



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
A R A G O N

25  
2ej.

**ANÁLISIS SISMICO ESTÁTICO DE EDIFICIOS  
CON MARCOS NO ORTOGONALES EN PLANTA**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO CIVIL  
P R E S E N T A :

**MOISES MEZA OSORIO**

ASESOR: ING. PASCUAL GARCIA CUEVAS

MEXICO, D. F.,

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

1988



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## I N D I C E

INTRODUCCION . . . . .	1
I.- SOLUCION MATEMATICA DE LA DISTRIBUCION DE LA FUERZA CORTANTE DE ENTREPISO . . . . .	3
I.1.- Análisis Sísmico Estático de Edificios de un Entrepiso . . . . .	4
I.2.- Análisis Sísmico Estático de Edificios de más de un Entrepiso . . . . .	31
II.- EJEMPLO NUMERICO . . . . .	33
II.1.- Cálculo de Rigideces Principales . . . . .	39
II.2.- Cálculo del Centro de Torsión . . . . .	42
II.3.- Distribución de Fuerza Cortante . . . . .	47
III.- CONCLUSIONES . . . . .	57

## INTRODUCCION

Las ideas que se presentan en esta tesis, han sido desarrolladas por el Ingeniero Julio Dany Rios, profesor de la facultad de Ingeniería de la UNAM, en su artículo "Diagonalización de Matrices de Rigidez" (ref. 4) que apareció publicado en la revista de Ingeniería de la UNAM, en octubre de 1977, México, D.F

El objeto de tomar este artículo como tesis es el de hacer comprensibles las ideas que se presentan en el mismo, aplicandolas en el desarrollo de un ejemplo numérico.

El problema que trata dicha ponencia está enfocado al estudio de un análisis sísmico estático a edificios en los cuales - hay marcos que no presentan una ortogonalidad entre sí, siendo este el punto de interés por resolver. Como se podrá observar durante el desarrollo de este trabajo, la solución que se da está enfocada inicialmente en plantear la matriz de rigidez de entrepiso y posteriormente diagonalizar la misma que de esta manera permite distribuir en forma muy simplificada la fuerza cortante

de entrepiso a cada marco del mismo.

Respecto a las hipótesis de referencia en que está basado el desarrollo matemático para llegar a la solución de distribución de la fuerza cortante de entrepiso, teniendo marcos no ortogonales en planta, son las mismas que se tienen cuando hay marcos paralelos a un sistema de ejes ortogonales en planta, y que se mencionan posteriormente en el capítulo I.

En cuanto al desarrollo analítico inicialmente se hace el análisis a edificios de un entrepiso y posteriormente se mencionan las condiciones que se deben cumplir ( Hipótesis de las Alfas ) para la aplicación a edificios de más de un nivel.

Por otra parte cabe mencionar que las ideas que se presentan han sido puestas a prueba en la aplicación del análisis sísmico estático de un gran número de edificios.

## CAPITULO I

SOLUCION MATEMATICA DE LA DISTRIBUCION  
DE LA FUERZA CORTANTE DE ENTREPISO

Para la solución matemática de la distribución de la fuerza cortante de entrepiso entre los marcos, en primer lugar se analizará el desplazamiento de cuerpo rígido, fig. 2, del que se obtendrán las rigideces del entrepiso que integrarán a la matriz de rigidez del mismo, posteriormente se procederá a la diagonalización de la misma, haciéndolo en dos etapas; primero se buscará la dirección de los ejes principales de rigidez y segundo, se encontrará el centro de torsión, punto al cual se trasladarán los ejes principales de rigidez; diagonalizada la matriz se determinará la expresión que define la magnitud de la fuerza cortante que le corresponde a cada marco del entrepiso, así como la dirección  $\Psi$ , sísmica para cada marco que hace más crítico el cortante hacia los mismos.

### Hipótesis de Referencia

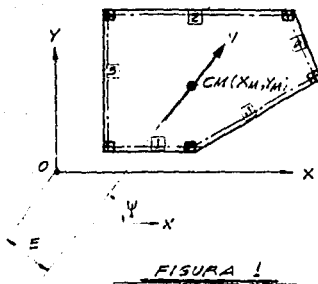
Para el análisis sísmico estático de edificios, a saber se suponen las siguientes hipótesis (referencia 1)

- a).- las losas son infinitamente rígidas bajo cargas en su plano
- b).- Se consideran a los marcos con una rigidez nula en la - dirección normal a su plano.
- c).- Se idealizan las acciones sísmicas como fuerzas horizontales aplicadas en los centros de masa de los niveles.

#### I.1.- Análisis Sísmico Estático de Edificios de un Entrepiso

##### I.1.1.- Planteamiento de la Matriz de Rigidez de un Entrepiso.

Para fines de introducción se consideran edificios de un entrepiso, estos casos presentan la ventaja de que se pueden trabajar en forma exacta con la rigidez de entrepiso de los marcos, definida como el cociente del cortante de entrepiso entre el desplazamiento producido en el marco al aplicar ese cortante, considérese el edificio de un entrepiso mostrado en la fig. 1.



El punto CM es el centro de masas del nivel; en el se -  
 considera aplicada la fuerza cortante  $V$  del entrepiso, se su-  
 pone que el sismo tiene una dirección cualquiera  $\psi$ .

Debido a la acción sísmica el entrepiso sufrirá un despla-  
 zamiento de cuerpo rígido cuyas componentes serán  $D_x$ ,  $D_y$  y  $\theta$   
 como se aprecia en la fig. 2

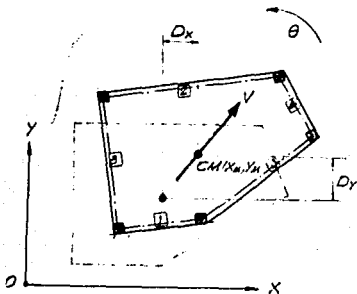


FIGURA 2

Analizando los desplazamientos que sufre el entrepiso, es obvio sentir que la suma de desplazamientos que permiten los marcos en las direcciones  $x$ , y son los desplazamientos totales  $D_x$ ,  $D_y$  incluyendo al giro  $\theta$ , por lo que resulta claro la necesidad de conocer los desplazamientos en su línea de acción de cada marco, y por consecuencia sus componentes en las direcciones  $x$ , y así como el giro que sufren respecto al origen del sistema coordinado de referencia.

Ilustrando en forma gráfica lo anterior analicemos al desplazamiento total del entrepiso en dos partes;



Primero; Veamos el desplazamiento paralelo a la línea de acción del cortante sísmico  $V$  como se aprecia en la fig. 3

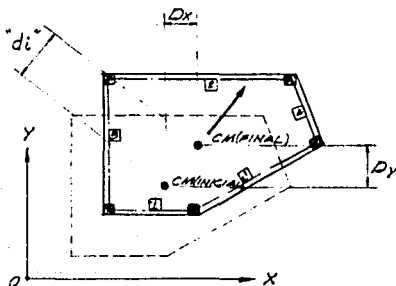


FIGURA 3

Para esta primera etapa se tiene el desplazamiento " $di$ " (referenciado con respecto a un punto cualquiera, sea convencionalmente el punto  $CM$ ) del cual se descomponen los desplazamientos  $Dx$  y  $Dy$  en  $x, y$  respectivamente. Antes de concluir esta primera etapa analicemos la segunda; Giro del Entrepiso (este finalmente causado por una excentricidad entre el centro de masas y el centro de torsión) como se indica en la figura 4 .

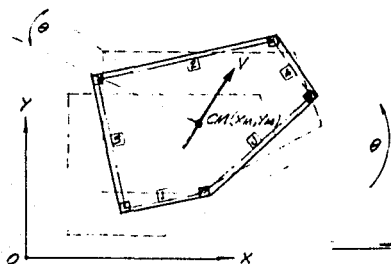
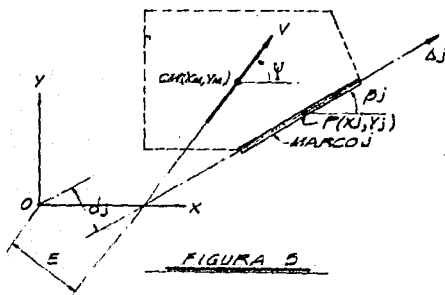


FIGURA 4

La observación básica y clara a estas ilustraciones de los desplazamientos de cuerpo rígido, es de que para la primera etapa el desplazamiento lateral de los marcos (sea específicamente el marco 2) es nada menos que la suma de las proyecciones de  $D_x$  y  $D_y$  sobre la línea de acción del marco en cuestión, para el caso del marco 2 la proyección de  $D_y$  vale cero mientras que la proyección de  $D_x$  vale uno, aunado a esto de la segunda etapa se aprecia un desplazamiento contrario al de la primera etapa de manera que el desplazamiento final del marco 2 será igual a  $D_x$  (un desplazamiento debido al giro).

Concluyendo finalmente que el desplazamiento lateral total de un marco cualquiera del entrepiso en estudio, es igual a la suma de las proyecciones de los desplazamientos de cuerpo rígido  $D_x, D_y$  y  $\theta$ .

Lo anterior conduce necesariamente a una demostración analítica, aislando un marco cualquiera (sea el marco  $J$ ) del entrepiso en estudio, en el cual podamos analizar las proyecciones de los desplazamientos de cuerpo rígido para llegar al desplazamiento lateral del marco, tenemos la figura 5 en la cual se encuentra el marco  $J$  bien definido respecto al sistema de ejes  $x$ , y por unas coordenadas de un punto cualquiera sobre su línea de acción, así como su ángulo de inclinación respecto al eje  $x$ .



Iniciando el cálculo del desplazamiento lateral total del marco J, tenemos en primer lugar la proyección de  $D_x$  sobre el mismo, en la figura 6.

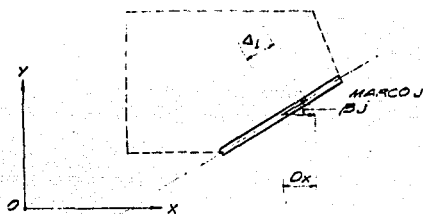


FIGURA 6

Como se aprecia en la figura el desplazamiento proyectado sobre el marco vale

$$\Delta_1 = D_x \cos \beta_j$$

Más la proyección de  $D_y$ , figura 7

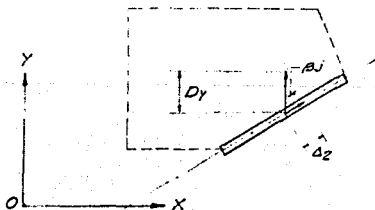


FIGURA 7

Que tiene el valor de:

$$\Delta_2 = D_y \text{ Sen } \beta_j$$

Y más el desplazamiento debido al giro  $\theta$  (que es de cuerpo rígido y respecto al origen del sistema coordenado  $x, y$ ) figura 8

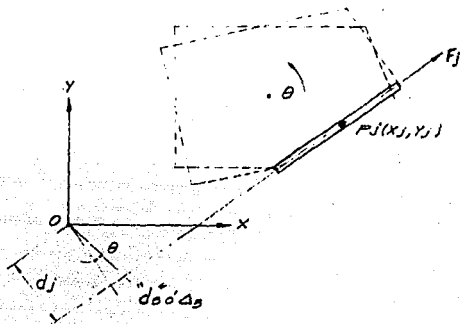


FIGURA 8

Que como se puede ver en la figura se trata de un desplazamiento de arco "ds\*" que tiene el valor de ;

$$ds = \theta dj$$

Que por ser muy pequeño se puede considerar como un desplazamiento sobre la línea de acción del marco en estudio, es decir se tiene:

$$\Delta_3 = \theta dj$$

De tal forma que sumando los desplazamientos proyectados en el marco J se tiene el desplazamiento total

$$\Delta_j = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

o'

$$\Delta_j = D_x \text{ Cos } \beta_j + D_y \text{ Sen } \beta_j + \theta dj$$

Desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco J nos da la fuerza

$$F_j = K_j \Delta_j$$

Que absorbe dicho marco y que proyectada en las direcciones x,y tenemos respectivamente

$$F_{xj} = K_j \Delta_j \cos \beta_j \text{----- } 1$$

$$F_{yj} = K_j \Delta_j \sin \beta_j \text{----- } 2$$

Que vienen a ser las fuerzas equilibrantes a la descomposición del cortante sísmico V en las direcciones x,y respectivamente, ver figura 9.

