



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

“ARAGON”

192

sist. 67 239

# “ESTRUCTURAS ISOSTATICAS”

PROBLEMAS RESUELTOS Y APLICACIONES PRACTICAS

**T E S I S**

Que para obtener el título de:

INGENIERO CIVIL

**Presenta:**

**TRINIDAD ADOLFO ALMAZAN JARAMILLO**

San Juan de Aragón, Méx.      Diciembre de 1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
ARAGON  
DIRECCION

TRINIDAD ADOLFO ALMAZAN JARAMILLO  
P R E S E N T E .


En contestación a su solicitud de fecha 4 de noviembre del año en curso, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. GUSTAVO ADOLFO JIMENEZ VILLEGAS pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "ESTRUCTURAS ISOSTATICAS " PROBLEMAS RESUELTOS Y APLICACIONES PRACTICAS, con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"  
San Juan de Aragón, Méx. 12 de diciembre de 1987.  
EL DIRECTOR

  
Lic. SERGIO GUERRERO VERDEJO  
DIRECCION



 c.c.p.

Coordinación de Ingeniería (21).  
Unidad Académica.  
Departamento de Servicios Escolares.  
Asesor de Tesis.

A tí,que fuiste lo primero que yo tuve.  
A tí,que eres lo que siempre he tenido.  
A tí,que siempre estarás conmigo.  
A tí,que me diste la vida.  
A tí,Madre dedico éste trabajo.

Con Cariño:

ADOLFO

# CONTENIDO

	<b>Prólogo</b>	<b>xi</b>
	<b>Introducción</b>	<b>xv</b>
<b>CAPITULO I</b>	<b>Momentos Estáticos y Centroides de Areas Planas</b>	
1.1	Conceptos fundamentales	1
1.2	Figuras simples	3
1.3	Figuras compuestas	9
1.4	Problemas propuestos	14
<b>CAPITULO II</b>	<b>Momentos de Inercia y Ejes Principales de Areas Planas</b>	
2.1	Conceptos fundamentales	16
2.2	Figuras simples	21
2.3	Figuras compuestas	27
2.4	Problemas propuestos	32
<b>CAPITULO III</b>	<b>Equilibrio</b>	
3.1	Conceptos fundamentales	34
3.2	Resultantes de sistemas de fuerzas en el plano	38
3.3	Resultantes de sistemas de fuerzas en el espacio	44

3.4	Equilibrio de sistemas coplanares	44
3.5	Equilibrio de sistemas en el espacio	65
3.6	Superposición de causas y efectos	70
3.7	Problemas propuestos	72
CAPITULO IV Elementos Mecánicos		
4.1	Conceptos fundamentales	81
4.2	Vigas simplemente apoyadas	87
4.3	Vigas en voladizo	102
4.4	Vigas Gerber	106
4.5	Marcos con dos apoyos	114
4.6	Marcos en voladizo	121
4.7	Marcos de tres articulaciones	127
4.8	Arcos simples	133
4.9	Superposición de causas y efectos	138
4.10	Problemas propuestos	141
CAPITULO V Armaduras Isostáticas		
5.1	Conceptos fundamentales	146
5.2	Método de los nudos	150

5.3	Método de las secciones	157
5.4	Método gráfico (Maxwell Cremona)	167
5.5	Problemas propuestos	173
CAPITULO VI	Cables	
6.1	Conceptos fundamentales	175
6.2	Cables con cargas concentradas	181
6.3	Cable parabólico	183
6.4	Cable catenaria	185
6.5	Problemas propuestos	187
	Conclusiones	189
	Bibliografía	191

## P R O L O G O

Dentro del ejercicio profesional del Ingeniero Civil, las estructuras ocupan un lugar importante en su desarrollo, ya que -- éstas son la base de la mayor parte de las obras civiles; sin embargo los primeros pasos para comprender su comportamiento, se presentan con dificultad para los alumnos debido a la falta de una bibliografía adecuada que en general está encaminada hacia conceptos teóricos y sin una visión real de sus aplicaciones prácticas.

Tomando en cuenta que el verdadero entendimiento se logra a base de poner en práctica los conocimientos teóricos, se ha realizado el presente trabajo, que tiene el propósito de contribuir - para que el estudiante comprenda de una manera más comoda el comportamiento de las estructuras.

Al término de éstos años de aprendizaje, quiero hacer - patente mi agradecimiento a todas y cada una de las instituciones, por supuesto también a todas las personas, que a lo largo del camino me han apoyado para no claudicar y seguir adelante.

En primer término, agradezco a la U.N.A.M. el haberme dado la oportunidad de educarme en sus aulas, así como a la E.N.E.P. ARAGON en la que dí el último paso de mi formación profesional.

Quiero también de manera muy especial, agradecer a mi Director de Tesis , Ing. Gustavo Adolfo Jiménez Villegas que con toda su experiencia ha sabido infundir en mí un gusto especial por mi carrera, además de la gran cantidad de conocimientos que ha puesto a mi alcance.

Esperamos que la presente obra, producto del esfuerzo de



mucha gente, pueda servir de algún modo para que los estudiantes de Ingeniería tengan un apoyo en su formación académica.

T. Adolfo Almazán Jaramillo.

San Juan de Aragón, Noviembre de 1987.

## I N T R O D U C C I O N

Actualmente los libros dedicados al estudio de las estructuras usados como textos en los cursos relacionados con esta área, forman una larga lista. Sin embargo, difícilmente se adaptan a los programas de estudio vigentes en las Facultades y Escuelas de Ingeniería. Casi invariablemente, ofrecen un estudio muy amplio en lo que se refiere a las cuestiones teóricas, pero en general es muy reducida la cantidad de ejemplos prácticos que en ellos se encuentran.

El objeto de ésta Tesis, es proporcionar al estudiante una variedad de ejercicios tanto resueltos como propuestos, de tal forma que, sea más fácil comprender el comportamiento y respuesta de los elementos estructurales ante la acción de fuerzas externas, mismas que tratan de modificar sus condiciones de estabilidad tanto interna como externa.

En los problemas de aplicación directa, que atañen al Ingeniero Civil es necesario en infinidad de ocasiones que el profesional de esta área, posea una sensibilidad especial para captar las causas y los efectos que se presentan en las diferentes partes que componen una estructura, la habilidad necesaria para lograr ésto sólo puede ser adquirida por medio de la experiencia, y ésta a su vez la proporciona la cantidad de veces que nos enfrentamos a los problemas, conociendo así una o varias alternativas para resolverlos.

El presente trabajo está compuesto básicamente por tres secciones, la primera está integrada por los conceptos teóricos esenciales para la comprensión de los capítulos, no están incluidas deducciones, solamente es un breve recordatorio de las cuestiones teóricas. La segunda parte, la componen series de problemas resueltos, en los cuales se trata de atacar diferentes variantes de un mismo problema, a fin de conocer las dificultades que presentan y la

forma de resolverlos. Finalmente en cada capítulo existe una serie de problemas propuestos y elegidos de tal forma que sus características sean compatibles con los ejercicios realizados.

Desafortunadamente el tamaño de esta obra hace imposible el estudio profundo de todos los temas, se ha hecho énfasis en los capítulos referentes a Equilibrio y Elementos Mecánicos de las -- Estructuras, puesto que representan la base de la resolución de -- los problemas de estructuras.

---

# CAPITULO I

MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES  
DE AREAS PLANAS

3

---

## CAPITULO I

MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES  
DE AREAS PLANAS

## I.1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

- I.1.1 a) El centro de un sistema de fuerzas paralelas es el punto donde se ubica la resultante de dicho sistema.
- b) Centro de gravedad, es el punto por el cual pasa la resultante de las fuerzas de peso y puede determinarse obteniendo sus coordenados  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ . Tomando momentos de las fuerzas respecto a los ejes coordenados, esto es:

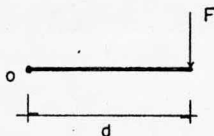
$$\bar{X} = \frac{\sum W_i X_i}{W_T}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum W_i Y_i}{W_T}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum W_i Z_i}{W_T}$$

$W_i$  =Fuerzas de peso  
 $W_T$  =Peso Total  
 $X_i, Y_i, Z_i$  = Distancia  
 a los ejes  
 coordenados

- I.1.2 El momento de una fuerza se define como el valor de ésta multiplicado por su distancia perpendicular al punto de apoyo.



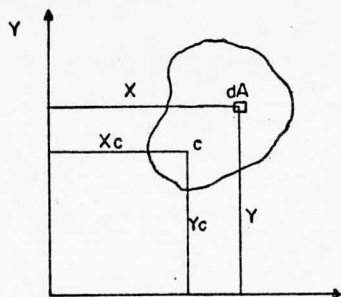
$o$  = Punto de Apoyo  
 $d$  = Brazo de palanca  
 $F$  = Fuerza aplicada  
 $M_o$  = Momento de la --  
 Fuerza  $F$  respecto  
 al punto " $o$ "

$$M_o = F d$$

- I.1.3 Centroide de un área; es el punto en donde la suma de momentos con respecto a él, es nula.

$C(x,y)$

Coordenadas del centroide.



$$\int Y dA = A \bar{Y}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int Y dA}{A}$$

$$\int X dA = A \bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\int X dA}{A}$$

$$A = \int dA$$

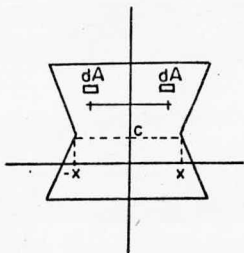
I.1.4 Momento estático o de primer orden de una área se define como: la suma de los productos de las áreas por su brazo a un eje dado, así:

$$\int X dA \equiv M_x \quad (\text{con respecto al eje } X)$$

$$\int Y dA = M_y \quad (\text{con respecto al eje } Y)$$

Donde:  $X, Y$  son los brazos de palanca respecto a los ejes.  
 $dA$  es el área total en cuestión.

I.1.5 Una figura es simétrica respecto a un plano si su centroide se encuentra en dicho plano y a todo punto de coordenada -- "X" corresponde otro de Coordenada "-X"



$$\int x dA = \int x dA - \int x dA = 0 = A \bar{X}$$

Pero  $A \neq 0$

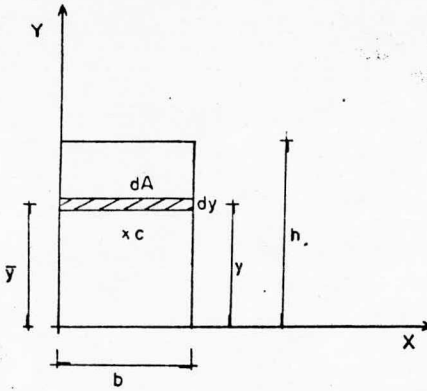
$\therefore \bar{X} = 0$  (Coordenada del centroide que se encuentra en el eje de simetría).

## 1.2 PROBLEMAS RESUELTOS

### 1.2.1 Calcular el centroide de un rectángulo

Momento Respecto al eje X

$$M_x = \int Y dA$$



$$dA = b dy$$

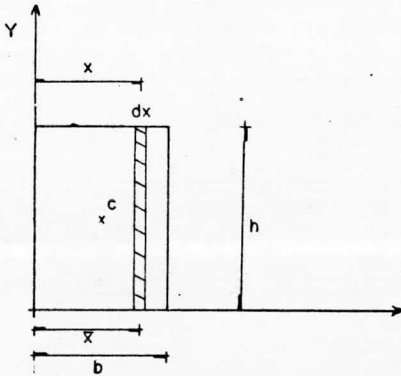
$$M_x = \int y b dy = b \int_0^h y dy = \frac{b h^2}{2}$$

$$A = \int dA = \int_0^h b dy = b \int_0^h dy = b h$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{b h^2 / 2}{b h} = \frac{h}{2}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{h}{2}}$$

Momento Respecto al eje Y



$$M_y = \int x dA$$

$$dA = h dx$$

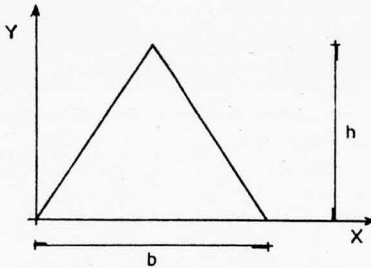
$$M_y = h \int_0^b x dx = \frac{h b^2}{2}$$

$$A = \int dA = h \int_0^b dx = h b$$

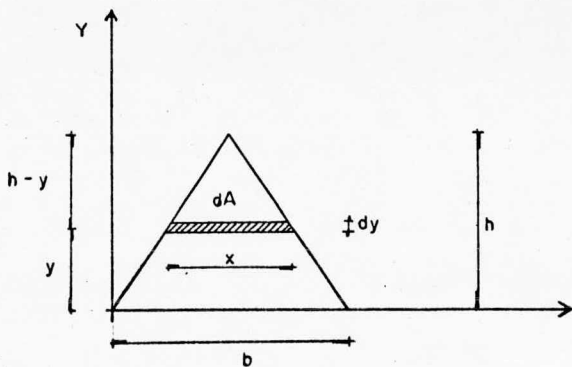
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{h b^2 / 2}{h b}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{h}{2}}$$

1.2.2. Calcular el centroide de un Triángulo.



Tomaremos una diferencial de área del Triángulo y evaluaremos su momento estático.



$$M_x = \int Y x dy \quad \text{----- (1)}$$

$M_x = \int Y dA$  La ecuación está en función de dos variables, pero si ponemos por ejemplo "X" en función de "Y" podemos lograr la integración.- Así por triángulos semejantes.

$dA = x dy$

$A = \int dA$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad x = \frac{b}{h} (h-y)$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$M_x = \int y dA = \int y x dy = \int y \frac{b}{h} (h-y) dy = \int (by - \frac{b}{h} y^2) dy$$

$$\boxed{\int y dA = \frac{b h^2}{6}}$$

$$A = \int dA = \int x dy$$

$$A = \int \frac{b}{h} (h-y) dy = \int (b - \frac{b}{h} y) dy = \frac{b h}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{b h}{2}}$$

Recordamos que  $\bar{y} = \frac{\int y dA}{A}$

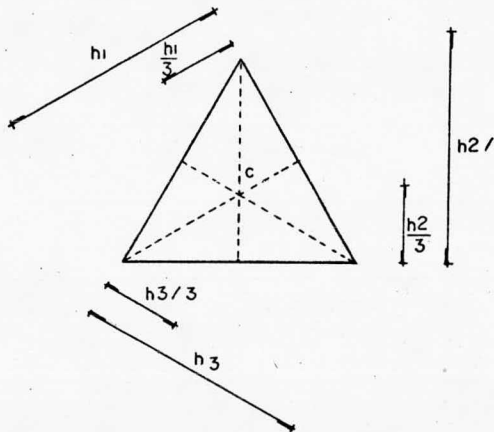
por lo tanto:

$$\bar{y} = \frac{\frac{b h^2}{6}}{\frac{b h}{2}}$$

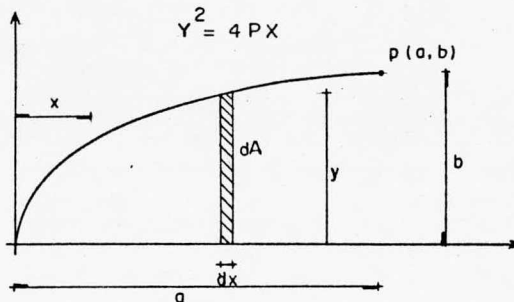
$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{3} h}$$



De los cálculos anteriores podemos concluir que si hacemos coincidir el eje X con los 3 lados del triángulo, el valor de " $\bar{Y}$ " siempre será  $1/3 h$ , así establecemos que el centroide de de un área Triangular se encuentra al tercio de la altura medida desde cualquier base



1.23. Centroide del área bajo una parábola.



Para el punto  $P(a,b)$  la ecuación de la parábola queda:

$$b^2 = 4Pa \quad \text{de donde} \quad P = \frac{b^2}{4a}$$

Sustituyendo el valor de "p" en la ecuación original:

$$Y^2 = \frac{b^2}{a} X ; \quad Y = b \sqrt{\frac{X}{a}}$$

El momento estático respecto A y:

$$M_y = \int X dA = \int X y dX$$

Pero

$$Y = b \sqrt{\frac{X}{a}}$$

$$M_y = \int X b \sqrt{\frac{X}{a}} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a X^{3/2} dx$$

$$M_y = \frac{2}{5} a^2 b$$

Análogamente:

$$M_x = \int \frac{y}{2} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \frac{1}{2} \int y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{b^2}{a} x dx$$

$$M_x = \frac{1}{4} a b^2$$

$$A = \int dA = \int y dx = \int_0^a \frac{b}{\sqrt{a}} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} ab$$

Recordemos que:

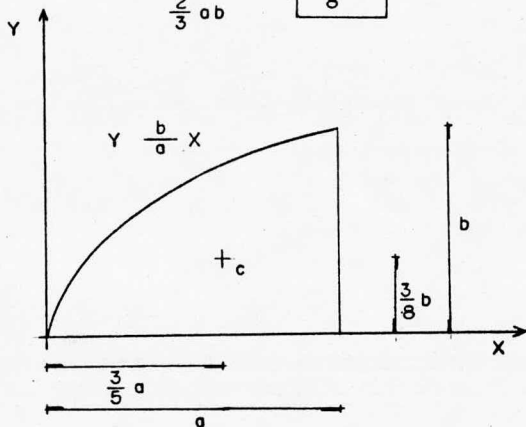
$$\bar{X} = \frac{M_y}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{M_x}{A}$$

Entonces:

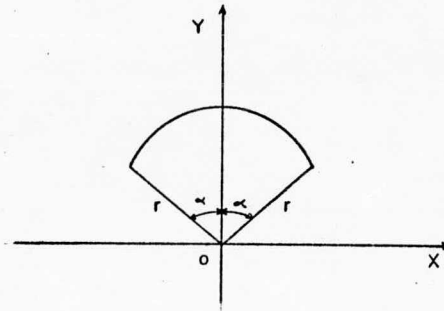
$$\bar{X} = \frac{\frac{2}{5} a^2 b}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{5} a$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{4} a b^2}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{8} b$$

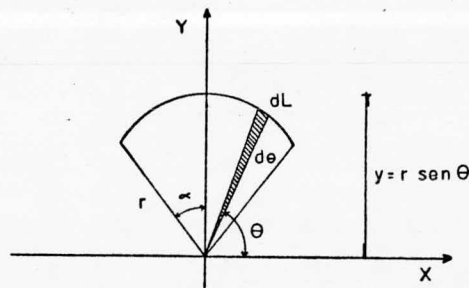


## PROBLEMAS RESUELTOS

## 1.2.4 Obtener el centroide de un arco de circunferencia.



Consideremos que la figura es simétrica respecto al eje  $y$ , tomemos una sección diferencial de ángulo  $(d\theta)$ . Sobre la circunferencia, la diferencial del ángulo tomará una diferencial de la longitud del arco, llamemos  $\theta$  al ángulo formado entre la  $d\theta$  y el eje horizontal, así la figura queda:



Cálculamos el momento estático respecto al eje "X":

$$\int y dL = \int r \text{sen} \theta r d\theta = r^2 \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \text{sen} \theta d\theta = \left[ r^2 \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha}$$

$$\int y dL = 2 r \text{sen} \alpha$$

La posición del centroide es:

$$\bar{y} = \frac{\int y dL}{L} = \frac{2 r^2 \text{sen} \alpha}{2 r \alpha} = \boxed{\frac{r \text{sen} \alpha}{\alpha}}$$

### 1.3 CENTROIDES DE FIGURAS COMPUESTAS

En términos generales los centroides de figuras irregulares se obtienen descomponiendo la figura en otras más simples - de centroide conocido, para luego tomar sus momentos estáticos y por medio de las ecuaciones.

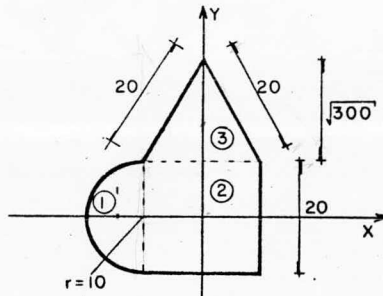
$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\sum A x}{\sum A}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\sum A y}{\sum A}$$

Conocer las coordenadas del centroide.

#### Ejemplos

1.3.1. Obtener el centroide de área de la siguiente figura:



Para simplificar el cálculo nos ayudaremos de la siguiente tabla.

