

00382

1-A

RECEIVED
BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAY 19 1988

**ALGUNOS ASPECTOS HIDRODINAMICOS Y TERMODINAMICOS
DE LOS GASES RELATIVISTAS**

**TESIS
que presenta**

MIGUEL ANGEL HERRERA ANDRADE

**a la Facultad de Ciencias de la
Universidad Nacional Autónoma de México
para optar por el grado de
Doctor en Ciencias (Física)**

México D.F.

1988

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

I. INTRODUCCION	1
II. TEORIA	8
1) Teoría macroscópica	9
a) Ideas básicas	9
b) Leyes de conservación	11
i) Fluido ideal	13
ii) Fluido fuera de equilibrio	19
iii) Mezcla	23
2) Teoría cinética relativista	24
a) Definiciones básicas. Fluido simple	25
b) Mezcla	33
c) Ecuación de Boltzmann	33
d) Leyes de conservación. Teorema H	40
e) Distribuciones de equilibrio	42
f) Casos especiales	45
1) Gas de Jüttner ($\epsilon = 0$)	46
ii) Fermiones masivos ($\epsilon = -1$)	51
iii) Fotones ($\epsilon = 1$)	52

III. FLUJO ESTACIONARIO CON CREACION DE PARES	56
1) Teorema de Bernoulli relativista	57
2) Velocidad del sonido	59
3) Flujo crítico	61
4) Parámetros críticos	64
5) Flujo con creación de pares	65
a) Velocidad del sonido	68
b) Valores críticos	69
IV. INTERACCION ENTRE MATERIA Y RADIACION I	76
1) Formalismo	79
2) Electrones y fotones	82
3) Resultados y conclusiones	86
4) Aplicación	89
V. INTERACCION ENTRE MATERIA Y RADIACION II	92
1) Teoría	94
2) Pares y radiación	97
3) Resultados y discusión	101
VI. GENERACION DE ENTROPIA. 2ª VISCOSIDAD	105
1) 2ª viscosidad	106
2) Teoría	109
3) Gas de Jüttner y radiación	117
4) Pares y radiación	121
5) Creación de entropía	123
APENDICE A	127
APENDICE B	131
1) Integración en el sistema "centro de momento"	131

2) Integración en el sistema "en reposo"	137
3) Cálculo de $g_n(\alpha)$	139
4) Cálculo de $J_n(a,b)$	141
APENDICE C	144
APENDICE D	147
1) Reducción de I_c	147
2) Reducción de I_φ	151
REFERENCIAS	156

I. INTRODUCCION

La teoría de los fluidos relativistas adquiere, día con día, una mayor importancia en Astronomía. Este creciente interés se debe, en gran parte, a que este tipo de fluidos parece estar involucrado (o lo está, con toda seguridad) en una gran variedad de fenómenos astrofísicos de interés actual, tales como discos de acreción alrededor de objetos compactos (Novikov y Thorne, 1973; Abramowicz et al., 1980; Begelman, 1985 y Thorne, 1986), 'jets' (Begelman et al., 1984; Eridle y Perley, 1984) y, desde luego, fases tempranas de la evolución del Universo (de acuerdo con la teoría de la Gran Explosión). Entre los problemas que han sido tratados hasta la fecha podemos mencionar las ondas de choque relativistas (Thorne, 1973; Taub, 1978), el efecto de los procesos disipativos en discos de acreción (Frank et al., 1985) y la influencia que los mismos procesos disipativos pudieron tener en las fases tempranas del Universo en expansión, tanto en el amortiguamiento de posibles anisotropías primigenias (Misner, 1968) como en la generación de entropía (Weinberg, 1971; Landsberg y Reeves, 1922).

En este trabajo presentaremos algunos resultados teóricos originales relacionados con mezclas de fluidos relativistas.

Estudiaremos, en particular, algunos aspectos de su flujo estacionario, su tiempo de relajamiento cuando las componentes están fuera de equilibrio térmico y su viscosidad volumétrica equivalente, cuando se encuentran en expansión (para más detalles, ver la descripción del plan de trabajo que se presenta más adelante o los capítulos correspondientes). Conviene aclarar, antes de seguir adelante, que, cuando hablamos de 'fluidos relativistas', nos estamos refiriendo a fluidos cuyas velocidades son del orden de la velocidad de la luz, tanto las macroscópicas (velocidades de los flujos hidrodinámicos de materia) como las microscópicas (temperatura del fluido tal que $k_B T \sim mc^2$, donde k_B es la constante de Boltzmann y m la masa de las partículas que lo constituyen). Es interesante notar que, en este último caso, es necesario tomar en cuenta la creación de pares de partículas.

El esquema teórico apropiado para estudiar estos sistemas es la teoría cinética relativista. Se trata, esencialmente, de un formalismo que, al igual que su predecesora, la teoría cinética clásica, permite relacionar los parámetros macroscópicos de un sistema con las propiedades mecánicas (microscópicas) de las partículas individuales que lo constituyen, por medio de ciertos promedios sobre todo el sistema. Tanto en las definiciones como en el establecimiento de las relaciones adecuadas, la teoría relativista sigue prácticamente las mismas ideas y los mismos métodos que la teoría cinética clásica, con la única diferencia, desde luego, de que todo esto se hace dentro del marco de la teoría de la relatividad. Una consecuencia de esta semejanza

entre ambas teorías (que veremos más adelante) es que las ecuaciones son también muy parecidas y que la extensión relativista de los teoremas clásicos es particularmente simple y directa.

Los primeros intentos por incorporar a la hidrodinámica, a la termodinámica y a la mecánica estadística dentro de un esquema relativista, son casi tan antiguos como la misma teoría de la relatividad, pero no fue sino hasta la década pasada cuando se logró establecer un formalismo general y autoconsistente que permitiera abordar, sin ambigüedades, los problemas relacionados con fenómenos de transporte, esto es, una teoría cinética relativista. En efecto, apenas dos años después de la publicación de su celeberrimo artículo "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", con el cual nacía la teoría de la relatividad, el mismo Einstein publica un trabajo titulado "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen"- "El principio de relatividad y sus consecuencias"-, en el cual ataca el problema de la temperatura y la entropía de los sistemas en movimiento (Einstein, 1907). Cuatro años más tarde, Jüttner deriva, por primera vez, la extensión relativista de la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann (Jüttner, 1911), la cual generaliza al caso de bosones y de fermiones en 1928 (Jüttner, 1928). Las bases de la termodinámica relativista de procesos irreversibles las sienta Eckart (1940) mientras que, en el mismo año, Lichnerowicz trabaja en la extensión relativista de la hidrodinámica (Lichnerowicz, 1940) y al mismo tiempo, junto con

Marrot, en la derivación de la ecuación de Boltzmann relativista (Lichnerowicz y Marrot, 1940).

El 'teorema E' relativista se formula más de veinte años más tarde (Ehlers, 1961; Tauber y Weinberg, 1961) y, finalmente, según mencionamos con anterioridad, todas estas ideas cristalizan en el formalismo actual en la década de los setentas (ver de Groot et al., 1980, y todas las referencias allí citadas).

Este trabajo tiene una doble intención: primero, la de familiarizar al lector con el formalismo de la teoría cinética relativista y con sus 'corolarios': la termodinámica y la hidrodinámica relativistas; y, segundo, la de ilustrar los procedimientos matemáticos asociados con ella por medio de algunas aplicaciones a problemas de interés astrofísico que, hasta ahora, no han sido investigados. Aunque en todo el trabajo nos hemos restringido al caso de un espacio-tiempo plano (relatividad especial), la generalización de nuestros resultados a un espacio curvo es relativamente sencilla, al menos formalmente, ya que hemos escrito todas las ecuaciones en forma covariante.

El plan del trabajo es como sigue: en el capítulo II comenzamos con una exposición, lo más breve y directa posible, del formalismo de la teoría cinética relativista, para concluir con una aplicación inmediata del mismo, que es la obtención de las funciones de distribución de equilibrio para partículas no-cuánticas, fermiones y fotones. En el capítulo III estudiamos el flujo estacionario de una mezcla de fluidos relativistas,

concentrándonos, en particular, en las extensiones relativistas del teorema de Bernoulli y del problema del 'flujo crítico' (Landau y Lifshitz, 1959; Courant y Friedrichs, 1948). Según veremos, resulta notable la sencillez y la facilidad con que los resultados clásicos se generalizan al caso relativista por medio del formalismo. Para concluir el capítulo, aplicamos nuestros resultados a una mezcla de bariones, fotones y pares electrón-positrón, para obtener la velocidad del sonido en el fluido y sus parámetros críticos en el intervalo relevante de temperaturas. En el capítulo IV, nos abocamos al problema del tiempo de relajamiento de una mezcla binaria de fluidos relativistas, cuyas componentes están a temperaturas ligeramente diferentes. Derivamos una fórmula general para su tiempo de relajamiento y demostramos que se reduce apropiadamente en el límite clásico. Por último, la aplicamos a un gas de Jüttner mezclado con radiación, suponiendo que la única interacción entre ambos es la dispersión Compton y usamos los valores resultantes para discutir brevemente el equilibrio térmico en el Universo temprano.

En el capítulo V derivamos una fórmula general para el tiempo de relajamiento de una mezcla binaria cuyas componentes interaccionan a través de dos procesos microscópicos. Para terminar, aplicamos la fórmula a un gas de radiación y pares electrón-positrón, suponiendo que interactúan a través de dispersión Compton y de la creación y aniquilación de los pares con el campo de radiación, y usamos el resultado para demostrar que, respecto a estos procesos, el Universo temprano debió

encontrarse en equilibrio térmico. En el capítulo VI obtenemos una expresión general para la viscosidad volumétrica de una mezcla binaria de gases relativistas en expansión y la aplicamos a las mezclas consideradas en los capítulos anteriores para estimar la importancia que los procesos estudiados en ellos pudieron tener, en el Universo temprano, como generadores de entropía.

Con el propósito de facilitar la continuidad de los razonamientos físicos, hemos relegado a varios apéndices los procedimientos matemáticos que se siguieron para reducir las integrales a formas más aptas para su evaluación numérica.

Cabe señalar que los resultados originales obtenidos en esta tesis han sido publicados, en forma más compacta, desde luego, en Herrera y Hacyan (1983), Herrera y Hacyan (1985) y Herrera (1986).

Hay, desde luego, muchas otras posibles aplicaciones astrofísicas de la teoría cinética relativista, que sería muy interesante estudiar. En particular, hemos decidido abordar, en el futuro cercano, el problema del transporte de energía entre neutrinos, antineutrinos, electrones y positrones. Este problema es importante en cosmología, ya que determina la temperatura a la cual los neutrinos se desacoplan del resto de la materia lo cual, a su vez, influye en la formación de helio.

Por último, sólo unas cuantas palabras referentes a la notación. Los índices griegos varían de 0 a 3, correspondiendo el 0 a la componente temporal, mientras que los índices latinos

varían solamente de 1 a 3. Los cuadvectores los denotaremos, indistintamente, con un índice griego (A^μ) o sin índice (A), cuando no haya posibilidad de confusión; los vectores tridimensionales estarán siempre subrayados (por ejemplo, \underline{A}) y el producto escalar de dos cuadvectores lo indicaremos con un punto ($A \cdot B = A^\mu B_\mu$). En los tensores siempre escribiremos los dos índices y, en particular, el tensor métrico lo tomaremos como $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, esto es, trabajaremos con una signatura de -2 .

II. TEORIA

La teoría de los fluidos relativistas fuera de equilibrio adquirió su forma actual durante la década de los setentas y es, en consecuencia, relativamente desconocida. Por esta razón, y con el propósito de facilitar la comprensión del presente trabajo, comenzaremos con una breve presentación de las ideas y de las relaciones básicas que la constituyen. La exposición no pretende ser ni completa ni rigurosa sino, más bien, intuitiva y conceptual. En particular, trabajaremos siempre dentro del marco de la teoría especial de la relatividad, usando una signatura (+ - - -); no consideraremos campos externos y supondremos siempre fluidos simples (esto es, fluidos con solamente 2 variables termodinámicas independientes). El lector interesado en un tratamiento más profundo puede remitirse a los trabajos de Landau y Lifshitz (1959), Ehlers (1971), Stewart (1971), Taub (1972) y de Groot et al. (1980).

1) Teoría macroscópica

a) Ideas básicas

La descripción de un fluido relativista puede hacerse, como en el caso clásico, macroscópica o microscópicamente. Comenzaremos por la descripción macroscópica.

En la mecánica clásica el estado de un fluido en movimiento se especifica por medio de las variables termodinámicas locales (temperatura, densidad etc.) y por la velocidad local del flujo de materia (velocidad hidrodinámica). La evolución del sistema en el tiempo queda entonces descrita por un conjunto de ecuaciones que expresan, en términos de estas variables, las leyes de conservación de la masa (ecuación de continuidad), del momento (ecuación de movimiento) y de la energía. Este esquema se mantiene, en lo esencial, en el tratamiento relativista, modificando simplemente algunos aspectos para hacerlo compatible con los principios de la relatividad. Las diferencias básicas que hay que considerar son las siguientes: 1) la masa y la energía del sistema se fusionan en una sola variable termodinámica: la masa-energía. Una consecuencia inmediata de esta modificación es que la ley de conservación de la masa pierde, obviamente, su carácter de ley independiente, debiendo ser reemplazada por una nueva ley de conservación. La nueva ley que se toma es la

conservación del número bariónico (número de bariones menos número de antibariones). ii) En relatividad, el momento y la energía de una partícula se describen por medio del cuadrivector 'cuadrimento', $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$, que es un cuadrivector de norma constante ($p^\mu = m'c^\mu$, siendo m la masa de la partícula), cuya componente temporal es la energía total de la partícula (energía en reposo + energía cinética), dividida entre c , y cuyas componentes espaciales constituyen su momento relativista. Como el momento y la energía de una partícula se hallan incorporados en un cuadrivector, el momento y la energía de todo un sistema se tienen que describir a través de un tensor. Se utiliza el llamado 'tensor de energía-momento', $T^{\mu\nu}$, que es un tensor simétrico, de rango 2, cuyas componentes son: T^{00} , la densidad de masa-energía; cT^{0i} , el flujo de masa-energía en la dirección i y T^{ij} el tensor clásico de esfuerzos. Las leyes de conservación del momento y de la energía quedan entonces incorporadas en una sola ecuación: la conservación de $T^{\mu\nu}$. iii) Como en el caso clásico las propiedades termodinámicas de un sistema no dependen de su estado de movimiento, no tenemos ninguna indicación acerca de sus propiedades de transformación al pasar de un sistema de referencia a otro que se mueve respecto al primero. Por este motivo se suscitaron en el pasado enconadas discusiones sobre si, por ejemplo, la temperatura se 'contrae' o no, etc. Este tipo de controversias se han eliminado en la actualidad conviniendo en definir las variables termodinámicas como aquellas que mediría un observador que se moviese junto con el sistema (el llamado

'observador localmente en reposo'). De esta definición se sigue que las variables termodinámicas son escalares.

A continuación veamos las ecuaciones que resultan de aplicar estas ideas a un fluido.

b) Leyes de conservación

Consideremos primero un fluido constituido por una sola componente. Para un observador que se mueve junto con él, las leyes de la termodinámica clásica son válidas y podemos escribir la primera ley de la termodinámica, para un elemento de volumen, como

$$de = hdn + nk_s T ds \quad (II.1)$$

donde e es la densidad de masa-energía, n es la densidad numérica de bariones, T es la temperatura, k_s es la constante de Boltzmann ($k_s = 1.38 \times 10^{-16}$ erg K^{-1}), s es la entropía por barión medida en unidades de k_s y

$$\begin{aligned} h &= (p + e)/n \\ &= \mu + k_s Ts \end{aligned} \quad (II.2)$$

es la entalpia por barión, siendo p la presión hidrostática y μ el potencial químico por partícula. Dado que todas las

variables que aparecen en esta ecuación son escalares, esta es también la primera ley de la termodinámica relativista.

Consideremos ahora las leyes de conservación. De la generalización relativista del Teorema de Gauss (ver, por ejemplo, Landau y Lifshitz, 1962) se sigue que la cuadrividivergencia del cuadriflujo correspondiente a una cierta cantidad física nos dice 'cuánto' de esa cantidad se crea o se produce en el sistema en consideración. Entonces, denotando con N^μ al cuadriflujo de bariones, la conservación del número bariónico (ecuación de continuidad) se expresará como

$$N^\mu{}_{,\mu} = 0. \quad (\text{II.3})$$

Análogamente, las leyes de conservación del momento y de la masa-energía se expresarán, en términos del tensor de energía-momento, como

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (\text{II.4})$$

Finalmente, denotando al cuadriflujo de entropía por S^μ , la segunda ley de la termodinámica se expresará como

$$\sigma = S^\mu{}_{,\mu} \geq 0. \quad (\text{II.5})$$

Estas leyes son totalmente generales. Expresiones explícitas para N^μ , S^μ y $T^{\mu\nu}$ en términos de las variables termodinámicas del

sistema pueden obtenerse solamente una vez que se ha especificado el sistema. Esto es lo que haremos en la siguiente sección para el caso específico de un fluido ideal (o, lo que en cierto sentido es equivalente, para un fluido en equilibrio)

1) Fluido Ideal

Una de las consecuencias más conocidas de la Teoría de la relatividad es que el tiempo transcurre de manera diferente para diferentes observadores. Esto significa, geoméricamente hablando, que cada observador define, en cada punto del espacio-tiempo, una cierta 'dirección temporal', dirección que está especificada por la cuadrivelocidad del observador en cuestión. Es claro, entonces, que, para describir la evolución en el tiempo de un sistema relativista, lo primero que necesitamos es especificar respecto a cuál observador vamos a medir el tiempo. En principio todos los observadores son igualmente aceptables pero, en nuestro caso, las variables termodinámicas están definidas en el sistema de referencia que se mueve junto con el fluido. Es, por tanto, natural, describir la evolución del fluido en este particular sistema de referencia, y eso es, precisamente, lo que haremos. La dirección temporal queda entonces especificada por la cuadrivelocidad del fluido la cual denotaremos por U^μ . Por razones obvias U^μ se llama la 'cuadrivelocidad hidrodinámica'; está relacionada con la velocidad hidrodinámica tridimensional \underline{v} a través de la relación

$$U^{\mu} = \gamma(c, \underline{v}), \quad (\text{II.6})$$

donde

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.7})$$

En particular, en el sistema de referencia localmente en reposo se tiene

$$U^{\mu} (\text{loc. rep.}) = (c, \underline{0}). \quad (\text{II.8})$$

Para completar la descripción del fluido ideal, debemos ahora encontrar las expresiones adecuadas para N^{μ} , S^{μ} y $T^{\mu\nu}$. Consideremos primero el cuadriflujo de partículas N^{μ} . Es evidente que sus componentes espaciales deben de corresponder al vector flujo de partículas 'clásico', puesto que se trata, simplemente, de la extensión relativista de este concepto. Por lo tanto, N^{μ} debe de ser la densidad numérica de partículas multiplicada por la velocidad del flujo. Solo que, en el caso relativista, la densidad numérica se ve multiplicada por un factor γ (que es el factor por el cual se contrae el volumen) por lo cual debemos tener

$$N^i = n Y v^i . \quad (\text{II.9})$$

Pero $Y v^i$ son, simplemente, las componentes espaciales de U^μ , de donde se sigue que una definición adecuada para el cuadriflujo de partículas es

$$N^\mu = n U^\mu , \quad (\text{II.10})$$

que es, en efecto la que adoptaremos.

De manera totalmente análoga es fácil convencerse de que el cuadriflujo de entropía debe estar dado por

$$S^\mu = n k_B s U^\mu . \quad (\text{II.11})$$

Consideremos, por último, el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. En el sistema localmente en reposo el tensor de esfuerzos T^{ij} es, simplemente, el tensor de esfuerzos de un fluido ideal 'clásico', en reposo, o sea que

$$T^{ij} (\text{loc. rep.}) = \text{diag}(p, p, p) . \quad (\text{II.12})$$

Además, puesto que el fluido es ideal, no hay un flujo neto de momento en ninguna dirección (siempre en el sistema localmente en reposo), por lo cual

$$cT^{00}(\text{loc. rep.}) = cT^{10}(\text{loc. rep.}) = 0. \quad (\text{II.13})$$

Como la componente T^{00} es tan solo la densidad de masa energía e , tenemos que

$$T^{\mu\nu}(\text{loc. rep.}) = \text{diag}(e, p, p, p). \quad (\text{II.14})$$

Para obtener la expresión general de $T^{\mu\nu}$ basta con encontrar una expresión covariante que se reduzca a la anterior en el sistema localmente en reposo o, también, se le puede aplicar a (II.14) una transformación de Lorentz. En ambos casos se obtiene (ver Landau y Lifshitz, 1959, apartado 125)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (p+e)U^\mu U^\nu / c^2 - p \eta^{\mu\nu} \\ &= eU^\mu U^\nu / c^2 - p \Delta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

donde hemos introducido el 'operador de proyección'

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu / c^2 \quad (\text{II.16})$$

que tiene la facultad de eliminar la componente 'paralela' a U de cualquier cuadrivector.

Como justificación de estas relaciones, veamos algunos resultados que se derivan de ellas. De la ecuación (II.10) se

sigue que U^μ puede escribirse como

$$U^\mu = c N^\mu / (N^\mu N_{\mu})^{1/2} \quad (\text{II.17})$$

o sea que, en efecto, U^μ es la cuadrivelocidad del flujo de partículas.

Otro resultado interesante es que, según se ve de las ecuaciones (II.10), (II.11), (II.15) y (II.16), podemos definir n , e , p y s por las relaciones

$$n = N \cdot U / c^3 \quad (\text{II.18})$$

$$e = U_\mu U_\nu T^{\mu\nu} / c^3 \quad (\text{II.19})$$

$$p = -\Delta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} / 3 \quad (\text{II.20})$$

y

$$s = S \cdot U / nk_0 c^3 \quad (\text{II.21})$$

En cuanto a las leyes de conservación, substituyendo la ecuación (II.10) en la ecuación de continuidad obtenemos

$$\dot{n}/n = - U^\mu_{,\mu} \quad (\text{II.22})$$

donde el punto denota la derivada a lo largo de U^μ , esto es,

$$\dot{\epsilon} = U^{\mu} \partial_{\mu} \quad . \quad (II.23)$$

Se sigue de ésta igualdad que $U^{\mu}{}_{,\mu}$ es la tasa de expansión

$$U^{\mu}{}_{,\mu} = \dot{V}/V = \theta \quad (II.24)$$

donde V es el volumen.

La otra ley de conservación, ec. (II.4), conduce, después de una contracción con U_{μ} , a la ley de conservación de la energía

$$\dot{\epsilon} = h\dot{n}. \quad (II.25)$$

La misma ecuación (II.4), contraída con Δ^{λ}_{μ} , conduce a la ecuación de Euler relativista (ecuación de movimiento)

$$(p+\epsilon)\dot{U}^{\lambda} = c^{\lambda} \nabla^{\lambda} p \quad (II.26)$$

donde hemos definido el operador espacial 'gradiente'

$$\nabla^{\lambda} = \Delta^{\lambda\mu} \partial_{\mu} \quad , \quad (II.27)$$

el cual se reduce, en el sistema localmente en reposo, al operador gradiente común y corriente (su componente temporal se hace 0).

De la primera ley de la termodinámica y de la ecuación

(II.25) se sigue que

$$\dot{s} = 0, \quad (\text{II.28})$$

resultado conocido para un fluido ideal o en equilibrio y que, desde luego, es consistente con la segunda ley de la termodinámica, según puede constatararse de las ecuaciones (II.5) y (II.11).

Todo lo anterior constituye la teoría macroscópica de los fluidos en equilibrio.

ii) Fluido fuera de equilibrio

Si el fluido no se encuentra en equilibrio termodinámico aparecerán en su seno procesos de transporte tendientes a restablecer la situación de equilibrio. Su efecto en el formalismo anterior es el de agregar términos 'irreversibles', correspondientes a 'flujos irreversibles', a las expresiones de N^{\wedge} , S^{\wedge} y T^{\wedge} . Escribimos entonces

$$N^{\wedge} = N^{(e)\wedge} + N^{(i)\wedge}, \quad (\text{II.29})$$

$$S^{\wedge} = S^{(e)\wedge} + S^{(i)\wedge} \quad (\text{II.30})$$

y

$$T^{ij} = T^{(e)ij} + T^{(i)ij} \quad (\text{II.31})$$

donde los superíndices 'e' e 'i' denotan las contribuciones 'en equilibrio' e 'irreversibles', respectivamente. El problema consiste ahora en encontrar expresiones para los términos irreversibles. Ocorre, sin embargo, que éstos términos no están unívocamente determinados y, de hecho, diferentes autores los han definido de diferentes maneras. En el presente trabajo, nos apegaremos a las definiciones dadas por Eckart (1940), por ser las que, a la larga, han ido siendo adoptadas por la mayoría. Así, de acuerdo con Eckart, definimos n , e , s y U por las relaciones (II.17) - (II.21). Las demás variables termodinámicas quedan entonces determinadas, en términos de éstas, por las derivadas parciales correspondientes. Por ejemplo, la temperatura T estará dada por

$$T = (\partial e / \partial s)_n / (nk_0) \quad (\text{II.32})$$

etc. Definimos, además, el flujo de calor q como el flujo de energía 'ortogonal' al flujo de partículas

$$q^i = U, T^{ij} \Delta_j, \quad (\text{II.33})$$

y el tensor 'irreversible' de tensiones

$$\Pi^{\mu\nu} = p \Delta^{\mu\nu} + \Delta^{\mu}{}_{\lambda} T^{\lambda\nu} \Delta^{\nu}{}_{\rho} . \quad (\text{II.34})$$

(Formalmente, habría que definir también un flujo de difusión de las partículas pero en el presente trabajo este fenómeno no se toma en cuenta). Estas definiciones, junto con las leyes de conservación y la primera ley de la termodinámica, implican que

$$N^{(\lambda)\mu} = 0, \quad (\text{II.35})$$

$$S^{(\lambda)\mu} = q^{\lambda} / T \quad (\text{II.36})$$

y

$$T^{(\lambda)\mu\nu} = (q^{\lambda} U^{\nu} + q^{\nu} U^{\lambda}) / c^2 + \Pi^{\lambda\mu\nu} . \quad (\text{II.37})$$

Igual que en el caso clásico, es posible obtener expresiones 'fenomenológicas' explícitas para el flujo de calor y para el tensor de tensiones si suponemos que el fluido se encuentra relativamente cerca de equilibrio. En este caso, los gradientes de las variables termodinámicas son pequeños y los flujos irreversibles deben ser, en primera aproximación, proporcionales a ellos. Utilizando argumentos de simetría, trabajando siempre a primer orden en los gradientes y obligando a que la creación de entropía sea necesariamente no-negativa, se obtienen las relaciones (para más detalles consúltese, por ejemplo, Weinberg,

1971):

$$q^{\mu} = \lambda (\nabla^{\mu} T - \dot{U}^{\mu} T/c^2) \quad (\text{II.38})$$

y

$$\pi^{\mu\nu} = 2\eta \epsilon^{\mu\nu} + \zeta \Delta^{\mu\nu} \theta \quad (\text{II.39})$$

donde

$$\epsilon^{\mu\nu} = (\nabla^{\mu} U^{\nu} + \nabla^{\nu} U^{\mu} - 2\theta \Delta^{\mu\nu} / 3) / 2 \quad (\text{II.40})$$

es el tensor 'tasa de deformación' (con traza igual a cero); λ es la conductividad térmica, η es el llamado 'primer coeficiente de viscosidad' (o, más brevemente, la 'primera viscosidad' o la viscosidad de corte) y ζ es el 'segundo coeficiente de viscosidad' (o 'segunda viscosidad' o viscosidad volumétrica). Es interesante notar que el flujo de calor depende no solamente del gradiente de la temperatura, sino también de la cuadriaceleración (o, lo que es equivalente a primer orden, del gradiente de la presión), siendo este último un efecto puramente relativista.