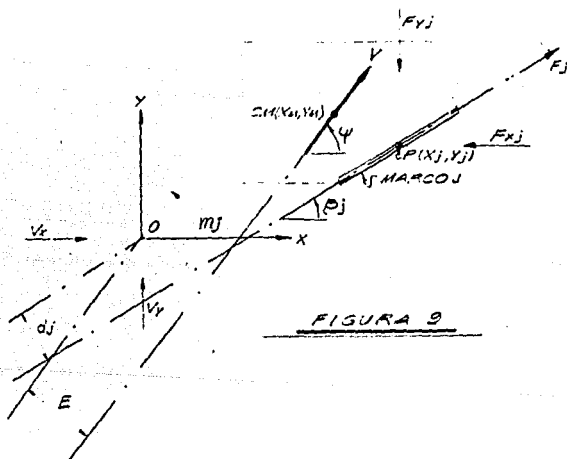


FIGURA 9

Además de generarse el momento debido a la fuerza  $F_j$

$$m_j = K_j \Delta_j d_j \text{----- } 3$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta_j$  en las ecuaciones 1, 2 y 3 tenemos respectivamente;

$$\begin{aligned} F_{xj} &= K_j (D_x \cos^2 \beta_j + D_y \sin \beta_j \cos \beta_j + \theta a_j \cos \beta_j) \\ F_{yj} &= K_j (D_x \cos \beta_j \sin \beta_j + D_y \sin^2 \beta_j + \theta a_j \sin \beta_j) \\ M_j &= K_j (D_x d_j \cos \beta_j + D_y d_j \sin \beta_j - \theta a_j^2) \end{aligned}$$

De manera que por equilibrio del entrepiso respecto al origen del sistema coordenado  $x, y$  (ver figura 9) las ecuaciones serán respectivamente para la dirección  $x, y$  y el giro  $\theta$ .

$$\begin{aligned} V_x &= \left[ \sum K_j \cos^2 \beta_j \right] D_x + \left[ \sum K_j \sin \beta_j \cos \beta_j \right] D_y + \left[ \sum K_j d_j \cos \beta_j \right] \theta \\ V_y &= \left[ \sum K_j \cos \beta_j \sin \beta_j \right] D_x + \left[ \sum K_j \sin^2 \beta_j \right] D_y + \left[ \sum K_j d_j \sin \beta_j \right] \theta \\ M &= \left[ \sum K_j d_j \cos \beta_j \right] D_x + \left[ \sum K_j d_j \sin \beta_j \right] D_y - \left[ \sum K_j d_j^2 \right] \theta \end{aligned}$$

Donde;  $M = V_x \Xi$

Haciendo:

$$\begin{aligned} K_{xx} &= \sum K_j \cos^2 \beta_j \\ K_{xy} &= \sum K_j \sin \beta_j \cos \beta_j \\ K_{x\theta} &= \sum K_j d_j \cos \beta_j \\ K_{yx} &= \sum K_j \cos \beta_j \sin \beta_j \\ K_{yy} &= \sum K_j \sin^2 \beta_j \\ K_{y\theta} &= \sum K_j d_j \sin \beta_j \\ K_{\theta x} &= \sum K_j d_j \cos \beta_j \\ K_{\theta y} &= \sum K_j d_j \sin \beta_j \\ K_{\theta\theta} &= \sum K_j d_j^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones resultan simplificadas de la siguiente manera:

$$V_x = K_{xx} D_x + K_{xy} D_y + K_{x\theta} \theta$$

$$V_y = K_{yx} D_x + K_{yy} D_y + K_{y\theta} \theta$$

$$M = K_{\theta x} D_x + K_{\theta y} D_y + K_{\theta\theta} \theta$$

Y que en forma matricial resulta

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{x\theta} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\{V\} = [K] \{D\}$$

De donde se puede observar que:

$$K_{xy} = K_{yx} = \sum K_j \cos \theta_j \sin \theta_j$$

$$K_{x\theta} = K_{\theta x} = \sum K_j d_j \cos \theta_j$$

$$K_{y\theta} = K_{\theta y} = \sum K_j d_j \sin \theta_j$$

Lo cual indica que la matriz de rigidez es simétrica.

Se hace la observación de que en las expresiones obtenidas de rigidez se tiene el término  $d_j$ , que es la distancia del origen de ejes coordenados  $x, y$  a la línea de acción del marco  $j$  y que se puede conocer sabiendo las coordenadas de un punto dado  $(x_j, y_j)$  y conociendo la ecuación de una recta que en este caso corresponde a la recta  $(\overline{OA})$  paralela a la línea de acción del marco  $j$  y que pasa por el origen del sistema coordenado  $x, y$  (ver figura 10).

De la geometría analítica (Ref. 2) sabemos que la expresión que define la distancia entre un punto dado y la línea de acción de una recta definida por la ecuación  $Ax + By + C = 0$  es:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{-----} \quad 7$$

De manera que la ecuación de la recta  $\overline{OA}$  indicada en la figura 10, es

$$y = mx$$

Si  $m$  es igual a la pendiente de la recta, esta es igual a la tangente del ángulo de inclinación, teniendo entonces que;

$$y = \tan(\beta_j) \cdot X$$

De la identidad trigonométrica:

$$\tan \beta_j = \frac{\text{Sen } \beta_j}{\text{Cos } \beta_j}$$

Se tiene entonces que:

$$y = \frac{\text{Sen } \beta_j}{\text{Cos } \beta_j} \cdot X$$

o

$$\text{Sen } \beta_j \cdot X - \text{Cos } \beta_j \cdot Y = 0$$

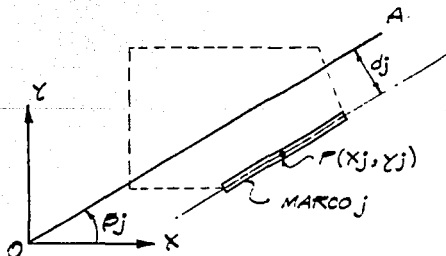


FIGURA 10



Y que corresponde a la ecuación de la recta  $\overline{O\bar{A}}$ , donde los términos A y B son respectivamente;  $\text{Sen}\beta_j$  y  $-\text{Cos}\beta_j$  y  $C=0$  sustituyendo valores en la expresión 7 se tiene:

$$d = \frac{\text{Sen } \beta_j \cdot X_j + (-\text{Cos } \beta_j \cdot Y_j)}{\sqrt{(\text{Sen } \beta_j)^2 + (-\text{Cos } \beta_j)^2}}$$

Donde;

$$(\text{Sen } \beta_j)^2 + (\text{Cos } \beta_j)^2 = 1$$

Por lo que finalmente la distancia  $d_j$  vale:

$$d_j = \text{Sen } \beta_j \cdot X_j - \text{Cos } \beta_j \cdot Y_j$$

De manera análoga se obtiene el término E, que es la distancia del origen de coordenadas x,y a la línea de acción de la fuerza cortante V (ver figura 9)

$$E = \text{Sen } \psi \cdot X_M - \text{Cos } \psi \cdot Y_M$$

Aclarados los términos faltantes de las ecuaciones de equilibrio y establecida la matriz de rigidez [K] del entrepiso en estudio, procederemos a realizar una simplificación de la misma de tal forma que se tenga la diagonal principal lo cual se efectuará en dos etapas.

## Primera Etapa

## I) ROTACION DE EJES COORDENADOS

El interés de esta primera etapa es la de hallar la inclinación de los ejes coordenados  $x, y$  en la cual se encuentran las rigideces principales máximas y mínimas del entrepiso, este problema es similar al de obtener eigenvalores (valores característicos) y eigenvectores de matrices simétricas, de manera que para diagonalizar a la matriz  $[K]$  se hace una aclaración, si se busca un giro de los ejes de referencia  $x, y$  del entrepiso, las rigideces angulares  $K_{xx}$  y  $K_{yy}$  serán las mismas antes y después del giro por mantenerse el mismo punto de referencia y por lo tanto la matriz  $[K]$  por resolver, la podemos considerar simplificada de la forma siguiente;

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}$$

Manteniéndose simétrica.

Introduciendonos al problema de obtener eigenvalores y eigenvectores de matrices simétricas (ref. 3) tenemos que la ecuación:

$$[K]\{D\} = \{V\} \quad \text{-----} \quad 8$$

Puede imaginarse como una transformación lineal que transforma un vector dado  $\{D\}$  en un vector nuevo  $\{V\}$ . Los vectores que se transforman en múltiplos de sí mismos tienen un papel importante en muchas aplicaciones, por ejemplo, se encuentra este problema al hallar los ejes principales de los esfuerzos en un cuerpo elástico y al encontrar los modos de vibración libre en un sistema conservativo con un número finito de grados de libertad. Para encontrar tales vectores, hacemos que:

$$\{V\} = K'\{D\}$$

Donde:

$K'$  es un factor escalar de proporcionalidad, y buscamos soluciones de la ecuación que resulta de sustituir la ecuación 9 en la 8, y que es:

$$[K] \{D\} = K' \{D\} \text{ ----- } 10$$

o bien

$$\{[K] - K'[I]\} \{D\} = \{0\} \text{ ---- } 11$$

La ecuación 11 tiene soluciones si y solo si se elige  $K'$  de modo que

$$\text{DET. } \{[K] - K'[I]\} = 0 \text{ ----- } 12$$

A los valores de  $K'$  que satisfacen la ecuación 12 se conocen como eigenvalores ( o rigideces principales ) de la matriz  $[K]$  y a las soluciones de la ecuación 10 que se obtienen usando el valor de  $K'$  se llaman eigenvectores correspondientes a ese eigenvector.

Para nuestro caso particular que se trata de encontrar los ejes principales no de esfuerzos si no de rigidez, procedemos a determinar los eigenvalores  $K'$ .

Sustituyendo a  $[K]$  en la ecuación 11

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} - K' \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Simplificando Matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} (K_{xx} - K') & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy} - K') \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la ecuación 12 se tiene:

$$\text{DET} \begin{bmatrix} (K_{xx} - K') & K_{xy} \\ K_{yx} & (K_{yy} - K') \end{bmatrix} = (K_{xx} - K')(K_{yy} - K') - K_{xy}K_{yx} = 0$$

$$= K_{XX} K_{YY} - K_{XX} R^1 - K_{YY} R^1 + R^{12} - K_{XY} K_{YX} = 0$$

Ordenando términos y tomando en cuenta que  $K_{xy} = K_{yx}$  se llega a:

$$R^{12} - (K_{XX} + K_{YY}) R^1 + K_{XX} K_{YY} - K_{XY}^2 = 0$$

Que es una ecuación de segundo grado con una incógnita, haciendo:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -(K_{XX} + K_{YY}) \\ c &= (K_{XX} K_{YY} - K_{XY}^2) \end{aligned}$$

Podemos sustituir estos valores en la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, es decir en:

$$R^1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo valores resulta:

$$R^1 = \frac{(K_{XX} + K_{YY}) \pm \sqrt{(-K_{XX} - K_{YY})^2 - 4(1)(K_{XX} K_{YY} - K_{XY}^2)}}{2(1)}$$

Ecuación que simplificando términos nos da los valores siguientes:

$$R_1^1 = \frac{K_{XX} + K_{YY}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{XX} - K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{XY}^2}$$

$$R_2^1 = \frac{K_{XX} + K_{YY}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{XX} - K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{XY}^2}$$

Que son los que satisfacen a la ecuación 12, y finalmente son los valores equivalentes a las rigideces principales máximas y mínimas del entropiso en estudio, manteniendo la nomenclatura de rigidez con la letra K, las rigideces principales son:

$$K_{XX}^1 = \frac{K_{XX} + K_{YY}}{2} + \sqrt{\left(\frac{K_{XX} - K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{XY}^2} \quad \dots 13$$

$$K_{YY}^1 = \frac{K_{XX} + K_{YY}}{2} - \sqrt{\left(\frac{K_{XX} - K_{YY}}{2}\right)^2 + K_{XY}^2}$$

Para hallar el ángulo en el cual se encuentran las rigideces principales es el equivalente a determinar los eigenvalores de cada eigenvalor ( $K_{xx}$  y  $K_{yy}$ ) y esto se logra sustituyendo cada uno de los eigenvalores en la ecuación 10, sustituyendo en primer lugar a  $K_{xx}$  se tiene:

$$[R] \{D\} = K_{xx}' \{D\} \quad \text{-----} \quad (13-1)$$

Donde  $K_{xx}'$  es el factor escalar de proporcionalidad que permite la transformación lineal del vector dado  $\{D\}$  en un vector nuevo  $\{V\}$  es decir que:

$$K_{xx}' \{D\} = \{V\}$$

De manera que sustituyendo valores de matriz y vectores de la ecuación (13-1) se tiene:

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = K_{xx}' \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix}$$

ó

$$K_{xx} D_x + K_{xy} D_y = K_{xx}' D_x \quad \text{-----} \quad 14$$

$$K_{yx} D_x + K_{yy} D_y = K_{xx}' D_y \quad \text{-----} \quad 15$$

Ecuaciones de las cuales resulta conveniente normalizar el eigenvector  $\{D\}$  ( es decir especificar una constante multiplicativa ), requiriendo en forma alternada de hacer que una de las dos componentes sea igual a uno.

Es claro que al realizar lo anterior, es decir hacer unitario por ejemplo a  $D_x$  y hallar el valor de  $D_y$  ó viceversa, estaremos determinando una relación de desplazamientos lo cual significa encontrar un ángulo en el cual se encontrará  $K_{xx}'$ .

