre en la dirección negativa del eje z.

Antes de continuar, queremos hacer notar que para un observador en reposo con respecto al Sol, las propiedades del espacio físico obedecen a la geometría euclidiana. Lo que esto significa se puede resumir de la siguiente manera: dos puntos marcados en una varilla rígida forman un intervalo. Si a los puntos de nuestro espacio los denotamos como ternas de números, cuyo significado son las coordenadas x_1, x_2, x_3 en su sentido habitual, y si la diferencia de coordenadas Δx_1, Δx_2, Δx_3 de los dos extremos de nuestro intervalo (independientemente de la orientación del mismo y de la localización de su origen) cumplen con la propiedad de que la suma de sus cuadrados es un invariante, entonces el espacio es euclidiano y el sistema de referencia cartesiano.

Volviendo al punto que se discutía, pensemos en un observador a una distancia fija del Sol pero lo suficientemente alejado del mismo, para que el campo gravitacional del Sol, ahí, se pueda considerar nulo para todo fin práctico.

A este observador lo denotaremos con la letra I, y con el objeto de hacer más conciso el desarrollo del trabajo, en lo sucesivo nos referiremos a él simplemente como I. Y a la región del espacio vecina a I, la llamaremos región I.

Supongamos que en la región I una partícula elemental de masa m decae en dos fotones de frecuencia $\nu = \frac{mc^2}{2h}$, si otra partícula idéntica a la anterior es transportada desde la región I hasta una cota z_1, donde se encuentra una superficie perfectamente reflectora con normal paralela al eje z (fig. A), una energía igual a menos m veces la diferencia de potencial ϕ entre el espejo y la región I de potencial cero, se puede almacenar en forma de calor o de trabajo mecánico. De aquí, que si la partícula, estando en la proximidad de la superficie reflectora, decae en dos fotones; uno directo hacia I y otro que se refleja perpendicularmente en el espejo sin transferir momento a éste por considerarlo con masa infinita para el caso en cuestión; la cantidad de energía que llegará a I debe satisfacer, por el principio de la conservación de la energía, la ecuación:

$$2h\nu' = 2h\nu + m\phi = 2h\nu + \frac{2h\nu}{c^2}\phi \Rightarrow \nu' = \nu\left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \quad \ldots (1)$$

Ahora bien, por haber transmisión continua de luz del -

sol hacia I, pedimos que el mismo número de valles y crestas de una onda electromagnética monocromática que sale del sol llegue a la región I. Entonces, si consideramos como unidad de tiempo al inverso de la frecuencia de la luz emitida por cierta transición atómica que ocurre en la vecindad de cada observador, se infiere de inmediato que los relojes en la vecindad del sol caminan $1+\frac{\phi}{c^2}$ más lento que relojes idénticos en la región I, porque medida con estos relojes la frecuencia de luz considerada es a su emisión en la superficie del sol $\nu(1+\frac{\phi}{c^2})$ y por (1) igual a la frecuencia de las mismas ondas electromagnéticas en su llegada a la región I.

Nosotros ahora postulamos que si la longitud de onda de cierta transición atómica en la región I es λ , entonces en un punto de potencial ϕ, ésta se ve afectada por el mismo factor que la frecuencia, es decir su valor será $\lambda(1+\phi/c^2)$. Este postulado se podría poner a prueba si se efectuaran experimentos de diracción o interferometría muy delicados en puntos de potenciales gravitacionales considerablemente distintos.

Por ejemplo, si se efectuaran a diferentes distancias del sol experimentos de difracción de Fraunhofer con un laser y una rejilla rectangular, se podrían encontrar -si es que nuestro postulado es cierto- distintos patrones de difracción correspondientes a las distintas longitudes de onda con que emitiría el laser dependiendo de su proximidad al sol.