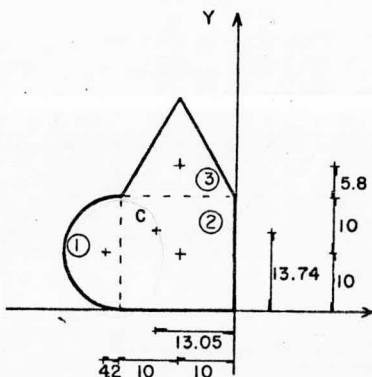
Area No.	Area cm <sup>2</sup>	Coordenadas del centroide		Ax	Ay
		X	Y		
1	157.0	-14.2	0	-2220	0
2	400.0	0	0	0	0
3	173.2	0	15.8	0	2730
Sumas	730.2			-2220	2730

$$\bar{X} = \frac{-2220}{730} = -3.06 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{2730}{730} = 3.74 \text{ cm}$$

En el ejemplo anterior supusimos que el origen de los ejes coordenados coincidiera con el centroide del cuadrado, sin embargo el lugar donde ubiquemos los ejes no es determinante en el cálculo del centroide como veremos enseguida.

- 1.3.2. En la figura del ejemplo 1.4 calcular el centroide proponiendo una posición diferente de los ejes.

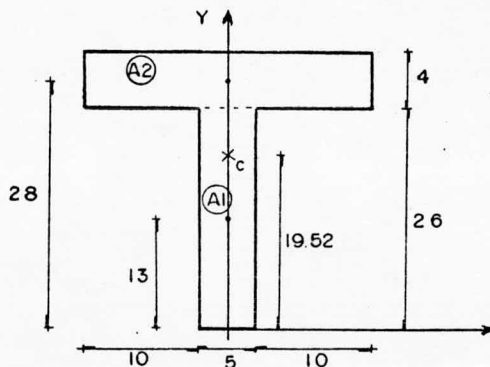


No.	Area (cm <sup>2</sup> )	Coord. Centroide		A x (cm <sup>3</sup> )	AY (cm <sup>3</sup> )
		X	Y		
1	157	-24.2	10	-3799.4	1570
2	400	-10	10	-4000	4000
3	173	-10	25.8	-1730	4463.4
SUMAS	730			-9529.4	10033.4

$$\bar{X} = \frac{9529.4}{730} = 13.05 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{10033.4}{730} = 13.74 \text{ cm}$$

1.3.3. Calcular el centroide de la siguiente figura.



Puesto que la figura es simétrica respecto al eje "Y" el --centroide se encuentra sobre dicho eje  $\bar{X} = 0$  por lo tanto solo nos resta investigar "Y".

El momento estático respecto al eje "X" =  $M_x = A_y$  si dividimos la figura en dos rectángulos como se muestra en la parte superior.

$$M_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2$$

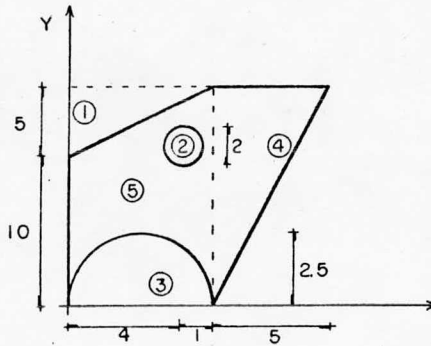
$$M_x = (5 \times 26) (13) + (25 \times 4) (28) = 4490$$

$$A_T = A_1 + A_2 = (5 \times 26) + (25 \times 4) = 230$$

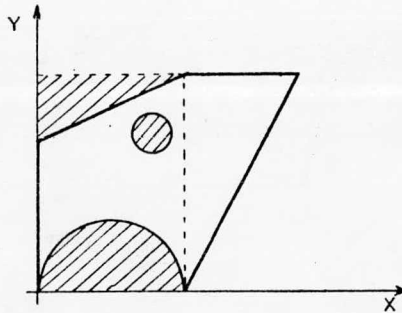
$$\bar{Y} = \frac{M_x}{A} = \frac{4490}{230} = \boxed{19.52 \text{ cm}}$$

1.3.4

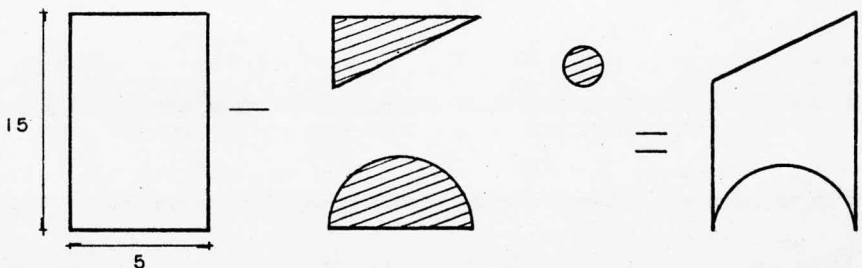
Cálculo el centroide de la fig.



La anterior es una placa de acero que tiene partes recortadas e inclusive un agujero ( círculo pequeño). El primer paso será completar la figura de tal forma que sea lo más regular posible.



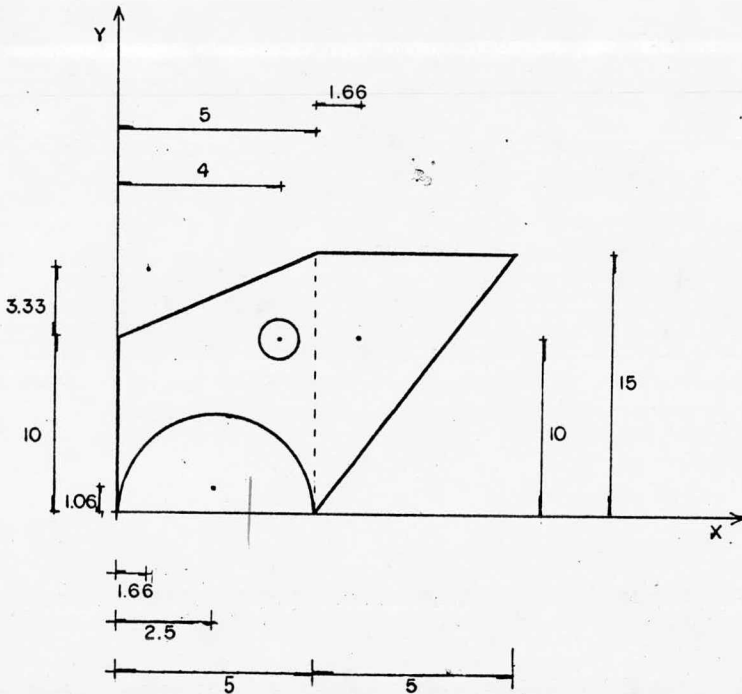
Las partes sombreadas son secciones que sumamos a la figura para que ésta quede formada por un rectángulo y un triángulo, pero cuando hagamos el análisis estas áreas se consideran como negativas para que sus efectos se anulen.



No.	Area	Centroide		Ax	Ay
		X	Y		
1	-12.5	1.66	13.33	-20.75	-166.630
2	-3.14	4	8	-12.56	- 39.44
3	-9.81	2.5	1.06	-24.53	- 10.4
4	37.5	6.66	10	247.50	375
5	75.0	2.5	7.5	187.50	562.5
SUMAS	87			377.17	721.04

$$\bar{X} = \frac{377.17}{87} = 4.34 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{721.04}{87} = 8.28 \text{ cm}$$

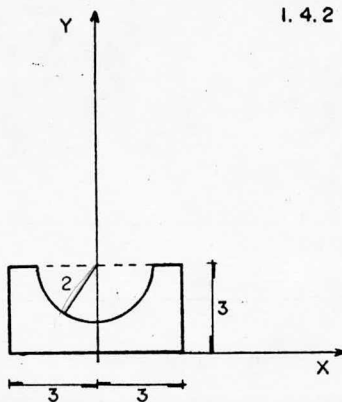




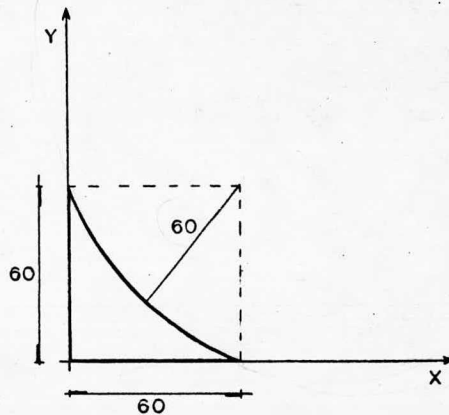
## PROBLEMAS PROPUESTOS

1.4 Para cada una de las siguientes figuras localice el --centroide.

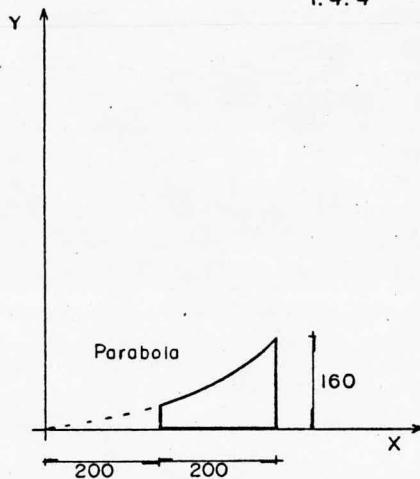
1.4.1



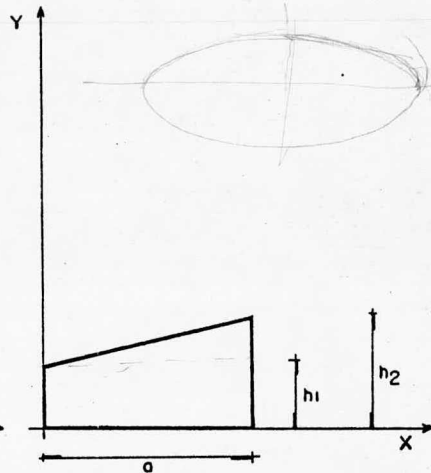
1.4.2



1.4.3

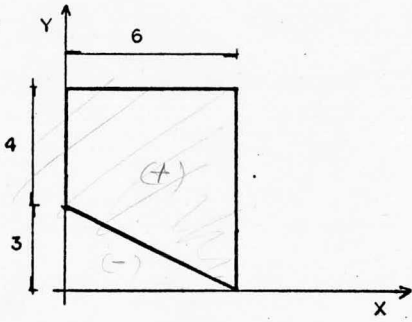


1.4.4

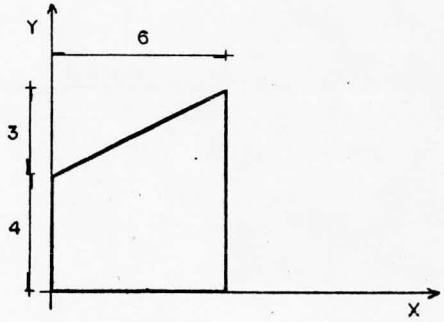


Nota: las dimensiones están en cm.

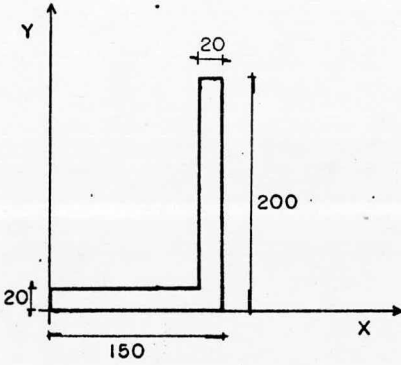
I. 4. 5



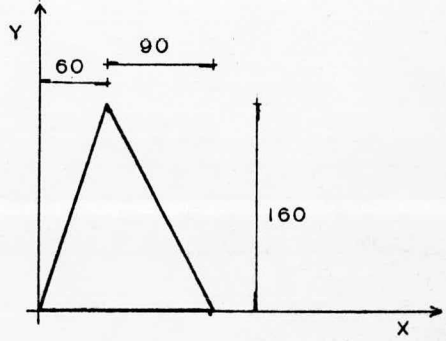
I. 4. 6



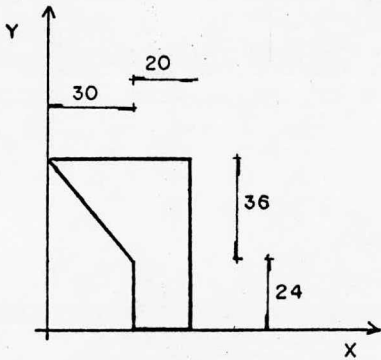
I. 4. 7



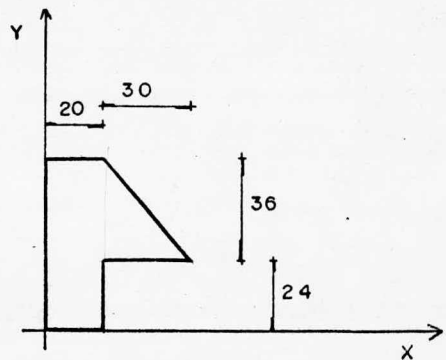
I. 4. 8



I. 4. 9



I. 4. 10



---

# CAPITULO II

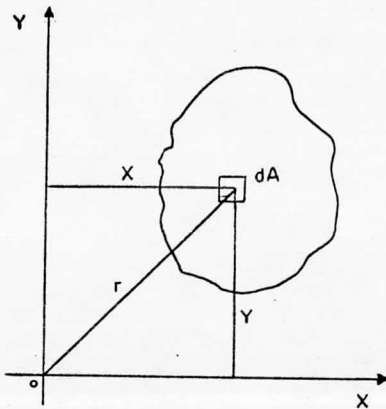
MOMENTOS DE INERCIA Y EJES  
PRINCIPALES DE AREAS PLANAS

---

## CAPITULO II MOMENTOS DE INERCIA Y EJES PRINCIPALES DE AREAS PLANAS

### 2.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2.1.1. Momento de inercia o de segundo orden se define como - el producto del área por la distancia al cuadrado de - su centroide a un eje de referencia.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

2.1.2. Momento polar de inercia se define como el producto -- del área por su distancia elevada al cuadrado a un punto fijo desde el centroide del área.

$$I_p = \int r^2 dA \quad ; \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int (x^2 + y^2) dA$$

$$I_p = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$\boxed{I_p = I_y + I_x}$$

Es decir; el momento polar de inercia es igual a la suma de los momentos de inercia, respecto a los ejes "X" e "Y".

## UNIDADES

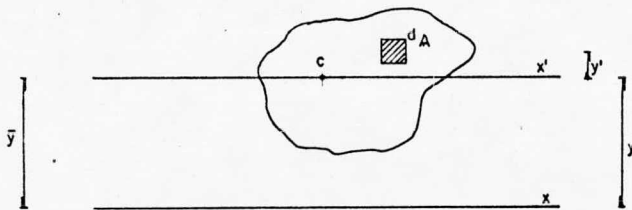
$$M = \int x^2 dA \quad ; \quad (\text{cm}^2) (\text{cm}^2) = (\text{cm}^4) (\text{m}^4) (\text{In}^4)$$

## 2.1.3.

## TRANSLACION DE EJES

## TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Consideremos un área y dos ejes paralelos ( $X, X'$ ), uno de los cuales pasa por su centroide.



$$I_x = \int Y^2 dA = \int (\bar{Y} + Y')^2 dA$$

Recordemos que  $\bar{Y} = \text{constante}$  y  $\int Y' dA = 0$

$$I_x = \int Y'^2 dA + \bar{Y}^2 \int dA$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2$$

Es decir el momento de inercia respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a otro eje centroidal paralelo al anterior más el producto -- del área por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

Análogamente:

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{X}^2$$

## 2.1.4

Radio de giro

$$r_x = \sqrt{I_x / A} \quad \text{cm} ; \quad r_y = \sqrt{I_y / A} \quad ; \quad r_p = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

## 2.1.5.

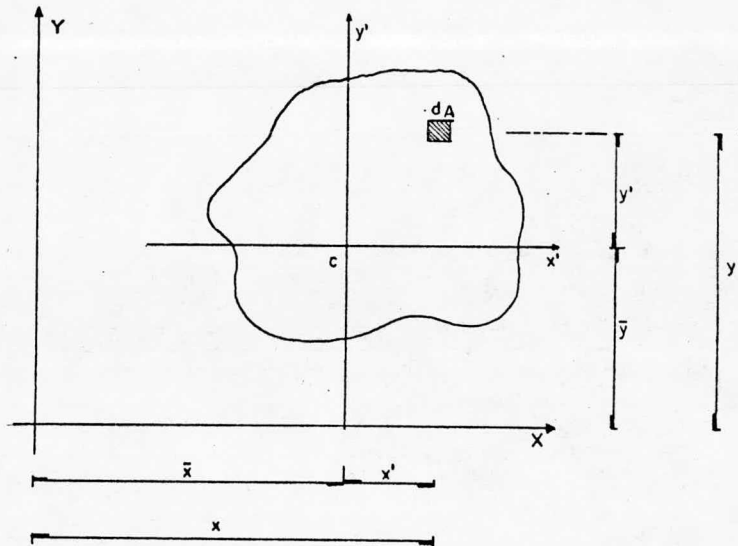
Producto de inercia de un área "A" respecto a los ejes "X" e "Y" se obtiene de multiplicar cada elemento "dA" por sus coordenadas X,Y e integrado sobre toda el -- área. A diferencia de los momentos de inercia ( $I_x$ ,  $I_y$ ), el producto de inercia puede ser positivo o negativo puesto que el primero siempre es positivo.

$$I_{xy} = \int xy dA$$

Aplicando al producto de inercia el teorema de los --- ejes paralelos.

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

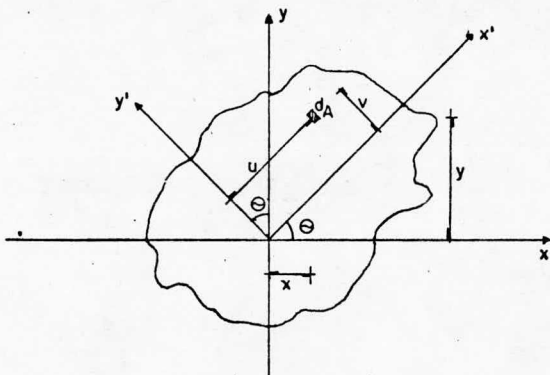
Así obtenemos el producto de inercia de un área con -- respecto a cualquier eje paralelo a su eje centroidal.



Las unidades son =  $[L] [L] [L^2] = L^4 = \text{cm}^4, \text{m}^4, \text{etc.}$

## 2.1.6

## ROTACION DE LOS EJES.



$$U = X \cos \theta + Y \sin \theta$$

$$V = Y \cos \theta + X \sin \theta$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_y - I_x}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

## 2.1.7

Ejes principales son aquellos para los cuales existe el momento de inercia máximo y mínimo de un área. Estos ejes se encuentran girados en un ángulo  $\theta$  a partir de los ejes "x" e "y".

El ángulo  $\theta$  puede calcularse a partir de:

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Con esta expresión se pueden obtener dos valores del ángulo  $\theta$ , los cuales difieren  $90^\circ$ , que nos dan los valores máximo y mínimo del momento de inercia.