Haciendo  $D_x = 1$  ( de ecs. 14 y 15 ) se llega a los siguientes eigenvectores

$$\{D\}_1 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{xx}' - K_{xx}}{K_{xy}} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad 16$$

$$\{D\}_2 = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{xx}' - K_{yy}} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad 17$$

Los cuales arrojan los mismos valores y que en forma gráfica se describe de la siguiente manera:

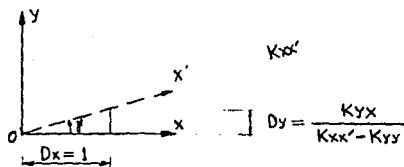


FIGURA 11

Sustituyendo el valor de  $K_{yy}'$  en la ecuación 10 se llega a las ecuaciones

$$K_{xx} Dx + K_{xy} Dy = K_{yy}' Dx \quad \text{-----} \quad 18$$

$$K_{yx} Dx + K_{yy} Dy = K_{yy}' Dy \quad \text{-----} \quad 19$$

Normalizando el eigenvector  $\{D\}$  análogamente al valor de  $K_{xx}'$  se llega a los eigenvectores

$$\{D\}_1 = \begin{Bmatrix} Dx \\ Dy \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yy}' - K_{xx}}{K_{xy}} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad 20$$

$$\{D\}_2 = \begin{Bmatrix} Dx \\ Dy \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{yy}' - K_{yy}} \end{Bmatrix} \quad \text{-----} \quad 21$$

Que también arrojan los mismos valores teniendo la siguiente descripción gráfica:

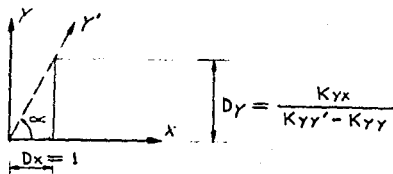


FIGURA 12

De lo anterior surge la interrogante de saber si los planos en los que se encuentran las rigideces máximas y mínimas ( $K_{xx}$  y  $K_{yy}$ ) son perpendiculares o no, lo anterior se puede conocer haciendo el producto punto de dos vectores, que en este caso serían las expresiones 16 y 21 ó 17 y 20.

Tomando las expresiones 17 y 20 procederemos a tal demostración debiéndose cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{K_{yy}' - K_{xx}}{K_{xy}} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{xx} - K_{yy}} \end{array} \right\} = 0$$

Haciendo el producto se tiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{K_{yy}' - K_{xx}}{K_{xy}} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{K_{yx}}{K_{xx} - K_{yy}} \end{array} \right\} &= (1)(1) + \left( \frac{K_{yy}' - K_{xx}}{K_{xy}} \right) \left( \frac{K_{yx}}{K_{xx} - K_{yy}} \right) \\ &= 1 + \left[ \frac{(K_{yy}' - K_{xx}) K_{yx}}{K_{xy} (K_{xx} - K_{yy})} \right] \end{aligned}$$

Conociendo que  $K_{yx} = K_{xy}$  se tiene que lo anterior es igual

$$= 1 + \left( \frac{K_{yy}' - K_{xx}}{K_{xx} - K_{yy}} \right)$$

Sustituyendo los valores de  $K_{xx}$  y  $K_{yy}$  y simplificado términos se llega a la expresión:

$$+ \left( \frac{K_{yy} - K_{xy} - K_{xx}}{K_{xx} + K_{xy} - K_{yy}} \right) = 0$$

Multiplicando ambos miembros por -1 y simplificando términos se obtiene la expresión:

$$-1 + \frac{K_{yy}}{K_{yy}} = 0$$

Y finalmente se tiene que:  $-1 + 1 = 0 \therefore \text{SON } \perp$

Comprobándose así que los vectores (expresiones 17 y 20) son perpendiculares, obteniéndose la siguiente conclusión ;

Para hallar la inclinación de los ejes principales de rigidez  $x'$ , y será suficiente localizar la inclinación de uno de ellos, ambos respecto al eje  $x$ .

Definiendo entonces el ángulo en el que se encuentra el eje  $x'$  de la figura 11 y de la relación de desplazamientos se tiene que:

$$\tan \delta = \frac{K_{yx}/(K_{xx}' - K_{yy})}{1} = \frac{K_{yx}}{(K_{xx}' - K_{yy})}$$

De donde;

$$\delta = \tan^{-1}(K_{yx}/(K_{xx}' - K_{yy}))$$

Si se tiene que  $K_{yx} = K_{xy}$  por convención resulta la expresión final

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{K_{xy}}{K_{xx}' - K_{yy}}\right) \quad \text{-----} \quad 22$$

Para localizar al eje  $y'$  empleando el vector de la expresión 20, cuya relación de desplazamientos se indican en la figura 12, se obtiene que;

$$\tan \alpha = \frac{K_{yx}/(K_{yy}' - K_{yy})}{1} = \frac{K_{yx}}{K_{yy}' - K_{yy}}$$

Obteniéndose el ángulo:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{K_{xy}}{K_{yy}' - K_{yy}}\right) \quad \text{-----} \quad 23$$

En la figura 13, se ilustra gráficamente la localización de los ángulos obtenidos con las expresiones 22 y 23

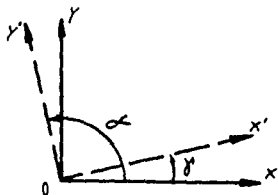


FIGURA 13



Definida la localización de los ejes principales de rigidez (o de esfuerzos) en un cuerpo o estructura elástica, es bien conocido (de cualquier bibliografía de resistencia de materiales) que en dichos planos los esfuerzos cortantes ( $K_{yx} = K_{xy} = 0$ ) se anulan, transformandose la matriz de rigidez  $[R]$  de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{xx}' & 0 \\ 0 & K_{yy}' \end{bmatrix}$$

Recordando que debido al giro de la planta, las rigideces angulares  $K_{x\theta}$ ,  $K_{\theta x}$ ,  $K_{y\theta}$  y  $K_{\theta y}$ , se mantienen iguales antes y después del giro ( $\theta$  ó  $\infty$ ) por mantenerse el mismo punto de referencia, esto indica que a la matriz anterior falta agregarle las rigideces angulares mencionadas, resultando finalmente de esta primera etapa:

$$\begin{bmatrix} K_{xx}' & 0 & K_{x\theta} \\ 0 & K_{yy}' & K_{y\theta} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

### Segunda Etapa

## II) TRASLACION DE LOS EJES PRINCIPALES DE RIGIDEZ

El objetivo de esta segunda etapa es la de trasladar el origen de coordenadas  $x'$ ,  $y'$  al centro de torsión de la planta en estudio, figura 14.

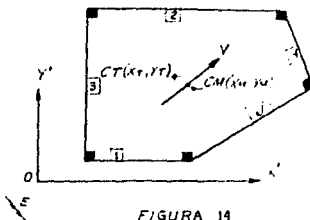


FIGURA 14

El centro de torsión tiene propiedades interesantes, como que es el punto en que no se producen rotaciones al aplicársele una fuerza horizontal; si ésta es paralela a una de las direcciones principales de rigidez, el desplazamiento será paralelo a la fuerza, por lo tanto para determinar el Centro de Torsión analizaremos al entrepiso en estudio (en forma separada) sometido a las fuerzas componentes  $V_x$  y  $V_y$  del cortante sísmico  $V$ .

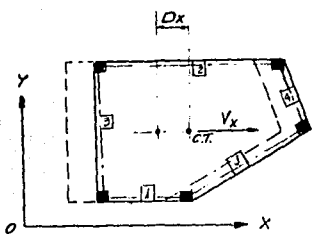


FIGURA 15

Aplicando la fuerza  $V_x$ , figura 15, se genera un desplazamiento  $D_x$ , que en forma análoga a la figura 6, se proyecta al marco  $J$  del cual se derivan las fuerzas en  $x$  y  $y$  respectivamente

$$F_{xx} = K_j \Delta_1 \cos \beta_j$$

$$F_{yx} = K_j \Delta_1 \text{Sen} \beta_j$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta_1 = D_x (\cos \beta_j)$  se tiene;

$$F_{xx} = K_j (\cos \beta_j)^2 D_x$$

$$F_{yx} = K_j \cos \beta_j \text{Sen} \beta_j D_x$$

Haciendo;

$$K_{jx} = K_j (\cos \beta_j)^2$$

$$K_{jy} = K_j \cos \beta_j \text{Sen} \beta_j$$

Se tendrá;

$$F_{xx} = K_{jx} D_x$$

$$F_{yx} = K_{jy} D_x$$

Utilizando las rigideces proyectadas en los ejes  $x'$  y  $y'$  podemos plantear el cálculo del Centro de Torsión, de la fig. 16

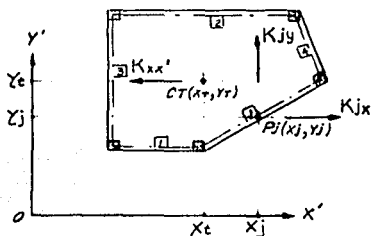


FIGURA 16

Podemos determinar las ecuaciones de equilibrio para hallar la resultante de rigideces (en este caso la rigidez principal  $K_{xx}$ ) en la dirección  $x'$ , haciendo suma de momentos respecto al origen de coordenadas, se obtiene;

$$K_{xx'} \cdot y_t + K_{jy} \cdot x_j - K_{jk} \cdot y_j = 0$$

Despejando  $y_t$ ;

$$y_t = \frac{\sum K_{ix} \cdot y_i - \sum K_{iy} \cdot x_j}{K_{xx'}}$$

Análogamente al procedimiento del cálculo de  $y_t$ , se llega a la ecuación;

$$x_t = \frac{\sum K_{iy} \cdot x_j - \sum K_{ix} \cdot y_j}{K_{yy'}}$$

Sustituyendo los valores de las rigideces proyectadas, se obtienen finalmente las ecuaciones que determinan al Centro de Torsión

$$x_T = \frac{\sum x_j K_j (\text{Sen } \beta_j)^2 - \sum y_j K_j \text{Cos } \beta_j \text{ Sen } \beta_j}{\sum K_j (\text{Sen } \beta_j)^2} \quad \text{--- 24}$$

$$F_{xx} = K_{jx} D_x$$

$$F_{yx} = K_{jy} D_x$$

Utilizando las rigideces proyectadas en los ejes  $x'$  y  $y'$  podemos plantear el cálculo del Centro de Torsión, de la fig. 16

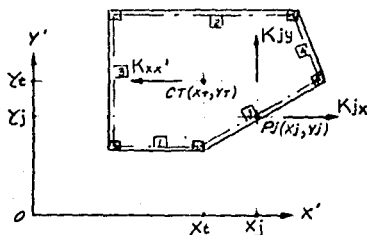


FIGURA 16

Podemos determinar las ecuaciones de equilibrio para hallar la resultante de rigideces (en este caso la rigidez principal  $K_{xx}$ ) en la dirección  $x'$  haciendo suma de momentos respecto al origen de coordenadas, se obtiene;

$$K_{xx'} \cdot Y_t + K_{jy} \cdot X_j - K_{jx} \cdot Y_j = 0$$

Despejando  $Y_t$ ;

$$Y_t = \frac{\sum K_{jx} \cdot Y_j - \sum K_{jy} \cdot X_j}{K_{xx'}}$$

Análogamente al procedimiento del cálculo de  $Y_t$ , se llega a la ecuación;

$$X_t = \frac{\sum K_{jy} \cdot X_j - \sum K_{jx} \cdot Y_j}{K_{yy'}}$$

Sustituyendo los valores de las rigideces proyectadas, se obtienen finalmente las ecuaciones que determinan al Centro de Torsión

$$x_T = \frac{\sum X_j K_j (\text{Sen } \theta_j)^2 - \sum Y_j K_j \text{Cos } \theta_j \text{ Sen } \theta_j}{\sum K_j (\text{Sen } \theta_j)^2} \quad \dots \quad 24$$

$$y_T = \frac{\sum Y_j K_j (\cos \beta_j)^2 - \sum X_j K_j \cos \beta_j \sin \beta_j}{\sum K_j (\cos \beta_j)^2} \quad \text{--- 25}$$

Localizado el Centro de Torsión de la planta en estudio, en la figura 17 se muestra esquemáticamente a los ejes princi-