Finalmente, la tasa de creación de entropía es

$$S^{\mu}{}_{;\mu} = nk_B \dot{s} \equiv \sigma$$

$$= (3 \theta^2 + 27 \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} - q^{\mu} q_{\mu} / \lambda) / T \quad (\text{II.41})$$

que, desde luego (por construcción), es necesariamente no-negativa.

iii) Mezcla

La generalización del formalismo anterior al caso de una mezcla de N componentes es inmediata. El i -ésimo tipo de partícula estará descrito por su cuadriflujo de partículas N_i^{μ} , su cuadriflujo de entropía S_i^{μ} y su tensor de energía - momento $T_i^{\mu\nu}$. En este caso la dirección temporal la especificamos por medio de la cuadrivelocidad del flujo medio de partículas (cuadrivelocidad hidrodinámica) la cual se define en términos del cuadriflujo total de partículas

$$N^{\mu} = \sum_i N_i^{\mu} \quad (\text{II.42})$$

por la ec. (II.17). Por medio de U^{μ} se define la densidad bariónica de las partículas 'i' como

$$n_i = N_i^{\mu} U_{\mu} / c^2, \quad (\text{II.43})$$

su densidad de masa-energía como

$$e_i = U \wedge U' T_i \wedge \wedge / c^2 \quad (\text{II.44})$$

y su entropía adimensional por barión como

$$s_i = S_i \cdot U / (nk_0 c^2). \quad (\text{II.45})$$

Dada la aditividad de n_i , e_i y s_i el sistema queda descrito por los cuadvectores 'totales' $N \wedge$, ec. (II.42) y

$$S \wedge = \sum_i S_i \wedge \wedge, \quad (\text{II.46})$$

por el tensor 'total' de energía - momento

$$T \wedge \wedge = \sum_i T_i \wedge \wedge, \quad (\text{II.47})$$

y por las leyes de conservación (II.3) - (II.5). Con todo lo anterior el formalismo está completo.

2) Teoría Cinética Relativista

La teoría cinética relativista se construye de acuerdo con las mismas ideas básicas de la teoría cinética clásica, expresándolas simplemente dentro de un formalismo covariante. Se

tiene así una 'función de distribución', que satisface una 'ecuación de Boltzmann relativista', en términos de la cual es posible definir los parámetros macroscópicos locales del sistema de tal manera que satisfagan las leyes de la termodinámica relativista. En lo que sigue, describiremos brevemente los aspectos fundamentales de este 'formalismo microscópico' tal y como lo usaremos en el presente trabajo, esto es, dentro del marco de la relatividad especial, despreciando campos externos y considerando un sistema suficientemente diluido como para que su descripción se pueda hacer a través de funciones de distribución de una partícula.

a) Definiciones básicas. Fluido simple

El punto de partida es, desde luego, encontrar una definición adecuada para la función de distribución $f(x,p)$. En el caso clásico $f(\underline{x},\underline{p},t)$ se define de tal modo que

$$dN = (g/h^3) f dV d^3p \quad (II.48)$$

sea el número de partículas que, en el instante 't', se encuentran contenidas en un volumen elemental dV alrededor del punto \underline{x} y cuyos momentos se hallan comprendidos entre \underline{p} y $\underline{p}+d\underline{p}$, siendo g el número de ocupación del estado ($g = 2s+1$, donde s es el espín, para partículas masivas; $g = 2$ para fotones y $g = 1$ para neutrinos) y h la constante de Planck. Al extender esta

definición al caso relativista es, obviamente, deseable que f quede definida en términos de invariantes de Lorentz, esto es, que sea un escalar.

Ahora bien, en el espacio-tiempo el sistema está descrito por las líneas de universo de las partículas que lo constituyen y las tangentes a estas líneas en cada 'punto' son, si se usa una parametrización adecuada, sus respectivos cuádrimomentos. Las líneas correspondientes a las partículas en una vecindad del punto x forman, entonces, un haz o tubo elemental, mientras que un elemento de volumen tridimensional es una hipersuperficie espacial elemental $t = \text{cte.}$ ('rebanada temporal') cuya orientación está especificada por la cuadrivelocidad U^μ del observador correspondiente. En ausencia de colisiones, el número de líneas contenidas en el tubo permanecerá constante, de tal manera que cualquier hipersuperficie elemental 'acotada' por el tubo, independientemente de su orientación, contendrá el mismo número de intersecciones con ella (Fig. II.1). Pero el número de intersecciones es precisamente dN , el número de partículas que 've' el observador (desde luego que cada observador ve a las mismas partículas contenidas en diferentes volúmenes, según su orientación en el espacio-tiempo). En principio, cada observador podría definir una función de distribución de acuerdo con la ecuación (II.41), de tal forma que, si O y O' son 2 observadores cualesquiera, podemos escribir

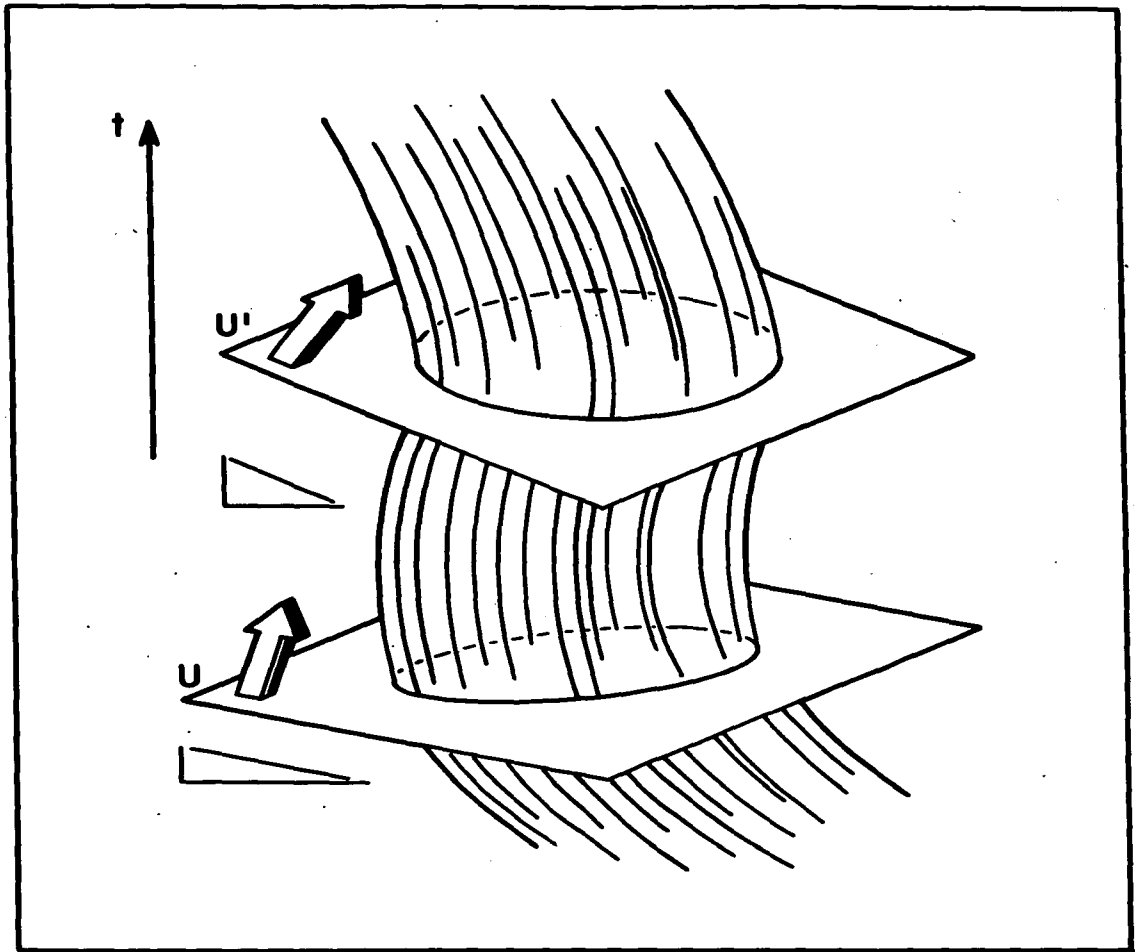


Fig. II.1

Dos observadores cualesquiera ven el mismo número de intersecciones entre una hipersuperficie $t = \text{cte.}$ ($\delta t' = \text{cte.}$, según el caso) y el mismo haz de líneas de universo.

$$dN = (g/h^3)f dV d^3p$$

$$= (g/h^3)f' dV' d^3p'. \quad (\text{II.49})$$

Para encontrar la relación entre f y f' es necesario, primero, conocer la forma en que se transforman dV y d^3p . Sabemos que el elemento de volumen tetradimensional

$$d^4x = dx^0 dV, \quad (\text{II.50})$$

es invariante de Lorentz y que el elemento de tiempo propio de la partícula, $d\tau$, también lo es. Se sigue que el cociente

$$(dx^0/d\tau) dV = U^0 dV, \quad (\text{II.51})$$

donde U^0 es la componente temporal de la cuadrivelocidad de la partícula, es, a su vez, un invariante. Ahora bien, el cociente d^3p/p^0 es también invariante de Lorentz, según demostraremos más adelante (ver ecs. II.58 y II.60), por lo cual su producto con (II.51) seguirá siéndolo. Pero (p^0/U^0) es la masa de la partícula (obviamente un escalar) por lo cual, finalmente,

$$dV d^3p = \text{escalar} = dV' d^3p'. \quad (\text{II.52})$$

De este resultado y de la ec. (II.49) se sigue que

$$f = f'$$

(II.53)

o sea que f es, según deseábamos, un escalar y la ecuación (II.48) es una definición adecuada para ella.

El siguiente problema consiste en relacionar f con cantidades macroscópicas. Para ello notamos que, para ser consistentes con las definiciones de la sección anterior, es necesario que la densidad numérica de partículas

$$n = \int_p dN/dV \quad (II.54)$$

esté definida en un muy particular sistema de referencia: el sistema localmente en reposo. Denotando las cantidades en este sistema de referencia con el subíndice '0' obtenemos de (II.49)

$$n = (g/h^3) \int f d^4p. \quad (II.55)$$

Para escribir esta ecuación de manera que sea manifiestamente covariante consideremos el espacio de cuadrimomentos. En este espacio un elemento de volumen invariante de Lorentz es, evidentemente, d^4p . Sin embargo, para partículas 'reales', las 4 componentes del cuadrimomento no son independientes entre sí, puesto que deben de satisfacer las relaciones

$$p^0 = m^0 c^0 \quad (\text{II.56})$$

y

$$p^0 \geq 0, \quad (\text{II.57})$$

donde m es la masa de las partículas. Debido a estas restricciones, sus cuadrinomientos no pueden distribuirse arbitrariamente en el espacio-tiempo, sino que se hallan contenidos en la hipersuperficie $m = \text{cte.}$ correspondiente a su masa. Sobre esta hipersuperficie definimos el elemento (obviamente invariante)

$$d\Gamma = 2 \theta(p^0) \delta(p^0 - m^0 c^0) d^4 p, \quad (\text{II.58})$$

donde θ representa a la función escalón y δ a la función delta de Dirac. Es fácil demostrar, por medio de la conocida relación

$$\int \delta[f(x)] dx = \left| \frac{df}{dx} \right|_{x_0}^{-1} \int \delta(x - x_0) dx, \quad (\text{II.59})$$

que, en una integración sobre todo el espacio de momentos,

$$\int_p d\Gamma = \int_p d^4 p / p^0, \quad (\text{II.60})$$

donde

$$p^0 = (|p|^2 + m^2 c^2)^{1/2} \quad (II.61)$$

Regresando a (II.55) y usando el hecho de que, para el observador localmente en reposo, $U^0 = c$,

$$\begin{aligned} n &= (g/h^3) \int f d^3p \\ &= (g/h^3) \int f U^0 p^0 d^3p / (cp^0) \\ &= (g/ch^3) \int (p \cdot U) f d\Gamma \quad (II.62) \end{aligned}$$

que es la expresión buscada (se sobreentiende que la última integral es sobre todo el espacio de momentos). Es claro que esta ecuación se reduce a su equivalente clásico en el sistema de referencia localmente en reposo.

Una comparación de la ec. (II.62) con la ec. (II.18) conduce inmediatamente a la expresión 'microscópica' del cuadriflujo

$$N^{\mu} = (gc/h^3) \int f p^{\mu} d\Gamma \quad (II.63)$$

donde se ve que N^{μ} es, simplemente, el primer momento de la distribución. Sus componentes espaciales son el vector 'flujo de partículas' y su componente temporal es nc . Vemos también que el observador localmente en reposo es, en consistencia con el tratamiento macroscópico, el que se mueve junto con el fluido, de

tal manera que la cuadrivelocidad hidrodinámica queda definida, en términos del cuadriflujo, por la ec. (II.17).

Así como el primer momento de la distribución resulta estar ligado con el cuadriflujo, el segundo momento, que obviamente es un tensor, resulta ser, esencialmente, el tensor de energía-momento. En efecto, es fácil comprobar que las componentes de

$$T^{\mu\nu} = (gc/h^3) \int p^\mu p^\nu f d\Gamma \quad (\text{II.64})$$

tienen el sentido físico ya visto en la subsección a) de la sección anterior.

Para terminar con las definiciones fundamentales construimos el 'cuadriflujo de entropía' de tal manera que la entropía adimensional por barión, ec. (II.21), se reduzca en el sistema localmente en reposo a la conocida expresión de la mecánica estadística clásica. Es fácil ver que la expresión adecuada es

$$S^\mu = -(gc/h^3) k_B \int p^\mu \left[(f \ln f - \epsilon^{-1} \hat{f} \ln \hat{f}) \right] d\Gamma \quad (\text{II.65})$$

donde $\hat{f} = 1 + \epsilon f$ y $\epsilon = 1, 0, -1$ según que se trate de bosones, partículas clásicas o fermiones, respectivamente. Las relaciones (II.52)-(II.54), junto con las definiciones y ecuaciones vistas en la sección anterior, constituyen la descripción microscópica del sistema.

b) Mezcla

La generalización del formalismo al caso de una mezcla es inmediata. Cada tipo de partículas estará descrito por una función de distribución $f_i(x, p_i)$, en términos de la cual se definen los cuadvectores N_i^μ y S_i^μ y el tensor $T_i^{\mu\nu}$. La descripción del sistema queda entonces dada por las mismas ecuaciones que vimos en la subsección iii) de la sección anterior.

c) Ecuación de Boltzmann

En la teoría cinética relativista, igual que en la teoría cinética clásica, la evolución de un sistema en el tiempo está determinada por la evolución de las diferentes funciones de distribución que lo describen. A su vez, la evolución en el tiempo de las funciones de distribución está descrita por un sistema de 'ecuaciones de Boltzmann relativistas'. Es, por tanto, indispensable, para completar el formalismo, obtener la ecuación de Boltzmann relativista.

Consideremos, primero, el caso de un fluido simple cuyas partículas no interactúan entre sí (fluido sin colisiones). En este caso es claro que todas las líneas de universo contenidas en cualquier haz o tubo elemental permanecerán dentro de él, de tal manera que, si tomamos 2 hipersuperficies cualesquiera 'acotadas'

por el tubo, el número de líneas de universo que las atraviesa es el mismo (Fig. II.2). Veamos ahora cómo podemos expresar esta condición matemáticamente.

Sea Δ^4x el 'volumen' del segmento de tubo acotado por la hipersuperficie Δ^3S que, por conveniencia, subdividiremos en dos 'tapas', Σ_1 y Σ_2 , y una 'pared cilíndrica' del tubo, Σ_3 , (ver figura II.2). El número de intersecciones de las líneas de universo con Σ_1 (o sea, en otras palabras, el número de partículas en el volumen tridimensional Σ_1 en un cierto instante) es, obviamente,

$$\Delta N = \int_{\Sigma_1} d^3\sigma_\mu N^\mu, \quad (\text{II.66})$$

donde $d^3\sigma_\mu$ es un elemento orientado de la hipersuperficie Σ_1 . Una relación similar nos dará el número de intersecciones con Σ_2 , sólo que con el signo opuesto debido a que el cuadriflujo de partículas 'entra' por Σ_1 pero 'sale' por Σ_2 . Como, por hipótesis, no hay colisiones, las mismas partículas que en un momento dado están en Σ_1 estarán más tarde en Σ_2 , así que también se cumple que

$$\Delta N = - \int_{\Sigma_2} d^3\sigma_\mu N^\mu. \quad (\text{II.67})$$

Además, debido una vez más a que no hay colisiones, las líneas de universo no cortan la pared del tubo, por lo cual

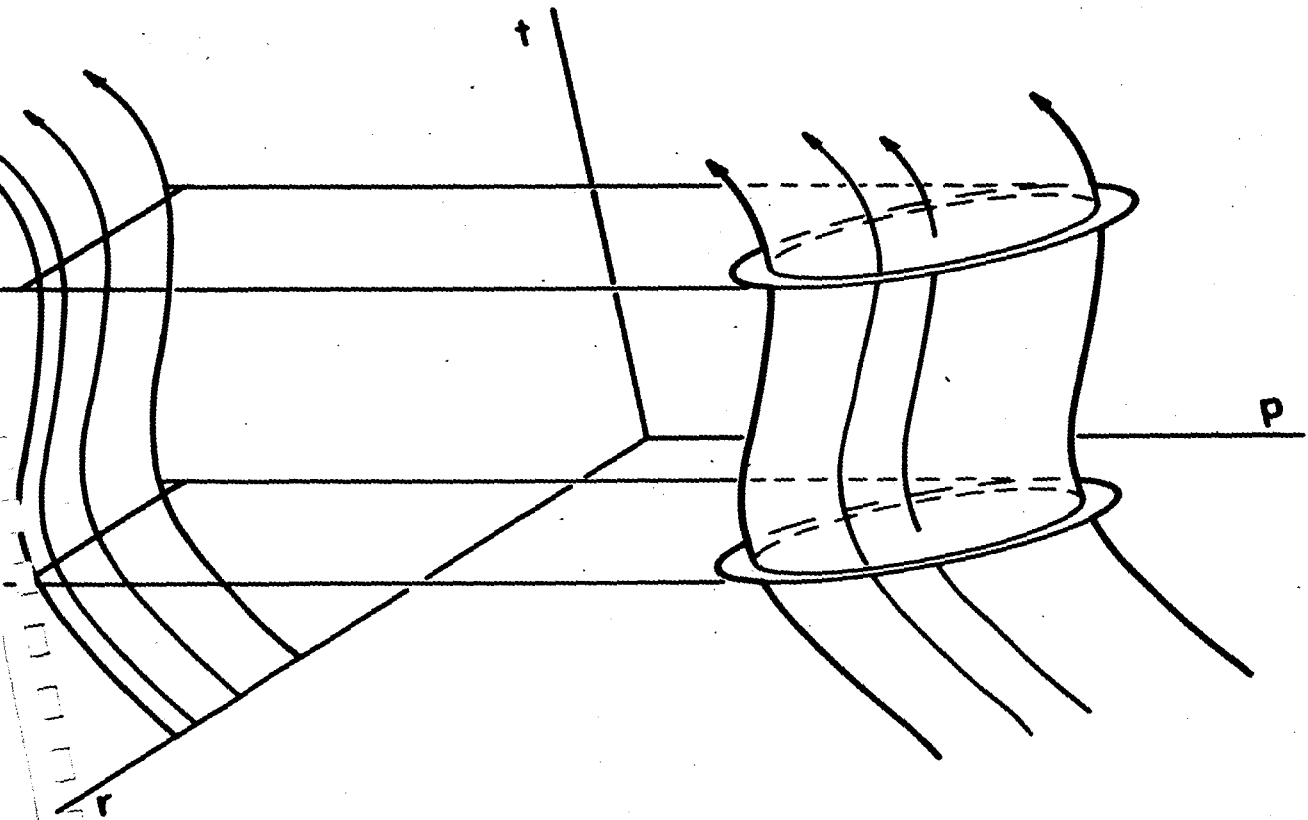


Fig. II.2
En ausencia de colisiones, todas las líneas de universo
que 'entran' por Σ_1 'salen' por Σ_2 .

$$\int_{\Sigma_3} d^3\sigma_{\mu} N^{\mu} = 0 \quad . \quad (\text{II.68})$$

Sumando las tres últimas relaciones

$$\int_{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3} d^3\sigma_{\mu} N^{\mu} = \int_{\Delta^4} d^4x N^{\mu}_{, \mu} = 0 \quad , \quad (\text{II.69})$$

donde la última integral ya es sobre toda la hipersuperficie 'S'. Aplicando el teorema generalizado de Gauss (ver, por ej., Landau y Lifshitz, 1962) podemos convertir la integral de 'superficie' en una integral sobre todo el 'volumen' Δ^4x contenido en ella. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^3} d^3\sigma_{\mu} N^{\mu} &= \\ &= \int_{\Delta^4} d^4x N^{\mu}_{, \mu} = \\ &= \int_{\Delta^4} d^4x \int_{\Delta^4} d^4x p^{\mu} f_{, \mu} = 0 \quad , \quad (\text{II.70}) \end{aligned}$$

donde hemos sustituido N^{μ} por medio de la ec. (II.63). Dado que los cálculos anteriores son válidos para cualquier segmento del tubo, de tenerse siempre

$$p^{\mu} f_{, \mu} = 0 \quad (\text{II.71})$$

Esta expresión es, por tanto, la ecuación de Boltzmann

relativista en ausencia de colisiones.

El efecto de las colisiones es añadir o aniquilar líneas del tubo (Fig. II.3) por lo cual, en general, se tendrá

$$p \wedge f, \mu = C(x, p) \quad (\text{II.72})$$

donde $C(x, p)$, el llamado 'término de colisiones', es, esencialmente, el número de líneas de universo que se 'crean' en el tubo, debido a colisiones, menos el número de líneas que se aniquilan por la misma causa. Esta última ecuación es la ecuación de Boltzmann relativista con colisiones.

El siguiente paso es, desde luego, encontrar la forma de $C(x, p)$. En el caso de un gas diluido, que es el que nos interesa, solo es necesario considerar colisiones binarias y, siguiendo un procedimiento enteramente análogo al que se sigue en el caso clásico, se obtiene (Ehlers, 1971; Stewart, 1971)

$$C(x, p) = (1/2) (g/h^3) \int d\mathbf{r}. d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' [f' f'' \hat{f} \hat{f}' - f f' \hat{f} \hat{f}''] W(p, p, / p', p',) \quad (\text{II.73})$$

donde el factor (1/2) garantiza que cada colisión sea tomada en cuenta solamente una vez y donde $W(p, p, / p', p',)$ es la llamada 'tasa de transición' para la colisión $p + p'' \rightarrow p' + p'$. W está dada por (de Groot et al. 1980)

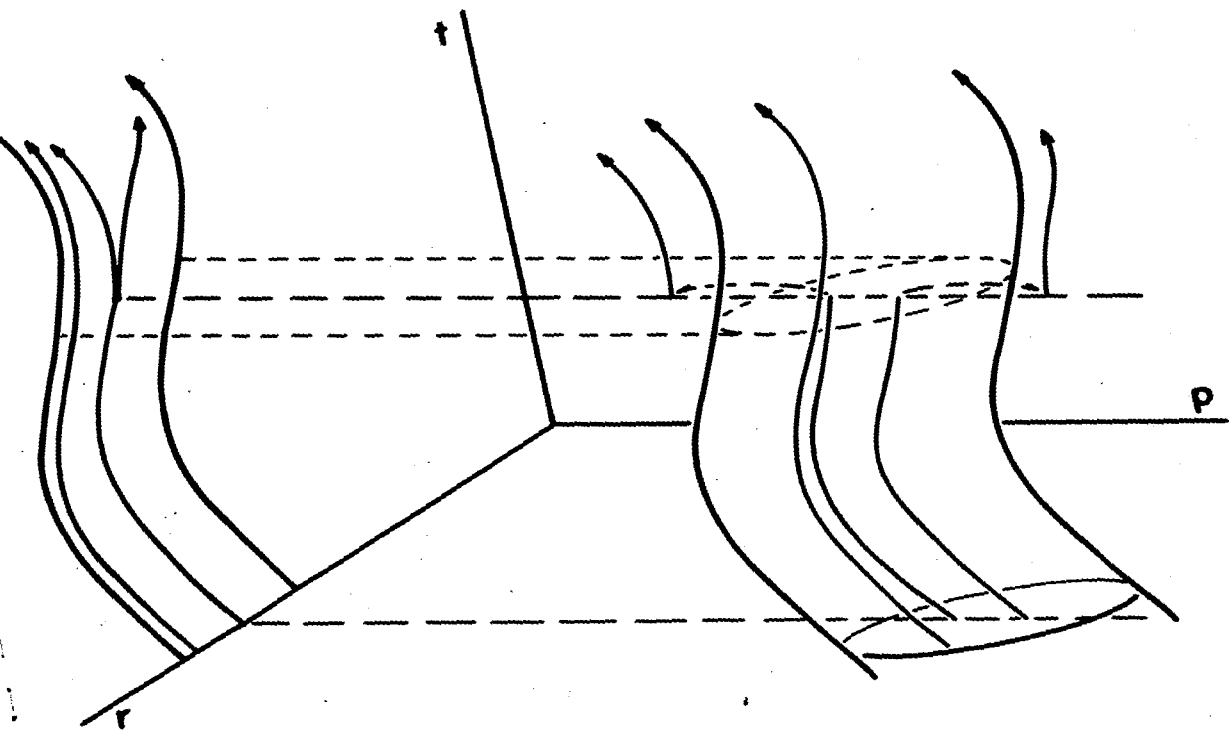


Fig. II.3

Cuando hay colisiones, el número de líneas de universo que 'entran' por Σ_1 es diferente, en general, del número que 'sale' por Σ_2 .

$$W(p, p_1, / p', p'_1) = (p + p_1)^3 \sigma \delta^{(4)}(p + p_1 - p' - p'_1) \quad (\text{II.74})$$

donde σ es la sección eficaz (o sección recta) de la reacción en el sistema de referencia en el cual el momento total de las partículas incidentes es cero (sistema 'centro de momento'), y $\delta^{(4)}$ es la función delta de Dirac tetradimensional cuya función es garantizar que la energía y el momento totales se conserven en la colisión.