Si denotamos con c la velocidad de la luz en la región I, podemos deducir, por los argumentos anteriores, que la velocidad en un punto de potencial ϕ en términos de las unidades de I será:

$$c' = \lambda\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)\nu\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right) = \lambda\nu\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2 = c\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2$$

Si sustituimos en esta expresión el valor del potencial obtendremos:

$$c' = c\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)^2 \approx c\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right) \qquad \ldots\ldots(2)$$

Incidentalmente notamos que en primera aproximación se obtiene el mismo resultado al considerar, con la métrica de Schwarzschild, la línea de universo de un fotón que se propaga a lo largo de una línea radial. La métrica de Schwarzschild está definida en la expresión siguiente:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dT^2 - r^2\left(\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 \ldots(3)$$

Para el caso de un fotón que se mueve sobre una línea radial la expresión (3) se reduce a:

$$0 = ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)c^2dT^2 - \left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}dr^2 \Rightarrow \frac{dr}{dT} \approx c\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right).$$

El término que se desprecia, no tiene mayor importancia ya que, ϕ/c^2 valuado sobre la superficie del sol es de orden de magnitud de un millonésimo.

Consideramos, a esta altura del trabajo, apropiado presentar brevemente la línea de pensamiento seguida por Einstein en la construcción de su teoría.

Einstein buscó en propiedades geométricas del espacio-tiempo una relación causa-efecto para los fenómenos gravitacio nales.

Su idea fue postular que el tensor de curvatura de Rieman -cuya nulificación o no, implica que el espacio-tiempo sea llano o curvo- contraido e igualado a cero iba a jugar el papel de la ecuación básica para la descripción de los fenómenos gravitacionales en el espacio vacio.

K. Schwarzschild tomó para sí el problema de determinar la métrica que corresponde a un campo gravitacional central. Por argumentos de simetría probó que el tensor métrico fundamental de éste espacio era diagonal y propuso una métrica con simetría esférica indeterminada en dos parámetros. Para determinar dichos parámetros recurrió a las ecuaciones de Einstein, que para éste caso particular admitían solución exacta.

En regiones del universo en donde es válida la métrica de Minkowski-Lorentz, una partícula libre obedece la primera ley de Newton, que bien se podría afirmar equivale a decir que una partícula libre sigue la geodésica del espacio-tiempo en cuestión.

Einstein propone por analogía con el caso anterior, que una partícula que vaga libre en un espacio-tiempo curvo siga a las geodésicas correspondientes. Así mismo por analogía con la Relatividad Especial en donde la ds^2 de la línea de universo de un fotón es nula, se propone que para espacios-tiempos no llanos siga valiendo la misma aseveración.

La ds^2 de Schwarzschild dada por la ecuación 3 permite encontrar el intervalo de tiempo local $d\tau^2$ en función del intervalo de tiempo en el infinito. Si se toman eventos que sucedan en el mismo lugar del espacio físico entonces $dr = d\theta = d\varphi = 0$ y de 3 tenemos:

$$c^2 d\tau^2 = c^2\left(1-\frac{2GM}{rc^2}\right)dT^2 \Rightarrow \tau \approx \left(1-\frac{MG}{rc^2}\right)T \Rightarrow \nu' = \nu\left(1-\frac{MG}{rc^2}\right).$$

que es la ecuación obtenida anteriormente.

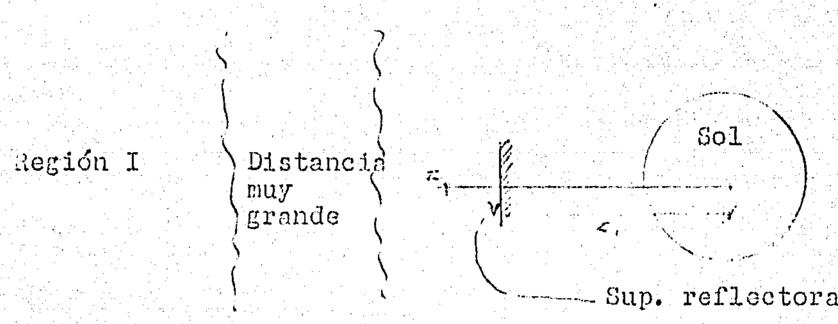


Fig. A.

(1) A. Einstein; "On the influence of gravitation on the propagation of light". Annalen der Physik 1911.

(2) R. V. Pound and G. A. Rebka; "Apparent weight of photons". Phys. Rev. Letters, 4, 337-341 (1960).