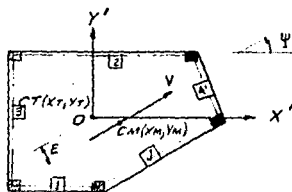


FIGURA 17

pales de rigidez trasladados al mismo, obteniéndose así el sistema general en el que al actuar el sismo ya sea en x ó y el desplazamiento será paralelo a la dirección que actúe, anulándose así el giro de la planta y por consecuencia las rigideces  $K_{x\theta}$ ,  $K_{\theta x}$ ,  $K_{y\theta}$  y  $K_{\theta y}$ , concluyendo así la diagonalización de la matriz de rigidez del entrepiso, resultando finalmente de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} K_{xx'} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy'} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

y las ecuaciones 4 se transforman de la siguiente manera;

$$V_x = K_{xx'} D_x$$

$$V_y = K_{yy'} D_y$$

$$M = K_{\theta\theta} \theta$$

6

26

$$D_x = V_x / K_{xx'}$$

$$D_y = V_y / K_{yy'}$$

$$\theta = M / K_{\theta\theta}$$

### I.1.2.- Distribución de Cortante Sísmico.

Analizando el sistema general de la figura 17 procederemos al análisis del desplazamiento de cuerpo rígido cuyas componentes son  $D_x$ ,  $D_y$  y  $\theta$ . Análogamente al planteamiento de la matriz de rigidez del entrepiso, proyectando las componentes del desplazamiento general del entrepiso en cada marco, podemos conocer su desplazamiento que afectado de su rigidez nos da su cortante sísmico, de tal forma que para definir dicho desplazamiento en cada marco se han fijado puntos  $P_j(X_j, Y_j)$  de referencia sobre sus líneas de acción, generalizando las proyecciones sobre el marco  $j$ , sabemos que el desplazamiento lateral del mismo es la suma de las proyecciones de  $D_x$ ,  $D_y$  y  $\theta$ , de manera que la primera proyección debida a  $D_x$  (análogamente a la figura 6) es:

$$\Delta_1 = D_x \cos \beta_j \quad \text{y la debida a } D_y \text{ será} \quad \Delta_2 = D_y \sin \beta_j$$

Donde ahora los desplazamientos  $D_x$  y  $D_y$  se pueden conocer y tienen los siguientes valores respectivamente

$$D_{x_1} = \frac{V \cos \Psi}{K_{xx}} \quad \text{y} \quad D_{y_2} = \frac{V \sin \Psi}{K_{yy}}$$

Sustituyendo estos valores en los desplazamientos proyectados resultan respectivamente;

$$\Delta_1 = \frac{V \cos \Psi}{K_{xx}} \cos \beta_j \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \frac{V \sin \Psi}{K_{yy}} \sin \beta_j$$

Respecto al efecto del giro  $\theta$  sobre el marco  $j$ , ilustrando en forma ampliada, en la figura 18 se indica el desplazamien

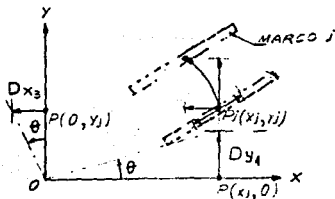


FIGURA 18

to del punto  $P_j(X_j, Y_j)$  que representa al marco  $j$  y en el que se puede ver que dicho desplazamiento, que en la realidad es muy pequeño, se puede descomponer en dos desplazamientos paralelos a los ejes  $x, y$  (por ser cuerpo rígido) se pueden dimensionar a partir de los puntos  $(X_j, 0)$  para el desplazamiento paralelo al eje  $y$ , y  $(0, Y_j)$  para el desplazamiento paralelo al eje  $x$ , donde el primero tiene el valor de;

$$D_{x_3} = y_j \theta$$

y el segundo de;

$$D_{y_4} = X_j \theta$$

Donde;

$$\theta = M / K_{\bullet\bullet} = \frac{V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}}$$

Sustituyendo el valor del giro  $\theta$  en los desplazamientos anteriores se tiene que:

$$D_{x_3} = \frac{y_j \cdot V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}}$$

$$D_{y_4} = \frac{X_j \cdot V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}}$$

Proyectando ambos desplazamientos sobre el marco, se tienen :

$$\Delta_3 = \frac{y_j \cdot V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}} \cos \beta_j$$

$$\Delta_4 = \frac{X_j \cdot V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}} \operatorname{Sen} \beta_j$$

Teniendo todas las proyecciones sobre el marco  $j$ , de las componentes del desplazamiento de cuerpo rígido, podemos sumaras algebraicamente obteniendo así el desplazamiento lateral del mismo, cuyo valor queda definido con la siguiente expresión;

$$\Delta_j = \frac{V \cos \Psi}{K_{xx}} \cos \beta_j + \frac{V \sin \Psi}{K_{yy}} \sin \beta_j$$

$$+ \left( -y_j \frac{V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}} \right) \cos \beta_j + x_j \frac{V \cdot E}{K_{\bullet\bullet}} \sin \beta_j$$

Desplazamiento que multiplicado por la rigidez del marco nos da el cortante sísmico

$$V_j = K_j \Delta_j$$

Sustituyendo el valor de  $\Delta_j$ , factorizando y agrupando términos semejantes, tenemos que la fuerza cortante del marco  $j$  estará dada por la expresión

$$V_j = K_j V \left[ \left( \frac{\cos \Psi}{K_{xx}} - \frac{y_j E}{K_{\bullet\bullet}} \right) \cos \beta_j + \left( \frac{\sin \Psi}{K_{yy}} + \frac{x_j E}{K_{\bullet\bullet}} \right) \sin \beta_j \right] \quad 27$$

Donde  $E$  es la distancia del Centro de Torsión a la línea de acción de la fuerza cortante; esta excentricidad se puede incrementar de acuerdo con lo que señalan los distintos reglamentos.

Se puede observar que la ecuación última anterior está en función del ángulo  $\Psi$  aún no definido y que viene a cuestionar que ángulo hace máximo el cortante  $V$  al que puede estar sometido el marco  $j$ , para resolver esta incógnita haremos la consideración de anular la excentricidad  $E$ , resultando la expresión

$$V_j = K_j V \left[ \left( \frac{\cos \Psi}{K_{xx}} \right) \cos \beta_j + \left( \frac{\sin \Psi}{K_{yy}} \right) \sin \beta_j \right]$$

de la cual hay que derivar con respecto a  $\Psi$  e igualar a cero para encontrar el ángulo  $\Psi$  que haga máximo a  $V_j$ .

Resolviendo entonces el problema de máximos y mínimos, la función será;



$$V_j = f(\Psi)$$

Derivando la función;

$$f'(\Psi) = K_j V \left[ \frac{\cos \beta_j}{K_{xx}} \frac{d(\cos \Psi)}{d\Psi} + \frac{\sin \beta_j}{K_{yy}} \frac{d(\sin \Psi)}{d\Psi} \right]$$

$$f'(\Psi) = K_j V \left[ \frac{\cos \beta_j}{K_{xx}} (-\sin \Psi) + \frac{\sin \beta_j}{K_{yy}} (\cos \Psi) \right]$$

$$f'(\Psi) = K_j V \left[ -\frac{\sin \Psi}{K_{xx}} \cos \beta_j + \frac{\cos \Psi}{K_{yy}} \sin \beta_j \right]$$

Igualando a cero la derivada;

$$-\frac{\sin \Psi}{K_{xx}} (K_j V) \cos \beta_j + \frac{\cos \Psi}{K_{yy}} (K_j V) \sin \beta_j = 0$$

Multiplicando ambos miembros por  $1/\cos \Psi$ , e igualando los términos, tenemos;

$$\frac{\sin \Psi}{\cos \Psi} \frac{K_j V}{K_{xx}} \cos \beta_j = \frac{K_j V}{K_{yy}} \sin \beta_j \quad \text{---} \quad 28$$

Si tenemos que:

$$\tan \Psi = \frac{\sin \Psi}{\cos \Psi} \quad \text{---} \quad 29$$

Entonces, sustituyendo 29 en 28 resulta:

$$\tan \Psi \frac{K_j V}{K_{xx}} \cos \beta_j = \frac{K_j V}{K_{yy}} \sin \beta_j$$

Despejando el ángulo  $\Psi$ :

$$\psi = \text{Ang Tan} \left( \frac{K_{xx}}{K_{yy}} \frac{\text{Sen } \beta_j}{\text{Cos } \beta_j} \right) \text{ --- --- --- } 30$$

Llegamos a la expresión final que define la dirección del -  
sismo que hace mayor efecto sobre el marco j en estudio.

## I.2.- Análisis Sísmico Estático de Edificios de más de un Entrepiso.

Los conceptos de rigidez principal, así como el de centro de torsión, no tienen sentido alguno para edificios de más de un entrepiso, a menos que los marcos que lo forman tengan la siguiente característica; el cociente de las rigideces de dos entrepisos para dos marcos cualesquiera, sean los mismos para todos sus entrepisos; sea  $\alpha$  el valor de dicho cociente, se consi-dera a ésta relación de rigideces como hipótesis de las alfas.

$$\frac{I R_j}{I R_k} = \alpha$$

Lo anterior se cumple si los marcos del edificio son similares, o sea que tienen estructuraciones muy parecidas. Si un edificio sin muros de cortante ha sido estructurado en forma convencional, lo más seguro es que cumpla aproximadamente con la hipótesis de las alfas; también, si un edificio está estructurado exclusivamente a base de muros de cortante\*, cumplirá aproximadamente con la hipótesis citada.

Las ecuaciones de equilibrio de un edificio serán las siguientes:

$$\begin{Bmatrix} \langle V \rangle \cos \Psi \\ \langle V \rangle \operatorname{Sen} \Psi \\ \langle M \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{y\theta}] \\ [K_{\theta x}] & [K_{\theta y}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \Theta \end{Bmatrix} \quad \text{--- 31}$$

Si se cumple con el cociente igual en todos los entrepisos para dos marcos cualesquiera del edificio, entonces se pueden obtener ejes principales y centros de torsión en forma análoga a como se obtienen en edificios de un entrepiso, con la particularidad de que los ejes principales y los centros de torsión son los mismos para todos los entrepisos; lo anterior no se cumple en la práctica ya que cualquier edificio solo cumplirá en forma aproximada con la hipótesis de las alfas, de ahí que se obtengan ejes principales y centros de torsión diferentes para cada entrepiso, con la salvedad de que la posición del cortante total en cada entrepiso se determinará obteniendo la resultante

de las fuerzas sísmicas que obran arriba del entrepiso considerado; por esta razón los llamados centros de cortante de en-  
trepiso sustituyen al centro de masas que se utilizó en edificios de un entrepiso.

Si el sistema coordenado es principal y tiene por origen el centro de torsión ( Unico, si el edificio cumple exactamente con la hipótesis de las alfas ), la ecuación 31 se simplifica y se obtiene.

$$\begin{Bmatrix} \{V\} \cos \Psi \\ \{V\} \operatorname{Sen} \Psi \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & 0 & 0 \\ 0 & [K_{yy}] & 0 \\ 0 & 0 & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ \theta \end{Bmatrix}$$

De donde finalmente se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} iV \cos \Psi &= iD_x \cdot \sum_i R_j (\cos \beta_j)^2 \\ iV \operatorname{Sen} \Psi &= iD_y \cdot \sum_i R_j (\operatorname{Sen} \beta_j)^2 \\ iV \cdot E &= i\theta \cdot \sum_i R_j d_j^2 \end{aligned}$$

O bien.

$$iD_x = \frac{iV \cos \Psi}{\sum_i R_j (\cos \beta_j)^2}$$

$$iD_y = \frac{iV \operatorname{Sen} \Psi}{\sum_i R_j (\operatorname{Sen} \beta_j)^2}$$

$$i\theta = \frac{iV (E)}{\sum_i R_j d_j^2}$$

Que son las mismas expresiones (ecuaciones 26) que se utilizan en los edificios de un entrepiso.

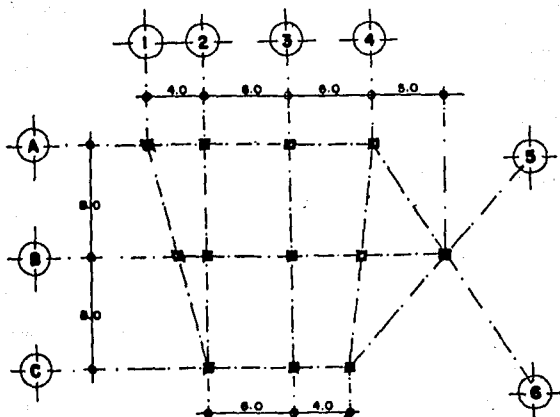
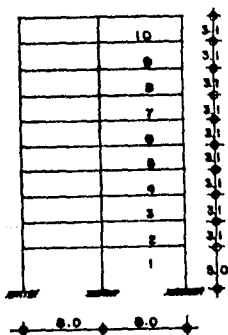
## CAPITULO II

### EJEMPLO NUMERICO

Con la finalidad de ilustrar los conceptos desarrollados en el capitulo I, se resuelve un ejemplo el cual es un edificio de 10 pisos para oficinas.

En la figura 19 se presenta la planta tipo y un corte esquemático del edificio, y en la tabla 1 se consignan los pesos y centros de masa de cada nivel, para fines prácticos las rigideces de cada marco se indican en la tabla 2.