La generalización al caso de una mezcla es, una vez más, inmediata. En un fluido constituido por N componentes cada función de distribución $f_i(x, p_i)$, $i = 1, \dots, N$, satisface su propia ecuación de Boltzmann relativista

$$p_i^\mu f_{i,\mu} = \sum_j C_{ij}(x, p_i) \quad (\text{II.75})$$

con los términos de colisión dados por

$$C_{ij}(x, p_i) = (g_j / 2h^3) \sum_{k,l} \int d\sigma_j d\sigma_k d\sigma_l (f_k f_l \hat{f}_i \hat{f}_j - f_i f_j \hat{f}_k \hat{f}_l) W(i, j/k, l), \quad (\text{II.76})$$

siendo W la tasa de transición para la reacción $i+j \rightarrow k+l$.

d) Leyes de conservación. Teorema H.

Para demostrar la consistencia del formalismo 'cinético' con el macroscópico veamos como las leyes de conservación se siguen de las definiciones que hemos visto y de la ecuación de Boltzmann. Para ello definimos el 'invariante colisional'

$$I_i(x, p_i) = a_i(x) + b_{\mu}(x) p_i^{\mu} \quad (\text{II.77})$$

donde las funciones $a_i(x)$ y $b_{\mu}(x)$ son arbitrarias excepto por la condición de que las $a_i(x)$ deben de satisfacer, en cualquier reacción, la igualdad

$$a_i(x) + a_j(x) = a_m(x) + a_l(x) \quad . \quad (\text{II.78})$$

Se puede, entonces, demostrar (la demostración es un poco engorrosa y no vale la pena copiarla aquí; ver de Groot et al. 1980, pp. 29-30) que

$$\sum_{i,j} \int d\Omega_i I_i(x, p_i) C_{ij}(x, p_i) = 0. \quad (\text{II.79})$$

Tomando en esta ecuación $a_i(x) = 1$, $b_{\mu}(x) = 0$ y utilizando las ecuaciones (II.42), (II.63) y (II.75) se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_j \int d\tau_i C_{ij} &= 0 \\
&= \sum_j \int d\tau_i p_i^\mu f_{i,\mu} \\
&= N^\mu_{,\mu}
\end{aligned}
\tag{II.80}$$

que es la ecuación de continuidad (II.3).

Tomando ahora $a_i(x) = 0$ y usando las ecuaciones (II.47), (II.64) y (II.75) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_j \int d\tau_i p_i^\mu C_{ij} &= 0 \\
&= \sum_j \int d\tau_i p_i^\mu p_i^\nu f_{i,\nu} \\
&= T^{\mu\nu}_{,\nu}
\end{aligned}
\tag{II.81}$$

que es la ecuación de conservación del momento y la energía.

Por último, veremos cómo la definición del cuadriflujo de entropía, dada en las ecuaciones (II.46) y (II.65), conduce a una tasa de producción de entropía, ec. (II.41), que es necesariamente no-negativa; en síntesis, deduciremos el equivalente relativista del teorema H. De las ecuaciones (II.41), (II.46) y (II.75) se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma &= S_{i,j} \\
&= k_B (gc/h^3) \sum_i \int d\mathbf{r}_i p_i f_{i,j} \ln(\hat{f}_i/f_i) \\
&= k_B (g^3 c/2h^6) \sum_{i,j,k,l} \int d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}_l \ln(\hat{f}_i/f_i) \times \\
&\quad \times (f_k f_l \hat{f}_i \hat{f}_j - f_i f_j \hat{f}_k \hat{f}_l) W(ij/kl). \quad (\text{II.82})
\end{aligned}$$

Notando que esta expresión se mantiene igual si intercambiamos $i \leftrightarrow j$ ó $k \leftrightarrow l$ y que cambia de signo si intercambiamos $i \leftrightarrow k$ y $j \leftrightarrow l$, obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned}
\sigma &= k_B (g^3 c/2h^6) \sum_{i,j,k,l} \int d\mathbf{r}_i d\mathbf{r}_j d\mathbf{r}_k d\mathbf{r}_l [\ln(f_k f_l \hat{f}_i \hat{f}_j) - \\
&\quad - \ln(f_i f_j \hat{f}_k \hat{f}_l)] (f_k f_l \hat{f}_i \hat{f}_j - f_i f_j \hat{f}_k \hat{f}_l) W(ij/kl). \quad (\text{II.83})
\end{aligned}$$

Dado que $(\ln A - \ln B)(A - B) \geq 0$ para cualquier A y B, esta expresión es necesariamente no-negativa y el Teorema H relativista queda demostrado.

e) Distribuciones de equilibrio

Definimos un estado de equilibrio como aquel en el cual $\sigma = 0$. Del Teorema H se sigue que solamente podemos tener un estado de equilibrio si $W=0$ o si $\ln(\hat{f}_i/f_i)$ es un invariante colisional. El

primer caso corresponde a que no haya interacción entre las partículas del fluido, esto es, a un fluido ideal. En el segundo caso sí hay colisiones pero éstas no afectan a la función de distribución y se dice que tenemos 'balance detallado'. En este caso se tiene, recordando que el invariante colisional más general está dado por la ecuación (II.77) y olvidándonos por el momento del subíndice i , que

$$\ln(\hat{f}/f) = I \quad (\text{II.84})$$

de donde

$$\begin{aligned} f &= [\exp(I) - \epsilon]^{-1} \\ &= \left\{ \exp [a(x) + p^\mu b_\mu(x)] - \epsilon \right\}^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

Ahora bien, f debe tender a 0 cuando la energía tienda a infinito y esto implica que b_μ debe de ser un campo vectorial temporal, por lo cual podemos escribir

$$b_\mu(x) = b(x) U_\mu(x) \quad (\text{II.86})$$

donde U_μ es una cierta cuadrivelocidad. Sin embargo, es claro que las distribuciones de equilibrio son isotrópicas en el espacio de momentos de un observador cuya cuadrivelocidad es U^μ , por lo cual, para ese observador, N^μ y $T^{\mu\nu}$ deben estar dados por las

ecuaciones (II.10) y (II.15), respectivamente. Se sigue que U es, precisamente, la cuadrivelocidad hidrodinámica (II.17).

Con el fin de determinar el sentido físico de $a(x)$ y $b(x)$ consideremos, por simplicidad, un fluido constituido por una sola componente. En el sistema de referencia localmente en reposo se tiene, de (II.35) y de (II.18) - (II.21), que

$$n = (g/h^3) \int p^0 f d\Gamma \quad (\text{II.87})$$

$$e = (gc/h^3) \int p^{00} f d\Gamma \quad (\text{II.88})$$

$$p = (1/3)(gc/h^3) \int |p|^2 f d\Gamma \quad (\text{II.89})$$

y

$$ns = (g/h^3) \int e^{-1} \ln \hat{f} p^0 d\Gamma + (g/h^3) \int p^0 f I d\Gamma \quad (\text{II.90})$$

Si en esta última expresión integramos por partes la primera de las integrales, sustituimos la forma explícita de I , ec. (II.77), en la segunda integral y comparamos con las 3 integrales anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned} ns &= an + b(p + e) \\ &= an + bhn \end{aligned} \quad (\text{II.91})$$

de donde, comparando con la ecuación (II.2),

$$a = -\mu / (k_B T) \quad (\text{II.92})$$

$$b = 1 / (k_B T) \equiv \beta \quad (\text{II.93})$$

Por lo tanto la distribución de equilibrio es, finalmente,

$$f_i(x, p_i) = \left\{ \exp[\beta(-\mu_i + p_i \cdot U)] - \epsilon_i \right\}^{-1} \quad (\text{II.94})$$

Esta relación fue encontrada, por primera vez, por Jüttner (1928).

f) Casos especiales

Por medio de la función de distribución en equilibrio podemos ahora encontrar los valores en equilibrio de las diferentes variables termodinámicas. El procedimiento que se suele seguir es el siguiente. De la expresión para la densidad de partículas, ec. (II.87), se calcula el potencial químico μ de tal manera que se obtenga el valor deseado de la densidad bariónica n . Con este valor de μ se calculan e y p de las ecuaciones (II.88) y (II.89). Finalmente, h y s se obtienen de (II.2).

La manera mas cómoda de calcular las integrales es haciéndolas en el sistema de referencia localmente en reposo, ya

que en este sistema, según hemos visto, las distribuciones son isotrópicas y, por tanto, las integrales sobre los ángulos son inmediatas, dando un factor de 4π . Como, además, $U^\mu = (c, \underline{0})$, se tiene que

$$n = (4\pi g/h^3) \int |\underline{p}|^2 f d|\underline{p}| \quad (\text{II.95})$$

$$e = (4\pi gc/h^3) \int |\underline{p}|^2 p^0 f d|\underline{p}| \quad (\text{II.96})$$

y

$$p = (1/3)(4\pi gc/h^3) \int (|\underline{p}|^3/p^0) f d|\underline{p}| \quad (\text{II.97})$$

donde

$$f = \left\{ \exp \left[\beta (-\mu + p^0 c) - \epsilon \right] \right\}^{-1} \quad (\text{II.98})$$

Estas relaciones son totalmente generales. Consideraremos, a continuación, los 3 casos que usaremos en éste trabajo.

1) Gas de Jüttner ($\epsilon = 0$; caso no-cuántico)

Dado que todas las partículas son necesariamente cuánticas, la aproximación $\epsilon = 0$ corresponde, evidentemente, al caso en que

$$[\exp \beta (-\mu + p^*c)] \gg 1. \quad (\text{II.99})$$

Es claro que esta desigualdad sólo puede satisfacerse siempre para partículas cuya masa sea diferente de cero. Para ver en qué condiciones se satisface comenzamos por definir el 'parámetro de temperatura',

$$\phi = mc^2 / (k_B T), \quad (\text{II.100})$$

donde m es la masa de las partículas, y el 'potencial químico adimensional'

$$z = \mu / (mc^2). \quad (\text{II.101})$$

Físicamente, ϕ nos dice que tan relativista es el fluido ya que compara la energía en reposo de las partículas con su energía térmica, mientras que z nos dice que tan 'cuántico' es el gas ya que está relacionado con la densidad de partículas.

Regresando a la desigualdad (II.99), vemos que se puede escribir como

$$\exp [\phi (p^*/mc - z)] \gg 1, \quad (\text{II.102})$$

de donde se sigue que, necesariamente, $z < 1$. Más adelante veremos que esta condición implica 'bajas densidades' o sea que,

según ya se había mencionado, el gas de Jüttner corresponde al gas no-cuántico. Por lo pronto calculemos n , e y p . Para ello definimos una nueva variable de integración w por medio de la relación

$$|p| = mc \operatorname{senh} w . \quad (\text{II.103})$$

Entonces

$$p^0 = mc \operatorname{cosh} w \quad (\text{II.104})$$

y (II.95) nos queda, usando $g = 2$,

$$\begin{aligned} n &= 8\pi (mc/h)^3 \exp(\beta z) \int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{cosh} w) \operatorname{senh}^2 w \operatorname{cosh} w \, dw \\ &= 8\pi (mc/h)^3 \exp(\beta z) K_2(\beta) / \beta \end{aligned} \quad (\text{II.105})$$

donde $K_2(\beta)$ es la función modificada de Bessel del segundo tipo, de orden 2 (ver, por ej., Abramowitz y Stegun, 1968).

De la misma manera (II.96) nos da

$$\begin{aligned} e &= 3\pi (mc/h)^3 mc^2 \exp(\beta z) \int_0^\infty \exp(-\beta \operatorname{cosh} w) \operatorname{senh}^2 w \operatorname{cosh}^2 w \, dw \\ &= (nmc^2/\beta)(\beta G(\beta) - 1) \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

donde hemos usado (II.105) y hemos definido

$$G(\phi) = K_2(\phi)/K_1(\phi). \quad (\text{II.107})$$

Usando el mismo método, la presión, ec. (II.97), es

$$p = (1/3) 8\pi (mc/h)^3 mc^3 \exp(\phi z) \int_0^\infty \exp(-\phi \cosh w) \sinh w \, dw$$

$$= nmc^3/\phi = nk_B T \quad (\text{II.108})$$

donde la 2ª igualdad se obtiene integrando una vez por partes y usando (II.106). Finalmente, la entalpía por barión y la entropía adimensional por barión se obtienen a partir de (II.2). Obtenemos así

$$h = mc^3 G(\phi) \quad (\text{II.109})$$

$$s = \phi(G(\phi) - z). \quad (\text{II.110})$$

Estas relaciones fueron obtenidas originalmente por Jüttner (1911) y estudiadas con mayor detalle por Sygne (1957), razón por la cual un sistema descrito por ellas se conoce como un gas de Jüttner-Syngé.

En el resto de éste trabajo escribiremos la función de distribución de Jüttner-Syngé como

$$f = f_0 \exp[-\beta(p \cdot U)] \quad (\text{II.111})$$

donde

$$\begin{aligned} f_0 &= \exp(\beta z) \\ &= (n/8\pi)(h/mc)^3 \beta/K_2(\beta). \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

Por último, veamos para qué condiciones físicas es aplicable la presente aproximación. De (II.105) se sigue que $z < 1$ implica

$$n < 8\pi(mc/h)^3 \exp(\beta) K_2(\beta)/\beta \quad (\text{II.113})$$

lo que nos indica que las fórmulas anteriores se aplican en el caso de 'densidades bajas' (desde luego cuál densidad es 'baja' depende de la temperatura).

Los límites 'ultrarelativista' y 'no-relativista' se obtienen de las ecuaciones (II.109)-(II.110) sustituyendo en ellas las expansiones correspondientes de las funciones $K_n(\beta)$ cuando β tiende a 0 ó a infinito, expansiones que son bien conocidas (ver, por ejemplo, Abramowitz y Stegun, 1968). Se obtienen así las relaciones (recuérdese que, en todos los casos, la presión está dada por $p = nk_B T = nmc^2/\beta$)

$$\begin{aligned}
 n(\beta \rightarrow 0) &= 16\pi (k_0/hc)^3 T^3 \exp(\beta z) \\
 &= 16.8 T^3 \exp(\beta z)
 \end{aligned}
 \tag{II.114}$$

$$n(\beta \rightarrow \infty) = 2(2\pi mk_0 T/h^3)^{3/2} \exp[\beta(z-1)]
 \tag{II.115}$$

$$e(\beta \rightarrow 0) = 3nk_0 T(1+\beta^2/6)
 \tag{II.116}$$

$$e(\beta \rightarrow \infty) = nmc^2 + (3/2)nk_0 T
 \tag{II.117}$$

$$h(\beta \rightarrow 0) = 4k_0 T(1+\beta^2/8)
 \tag{II.118}$$

$$h(\beta \rightarrow \infty) = mc^2 + (5/2)k_0 T
 \tag{II.119}$$

Nótese que las expresiones no-relativistas coinciden con las bien conocidas expresiones de la termodinámica clásica, excepto por el hecho de que aparece en ellas la energía en reposo de las partículas (lo cual era de esperarse). Nótese también que, en el caso ultrarelativista, la ecuación de estado es $p = (1/3)e$ (lo cual también era de esperarse).

ii) Fermiones masivos ($\epsilon = -1$)

Con el mismo cambio de variable que usamos en la subsección anterior, ecs. (II.103) y (II.104), obtenemos, de las ecs.

(II.95)-(II.98),

$$n = 8\pi (mc/h)^2 \int_0^{\infty} f \sinh^2 w \cosh w \, dw \quad , \quad (\text{II.120})$$

$$e = 8\pi (mc/h)^2 mc^2 \int_0^{\infty} f \sinh^2 w \cosh^2 w \, dw \quad , \quad (\text{II.121})$$

y

$$p = (1/3) 8\pi (mc/h)^2 mc^2 \int_0^{\infty} f \sinh^4 w \, dw \quad , \quad (\text{II.122})$$

donde

$$f = \left\{ \exp [\beta(\cosh w - z)] + 1 \right\}^{-1} . \quad (\text{II.123})$$

Estas integrales no pueden ser calculadas en forma cerrada, en el caso general. Para el caso $z < 1$, una evaluación a través de una serie infinita se presentará más adelante.

iii) Fotones ($\epsilon = 1$)

Como el número de fotones no se conserva, se tiene, en este caso, que $z = 0$. Además, a partir de este momento, denotaremos con N la función de distribución de los fotones y con k su cuadrimomento. Entonces, recordando que $k^0 = 0$ y que los fotones

tienen $g = 2$, las ecuaciones (II.95)-(II.98) se pueden escribir como

$$n_v = (8\pi/h^3) \int_0^\infty N |\underline{k}|^2 d|\underline{k}|, \quad (\text{II.124})$$

$$e_v = (8\pi c/h^3) \int_0^\infty N |\underline{k}|^2 d|\underline{k}| \quad (\text{II.125})$$

y

$$\begin{aligned} p_v &= (1/3)(8\pi c/h^3) \int_0^\infty N |\underline{k}|^2 d|\underline{k}| \\ &= (1/3)e, \end{aligned} \quad (\text{II.126})$$

con

$$\begin{aligned} N &= [\exp(\beta \underline{k} \cdot \underline{U}) - 1]^{-1} \\ &= [\exp(\beta c|\underline{k}|) - 1]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{II.127})$$

Cambiando la variable de integración a $x = \beta c|\underline{k}|$ las integrales se reducen a sus formas conocidas

$$\begin{aligned} n_v &= 8\pi (k_B T/hc)^3 \int_0^\infty x^2 [\exp(x) - 1]^{-1} dx \\ &= 16\pi (k_B/hc)^3 \zeta(3) T^3 \end{aligned}$$

$$\sim 20 T^3,$$

(II.128)

y

$$\begin{aligned} e_r &= 8\pi (k_B T/hc)^3 k_B T \int_0^\infty x^3 [\exp(x) - 1]^{-1} dx \\ &= 48\pi (k_B/hc)^3 k_B \zeta(4) T^4 \\ &= a T^4, \end{aligned}$$

(II.129)

donde $\zeta(n)$ es la función zeta de Riemann y donde

$$\begin{aligned} a &= (8 k_B^4 \pi^5 / 15 h^3 c^3) \\ &= 7.56 \times 10^{-16} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}. \end{aligned}$$

(II.130)

es la constante de Stefan.

Finalmente, de la ecuación (II.2), la entropía adimensional por unidad de volumen es

$$ns = (4a/3k_B) T^3$$

$$\sim 73 T^3$$

(II.131)

donde la densidad bariónica n no debe de confundirse con la

densidad de fotones dada por la ec. (II.128).

Todo lo anterior constituye el formalismo fundamental en el cual se basará el resto de este trabajo.

III. FLUJO ESTACIONARIO CON CREACION DE PARES

Es interesante cómo muchos resultados de la Mecánica clásica pueden generalizarse dentro del marco de la Teoría de la Relatividad de una manera natural. En este sentido, la hidrodinámica no es una excepción, según veremos en el presente capítulo, donde analizaremos el flujo estacionario de un fluido relativista. En particular, encontraremos la expresión relativista del teorema de Bernoulli y la usaremos para obtener ecuaciones generales que permitan determinar las variables termodinámicas en el punto en el cual el flujo pasa de subsónico a supersónico, el llamado 'punto crítico'. (El caso clásico está desarrollado en Courant y Friedrichs, 1948, p. 23 y también en el apartado 80 de Landau y Lifshitz, 1959.) Para terminar, obtendremos los valores críticos de las variables termodinámicas para el caso particular de que el fluido sea una mezcla de bariones, electrones, positrones y radiación, en equilibrio termodinámico.

1) Teorema de Bernoulli relativista

Según vimos en el capítulo anterior, el comportamiento de un fluido ideal, relativista, está descrito por las ecuaciones (II.25), (II.26) y (II.28) que son, respectivamente, la primera ley de la termodinámica, la ecuación de Euler relativista y la conservación de la entropía. Por conveniencia, reescribimos la ecuación de Euler como

$$nhU^{\mu} = c^2 p^{\mu} - U^{\mu} \dot{p} \quad , \quad (\text{III.1})$$

donde hemos usado la ec. (II.27) y donde el punto representa, como en el capítulo anterior, la derivada a lo largo de U^{μ} . Por otro lado, de las ecuaciones (II.1), (II.2) y (II.28) se sigue que

$$\dot{p} = n\dot{n} \quad (\text{III.2})$$

con lo cual (III.1) conduce a

$$n(hU^{\mu}) = c^2 p^{\mu} \quad . \quad (\text{III.3})$$

Es fácil ver que, en estado estacionario, la componente temporal

de esta ecuación y la ec. (II.10) implican que la cantidad $H = \gamma h$, donde

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{III.4})$$

siendo v la velocidad hidrodinámica del fluido, se conserva a lo largo de las líneas de flujo, esto es:

$$H = \gamma h = \text{cte.} \quad (\text{III.5})$$

Para ver el sentido físico de esta ecuación, consideremos su límite clásico. En ese caso tenemos que

$$\gamma \rightarrow 1 + v^2/(2c^2), \quad (\text{III.6})$$

y, de la ecuación (II.119),

$$h \rightarrow mc^2 + h_c, \quad (\text{III.7})$$

donde m es la masa de las partículas que constituyen al fluido y h_c es la entalpía clásica por barión. Sustituyendo estas relaciones y despreciando términos de segundo orden, la ec. (III.5) nos da

$$mv^2/2 + h_c = \text{cte.} \quad , \quad (\text{III.8})$$

que es la conocida expresión del teorema de Bernoulli. Por lo tanto, la ec. (III.5) es la extensión relativista del teorema de Bernoulli.

Un resultado inmediato de esta relación es que, dado que la entalpía relativista tiene un valor mínimo $h_{\text{mín}} = mc^2$, la velocidad del flujo tiene un valor máximo, dado por

$$V_{\text{máx}} = (1 - v_{\text{máx}}^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = H/mc^2 \quad . \quad (\text{III.9})$$

Se puede demostrar (Thorne, 1973) que, en caso de que haya ondas de choque presentes, la entropía presenta una discontinuidad a través del frente de choque pero que, igual que en el caso clásico, la cantidad H permanece constante.

2) Velocidad del sonido

Una cantidad de fundamental importancia en todo lo que sigue, es la velocidad del sonido en el fluido, por lo cual es necesario calcularla antes de seguir adelante. El procedimiento es esencialmente idéntico al que se sigue en el caso clásico y puede verse en detalle en Lightman et al. (1975, problema V.32).

Aquí presentamos solamente los pasos esenciales.

Consideremos un fluido ideal, en equilibrio termodinámico, y sean δe , δp y $\delta \underline{v}$ perturbaciones de los valores de equilibrio de las variables termodinámicas correspondientes. Sustituyendo en la ec. (II.4), es fácil comprobar que la componente $\mu = 0$ se convierte en

$$\nabla \cdot \delta \underline{v} = -(1/nh) (\partial \delta e / \partial t), \quad (\text{III.10})$$

y que las componentes $\mu = 1, 2, 3$ se pueden escribir como

$$(\partial \delta \underline{v} / \partial t) = -(c^2 / nh) \nabla (\delta p) \quad . \quad (\text{III.11})$$

Eliminando $\delta \underline{v}$ de estas ecuaciones, obtenemos

$$(\partial^2 \delta e / \partial t^2) - c^2 \nabla^2 (\delta p) = 0 \quad . \quad (\text{III.12})$$

Pero, obviamente, $\delta e = (\partial e / \partial p)_s \delta p$, con lo cual la ecuación anterior nos queda

$$(\partial^2 \delta p / \partial t^2) - c^2 (\partial p / \partial e)_s \nabla^2 (\delta p) = 0 \quad . \quad (\text{III.13})$$

Se sigue que la velocidad del sonido, a , está dada por

$$a^2 = c^2 (\partial p / \partial e)_s \quad , \quad (\text{III.14})$$

que es, esencialmente, idéntica a la expresión clásica.