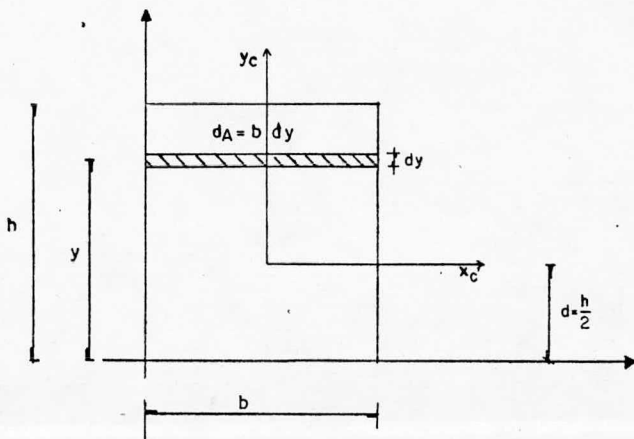
Así:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + (4 I_{xy}^2)}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

## 2.2 FIGURAS SIMPLES

2.2.1. Obtención del momento de Inercia respecto a la base y a un eje centroidal paralelo a la base de un rectángulo.



Respecto a la base

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy$$

$$I_x = \left[ \frac{by^3}{3} \right]_0^h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

Por el Teorema de los ejes paralelos.

$$A = bh$$

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$\bar{I}_x$  = Momento de inercia  
respecto al eje centroidal

$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{3} - (bh) \left( \frac{h}{2} \right)^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$

(Mom. de Inercia respecto al eje centroidal  $X'$ )

En la misma forma puede obtenerse

$$I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{12}$$

El valor de  $\bar{I}_x$  puede obtenerse también de la forma si-



guiente:

$$\bar{I}_x = \int y'^2 dA$$

$$\text{si } dA = bdy'$$

$$\bar{I}_x = b \int y'^2 dy'$$

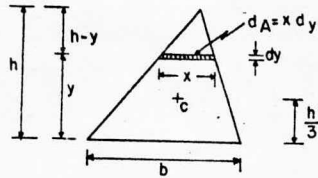
$$\bar{I}_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 dy'$$

$$\bar{I}_x = b \left[ \frac{y'^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$$

## 2.2.2

Encontrar el momento de inercia de un triángulo respecto a la base y a un eje centroidal paralelo a ella.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int y^2 x dy$$

por triángulos semejantes

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \quad ; \quad x = \frac{b}{h} (h-y)$$

$$I_x = \int y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy$$

$$I_x = b \int_0^h y^2 dy - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

y por el teorema de los ejes paralelos

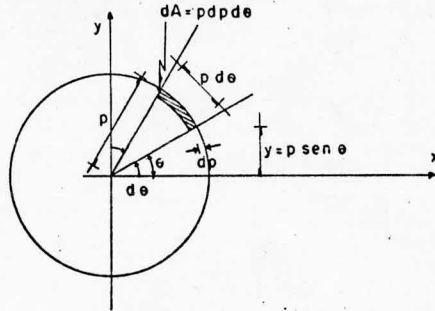
$$\bar{I}_x = I_x - Ad^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{bh}{2} \left[ \frac{h}{3} \right]^2$$

$$\bar{I}_x = \frac{1}{36} bh^3$$

2.2.3

Encontrar el momento de inercia de un círculo respecto a un eje diametral.



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_x = \int (p \operatorname{sen} \theta)^2 p dp d\theta$$

$$I_x = \int p^3 \operatorname{sen}^2 \theta dp d\theta$$

$$I_x = \int_0^r p^3 dp \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta$$

$$= \left[ \frac{p^4}{4} \right]_0^r \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{r^4}{4} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \right]$$

$$= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta - \frac{r^4}{8} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta$$

$$= \frac{r^4}{8} \left[ \theta - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

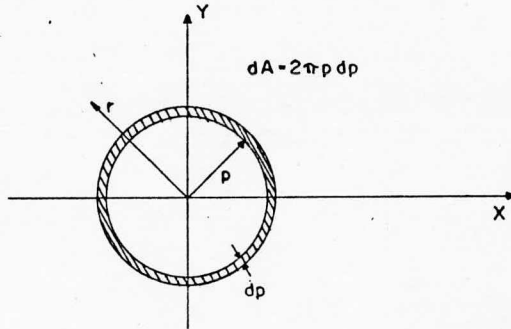
$$I_x = \frac{\pi r^4}{4}$$

análogamente

$$I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

## 2.2.4

Encontrar el momento polar de inercia de un círculo respecto a su centro.



$$\begin{aligned}
 I_p &= \int p^2 dA \\
 &= \int_0^r p^2 2\pi p dp \\
 &= 2\pi \int_0^r p^3 dp \\
 &= 2\pi \left[ \frac{p^4}{4} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \frac{r^4}{4}
 \end{aligned}$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

pero también de acuerdo con el ejemplo 2.2.3 y la definición de momento polar de inercia, que se vio en el inciso 2.1.2:

$$I_p = I_x + I_y$$

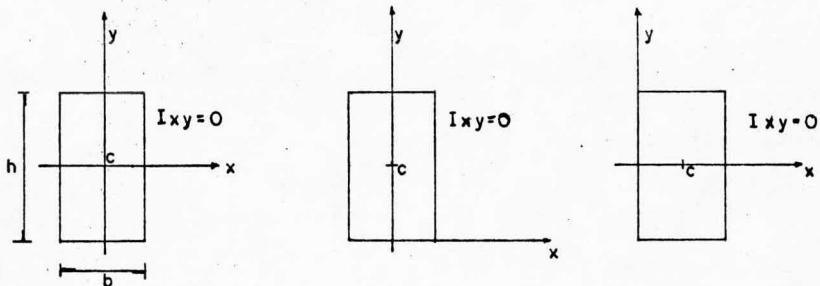
$$= \frac{\pi r^4}{4} + \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2}$$

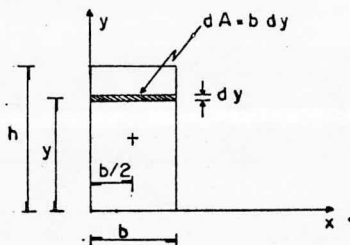
## 2.2.5

Cálculo del producto de inercia de un rectángulo.

Si los ejes de simetría coinciden con los de referencia; resulta:



Si los ejes coinciden con los lados:



$$I_{xy} = \int xy \, dA = \int xyb \, dy$$

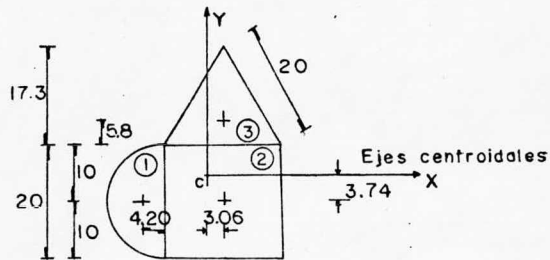
como :  $x = \frac{b}{2}$

$$I_{xy} = \int_0^h \frac{b^2}{2} y \, dy = \frac{b^2}{4} \left[ y^2 \right]_0^h =$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$

## 2.3 FIGURAS COMPUESTAS.

2.3.1 Obtener los momentos de inercia respecto a los ejes -- centroidales de la figura. El centroide de la misma se cálculo en el ejemplo 1.3.1 del capítulo anterior.



$$\bar{I}_{x_1} = 1/8 \pi (10)^4 = 3927 \quad \bar{I}_{y_1} = 1/8 \pi (10)^4 - 157(4.2)^2 = 1158$$

$$\bar{I}_{x_2} = (1/12)20(20)^3 = 13333 \quad \bar{I}_{y_2} = (1/12)20(20)^3 = 13333$$

$$\bar{I}_{x_3} = (1/36)20(17.3)^3 = 2876 \quad \bar{I}_{y_3} = 2(1/12)17.3(10)^3 = 2883$$

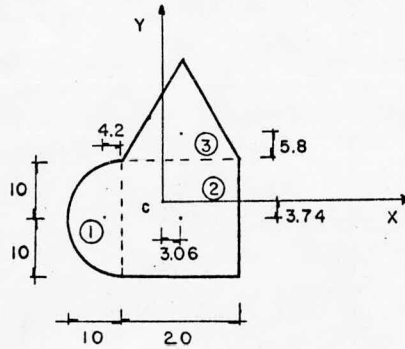
	A	$\bar{I}_x$	$\bar{I}_y$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$A\bar{y}^2$	$A\bar{x}^2$	$I_x$	$I_y$
No	cm <sup>2</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm	cm	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>	cm <sup>4</sup>
1	157	3927	1158	-3.74	-11.14	2196	19483	6123	20641
2	400	13333	13333	-3.74	3.06	5596	3745	18928	17078
3	173	2876	2883	12.06	3.06	25161	1620	28037	4503
$\Sigma$	730							53088	42222

$$I_x = 53\,088 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 42\,222 \text{ cm}^4$$

2.3.2

En el ejemplo anterior, obtener el producto de inercia, respecto a sus ejes centriciales.



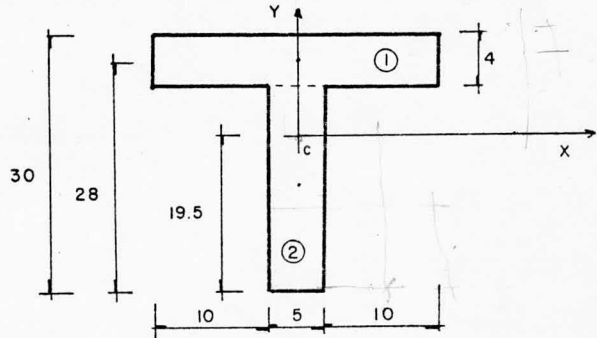
Acotaciones en cm.

Nº	A cm <sup>2</sup>	$\bar{X}$ cm	$\bar{Y}$ cm	$A\bar{x}\bar{y}$ cm <sup>4</sup>	$I_{xy}$ cm <sup>4</sup>	$I_{xy}$ cm <sup>4</sup>
1	157	-11.14	-3.74	6541	0	6541
2	400	3.06	-3.74	-4577	0	-4577
3	173	3.06	12.06	6384	0	6384
	730			8348	0	8348

$$I_{xy} = 8348 \text{ cm}^4$$

2.3.3

Obtener los momentos de inercia y el producto de -- inercia respecto a sus ejes centroidales, en la fig.



$$\bar{I}_{x_1} = (1/12) 25 (4)^3 = 133 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_1} = (1/12) 4 (25)^3 = 5208 \text{ "}$$

$$\bar{I}_{x_2} = (1/12) 5 (26)^3 = 7323 \text{ "}$$

$$\bar{I}_{y_2} = (1/12) 26 (5)^3 = 270 \text{ "}$$

Nº	A cm <sup>2</sup>	X cm	Y cm	$\bar{I}_x$ cm <sup>4</sup>	$\bar{I}_y$ cm <sup>4</sup>	$\bar{I}_{xy}$ cm <sup>4</sup>	$A\bar{y}^2$ cm <sup>4</sup>	$A\bar{x}^2$ cm <sup>4</sup>	$I_x$ cm <sup>4</sup>	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$A\bar{x}\bar{y}$ cm <sup>4</sup>	$I_{xy}$ cm <sup>4</sup>
1	100	0	8.5	133	5208	0	7225	0	7358	5208	0	0
2	130	0	-6.5	7323	270	0	5492	0	12815	270	0	0
	230			7456	5478		12717		20173	5478	0	0

$$I_x = 20173 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 5478 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0 \text{ cm}^4$$

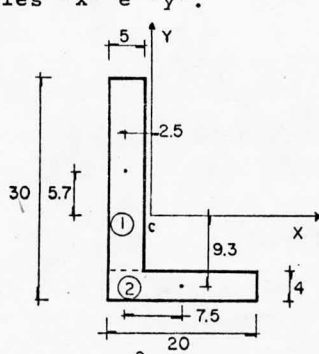
$$I_{xc} = 3248$$

$$I_{yc} = 2582$$



2.3.4.

Obtenga los momentos de inercia y el producto de inercia de la siguiente figura respecto a sus ejes centroidales "x" e "y".



$$\bar{I}_{x_1} = (1/12) 5 (26)^3 = 7323 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{y_1} = (1/12) 26 (5)^3 = 270 \text{ "}$$

$$\bar{I}_{xy_1} = 0$$

$$\bar{I}_{x_2} = (1/12) 20 (4)^3 = 107 \text{ "}$$

$$\bar{I}_{y_2} = (1/12) 4 (20)^3 = 2666 \text{ "}$$

$$\bar{I}_{xy_2} = 0$$

Nº	A cm <sup>2</sup>	X cm	Y cm	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>	A y <sup>2</sup> cm <sup>4</sup>	A x <sup>2</sup> cm <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	A xy cm <sup>4</sup>	I <sub>xy</sub> cm <sup>4</sup>
1	130	-2.9	5.7	7323	270	0	4223	1093	11546	1363	-2148	-2148
2	80	4.6	-9.3	10.7	2666	0	6919	1693	7026	4359	-3422	-3422
	210			7430	2936		11142	2786	18572	5722	-5570	-5570

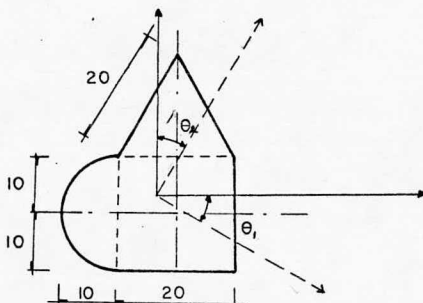
$$I_x = 18572 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 5722 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = -5570 \text{ cm}^4$$

## 2.3.5

Obtener los ejes principales centroidales y los momentos de inercia máximo y mínimo de la figura siguiente.



de ejemplos anteriores obtuvimos:

$$\begin{aligned} I_x &= 53088 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 42222 \text{ cm}^4 \\ I_{xy} &= 8348 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

De acuerdo con estos valores, podemos obtener la inclinación de los ejes principales en la siguiente forma:

$$\tan 2\theta = \frac{2(8348)}{42222 - 53088} = \frac{16696}{-10866} = -1.54$$

$$2\theta = \text{ang tan}(-1.54)$$

$$2\theta = -57^\circ 00'$$

$$2\theta = 123^\circ 00'$$

$$\theta_1 = -28^\circ 30'$$

$$\theta_2 = 61^\circ 30'$$

Aplicando ahora la formula correspondiente para momentos de inercia máximos y mínimos:

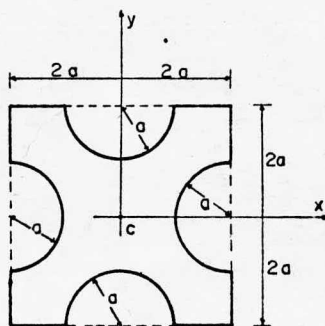
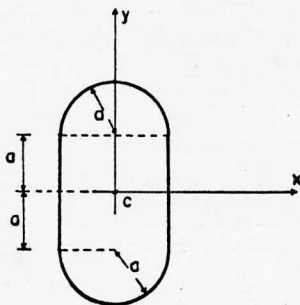
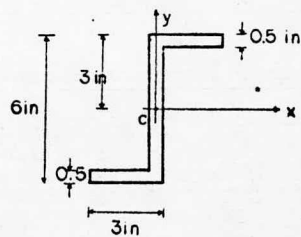
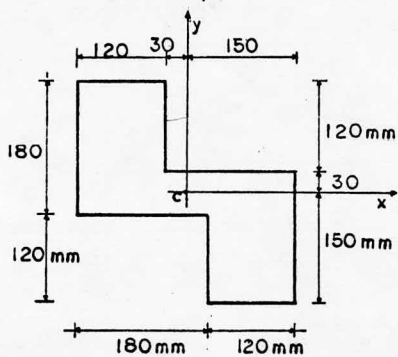
$$\begin{aligned} I_{\max/\min} &= \frac{53088 + 42222}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(10866)^2 + 4(8348)^2} \\ &= 47655 \pm \frac{1}{2} \sqrt{118\ 069\ 956 + 278\ 756\ 416} \\ &= 47655 \pm \frac{1}{2} 19920 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = 57615 \text{ cm}^4$$

$$I_{\min} = 37695 \text{ cm}^4$$

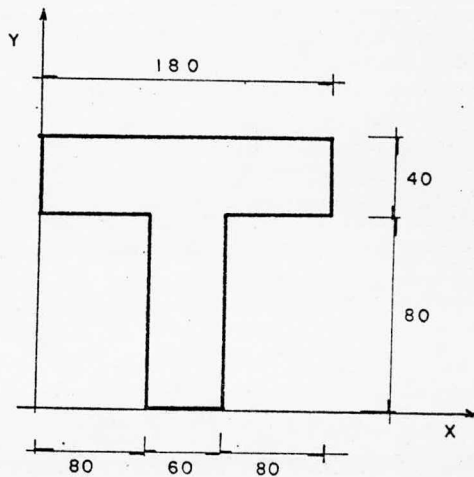
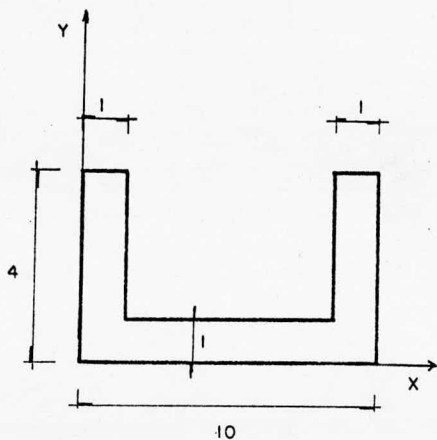
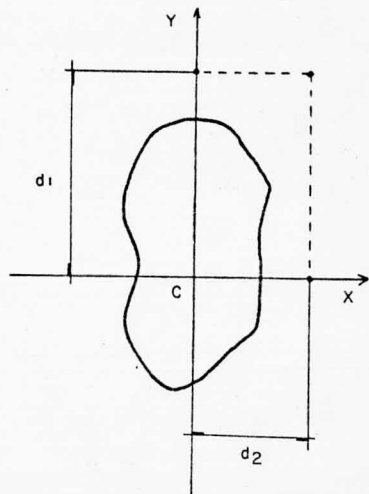
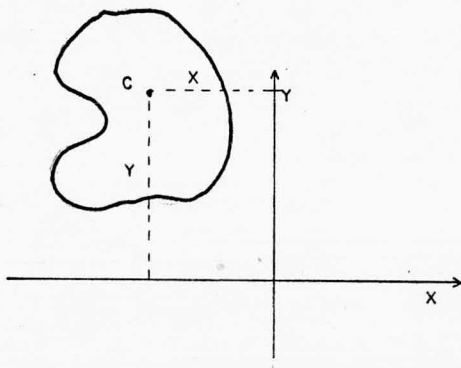
## 2.4 PROBLEMAS PROPUESTOS.

2.4.1 Determinese el momento de inercia y el radio de giro de las siguientes figuras, respecto al eje "x".



2.4.2

En las siguientes figuras, calcule el momento de inercia, respecto al eje "y", el producto de inercia y el radio de giro respecto a cualquier eje.



---

# CAPITULO III

EQUILIBRIO

---

CAPITULO III  
EQUILIBRIO

3.1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

3.1.1 Las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se llevan a efecto cuando la suma algebraica de las fuerzas y la suma algebraica de los momentos que actúan sobre él es igual a cero.

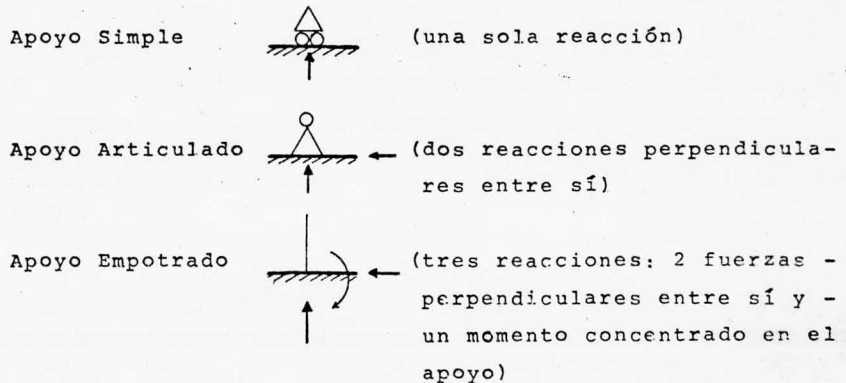
$$\sum F = 0 \quad \begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum M_0 = 0 \quad \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Diagrama de cuerpo libre es una representación esquemática de las acciones y reacciones que actúan sobre un cuerpo.

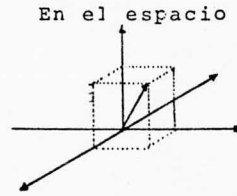
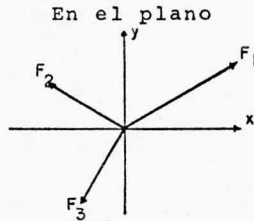
3.1.3 APOYOS

Apoyo es el elemento por medio del cual se logra limitar uno o más desplazamientos.