II LA DEFLEXION DE LA LUZ

Una vez obtenido que la velocidad de la luz depende de la posición, o dicho de otra manera, el asignar un índice de refracción al espacio vecino al Sol, nos permite, a través del Principio de Fermat, calcular la deflexión que experimentan rayos de luz provinientes de estrellas lejanas al pasar en la vecindad del mismo.

Para esto, como es usual en la óptica geométrica, resolveremos la siguiente ecuación:

$$\delta \int n\,ds = \delta \int \frac{c}{v}\,ds = \delta \int \frac{ds}{\left(1+\phi/c^2\right)^2} = \delta \int \frac{1}{\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)^2} \sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr = 0 \quad \ldots\ldots(4)$$

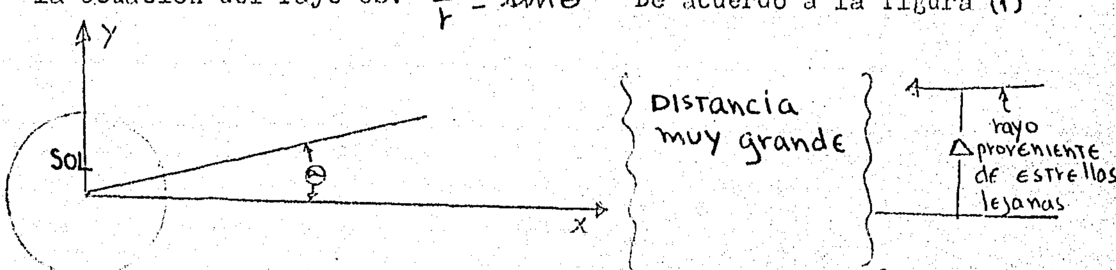
aquí G representa la constante gravitacional y M la masa del Sol. Sea

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)^2} \sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

entonces si en 4 aplicamos la ecuación de Euler obtenemos:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\left(\frac{d\theta}{dr}\right)}\right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = cte. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Para encontrar la constante notamos que cuando $r \to \infty$ la ecuación del rayo es: $\frac{\Delta}{r} = \sin\theta$ De acuerdo a la figura (1)



entonces

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{\left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)^2}\cdot\frac{-\frac{\Delta}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2}}}{\sqrt{1+r^2\left(-\frac{\Delta}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{r}\right)^2}}\right)^2}} = -\Delta$$

como $\frac{GM}{rc^2} \ll 1 \quad \therefore \left(1-\frac{GM}{rc^2}\right)^{-2} \approx 1+\frac{2GM}{rc^2}$ y la ecuación (5) se puede reescribir como :

$$\int_0^\theta d\theta \simeq \int_\infty^r \frac{-\Delta\, dr}{\left(\left(1+\frac{2GM}{rc^2}\right)^2 r^4 - \Delta^2 r^2\right)^{1/2}}$$

integrando:

$$\theta = \left[\sin^{-1}\left(\frac{2GM}{\Delta c^2}+\frac{4G^2M^2}{r\Delta c^4}-\frac{\Delta}{r}\right) - \sin^{-1}\frac{2GM}{\Delta c^2}\right]\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4G^2M^2}{\Delta^2 c^4}}}$$

despreciando términos que contengan la expresión $\frac{G^2M^2}{\Delta^2c^4}$; $\frac{G^2M^2}{\Delta r c^4}$, obtenemos:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\Delta}{r}-\frac{2GM}{c^2\Delta}\right)+q$$

en donde $q = \sin^{-1}\frac{2GM}{\Delta c^2}$

finalmente

$$r = \frac{\Delta}{\sin(\theta-q)+\frac{2GM}{\Delta c^2}}$$

Los valores de θ para los cuales r se va a infinito son aquellos que satisfacen la ecuación