3) Flujo crítico

De acuerdo con lo que vimos en el capítulo anterior, la corriente de bariones a lo largo de las líneas de flujo está dada por (ver ec. II.43)

$$J = \gamma n v \quad . \quad (III.15)$$

Calculemos ahora \dot{J} . De las ecs. (III.2) y (III.5) se tiene que

$$\dot{h} = -\dot{\gamma} h / \gamma = \dot{p} / n \quad . \quad (III.16)$$

Además, de (III.14) y (II.1) (a entropía constante)

$$\dot{p} = \dot{\epsilon} a^2 / c^2 = h \dot{n} a^2 / c^2 \quad . \quad (III.17)$$

Como

$$\dot{\gamma} = \gamma^2 v \dot{v} / c^2 \quad , \quad (III.18)$$

se sigue de (III.16) y (III.17) que

$$\dot{n} = - \gamma^3 n v \dot{v} / a^2 \quad . \quad (\text{III.19})$$

Utilizando las dos igualdades anteriores, obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \dot{\gamma} n v + \gamma \dot{n} v + \gamma n \dot{v} = \\ &= \gamma^3 n (1 - v^2 / a^2) \dot{v} \quad . \quad (\text{III.20}) \end{aligned}$$

Esta relación es la extensión relativista de la ec. (20.5) de Landau y Lifshitz (1959), según se puede comprobar tomando el límite clásico $\gamma \rightarrow 1$. Se sigue que el flujo de bariones es máximo en el punto en el cual $v = a$, esto es, cuando la velocidad local del flujo es igual a la velocidad local del sonido. El punto en el que esto ocurre se conoce como el 'punto crítico', y los valores de las variables termodinámicas en ese punto se conocen, por razones obvias, como los valores 'críticos'. En todo lo que sigue los denotaremos con un asterisco. Así, por ejemplo, en el punto crítico se tiene que

$$v = a = a^* \quad . \quad (\text{III.21})$$

A continuación demostraremos que éste valor es único. Para ello definimos una nueva variable, w , como:

$$w = h/n \quad . \quad (III.22)$$

Consideremos ahora la función $g(w,s) = (1-v^2/c^2)/(1-a^2/c^2)$. Por un camino directo, pero bastante largo, se puede demostrar que, a entropía constante,

$$(\partial g / \partial w) = - (w/H)^2 (\partial^2 p / \partial w^2) \quad . \quad (III.23)$$

Ahora bien, Thorne (1973) demuestra que, excepto para ecuaciones de estado muy poco ortodoxas, $(\partial^2 p / \partial w^2) > 0$. Por lo tanto, la función g es: i) > 1 si $v = 0$; ii) < 1 si $w \rightarrow 0$ (esto es, n tiende a cero y, por tanto, $a \rightarrow 0$) y iii) tiene pendiente siempre negativa. Se sigue que sólo existe un valor de w (w^*) para el cual $v = a = a^*$.

Tenemos, por lo tanto, la misma situación que en el caso clásico:

$$j > 0 \text{ y } v < a \iff v < a^*$$

y

$$j < 0 \text{ y } v > a \iff v > a^* \quad . \quad (III.24)$$

4) Parámetros críticos

Los parámetros críticos del flujo se calculan a partir de las leyes de conservación (II.28) y (III.5), siguiendo un procedimiento análogo al que siguen Landau y Lifshitz (1959). Comenzamos por definir el 'punto de estancamiento' como el punto en el cual la velocidad del flujo se hace cero, y en ese punto determinamos los valores de las constantes s y H (s_* y H_* digamos). Las leyes de conservación se escriben entonces como

$$s = s_* = s^* \quad (\text{III.25})$$

y

$$H = H_* = H^* \quad (\text{III.26})$$

Estas relaciones nos permiten calcular las variables termodinámicas del fluido, en cada punto del flujo, en términos de sus valores en el punto de estancamiento y de la velocidad del flujo en el punto en cuestión. En particular, en el punto crítico, la condición extra $v = 0$ determina completamente los valores críticos (desde luego, siempre en términos de dos valores en el punto de estancamiento).

5) Flujo con creación de pares

Una complicación que aparece en un plasma cuando se llega a temperaturas $T \geq 10^8$ K, es la creación de pares electrón-positrón. Por ésta razón, en lo que sigue aplicaremos la teoría a un fluido ideal constituido por bariones, electrones, positrones y radiación, en equilibrio termodinámico. Dado que nuestro principal interés es estudiar el efecto de los pares en el comportamiento del flujo, nos restringiremos al intervalo de temperaturas $3 \times 10^8 \text{ K} \leq T \leq 10^{10} \text{ K}$. A temperaturas más bajas prácticamente no se crean pares y a temperaturas más altas se tienen complicaciones debido a los neutrinos y a la creación de mesones. Además, nos restringiremos al caso de bajas densidades por ser éste el más común en astrofísica.

Denotando con un subíndice b a las cantidades relativas a los bariones (convención que seguiremos a partir de ahora), esta condición se puede escribir como $n_{e,b,c} \ll aT^3$, de donde, para las temperaturas a las que trabajaremos, $n_b \ll 4 \times 10^{22}$ bariones/cm³. De acuerdo con esto tomaremos en todo lo que sigue $n_b \ll 10^{22}$ bariones/cm³.

Como, por hipótesis, el fluido se encuentra en equilibrio termodinámico, cada una de sus componentes se puede describir por medio de una función de distribución de equilibrio. Estas

funciones las vimos en el inciso f de la sección 2 del capítulo anterior, donde también presentamos las variables termodinámicas que se deducen de ellas. Veamos cuál distribución es la adecuada para describir cada una de las componentes del fluido.

Es fácil comprobar que, a las densidades y temperaturas que estamos considerando, la condición (II.113) se satisface siempre por lo cual los bariones no están degenerados y la distribución adecuada para ellos es la de Jüttner, ec. (II.112). Por lo tanto, sus variables termodinámicas (densidad numérica, presión, energía) están dadas por las ecuaciones (II.107)-(II.110).

Los electrones y los positrones si van a presentar efectos cuánticos, así que debemos describirlos por medio de la distribución de Fermi-Dirac, ec. (II.123); por tanto, sus funciones termodinámicas están dadas por las ecs. (II.120)-(II.122). Es importante notar que, en equilibrio termodinámico, las distribuciones de electrones y positrones no son independientes ya que la aniquilación de pares impone la condición (ver, por ejemplo, Chiu, 1968, sección 3.13)

$$\mu_- + \mu_+ = \mu_\gamma = 0 \quad , \quad (\text{III.27})$$

donde μ_- , μ_+ y μ_γ son los potenciales químicos de electrones, positrones y fotones, (a partir de ahora, denotaremos las cantidades correspondientes a electrones, positrones y radiación con los subíndices -, + y γ , respectivamente).

Los fotones no presentan ningún problema; su función de

distribución es la famosa planckiana, ec. (II.127) y sus variables termodinámicas están dadas por las bien conocidas relaciones (II.128)-(II.131).

Usando todo lo anterior, y recordando que la presión y la energía son aditivas, tenemos para la presión total y la energía total de la mezcla

$$\begin{aligned}
 P &= P_b + P_v + P_- + P_+ \\
 &= n_b k_B T + aT^4/3 + \\
 &+ (8\pi/3)(mc/h)^3 mc^2 \int_0^\infty (f_- + f_+) \sinh^2 w \, dw \quad (III.28)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 e &= e_b + e_v + e_- + e_+ \\
 &= n_b k_B T [\phi_b G(\phi_b) - 1] + aT^4 + \\
 &+ 8\pi mc^2 (mc/h)^3 \int_0^\infty (f_- + f_+) \sinh^2 w \cosh^2 w \, dw \quad (III.29)
 \end{aligned}$$

donde $\phi = mc^2/k_B T$ y ϕ_b es igual pero con la masa de los bariones en lugar de la masa de los electrones.

Si, además, suponemos neutralidad de carga, el número de bariones debe ser igual al número de electrones 'libres', esto es, electrones que no provienen de pares, por lo cual

$$n \equiv n_{\omega} = n_{-} - n_{+} =$$

$$= 8\pi(mc/h)^2 \int_0^{\infty} (f_{-} - f_{+}) \sinh^2 w \cosh w \, dw, \quad (\text{III.30})$$

que es la condición que determina el valor de z .

Estas ecuaciones han sido evaluadas numéricamente por Imshennik y Nadezhin (1966) quienes, además, obtuvieron valores del exponente adiabático. Sus valores fueron utilizados para comprobar la calidad del método numérico que usamos para calcular las mismas integrales, método que se presenta en el apéndice A. Un resultado interesante que encuentran Imshennik y Nadezhin (1966) y también Bisnovatyi-Kogan y Kashdan (1966), y que nuestros cálculos confirman, es que el exponente adiabático cae por debajo del conocido valor de estabilidad $4/3$ como consecuencia de la aparición de los pares.

a) Velocidad del sonido

La velocidad del sonido no puede calcularse directamente de la ec. (III.14) dado que no tenemos a p como una función explícita de e y s , sino como función de ϕ y z . Sin embargo, es fácil demostrar, usando las bien conocidas reglas para transformaciones de coordenadas, que la ecuación (III.14) puede escribirse como

$$a^2/c^2 = [J(p,e) - hJ(p,n)] / [hJ(n,e)] , \quad (\text{III.31})$$

donde $J(F,G)$ representa el jacobiano de dos funciones F y G respecto a β y z . Los resultados numéricos obtenidos de esta ecuación están graficados, como función de la temperatura, en la fig. (III.1). Como era de esperarse, la velocidad del sonido (su cuadrado, de hecho) es prácticamente igual a $c^2/3$ - su valor para radiación 'pura'- tanto a temperaturas altas ($\beta \ll 1$), donde el fluido es ultrarelativista, como a temperaturas 'bajas' ($\beta \gg 1$), donde la radiación domina por completo a la materia. Es a temperaturas intermedias ($.7 \leq \beta \leq 20$) donde los pares influyen de manera apreciable. En este intervalo el cuadrado de la velocidad del sonido es siempre menor que $c^2/3$ y presenta un valor mínimo $a_{\text{mín}}^2 = 0.27c^2$ para $\beta \approx 3.9$.

b) Valores críticos

El cálculo de los valores críticos es directo a partir de la ec. (III.5) y de la conservación de la entropía. Hay, sin embargo, una simplificación que se puede hacer y que reduce apreciablemente los cálculos numéricos. En efecto, recordando que h y s son cantidades aditivas, tenemos de (II.2) que

$$k_B T_s = h - \mu , \quad (\text{III.32})$$

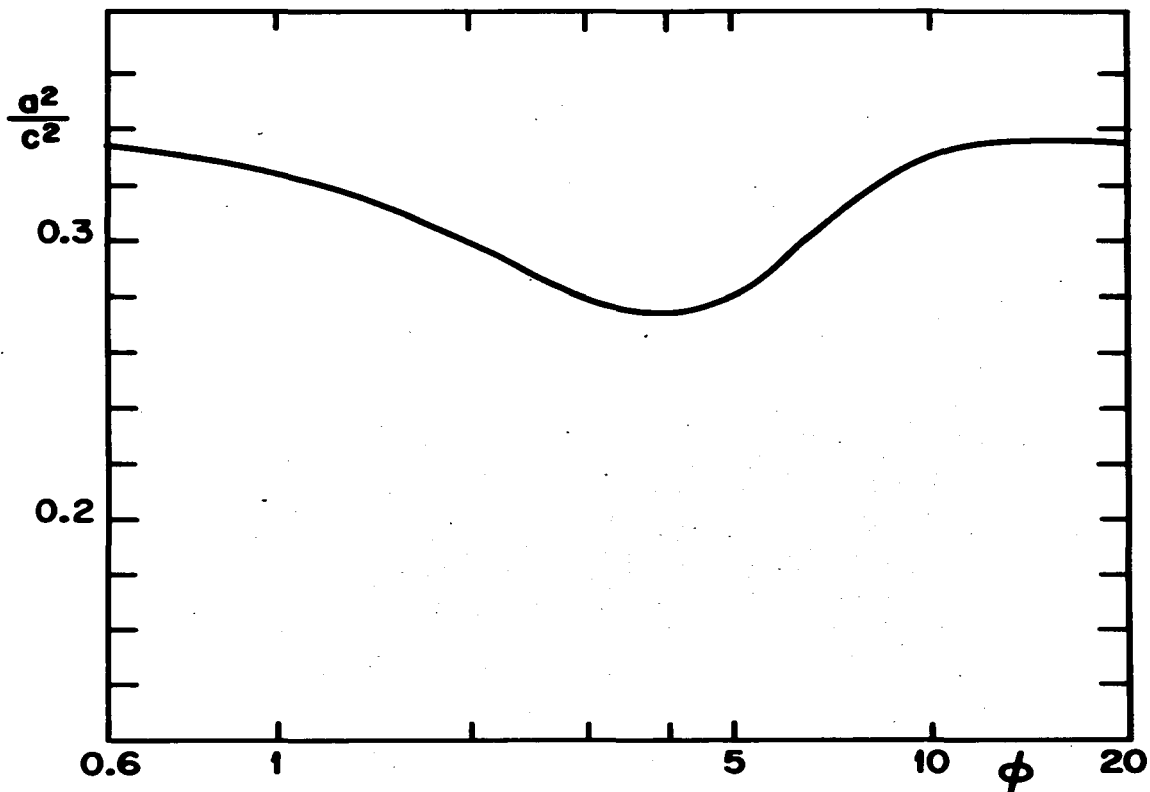


Fig. III.1

Velocidad del sonido (a^2) en una mezcla de bariones, electrones, positrones y radiación en equilibrio termodinámico, como función del parámetro de temperatura $\phi = mc^2/k_B T = 5.9 \times 10^4 \text{ K}/T$.

donde hemos usado el hecho de que $\mu_+ + \mu_- = 0$. Ahora bien, en el intervalo de temperaturas y densidades en que estamos trabajando, $\mu_+ \sim m_+ c^2$, mientras que, según vimos en la sección anterior, $n m_+ c^2 \ll a T^4$. Por lo tanto, $h \gg m_+ c^2$ y la ecuación anterior puede aproximarse como:

$$k_+ T_s = h \quad . \quad (III.33)$$

Finalmente, con ésta relación, y recordando que s es constante, la ecuación (III.5) se convierte en

$$\gamma T = \text{cte.} = T_0 = \gamma^* T^* \quad . \quad (III.34)$$

Formalmente, ésta ecuación y la conservación de la entropía nos permiten calcular los parámetros críticos del flujo en términos de los valores de dos de ellos en el punto de estancamiento; nosotros supondremos dados n_0 y T_0 . Sin embargo, las densidades bariónicas que estamos considerando ($1 \leq n_0 \leq 10^{10}$ partículas/cm³) son suficientemente bajas como para que, en la práctica, los parámetros críticos dependan solamente de la temperatura (β_0).

Un caso que puede ser resuelto analíticamente es cuando la ecuación de estado tiene la forma $p \propto n^3$ (el llamado 'fluido barotrópico'). En éste caso es fácil demostrar que:

$$\rho^*/\rho_0 = \gamma^* = \sqrt{5/2}$$

$$p^*/p_0 = e^*/e_0 = (\rho_0/\rho^*)^4 = 4/9$$

y

$$n^*/n_0 = (\rho_0/\rho^*)^3 = (2/3)^{3/2} \quad . \quad (III.35)$$

En el caso general, las variables termodinámicas críticas y el flujo de bariones deben calcularse numéricamente. Nuestros resultados se presentan en las figuras (III.2) y (III.3). En la fig. (III.2) hemos graficado los valores de las variables termodinámicas en el punto crítico, normalizadas a sus valores en el punto de estancamiento, como funciones de la temperatura de estancamiento ρ_0 . En el caso clásico, éstas gráficas son líneas rectas (Landau y Lifshitz, 1959, apartado 80). En nuestro caso, en cambio, los cocientes coinciden con los valores dados por las ecs. (III.35) sólo en las temperaturas extremas y presentan desviaciones apreciables para temperaturas intermedias. Este fenómeno ya lo habíamos mencionado en relación con el exponente adiabático y con la velocidad del sonido y es simplemente un reflejo - y una indicación - de la importancia de los pares a temperaturas intermedias.

Por último, en la fig. (III.3) presentamos el comportamiento del flujo de bariones como función de su velocidad (medidas ambas

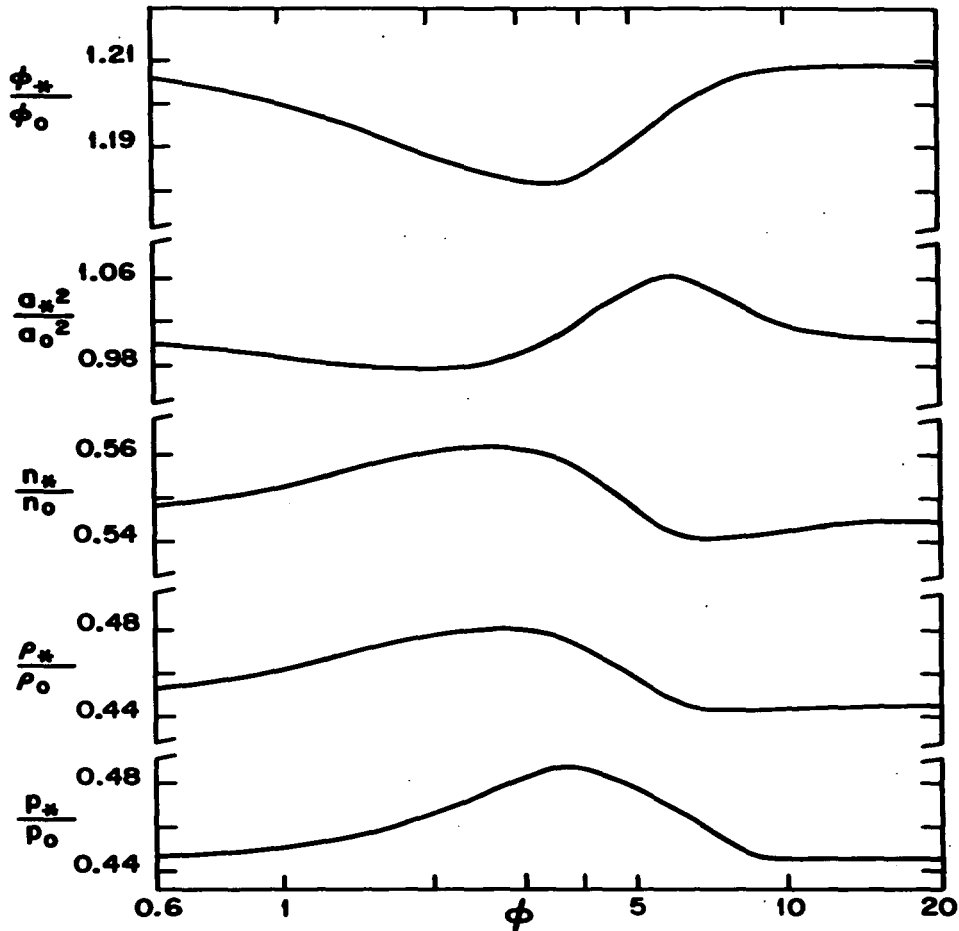


Fig. III.2

Valores de los parámetros del Flujo en el punto crítico, en términos de sus valores en el punto de estancamiento, como funciones del parámetro de temperatura ϕ en el punto de estancamiento. Las pequeñas desviaciones respecto a los valores predichos por las ecs. III.25 se deben a la aparición de los pares.

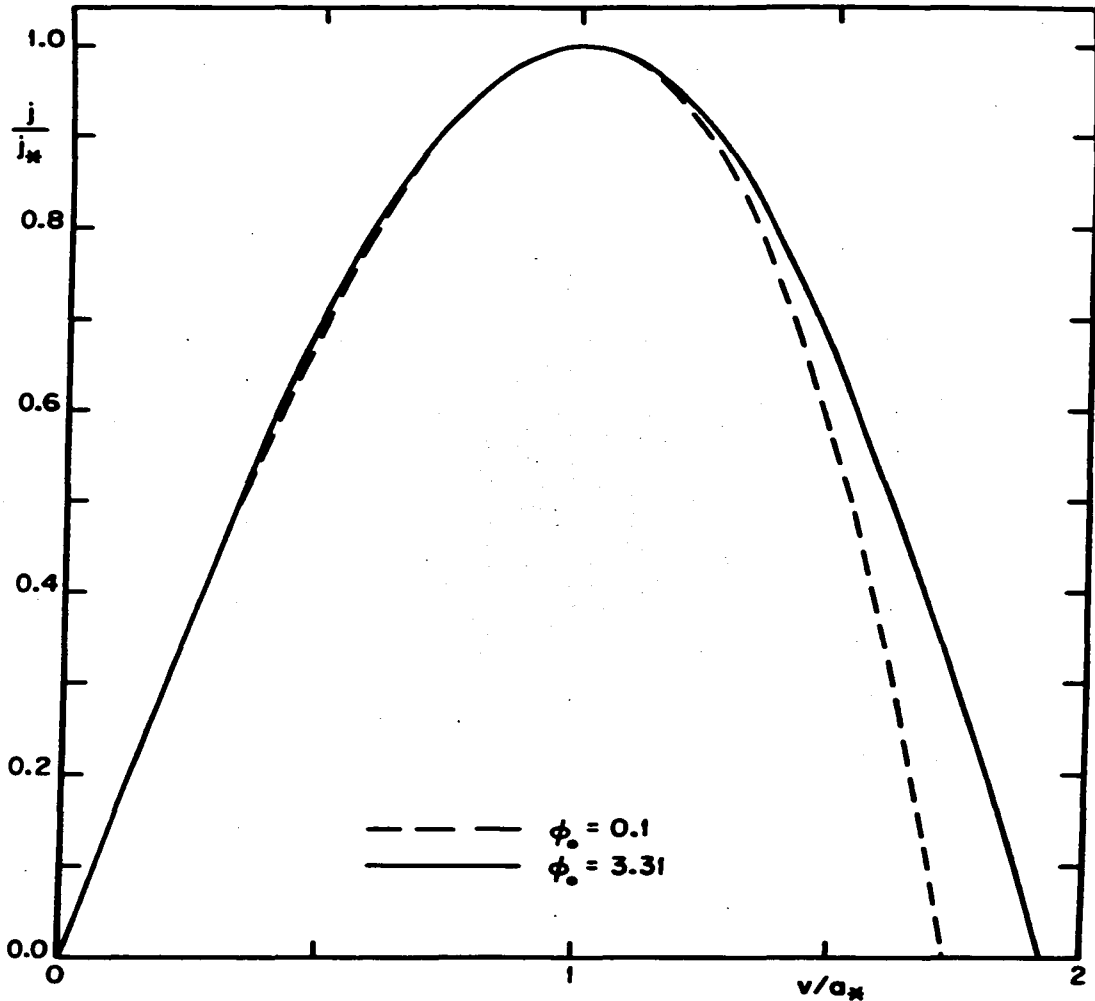


Fig. III.3

Flujo de bariones como función de la velocidad del flujo (medidos ambos en términos de sus valores críticos) para los valores de la temperatura de estancamiento que producen las curvas extremas.

variables en términos de sus valores críticos), para dos valores de ϕ . De hecho, se tiene una curva diferente para cada valor de la temperatura de estancamiento, pero en el dibujo hemos graficado solamente las curvas 'extremas'; todas las demás caen entre las dos representadas. Esta es otra diferencia con el caso clásico, en el cual la curva es única independientemente de la temperatura de estancamiento. Una vez más, es la aparición de los pares la causante de la diferencia.

IV. INTERACCION ENTRE MATERIA Y RADIACION I

Cuando se trabaja con un sistema que se encuentra fuera de equilibrio termodinámico, un parámetro de gran utilidad es el llamado 'tiempo de relajamiento' del sistema. Se trata, como es bien sabido, de una cantidad que determina, en orden de magnitud, el tiempo que debe de transcurrir para que el sistema en cuestión alcance un estado de equilibrio termodinámico. En particular, un criterio sencillo que en algunos casos permite determinar si una cierta hipótesis simplificadora es válida o no, es la comparación de los tiempos característicos del sistema con su tiempo de relajamiento. Así, por ejemplo, si en el sistema existen movimientos macroscópicos de materia que lo sacan de equilibrio, pero estos movimientos ocurren con tiempos característicos muy largos comparados con su tiempo de relajamiento, entonces podemos suponer al sistema como si se encontrara en equilibrio en cada instante. Más adelante veremos que este es el caso en el Universo temprano.

Es claro que el tiempo de relajamiento de un sistema depende de las interacciones microscópicas específicas entre las partículas que lo constituyen que son responsables de que se

restablezca el equilibrio. Para un gas no-relativista cuyas partículas interactúan a través de fuerzas que decaen como el cuadrado de la distancia entre ellas, el tiempo de relajamiento fue calculado por Spitzer en un trabajo ya clásico (Spitzer, 1940). Para gases relativistas no hay, hasta donde sabemos, un tratamiento equivalente.

En el presente capítulo presentamos un formalismo para calcular el tiempo de relajamiento de una mezcla binaria de gases ideales relativistas cuyas componentes se encuentran a diferentes temperaturas - el tiempo de relajamiento 'térmico' -. El formalismo es totalmente general pero, por simplicidad, derivaremos fórmulas explícitas solo para el caso particular en que la diferencia de temperaturas entre las componentes es pequeña, esto es, $\Delta T/T \ll 1$.

Como ilustración del método, en la parte final del capítulo aplicaremos la teoría al cálculo del tiempo de relajamiento de una mezcla de electrones y radiación, suponiendo que el único mecanismo de interacción entre ambos es la dispersión Compton de fotones por electrones libres y que los electrones están descritos por una distribución de Jüttner (ec. II.111). En vista de esto último, nuestros resultados numéricos serán válidos solamente para temperaturas $T \leq 5 \times 10^8$ K. La extensión a temperaturas más altas se discutirá en el capítulo V.

El tiempo de relajamiento para electrones y fotones a temperaturas diferentes, interactuando a través de dispersión Compton fue calculado por Weymann para temperaturas $T < 10^8$ K

(Weymann, 1965). En el apéndice C demostramos analíticamente que nuestro resultado se reduce al suyo en el límite clásico.

Otros trabajos relacionados con el mismo problema son los de Woodward (1970), Corman (1970), Cooper (1971) y Reeves y Landsberg (1982), quienes calculan la tasa de transporte de energía entre electrones y fotones a diferentes temperaturas, interaccionando a través de dispersión Compton. Woodward lo hace por medio de un cierto desarrollo en serie que restringe sus resultados numéricos a temperaturas electrónicas $T_e < 10^4$ K y Corman calcula numéricamente las integrales por métodos de Monte Carlo y obtiene resultados numéricos para temperaturas de la radiación $T_r < 6 \times 10^4$ K. Al final del capítulo discutimos brevemente cómo se comparan estos resultados con los nuestros. Cooper utiliza una aproximación de Fokker-Planck que, en principio, es válida para temperaturas electrónicas $T_e < 10^4$ K, pero no da resultados numéricos explícitos para la tasa de transporte de energía, por lo cual no es posible establecer comparaciones con él. Reeves y Landsberg consideran temperaturas aún más altas pero su tratamiento tiene algunos puntos que no están debidamente justificados. En particular, no toman en cuenta la emisión estimulada de fotones y, además, utilizan en sus cálculos la sección total de Klein-Nishina (ya integrada sobre los ángulos) en vez de la sección diferencial, evitándose así el problema aritmético más complejo que se presenta en la práctica que es, precisamente, la integración sobre los ángulos (ver ec. B.15 más adelante). De hecho, en su trabajo se limitan a repetir un

cálculo aproximado, totalmente clásico, hecho por Peebles (1971), sustituyendo, simplemente, la sección total de Klein-Nishina en vez de la sección de Thomson usada, justificadamente, por Peebles. Cualquier comparación con sus resultados es, por tanto, irrelevante.