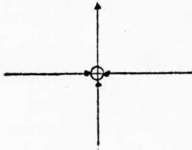
## 3.1.4

Sistemas de fuerzas pueden ubicarse:

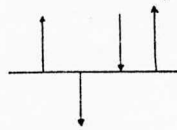


En el plano podemos encontrar diferentes tipos de sistemas:

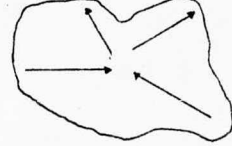
Concurrente



Paralelo

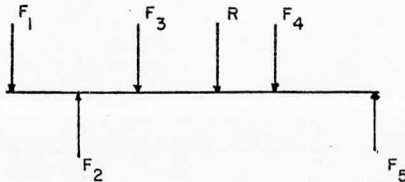


General



## 3.1.5

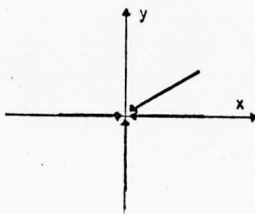
Resultante de un sistema de fuerzas; es una fuerza que por sí sola es capaz de producir el mismo efecto que todo el sistema en conjunto



$$R = \bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 - \bar{F}_5$$

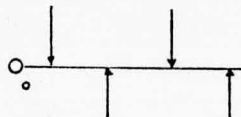
## 3.1.6

Se dice que un sistema de fuerzas está en equilibrio si las sumas tanto de fuerzas como de los momentos que estas producen es igual a cero



$$\sum F_x = 0$$

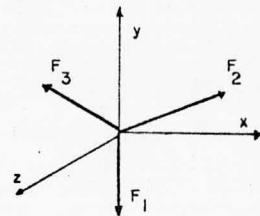
$$\sum F_y = 0$$



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

$$\sum F_x = 0$$



$$\sum F_x = 0$$

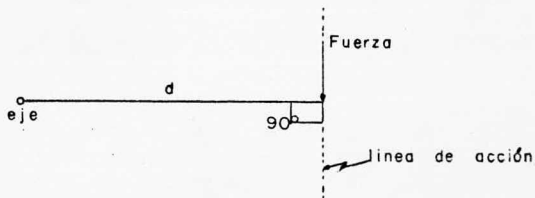
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

## 3.1.7

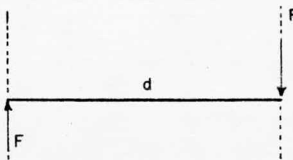
Momento de una fuerza (o par) con respecto a un eje es una medida de la efectividad de la fuerza para producir una rotación alrededor de dicho eje. Su valor numérico es el producto del módulo de la fuerza por la distancia del eje de rotación a la línea de acción de aquella.

$$M = F \cdot d$$



## 3.1.8

UN PAR está formado por dos fuerzas del mismo módulo con líneas de acción paralelas entre sí y de sentido contrario. Un par aplicado a un cuerpo solo le puede producir un movimiento de rotación.



## 3.1.9

Para fuerzas en el espacio

$$R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2 + \sum F_z^2}$$

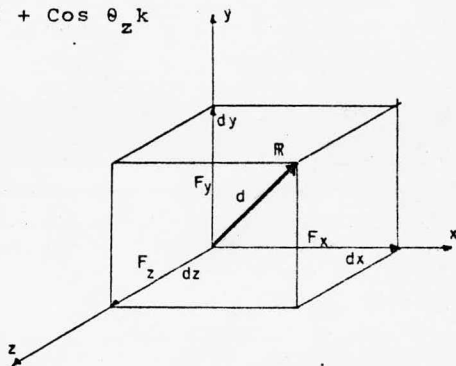
$$R = F \lambda \quad ; \quad \lambda = \text{vector unitario}$$

$$\lambda = \cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k$$

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{dx}{d}$$

$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{dy}{d}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{dz}{d}$$



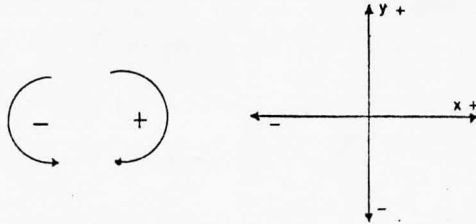


## 3.1.10

## CONVENCION DE SIGNOS

Las fuerzas que tengan dirección hacia arriba o hacia la derecha, serán positivas.

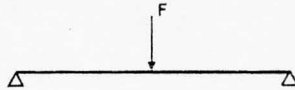
Si el momento de una fuerza produce un giro en el sentido de las manecillas del reloj (sentido horario) éste será considerado como positivo; en caso contrario, el momento será negativo.



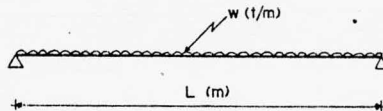
## 3.1.11

## TIPOS DE CARGAS (fuerzas)

Concentrada; es la que se aplica en un sólo punto.



Repartida uniforme; se aplica a lo largo de un elemento con la misma intensidad en todos sus puntos.

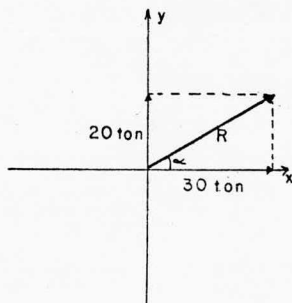


Para motivos de cálculo concentramos la carga "w" multiplicando ésta por la longitud "L". La fuerza resultante de la operación ( $w \cdot L$ ) se localizará a una distancia  $L/2$  de los extremos. Esto es debido a que la carga es igual en todos los puntos de la longitud "L".

## PROBLEMAS RESUELTOS

3.2 RESULTANTES DE SISTEMAS DE FUERZAS EN UN PLANO (coplanares).

3.2.1 Encontrar la resultante del siguiente sistema de fuerzas.



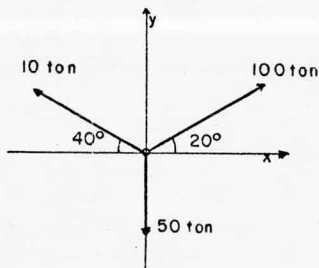
Las fuerzas actúan sobre un mismo plano y son perpendiculares entre sí, por lo tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras podemos encontrar la resultante:

$$R = \sqrt{(30)^2 + (20)^2} = \sqrt{900 + 400} = \sqrt{1300}$$

$$R = 36.05 \text{ ton.}$$

$$\alpha = \angle \text{Tan} \frac{20}{30} = 33.7^\circ$$

3.2.2 Encontrar la resultante del sistema siguiente.



Para este caso encontramos que las fuerzas no todas coinciden con los ejes.

Tomaremos como positivas las fuerzas dirigidas hacia arriba y a la derecha, en caso contrario serán negativas.

Si proyectamos todas las fuerzas sobre los ejes encontraremos que las fuerzas estarán sólo en dos direcciones "x", "y".

Sumando algebraicamente éstas componentes encontraremos una fuerza representativa de la dirección "x", y otra de la dirección "y". Además si obtenemos la resultante de estas dos fuerzas estaremos obteniendo la resultante del sistema. Podemos concluir entonces que:

$$R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2}$$

Fuerza (ton)	componentes	
	horizontal (x)	vertical (y)
10	$10 \cos 40^\circ = 7.66$	$10 \sin 40^\circ = 6.43$
100	$100 \cos 20^\circ = 93.97$	$100 \sin 20^\circ = 34.2$
50	0	50
	$\Sigma F_x = 101.63$	$\Sigma F_y = 90.63$

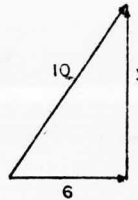
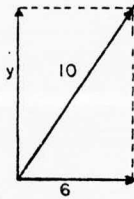
$$R = \sqrt{(101.63)^2 + (90.63)^2}$$

$$R = 136.17 \text{ ton.}$$

$$\alpha = \angle \text{Tan} \frac{90.63}{101.63} = 41.72^\circ$$

## 3.2.3

Sabiendo que el vector fuerza resultante de otros dos -- que forman un ángulo recto es de 10 kp, y que uno de --- ellos es de 6 kp, calcular el otro



Solución:

Sea Y el vector fuerza buscado. Se construye un rectángulo de forma que uno de sus lados representa un vector fuerza de 6 kp y su diagonal al de 10 kp. El otro lado -- representará Y.

También se puede construir un triángulo rectángulo de -- manera que uno de sus catetos represente al vector fuerza de 6 kp y su hipotenusa al de 10 kp.

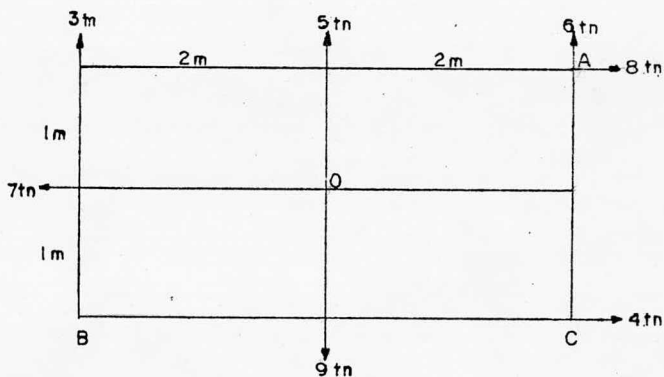
$$y^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$Y = 8 \text{ kp.}$$

3.2.4

Sobre el rectángulo de la figura actúan las fuerzas de 8,6,5,3,7,9, y 4 ton representadas. Calcular:

a)- La suma algebraica de momentos respecto a los puntos A,B,C, y el centro O de la figura.



Solucion:

Momento = magnitud de la fuerza x distancia del eje a la directriz de la misma.

Sean negativos los momentos en el sentido de las agujas del reloj y positivos al contrario.

$$M_A = 8(0) + 6(0) - 5(2) - 3(4) - 7(1) + 9(2) + 4(2) = -3 \text{ t-m}$$

$$M_B = -8(2) + 6(4) + 5(2) + 3(0) + 7(1) - 9(2) + 4(0) = +7 \text{ t-m}$$

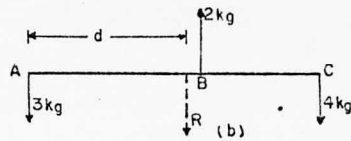
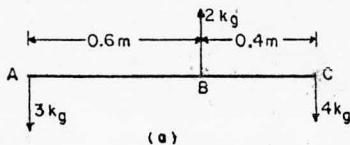
$$M_C = -8(2) + 6(0) - 5(2) - 3(4) + 7(1) + 9(2) + 4(0) = -13 \text{ t-m}$$

$$M_O = -8(1) + 6(2) + 5(0) - 3(2) + 7(0) + 9(0) + 4(1) = +2 \text{ t-m}$$

3.2.5

Una barra AC de 1 m de longitud está sometida a la acción de tres fuerzas verticales, como se indica en la figura. Suponiendo que el peso de la barra es despreciable, calcular:

- La suma algebraica de las fuerzas aplicadas a ella.
- La suma algebraica de los momentos con respecto a un eje que pase por cada uno de los puntos siguientes: A, B, C.
- La resultante y equilibrante del sistema de fuerzas dado.



Solución:

- a)- Sean positivas las fuerzas de sentido hacia arriba,  
 $\sum F = -3 + 2 - 4 = -5 \text{ kg}$  (hacia abajo)

$$b) - \sum M_A = 3(0) + 2(0.6) - 4(1) = \boxed{-2.8 \text{ kg}\cdot\text{m}}$$

$$\sum M_B = 3(0.6) + 2(0) - 4(0.4) = \boxed{+0.2 \text{ kg}\cdot\text{m}}$$

$$\sum M_C = 3(1) - 2(4) + 4(0) = \boxed{+2.2 \text{ kg}\cdot\text{m}}$$

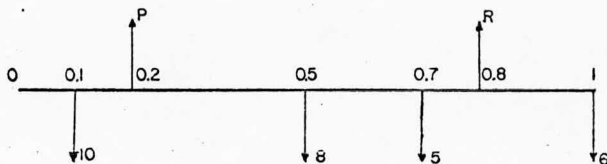
- c)- Del inciso a) tenemos que la resultante es  $R = -5 \text{ kg}$  la equilibrante es una fuerza de igual magnitud que la resultante colineal con esta pero de sentido contrario, por lo tanto la equilibrante es:  $E = +5 \text{ kg}$ .

La suma de los momentos que las fuerzas producen es necesariamente igual con el momento que produce la resultante con respecto a un mismo punto por tanto:

$$-5 \text{ kg} \times d = -2.8 \text{ kg}\cdot\text{m} \quad \boxed{d = 0.56 \text{ m}} \text{ (desde A)}$$

3.2.6

Una barra uniforme de 1 m de longitud y 8 kg de peso está apoyada en los puntos P y R situados a 20 y 80 cm, respectivamente, de uno de los extremos. Encuentre las fuerzas que actúan sobre dichos apoyos si la barra esta sometida a las acciones que se muestran en la figura:



Solución:

Sean P y R las reacciones en los apoyos. El peso de la barra uniforme, 8 kg, se considera concentrado en su punto medio.

Tomando momentos con respecto al eje perpendicular al plano de las fuerzas que pase por el punto de aplicación de P,

$$\begin{aligned} \sum M_P &= 10(0.1) + P(0) - 8(0.3) - 5(0.5) + R(0.6) - 6(0.8) \\ &= 0 \end{aligned}$$

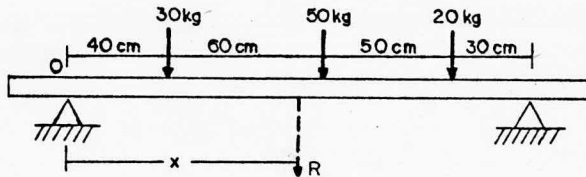
$$\sum M_P = -8.7 + R(0.6) = 0 \quad \boxed{R = 14.5 \text{ kg}}$$

Conocida la magnitud de R y proponiendo  $\sum F_y = 0$ ,

$$\sum F_y = P + 14.5 - 10 - 8 - 5 - 6 = 0$$

$$\boxed{P = 14.5 \text{ kg.}}$$

3.2.7 Calcular la resultante R de las fuerzas indicadas en la figura:



Solución:

$$R = F = -30 - 50 - 20 = -100 \text{ kg}$$

Sea d la distancia de O a la directriz R. Entonces,

momento de R con respecto a O = suma de momentos de las fuerzas dadas con respecto a O

$$-R(d) = -30(40) - 50(100) - 20(150)$$

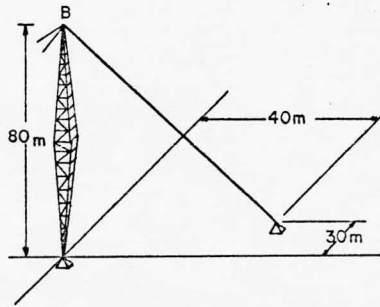
$$-100 d = -9200 \text{ kg-cm}$$

$$d = 92 \text{ cm (desde el punto O)}$$

## 3.3 RESULTANTES DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

3.3.1 El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2500 kg. Determinense:

- a)- Las componentes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  de la fuerza que actúa sobre el perno.  
 b)- Los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  que definen la dirección de la fuerza.



a)- Componentes de la fuerza.

El alambre está dirigido del punto A hacia el punto B. Las componentes del vector  $\overline{AB}$ , que tiene la misma dirección que la fuerza, son:

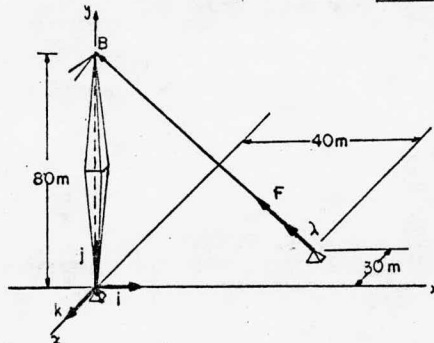
$$dx = -40 \text{ m}$$

$$dy = +80 \text{ m}$$

$$dz = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es:

$$AB = d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 94.3 \text{ m}$$





Representando por  $i, j, k$  los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, tenemos:

$$\vec{AB} = (-40 \text{ m})i + (80 \text{ m})j + (30 \text{ m})k$$

Introduciendo el vector unitario  $\lambda = \frac{\vec{AB}}{AB}$ , escribimos:

$$F = F\lambda = F \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ kg}}{94.3 \text{ m}} \vec{AB}$$

Sustituyendo la expresión encontrada para  $AB$ , obtenemos:

$$F = \frac{2500 \text{ kg}}{94.3 \text{ m}} [(-40 \text{ m})i + (80 \text{ m})j + (30 \text{ m})k]$$

Por consiguiente las componentes de  $F$  son:

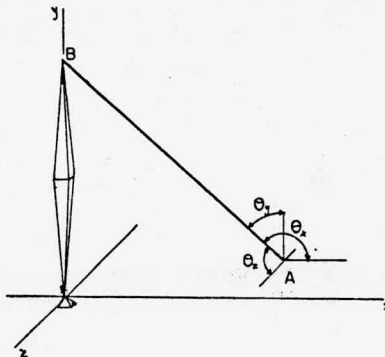
$$F_x = -1060 \text{ kg}; \quad F_y = +2120 \text{ kg}; \quad F_z = +795 \text{ kg}$$

b) - Cálculo de los ángulos.

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = -0.424 \quad \theta_x = 115.1^\circ$$

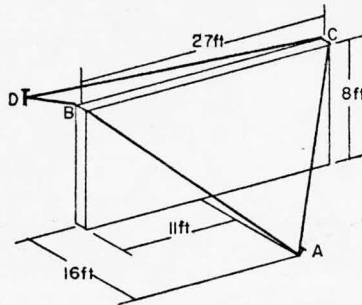
$$\cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = 0.848 \quad \theta_y = 32.0^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ kg}}{2500 \text{ kg}} = 0.318 \quad \theta_z = 71.5^\circ$$



## 3.3.2

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Sabiendo que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1200 en el cable AC, determínese la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.



Solución:

La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A será proyectada sobre los ejes  $x, y$  y  $z$ , primero determinaremos el valor de las componentes y la magnitud de los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ , midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Representando por  $i, j$  y  $k$  a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados escribimos entonces:

$$\vec{AB} = -(16 \text{ ft})i + (8 \text{ ft})j + (11 \text{ ft})k \quad \boxed{AB = 21 \text{ ft}}$$

$$\vec{AC} = -(16 \text{ ft})i + (8 \text{ ft})j - (16 \text{ ft})k \quad \boxed{AC = 24 \text{ ft}}$$

Representando por  $\lambda_{AB}$  al vector unitario a lo largo de la línea AB, tenemos:

$$T_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = T_{AB} \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} \vec{AB}$$

Sustituyendo la expresión encontrada para  $\overline{AB}$ , obtenemos:

$$T_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}} \left[ -(16 \text{ ft})i + (8 \text{ ft})j + (11 \text{ ft})k \right]$$

$$T_{AB} = -(640 \text{ lb})i + (320 \text{ lb})j + (440 \text{ lb})k$$

Análogamente para  $T_{AC}$ , tenemos:

$$T_{AC} = -(800 \text{ lb})i + (400 \text{ lb})j - (800 \text{ lb})k$$

La resultante  $R$  de las fuerzas ejercidas es:

$$R = T_{AB} + T_{AC} = -(1440 \text{ lb})i + (720 \text{ lb})j - (360 \text{ lb})k$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1650 \text{ lb}$$

$$\cos \theta_x = \frac{-1440 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = -0.8727$$

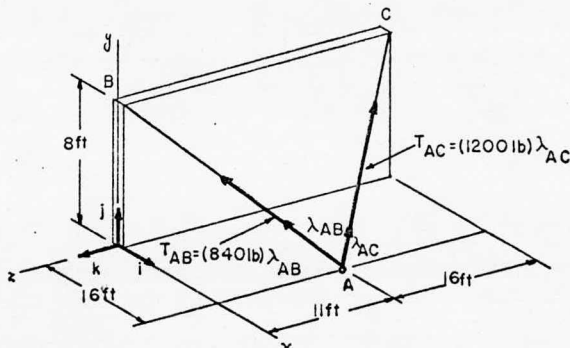
$$\cos \theta_y = \frac{+720 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = 0.4364$$

$$\cos \theta_z = \frac{-360 \text{ lb}}{1650 \text{ lb}} = -0.2182$$

$$\theta_x = 150.8^\circ$$

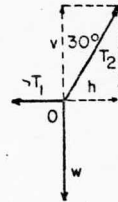
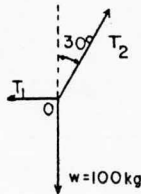
$$\theta_y = 64.1^\circ$$

$$\theta_z = 102.6^\circ$$



## 3.4 Equilibrio de sistemas coplanares.

- 3.4.1 Un peso de 100 kg se mantiene en equilibrio suspendido de dos cuerdas, como se presenta en la figura. Una de las cuerdas tira en dirección horizontal y la otra forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. calcular la tensión en las cuerdas.