$$\sin(\theta-q) = -\frac{2GM}{\Delta c^2}$$

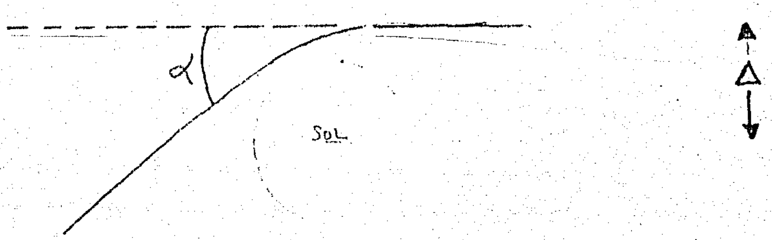
entonces

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(-\frac{2GM}{\Delta c^2}\right)+\sin^{-1}\frac{2GM}{\Delta c^2} = 0$$

y $\sin(\theta - q) = \sin(\pi + q - \theta) = -\frac{2GM}{\Delta c^2}$

entonces $\Theta_L = \pi + 2\sin^{-1}\frac{2GM}{\Delta c^2} \approx \pi + \frac{4GM}{\Delta c^2}$

En la figura siguiente se representa gráficamente el resultado obtenido



el ángulo de deflexión es igual a $\alpha = \frac{4GM}{\Delta c^2}$.

Veamos ahora la deflexión de la luz en Relatividad General. Para determinar la trayectoria de un rayo de luz se puede considerar el carácter corpuscular de la luz y debido a que el procedimiento utilizado es semejante al que se utiliza para el caso de una partícula masiva, conviene analizar en general cual es la trayectoria de una partícula cualquiera de masa m en presencia de un campo gravitacional.

Las ecuaciones de movimiento de una partícula se pueden encontrar mediante una generalización apropiada de las ecuaciones diferenciales correspondientes al movimiento de una partícula libre de fuerzas en Relatividad Especial. En este caso las ecuaciones son:

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

donde P es un parámetro a lo largo de la trayectoria. En general dp es proporcional a ds. En el caso de la luz la constante de proporcionalidad $\frac{ds}{dp}$ es igual a cero.

La generalización de las ecuaciones anteriores al caso de espacios curvos es:

$$\frac{d^2x^i}{dP^2} + \Gamma^i_{k\ell} \frac{dx^k}{dP} \frac{dx^\ell}{dP} = 0$$

Si en estas cuatro ecuaciones se sustituyen los valores de $\Gamma^i_{k\ell}$ calculados a partir del tensor métrico fundamental de la métrica propuesta por Schwarzschild para el espacio vecino al Sol se llega después de algunas simplificaciones matemáticas a la ecuación:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{MGE}{C^2J^2} + 3u^2\frac{MG}{C^2} \qquad \cdots\cdots\cdots (A)$$

en donde $u = \frac{1}{r}$; E y J son constantes. Para el caso de la luz E = 0 siendo así la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2\frac{MG}{C^2}$$

Si se integra por aproximaciones sucesivas la solución a segunda aproximación expresada en coordenadas rectangulares resulta ser

$$X = \Delta - \frac{MG}{C^2\Delta}\frac{X^2+2Y^2}{\sqrt{X^2+Y^2}}$$

Las asíntotas se hallan tomando "y" muy grande comparada con "x". Así

$$x = \Delta - \frac{MG}{\Delta c^2}(\pm 2y)$$

y el pequeño ángulo entre las asíntotas es:

$$\frac{4MG}{\Delta c^2}$$

que coincide con el resultado obtenido aplicando el principio de Fermat.

III EL RETRASO DE SEÑALES

Supongamos que se manda una señal de radio desde la tierra hacia otro cuerpo que la refleja nuevamente hacia la tie--rra. Para calcular el tiempo de ida y vuelta de esta señal podemos, para simplificar los cálculos, idealizar a la tierra y al reflector fijos en el campo gravitacional del sol. Además, como la diferencia de tiempos entre la verdadera trayectoria y la línea recta, dividida entre el tiempo de la verdadera tra--yectoria está relacionada con el ángulo de deflexión al cuadrado $\approx 10^{-12}$, entonces se puede ignorar la deflexión de la luz y calcular el tiempo como si la luz viajara en línea recta.