1) Formalismo

Consideremos una mezcla de dos gases ideales y denotemos con subíndices $i = 1, 2$ a las cantidades correspondientes a cada uno de ellos. Cada componente estará descrita por una función de distribución f_i que satisface la ecuación de Boltzmann relativista (II.75) con los términos de colisión dados por la ecuación (II.76). De la de conservación de T , ec. (II.4), se sigue que

$$U_{,T} T^{, \nu}_{, \nu} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = 0 \quad (\text{IV.1})$$

donde, como siempre, el punto representa la derivada a lo largo de U^μ . Como era de esperarse, la energía total se conserva pero es posible un intercambio de energía entre las dos componentes de la mezcla, dado por - ver ecuaciones (II.47) y (II.81) -

$$\dot{s}_1 = -\dot{s}_2 = (2c/h^3) \int d\Gamma_1 (p_1 \cdot U) (C_{11} + C_{12}) . \quad (\text{IV.2})$$

Esta relación es totalmente general.

Supongamos ahora que las componentes se encuentran a diferentes temperaturas T_i , esto es, que cada una de ellas puede describirse por medio de una función de distribución de equilibrio con la temperatura T_i . De la definición de los términos de colisión, ec. (II.76), vemos que, en este caso, los términos diagonales se hacen cero y sólo sobreviven los términos cruzados C_{12} y C_{21} . Físicamente, esto significa que cada uno de los gases está en equilibrio consigo mismo pero fuera de equilibrio con el otro. La tasa de intercambio de energía entre ambas componentes (por unidad de volumen) se obtiene sustituyendo la ec. (II.76) en la ec. (IV.2) con las funciones de distribución de equilibrio (II.111), (II.123) o (II.127), según el caso.

La relación así obtenida es aún muy complicada por lo cual, para seguir adelante, nos restringiremos a partir de ahora al caso particular en que la diferencia de temperaturas entre las componentes sea pequeña. En este caso, se sigue de las ecuaciones (II.74), (II.76) y (IV.2) que, a primer orden en $\Delta T = T_2 - T_1$,

$$\dot{s}_1 = -\dot{s}_2 = I \Delta T \quad (\text{IV.3})$$

con la 'integral de colisión' I dada por

$$I = (\Delta c / k_B T^2 h^3) \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 f_1 f_2 \hat{f}'_1 \hat{f}'_2 (p_1 \cdot U) \times \\ [(p_1 - p'_1) \cdot U] (p_1 + p_2) \cdot \sigma \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \quad (\text{IV.4})$$

donde σ es la sección diferencial para la colisión en el sistema centro de momento.

Ahora bien,

$$\dot{\sigma}_1 = c_1 \dot{T}_1 \quad (\text{IV.5})$$

donde

$$c_1 = (\partial \sigma / \partial T_1)_n \quad (\text{IV.6})$$

es la capacidad calorífica por unidad de volumen, a volumen constante, de cada componente. De (IV.3) y (IV.6) se sigue que

$$\dot{\Delta T} / \Delta T = \tau^{-1} = I c_T^{-1} \quad (\text{IV.7})$$

donde

$$c_T^{-1} = c_1^{-1} + c_2^{-1} \quad (\text{IV.8})$$

y donde hemos definido τ , el tiempo característico de relajamiento térmico del gas. Dada una interacción específica

entre las componentes, esto es, dada una sección eficaz , esta relación nos permite calcular el tiempo de relajamiento térmico de la mezcla.

2) Electrones y fotones.

Para ilustrar el uso de la teoría expuesta en la sección anterior, calcularemos a continuación el tiempo de relajamiento de una mezcla de electrones y radiación suponiendo que el único mecanismo de interacción entre ambos es la dispersión Compton de fotones por electrones libres. Supondremos también que la densidad numérica de los electrones es suficientemente baja y que su temperatura es suficientemente alta como para que los efectos cuánticos sean despreciables, esto es, supondremos que la función de distribución de los electrones es la de Jüttner-Synge, dada por la ecuación (II.111). Para que esta hipótesis sea válida es necesario que la temperatura y la densidad numérica de los electrones satisfagan la relación (II.113) la cual, sustituyendo los valores numéricos, se convierte en

$$n < 1.8 \times 10^{30} e^{-K_2(\phi)/\phi} \text{ partículas/cm}^3 \quad (\text{IV.9})$$

donde $\phi = mc^2/k_B T$.

Ahora bien, ¿qué intervalo de temperaturas debemos

considerar? Evidentemente estamos interesados en temperaturas relativistas, esto es, temperaturas $T \sim mc^2/k_e \approx 6 \times 10^8$ K; pero, por otro lado, no podemos considerar temperaturas demasiado altas pues no hemos tomado en cuenta el efecto de los pares electrón-positrón. Dado que estos comienzan a ser importantes alrededor de los 5×10^8 K, restringiremos nuestros cálculos numéricos al intervalo de temperaturas 5×10^8 K $\leq T \leq 6 \times 10^8$ K que corresponde, aproximadamente, a $1 \leq \beta \leq 100$. De la ecuación (IV.9) se sigue que las densidades máximas correspondientes van de 2×10^{27} a 10^{31} partículas/cm³. En particular, nosotros supondremos $n \leq 10^{30}$ partículas/cm³, que es el caso más común en Astronomía.

Como primer paso para obtener consideremos el cálculo de la integral de colisión I, ec. (IV.4). En el caso particular que nos interesa hay que evaluar la integral para $f_1 = f$ con f , la función de distribución de Jüttner-Synge, dada por la ec. (II.111); $f_2 = N$, con N , la función de distribución de los fotones, dada por la ec. (II.127) y con σ , la sección eficaz de interacción entre fotones y electrones relativistas, dada por la bien conocida fórmula de Klein-Nishina, que se puede escribir como

$$\sigma(p, k, y) = (3\sigma_T/16\pi) \alpha g(\alpha, y) \quad (\text{IV.10})$$

donde $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$ cm² es la sección de Thomson, p es el cuadrinomento del electrón, k el del fotón, $y = \cos \theta$, siendo θ el ángulo de dispersión entre el electrón y el fotón en el

sistema 'centro de momento', α se define como

$$\alpha = m^2 c^2 / (p+k)^2 \quad (\text{IV.11})$$

y

$$g(\alpha, y) = 1 + [(1-\alpha)^2/2] x \left\{ (1-y)^2 / [(1+\alpha) + (1-\alpha)y] \right\} + \\ + [(1-\alpha) + (1+\alpha)y]^2 / [(1+\alpha) + (1-\alpha)y]^2 . \quad (\text{IV.12})$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión para I obtenemos

$$I = (3m^2 c^2 \sigma_T) / (4\pi k_e T^2 h^6) \int d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h d\mathbf{r}_p d\mathbf{r}_k f_{\mathbf{N}\hat{\mathbf{N}}} \times \\ \times (p \cdot U) [(p-p') \cdot U] g(\alpha, y) \delta^{(4)}(p+k-p'-k') . \quad (\text{IV.13})$$

Como es de esperarse, la evaluación numérica de esta expresión es larga, tediosa y complicada. Como, además, es un problema puramente matemático, hemos juzgado conveniente relegar todos los detalles al apéndice B, al cual remitimos al lector interesado en ellos.

El otro cálculo que habría que hacer es el de las capacidades caloríficas de la radiación y de los electrones. En cuanto a la radiación, esto no representa ningún problema; su capacidad calorífica es, evidentemente,

$$c_v = 4aT^3 . \quad (\text{IV.14})$$

Para calcular la capacidad calorífica de los electrones recordamos que la energía de un gas de Jüttner está dada por

$$e_m = nmc^2(G-1/\phi) \quad (\text{IV.15})$$

donde n es la densidad numérica de los electrones (que suponemos igual a la de los bariones por neutralidad macroscópica del gas), m es su masa, ϕ es el parámetro de temperatura, definido como

$$\phi = mc^2/(k_B T) , \quad (\text{IV.16})$$

y

$$G = G(\phi) = K_1(\phi)/K_2(\phi) . \quad (\text{IV.17})$$

De (IV.6) y (IV.15) se sigue que

$$c_m = -nk_B(1+\phi^2 G') \quad (\text{IV.18})$$

donde

$$G' = dG/d\phi = G^2 - 1 - 5G/\phi . \quad (\text{IV.19})$$

Es fácil ver que, en nuestro caso particular, siempre tendremos $c_{\tau} \gg c_m$, puesto que estamos suponiendo $n < 10^{18}$ partículas/cm³, por lo cual, en la práctica, $c_{\tau} \approx c_m$. Una vez calculados I y c_{τ} para diferentes temperaturas, los valores de τ se obtienen de la ecuación (IV.7).

3) Resultados y conclusiones

En el apéndice B se demuestra que la integral de colisión I se puede escribir como una serie infinita de integrales dobles - ver la ecuación (B.31) -. En la práctica resulta ser que esta serie converge muy rápidamente en el intervalo relevante de temperaturas, según puede constatarse en la Fig. IV.1 donde hemos graficado las contribuciones relativas de los primeros 3 términos. Nuestros resultados finales para el tiempo de relajamiento τ se muestran en la Fig. IV.2 como función del parámetro de temperatura ϕ definido en la ec. (IV.16). Nótese que a las 'bajas' densidades que estamos considerando, el valor de τ depende solamente de la temperatura. Físicamente esto era de esperarse puesto que, a las temperaturas y densidades que hemos considerado, la radiación domina por completo a la materia.

Para comprobar nuestros resultados, la tasa de transporte de energía entre ambas componentes, calculada a partir de la ecuación (IV.3), fue comparada con los valores obtenidos por

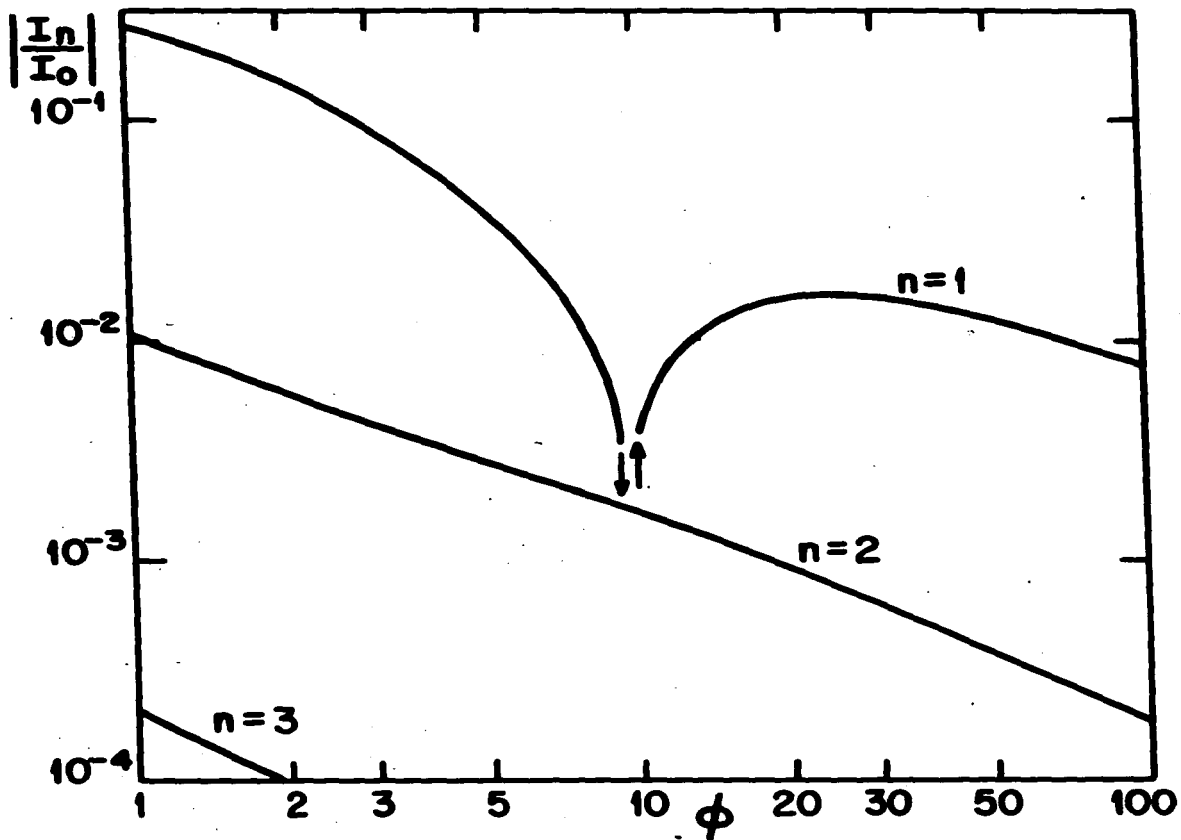


Fig. IV.1

Contribuciones relativas de I_n respecto a I_0 para $n=1$, 2 y 3, como funciones del parámetro de temperatura ϕ .

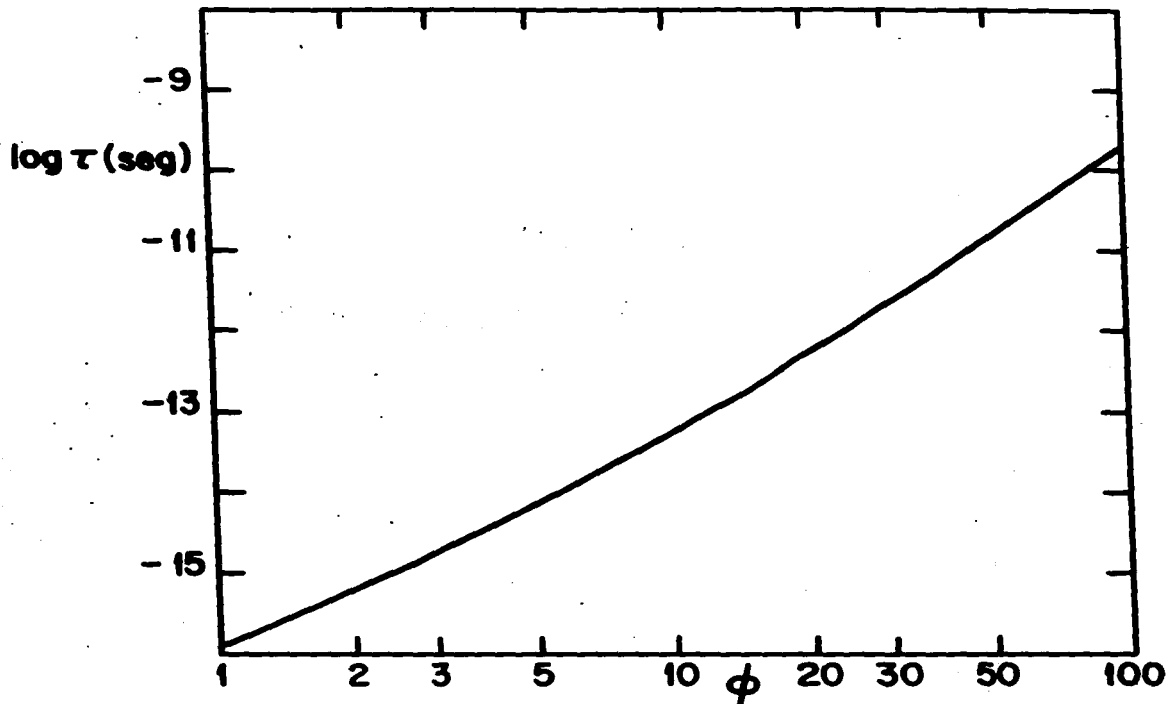


Fig. IV.2

Tiempo de relajamiento (en segs.) de una mezcla de electrones y fotones a temperaturas ligeramente diferentes, como función de ϕ . Sólo se tomó en cuenta la dispersión Compton.

Woodward (1970) y Corman (1970). Para temperaturas $\phi \geq 50$ nuestros resultados coinciden con los de Woodward, pero a temperaturas más altas va habiendo una diferencia cada vez mayor que es del orden de un 10% para $\phi = 30$ y que alcanza el 53% para $\phi = 20$. Esto confirma las estimaciones hechas por el mismo Woodward en el sentido de que sus resultados deben ser válidos solamente para temperaturas $T < 20\text{keV}$.

Una comparación con los valores obtenidos por Corman es más difícil debido a que sus cálculos son para valores relativamente altos de $\Delta T/T$. Hay solamente un valor con el cual podemos comparar, que es cuando $\Delta T/T = 0.1$; en este caso la diferencia es de un 16%, lo cual está completamente de acuerdo con la desviación esperada del 10%.

4) Aplicación

Una sencilla pero interesante aplicación de nuestros resultados es la siguiente. Es bien sabido que una mezcla de materia y radiación, originalmente en equilibrio termodinámico, se sale de equilibrio si sufre una expansión. (Tal sería el caso, por ejemplo, en el Universo temprano, según la teoría de la 'gran explosión'). Sin embargo, si el tiempo característico de la expansión es muy largo comparado con el tiempo de relajamiento térmico entre materia y radiación, la materia y la radiación

'tendrán tiempo' de equilibrarse y la situación será siempre la de equilibrio termodinámico 'instantáneo' (este asunto se trata con un poco más de detalle en el capítulo VI).

En la teoría de la 'gran explosión' se suele suponer que, en el Universo temprano, la materia y la radiación se mantuvieron siempre en equilibrio termodinámico. La validez de esta hipótesis puede verificarse usando los resultados que hemos obtenido en el presente capítulo y eso es lo que haremos a continuación.

Por simplicidad, vamos a considerar tan sólo el caso de un Universo de pura radiación. No vale la pena utilizar modelos más complicados ya que nos interesan solamente resultados de orden de magnitud (de hecho, se podría incluir el efecto de pares electrón-positrón, neutrino-antineutrino ó muón-antimuón multiplicando la densidad de energía por factores como 9/2, 11/4 etc.; ver, por ejemplo, Weinberg, 1972, ecs. 15.3.14 y 15.6.44). Adoptando, pues el modelo de pura radiación, es fácil comprobar que, en nuestra notación (ver, por ejemplo, Berry, 1976, ec. 8.1.12),

$$\delta = 0.39 \sqrt{t(\text{segundos})} \quad (\text{IV.20})$$

y

$$\text{tiempo de expansión} = \sqrt{n/\dot{n}} = 2t/3 \quad (\text{IV.21})$$

donde t es el tiempo propio de la materia en expansión (muchas

veces llamado también 'tiempo cósmico').

En la Fig. IV.2 se ve claramente que el tiempo de relajamiento es de 17 a 12 órdenes de magnitud menor que el tiempo característico de la expansión para $1 < \phi < 500$ (entre 7 seg. y 20 días). Se sigue que el Universo se expandió a través de estados de equilibrio en estas fases tempranas.

V. INTERACCION ENTRE MATERIA Y RADIACION II

En el capítulo anterior presentamos un formalismo general para calcular el tiempo de relajamiento térmico de una mezcla binaria de gases ideales relativistas y lo aplicamos al caso particular de un gas de Jüttner mezclado con radiación. Sin embargo, dado que la distribución de Jüttner es válida solamente cuando los efectos cuánticos son despreciables, nuestros resultados tuvieron que ser restringidos a temperaturas (relativistas) no demasiado elevadas. A temperaturas muy altas la creación y aniquilación de pares y, por tanto, los efectos de degeneración, deben de ser considerados. Eso es lo que haremos en el presente capítulo, donde encontraremos una expresión para el tiempo de relajamiento térmico de una mezcla de electrones, positrones y radiación, interaccionando a través de dispersión Compton y, también, a través de la creación y aniquilación de pares, aplicándole a dicha mezcla el mismo formalismo. Dado que el efecto de los pares es lo que nos interesa estudiar, nos restringiremos a temperaturas $3 \times 10^8 \text{ K} \leq T \leq 10^{11} \text{ K}$, puesto que a temperaturas más bajas la producción de pares es prácticamente nula y a temperaturas mayores hay que considerar nuevas

complicaciones, tales como la aparición de neutrinos y de pares de mesones. Es importante notar que consideraremos explícitamente a la creación y a la aniquilación de pares como mecanismos de intercambio de energía entre materia y radiación, consideración que, hasta donde sabemos, no había sido hecha anteriormente. Esto es importante porque, según veremos, este resulta ser el mecanismo dominante de transporte de energía entre materia y radiación en una fracción importante del intervalo de temperaturas que estamos considerando.

Hasta donde sabemos, los únicos tratamientos previos del tema son los de Sampson (1961) y Schweizer (1984), quienes obtienen tiempos de relajamiento para la radiación en un plasma semirrelativista, pero sus cálculos no son válidos para temperaturas $k_B T \sim mc^2$ (donde m es la masa del electrón y k_B la constante de Boltzmann). En un artículo posterior, el mismo Sampson estima un tiempo de relajamiento para pares y radiación (físicamente diferente al nuestro) por medio de una simple extrapolación de sus resultados anteriores -los de 1961- a las temperaturas relevantes (Sampson, 1962). Como ni el sentido físico es el mismo, ni la extrapolación es válida, cualquier comparación entre sus resultados y los nuestros queda fuera de toda discusión.

1) Teoría

Consideremos una mezcla de electrones, positrones y radiación y denotemos las cantidades relativas a cada uno de ellos por medio de los subíndices $-$, $+$ y r , respectivamente. Supongamos ahora que cada una de las componentes se encuentra en equilibrio termodinámico con ella misma y que, por tanto, podemos describirla por medio de una función de distribución de equilibrio con una cierta temperatura. Dado que las interacciones coulombianas son muy eficientes, podemos suponer que los electrones y los positrones se encontrarán siempre a una misma temperatura $T_- = T_+ = T$, mientras que la radiación se encontrará, en general, a una temperatura distinta que, por simplicidad, supondremos suficientemente cercana a T como para poder escribir $T_r = T + \Delta T$ con $\Delta T/T \ll 1$. Es fácil ver que, debido a la aditividad de la densidad de masa-energía, este sistema es formalmente equivalente a una mezcla binaria, siendo la radiación una de las componentes y los electrones y positrones la otra. (A partir de ahora nos referiremos a los electrones y a los positrones simplemente como 'materia' y denotaremos las cantidades relativas a ellos con el subíndice m).

Dado que una mezcla binaria es un sistema que ya estudiamos en el capítulo anterior, podemos escribir directamente su tiempo de relajamiento térmico, el cual, según la ecuación (IV.7),

está dado por

$$\tau^{-1} = I/c_r, \quad (V.1)$$

donde I se define en términos de la tasa de transporte de energía (por unidad de volumen) de la radiación a la materia, \dot{e}_r , por la relación

$$\dot{e}_r = -I\Delta T, \quad (V.2)$$

siendo e_r la densidad de energía de la radiación y siendo el punto sobre la variable, igual que en los capítulos anteriores, la derivada a lo largo de la cuadrivelocidad hidrodinámica U . Además, la capacidad calorífica 'reducida' c_r está dada por la ecuación (IV.8):

$$c_r^{-1} = c_m^{-1} + c_r^{-1}, \quad (V.3)$$

donde c_m y c_r son las capacidades caloríficas por unidad de volumen, a volumen constante, de la materia y de la radiación, respectivamente, y están dadas por

$$c_{m,r} = (\partial e_{m,r} / \partial T)_n, \quad (V.4)$$

siendo e_m y e_r las densidades de masa-energía de la materia y de la radiación y n la densidad numérica de bariones.

Supongamos ahora que la materia y la radiación interactúan tan solo a través de la dispersión Compton de fotones por electrones libres y a través de la creación y aniquilación de pares electrón-positrón. Entonces, la tasa total de transporte de energía de la radiación a la materia puede escribirse, usando la aditividad de la densidad de masa-energía, como

$$\dot{e}_v = -I_c \Delta T - I_p \Delta T, \quad (V.5)$$

donde $I_c \Delta T$ e $I_p \Delta T$ son las tasas de transporte de energía (por unidad de volumen) de la radiación a la materia debidas a dispersión Compton y a creación y aniquilación de pares, respectivamente. De las ecuaciones (V.1), (V.2) y (V.5) se sigue que

$$\tau^{-1} = \tau_c^{-1} + \tau_p^{-1}, \quad (V.6)$$

donde

$$\tau_c^{-1} = I_{c,p} / c_T \quad (V.7)$$

son los tiempos de relajamiento térmicos que tendría el sistema si hubiera solamente dispersión Compton o solamente creación y aniquilación de pares, respectivamente. Las expresiones explícitas para I_c e I_p se obtienen de manera idéntica a como se obtuvo la ecuación (IV.4) a partir de las ecuaciones (IV.2) y

(IV.3) y de la definición de los términos de colisión dada por (II.75).

Antes de seguir adelante es conveniente hacer notar que, evidentemente, estos resultados teóricos son completamente generales, esto es, que los subíndices 'c' y 'p' se pueden referir a cualquier par de mecanismos de intercambio de energía. En la siguiente sección aplicaremos los resultados al caso particular (que veníamos tratando) de que las componentes interactúen por dispersión Compton y por creación y aniquilación.