Solución:

Sean  $T_1$  y  $T_2$  las tensiones buscadas y  $w=100$  kg el peso. Se decompone  $T_2$  en sus proyecciones  $h$  y  $v$ , horizontal y vertical, respectivamente.  $T_1$  carece de componente vertical y  $w$  de horizontal.

El punto  $O$  se encuentra en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas  $w$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  por lo tanto,

$\Sigma F_x = 0$  ; es decir, la suma algebraica de las componentes horizontales vale cero.

$$\Sigma F_x = h - T_1 = 0$$

$$h = T_1$$

$\Sigma F_y = 0$  ; es decir, la suma algebraica de las componentes verticales vale cero.

$$\Sigma F_y = v - w = 0$$

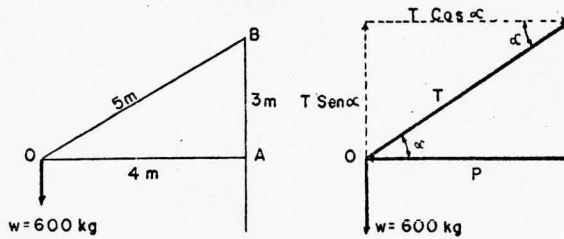
$$v = w = 100 \text{ kg}$$

$$T_1 = h = v \tan 30^\circ = 100 \text{ kg} (0.577) = 57.5 \text{ kg}$$

$$T_2 = \frac{w}{\cos 30^\circ} = \frac{100 \text{ kg}}{0.866} = 115 \text{ kg}$$

3.4.2

Un peso de 600 kg está suspendido de un poste por medio de la barra OA, de 4 m de longitud, articulada en A, y de la cuerda OB, unida al poste en el punto B situado 3 metros por encima de A. Calcular la tensión T en la cuerda OB y el empuje P en la barra AO. Se supone que la barra es de peso despreciable.



Solución:

El punto O está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas T, P y  $w = 600$  kg. Por tanto,

$$\sum F_y = 0 ; \quad T \operatorname{sen} \alpha - w = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} \quad T(3/5) - 600 = 0$$

$$T = 1000 \text{ kg}$$

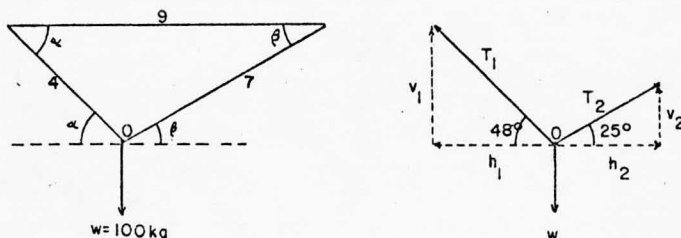
$$\sum F_x = 0 ; \quad T \operatorname{cos} \alpha - P = 0$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5} \quad 1000 \text{ kg} (4/5) - P = 0$$

$$P = 800 \text{ kg}$$

3.4.3

Los extremos de una cuerda de 11 m de longitud se unen a dos ganchos colocados en un techo horizontal y separados entre sí 9 m. A los 4 m de uno de los extremos de la cuerda se une un peso de 100 kg. Calcular la tensión en los dos segmentos de cuerda.



Solución:

Entre los dos tramos de cuerda y el techo se forma un triángulo oblicuángulo con los tres lados conocidos. Aplicando la ley de los cosenos para este tipo de figura tenemos que:

$$7^2 = 4^2 + 9^2 - 2(4)(9) \cos \alpha \quad \boxed{\alpha = 48^\circ}$$

$$4^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9) \cos \beta \quad \boxed{\beta = 25^\circ}$$

El punto O se encuentra en equilibrio bajo la acción de las cargas  $T_1$ ,  $T_2$  y  $w$ . Estableciendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 ; \quad -T_1 \cos 48^\circ + T_2 \cos 25^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad T_1 \sin 48^\circ + T_2 \sin 25^\circ - 100 \text{ kg} = 0$$

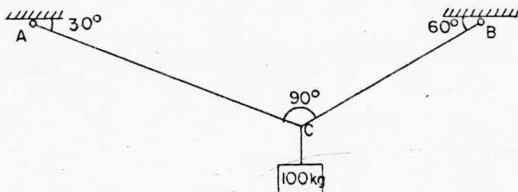
El planteamiento de las ecuaciones produce un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al resolverse:

$$\boxed{T_1 = 95 \text{ kg}}$$

$$\boxed{T_2 = 70 \text{ kg}}$$

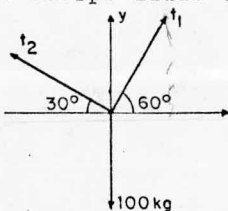
## 3.4.4

Dos cables sostienen una carga de 100 kg en la posición que muestra la figura. Calcular la tensión a la que están sometidos los cables AC y BC, suponiendo que estos, son flexibles, inextensibles y sin peso.



El sistema está trabajando en un solo plano (es un sistema coplanar) y todas las fuerzas concurren en el punto C, por lo tanto establecemos que con  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$  podemos establecer el equilibrio.

El sistema puede quedar representado por el diagrama de cuerpo libre siguiente:



Sea,  $\sum F_x = 0$

$$\sum F_x = T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = T_1 \sin 60^\circ + T_2 \sin 30^\circ - 100 = 0$$

Observemos que el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio nos lleva a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $T_1$  y  $T_2$ ) en el cual los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos harán el papel de los coeficientes de las variables. Así el sistema es:

$$0.500 T_1 - 0.866 T_2 = 0$$

$$0.866 T_1 + 0.500 T_2 = 100$$

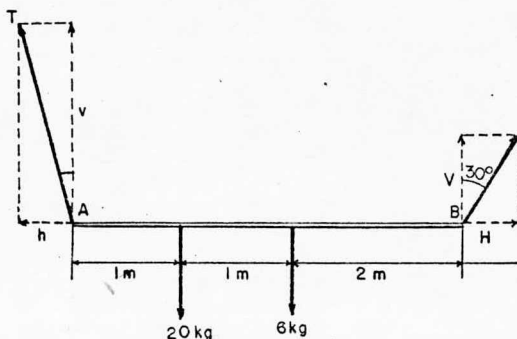
Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos conocidos (Determinantes, igualación etc.) los valores de las tensiones quedan:

$$T_1 = 86.6 \text{ kg}$$

$$T_2 = 50 \text{ kg}$$

3.4.5

Una barra uniforme AB, de 4 m de longitud y 6 kg de peso, está soportada horizontalmente por dos cuerdas unidas a sus extremos como se muestra en la figura. Calcular la tensión T en la cuerda unida a A y el ángulo que ésta forma con la vertical.



Solución:

Sean  $h$  y  $v$  las componentes horizontal y vertical, respectivamente de la tensión de la cuerda unida en A y  $H$  y  $V$  las correspondientes a la tensión de la cuerda unida en B.

La barra está en equilibrio. Por tanto,

Si tomamos momentos con respecto a un eje que pase por A:

$$M_A = V(4) - 6(2) - 20(1) = 0$$

$$V = 8 \text{ kg}$$

$$\sum F_x = H - h = 0 ; \quad h = H = V \operatorname{tg} 30^\circ = 8(0.5774)$$

$$h = 4.62 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = v + 8 - 20 - 6 = 0$$

$$v = 18 \text{ kg}$$

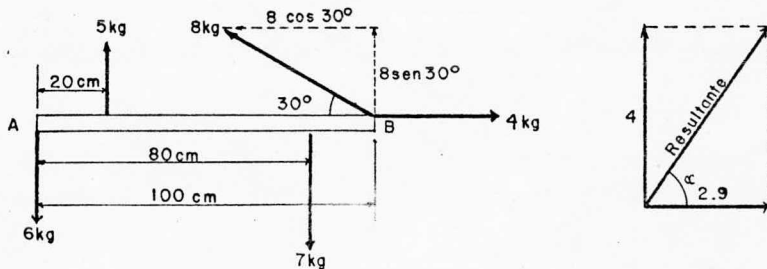
$$T = \sqrt{(4.64)^2 + (18)^2} = 18.6 \text{ kg}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \tan(4.64/18) = 14.4^\circ$$



## 3.4.6

Sobre una barra de peso despreciable y 100 cm de longitud actúan las fuerzas representadas en la figura. Encuentre la equilibrante del sistema y su punto de aplicación.



En la figura se ha descompuesto la fuerza de 8 kg en sus proyecciones vertical y horizontal (v,h). Sean V y H las componentes vertical y horizontal de la equilibrante. Considerando que el cuerpo está en equilibrio entonces:

$$\sum F_x = 0 ; \quad 4 - 8 \cos 30^\circ + H = 0 ;$$

$$H = + 2.9 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad 5 + 8 \sin 30^\circ - 6 - 7 + V = 0$$

$$V = + 4.0 \text{ kg}$$

$$\text{La equilibrante} = E = (2.9)^2 + (4.0)^2$$

$$E = 4.9 \text{ kg}$$

Sea x la distancia desde el punto A hasta el sitio de aplicación de la equilibrante. Proponiendo la suma de momentos en A:

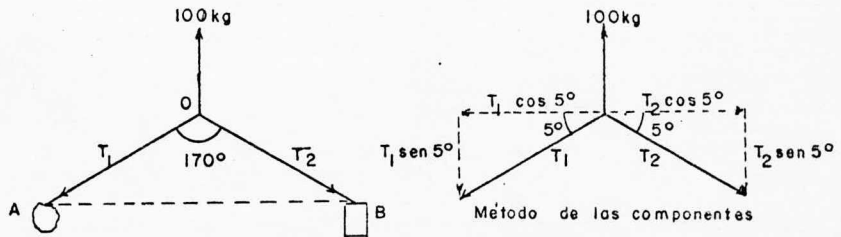
$$M_A = 5(20) - 7(80) + 8 \sin 30^\circ (100) + V(x) = 0$$

$$x = 15 \text{ cm}$$

$$\alpha = \arctan (4.0/2.9) = 54^\circ$$

## 3.4.7

Para sacar a un automóvil de una zanja, se ata el extremo A de una cuerda AOB a un árbol y el otro extremo B al coche. En el punto medio O de la cuerda AB se ejerce un empuje de 100 ton en dirección perpendicular a AB. Calcular la tensión T en la cuerda, sabiendo que el ángulo AOB es de  $170^\circ$ .



El punto O está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas  $T_1$ ,  $T_2$ , y 100 kg. Por consiguiente:

$$\Sigma F_x = 0 ; \quad - T_1 \cos 5^\circ + T_2 \cos 5^\circ = 0$$

$$T_1 = T_2 \text{ (tensión en la cuerda)}$$

$$\Sigma F_y = 0 ;$$

$$\Sigma F_y = 100 \text{ ton} - T_1 \text{ sen } 5^\circ - T_2 \text{ sen } 5^\circ = 0$$

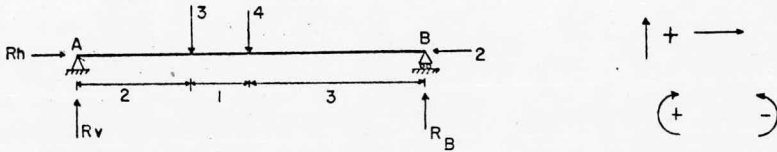
$$2T \text{ sen } 5^\circ = 100 \text{ ton}$$

$$T = \frac{100 \text{ ton}}{2 \text{ sen } 5^\circ}$$

$$T = 573 \text{ ton}$$

3.4.8

En la barra mostrada en la figura, calcule las reacciones en los apoyos.



En primer término, vemos que el apoyo del extremo A es de tipo articulado y por tanto produce dos reacciones, una vertical y una horizontal, mientras que el apoyo - B es de tipo simple y sólo produce una reacción vertical, a esta combinación de apoyos nos referimos al decir que una viga está simplemente apoyada.

Estableciendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$R_h - 2 \text{ ton} = 0 \quad \text{Entonces: } \boxed{R_h = 2 \text{ ton}}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$R_v - 3 \text{ ton} - 4 \text{ ton} + R_B = 0$$

Está es una ecuación de dos incógnitas, por lo tanto no se puede resolver. En vista de lo anterior, si planteamos la ecuación de  $\sum M_o = 0$  :

$$\sum M_A = R_v(0) + 3(2) + 4(3) - R_B(6) + 2(0) + R_h(0) = 0$$

$$\boxed{R_B = 3 \text{ ton}}$$

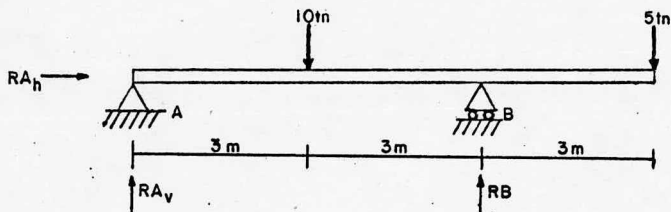
Al sustituir el valor  $R_B = 3$  en la ecuación  $F_y$  obtenemos la última incógnita ( $R_v$ ),

$$R_v - 3 - 4 + 3 = 0$$

$$\boxed{R_v = 4 \text{ ton}}$$

3.4.9

Encontrar las reacciones en los apoyos de la barra mostrada en la figura; la barra esta simplemente apoyada.



$$\Sigma F_x = 0 ;$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 ;$$

$$R_{Av} = 10 + R_B - 5 = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 ;$$

$$R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 10(3) - R_B(6) + 5(9) = 0$$

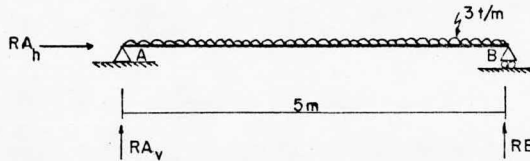
$$R_B = \frac{30 + 45}{6} = \boxed{12.5 \text{ ton}}$$

Sustituyendo  $R_B = 12.5 \text{ ton}$  en  $F_y$ :

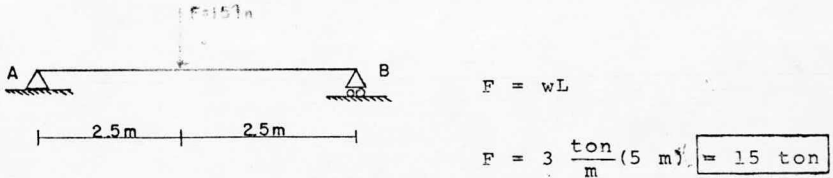
$$R_{Av} = -10 + 12.5 - 5 = 0$$

$$R_{Av} = \boxed{2.5 \text{ ton}}$$

- 3.4.10 Encontrar las reacciones en los apoyos A y B de la barra que se muestra en la figura siguiente:



Se observa que en este ejemplo, la carga es uniformemente distribuida a lo largo de la barra. Este tipo de carga puede transformarse de distribuida en concentrada, si calculamos la resultante de todas las fuerzas que actúan a lo largo de la barra. La fuerza resultante estará actuando en el centroide de la carga, de modo que:



El sistema se ha transformado de una manera tal que nos permita por medio de una suma de momentos, encontrar -- las reacciones verticales. Cabe señalar que en problemas como este en donde las acciones todas son verticales la reacción horizontal del apoyo articulado siempre vale cero.

Procediendo con el cálculo de las reacciones:

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$R_{Ah} = 0$$

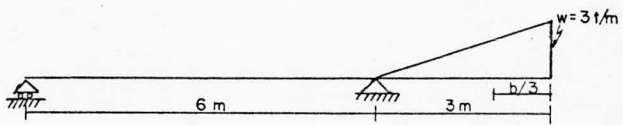
$$\sum M_A = R_{Av}(0) + 15(2.5) - R_B(5) = 0$$

$$R_B = 7.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 15 + 7.5 = 0$$

$$R_{Av} = 7.5 \text{ ton}$$

3.4.11 Calcular las reacciones en la barra siguiente, considerando que está simplemente apoyada y tiene una carga distribuida triangularmente como se muestra en la figura.



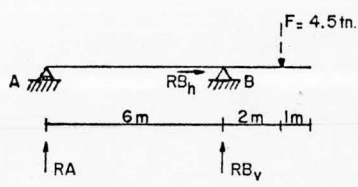
El presente ejercicio muestra un tipo de carga un tanto especial, nos referimos a la carga triangular. De forma parecida a la transformación del ejemplo anterior, convertiremos esta carga en otra de tipo concentrada.

Las cargas triangulares se convierten a concentradas al obtener el area de la figura, que formada por la base de 3 metros y la altura de 3 ton/m, correspondientes a las dimensiones del triangulo. Aplicando la formula del area:

$$F = \frac{bw}{2}$$

$$F = \frac{1}{2} (3 \text{ m}) (3 \frac{\text{t}}{\text{m}}) = \boxed{4.5 \text{ ton}}$$

$$\bar{x} = b/3 = 1 \text{ m}$$



$$R_{Bh} = 0$$

$$\sum F_x = 0 ;$$

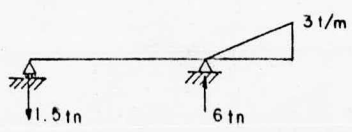
$$\sum M_A = R_A (0) + R_{Bv} (6) - 4.5 (8) = 0$$

$$\boxed{R_{Bv} = 6 \text{ ton}}$$

$$\sum F_y = R_A + 6 - 4.5 = 0$$

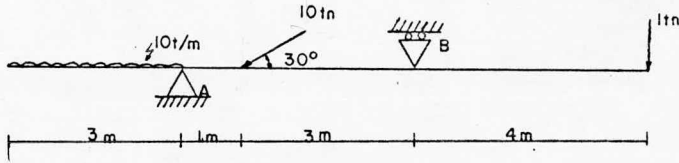
$$\boxed{R_A = -1.5 \text{ ton}}$$

Observemos que el valor de  $R_A$  es negativo. Cuando esto sucede significa que el sentido de la reacción, sea momento o una fuerza, tiene mal supuesto su sentido. Originalmente  $R_A$  fue supuesta hacia arriba (con sentido positivo) pero, dado que el signo es negativo, su verdadero sentido es hacia abajo (negativo), como veremos enseguida:



3.4.12

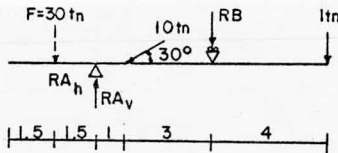
Encontrar las reacciones en la barra de la figura siguiente:



A diferencia de ejemplos anteriores en este caso uno de los apoyos está en la parte superior de la barra, esto no afecta en gran medida, el equilibrio de la estructura se propone de la misma forma en que se ha hecho con los ejemplos anteriores.

El apoyo A es articulado y el apoyo B es simple. Con centrando la carga repartida y proponiendo el sentido de las reacciones tenemos que:

$$F = 10 \text{ t/m (3 m)} = 30 \text{ ton}$$



$$\sum F_x = R_{Ah} - 10 \cos 30^\circ = 0$$

$$R_{Ah} = 8.66 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = -30(1.5) + R_{Av}(0) + R_{Bh}(0) + 10 \cos 30^\circ$$

$$+ 10 \sin 30^\circ(1) + R_B(4) + 1(8) = 0$$

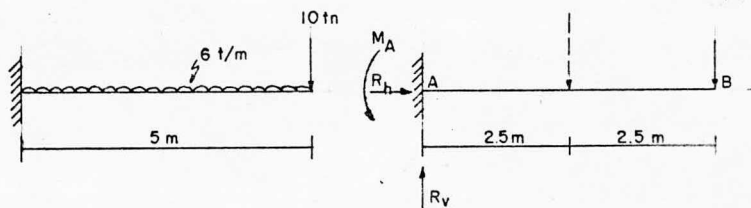
$$R_B = 8.0 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = -30 + R_{Av} - 10 \sin 30^\circ - 8 - 1 = 0$$

$$R_{Av} = 44 \text{ ton}$$

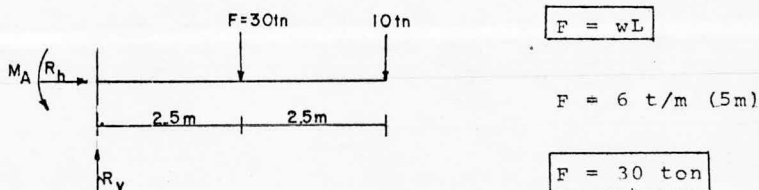
3.4.13

Encontrar las reacciones de la barra que se muestra en la figura, considerando que ésta tiene un extremo empotrado mientras que el otro permanece libre.