Requisitos de Diseño. Se supone que la construcción se localiza en zona de terreno firme, siendo ésta del grupo B por lo que le corresponde un coeficiente sísmico  $C=0.16$  y un factor de ductilidad  $Q=4$  ( para las dos direcciones principales ) y la aceleración gravitatoria  $A_g=0.03$ , requisitos según el reglamento de construcciones para el Distrito Federal de 1976, México.

a) Planta tipob) Corte esquemático

NIVEL	PESO (ton)	CENTRO DE MASAS	
		Xm (m)	Ym (m)
10	182.70	10.72	13.48
9	193.88	10.72	13.48
8	193.88	10.72	13.48
7	216.00	10.72	13.48
6	216.00	10.72	13.48
5	216.00	10.72	13.48
4	216.00	10.72	13.48
3	216.00	10.72	13.48
2	229.87	10.72	13.48
1	297.26	10.72	13.48

Tabla 1

Figura 19.- a) Planta tipo  
y b) Corte esquemático

ENTREPISO											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Varce	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez	Rigidez
A	80.40	82.42	75.45	71.45	71.45	71.45	71.45	55.40	55.40	62.37	
B	120.47	143.90	146.30	129.52	129.52	129.52	129.52	34.60	64.04	57.85	
C	59.98	61.65	55.74	52.83	52.83	52.83	52.83	38.69	33.57	46.64	
1	78.44	160.39	166.05	91.04	91.04	91.04	91.04	50.27	56.27	64.62	
2	86.57	120.71	123.03	109.70	109.70	109.70	109.70	62.67	62.89	76.33	
3	67.90	124.47	127.29	113.06	113.06	113.06	113.06	63.90	63.90	71.35	
4	87.98	124.47	127.29	113.06	113.06	113.06	113.06	63.90	63.90	71.35	
5	58.69	63.63	65.59	75.95	75.95	75.95	75.95	42.04	42.04	47.74	
6	53.56	67.55	67.48	61.28	61.28	61.28	61.28	37.74	37.74	42.67	

Tabla 2

## Cálculo de Cortantes Sísmicos

Procediendo a determinar las fuerzas sísmicas según el artículo 240 del reglamento de construcción para el Distrito Federal el cálculo de dichas fuerzas (ref. 1) se desarrolla en la tabla número 3, misma que contiene la posición final de cortantes de acuerdo con las ecuaciones 32, pag. 37.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
NIVEL	ENTREPIEDRA	W <sub>i</sub>	H <sub>i</sub>	W <sub>i</sub> H <sub>i</sub>	F <sub>i</sub>	V <sub>i</sub>	POSICION DE V	
		(Ton)	(m)			(Ton)	X (m)	Y (m)
10	10	182.70	32.90	6000.83	13.36	13.36	10.72	13.46
9	9	193.85	29.80	5776.72	12.84	26.20	10.72	13.45
8	8	193.85	29.70	5778.79	11.80	37.70	10.72	13.45
7	7	215.00	23.80	5074.00	11.28	49.98	10.72	13.45
6	6	215.00	20.80	4407.60	9.79	59.77	10.72	13.45
5	5	215.00	17.40	3741.00	8.31	67.08	10.72	13.45
4	4	215.00	14.30	3074.50	6.83	73.91	10.72	13.45
3	3	215.00	11.20	2408.00	5.35	79.26	10.72	13.45
2	2	228.67	8.10	1852.23	4.12	83.38	10.72	13.45
1	1	292.26	6.00	1401.30	3.25	86.60	10.72	13.45
Σ		2166.33		36981.83				

Tabla 3  
---Table---



## Cálculo de Cortantes Sísmicos

Procediendo a determinar las fuerzas sísmicas según el artículo 240 del reglamento de construcción para el Distrito Federal el cálculo de dichas fuerzas (ref. 1) se desarrolla en la tabla número 3, misma que contiene la posición final de cortantes de acuerdo con las ecuaciones 32, pag. 37.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
NIVEL	ENTRENO	w <sub>i</sub> (Ton)	h <sub>i</sub> (m)	w <sub>i</sub> h <sub>i</sub>	FI	V <sub>i</sub> (Ton)	POSICION DE X (m)	POSICION DE Y (m)
10	10	182.70	32.00	5890.83	13.36	13.36	10.72	13.45
9	9	193.89	29.80	5776.72	12.84	26.20	10.72	13.45
8	8	193.85	26.70	5176.78	11.50	37.70	10.72	13.45
7	7	215.00	23.80	5074.00	11.28	49.98	10.72	13.45
6	6	215.00	20.80	4497.80	9.78	59.77	10.72	13.45
5	5	215.00	17.40	3741.00	8.31	67.08	10.72	13.45
4	4	215.00	14.30	3074.50	6.83	73.91	10.72	13.45
3	3	215.00	11.20	2408.00	5.35	79.26	10.72	13.45
2	2	228.07	8.10	1852.23	4.13	83.38	10.72	13.45
1	1	292.28	5.00	1461.30	3.25	86.63	10.72	13.45
Σ	=	2166.33		36981.63				

---Tabla 3---

$$X_1 = \frac{\Sigma F_y \bar{X}}{V_y} \quad \text{--- --- --- --- ---} \quad 32$$

$$Y_1 = \frac{\Sigma F_x \bar{Y}}{V_x}$$

Checando el inciso uno del mencionado artículo 240 de que la relación  $V/W$  en la base del edificio sea igual a  $C/Q$  pero no menor que  $\alpha_0$ ; se tiene

$$\frac{86.63}{2186.33} = \frac{0.16}{4} = 0.04 > 0.03$$

Se puede ver que la relación  $V/W$  es mayor que  $\alpha_0$  y los cortantes sísmicos obtenidos, indicados en la elevación de la figura 20, son aceptables

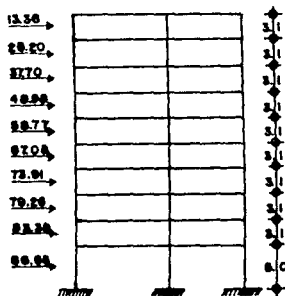


Figura 20

Teniéndose los cortantes de entrepiso y continuando con la distribución de los mismos podemos checar el cumplimiento de la hipótesis de las alfas, la cual establece que la relación de rigideces de dos entrepisos para dos marcos cualesquiera es la relación  $\alpha$  y deberá ser igual para todos sus entrepisos, tomando arbitrariamente los marcos ejes A y C las relaciones son las siguientes:

$$\frac{1R_1}{1R_3} = \frac{80.40}{59.90} = 1.34$$

$$\frac{6R_1}{6R_3} = \frac{71.45}{52.83} = 1.35$$

$$\frac{2R_1}{2R_3} = \frac{82.42}{61.05} = 1.35$$

$$\frac{7R_1}{7R_3} = \frac{71.45}{52.83} = 1.35$$

$$\frac{3R_1}{3R_3} = \frac{75.45}{55.74} = 1.35$$

$$\frac{8R_1}{8R_3} = \frac{55.40}{38.39} = 1.42$$

$$\frac{4R_1}{4R_3} = \frac{71.45}{52.83} = 1.35$$

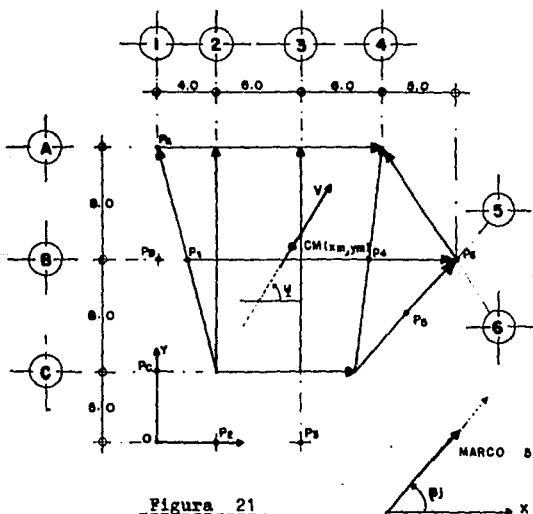
$$\frac{9R_1}{9R_3} = \frac{55.40}{38.39} = 1.42$$

$$\frac{5R_1}{5R_3} = \frac{71.45}{52.83} = 1.35$$

$$\frac{10R_1}{10R_3} = \frac{62.37}{46.64} = 1.35$$

Se puede apreciar que los resultados no precisamente son el mismo cociente en todos los entrepisos, aunque si se aprecia tendencia a serlo, es por esto que la hipótesis de las alfas se cumple en forma aproximada de ahí que se tengan que determinar ejes principales de rigidez y centro de torsión para cada entrepiso, hecho que procede en la solución del ejemplo en estudio.

Distribuyendo entonces los cortantes de entrepiso, en la figura 21 se muestra la planta del primer nivel y en la cual se



MARCO	RIGIDEZ K(kg/m)	ANGULO β(grades)	PUNTOS Pj	COORDENADAS Xj(m) Yj(m)	
A	80.397	0	A	0	21.0
B	120.469	0	B	0	13.0
C	59.903	0	C	0	9.0
1	79.439	107.36°	1	2.5	13.0
2	86.568	90°	2	5.0	0
3	87.978	90°	3	11.0	0
4	87.978	83.87°	4	19.0	13.0
5	59.891	83.87°	5	17.80	9.0
6	82.867	119.58°	6	21.0	13.0
CENTRO DE MASAS			CM (10.72, 13.48)		

-----  
Tabla 4  
-----

indica el sentido de orientación de los ángulos de inclinación, así como la ubicación de cada marco por coordenadas (Xj, Yj) y su respectiva rigidez, datos que se encuentran en la tabla 4.

#### II.1.- Cálculo de Rigideces Principales

Para el cálculo de éstas rigideces definidas por las ecuaciones 13, se ha elaborado la tabla 5 en la que se calculan ca-

MARCO	$k_x$	$\beta_j$	$k_{xx}$ $k_x c_j^2$	$k_{yy}$ $k_y s_j^2$	$k_{xy}$ $k_j c_j s_j$	$k_{\phi\phi}$ $\beta_j d_j^2$
A	80.397	0°	80.397	0	0	38489077
B	120.469	0°	120.469	0	0	20399291
C	59.903	0°	59.903	0	0	1487875
1	79.439	107.36°	8.97806	71.46344	-22326.24	3074084.4
2	86.568	90°	0	86.568	0	2184200
3	87.978	90°	0	87.978	0	10643338
4	87.978	83.87°	1.28493	86.69338	10233.0	178803.28
5	59.891	83.87°	20.47217	39.40979	24041.9	4994759.1
6	82.867	119.58°	10.80806	42.05248	-21019.2	31779119
$\sum$			300072.21	41300.00	-4469.84	1.275 x 10 <sup>8</sup>

\*  $C_j = \cos \beta_j$  ;  $S_j = \sin \beta_j$

-----  
Tabla 5  
-----

da uno de los términos que intervienen en dichas fórmulas, sustituyendo resultados en las ecuaciones mencionadas resultan los valores siguientes:

$$K_{xx}' = \frac{300072.21 + 413100}{2} + \sqrt{\left(\frac{300072.21 - 413100}{2}\right)^2 + (-4469.84)^2}$$

$$K_{xx}' = 356586.11 + \sqrt{3.214 \times 10^9} = 413276.5$$

$$K_{yy}' = \frac{300072.21 + 413100}{2} - \sqrt{\left(\frac{300072.21 - 413100}{2}\right)^2 + (-4469.84)^2}$$

$$K_{yy}' = 966586.11 - \sqrt{3.214 \times 10^9} = 299893.96$$

Y el ángulo de inclinación (ecuación 22) en que se encuentran estas rigideces (respecto al eje X en la que se encuentra  $K_{xx}'$ ) es:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{-(-4469.84)}{413100 - 413276.5}\right) = -87.74^\circ$$

En la figura 22 se muestra la posición de los ejes principales de rigidez del entrepiso, pasando a ser éste el sistema en el que se determina el centro de torsión, entre las observaciones que surgen para este cálculo es que los ángulos de inclinación (manteniendo el sentido de orientación inicial) han cambiado y lo mismo sucede con las coordenadas que ubican a cada marco, en la tabla 6 se encuentran estos nuevos datos

MARCO	RIGIDEZ Sj (kg / m)	ANGULO θj	PUNTO Pj	COORDENADAS Xj (m) Yj (m)	
A	80,397	87.74°	A	- 20.983	0.827
B	120,469	87.74°	B	- 12.889	0.812
C	89,903	87.74°	C	- 4.588	0.197
1	78,439	195.09°	1	- 12.889	3.012
2	89,909	177.74°	2	0.197	4.898
3	87,978	177.74°	3	0.433	10.991
4	87,978	170.81	4	- 12.388	18.300
5	88,991	141.81	5	- 8.298	17.940
6	82,587	204.30°	6	- 12.181	21.498
CENTRO DE MASA = C.M. (-13.014, 11.243)					

-----  
Tabla 6  
-----

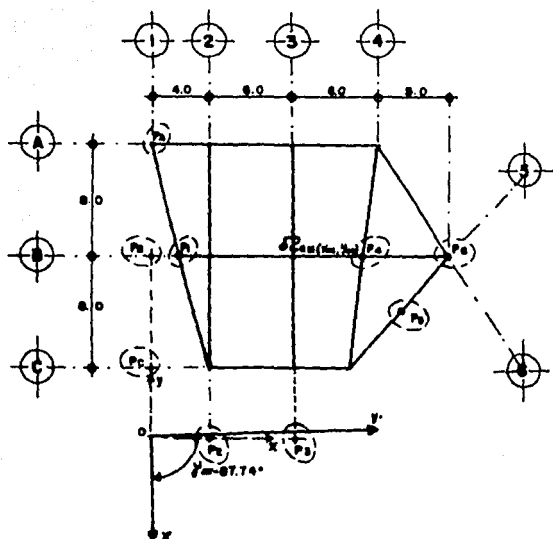


Figura 22

Haciendo un paréntesis antes de determinar el Centro de Torsión, se calcularán de nueva cuenta cada uno de los términos que se tienen en la tabla 5, pero ahora respecto a los ejes principales de rigidez (figura 22), los resultados de dichos cálculos se tienen en la tabla 7, comparando los resultados de las dos tablas mencionadas se tienen las siguientes observaciones;

Primero, los valores de las rigideces  $K_{xx}$  y  $K_{yy}$  de la tabla 7 corresponden a los mismos valores obtenidos con las ecuaciones 13, habiendo una diferencia mínima entre dichos valores, debiéndose esto a problemas de aproximación en las operaciones ejecutadas.