2) Pares y radiación

En principio, deberíamos de comenzar por escribir las integrales I_c e I_p . Sin embargo, no vale la pena escribirlas completas ya que, según veremos a continuación, es posible hacer una simplificación que es válida prácticamente en todos los casos de interés astronómico. En efecto, en el intervalo relevante de temperaturas ($3 \times 10^8 \text{ K} \leq T \leq 10^{10} \text{ K}$, que corresponde, aproximadamente, a $.05 \leq \beta \leq 20$) la densidad numérica de electrones libres (que, por neutralidad eléctrica, suponemos igual a la densidad numérica de bariones) es, en la mayor parte de los casos interesantes, mucho menor que la densidad numérica de pares (que es $\gg 10^{20}$ partículas/cm³). En vista de ello podemos tomar $n_- = n_+$ y, por lo tanto, los potenciales químicos de electrones y

positrones valdrán cero, según se sigue de la ecuación (III.27) o de la (A.10). En este caso encontramos que

$$\begin{aligned}
 I_e = & (8c/k_e T^3 h^3) \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_+ d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'_+ \exp\{-\beta[(p+k)\cdot U]\} \\
 & \times (p\cdot U) [(k'-k)\cdot U] (p+k)^2 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \\
 & \times \hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}' \sigma_e
 \end{aligned} \tag{V.8}$$

$$\begin{aligned}
 I_p = & (2c/k_e T^3 h^3) \int d\mathbf{r}_- d\mathbf{r}_+ d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'_+ \exp\{-\beta[(p_-+p_+)\cdot U]\} \\
 & \times [(p_-+p_+)\cdot U]^2 (p_-+p_+)^2 \delta^{(4)}(p_-+p_+-k_--k_+) \\
 & \times \hat{f}_- \hat{f}_+ \hat{N}_- \hat{N}_+ \sigma_p,
 \end{aligned} \tag{V.9}$$

donde σ_e y σ_p son, respectivamente, las secciones para dispersión Compton (Klein-Nishina) y para aniquilación de pares, en el sistema centro de momento, las p son los cuadrimomentos de electrones y positrones, las k son los cuadrimomentos de los fotones, f y N son las funciones de distribución de equilibrio de los electrones (positrones) y fotones

$$f = [\exp(\beta p\cdot U) + 1]^{-1}, \tag{V.10}$$

$$N = [\exp(\beta k \cdot U) - 1]^{-1}, \quad (V.11)$$

y los demás símbolos significan lo mismo que en el capítulo anterior. Las expresiones de las secciones eficaces son bien conocidas (ver, por ejemplo, Berestetskii et al., 1971) y pueden escribirse como

$$\sigma_c(p, k, \theta) = (3\sigma_T/16\pi) g_c(\alpha_c, y) \quad (V.12)$$

$$\sigma_p(p_-, p_+, \theta) = (3\sigma_T/16\pi) g_p(\alpha_p, y) \quad (V.13)$$

donde

$$\alpha_c = m^2 c^2 / (p+k)^2, \quad (V.14)$$

$$\alpha_p^2 = (p_- + p_+)^2 / [(p_- + p_+)^2 - 4m^2 c^2], \quad (V.15)$$

$$g_c(\alpha_c, y) = \alpha_c \left\{ 1 + \left[\frac{(1-\alpha_c)^2}{2} \right] (1-y)^2 / \left[(1+\alpha_c) + (1-\alpha_c)y \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{(1-\alpha_c) + (1+\alpha_c)y}{2} \right]^2 / \left[(1+\alpha_c) + (1-\alpha_c)y \right]^2 \right\}, \quad (V.16)$$

$$g_p(\alpha_p, y) = \left[\frac{\alpha_p^2 - 1}{\alpha_p} \right] \left[-1/2 + (2\alpha_p - 1) / (\alpha_p^2 - y^2) \right. \\ \left. - (\alpha_p^2 - 1)^2 / (\alpha_p^2 - y^2)^2 \right], \quad (V.17)$$

$\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ es la sección de dispersión de Thomson, θ es el ángulo de dispersión en el sistema centro de momento y $y = \cos \theta$.

Las integrales (V.8) y (V.9) pueden reducirse a series de integrales cuádruples por un procedimiento totalmente análogo al usado en el capítulo anterior para los mismos fines. Los cálculos se presentan en el apéndice D y aquí nos limitaremos a escribir los resultados, que son:

$$I_e = (3\pi^2 \sigma_T c k_e / 8) (mc/h)^6 \phi^2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{en} \quad (V.12)$$

$$I_p = 334\pi^2 \sigma_T c k_e (mc/h)^6 \phi^2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{pn}, \quad (V.19)$$

donde hemos definido ϕ , el parámetro de temperatura, como

$$\phi = mc^2 / (k_e T), \quad (V.20)$$

y donde I_{en} e I_{pn} están dadas por las ecuaciones (D.2) y (D.11), respectivamente.

Para completar el cálculo de los tiempos de relajamiento, ecuación (V.7), necesitamos ahora calcular c_T , ec. (V.3). Evidentemente

$$c_T = 4aT^3 \quad (V.21)$$

donde $a = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg/K}^4$ es la constante de la radiación. La

capacidad calorífica de electrones y positrones, c_m , se sigue de la bien conocida expresión para su densidad de masa-energía (véase, por ejemplo, Chiu, 1968) que, en nuestro caso ($n_- = n_+$) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 e_m &= e_- + e_+ = \\
 &= 16\pi mc^3 (mc/h)^3 \int_0^\infty dw \sinh^2 w \cosh^2 w [\exp(\beta \cosh w) + 1]^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{V.22}$$

Usando la ecuación (V.4) obtenemos

$$c_m = 8\pi (mc/h)^3 k_B \beta^2 \int_0^\infty \sinh^2 w \cosh^2 w dw / [\cosh(\beta \cosh w) + 1],
 \tag{V.23}$$

con lo cual el cálculo de c_V , γ , en consecuencia, el de \mathcal{Z} , están completos.

3) Resultados y discusión

Las integraciones se hicieron numéricamente por medio de programas estándar de biblioteca, para valores del parámetro de

temperatura β en el intervalo $.05 \leq \beta \leq 20$, valores que corresponden al intervalo relevante de temperaturas previamente mencionado y justificado. En la práctica, las series que aparecen en I_c , (V.18), y en I_r , (V.19), convergieron muy rápidamente, de tal manera que, en ambos casos, los primeros 3 términos fueron suficientes para obtener una precisión de una parte en 10^3 .

Los valores resultantes para τ_c , τ_r y τ están graficados, como funciones del parámetro de temperatura β , en la figura (V.1) donde, con fines puramente comparativos, se ha graficado también el tiempo de relajamiento 'de Jüttner' que obtuvimos en el capítulo anterior y que no toma en cuenta a los pares.

Es evidente de la figura que, para temperaturas $T \geq 8 \times 10^5 \text{K}$, τ_r es mayor que τ_c en un factor que varía de 4 a 12. Se sigue que en este intervalo de temperaturas la creación y aniquilación de los pares es un mecanismo de transporte de energía entre materia y radiación más eficiente que la dispersión Compton, esto es, en este intervalo de temperaturas, el equilibrio se alcanza esencialmente a través del 'contacto térmico' que se establece entre radiación y materia por la creación de los pares.

Es interesante, también, notar la importancia de los pares aún a temperaturas relativamente 'bajas' ($T \sim 3 \times 10^5 \text{K}$) donde la dispersión Compton ya es el mecanismo dominante en el intercambio de energía. A estas temperaturas sería de esperarse que τ y τ_r fueran prácticamente idénticos o, al menos, del mismo orden de magnitud. Sin embargo, según se aprecia claramente en la figura, el primero es alrededor de 2 órdenes de magnitud mayor que el

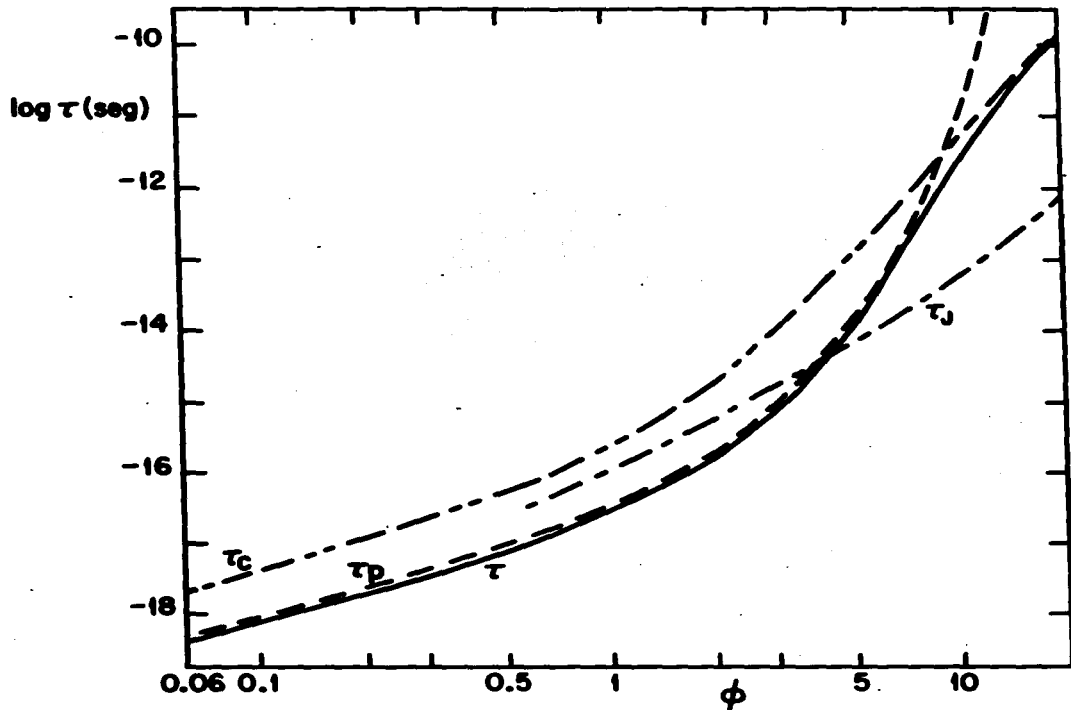


Fig. V.1

Tiempos de relajamiento debidos a dispersión Compton (τ_c), a creación y aniquilación de pares e^-e^+ (τ_p) y a ambos procesos simultáneamente (τ), para una mezcla de pares y radiación (a temperaturas ligeramente diferentes) como funciones de ϕ . τ_p es el valor obtenido en el capítulo anterior (Fig. IV.2) y se ha añadido sólo para efectos de comparación.

segundo. La diferencia se debe, precisamente, a los pares. Aún a estas 'bajas' temperaturas, su densidad numérica- del orden de 10^{20} partículas/cm³- es mucho mayor que la densidad numérica de electrones 'libres' que se suele tener en las condiciones astronómicas 'normales' que se supusieron en el capítulo anterior para calcular τ_T .

VI. GENERACION DE ENTROPIA. 2ª VISCOSIDAD

Como una aplicación más del formalismo que presentamos en el capítulo II, en el presente capítulo calcularemos el 2º coeficiente de viscosidad de una mezcla de gases ideales, relativistas, en expansión. El lector avisador pensará que esta oración encierra una contradicción pues ¿cómo es posible hablar de 'viscosidad' entre gases ideales? Si fuesen, efectivamente, ideales, ¡no habría viscosidad entre ellos! Con el fin de entender el origen de esta aparente contradicción comenzaremos el capítulo con una breve discusión sobre la 2ª viscosidad. El lector interesado en un tratamiento más detallado puede consultar el capítulo I de Clarke y McChesney (1976). A continuación, en la sección 2, aplicaremos el formalismo de la teoría cinética relativista a una mezcla binaria de gases ideales relativistas para obtener una expresión general para su 2ª viscosidad. En la sección 3 aplicaremos esta fórmula general a una mezcla de electrones relativistas y radiación interaccionando a través de dispersión Compton. En la sección 4 la aplicaremos a una mezcla de electrones y positrones en equilibrio térmico interaccionando con radiación a través de dispersión Compton y de creación y

aniquilación de los pares. Por último, en la sección 5, usaremos los resultados de las secciones anteriores para calcular la tasa de generación de entropía, debida a esos procesos, en el Universo temprano.

1) 2ª viscosidad

Un fluido fuera de equilibrio termodinámico se caracteriza por la presencia, en su seno, de gradientes de las variables termodinámicas que lo describen. Como consecuencia, se generan en él flujos macroscópicos irreversibles que tienden a establecer una situación de equilibrio. Dado que estos flujos transportan magnitudes físicas (masa, momento, etc.) de un punto a otro del fluido, este tipo de fenómenos se conocen como 'procesos de transporte'. Su estudio teórico suele ser muy complicado pero en una gran cantidad de casos se obtienen excelentes resultados suponiendo que, en 1ª aproximación, la magnitud de los flujos es proporcional a los gradientes que los producen (aproximación lineal). Las constantes de proporcionalidad, los llamados 'coeficientes de transporte', son bien conocidas y entre ellas se cuentan la conductividad térmica, el coeficiente de difusión y las dos viscosidades, que son las que relacionan los flujos de momento con los gradientes de la velocidad hidrodinámica del fluido.

La necesidad de dos coeficientes de viscosidad proviene del hecho de que la presencia de gradientes de velocidad produce una deformación en el fluido y, en general, cualquier deformación es una combinación de dos deformaciones independientes: una tangencial (o de corte), en la cual las capas del fluido se deslizan unas sobre otras, y una volumétrica, que consiste en una expansión o una contracción 'homóloga' del fluido. En el primer caso el coeficiente de proporcionalidad recibe el nombre de 'primer coeficiente de viscosidad' (o, más brevemente, 1ª viscosidad o viscosidad de corte) y en el segundo caso hablamos del 'segundo coeficiente de viscosidad' (o 2ª viscosidad o viscosidad volumétrica).

La viscosidad debida a movimientos tangenciales es la más conocida y, también, la más fácil de visualizar. En ella el transporte de momento entre capas adyacentes del fluido se debe, a nivel microscópico, al intercambio de partículas con momentos 'promedio' diferentes.

En el caso de una expansión, en cambio, un mecanismo microscópico capaz de transportar momento entre diferentes regiones del fluido no es tan evidente ya que las partículas más lentas se rezagan cada vez más respecto a las más rápidas y cualquier interacción directa entre ellas se vuelve imposible. Es claro, entonces, que la 2ª viscosidad tiene que originarse en interacciones que transporten momento 'a distancia', o sea, en las fuerzas intermoleculares. Por lo tanto, la 2ª viscosidad es despreciable en fluidos diluidos y, de hecho, es formalmente

igual a cero en el modelo microscópico más común, en el cual se supone que las partículas que constituyen al fluido sólo interactúan a través de colisiones. En síntesis, la viscosidad volumétrica puede ser importante solamente en fluidos densos.

¿A qué se debe, entonces, que se hable de una 2ª viscosidad entre fluidos que sólo interactúan por colisiones? La razón es la siguiente: es bien sabido que en todo proceso irreversible se genera una cierta cantidad de entropía. En la aproximación lineal, que es en la que estamos trabajando, la tasa de generación de entropía durante un cierto proceso resulta estar dada, esencialmente, por el producto del coeficiente de transporte del proceso en cuestión y el cuadrado del gradiente correspondiente (resultado evidente, por cierto, ya que los coeficientes de transporte son no-negativos y la generación de entropía debe ser también una cantidad positiva). En particular, la tasa de generación de entropía por viscosidad volumétrica es proporcional al cuadrado de la divergencia de la velocidad hidrodinámica o, lo que es lo mismo, al cuadrado de la tasa de expansión, y la 2ª viscosidad es la constante de proporcionalidad (ver ecuaciones II.24 y II.41).

Puede ocurrir, sin embargo, que un sistema ideal en equilibrio termodinámico se salga de esa situación de equilibrio cuando sufre una expansión. Tal es el caso, por ejemplo, de una mezcla de fluidos reaccionando químicamente, ya que las tasas de reacción dependen de las concentraciones de los reactantes y, cuando éstas varían como consecuencia de la expansión, el sistema

se sale de equilibrio químico. Otro ejemplo es el de una mezcla de gases cuyos exponentes adiabáticos son diferentes. En este caso, que es el que estudiaremos más adelante, la expansión 'enfria' de manera diferente a las diferentes componentes y el sistema se sale de equilibrio térmico. En estos casos, como consecuencia de la ruptura del equilibrio, aparecen procesos irreversibles que nada tienen que ver con procesos viscosos pero que generan entropía a una tasa que también resulta ser proporcional al cuadrado de la tasa de expansión. Es aquí donde se genera la confusión pues al coeficiente de proporcionalidad se le suele dar también el nombre de '2ª viscosidad', simplemente por semejanza con el caso viscoso, cuando que sería más adecuado llamarlo, a falta de algo mejor, '2ª viscosidad equivalente'.

En lo que sigue, vamos a calcular la '2ª viscosidad equivalente' de una mezcla de dos gases con diferentes exponentes adiabáticos pero, para mantenernos dentro de la tradición, nos referiremos a ella simplemente como '2ª viscosidad' o 'viscosidad volumétrica'.

2) Teoría

Consideremos una mezcla binaria de gases ideales constituidos por partículas con masas m_i ($i = 1, 2$) y descritos por funciones de distribución f_i , tal y como lo hicimos en el

capítulo IV. El intercambio de energía entre ambos gases estará dado, entonces, por la ecuación (IV.2)

$$\dot{Q}_1 = U_p T_p \frac{dV}{dt} = (2c/h^3) \int dV (p_1 U) (C_{v1} + C_{v2}). \quad (\text{VI.1})$$

Igual que en el capítulo IV, nos restringiremos al caso de diferencias pequeñas de temperatura entre ambas componentes por lo cual podemos escribir, a primer orden en ΔT ,

$$\dot{Q}_1 = I \Delta T, \quad (\text{VI.2})$$

con I dada por la ecuación (IV.4). El tiempo de relajamiento térmico de la mezcla es, entonces, (ec. IV.7),

$$\tau^{-1} = I c_T^{-1}, \quad (\text{VI.3})$$

donde c_T , la 'capacidad calorífica reducida' del sistema, está dada por la ec. (IV.8),

$$c_T^{-1} = c_1^{-1} + c_2^{-1} \quad (\text{VI.4})$$

siendo c_1 y c_2 las capacidades caloríficas por unidad de volumen de cada una de las componentes.

Ahora bien, la tasa de generación de entropía por unidad de

volumen debida a las partículas i está dada por (ver ecuación II.82)

$$S_i^{\wedge} = nk_e \hat{s}_i \\ = (gc/h^3) k_e \int d\Gamma_i \ln(\hat{f}_i / f_i) p_i^{\wedge} f_{i,\mu} \quad (\text{VI.5})$$

donde S^{\wedge} es el cuadriflujo de entropía, n es la densidad numérica de bariones, s es la entropía por barión medida en unidades de k (entropía dimensional por barión), f_i es la función de distribución de las partículas i y $\hat{f}_i = 1 + \epsilon_i f_i$ con $\epsilon_i = 1, 0$ ó -1 , según que se trate de bosones, partículas clásicas o fermiones, respectivamente. El punto sobre la variable s_i representa, como siempre, la derivada a lo largo de U^{\wedge} . Una vez más, supondremos que cada componente está en equilibrio termodinámico con ella misma y, por lo tanto, tendremos

$$f_i = \left\{ \exp[\beta_i(-\mu_i + p_i \cdot U)] - \epsilon_i \right\}^{-1} . \quad (\text{VI.6})$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior encontramos

$$nk_e \hat{s}_i = (g_i c/h^3) k_e \int d\Gamma_i \beta_i (p_i \cdot U) p_i^{\wedge} f_{i,\mu} \\ = U_{\mu} T_i^{\mu} / T_i = \hat{s}_i / T_i , \quad (\text{VI.7})$$

que es, simplemente, la primera ley de la termodinámica a volumen

constante. De esta relación y de la ecuación (VI.2) se sigue que la producción total de entropía por unidad de volumen y por unidad de tiempo es

$$nk_{\cdot} \dot{s} = nk_{\cdot} \dot{s}_1 + nk_{\cdot} \dot{s}_2$$

$$= I(\Delta T/T)^2 \quad (VI.8)$$

En todo este cálculo hemos supuesto que el volumen del sistema permanece constante. Es claro, sin embargo, que el mismo razonamiento sigue siendo válido para un sistema con volumen variable siempre y cuando la escala de tiempo con la cual cambia el volumen sea muy larga comparada con su tiempo de relajamiento. Suponiendo que este es el caso, calcularemos a continuación la viscosidad volumétrica de una mezcla de 2 gases ideales en expansión.

Supongamos que el sistema se encuentra, en un momento dado, en equilibrio termodinámico a una temperatura T y sea

$$\tau_e = |n/\dot{n}| \quad (VI.9)$$

su tiempo característico de expansión. En general, uno de los efectos de la expansión será el de desplazarlo de esta situación de equilibrio. Sin embargo, según acabamos de mencionar, si $\tau_e \gg \tau$ (donde τ , el tiempo de relajamiento térmico del sistema, está dado por la ecuación VI.3) el volumen del fluido puede

considerarse constante durante una fracción de tiempo suficientemente larga como para que sus componentes alcancen un 'casi-equilibrio' térmico cada instante. En consecuencia, podemos aproximar la expansión 'real' por una sucesión alternada de dos procesos: (1) una expansión isentrópica muy rápida, con una duración $\Delta t \ll \tau$, seguida por (2) un relajamiento a equilibrio térmico, a volumen constante, con una duración $\Delta t \sim \tau$ (ver figura VI.1). El efecto del primer proceso es el de desacoplar las temperaturas de las componentes (siempre y cuando sus exponentes adiabáticos sean diferentes, lo cual supondremos que ocurre) y el del segundo es el de generar una cierta cantidad de entropía.

Supongamos que durante el primer proceso la densidad numérica de bariones cambia en dn con

$$dn \ll n . \quad (VI.10)$$

Entonces, las temperaturas de las componentes cambiarán a

$$T_i = T + (\partial T_i / \partial n)_s dn , \quad (VI.11)$$

de tal manera que se establecerá una diferencia de temperaturas dada por

$$\Delta T = T_2 - T_1$$

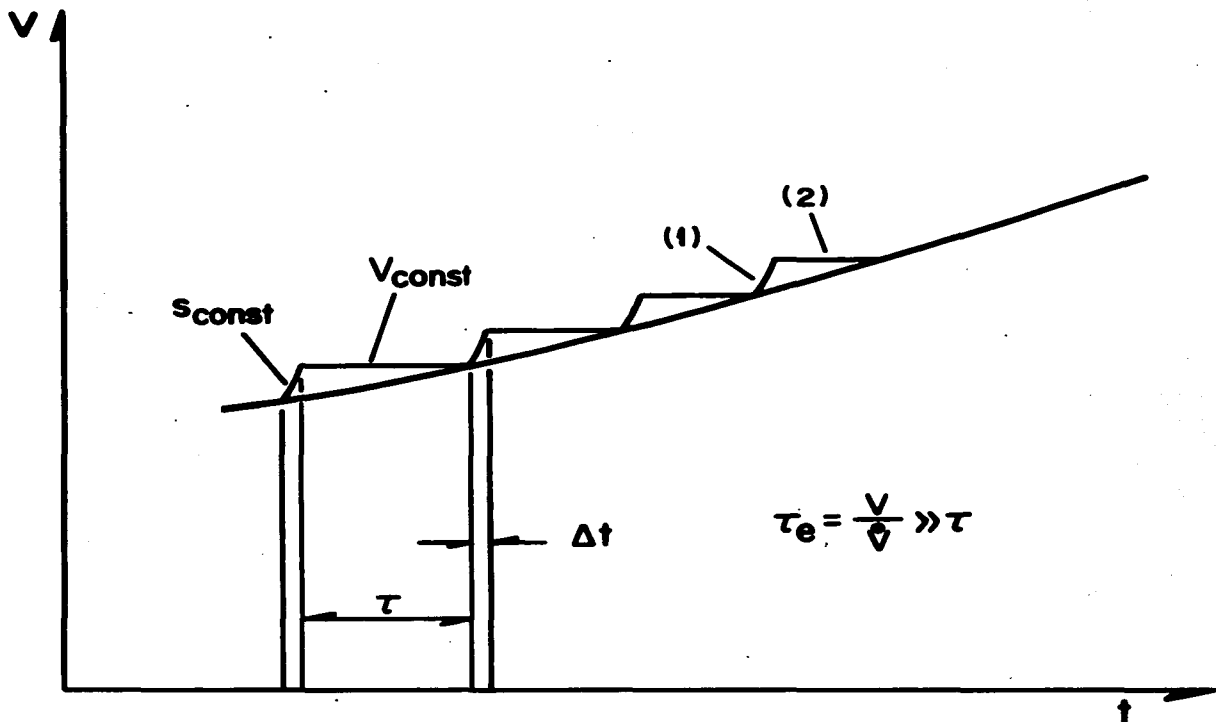


Fig. VI.1

La evolución del sistema en el tiempo se ha aproximado como una sucesión de expansiones adiabáticas muy breves ($\Delta t \ll \tau$) seguidas por un relajamiento isocórico a equilibrio térmico en un tiempo $\sim \tau$. La aproximación es válida siempre que $\tau \ll \tau_e$, el tiempo de expansión.

$$= \left[\left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s - \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s \right] dn . \quad (\text{VI.12})$$

Ahora bien, es fácil demostrar, usando la primera ley de la Termodinámica, ecuación (II.1), y el hecho de que la derivación es una operación conmutativa, que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_n / (n^* k_B) . \quad (\text{VI.13})$$

Pero, usando una vez más la primera ley,

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_n = \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_n / (n k_B T) \quad (\text{VI.14})$$

con lo cual la ecuación (VI.13) se convierte en

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = T \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_n / n . \quad (\text{VI.15})$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación (VI.12) obtenemos, finalmente,

$$\Delta T = T \left[\left(\frac{\partial p_1}{\partial e_1} \right)_n - \left(\frac{\partial p_2}{\partial e_2} \right)_n \right] (dn/n) . \quad (\text{VI.16})$$

Antes de seguir adelante conviene notar que esta relación, junto con la condición (VI.10), es consistente con la hipótesis mencionada anteriormente de que

$$\Delta T \ll T.$$

(VI.17)

Dado que todo el proceso (1)+ (2) ocurre en un intervalo de tiempo $\sim \tau$, tenemos que

$$dn \sim \dot{n} \tau$$

(VI.18)

lo cual, junto con las ecuaciones (VI.8) y (VI.16), nos da para la tasa de creación de entropía por unidad de volumen

$$nk_B \dot{s} = I \tau \left[(\partial p_1 / \partial e_1)_n - (\partial p_2 / \partial e_2)_n \right]^2 (\dot{n}/n)^2. \quad (VI.19)$$

Comparando este resultado con la definición de la viscosidad volumétrica ζ (ec. II.41),

$$nk_B \dot{s} = (\zeta/T) (\dot{n}/n)^2, \quad (VI.20)$$

se sigue que

$$\zeta = IT \tau \left[(\partial p_1 / \partial e_1)_n - (\partial p_2 / \partial e_2)_n \right]^2, \quad (VI.21)$$

relación que, por medio de la ec. (VI.3), también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \zeta &= (Tc_T^2/I) \left[(\partial p_e / \partial e_e)_n - (\partial p_p / \partial e_e)_n \right]^2 = \\ &= Tc_T \tau \left[(\partial p_e / \partial e_e)_n - (\partial p_p / \partial e_e)_n \right]^2 . \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

Las ecuaciones (VI.21) y (VI.22) son las expresiones teóricas buscadas. En lo que sigue, las aplicaremos para obtener resultados numéricos en un par de casos específicos.