Como sabemos, un empotramiento produce 3 reacciones un momento concentrado y dos fuerzas perpendiculares entre sí (una vertical y una horizontal).

Concentrando la carga repartida y proponiendo el sentido de las reacciones, el sistema queda:



Estableciendo el equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 ; \quad R_h + 0 = 0 \quad R_h = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad R_v - 30 - 10 = 0 \quad R_v = 40 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

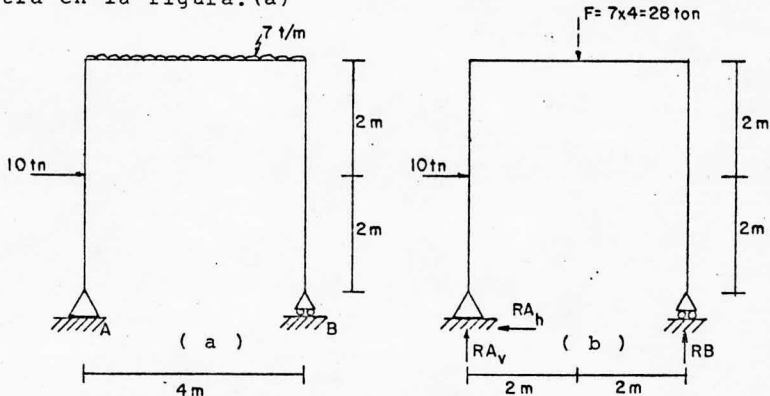
$$-M_A + R_v(0) + 30(2.5) + 10(5) = 0 \quad M_A = 125 \text{ t-m}$$

Puesto que todos los resultados son positivos, las reacciones están bien supuestas.



3.4.14

Encontrar las reacciones en la estructura que se muestra en la figura. (a)



En la figura b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura con las fuerzas activas y reactivas que existen sobre ella. El apoyo A es de tipo articulado y el B es simple.

Proponiendo las ecuaciones de equilibrio:

$$\sum F_x = -R_{Ah} + 10 = 0$$

$$R_{Ah} = 10 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 10(2) + 28(2) - R_B(4) = 0$$

$$R_B = 19 \text{ ton}$$

Sustituyendo el valor de  $R_B$  en  $\sum F_y$ :

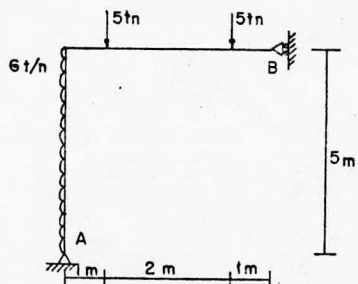
$$\sum F_y = R_{Av} - 28 + R_B = 0$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 28 + 19 = 0$$

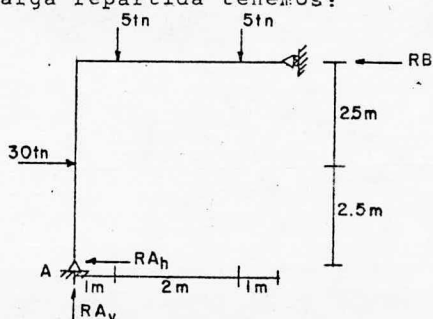
$$R_{Av} = 9 \text{ ton}$$

3.4.15

Encuentre las reacciones de la siguiente estructura,



Proponiendo el sentido de las reacciones y concentrando la carga repartida tenemos:



Estableciendo el equilibrio:

$$\sum F_x = 30 - R_{Ah} - R_B = 0$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 5 - 5 = 0$$

$$R_{Av} = 10 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = R_{Av}(0) + R_{Ah}(0) + 30(2.5) + 5(1) + 5(3) - R_B = 0$$

$$R_B = 13 \text{ ton}$$

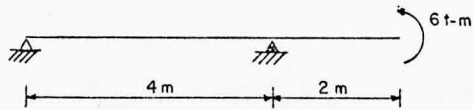
Sustituyendo  $R_B$  en  $\sum F_x$ :

$$\sum F_x = 30 - R_{Ah} - 13 = 0$$

$$R_{Ah} = 17 \text{ ton}$$

3.4.16

Encontrar las reacciones de la estructura siguiente:



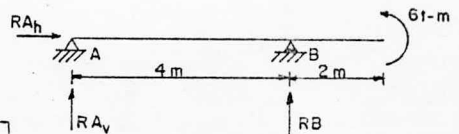
La barra es simplemente apoyada y como se observa, en este caso no hay fuerzas actuantes. La única acción sobre la viga es un momento concentrado en el extremo volado.

La solución de este problema se hace igual que en -- los anteriores. Estableciendo el diagrama de cuerpo libre y el sentido de las reacciones tenemos:

$$\sum F_x = 0 ; \quad R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_B = R_A(4) - 6 = 0$$

$$R_{Av} = 1.5 \text{ ton}$$



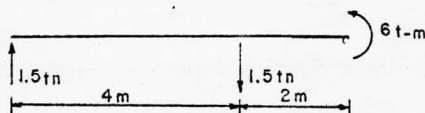
$$\sum F_y = R_{Av} + R_B = 0$$

$$\sum F_y = 1.5 + R_A = 0 ;$$

$$R_A = -1.5 \text{ ton}$$

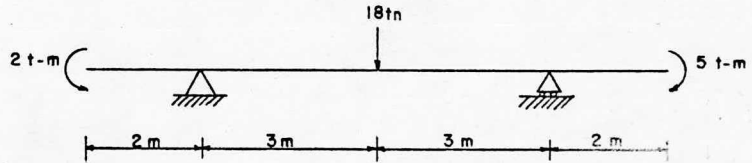
(cambiando el sentido)  $R_A = 1.5 \text{ ton}$

Como vemos, al efectuar la suma de momentos, el valor de la acción no sufre alteraciones; es decir, su efecto no varía con respecto a la distancia hasta el punto respecto al cual se toman los momentos. Podemos generalizar que las acciones o reacciones que -- sean momentos concentrados entraran en las ecuaciones como valores constantes tomándose en cuenta solo el sentido de la rotación que provocan. Las reacciones -- finalmente son:



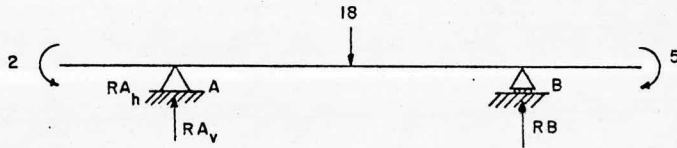
3.4.17

Encuentre las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente:



La barra esta sometida a la acción de dos momentos -- concentrados, uno en cada extremo, además de una fuerza concentrada en la parte media de la barra.

El diagrama de cuerpo libre de la estructura es:



Estableciendo el equilibrio:

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_A = -2 + 18(3) - R_B(6) + 5 = 0$$

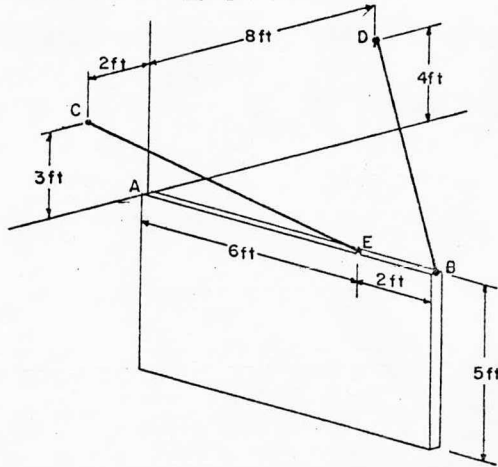
$$R_B = 9.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_{Av} - 18 + 9.5 = 0$$

$$R_{Av} = 8.5 \text{ ton}$$

3.5 Equilibrio de sistemas en el espacio (Tres dimensiones).

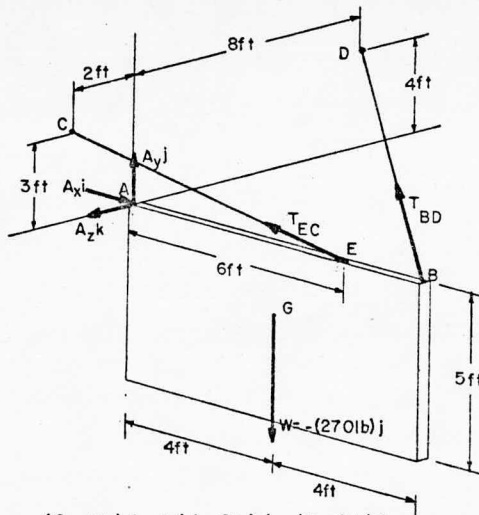
3.5.1 Un letrero de 5 x 8 ft de densidad uniforme pesa 270 lb. y lo sostienen un apoyo articulado (rotula) en A, y dos cables. Determinense las tensiones en los cables y la reacción en el apoyo A.



Solución:

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anuncio. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso  $W$ , y las reacciones en A, B y E. La reacción en A es una fuerza con dirección desconocida y se representa por sus tres componentes. Como se conocen las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables, cada una de ellas involucran sólo una incógnita, las magnitudes  $T_{BD}$  y  $T_{EC}$ . Puesto que sólo hay 5 incógnitas, el letrero está parcialmente restringido. Puede girar con libertad con respecto al eje  $x$ ; pero está en equilibrio bajo la carga dada ya que la ecuación  $\Sigma M_o = 0$  se satisface.

Las componentes de las fuerzas  $T_{BD}$  y  $T_{EC}$  pueden expresarse en términos de las magnitudes desconocidas  $T_{BD}$  y  $T_{EC}$ , basados en lo anterior tenemos que:



$$\overline{BD} = -(8 \text{ ft})i + (4 \text{ ft})j - (8 \text{ ft})k$$

$$\overline{EC} = -(6 \text{ ft})i + (3 \text{ ft})j + (2 \text{ ft})k$$

$$BD = 12 \text{ ft}$$

$$EC = 7 \text{ ft}$$

$$T_{BD} = T_{BD} \frac{\overline{BD}}{BD} = T_{BD} (-2/3 i + 1/3 j - 2/3 k)$$

$$T_{EC} = T_{EC} \frac{\overline{EC}}{EC} = T_{EC} (-6/7 i + 3/7 j + 2/7 k)$$

Establecemos ahora que las fuerzas que actúan sobre el anuncio forman un sistema equivalente a cero, escribimos entonces:

$$\Sigma F = 0 ; \quad A_x i + A_y j + A_z k + T_{BD} + T_{EC} - (270 \text{ lb})j = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ec (1)} \dots (A_x - (2/3)T_{BD} - (6/7)T_{EC})i + (A_y + (1/3)T_{BD} + (3/7)T_{EC} - 270)j \\ + (A_z - (2/3)T_{BD} + (2/7)T_{EC})k = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma M_A = \Sigma (r \times F) = 0$$

$$\begin{aligned} (8 \text{ ft})i T_{BD} (-2/3)i + (1/3)j - (2/3)k \\ + (6 \text{ ft})i T_{EC} (-6/7)i + (3/7)j + (2/7)k \\ + (4 \text{ ft})i (-270 \text{ lb})j = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ec (2)} \dots (2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080)k + (5.333T_{BD} - 1.714T_{EC})j = 0$$

Igualando a cero los coeficientes j y k de la ecuación (2) resolvemos un sistema de ecuaciones escalares donde:

$$T_{RD} = 101.3 \text{ lb}$$

$$T_{EC} = 315 \text{ lb}$$

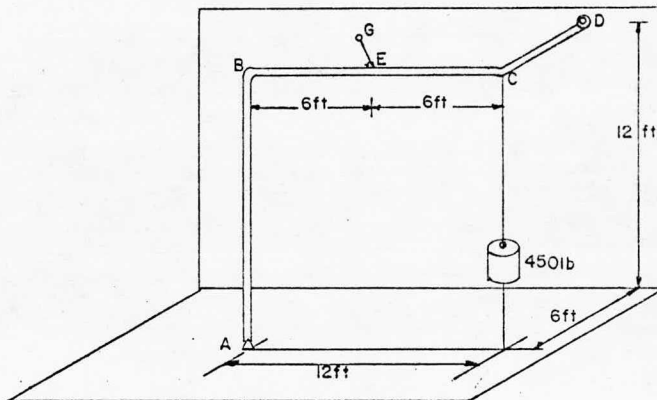
Estableciendo los coeficientes de  $i, j, k$  igual a cero de la ecuación (1), obtenemos otras tres ecuaciones -- que nos darán las componentes de  $A$ . Así obtenemos:

$$A = +(338 \text{ lb})i + (101.2 \text{ lb})j - (22.5 \text{ lb})k$$

### 3.5.2

Una carga de 450 lb pende de la esquina C de un pedazo de tubo rígido AECD que se ha doblado en la forma indicada. El tubo está sostenido por apoyos de bola y -- cuenca (rotulas) en A y D fijos al piso y a la pared -- vertical, respectivamente y por un cable atado en el -- punto medio E de la porción BC del tubo y fijo en un -- punto G de la pared. Determinéense:

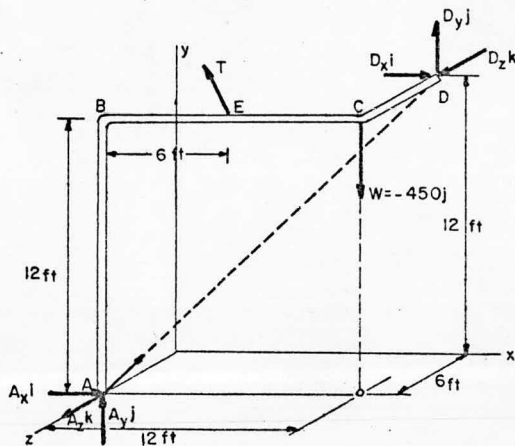
- Donde debe localizarse G, para que la tensión del cable sea mínima.
- El correspondiente valor mínimo de la tensión.



Solución:

El diagrama de cuerpo libre del tubo incluye la carga  $W = -450 j$ , las reacciones en  $A_y D$ , y la fuerza  $T$  --- ejercida en el cable. Para eliminar de los cálculos - las reacciones en  $A$  y  $D$  expresamos que la suma de momentos de las fuerzas con respecto a  $AD$  es cero. Denotando por  $\lambda$  el vector unitario a lo largo de  $AD$ .

$$\Sigma M_{AD} = 0 ; \quad \lambda \cdot (\overrightarrow{AE} \times T) + \lambda \cdot (\overrightarrow{AC} \times W) = 0 \quad \dots (1)$$



El segundo término de la ecuación (1) puede calcularse de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{AC} \times W = (12i + 12j) \times (-450j) = (-5400k)$$

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12i + 12j + 6k}{18} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$$

$\lambda \cdot (\overrightarrow{AC} \times W) = (2/3)i + (2/3)j - (1/3)k \quad (-5400k) = 1800$   
sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (1):

$$\lambda \cdot (\overrightarrow{AE} \times T) = -1800 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \dots (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Por la propiedad conmutativa del triple producto escalar, la ec. (2) queda:



$$T (\lambda x \overline{AE}) = -1800 \text{ lb-ft} \quad \dots (3)$$

que nos muestra que la proyección de  $T$  sobre el vector  $\lambda x \overline{AE}$  es una constante. Se infiere que  $T$  es mínima en la dirección paralela al vector,

$$\lambda x \overline{AE} = (2/3)i + (2/3)j - (1/3)k \times (6i + 12j)$$

$$\lambda x \overline{AE} = 4i - 2j + 4k$$

El vector unitario correspondiente es  $(2/3)i - (1/3)j + (2/3)k$ , de manera que:

$$T_{\min} = T (2/3)i - (1/3)j + (2/3)k \quad \dots (4)$$

Sustituyendo los valores de  $T$  y  $\lambda x \overline{AE}$  en la ecuación (3) encontramos  $T = -300$ . Utilizando este valor en (4), obtenemos:

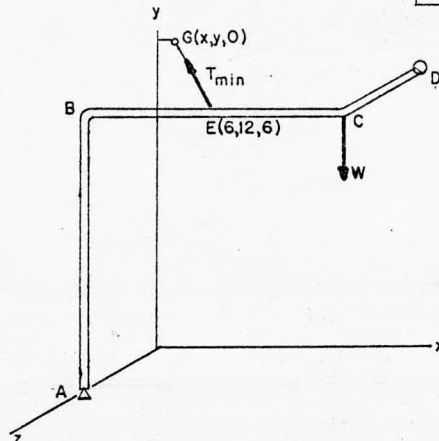
$$T_{\min} = -200i + 100j - 200k$$

$$T_{\min} = 300 \text{ lb}$$

Localización de  $G$ . Como el vector  $EG$  y la fuerza  $T_{\min}$  tienen la misma dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Denotando por  $x, y, 0$  las coordenadas de  $G$ , escribimos:

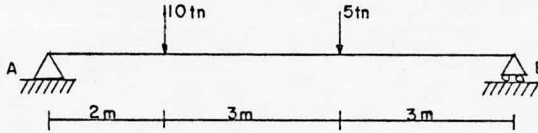
$$\frac{x - 6}{-200} = \frac{y - 12}{+100} = \frac{0 - 6}{-200}$$

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 15 \text{ ft} \end{array}$$



### 3.6 Superposicion de causas y efectos.

#### 3.6.1 Consideremos el sistema de la figura siguiente:



Si calculamos las reacciones tenemos que,

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$R_{Ah} = 0$$

$$\sum M_A = 10(2) + 5(5) - R_B(8) = 0$$

$$R_B = 5.625 \text{ ton}$$

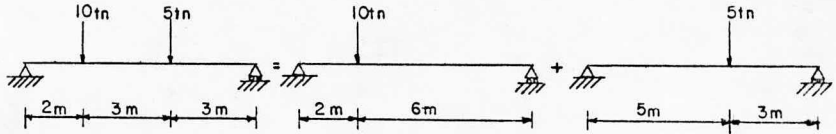
$$\sum F_y = R_{Av} - 10 = 5 + 5.625 = 0$$

$$R_{Av} = 9.375 \text{ ton}$$

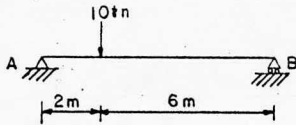
Los resultados obtenidos son representativos de los efectos que las fuerzas de 10 y 5 ton provocan en los apoyos. Podemos inferir que una parte de la reacción es provocada por la fuerza de 10 ton y el resto, por la de 5 ton. Basados en lo anterior decimos que el sistema original de fuerzas puede resolverse considerando la acción simultanea de éstas, o bien si tomamos en cuenta primero una, encontramos las reacciones que provoca, despues consideramos la otra y tambien calculamos las reacciones para finalmente sumar en forma algebraica las correspondientes reacciones, encontraremos que los resultados son iguales para ambos procedimientos.

Resolvamos el problema con otro criterio:

Sea,



Calculando las reacciones en los dos casos tenemos:



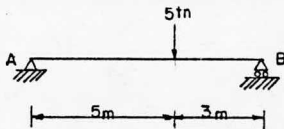
$$\Sigma F_x = 0 ; \quad R_{Ah} = 0$$

$$\Sigma M_A = 10(2) - R_B(8) = 0$$

$$R_B = 2.5 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = R_A - 10 + 2.5 = 0$$

$$R_A = 7.5 \text{ ton}$$



$$\Sigma F_x = 0 ; \quad R_{Ah} = 0$$

$$\Sigma M_A = 5(5) - R_B(8) = 0$$

$$R_B = 3.125 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = R_{Av} - 5 + 3.125 = 0$$

$$R_{Av} = 1.875 \text{ ton}$$

Sumando las reacciones tenemos lo siguiente:

$$R_{Ah} = 0 + 0 ;$$

$$R_{Av} = 7.5 + 1.875 ;$$

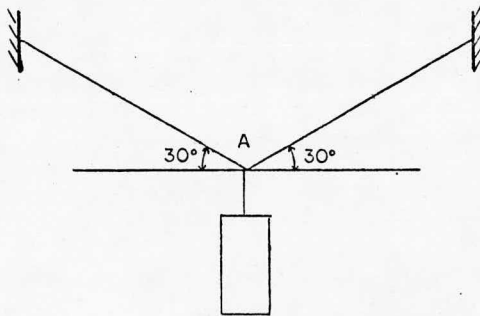
$$R_B = 2.5 + 3.125 ;$$

$$R_{Ah} = 0$$

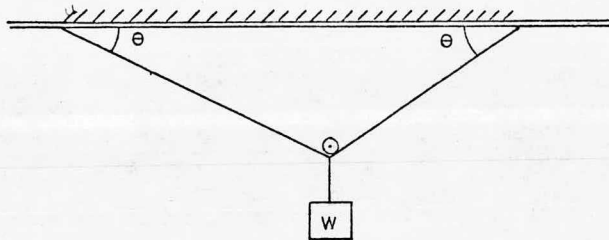
$$R_{Av} = 9.375 \text{ ton}$$

$$R_B = 5.625$$

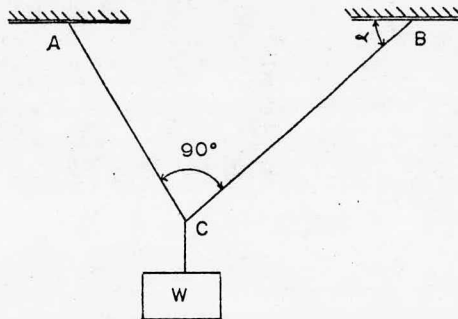
3.7.1 El semáforo de la figura pesa 500 Kg. y está sostenido por cables inextensibles y sin peso que se indican. Cál cule las tensiones en cada uno de ellos.