Segundo, el valor de la rigidez  $K_{xy}$  (de tabla 7) tiene el valor de 0.02 que teóricamente es y debe ser cero, con este re-

1	2	3	4	5	6	7
MARCO			hxx	hyy	hxy	h <sub>00</sub>
	b/(kg/m)	$\beta_j$	b'c' <sup>a</sup>	b'j s' <sup>a</sup>	b'c'j s' <sup>a</sup>	b'j d' <sup>a</sup>
A	80.397	87.74°	124.80	80268.40	3088.38	38468077
B	120.489	87.74°	187.01	120276.33	4742.96	20888281
C	89.803	87.74°	92.89	80807.18	2388.87	1497878
D	78.439	189.08°	3120.97	8314.78	19712.84	3088884.8
E	88.888	177.74°	88488.84	124.38	-3407.70	2104200
F	87.878	177.74°	87837.88	124.87	-3483.22	19848228
G	87.878	170.81°	88838.88	2240.38	-14188.88	1788088
H	88.881	141.81°	38178.24	22710.78	-28885.28	1884788.8
I	88.887	204.30°	43888.47	8888.88	18711.81	31783888
$\Sigma$			418883.38	288888.38	8.02	1.278 X 10 <sup>8</sup>

$$* C_j = \cos \beta_j ; S_j = \sin \beta_j$$

Tabla 7

sultado se viene a confirmar la primera etapa de la diagonalización de la matriz de rigidez de entrepiso y

Tercero, el valor de la rigidez  $K_{\theta\theta}$  de la tabla 7 tiene el mismo valor que en la tabla 5 y con esto se comprueba el acierto de considerar a la matriz simplificada  $[k]$  en la rotación de los ejes coordenados que se desarrolla en la primera parte de este trabajo.

## II.2.- Cálculo del Centro de Torsión

Continuando con el cálculo del centro de torsión, teniendo ya los datos necesarios éstos respecto a los ejes principales de rigidez (figura 22), solo resta obtener cada uno de los términos de las fórmulas 24 y 25, numerando cada uno de sus términos (para aprovechar los cálculos desarrollados en tabla 7) tenemos la siguiente identificación de los mismos:

$$X_T = \frac{\sum_{j=1}^5 X_j K_j (\text{Sen } \theta_j)^2 - \sum_{j=1}^7 X_j K_j \text{Cos } \theta_j \cdot \text{Sen } \theta_j}{\sum_{j=1}^9 K_j (\text{Sen } \theta_j)^2} \quad 24$$

$$Y_T = \frac{\sum_{j=1}^6 X_j K_j (\text{Cos } \theta_j)^2 - \sum_{j=1}^8 X_j K_j \text{Cos } \theta_j \cdot \text{Sen } \theta_j}{\sum_{j=1}^{10} K_j (\text{Cos } \theta_j)^2} \quad 25$$

1	2	3	4	5	6	7	8
MARCO	COORDENADAS						
	Xj	Yj	θj	xj kj sj	yj kj cj	yj kj cj	xj kj cj sj <sup>2</sup>
A	- 20.993	0.827	87.74°	-188272.200	103.213	2617.94	-88419.48
B	- 12.989	0.912	87.74°	-1882266.200	95.760	2422.28	-81802.88
C	- 4.998	0.197	87.74°	-292766.740	18.320	484.88	-11762.02
1	- 12.989	3.012	109.09°	- 88301.420	220227.66	88376.34	-284084.23
2	0.197	4.998	177.74°	26.470	431802.01	-17029.82	- 871.38
3	0.433	10.981	177.74°	99.140	985419.87	-38067.88	- 1499.72
4	- 12.358	16.300	170.61°	- 22817.440	1412998.80	-233889.38	174823.08
5	- 9.299	17.940	191.61°	-189484.09	849095.98	-914242.81	237888.80
6	- 12.161	21.498	204.20°	-108227.920	938395.82	422486.7	-228709.9
				-392933.60	4618121.80	-314381.38	-222977.82

\* Cj=Cosθj ; Sj=Senθj

-Tabla--8-



$$X_T = \frac{\sum X_j K_j (\text{Sen } \beta_j)^2 - \sum X_j K_j \text{Cos } \beta_j \cdot \text{Sen } \beta_j}{\sum K_j (\text{Sen } \beta_j)^2} \quad 24$$

$$Y_T = \frac{\sum Y_j K_j (\text{Cos } \beta_j)^2 - \sum X_j K_j \text{Cos } \beta_j \text{ Sen } \beta_j}{\sum K_j (\text{Cos } \beta_j)^2} \quad 25$$

1	2	3	4	5	6	7	8
MARCO	COORDENADAS						
	X <sub>j</sub>	Y <sub>j</sub>	β <sub>j</sub>	x <sub>j</sub>   s <sub>j</sub>	y <sub>j</sub>   c <sub>j</sub>	y <sub>j</sub>   s <sub>j</sub>   e <sup>+</sup>	x <sub>j</sub>   s <sub>j</sub>   c <sub>j</sub>   e <sup>+</sup>
A	- 20.883	0.827	87.74°	-188278.200	103.218	2017.54	- 88412.48
B	- 12.888	0.512	87.74°	-188289.200	95.750	2428.29	- 81902.98
C	- 4.998	0.197	87.74°	-208798.740	18.380	464.98	-11782.02
1	- 12.888	3.012	188.09°	- 68501.480	28027.98	88378.34	-284084.23
2	0.197	4.998	177.74°	28.470	43182.01	-17028.92	- 871.38
3	0.433	10.981	177.74°	88.140	888419.87	-38087.98	- 1488.72
4	-12.358	18.500	170.81°	- 28817.440	1412893.80	-233889.38	174823.08
5	- 8.288	17.840	141.81°	-188484.08	849056.88	- 914242.81	237888.80
6	-12.181	21.488	204.30°	-108227.880	938388.82	428888.7	-28708.8
				-388888.80	4818181.80	-34881.38	-228877.82

\* C<sub>j</sub>=Cosβ<sub>j</sub> ; S<sub>j</sub>=Senβ<sub>j</sub>

-Tabla 8-

En donde los términos marcados con los números 9 y 10 corresponden a las columnas 5 y 4 respectivamente de la tabla número 7 y los términos marcados con los números 5, 6, 7 y 8 corresponden a las columnas con los mismos números respectivamente de la tabla 8.

Sustituyendo valores en las ecuaciones anteriores tenemos que;

$$x_T = \frac{3939353.50 - (-314351.39)}{299888.39} = -12.08$$

$$y_T = \frac{4618121.80 - (-222977.52)}{413263.39} = 11.714$$

y el centro de torsión es;

$$CT(-12.08, 11.714)$$

En la figura 23 aparece la planta del entrepiso en estudio en la que ya se encuentran trasladados al centro de torsión los ejes principales de rigidez, pasando a ser esta planta el sis -

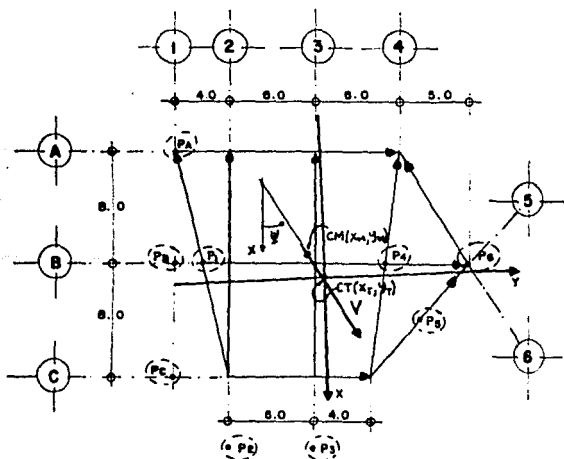


Figura 23

tema general en el que la distribución de la fuerza cortante de entrepiso es muy simplificada, de tal forma que para la mencionada distribución solo hay que aplicar la ecuación 27, de la que se puede observar solo hacen falta las coordenadas  $X_j, Y_j$  y los ángulos de inclinación  $\beta_j$  de cada marco, éstos referidos al sistema general (figura 23).

Respecto a los ángulos  $\beta_j$  son los mismos de la tabla 6, debido a que solo hubo traslación (de la figura 22 a la 23) de los ejes principales de rigidez, y para las coordenadas se obtienen haciendo la diferencia de los mismos entre los de la figura 22 y el centro de torsión

$$\begin{aligned} X_j &= X_j' - X_T \\ Y_j &= Y_j' - Y_T \end{aligned}$$

En la tabla 9 se encuentran las nuevas coordenadas

MARCO	PUNTO	COORDENADAS	
		X <sub>j</sub>	Y <sub>j</sub>
A	A	-8.888	-10.887
B	B	-0.801	-11.802
C	C	7.092	-11.817
I	I	-0.801	-8.702
E	E	12.888	-8.718
S	S	12.821	-8.723
4	4	-0.288	4.788
8	8	3.790	8.228
9	9	-0.073	8.781
C	M	-0.026	-0.471

Tabla 9

Haciendo un parentesis antes de continuar con la distribución de fuerzas cortantes, se verificarán los valores de las rigideces angulares  $K_{xe}, K_{ye}$  del entrepiso para cuando se tienen los ejes principales de rigidez trasladados al centro de torsión (figura 23), estos cálculos se desarrollan en la tabla número 10

Se puede observar en las columnas 9 y 10 de la tabla 10 que los resultados finales de las rigideces mencionadas tienen los

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
MARC	RIGIDEZ	ANGULO	$X_j$	$Y_j$	$X_j \text{SEN } \beta_j$	$Y_j \text{ COS } \beta_j$	$d_j$	$K_x \phi =$ $K_j C_j d_j$	$K_y \phi =$ $K_j S_j d_j$	$K_{\phi} =$ $K_j d_j^3$
A	80,397	87.74°	-8.898	-10.887	-8.888	-0.428	-8.488	-28788.08	-87824.18	8782781.7
B	120,488	87.74°	-0.801	-11.202	-0.800	-0.441	-0.488	-2178.82	-88861.02	282802.83
C	88,903	87.74°	7.082	-11.817	7.088	-0.458	7.540	1778.74	481307.20	3408881.4
1	78,438	185.09°	-0.801	-8.708	0.208	8.402	-8.184	820888.01	187302.40	8288822.8
2	88,888	177.74°	12.288	-8.718	0.488	8.713	-8.228	838800.88	-21848.74	3388878.8
3	87,878	177.74°	12.821	-0.723	0.483	0.722	-0.228	20130.84	-783.78	4813.88
4	87,878	170.81°	-0.288	4.788	-0.044	-4.722	4.878	-488048.17	87125.81	182822.8
5	88,881	141.81°	3.780	8.228	2.383	-4.880	7.233	-338800.38	284820.28	3080888.8
6	82,887	204.30°	-0.073	8.781	0.080	-8.814	8.844	-488421.82	-183433.73	4204204.4
$\Sigma$								-26.87	2.88	27024302

\*  $C_j = \text{Cos } \beta_j$  ;  $S_j = \text{Sen } \beta_j$

Tabla 10

valores de -25.27 y -2.85 respectivamente y que representen errores bastante pequeños de las magnitudes que arrojan dichas diferencias y que resultan de la precisión que se maneje en operaciones anteriores a tales resultados, por lo que se les puede considerar como ceros, de esta manera se confirma la nulificación de las rigideces  $K_{x\theta}$  y  $K_{y\theta}$  cuando los ejes principales se localizan en el centro de torsión, y la matriz de rigidez del entrepiso se diagonaliza simplificandose así la distribución de fuerzas cortantes de entrepiso.