3) Gas de Jüttner y radiación

En esta sección calcularemos la 2ª viscosidad de una mezcla de electrones y fotones en expansión, suponiendo que interactúan solamente a través de dispersión Compton. Consideraremos exactamente el mismo sistema cuyo tiempo de relajamiento térmico fue calculado en la sección 2 del capítulo IV, sección a la cual referimos al lector para una descripción detallada del modelo y de sus límites de aplicabilidad, y cuya notación seguiremos.

De las ecuaciones (VI.22), (VI.4) y (IV.14) obtenemos la viscosidad volumétrica de la mezcla

$$\zeta = 4aT^4 \tau c_m / (c_m + 4aT^3) \left[1/3 - (\partial p_m / \partial e_m)_n \right]^2 , \quad (\text{VI.23})$$

donde el subíndice m se refiere a la materia (o sea, a los

electrones), y donde (ec. VI.3)

$$\tau = [4aT^3 c_m / (c_m + 4aT^3)] / I, \quad (\text{VI.24})$$

con I dado por la ecuación (IV.13). Además, hemos usado el hecho de que, para la radiación,

$$(\partial p_r / \partial e_r)_n = 1/3. \quad (\text{VI.25})$$

Es interesante comparar nuestro resultado con la expresión encontrada por Weinberg (1971)

$$\mathfrak{S}_w = 4aT^4 \tau [1/3 - (\partial p / \partial e)_n], \quad (\text{VI.26})$$

donde

$$p = p_m + aT^4/3 \quad (\text{VI.27})$$

y

$$e = e_m + aT^4 \quad (\text{VI.28})$$

son la presión total y la densidad de energía total del sistema, respectivamente. De las ecuaciones (IV.6), (VI.27) y (VI.28) es fácil demostrar que

$$(\partial p_m / \partial e_m)_n = 1/3 - (c_m + 4aT^3) / c_m [1/3 - (\partial p / \partial e)_n], \quad (\text{VI.29})$$

la cual, junto con la segunda ecuación de (VI.22) y la ec. (VI.26), nos da

$$\mathfrak{S} = (1 + 4aT^3 / c_m) \mathfrak{S}_w. \quad (\text{VI.30})$$

Obviamente, la fórmula de Weinberg es tan solo el caso particular en el que la materia domina.

En vista de que los cálculos numéricos de \mathfrak{C} y de $c_{\mathfrak{T}}$ ya fueron descritos en la sección 2 del capítulo IV, aquí nos limitamos a dar los resultados numéricos para \mathfrak{S} en la figura VI.2, donde hemos graficado los valores de $(\mathfrak{S} / nk_B T)$ en función del parámetro de temperatura ϕ . Conviene recordar que estos resultados se refieren únicamente al caso de densidades bariónicas $n < 10^{20}$ partículas/cm³. Para finalizar, es interesante notar que $(\mathfrak{S} / nk_B T)$ varía con la temperatura aproximadamente como ϕ^4 .

En la sección final del capítulo presentaremos una aplicación de estos resultados al Universo temprano.

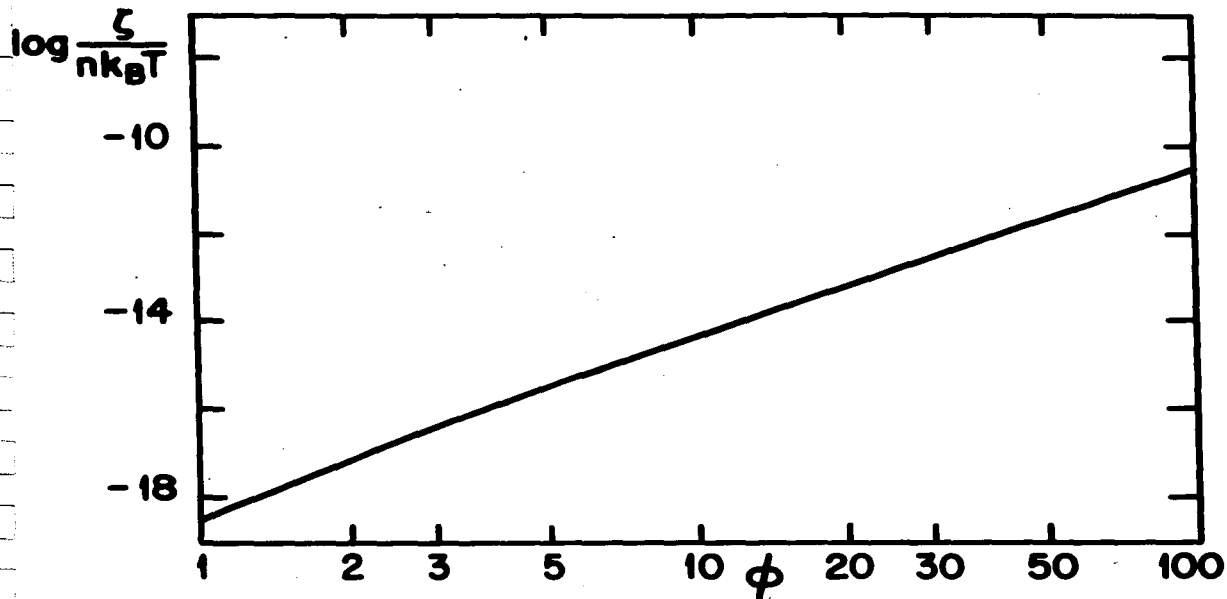


Fig. VI.2

Viscosidad volunétrica (en unidades de $nk_B T$) de una mezcla de electrones y radiación ligeramente fuera de equilibrio térmico, como función de ϕ .

4) Pares electrón-positrón y radiación

Consideremos ahora una mezcla de electrones, positrones y radiación en la cual los electrones y los positrones se encuentran en equilibrio termodinámico entre ellos, a una temperatura T , mientras que la radiación se encuentra a una temperatura ligeramente diferente $T + \Delta T$ con $\Delta T/T \ll 1$. Supongamos, además, que los pares y la radiación interactúan solamente a través de dispersión Compton y de la creación y aniquilación de los pares con el campo de radiación. Este sistema es exactamente el mismo que estudiamos en el capítulo V, al cual referimos al lector para una descripción más detallada del mismo así como de sus límites de aplicabilidad.

Como el sistema se comporta como una mezcla binaria (ver capítulo V), su viscosidad volumétrica está dada por la ecuación (VI.22),

$$\zeta = Tc_v \tau \left[1/3 - (\partial p_m / \partial e_m)_n \right] , \quad (\text{VI.31})$$

donde el subíndice 'm' significa 'materia', o sea, electrones y positrones, y donde τ , el tiempo de relajamiento térmico de la mezcla, está dado por (ec. V.6)

$$\tau^{-1} = \tau_c^{-1} + \tau_p^{-1} \quad (\text{VI.32})$$

con τ_c y τ_p definidos por la ec. (V.7). Usando la relación anterior, es fácil convencerse de que la ecuación (VI.31) se puede escribir como

$$\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}_c^{-1} + \mathfrak{S}_p^{-1} \quad (\text{VI.33})$$

donde \mathfrak{S}_c y \mathfrak{S}_p son las viscosidades volumétricas debidas a dispersión Compton y a creación y aniquilación de pares, respectivamente, y están dadas por ecuaciones idénticas a la (VI.31) con la única diferencia de que aparecen τ_c ó τ_p , según el caso, en lugar de τ .

El cálculo numérico de \mathfrak{S} no presenta mayor dificultad. Como τ , el tiempo de relajamiento de la mezcla, y c_p , su capacidad calorífica 'reducida', fueron calculados numéricamente en la sección 2 del capítulo anterior, sólo nos hace falta calcular $(\partial p / \partial e)_v$. Pero ni siquiera este cálculo es necesario, por lo siguiente: según se mencionó en el capítulo V, los cálculos numéricos los efectuaremos únicamente para el caso de pura radiación en el vacío (densidad bariónica = 0); se sigue que el potencial químico vale cero y que, en consecuencia, p y e son funciones solamente de la temperatura. Por lo tanto tendremos que

$$(\partial p / \partial e)_n = (dp / de) = v_s^2 / c^2 \quad , \quad (\text{VI.34})$$

donde v_s es la velocidad del sonido en la mezcla. Pero los valores de v_s fueron calculados, como funciones de la temperatura, en el capítulo III, de donde los tomaremos. Con todo lo anterior, el cálculo de \mathfrak{S} está completo. Los resultados para \mathfrak{S}_c , \mathfrak{S}_p y \mathfrak{S} , como funciones del parámetro de temperatura ϕ , se presentan en la figura VI.3. Es interesante notar que la viscosidad volunétrica total presenta un valor máximo en $\phi \sim 3$.

5) Creación de entropía

Como una aplicación sencilla e inmediata de los resultados anteriores, vamos a calcular, a continuación, la tasa con la cual los procesos que hemos visto debieron de producir entropía durante la expansión del Universo temprano. Usaremos el mismo modelo de Universo que en el capítulo IV, así que el valor de ϕ en un instante dado y la tasa de expansión en el mismo momento estarán dadas por (ecs. IV.20 y IV.21)

$$\phi = 0.39 \sqrt{t(\text{segs.})} \quad (\text{VI.35})$$

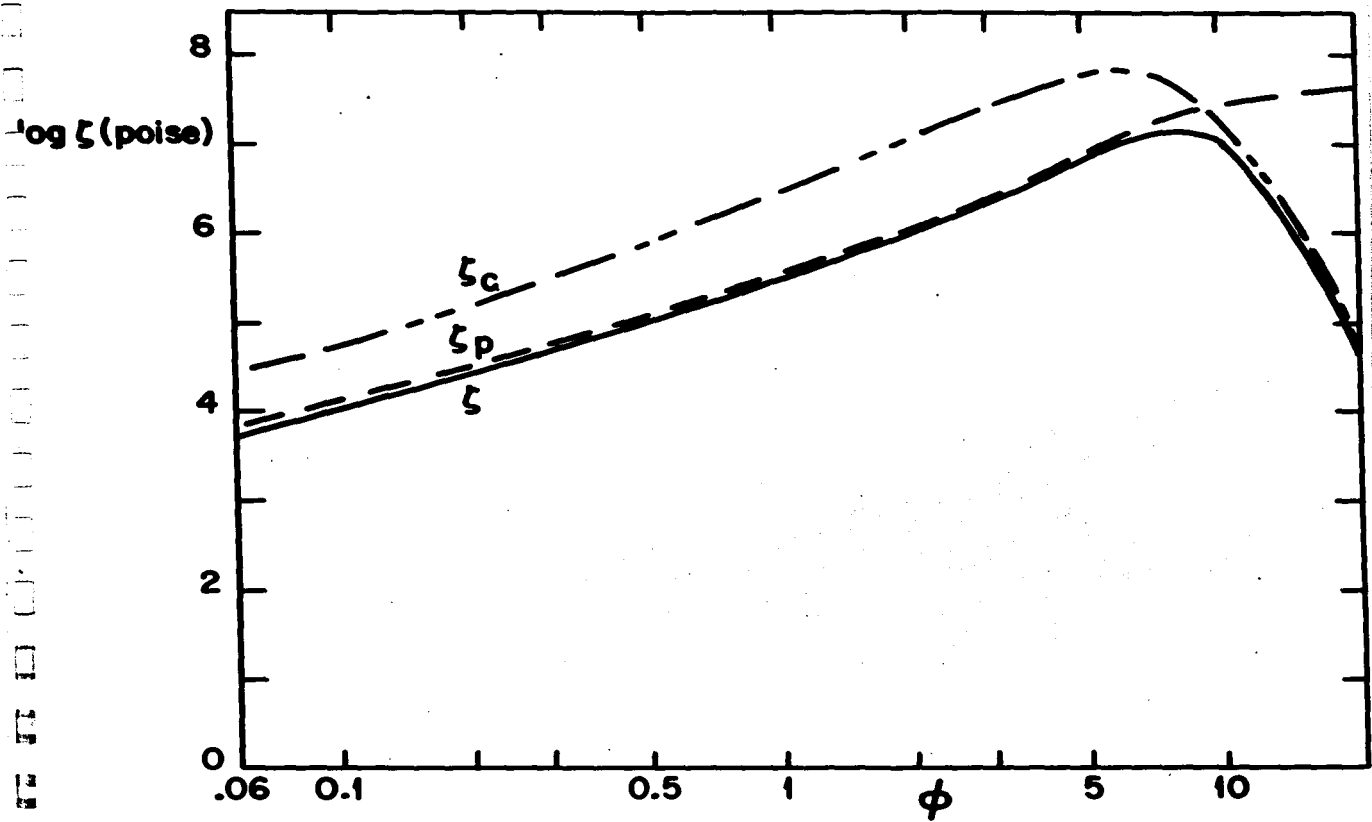


Fig. VI.3

Viscosidades volumétricas debidas a dispersión Compton (ζ_c), a creación y aniquilación de pares e^-e^+ (ζ_p) y a ambos procesos simultáneamente (ζ), para una mezcla de pares y radiación (a temperaturas ligeramente diferentes) como función de ϕ .

$$|n/\dot{n}| = 2t/3 \quad . \quad (VI.36)$$

Por medio de estas relaciones podemos escribir la ecuación (VI.20), que nos da la tasa de generación de entropía, como

$$\dot{s} = 5.2 \times 10^{-11} \phi^{-4} (\mathcal{S}/nk_b T) \quad (VI.37)$$

o bien como

$$n\dot{s} = 6.36 \times 10^4 \mathcal{S}/\phi^4 \quad . \quad (VI.38)$$

La primera relación da la tasa de generación de entropía adimensional por barión, y es más útil cuando se trabaja con el gas de Jüttner (sección 3), mientras que la segunda, que da la tasa de creación de entropía por unidad de volumen, es la que hay que usar cuando no se tienen bariones (el sistema estudiado en la sección 4).

Tomemos ahora $\phi = 1$, un valor que juzgamos representativo. De la figura VI.2 vemos que, para un gas de Jüttner a esta temperatura, $(\mathcal{S}/nk_b T) \sim 10^{-10}$ seg., con lo cual (de la ec. VI.37) $\dot{s} \sim 10^{-10}$ seg.⁻¹ Para saber si este número es (o no) importante, es necesario compararlo con el valor de s (en $\phi = 1$, obviamente). En principio tendríamos que sumar las ecuaciones (II.110) y (II.131) pero, como estamos en el caso en que la radiación domina por completo a la materia, es suficiente con la 2ª ecuación.

Suponiendo $n \sim 10^{10}$ partículas/cm³, que es el valor máximo permitido, obtenemos para s un valor mínimo de $s \sim 10^{11}$. Es evidente que este proceso no contribuyó a crear entropía en las fases tempranas del Universo.

Para el caso de los pares (tomando una vez más $\beta = 1$), vemos, de la figura VI.3, que $\zeta \sim 10^6$ poise, con lo cual la ec. (VI.38) nos da $n\dot{s} \sim 10^9$ (cm³ seg)⁻¹. Por otro lado, de las ecuaciones (II.2), (II.121), (II.122) y (II.131) se tiene que (en $\beta = 1$, desde luego) $n_s \sim 10^{31}$ cm⁻³. Se sigue que estos procesos tampoco fueron importantes en la producción de entropía en el Universo temprano. Es justo mencionar que este resultado ya había sido previsto por Weinberg (1971).

APENDICE A

Consideremos la distribución

$$f_- = \left\{ \exp[\beta(\cosh w - z)] + 1 \right\}^{-1} . \quad (\text{A.1})$$

Para bajas densidades bariónicas tendremos que $z < 1$; el argumento de la exponencial es necesariamente positivo y, por tanto, podemos expandir f_- en potencias de $\exp[-\beta(\cosh w - z)]$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} f_- &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \exp[-(k\beta)(\cosh w - z)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \exp(k\beta z) \exp(-k\beta \cosh w) . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sustituyendo en la expresión (III.20) y recordando que las funciones modificadas de Bessel se pueden escribir como (Abramowitz, 1968)

$$K_n(x) = \int_0^{\infty} \exp(-x \cosh t) \cosh(nt) dt \quad (\text{A.3})$$

encontramos, después de una integración por partes,

$$n_- = 8\pi(mc/h)^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \exp(l\phi z) K_2(l\phi)/(l\phi) . \quad (\text{A.4})$$

De manera totalmente análoga, sustituyendo (A.1) en (III.21) y (III.22) y utilizando la representación integral (Abramowitz, 1968)

$$K_n(x) = [x^n/(2n-1)!!] \int_0^{\infty} \exp(-x \cosh t) \sinh^n t dt , \quad (\text{A.5})$$

obtenemos

$$p_- = 8\pi mc^2 (mc/h)^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \exp(l\phi z) K_2(l\phi)/(l\phi)^2 , \quad (\text{A.6})$$

y

$$e_- = 8\pi mc^2 (mc/h)^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \exp(l\phi z) K_2(l\phi)/(l\phi)^2 x \\ \times [(l\phi)G(l\phi) - 1] , \quad (\text{A.7})$$

donde hemos utilizado la conocida relación de recurrencia

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + (2n/x) K_n(x) \quad (\text{A.8})$$

y hemos definido

$$G(x) = K_3(x)/K_2(x) . \quad (A.9)$$

Es evidente que si en todo lo anterior hubiéramos usado f_+ (positrones) en lugar de f_- , habríamos encontrado (para n_+ , p_+ y e_+) expresiones esencialmente idénticas a las anteriores, con la única diferencia de que, en lugar de z , tendríamos $-z$. Por lo tanto, el exceso de electrones sobre positrones - que, si suponemos neutralidad de carga, debe ser igual a la densidad numérica de bariones - está dado por:

$$\begin{aligned} n &= n_- - n_+ = \\ &= 16\pi(mc/h)^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \sinh(l\phi z) K_2(l\phi) / (l\phi) . \quad (A.10) \end{aligned}$$

De la misma manera, la presión y la energía totales de electrones y positrones son:

$$\begin{aligned} P_- + P_+ &= \\ &= 16\pi mc^2 (mc/h)^3 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cosh(l\phi z) K_2(l\phi) / (l\phi)^2 \quad (A.11) \end{aligned}$$

y

$$e_- + e_+ =$$

$$\begin{aligned}
&= 16\pi mc^2 (mc/h)^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \cosh(l\phi z) K_2(l\phi) \times \\
&\times \left[(l\phi)G(l\phi) - 1 \right] / (l\phi)^2 . \qquad (A.12)
\end{aligned}$$

En la práctica, las sumas se calcularon por medio de aproximaciones polinomiales para las funciones modificadas de Bessel cuya precisión es de una parte en 10^3 (Abramowitz, 1968). La convergencia es, por lo general, muy rápida; en el caso menos favorable ($\phi = .5$) fueron necesarios 100 términos para obtener una precisión de una parte en 10^3 .

Es interesante notar que el término $l=1$ de las series corresponde al caso del gas de Jüttner-Synge; los términos desde $l=2$ en adelante son, por tanto, las correcciones cuánticas. Nótese también que, aún en el caso de pura radiación en el vacío ($z=0$; no hay bariones), el número de pares es tan elevado, cuando $\phi \sim 1$, que los efectos cuánticos no pueden despreciarse.

APENDICE B

En este apéndice describiremos las técnicas usadas para evaluar la integral de colisión I, dada por la ecuación (IV.5). El procedimiento es muy largo, así que lo presentaremos subdividido.

1) Integración en el sistema centro de momento

Para simplificar la integral usaremos el procedimiento descrito en el capítulo XIII de de Groot et al. (1980). Comenzamos por definir nuevas variables por las relaciones

$$P' = p' + k' \quad (\text{B.1})$$

$$Q' = \Delta^{\mu\nu}(p_\nu - k_\nu) \quad (\text{B.2})$$

donde

$$\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - P^\mu P^\nu / P^2 \quad (\text{B.3})$$

es el proyector ortogonal a P. El sentido físico de estas variables es más o menos claro. P es simplemente el cuadrinomento total (que se conserva en la colisión) y Q está relacionada con el cuadrinomento relativo. La transformación inversa a (B.1) y (B.2) es

$$P'^\mu = [(1+\alpha)P^\mu + Q^\mu] / 2 \quad (\text{B.4})$$

$$K'^\mu = [(1-\alpha)P^\mu - Q^\mu] / 2, \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\alpha = m^2 c^2 / P^2. \quad (\text{B.6})$$

Para las variables primadas se encuentran relaciones similares.

La transformación de las diferenciales resulta ser (el lector interesado en los detalles puede consultar la referencia ya mencionada)

$$d\Gamma_P d\Gamma_Q = d^4P d^4Q \delta(P=Q) \delta[Q^2 + m^2 c^2 (1-\alpha)^2 / \alpha] \times \\ \times \Theta(P^0) \Theta(P^0 - m^2 c^2), \quad (\text{B.7})$$

donde Θ es la función escalón de Heaviside. Para las variables primadas se obtienen, una vez más, relaciones semejantes.

Sustituyendo las relaciones anteriores, y sus contrapartes primadas, en la expresión para I obtenemos, después de una integración trivial sobre P',

$$I = (3m^2 c^2 f_0 \sigma_T) / (16\pi k_0 T^2 h^4) \int d^4 P \exp(-\beta P \cdot U) (I') \quad (B.8)$$

donde la integral sobre los cuadrimentos relativos I' está dada por

$$I' = \int d^4 Q d^4 Q' \delta(P \cdot Q) \delta(P \cdot Q') \delta[Q^2 + m^2 c^2 (1 - \alpha)^2 / \mu] \times \\ \times \delta[Q'^2 + m^2 c^2 (1 - \alpha)^2 / \mu] \hat{N} \hat{N}' g(\alpha, \gamma) \times \\ \times [(Q - Q') \cdot U] \{ [Q + (1 - \alpha)P] \cdot U \}, \quad (B.9)$$

y donde las funciones Θ de Heaviside deben de tomarse en cuenta en la integración sobre P. Es fácil convencerse, mediante un simple argumento de simetría, de que la contribución a la integral del factor (P·U) es idénticamente cero.

A continuación evaluaremos I' en el sistema centro de momento. Entonces $P^\mu = (P, \underline{Q})$, $Q^\mu = (0, \underline{Q})$ y $Q'^\mu = (0, \underline{Q}')$. Expresando las componentes espaciales de Q^μ en coordenadas esféricas tenemos que

$$d^4Q = dQ^0 |Q|^{-1} d|Q| d\Omega_q, \quad (B.10)$$

y podemos integrar sobre Q^0 , Q'^0 , $|Q|$ y $|Q'|$ por medio de las funciones delta. Usando la relación

$$\int \delta[f(x)] dx = |f'(x_0)|^{-1} \int \delta(x-x_0) dx, \quad (B.11)$$

donde $f'(x) = df(x)/dx$ y $f(x_0) = 0$, obtenemos

$$I' = [(1-\alpha)^2/4] \int d\Omega_a d\Omega_q \hat{n}\hat{n}' g(\alpha, \gamma) \times \\ \times [(Q-Q') \cdot \underline{U}] (Q \cdot \underline{U}), \quad (B.12)$$

donde \underline{U} es la 'tri-velocidad' asociada a U^\wedge y donde el integrando debe ahora de evaluarse para

$$Q^0 = Q'^0 = 0,$$

y

$$|Q| = |Q'| = mc [(1-\alpha)/\sqrt{\alpha}]. \quad (B.13)$$

Tomemos ahora el eje z a lo largo de \underline{U} , de tal manera que $U^\wedge = (U^0, 0, 0, U^3)$. Las componentes U^0 y U^3 pueden escribirse covariantemente como

$$(U^0)^2 = (P \cdot U)^2 / P^2$$

$$(U^2)^2 = (U^0)^2 - c^2, \quad (\text{B.14})$$

que son relaciones que usaremos más adelante.

La diferencial de ángulo sólido puede escribirse como $d\Omega_q = dx d^4$ donde $x = \cos \theta$ (con una relación idéntica para las variables primadas) y , como

$$Q \cdot U = mcU^2 \left[(1-\alpha) / \sqrt{\alpha} \right] x, \quad (\text{B.15})$$

¡ nos queda

$$I' = \left[m^2 c^2 (U^2)^2 (1-\alpha)^4 / (4\alpha) \right] \int dx dx' d^4 d^4 y' \\ \hat{N} \hat{N}' x(x-x') g(\alpha, y). \quad (\text{B.16})$$

Ahora bien, el factor \hat{N} puede escribirse como

$$\hat{N} = 1+N = (1-E)^{-1}, \quad (\text{B.17})$$

donde

$$E = \exp(-a-bx) \quad (\text{B.18})$$

con

$$a = (\delta/2c) [(1-\alpha)/\sqrt{\alpha}] U^*$$

$$b = aU^*/U^* , \quad (B.19)$$

y el factor \hat{N}' se puede escribir de manera totalmente análoga con N' , E' y x' en lugar de N , E , y x . Como vemos, solamente $g(\alpha, y)$ depende de los ángulos azimutales Ψ y Ψ' , ya que, obviamente,

$$y = xx' + \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x'^2} \cos(\Psi - \Psi') . \quad (B.20)$$

La integral sobre Ψ y Ψ' puede evaluarse de la siguiente manera: expandamos $g(\alpha, y)$ en términos de polinomios de Legendre de argumento y , esto es,

$$g(\alpha, y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\alpha) P_n(y) , \quad (B.21)$$

donde $P_n(y)$ es el polinomio de Legendre de orden n y donde $g_n(\alpha)$ está dado por

$$g_n(\alpha) = [(2n+1)/2] \int_{-1}^1 g(\alpha, y) P_n(y) dy. \quad (B.22)$$

Entonces, usando el teorema de la adición para los armónicos esféricos, que en nuestro caso puede escribirse como

$$\int_0^{2\pi} d\varphi d\varphi' P_n(y) = 4\pi^2 P_n(x)P_n(x'), \quad (\text{B.23})$$

obtenemos

$$I' = [\pi^2 a^2 c^2 (U^2)]^2 (1-\alpha)^N / \alpha \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\alpha) J_n(a,b), \quad (\text{B.24})$$

donde hemos definido

$$J_n(a,b) \equiv \int x(x-x') P_n(x) P_n(x') dx dx' / (1-E)(1-E'). \quad (\text{B.25})$$

Las evaluaciones de $g_n(\alpha)$ y de $J_n(a,b)$ se describen en las secciones 3 y 4 de este apéndice.