Para el observador I el tiempo que tomará a la luz hacer este viaje será:

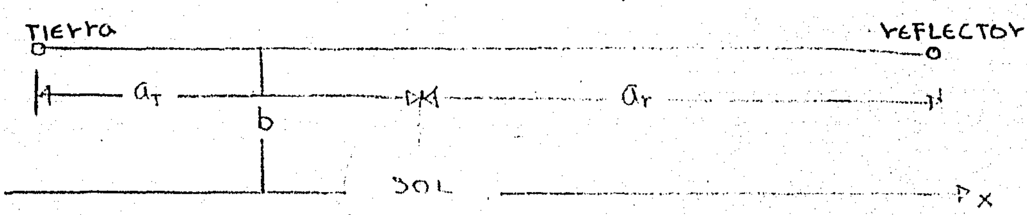
$$T_I = \frac{2}{c}\int_{-a_T}^{a_r} dx \, \frac{1}{\left(1-\frac{GM}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right)^2} \approx \frac{2}{c}\int_{-a_T}^{a_r} dx\left(1+\frac{2GM}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right)$$

pero el tiempo de I está relacionado con el tiempo en la tierra de acuerdo a la expresión:

$$\tau_{tierra} = T_I\left(1-\frac{GM}{c^2\sqrt{a_T^2+b^2}}\right)$$

Entonces el tiempo de viaje de acuerdo a observadores en la tierra es:

$$\tau_T = \frac{2}{c}\left(1-\frac{GM}{c^2\sqrt{a_T^2+b^2}}\right)\int_{-a_T}^{a_r}\left(1+\frac{2GM}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx \quad \cdots\cdots(6)$$



Para obtener el tiempo de viaje de acuerdo a la teoría de la Relatividad General haremos uso de las mismas simplificaciones que en el caso anterior. Partiremos de la expresión (3) escrita en coordenadas isótropas la cual tiene la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{MG}{2rc^2}\right)^2 \left(1 + \frac{MG}{2rc^2}\right)^{-2} c^2 d\tau^2 - \left(1 + \frac{MG}{2rc^2}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\simeq \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) c^2 d\tau^2 - \left(1 + \frac{2MG}{rc^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

que en nuestro caso se convierte en

$$0 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right) c^2 d\tau^2 - \left(1 + \frac{2MG}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right) dx^2$$

y por lo tanto

$$d\tau \approx \frac{1}{c}\left(1 + \frac{2MG}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right) dx \quad ; \quad d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\frac{g_{xx}}{g_{\tau\tau}}}\, dx$$

Pero además como

$$\zeta_\tau = \sqrt{g_{\tau\tau}}\,\tau = \sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2\sqrt{a_\tau^2+b^2}}}\,\tau \approx \left(1 - \frac{MG}{c^2\sqrt{a_\tau^2+b^2}}\right)\tau$$

entonces se obtiene:

$$\zeta_\tau \approx 1 - \frac{MG}{c^2\sqrt{a_\tau^2+b^2}}\ \frac{2}{c}\int_{-a_\tau}^{a_\tau}\left(1 + \frac{2GM}{c^2\sqrt{x^2+b^2}}\right) dx$$

en correspondencia con la expresión (6) obtenida por nosotros.

IV LA ORBITA DE LOS PLANETAS

Desde mediados del siglo pasado la Astronomía descubrió que el perihelio de Mercurio precedía 574" por siglo; de éstos, 531" se pueden explicar a base de perturbaciones producidas por cuerpos conocidos, sin embargo para los 43" restantes no hay explicación posible dentro del contexto de la Teoría Gravitacional de Newton.

Se ha sugerido la introducción de términos adicionales en la ley de fuerzas de Newton; pero aunque el introducir un término adicional en dicha ley es un argumento lógico, esto no tiene mucha aceptación entre los físicos. La razón de esto, es que existen teorías como la Relatividad General, que pueden explicar tal fenómeno sin recurrir a esas ideas.

Nosotros ahora queremos ver qué tipo de curva sigue un planeta bajo la influencia gravitacional del Sol., pero suponiendo que la ley de Gravitación Universal de Newton es válida localmente.