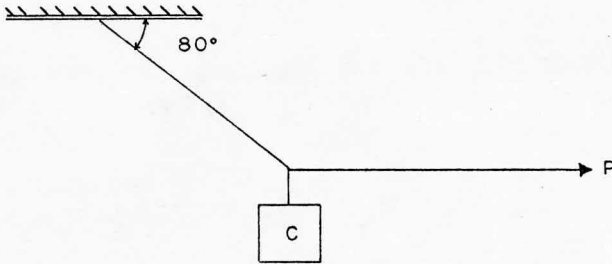
3.7.2 La polea de la figura puede deslizarse libremente sobre el cable soporte que le sirve de guía. ¿Cuál es la tensión en éste bajo las condiciones indicadas?.



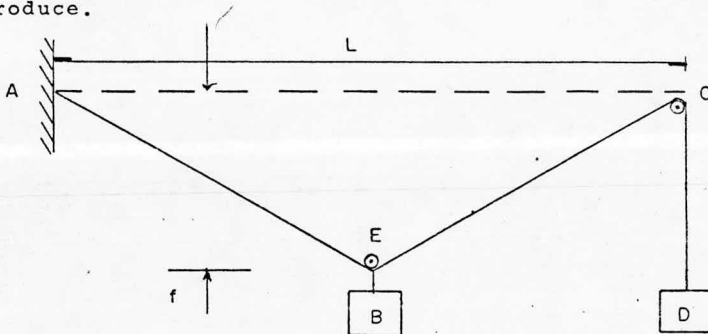
3.7.3 ¿Cuánto valen las tensiones en los cables de la figura?.



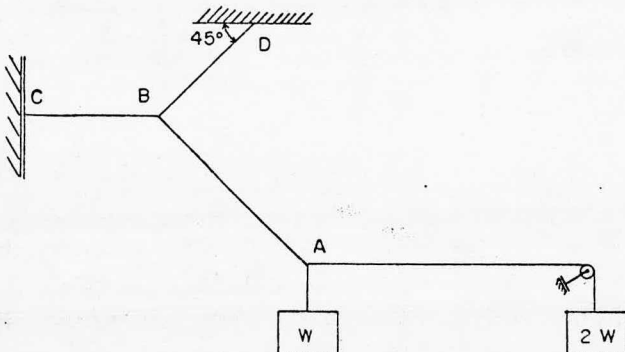
- 3.7.4 ¿Cuál es la fuerza  $P$ , necesaria para mantener el cuerpo  $C$  en la posición mostrada en la figura, si éste pesa  $200 \text{ kg}$ ?



- 3.7.5 Un cable unido al sistema Tierra en  $A$ , pasa por una polea  $C$  y sostiene como se indica en la figura, los cuerpos  $B$  y  $D$  de pesos respectivos  $W_B$  y  $W_D$ . Calcule la flecha que se produce.

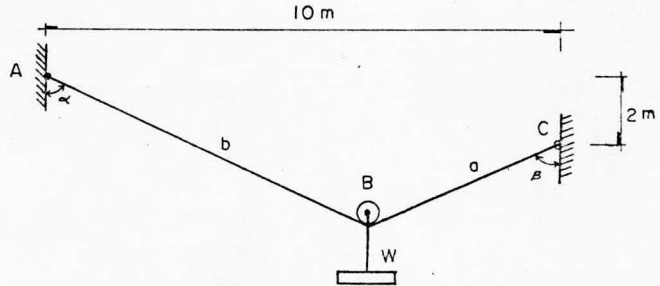


- 3.7.6 Halle la tensión en el cable  $BD$  dibujado en la figura, si la polea no tiene masa y las superficies en contacto son lisas.



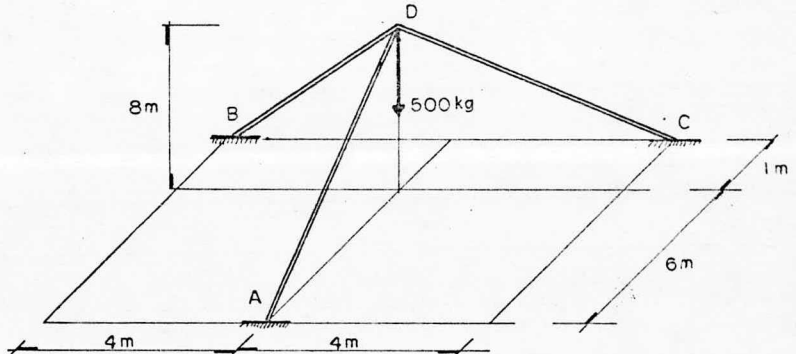
3.7.7

El cable de la figura es inextensible, sin peso, y está unido al sistema tierra en los puntos A y C. Si sostiene por medio de una polea B un cuerpo que pesa 1000 kg. Y su longitud alcanza  $10\sqrt{2}$  m; encuentre los ángulos  $\alpha$  B y la tensión en él.



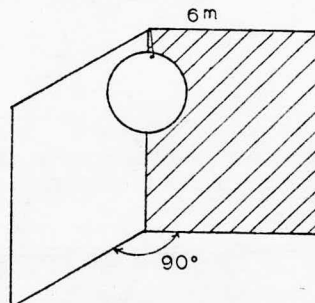
3.7.8

Cálculo las magnitudes de las compresiones en las barras AD, BD, y CD, del dispositivo mostrado en la figura.



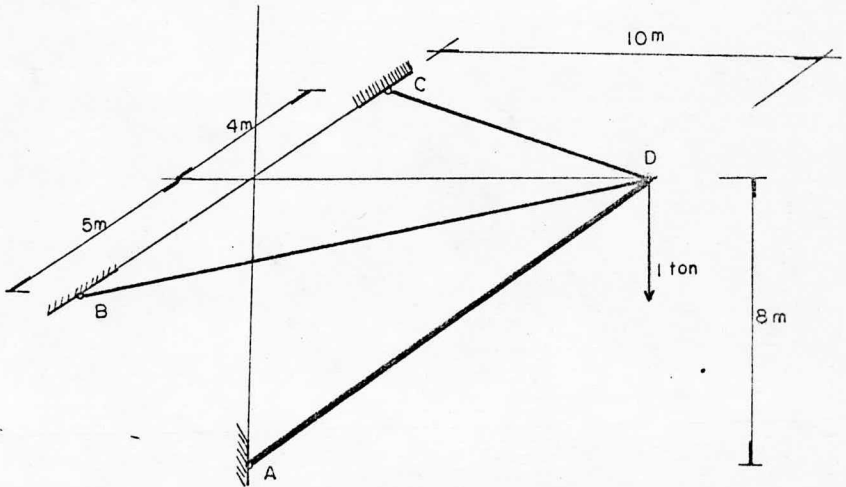
3.7.9

La esfera mostrada en la figura es de 3 m, de radio, pesa 4 ton, se encuentra recargada en dos paredes lisas y está sostenida por un cable de 6 m de largo. Encuentre la tensión en el cable y las reacciones en las paredes.



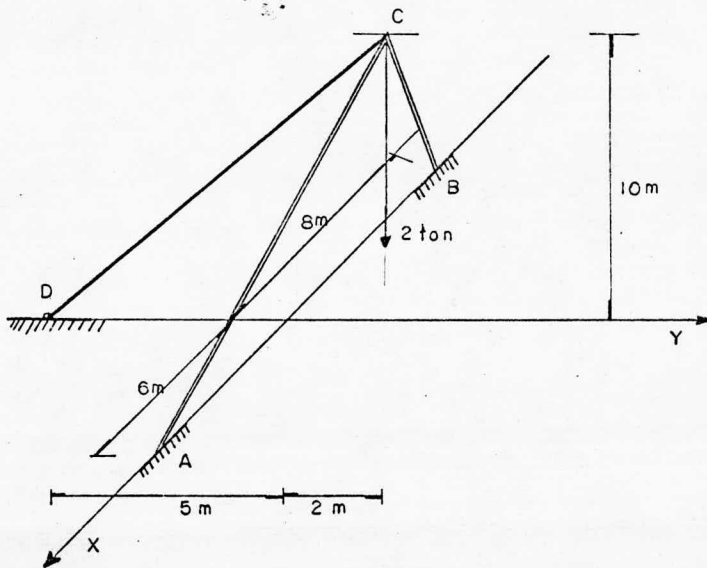
3.7.10

Determine las fuerzas axiales en los cables y en el tornapunta del dispositivo indicado en la figura, - definiendo sus naturalezas.

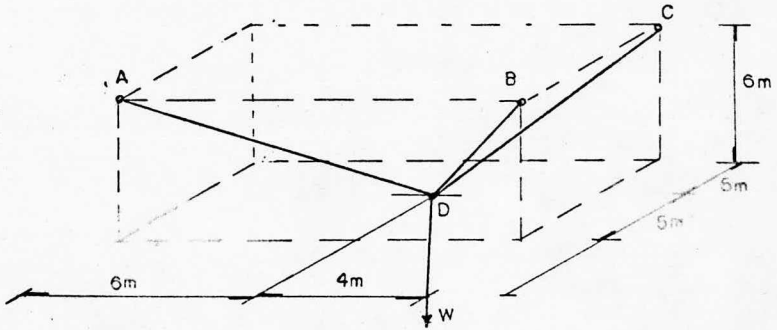


3.7.11

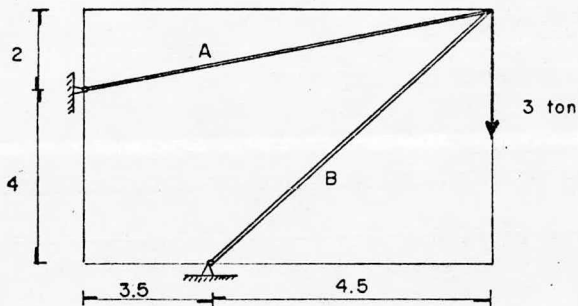
Cálculo las compresiones en las barras AC y BC, así como la tensión en el cable CD.



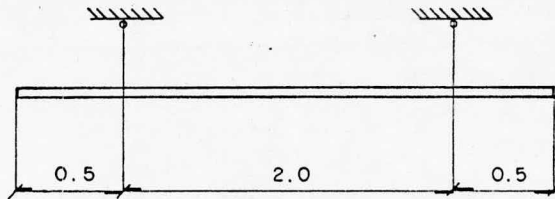
- 3.7.12 Los tres cables de la figura sostienen un cuerpo que pesa 20 ton, calcule las tensiones en aquéllos.



- 3.7.13 Determine las fuerzas que actúan en las barras A y B, cuando están sujetas a la acción de la fuerza P de 3 ton.

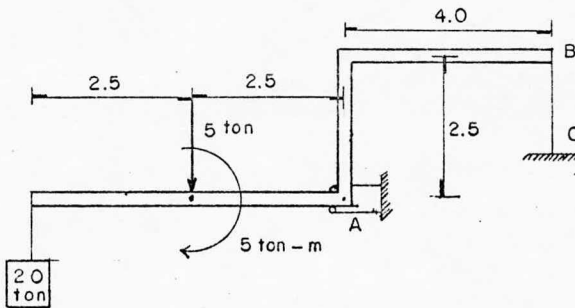


- 3.7.14 La lámpara fluorescente de la figura pesa 20 kg., encuentre las tensiones en los cables que la soportan.

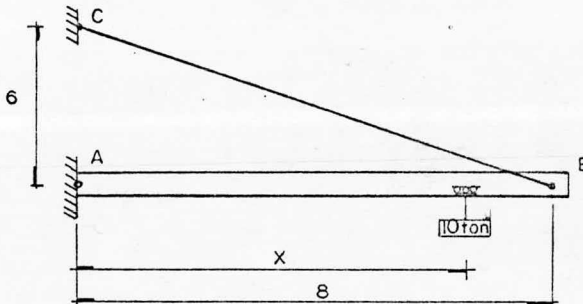




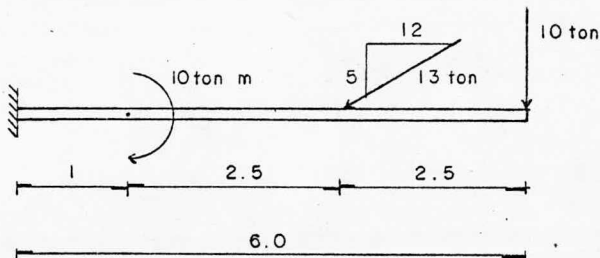
- 3.7.15 El dispositivo de la figura se encuentra en equilibrio. Calcule la reacción en la articulación de apoyo A y la tensión en el cable BC.



- 3.7.16 Obtenga como funciones de la posición de la grúa viajera, a la reacción en A y a la tensión del cable BC que, conjuntamente, mantenga a la ménsula en equilibrio. Estudie el comportamiento de aquellas.

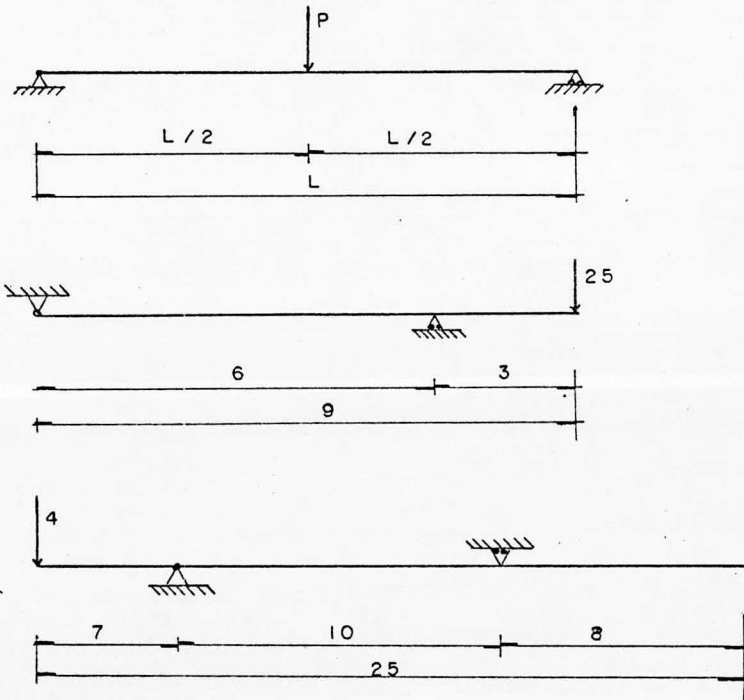


- 3.7.17 Determine las reacciones para la viga contiliver esquematizada en la figura.

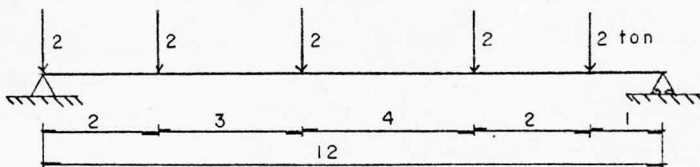


3.7.18 Deduzca una regla simple para calcular reacciones en vigas simplemente apoyadas. Considere disposiciones en términos de una carga concentrada y de acuerdo con la existencia o no de voladizos.

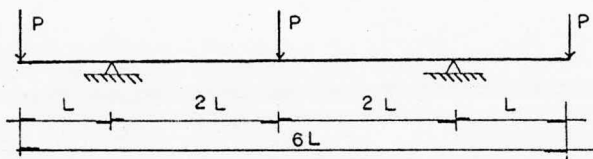
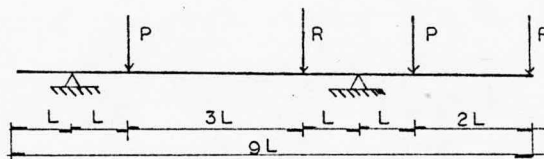
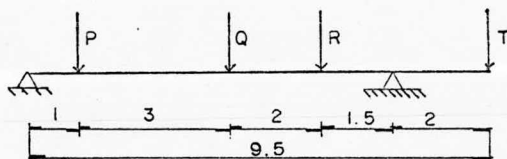
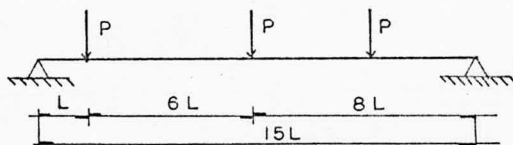
3.7.19 A base de la regla deducida en el ejemplo anterior, valga las magnitudes de las reacciones de las vigas siguientes, indicando el sentido de las fuerzas.



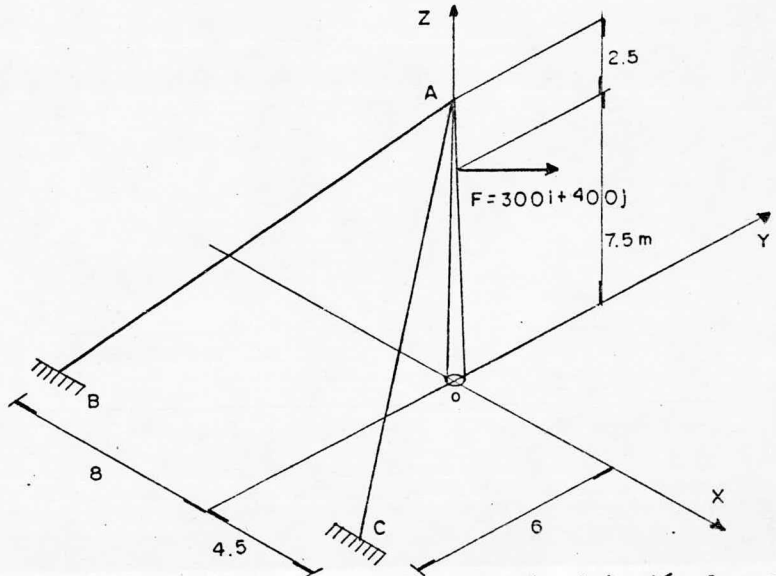
- 3.7.20 Descomponga el sistema de cargas que actúan en la viga - simplemente apoyada de la figura, buscando que puedan -- calcularse las reacciones con el empleo reiterado de la regla dada en el ejercicio 3.7.18.



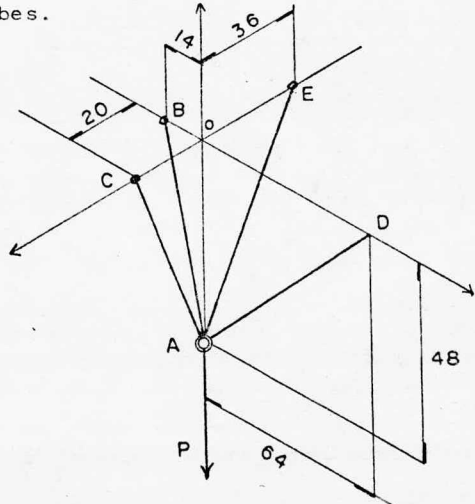
- 3.7.21 Establezca las reacciones de las vigas mostradas en la figura.



- 3.7.22 Determinar las tensiones en los retenidos del mástil OA y la reacción en la rótula que lo recibe inferiormente.