2) Integración en el sistema 'en reposo'

Regresemos ahora a la integral sobre $P^{\wedge} = (P^{\circ}, \underline{P})$, la cual evaluaremos en el sistema 'en reposo', donde $U^{\wedge} = (c, \underline{0})$. Usando coordenadas esféricas para \underline{P} las integraciones angulares se trivializan, dando tan sólo un factor de 4π . Para integrar sobre P° y \underline{P} definimos las nuevas variables v y w por las relaciones

$$P^0 = mcv \cosh w \quad (B.26)$$

$$|\underline{P}| = mcv \sinh w, \quad (B.27)$$

donde v y w varían de 1 a infinito y de 0 a infinito, respectivamente, debido a las funciones Θ . El Jacobiano de la transformación es

$$|\partial(P^0, |\underline{P}|) / \partial(v, w)| = m^2 c^2 v \quad (B.28)$$

y, de las ecuaciones (B.14),

$$(U^0)^2 = c^2 \cosh^2 w$$

$$(U^2)^2 = c^2 \sinh^2 w. \quad (B.29)$$

Además, de las ecuaciones (IV.11) y (B.19),

$$\alpha = 1/v^2 \quad (B.30)$$

y

$$a = (\beta/2) \cosh w (v^2 - 1)/v,$$

$$b = a \operatorname{tanh} w . \quad (\text{B.31})$$

Sustituyendo todo lo anterior en (B.8) y usando el valor de f_0 dado por (II.112), obtenemos finalmente

$$I = \left[3n\pi\sigma_T c \phi^2 m^2 c^2 k_B / 32h^2 K_2(\phi) \right] \sum_{n=0}^{\infty} I_n, \quad (\text{B.32})$$

donde

$$I_n = \int dv dw \left[(v^2 - 1)^n / v^2 \right] \operatorname{senh}^n w \exp(-\beta v \cosh w) g_n J_n. \quad (\text{B.33})$$

3) Cálculo de $g_n(\alpha)$

Para calcular la integral (B.21) comenzamos por definir la nueva variable

$$u = (1+\alpha)/(1-\alpha) . \quad (\text{B.34})$$

Con esto la ecuación (IV.12) se convierte en

$$g(\alpha, y) = g(u, y) = 1 + (1-y)^2 / (u+1)(u+y) + \\ + (1+uy)^2 / (u+y)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= y/(u+1) + u/(u+1) + u^2 - 1 + \\
&+ (u+1)(1+2u-2u^2)/(u+y) + (u^2-1)^2/(u+y)^2 . \quad (B.35)
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (B.22):

$$\begin{aligned}
g_n(u) = & [(2n+1)/2] \left\{ [1/(u+1)] \int_0^1 y P_n(y) dy + \right. \\
& + [u/(u+1) + u^2 - 1] \int_0^1 P_n(y) dy + \\
& + (u+1)(1+2u-2u^2) \int_0^1 P_n(y) dy / (u+y) + \\
& \left. + (u^2-1)^2 \int_0^1 P_n(y) dy / (u+y)^2 \right\} . \quad (B.36)
\end{aligned}$$

Las primeras dos integrales son inmediatas y las dos últimas pueden expresarse analíticamente en términos de las funciones de Legendre del segundo tipo $Q_n(u)$ definidas como (Abramowitz y Stegun, 1968)

$$Q_n(u) = [(-1)^n / 2] \int_0^1 P_n(y) dy / (u+y) . \quad (B.37)$$

De la definición y de relaciones de recurrencia bien conocidas se sigue que

$$\int_{-1}^1 P_n(y) dy / (u+y) = 2(-1)^n Q_n(u) \quad (\text{B.38})$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(y) dy / (u+y)^2 &= -2(-1)^n (dQ_n/du) = \\ &= -2(-1)^n [n/(u^2-1)] [uQ_n(u) - Q_{n-1}(u)] . \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Sustituyendo estas relaciones en (B.37) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} g_n(u) &= [u/(u+1) + 2(u^2-1)] \delta_{n0} + \delta_{n1}/(u+1) \\ &+ (-1)^n (2n+1)(u+1) \{ [1-(n+2)u(u-1)] Q_n(u) + \\ &+ n(u-1) Q_{n-1}(u) \} . \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

4) Cálculo de $J_n(a, b)$

Para evaluar $J_n(a, b)$ comenzamos por definir la integral auxiliar S_n por

$$S_n = (1/2) \int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx / (1-E) . \quad (\text{B.41})$$

De esta definición y de la definición de $J_n(a,b)$, ec. (B.25), se sigue que

$$J_n(a,b) = 4(S_n S_1 - S_1^2) . \quad (B.42)$$

Ahora bien, es un hecho conocido que los productos $x^n P_n(x)$ y $x P_n(x)$ pueden expresarse en términos de combinaciones lineales de polinomios de Legendre $P_l(x)$ con $l = n-2, n-1, \dots, n+1, n+2$. Por lo tanto, para calcular S_n basta con considerar la integral

$$\begin{aligned} A_n &= (1/2) \int_{-1}^1 P_n(x) dx / (1-E) = \\ &= (1/2) \int_{-1}^1 P_n(x) dx + (1/2) \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-1}^1 E^j P_n(x) dx = \\ &= (1/2) \int_{-1}^1 P_n(x) dx + \\ &+ (1/2) \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-aj) \int_{-1}^1 \exp(-bjx) P_n(x) dx , \quad (B.43) \end{aligned}$$

donde hemos escrito explícitamente el término $j = 0$ para evitar complicaciones que aparecen debido a aparentes divisiones entre cero. La última integral es, esencialmente, una función esférica modificada de Bessel, ya que estas últimas se definen como (Abramowitz, 1968)

$$i_n(s) = [(-1)^n / 2] \int_{-1}^1 \exp(-sx) P_n(x) dx , \quad (B.44)$$

con lo cual A_2 se convierte, finalmente, en

$$A_2 = \delta_{20} + (-1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-aj) i_2(bj) . \quad (B.45)$$

Usando todo lo anterior, y la relación de recurrencia para las funciones $i_2(s)$

$$i_{2-1}(s) = [(2l+1)/s] i_2(s) + i_{2+1}(s) , \quad (B.46)$$

obtenemos, después de un álgebra muy larga y tediosa, pero directa,

$$S_0 = \delta_{n0} + \sum_{j=1}^{\infty} i_n(bj) \exp(-aj) ,$$

$$S_1 = \delta_{n1}/3 + \sum_{j=1}^{\infty} [ni_n(bj)/(bj) + i_{n+1}(bj)] \exp(-aj) ,$$

$$S_2 = \delta_{n2}/3 + 2\delta_{n1}/15 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ [1+n(n-1)/(bj)^2] i_n(bj) - \right. \\ \left. - (2/bj) i_{n+1}(bj) \right\} \exp(-aj) . \quad (B.47)$$

Con estas relaciones, el cálculo de $J_n(a,b)$ está completo.

APENDICE C

En este apéndice demostraremos que el resultado que obtuvimos para la integral I en el apéndice B, ec. (B.32), se reduce en el límite no-relativista, esto es, cuando $\beta \rightarrow \infty$, al resultado analítico encontrado por Weymann (1965) que, en nuestra notación, se escribe como

$$I_w = 4n\sigma_r c a T^4 (k_0/mc^2). \quad (C.1)$$

Para ello consideremos el comportamiento del integrando en la ecuación (B.33) cuando β se hace muy grande. Es evidente que, debido al factor exponencial, la contribución a la integral cuando v y w difieren apreciablemente de sus valores mínimos posibles, se vuelve totalmente despreciable; en otras palabras, el integrando es importante sólo cuando $v \rightarrow 1$ y $w \rightarrow 0$. Haciendo $v = 1 + z$, la ecuación (B.33) se convierte, al menor orden posible en z y w , en

$$I_n = 16 \exp(-\beta) \int_0^\infty dz z^4 \exp(-\beta z) \dots$$

$$\int_0^{\infty} dw w^4 \exp[-(\beta w^2/2)] g_n J_n(a, b), \quad (C.2)$$

donde, desde luego, g_n y J_n deben de ser evaluados con la misma precisión. De la ecuación (IV.12) encontramos, notando que $\alpha = 1/v^2 \rightarrow 1$,

$$g(\alpha \rightarrow 1, y) = 1 + y^2, \quad (C.3)$$

que es la bien conocida sección diferencial de Thomson. Por lo tanto, de (B.22),

$$g_n = (4/3)\delta_{n0} + (2/3)\delta_{n2}, \quad (C.4)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

En cuanto a $J_n(a, b)$, es evidente que, en la presente aproximación, $a = \beta z$ y $b = 0$, con lo cual la ecuación (B.25) se convierte en

$$\begin{aligned} J_n &= [1 - \exp(-\beta z)]^{-1} \int_{-1}^1 x(x-x') P_n(x) P_n(x') dx dx' = \\ &= [1 - \exp(-\beta z)]^{-1} (4\delta_{n0}/3 - 4\delta_{n2}/9). \end{aligned} \quad (C.5)$$

Evidentemente sólo el término $n = 0$ contribuye en la suma (B.32), y la ecuación (B.33) se reduce finalmente a

$$I_0 = [256 \exp(-\phi)/9] \int_0^{\infty} z^4 \exp(-\phi z) dz / [1 - \exp(-\phi z)]^2$$

$$\int_0^{\infty} w^4 \exp(-\phi w^2/2) dw . \quad (C.6)$$

Las integrales precedentes se encuentran en cualquier tabla de integrales y dan

$$\int_0^{\infty} z^4 \exp(-\phi z) dz / [1 - \exp(-\phi z)]^2 = 4\pi^4 / (15\phi^5) \quad (C.7)$$

y

$$\int_0^{\infty} w^4 \exp(-\phi w^2/2) dw = 3(\pi/2)^{1/2} \phi^{-5/2} . \quad (C.8)$$

Además, para valores grandes del argumento,

$$K_2(\phi \rightarrow \infty) = (\pi/2\phi)^{1/2} \exp(-\phi) , \quad (C.9)$$

mientras que a , la constante de la radiación, es simplemente

$$a = 8k_0^4 \pi^5 / (15h^3 c^3) \quad (C.10)$$

(no confundirla con la a definida en (B.31)). Sustituyendo todo lo anterior en (C.5) obtenemos la relación (C.1), que es lo que queríamos demostrar.

APENDICE D

Para reducir las integrales que aparecen en las ecuaciones (V.8) y (V.9) a series de integrales cuádruples aplicaremos exactamente el mismo procedimiento que se usó en el apéndice B para reducir la integral (IV.5).

1) Reducción de I_c .

Consideremos primero la reducción de I_c . Para ello, comenzamos por definir nuevas variables P , Q , P' , Q' , por medio de las ecuaciones (B.1) - (B.7). Sustituyendo en la ecuación V.8 e integrando sobre P' por medio de la función delta tetradimensional obtenemos

$$I_c = (2c/k_B T^2 h^4) \int d^4 P \exp(-\beta P \cdot U) P^2 (I_a') \quad (D.1)$$

donde

$$I_c' = \int d^4Q d^4Q' [(1+\alpha_c)P \cdot U + Q \cdot U] [(Q - Q') \cdot U] \delta(P \cdot Q) \delta(P \cdot Q')$$

$$\times \delta[Q^2 + m^2 c^2 (1 - \alpha_c)^2 / \alpha_c] \delta[Q'^2 + m^2 c^2 (1 - \alpha_c)^2 / \alpha_c]$$

$$\times \sigma_c \hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}' , \quad (D.2)$$

con α_c dado por (V.14) ó por (B.6). I_c' se puede calcular en el sistema 'centro de momento' (CM), en el cual $P = (P, \underline{Q})$, $Q = (0, \underline{Q})$ y $Q' = (0, \underline{Q}')$. Expresando $d\underline{Q}$ y $d\underline{Q}'$ en coordenadas esféricas, tomando el eje z a lo largo de \underline{U} (la parte espacial de la cuadrivelocidad hidrodinámica) e integrando sobre Q^0 , Q'^0 , \underline{Q} y \underline{Q}' por medio de las funciones delta, la ecuación anterior se reduce a (ver ecuaciones B.10, B.11 y B.14)

$$I_c' = [\alpha_c^2 / 4m^2 c^4 (1 - \alpha_c)^2] \int d\Omega_Q d\Omega_{Q'} [(1 + \alpha_c) P U^0 - |\underline{Q}| U^3 \cos \theta]$$

$$\times |\underline{Q}| U^3 (\cos \theta' - \cos \theta) \sigma_c \hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}' , \quad (D.3)$$

donde

$$|\underline{Q}|^2 = m^2 c^2 (1 - \alpha_c)^2 / \alpha_c . \quad (D.4)$$

Como σ_c , la sección de Klein-Nishina, es simétrica en los ángulos θ y θ' , y también en ψ y ψ' , y como lo mismo ocurre con el producto de las funciones de distribución ($\hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}'$), una

elemental consideración de simetría nos indica que el término PU^0 no contribuye a la integral. Si ahora sustituimos σ_c por medio de la ecuación V.12 y llamamos $x = \cos \theta$ y $x' = \cos \theta'$, de tal manera que $d\Omega_c = dx d\psi$ y $d\Omega_{c'} = dx' d\psi'$, llegamos a

$$I_c' = (3\alpha_c^2 \sigma_T / 64\pi m^2 c^2) \int x(x - x') \hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}' dx dx' \int g_c(\alpha_c, y) d\psi d\psi' \quad (D.5)$$

donde 'y' está dada por la ecuación (B.20).

Para integrar sobre ψ y ψ' expandemos $g_c(\alpha_c, y)$ en polinomios de Legendre como

$$g_c(\alpha_c, y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{cn}(\alpha_c) P_n(y) \quad (D.6)$$

donde

$$g_{cn}(\alpha_c) = [(2n+1)/2] \int_{-1}^1 g_c(\alpha_c, y) P_n(y) dy \quad (D.7)$$

Aplicando el teorema de la suma para polinomios de Legendre, ecuación B.23,

$$I_c' = (3\pi \alpha_c^2 \sigma_T / 16\pi m^2 c^2) \sum_{n=0}^{\infty} g_{cn}(\alpha_c) \int_{-1}^1 x(x - x') P_n(x) P_n(x') \hat{f} \hat{f}' \hat{N} \hat{N}' \quad (D.8)$$

Sustituyendo esta relación en (D.1) y haciendo el mismo cambio de variables que hicimos en el inciso 2 del apéndice B (ecs. B.26 y B.27), obtenemos, finalmente

$$I_{cn} = (3\pi^2 \sigma_T c k_B / 8) (mc/h)^3 \phi^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{cn} , \quad (D.9)$$

donde

$$I_{cn} = \int_0^{\infty} dv (v^2 - 1)^{-1/2} v^{-3} g_{cn} \int_0^{\infty} dw \sinh^4 w H_{cn}(A, B, C) , \quad (D.10)$$

con A, B y C dados por

$$A = \phi v \cosh w / 2 \quad (D.11)$$

$$B = A / v^2 \quad (D.12)$$

$$C = (A - B) \tanh w , \quad (D.13)$$

y donde hemos definido

$$H_{cn}(A, B, C) = S_{c1} S_{c0} - S_{c1}^2 \quad (D.14)$$

con

$$S_{cm} = \int_{-1}^1 dx x^m P_m(x) / [\sinh A - \sinh(B - Cx)] . \quad (D.15)$$

Los coeficientes de la expansión de la sección de Klein-Nishina,

$$g_{cn}(\alpha_c) = [(2n+1)/2] \int_{-1}^1 g_c(\alpha_c, y) P_n(y) dy, \quad (D.16)$$

fueron calculados en el apéndice B y están dados por la ecuación (B.40), siendo la única diferencia que la variable α que usamos en el mencionado apéndice corresponde ahora a α_c , dada por

$$\alpha_c = 1/v^2. \quad (D.17)$$

2) Reducción de I_φ .

Para reducir I_φ , comenzamos por definir nuevas variables P , Q , P' , Q' por las relaciones

$$P = p_- + p_+, \quad (D.18)$$

$$Q = p_- - p_+, \quad (D.19)$$

$$P' = k_1 + k_2, \quad (D.20)$$

y

$$Q' = k_1 - k_2 \quad . \quad (D.21)$$

En este caso, las transformaciones de los elementos del espacio de momentos son

$$d\Gamma_1 d\Gamma_2 = d^4 P d^4 Q \delta(P=Q) \delta(Q^2 + P^2/\alpha_\varphi^2) \Theta(P^0 - 2mc) \quad (D.22)$$

y

$$d\Gamma_1 d\Gamma_2 = d^4 P' d^4 Q' \delta(P'=Q') \delta(Q'^2 + P'^2) \Theta(P'^0) \quad , \quad (D.23)$$

donde Θ es la función escalón y α_φ está dada por la ecuación (V.15). Sustituyendo en (V.9) e integrando sobre P'

$$I_\varphi = (2c/k_\varphi T^3 h^6) \int d^4 P P^2 \exp(-\beta P \cdot U) (I_\varphi') \quad , \quad (D.24)$$

donde

$$I_\varphi' = \int d^4 Q d^4 Q' \delta(P=Q) \delta(P=Q') \delta(Q^2 + P^2/\alpha_\varphi^2) \delta(Q'^2 + P^2) \\ (P \cdot U)^2 \sigma_\varphi \hat{f}_+ \hat{f}_+ \hat{N}_1 \hat{N}_2 \quad , \quad (D.25)$$

sobreentendiéndose que, al integrar sobre P^0 , hay que tomar en cuenta a las funciones Θ de Heaviside. Igual que en los casos anteriores, evaluamos I_φ' en el sistema CM, integrando sobre Q^0 ,

Q'' , Q y Q' por medio de las funciones delta, después de expresar Q y Q' en coordenadas esféricas y tomando el eje z a lo largo de \underline{U} . Obtenemos así

$$I_{\varphi'} = [(P \cdot U)^2 / 4 \alpha_{\varphi'}] \int d\Omega_{\varphi} d\Omega_{\varphi'} \sigma_{\varphi} \hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{N}_1 \hat{N}_2 . \quad (D.26)$$

Desarrollando $\sigma_{\varphi}(\alpha_{\varphi}, y)$, dada por la ecuación (V.13), en polinomios de Legendre, e integrando sobre φ y φ' por medio del teorema de la suma (ec. V.23), llegamos a

$$I_{\varphi'} = (3\pi \sigma_{\varphi} / 16) (P \cdot U)^2 [(\alpha_{\varphi'}^2 - 1) / \alpha_{\varphi'}^2] \sum_{n=0}^{\infty} g_{\varphi n}(\alpha_{\varphi'}) \int dx dx' P_n(x) P_n(x') \hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{N}_1 \hat{N}_2 , \quad (D.27)$$

donde $x = \cos \theta$, $x' = \cos \theta'$ y

$$g_{\varphi n}(\alpha_{\varphi'}) = [(2n+1)/2] \int_{-1}^1 g_{\varphi}(\alpha_{\varphi'}, y) P_n(y) dy , \quad (D.28)$$

con $g_{\varphi}(\alpha_{\varphi'}, y)$ y y dados por las ecuaciones (V.16) y (B.20), respectivamente.

Sustituyendo en (D.24) e integrando sobre P con el cambio de variables

$$P^0 = 2mcv \cosh v , \quad (D.29)$$

$$|\underline{P}| = 2mcv \operatorname{senh} w , \quad (\text{D.30})$$

cuyo jacobiano es

$$|\partial(P^0, |\underline{P}|) / \partial(v, w)| = 4m^2 c^2 v , \quad (\text{D.31})$$

obtenemos finalmente

$$I_{\varphi} = 384\pi^2 \sigma_T c k_0 (mc/h)^6 \beta^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_{\varphi n} , \quad (\text{D.32})$$

donde

$$I_{\varphi n} = \int_1^{\infty} dv v^5 g_{\varphi n} \int_0^{\infty} dw \operatorname{senh}^2 w \cosh^2 w H_{\varphi n}(a, b, d) , \quad (\text{D.33})$$

con a, b y d dados por

$$a = \beta v \cosh w \quad (\text{D.34})$$

$$b = \beta \sqrt{v^2 - 1} \operatorname{senh} w \quad (\text{D.35})$$

$$d = a \operatorname{tanh} w , \quad (\text{D.36})$$

y donde hemos definido

$$H_{\varphi n}(a, b, d) = S_{\varphi+} S_{\varphi-} \quad (D.37)$$

con

$$S_{\varphi+} = \int_0^1 dx P_n(x) / [\cosh a + \cosh(bx)] \quad (D.38)$$

$$S_{\varphi-} = \int_0^1 dx P_n(x) / [\cosh a - \cosh(dx)]. \quad (D.39)$$

Los coeficientes $g_{\varphi n}$ están dados por una expresión prácticamente idéntica a la ec. (D.16). Sin embargo, en este caso es fácil darse cuenta de que sobreviven solamente los términos con n par, puesto que los polinomios de Legendre tienen paridad n y la sección depende solamente de y^2 - ver ec. (V.17) -. El resultado es

$$g_{\varphi n} = [(4n+1)/2] \left\{ [2(1-n)\alpha_{\varphi}^n + (2n+1)\alpha_{\varphi}^2 - 1] Q_{2n}(\alpha_{\varphi}) / \alpha_{\varphi}^2 + (2n+1)(\alpha_{\varphi}^2 - 1) Q_{2n+1}(\alpha_{\varphi}) / \alpha_{\varphi}^2 - \delta_{n0} \right\}, \quad (D.40)$$

donde $Q_n(x)$ son las funciones de Legendre del segundo tipo, que están definidas en la ecuación (B.37).

REFERENCIAS

- Abramowicz, M.A., Calvani, M. y Nobili, L. 1980, Ap.J., 242, 772.
- Abramowitz, M. y Stegun, I.A. 1968, "Handbook of mathematical functions" (Dover, New York).
- Begelman, M.C. 1985, en "Astrophysics of active galaxies and QSO's", ed. J.S. Miller (University Science Books, Mill Valley, Cal.), p. 411.
- Begelman, M.C., Blandford, R.D. y Rees, M.J. 1984, Rev. Mod. Phys., 56, 255.
- Berestetskii, V.B., Lifshitz, E.M. y Pitaevskii, L.P. 1971, "Relativistic quantum theory; part I" (Pergamon, Oxford), cap. X.
- Berry, M.V. 1976, "Principles of cosmology and gravitation" (Cambridge Univ. Press, London), p. 145.
- Bisnovatyi-Kogan, G.S. y Kashdan, Y.M. 1966, Astr. Zh., 43, 871 (Sov. Astr., 10, 604; 1967).
- Bridle, A.H. y Perley, R.A. 1984, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 22, 319.
- Chiu, H.Y. 1968, "Stellar Physics" (Blaisdell, Waltham, Mass.).

- Clarke, J.F. y McChesney, M. 1976, "Dynamics of relaxing gases" (Butterworth & Co. Ltd, London), pp. 10, 39 y 90.
- Cooper, G. 1971, Phys. Rev. D, 3, 2312.
- Corman, E.G. 1970, Phys. Rev. D, 1, 2734.
- Courant, R. y Friedrichs, K.O. 1948, "Supersonic flow and shock waves" (Interscience, New York), p. 23.
- de Groot, S.R. 1974, Rev. Mex. de Fis., 23, 405.
- de Groot, S.R., van Leeuwen, W.A. y van Weert, Ch. G. 1980, "Relativistic kinetic theory" (North-Holland, Amsterdam).
- Eckart, C. 1940, Phys. Rev., 58, 267.
- Eckart, C. 1940, Phys. Rev., 58, 269.
- Eckart, C. 1940, Phys. Rev., 58, 919.
- Ehlers, J. 1961, Akad. Wiss. Lit. Mainz, Akh. Math.-Naturw. Kl., 11, 1.
- Ehlers, J. 1971, en "General relativity and cosmology" (Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", course 47), ed. R. K. Sachs (Academic Press, New York), p. 1.
- Einstein, A. 1907, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik, 4, 411.
- Frank, J., King, A.R. y Raine, D.J. 1985, "Accretion power in astrophysics" (Cambridge Univ. Press, New York).
- Herrera, M.A. 1986, Phys. Fluids, 29, 460.
- Herrera, M.A. y Hacyan, S. 1983, Phys. Fluids, 26, 1446.
- Herrera, M.A. y Hacyan, S. 1985, Phys. Fluids, 28, 3253.
- Imshennik, V.S. y Nadezhin, D.K. 1965, Astr. Zh., 42, 1154 (Sov. Astr., 9, 896; 1966).

- Jüttner, F. 1911, Ann. Physik u. Chem., 34, 856.
- Jüttner, F. 1928, Zeitschr. Phys., 47, 542.
- Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. 1959, "Fluid mechanics" (Pergamon, London).
- Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. 1962, "The classical theory of fields" (Pergamon, London).
- Landsberg, P.T. y Reeves, G.A. 1982, Ap. J., 262, 432.
- Lichnerowicz, A. 1940, Compt. Rend. Acad. Sci., 211, 177.
- Lichnerowicz, A. y Marrot, R. 1940, Compt. Rend. Acad. Sci., 210, 759.
- Lightman, A.P., Press, W.H., Price, R.H. y Teukolsky, S.A. 1975, "Problem book in relativity and gravitation" (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.), prob. 5.22.
- Misner, C.W. 1968, Ap. J., 151, 431.
- Novikov, I.D. y Thorne, K.S. 1973, en "Black holes- Les astres occlus", eds. C. de Witt y B. S. de Witt (Gordon and Breach, New York), p. 343.
- Peebles, P.J.E. 1971, "Physical cosmology" (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.), p. 200.
- Reeves, G.A. y Landsberg, P.T. 1982, Ap. J., 259, 25.
- Sampson, D.H. 1961, Ap. J., 134, 482.
- Sampson, D.H. 1962, Ap. J., 135, 261.
- Schweizer, M.A. 1984, Ap. J., 280, 809.
- Spitzer, L. 1940, M.N.R.A.S., 100, 396.
- Stewart, J.M. 1971, "Non-equilibrium relativistic kinetic theory" Lecture notes in physics (Springer-Verlag, Berlin).

- Synge, J.L. 1957, "The relativistic gas" (North-Holland, Amsterdam).
- Taub, A.H. 1978, Ann. Rev. Fluid Mech., 10, 301.
- Tauber, G.E. y Weinberg, J.W. 1961, Phys. Rev., 122, 1342.
- Thorne, K.S. 1973, Ap. J., 179, 897.
- Thorne, K.S. 1986, en "Highlights of modern astrophysics", eds. S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky (Wiley, New York).
- Weinberg, S. 1971, Ap. J., 168, 175.
- Weinberg, S. 1972, "Gravitation and cosmology" (Wiley, New York), pp. 483, 538.
- Weymann, R. 1965, Phys. Fluids, 8, 2112.
- Woodward, P. 1970, Phys. Rev. D, 1, 2731.