### II.3.- Distribución de Fuerza Cortante

Continuando con la distribución de cortantes sísmicos lo haremos primeramente para el primer piso del ejemplo cuya planta se muestra en la figura 23, para obtener los cortantes correspondientes a cada marco solo basta aplicar la formula 27, de la cual ya se tienen todas sus variables (las coordenadas  $X_j, Y_j$  de la tabla 9, los ángulos de inclinación  $\beta_j$  de tabla 6 y las rigideces principales  $K_{xx}$  y  $K_{yy}$  obtenidas con las ecs 13) faltando concretar más las variables  $\Psi$ , que es el ángulo de la dirección sísmica que hace máximo al cortante sobre el marco en estudio, y  $E$ , que es la distancia del centro de torsión a la línea de acción del cortante sísmico definido por la dirección  $\Psi$  donde;

$$\Psi = \text{Tan}^{-1} \left( \frac{K_{xx} \cdot \text{Sen} \beta_j}{K_{yy} \cdot \text{Cos} \beta_j} \right) \quad y$$

$$E_j = X_m \text{Sen} \Psi_j - Y_m \text{Cos} \Psi_j$$

El cálculo de estas dos variables se obtienen para cada uno de los marcos del entrepiso en la tabla 11, columnas 5 y 10 respectivamente, completando así todas las variables.

Finalmente la distribución del cortante sísmico de 86,65 toneladas del primer entrepiso (Figura 25) se reduce a aplicar la ecuación 27, aunque por facilidad de obtener cada una de las expresiones en tablas que facilitan los cálculos se separan la obtención de cortantes directos y por torsión, en la tabla 12 se encuentran los cálculos de los primeros con la ecuación 27

$$X = \tan^{-1} \left( \frac{k_{xx'}}{k_{yy'}} \cdot \frac{s_j}{c_j} \right) = \frac{413203.30}{290888.33} \cdot \frac{s_j}{c_j} \cdot (1.378) \cdot \frac{s_j}{c_j} \quad *$$

$$E = X_M \cdot S_{Xj} - Y_M \cdot C_{Xj}$$

		C.M. (-0.028, -0.471)								
		E = X <sub>M</sub> · S <sub>Xj</sub> - Y <sub>M</sub> · C <sub>Xj</sub>								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
MARCO	θ <sub>j</sub>	s <sub>j</sub> *	c <sub>j</sub> *	Y	s <sub>Y</sub>	c <sub>Y</sub>	X <sub>M</sub> · S <sub>Xj</sub>	Y <sub>M</sub> · C <sub>Xj</sub>	E	
A	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913	
B	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913	
C	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913	
1	195.09°	-0.2803	-0.9595	20.38	0.3482	0.9374	-0.322	-0.441	0.119	
2	177.74°	0.0394	-0.9992	-3.11°	-0.0542	0.9985	+0.080	-0.470	0.520	
3	177.74°	0.0394	-0.9992	-3.11°	-0.0542	0.9985	+0.080	-0.470	0.520	
4	170.81°	0.1631	-0.9866	-12.83°	-0.2220	0.9750	+0.205	-0.459	0.664	
5	141.61°	0.6210	-0.7836	-47.51°	-0.7374	0.6764	+0.883	-0.319	1.001	
6	204.30°	-0.415	-0.9114	35.86°	0.6281	0.8491	-0.489	-0.390	-0.090	

\* C<sub>j</sub> = Cos β<sub>j</sub> ; S<sub>j</sub> = Sen β<sub>j</sub>

Tabla 11

Finalmente la distribución del cortante sísmico de 86.65 toneladas del primer entrepiso (figura 27) se reduce a aplicar la ecuación 27, aunque por facilidad de obtener cada una de las expresiones en tablas que facilitan los cálculos se separan la obtención de cortantes directos y por torsión, en la tabla 12 se encuentran los cálculos de los primeros con la ecuación 27

$C_j = \frac{k_j x_j}{\sum k_j x_j} = \frac{413203.39}{299888.33} \cdot \frac{s_j}{c_j} = (1.378) \frac{s_j}{c_j}$							C.M. (-0.926, -0.471) $E = X_M \cdot S_Y - Y_M \cdot C_Y$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MARCO	$\beta_j$	$s_j$ *	$c_j$ *	$X_j$	$S_Y$	$C_Y$	$X_M \cdot S_Y$	$Y_M \cdot C_Y$	E
A	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913
B	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913
C	87.74°	0.9992	0.0394	88.36°	0.9996	0.0286	-0.926	-0.013	-0.913
1	108.09°	-0.2603	-0.0655	20.38	0.3482	0.9374	-0.322	-0.441	0.119
2	177.74°	0.0394	-0.9992	-3.11°	-0.0542	0.9996	+0.060	-0.470	0.520
3	177.74°	0.0394	-0.9992	-3.11°	-0.0542	0.9996	+0.060	-0.470	0.520
4	170.81°	0.1631	-0.9866	-12.85°	-0.2220	0.9750	+0.205	-0.459	0.664
5	141.81°	0.6210	-0.7838	-47.51°	-0.7374	0.6764	+0.683	-0.318	1.001
6	204.30°	-0.4115	-0.9114	35.86°	0.5281	0.8491	-0.489	-0.399	-0.090

\*  $C_j = \cos \beta_j$  ;  $S_j = \sin \beta_j$

Tabla 11

CALCULO DE CORTANTES DIRECTOS

$V_{01} = K_{jv} \left[ \frac{\cos \psi}{K_{xx}} \cdot \cos \psi + \frac{\text{sen} \psi}{K_{yy}} \cdot \text{sen} \psi \right]$							$V = 86.66 \text{ ton}$ $K_{xx} = 413263.39 \text{ kg/cm}$ $K_{yy} = 20666.33 \text{ ..}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
MARCO	$\frac{\cos \psi}{K_{xx}}$	$\cos \psi$	$\frac{\cos \psi}{K_{xx}} \cdot \cos \psi$	$\frac{\text{sen} \psi}{K_{yy}}$	$\text{sen} \psi$	$\frac{\cos \psi}{K_{xx}} \cdot \text{sen} \psi$	KJV	$V_0$
A	$0.98 \times 10^{-6}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-6}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	8999400.1	23.10
B	$0.92 \times 10^{-6}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-6}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	10438829	24.68
C	$6.02 \times 10^{-6}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-6}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	6190595	17.23
1	$2.20 \times 10^{-6}$	-0.9986	$-2.19 \times 10^{-6}$	$1.18 \times 10^{-6}$	-0.2603	$-3.02 \times 10^{-7}$	6799739.4	-19.94
2	$2.42 \times 10^{-6}$	-0.9992	$-2.42 \times 10^{-6}$	$-1.81 \times 10^{-7}$	-0.0394	$-7.13 \times 10^{-8}$	7801117.5	-18.21
3	$2.42 \times 10^{-6}$	-0.9992	$-2.42 \times 10^{-6}$	$-1.81 \times 10^{-7}$	0.0394	$-7.13 \times 10^{-8}$	7822293.7	-18.50
4	$2.39 \times 10^{-6}$	-0.9999	$-2.39 \times 10^{-6}$	$-7.40 \times 10^{-7}$	0.1931	$-1.81 \times 10^{-7}$	7822293.7	-18.58
5	$1.92 \times 10^{-6}$	-0.7839	$-1.89 \times 10^{-6}$	$-2.49 \times 10^{-6}$	0.9810	$-1.82 \times 10^{-6}$	8102908.2	-14.34
6	$2.05 \times 10^{-6}$	-0.9114	$-1.87 \times 10^{-6}$	$-1.79 \times 10^{-6}$	-0.4116	$-7.24 \times 10^{-7}$	4884084	-11.81

Tabla 12

simplificada a cortante directo y en la columna 9 se tiene los cortantes directos para cada marco, análogamente para los cortantes por torsión se tienen los cálculos en la tabla 13 con los resultados finales en la columna 9.



CALCULO DE CORTANTES DIRECTOS

$V_{ei} = K_{jv} \left[ \frac{\text{COS } \psi}{K_{xx}} \cdot \text{COS } \phi_j + \frac{\text{SEN } \psi}{K_{yy}} \cdot \text{SEN } \phi_j \right]$						$V = 55.65 \text{ ton}$ $K_{xx} = 413263.39 \text{ kg/cm}$ $K_{yy} = 29888.33 \text{ ..}$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
MARCO	$\frac{\text{COS } \psi}{K_{xx}}$	$\text{COS } \phi_j$	$\frac{\text{COS } \psi}{K_{xx}} \cdot \text{COS } \phi_j$	$\frac{\text{SEN } \psi}{K_{yy}}$	$\text{SEN } \phi_j$	$\frac{\text{SEN } \psi}{K_{yy}} \cdot \text{SEN } \phi_j$	KJV	$V_e$
A	$6.62 \times 10^{-8}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-8}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	6000400.1	23.10
B	$6.62 \times 10^{-8}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-8}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	10432229	24.82
C	$6.62 \times 10^{-8}$	0.0394	$2.73 \times 10^{-8}$	$3.33 \times 10^{-6}$	0.9992	$3.32 \times 10^{-6}$	5190595	17.23
1	$2.268 \times 10^{-8}$	-0.9925	$-2.25 \times 10^{-8}$	$1.191 \times 10^{-6}$	-0.2203	$-3.02 \times 10^{-7}$	6796739.4	-16.94
2	$2.42 \times 10^{-8}$	-0.9992	$-2.42 \times 10^{-8}$	$-1.81 \times 10^{-7}$	-0.0394	$-7.15 \times 10^{-8}$	7501117.2	-18.21
3	$2.42 \times 10^{-8}$	-0.9992	$-2.42 \times 10^{-8}$	$-1.81 \times 10^{-7}$	0.0394	$-7.15 \times 10^{-8}$	7522293.7	-18.50
4	$2.36 \times 10^{-8}$	-0.9999	$-2.33 \times 10^{-8}$	$-7.40 \times 10^{-7}$	0.1931	$-1.21 \times 10^{-7}$	7622293.7	-18.88
5	$1.63 \times 10^{-8}$	-0.7632	$-1.25 \times 10^{-8}$	$-2.46 \times 10^{-6}$	0.6210	$-1.53 \times 10^{-6}$	5102202.2	-14.24
6	$2.05 \times 10^{-8}$	-0.9114	$-1.87 \times 10^{-8}$	$-1.79 \times 10^{-6}$	-0.412	$-7.24 \times 10^{-7}$	4222024	-11.81

Tabla 12

simplificada a cortante directo y en la columna 9 se tiene los cortantes directos para cada marco, análogamente para los cortantes por torsión se tienen los cálculos en la tabla 13 con los resultados finales en la columna 9.

CALCULO DE CORTANTES TORSIONALES

$$V_T = K_T \sqrt{\left[ \left( \frac{X'E}{K\phi\phi} \cos \phi_j \right)^2 + \left( \frac{X'J'E}{K\phi\phi} \sin \phi_j \right)^2 \right]}$$

V = 80.05 ton.  
Kφφ = 27024302

1	2	3	4	5	6	7	8	9
MARCO	$\frac{X'E}{K\phi\phi}$	$\cos \phi_j$	$\frac{X'J'E \cdot \cos \phi_j}{K\phi\phi}$	$\frac{X'J'E}{K\phi\phi}$	$\sin \phi_j$	$\frac{X'J'E \cdot \sin \phi_j}{K\phi\phi}$	KJV	$V_T$
A	-3.66 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.45 X 10 <sup>-8</sup>	3.00 X 10 <sup>-7</sup>	0.9992	299. X 10 <sup>-7</sup>	8908400	1.98
B	-3.784 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.49 X 10 <sup>-8</sup>	3.04 X 10 <sup>-8</sup>	0.9992	3.037 X 10 <sup>-8</sup>	10428839	0.10
C	-3.89 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.53 X 10 <sup>-8</sup>	-2.888 X 10 <sup>-7</sup>	0.9992	-2.89 X 10 <sup>-7</sup>	8190595	-1.32
I	+3.83 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9956	-3.80 X 10 <sup>-8</sup>	-3.83 X 10 <sup>-8</sup>	-0.2803	9.19 X 10 <sup>-10</sup>	9799739	-0.24
E	+1.293 X 10 <sup>-7</sup>	-0.9992	-1.29 X 10 <sup>-7</sup>	2.364 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	9.31 X 10 <sup>-8</sup>	780117	-0.80
3	+1.391 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9992	-1.39 X 10 <sup>-8</sup>	2.41 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	9.49 X 10 <sup>-8</sup>	7823293	-0.034
4	-1.176 X 10 <sup>-7</sup>	-0.9999	-1.18 X 10 <sup>-7</sup>	-8.88 X 10 <sup>-8</sup>	0.1831	-1.07 X 10 <sup>-8</sup>	7823293	0.88
5	-2.31 X 10 <sup>-7</sup>	-0.7838	-1.81 X 10 <sup>-7</sup>	-1.40 X 10 <sup>-7</sup>	0.6210	-8.99 X 10 <sup>-8</sup>	5102905	1.37
6	+3.26 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9114	-2.97 X 10 <sup>-8</sup>	2.43 X 10 <sup>-8</sup>	-0.485	-9.99 X 10 <sup>-10</sup>	4554064	-0.14