Usamos la palabra localmente, para especificar que la ecuación de movimiento, que obedece una partícula que se desplaza originalmente a lo largo de una línea radial es:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = F(r)$$

Siendo τ el tiempo medido con relojes situados a una distancia r del sol, y siendo $F(r)$ la ley de fuerzas.

Por las ecuaciones deducidas anteriormente. Se sigue que la ecuación de movimionto de una partícula que se desplaza originalmente a lo largo de una línea radial, de acuerdo a un observador en I es:

$$\frac{d^2r}{dT^2} = -\frac{MG}{r^2}\left(1+\frac{\phi}{C^2}\right)^2$$

y como $\frac{d^2r}{dT^2} = -\nabla\phi$ entonces. $\nabla\phi = \frac{MG}{r^2}\left(1+\frac{\phi}{C^2}\right)^2$

Si en $r = \infty$, $\phi = 0$, resolviendo la ecuación diferencial llegamos a:

$$\phi = -\frac{\frac{GM}{r}}{\frac{GM}{rC^2}+1}$$

De la teoría de orbitas encontramos que la ecuación diferencial que describe la trayectoria del planeta es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}\left(1+\phi/C^2\right)^2 \approx \frac{GM}{L^2}\left(1-\frac{2GM}{C^2}u\right)$$

en donde θ es el ángulo polar, $u = \frac{1}{r}$ y $L = r^2\dot{\theta}$ resolviendo la ecuación y haciendo uso de otros resultados de la teoría de orbitas obtenemos:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\left(1+\frac{G^2M^2}{C^2L^2}\right)\theta}$$

aquí "a" es el semieje mayor de la orbita y ϵ su excentricidad.

La ecuación anterior es una elipse cuya línea de ápsides gira conforme gira el ángulo polar.

Para calcular el ángulo que precede la orbita notamos que cuando $\left(1+\frac{G^2M^2}{C^2L^2}\right)\theta = 0, 2\pi, \ldots, 2n\pi$ r es mini que la ecuación de movimiento de una partícula que se desplaza originalmente a lo largo de una línea radial, de acuerdo a un observador en I es:

$$\frac{d^2r}{dT^2} = -\frac{MG}{r^2}\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2$$

y como $\frac{d^2r}{dT^2} = -\nabla\phi$ entonces. $\nabla\phi = \frac{MG}{r^2}\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2$

Si en $r = \infty$, $\phi = 0$, resolviendo la ecuación diferencial llegamos a:

$$\phi = -\frac{\frac{GM}{r}}{\frac{GM}{rc^2}+1}$$

De la teoría de orbitas encontramos que la ecuación diferencial que describe la trayectoria del planeta es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}\left(1+\phi/c^2\right)^2 \approx \frac{GM}{L^2}\left(1-\frac{2GM}{c^2}u\right)$$

en donde θ es el ángulo polar, $u = \frac{1}{r}$ y $L = r^2\dot{\theta}$ resolviendo la ecuación y haciendo uso de otros resultados de la teoría de orbitas obtenemos:

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\left(1+\frac{G^2M^2}{c^2L^2}\right)\theta}$$

aquí "a" es el semieje mayor de la orbita y ϵ su excentricidad.

La ecuación anterior es una elipse cuya línea de ápsides gira conforme gira el ángulo polar.

Para calcular el ángulo que precede la orbita notamos que cuando $\left(1+\frac{G^2M^2}{c^2L^2}\right)\theta = 0, 2\pi, \ldots , 2n\pi$ r es míni ma, pero esta condición se cumple si

$$\theta = 0,\ 2\pi\left(1+\frac{G^2M^2}{c^2L^2}\right)^{-1} \cdots ,$$

de aquí que el ángulo de precesión por revolución sea igual a

$$\approx 2\pi - \frac{2\pi G^2M^2}{c^2L^2} = 0' - \frac{2\pi G^2M^2}{c^2L^2} = -\frac{2\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)}$$

La precesión observada es $\frac{6\pi GM}{c^2 a(1-\epsilon^2)}$ o sea, menos tres veces lo obtenido por nosotros.

En vista de la discrepancia anterior vamos a buscar ahora una ley de fuerzas local que nos dé la precesión observada.

Utilizando nuevamente resultados conocidos de la teoría de órbitas, se obtiene que la ecuación diferencial que describe a la trayectoria del planeta es:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{u^2L^2}\nabla\phi\left(1+\phi/c^2\right)^2$$

en donde ϕ representa el potencial por determinar.

Así mismo la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{L^2}\left(1+6\frac{Mu}{c^2}\right)$$

tiene por solución

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\left(1-\frac{3G^2M^2}{c^2L^2}\theta\right)}$$

Calculando el ángulo de precesión por revolución en forma similar a como se hizo en el caso anterior se obtiene que este es: $\frac{6\pi GM}{ac^2(1-\epsilon^2)}$

Lo que resta ahora es comparar las dos ecuaciones diferenciales anteriores y encontrar así a ϕ . Entonces:

$$\frac{r^2}{L^2}\nabla\phi\left(1+\frac{\phi}{c^2}\right)^2 \approx \frac{r^2}{L^2}\nabla\phi\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) = \frac{GM}{L^2}\left(1+\frac{6GM}{rc^2}\right)$$

$$\int_0^{\phi} d\phi\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right) = \int_0^{r}\left(\frac{GM}{r^2}+\frac{6G^2M^2}{c^2r^3}\right)dr$$

$$\Rightarrow \quad \phi^2/c^2 + \phi + \frac{GM}{r} + \frac{3G^2M^2}{c^2r^2} = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática tenemos:

$$\phi = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2}\sqrt{1-\frac{4}{c^2}\left(\frac{GM}{r}+\frac{3G^2M^2}{r^2c^2}\right)} \approx -\frac{c^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{GM}{r}-\frac{3G^2M^2}{c^2r^2}$$

$$-\frac{c^2}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{16}{c^4}\left(\frac{GM}{r}+\frac{3G^2M^2}{c^2r^2}\right)^2+\cdots \approx -\frac{GM}{r}-\frac{4G^2M^2}{r^2c^2}$$

La introducción del término $-\frac{4G^2M^2}{r^2c^2}$ en el potencial conocido y utilizado en las secciones anteriores no invalida los resultados obtenidos anteriormente. Puesto que son precisamente este tipo de términos los que se despreciaron en la expansión en serie de las expresiones que aparecieron en dichas secciones.

Falta presentar ahora la forma en que la teoría de la Relatividad General obtiene dicho efecto.

Partiremos de la ecuación diferencial (A). Para el caso de una partícula se tiene que $ds \neq 0$ y por tanto $E \neq 0$ podemos normalizar de tal forma que $E=1$ y la ecuación (A) se reescribirá como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{MG}{c^2 J^2} + \frac{3MG}{c^2} u^2$$

con

$$J = r^2 \frac{d\theta}{dp} = r^2 \frac{d\theta}{ds} = c J_\epsilon .$$

De la solución de la ecuación diferencial anterior, se obtiene que la precesión por revolución resulta ser:

$$\frac{6\pi GM}{ac^2(1-\epsilon^2)}$$ tal y como es sabido.

BIBLIOGRAFIA

Eddington A.S. The Mathematical Theory of Relativity.Cambridge University Press. 1922. 270 pp.

Einstein Albert, The Meaning of Relativity. Princeton University. Press; New Jersey, 1950, 145 pp.

Einstein(and others). The Principle of Relativity Dover, 216 pp.

Huong G. T. C. Engineering Mechanics. Vol. II Dynamics. 460 pp. Addison-Wesley Pub. Co. Inc. 500 pp.

Landau y Lifshitz. Teoria Clasica de los Campos (Física Teorica). Ed. Reverté S. A. Mexico, 1966, 466 pp.

Misner Charles W. (and others) Gravitation. W. H. Freeman and Co. San Francisco 1973, 1277 pp.

Marion Jerry B. Classical Dynamics Academic Prees 576 pp.

Rossi Bruno Optics. Addison Wesley Pub. Co. Inc. 500 pp.

Weinberg Steven Gravitation and Cosmology (Principles and application of the General Theory of Relativity). New York, 1972, 657 pp.