Tabla 13

Sumando los resultados de las columnas 9 de tablas 12 y 13 obtenemos los cortantes finales que le corresponde a cada marco del primer entrepiso del edificio como ejemplo, los resultados son los siguientes:

CALCULO DE CORTANTES TORSIONALES

$$V_T = K_j \sqrt{\left[ \frac{X_j E}{K_{\theta\theta}} \cos \phi_j \right]^2 + \left[ \frac{X_j E}{K_{\theta\theta}} \sin \phi_j \right]^2}$$

V = 86.65 ton.  
K<sub>θθ</sub> = 27024302

1	2	3	4	5	6	7	8	9
MARCO	$\frac{X_j E}{K_{\theta\theta}}$	$\cos \phi_j$	$\frac{X_j E \cdot \cos \phi_j}{K_{\theta\theta}}$	$\frac{X_j E}{K_{\theta\theta}}$	$\sin \phi_j$	$\frac{X_j E \cdot \sin \phi_j}{K_{\theta\theta}}$	KJV	V <sub>T</sub>
A	-3.66 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.43 X 10 <sup>-8</sup>	3.00 X 10 <sup>-7</sup>	0.9992	2.99 X 10 <sup>-7</sup>	6966400	1.98
B	-3.784 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.49 X 10 <sup>-8</sup>	3.04 X 10 <sup>-7</sup>	0.9992	3.027 X 10 <sup>-7</sup>	10436639	0.16
C	-3.89 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	-1.53 X 10 <sup>-8</sup>	-2.388 X 10 <sup>-7</sup>	0.9992	-2.39 X 10 <sup>-7</sup>	5190395	-1.32
1	+3.83 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9992	-3.69 X 10 <sup>-8</sup>	-3.83 X 10 <sup>-8</sup>	-0.2603	-9.19 X 10 <sup>-10</sup>	6796739	-0.24
2	+1.293 X 10 <sup>-7</sup>	-0.9992	-1.29 X 10 <sup>-7</sup>	2.364 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	9.31 X 10 <sup>-9</sup>	750117	-0.90
3	+1.391 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9992	-1.39 X 10 <sup>-8</sup>	2.41 X 10 <sup>-7</sup>	0.0394	9.49 X 10 <sup>-9</sup>	7623293	-0.034
4	-1.176 X 10 <sup>-7</sup>	-0.9992	-1.16 X 10 <sup>-7</sup>	-6.58 X 10 <sup>-8</sup>	0.1631	-1.07 X 10 <sup>-8</sup>	7623293	0.88
5	-2.31 X 10 <sup>-7</sup>	-0.7838	-1.81 X 10 <sup>-7</sup>	-1.40 X 10 <sup>-7</sup>	0.6210	-8.69 X 10 <sup>-8</sup>	5102905	1.37
6	+3.26 X 10 <sup>-8</sup>	-0.9114	-2.97 X 10 <sup>-8</sup>	2.43 X 10 <sup>-8</sup>	-0.485	-9.89 X 10 <sup>-10</sup>	4554064	-0.14

Tabla 13

Sumando los resultados de las columnas 9 de tablas 12 y 13 obtenemos los cortantes finales que le corresponde a cada marco del primer entresijo del edificio como ejemplo, los resultados son los siguientes:

MARCO	CORTANTE Vf (ton)
A	28.12
B	24.24
C	15.91
1	-17.18
2	-19.11
3	-18.53
4	-17.80
5	-12.97
6	-11.05

Tabla 14

La observación principal de los resultados es la de los signos negativos que se obtienen, donde la razón básica de dichos resultados obedece a la orientación asignada inicialmente a los marcos, en la figura 24 se muestra dichas orientaciones y se puede ver que los marcos ejes A, B y C tienen ángulos de inclinación respecto al eje x menores de 90 grados por lo que sus componentes seno y coseno son positivos, mientras que el resto de

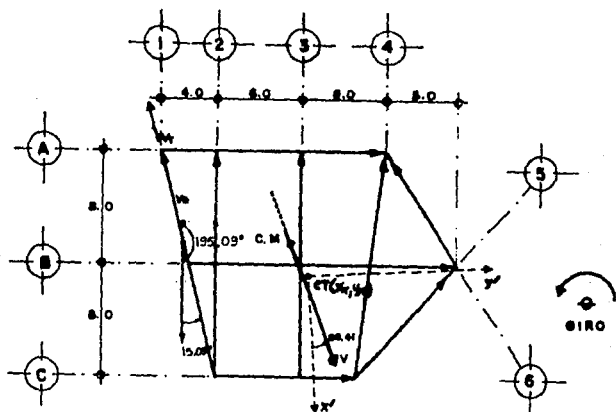


Figura 24

marcos tienen ángulos de inclinación mayores de 90 grados de los cuales resultan componentes negativos que finalmente se reflejan en los resultados de la tabla 14, pero que la magnitud de tales valores es la misma que si los marcos estuvieran orientados en sentido contrario al asignado inicialmente, por ejemplo para el marco eje 1 su orientación inicial es de 195.09 grados si se cambiara a la dirección contraria tendría una inclinación de 15.09 grados (ver figura 24) que tiene el mismo seno y coseno que 195.09 grados pero con signo positivos. Por lo tanto los resultados de la tabla 14 se pueden considerar como valores absolutos.

Debido a la repetición numérica de la solución de distribución de cortante sísmico, para cada entrepiso, se ha utilizado un programa de computadora para la solución de los entrepisos restantes, así como la comprobación de los resultados obtenidos del primer entrepiso (tabla 14), los resultados son los siguientes:

## ENTREPISO

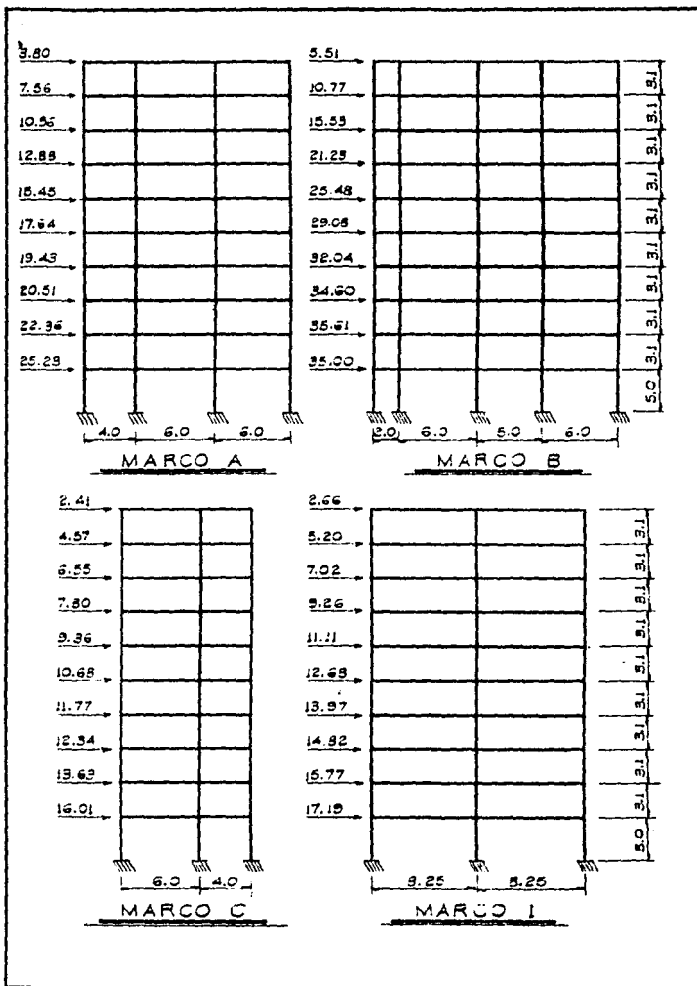
	VW1	VW2	VW3	VW4	VW5
MARCO	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE
A	25.25	22.36	26.51	19.43	17.04
B	35.44	35.01	34.08	32.04	29.06
C	16.41	13.65	12.34	11.77	10.08
1	17.14	15.77	14.82	13.97	12.08
2	19.06	18.83	18.44	16.72	15.17
3	18.47	18.32	17.55	16.25	14.74
4	17.70	17.35	16.55	15.37	13.95
5	12.90	13.74	13.49	12.32	11.18
6	11.93	11.49	11.08	10.78	9.79

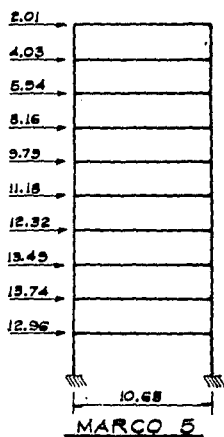
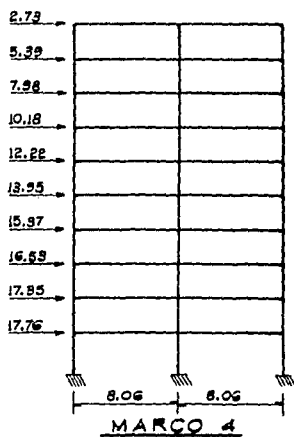
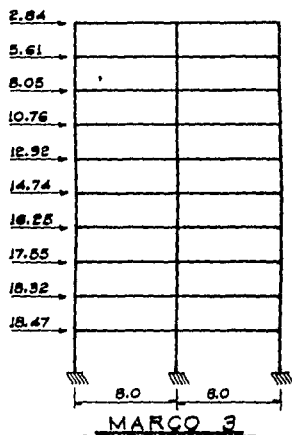
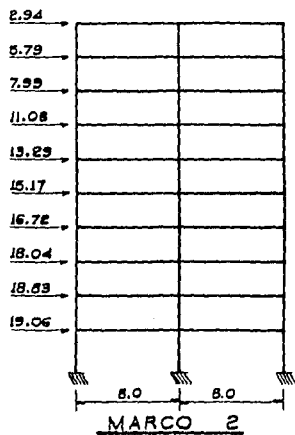
## ENTREPISO

MARCO	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE	CORTANTE
A	15.45	12.86	14.50	7.50	5.19
B	25.46	21.25	15.53	10.77	5.51
C	9.50	7.88	6.55	4.57	2.41
1	11.11	9.26	7.02	5.20	2.60
2	15.29	11.08	7.95	5.75	2.54
3	12.72	10.76	8.05	5.01	2.84
4	12.22	10.16	7.98	5.39	2.75
5	9.74	8.10	5.94	4.03	2.01
6	6.57	7.15	5.50	3.65	1.67

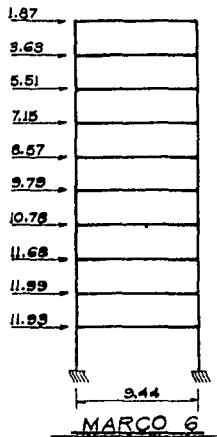
Comparando los resultados de computadora del primer entrepiso con los obtenidos a mano (tabla 14) se puede decir que son los mismos ya que la diferencia mínima existente obedece a la diferente precisión en las operaciones que conducen a tales resultados.

En las hojas siguientes se tienen los resultados indicados en elevación de cada marco, no olvidar que son cortantes y que para análisis habrá que hacer la diferencia de los mismos para tener fuerzas.









### III.- CONCLUSIONES

Se ha presentado la justificación teórica de análisis sísmico estático de edificios, estructurados convencionalmente - a base de puros marcos regulares o exclusivamente de muros de cortante, en los cuales los marcos o muros no son paralelos a un sistema ortogonal de ejes coordenados.

Dicha justificación, consistente en la formulación de la hipótesis de las alfas, es la de trabajar con las rigideces de entrepiso, y considerar independientemente a cada entrepiso, evitando así la necesidad de calcular las matrices de rigidez  $[K_j]$  para cada marco.

## REFERENCIAS

- 1.- Folleto Complementario del R.C.D.D.F  
6  
Manual de Diseño Sísmico de Edificios por:  
Enrique Bazán  
Roberto Meli  
(del instituto de Ingeniería, UNAM)
- 2.- Geometría Analítica, H. Lehman
- 3.- Ecuaciones Diferenciales, William E. Boyce  
Editorial, Limusa.
- 4.- Dany Rios, Julio, "Diagonalización de Matrices  
de Rigidez de Edificios", Primer Congreso Nacio-  
nal de Ingeniería.  
6  
Revista de Ingeniería, Octubre de 1977, México,  
D.F.
- 5.- Bazán, Enrique, "Sobre el Análisis de Edificios  
con Muros Rigidizantes", Primer Congreso Nacional  
de Ingeniería Estructural, México, D.F.