- 3.7.23 El cable BAC pasa a través de un aro sin fricción A y está unido a los soportes fijos B y C, mientras que los cables AD y AE están amarrados al aro y unidos, respectivamente, a los soportes D y E. Sabiendo que una carga vertical P de 150 lb se aplica al aro A, determínese la tensión en cada uno de los tres cables.



---

# CAPITULO IV

ELEMENTOS MECANICOS

---

CAPITULO IV  
ELEMENTOS MECANICOS  
DE LAS ESTRUCTURAS

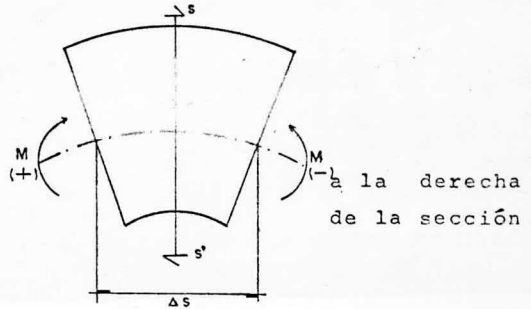
4.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

4.1.1 MOMENTO FLEXIONANTE. (M)

En una sección de un elemento estructural cualquiera, el momento flexionante es igual a la suma de los momentos - de todas las fuerzas activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección, con respecto al centroide de ésta.

Convención de signos:

a la izquierda  
de la sección



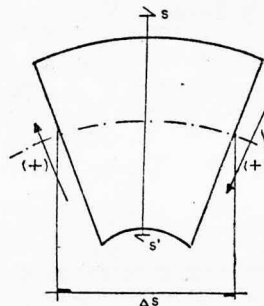
a la derecha  
de la sección

4.1.2 FUERZA CORTANTE. (V)

La fuerza cortante, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección -según la sección- de la suma de todas las fuerzas, activas y reactivas, a la izquierda o a la derecha de la misma.

Convención de signos:

a la izquierda  
de la sección



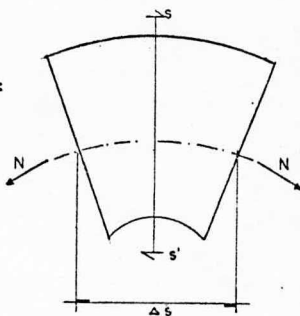
a la derecha  
de la sección

## 4.1.3 FUERZA NORMAL. (N)

La fuerza normal, en una sección de un elemento estructural cualquiera, es igual a la proyección -según la perpendicular de la sección- de la suma de todas las fuerzas -- activas y reactivas a la izquierda o a la derecha de la -- sección.

Convención de signos:

a la izquierda  
de la sección



a la derecha  
de la sección

## 4.1.4 MOMENTO TORSIONANTE. (Mt)

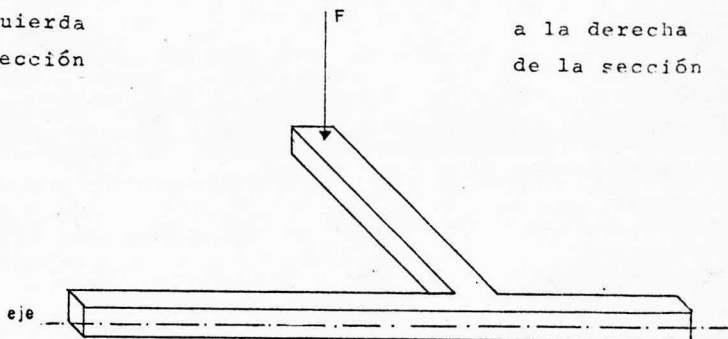
En una sección de un elemento estructural cualquiera, el momento torsionante es igual a la suma de los momentos -- de todas las fuerzas activas o reactivas, a la izquierda o a la derecha de la sección, con respecto al eje longitudinal de dicho elemento.

Convención de signos:

a la izquierda  
de la sección

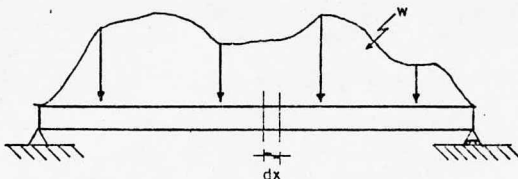


a la derecha  
de la sección

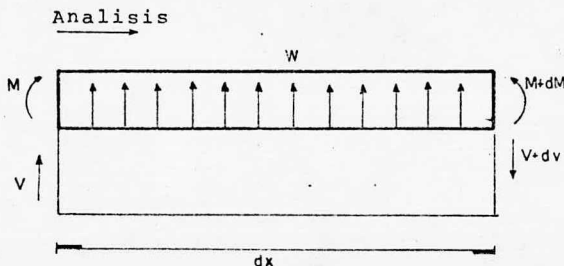


## 4.1.5 RELACIONES BASICAS

Consideremos una viga en equilibrio bajo la acción de una carga distribuida en cualquier forma.



El elemento  $dx$  se encuentra en equilibrio así como toda la barra.



Analizando el elemento  $dx$  en el sentido izquierdo a derecha, vemos que al inicio de la sección actúan un Momento ( $M$ ) y un cortante ( $V$ ), después de recorrer la sección, al final estos valores se incrementan en  $dM$  y  $dV$  respectivamente.

Cómo el sistema esta en equilibrio:

$$\sum F_y = 0$$

$$V - (V+dv) + w dx = 0 \quad (w \text{ positiva hacia arriba})$$

$$- dv + w dx = 0$$

$$w = \frac{dv}{dx}$$

Relación de la fuerza cortante y la carga distribuida.

$$\sum M_c = 0$$

$$M - (M + dM) + V dx + w dx (dx/2) = 0$$

$$- dM + V dx = 0$$

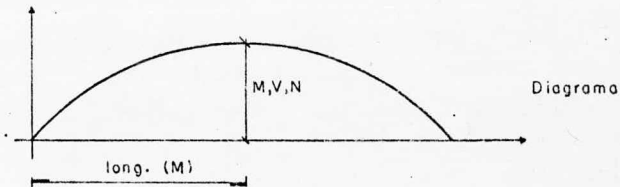
$$V = \frac{dM}{dx}$$

Relación entre el momento flexionante y la fuerza.

$$M = \int V dx$$



- 4.1.6 Diagrama de un elemento mecánico cualquiera, en un sistema de referencia es el lugar geométrico de los puntos cuya - abscisa corresponde a la localización de la sección transversal considerada y cuya ordenada es el valor del elemento mecánico en cuestión, existente en dicha sección.



#### 4.1.7 VIGA.

Es una barra en cuyo eje centroidal se desarrolla el trabajo mecánico primordialmente a flexión y cortante, y con la posible presencia de fuerzas normales y momentos torsionantes.

#### 4.1.8 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA.

Es la viga que se sostiene en dos apoyos, de los cuales, uno es articulado y el otro es libre.

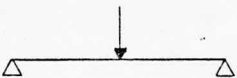
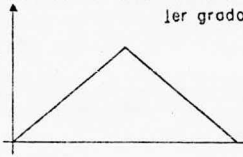
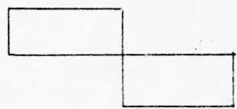
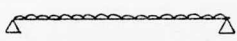
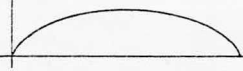

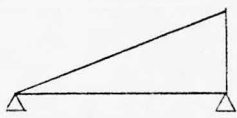
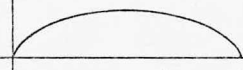
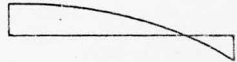
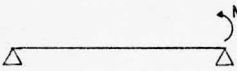
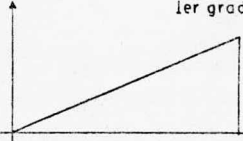
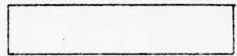
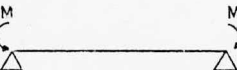
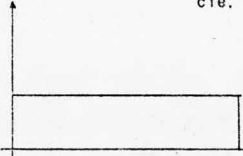

#### 4.1.9 VIGA GERBER.

Este tipo de vigas cumplen con la definición, pero se distinguen de las simplemente apoyadas debido a que tienen más de dos apoyos, pero disminuyen su rigidez por medio de un cierto número de articulaciones convenientemente colocadas de tal manera que no resultan afectadas ni su estabilidad interna, ni su estabilidad externa.

#### 4.1.10 ARCOS Y MARCOS SIMPLES.

Son elementos estructurales cuyo eje longitudinal es una línea continua. Se encuentran ligados al sistema tierra - por 3 vínculos no concurrentes ni paralelos. Generalmente se llaman marcos, cuando el eje está formado por tramos de líneas rectas y arcos, cuando el eje longitudinal presenta formas curvas.

4.1.11 En forma general, podemos decir que cada tipo de carga - produce un diagrama específico, esto es referente al grado con que se manifiesta la ecuación del momento y del - cortante que producen.

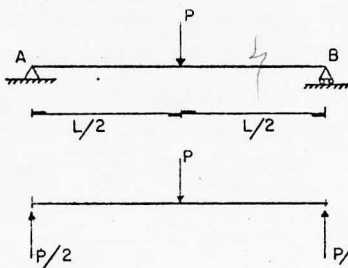
CARGA	DIAGRAMA DE MOMENTO	DIAGRAMA DE CORTANTE
puntual 	 1er grado	 cte.
repartida 	 2º grado	 1er grado
triangular 	 3er grado	 2º grado
momento 	 1er grado	 cte.
momentos 	 cte.	 0

## PROBLEMAS RESUELTOS

## 4.2 VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS

4.2.1 Cálculo de los elementos mecánicos de la viga siguiente.

Cálculo de las reacciones



$$\sum M_B = 0 ; R_A(L) - P(L/2) = 0$$

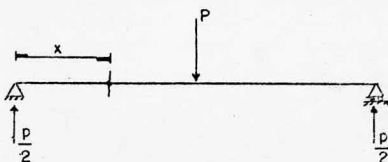
$$R_A = P/2$$

$$\sum F_y = 0 ; R_B - P + P/2 = 0$$

$$R_B = P/2$$

Las ecuaciones para el cálculo de elementos mecánicos son representativas de un tramo de viga, para el cual las condiciones de carga son constantes. En la viga vemos claramente que la carga "P" la divide en dos secciones, por lo tanto tenemos que analizar los intervalos de 0 a L/2 y después desde L/2 hasta L.

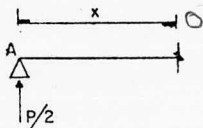
Hagamos un corte en el primer intervalo: a una distancia "X" del apoyo de A.



Ahora tomemos los momentos que producen las fuerzas que se encuentran a la izquierda del corte, con respecto a él.

El corte es representativo de todos los valores de "X" comprendidas entre 0 y L/2, esto es en el intervalo  $0 \leq x \leq L/2$ .

Tomando momentos tenemos una ecuación en función de la distancia "x", dicha ecuación nos indica la variación de la intensidad del momento en función del valor de "x".



$$\Sigma M_o = P/2(x)$$

$$M = \frac{Px}{2}$$

$$\text{si, } x = 0 ; M = 0$$

$$x = L/2 ;$$

$$M = \frac{P}{2} \left( \frac{L}{2} \right) \quad M = \frac{PL}{4}$$

Diag. de cuerpo libre (DCL)

Recordemos que  $V = \frac{dM}{dx}$ , es decir, si derivamos la ecuación del momento con respecto a x obtendremos la ecuación que nos represente el comportamiento de la fuerza cortante.

Analizando el intervalo:  $0 \leq x \leq L/2$

$$M = \frac{Px}{2}$$

$$V = P/2$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(Px/2)$$

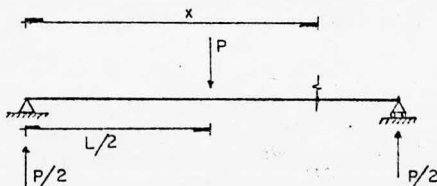
$$\text{Si, } x = 0 ; V = P/2$$

$$V = P/2$$

$$x = L/2 ; V = P/2$$

Para este caso al derivar la ecuación del momento flexionante, resulto que el valor del cortante es una constante igual a P/2 para el primer medio de la longitud de la viga.

Ahora hagamos el corte en el segundo segmento considerando también como referencia una distancia x.



Este corte se localiza en cualquier punto del intervalo entre  $L/2$  y  $L$ .

Tomando nuevamente los momentos de las fuerzas con respecto al corte, encontraremos la ecuación representativa del intervalo.

$$L/2 \leq X \leq L$$

$$M_o = P/2(X) - P(X-L/2)$$

$$V = dM/dX = -P/2$$

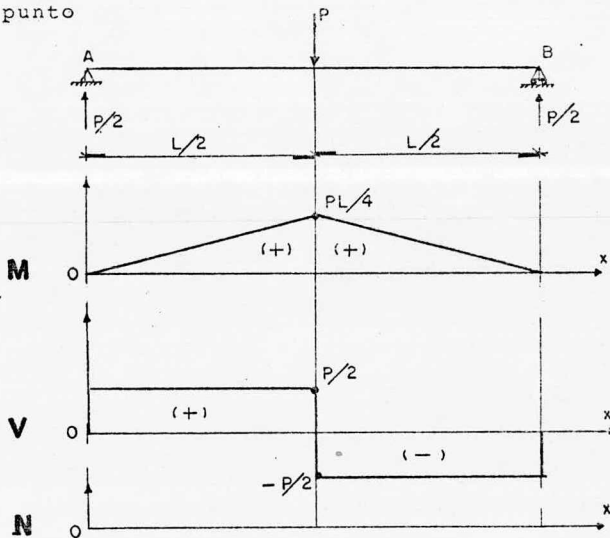
$$\text{Si } X = L/2 ; M = PL/4$$

$$V = -P/2$$

$$\text{Si } X = L ; M = 0$$

$$V = -P/2$$

Traslademos ahora los valores obtenidos a una gráfica en la cual el eje horizontal será la longitud y el eje vertical será la intensidad del elemento mecánico en ese punto

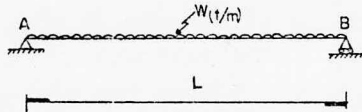


En este caso no existe fuerza alguna que ocasione compresión o tensión en la barra, por lo tanto no hay fuerzas normales y el diagrama no hay necesidad de ponerlo.

## 4.2.2

Encontrar los diagramas de los elementos mecánicos de la viga siguiente.

Cálculo de las reacciones.



$$\sum M_A = wL(L/2) - R_B(L) = 0$$

$$R_B = wL/2$$

$$\sum F_y = R_A - wL + wL/2 = 0$$

$$R_A = wL/2$$

En este caso la viga tiene las condiciones de carga - uniformes a todo lo largo, así que sólo analizaremos un intervalo.

$$0 \leq x \leq L$$

$$M = w/2(x) - wx(x/2) = wx/2 - wx^2/2$$

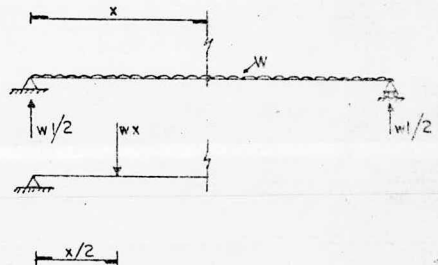
$$\text{si } x=0 ; M=0$$

$$\text{si } x=L ; M=0$$

$$V = dM/dx = w/2 - wx$$

$$\text{si } x=0 ; V = w/2$$

$$\text{si } x=L ; V = -wL/2$$



Nótese que los valores del momento valen cero en los extremos de la viga ( $x=0$ ,  $x=L$ ), sin embargo, esto no quiere decir que no existe momento flexionante a lo largo de ésta. Para investigar los valores intermedios, basta simplemente con sustituir diferentes valores de "x" (comprendidas entre 0 y L) en la ecuación del momento, obteniendo así el valor de dicho elemento en cada caso.

Otra forma de conocer las gráficas de los elementos mecánicos es analizando sus ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación del momento es de 2o. grado por lo tanto es una parábola; además el signo del término elevado al cuadrado es negativo, esto quiere decir que la parábola tiene cavidad hacia abajo.

En el caso del cortante, la ecuación es de 1er grado, - por lo tanto es una recta; el término de la variable - es negativo lo cual nos dice que su pendiente es negativa, es decir, que cuando el valor de X crece el valor del cortante disminuye.

Por otra parte, conociendo las ecuaciones de momento y cortante, además de su relación  $V=dM/dX$ , y recordando que el valor máximo de una función se localiza en el punto para el cual su derivada vale cero.

El valor máximo del momento se localiza en el punto donde  $X=L/2$  y vale:

$$M = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$M = \frac{wL}{2} \left(\frac{L}{2}\right) - \frac{w}{2} (L)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \frac{wL}{2} - wx$$

$$M = \frac{wL^2}{8}$$

$$\text{Si, } \frac{dM}{dx} = 0$$

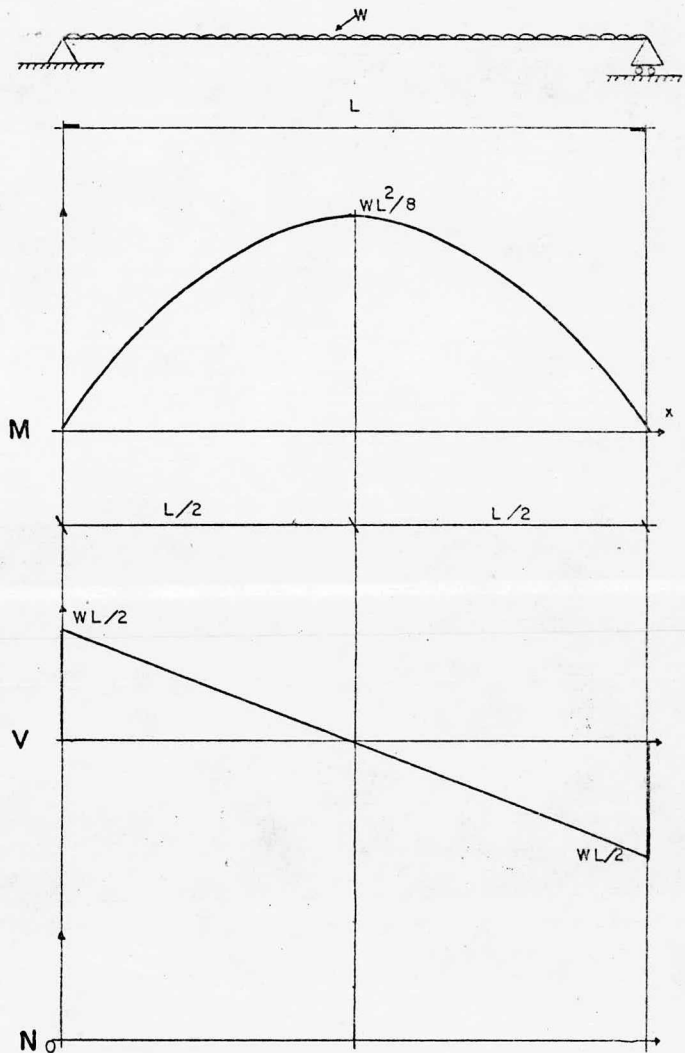
$$V = 0$$

$$V = \frac{wL}{2} - wx = 0$$

$$x = L/2$$

Atendiendo los razonamientos anteriores, podemos decir que siempre que el cortante valga cero existirá un valor máximo o mínimo del momento flexionante.

## Elementos mecánicos finales

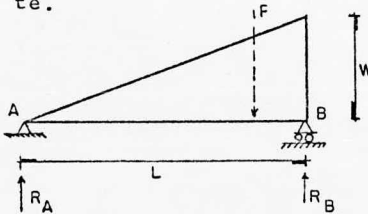


Para este caso no hay fuerza normal, por tanto su diagrama sólo será una línea representativa del valor igual a cero.



## 4.2.3

Encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente.



$$F = \frac{\text{Base} \times \text{Altura}}{2} = \frac{WL}{2}$$

La fuerza  $F$  se aplica en el centroide de la figura.

Cálculo de las reacciones.

$$\Sigma M_B = R_A(L) - \frac{WL}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

$$R_A = \frac{WL}{6}$$

$$\Sigma F_Y = \frac{WL}{6} - \frac{WL}{2} + R_B = 0$$

$$R_B = \frac{WL}{3}$$

Cálculo de los momentos flexionantes.

Por triángulos semejantes.

$$\frac{W'}{W} = \frac{X}{L}; \quad W' = \frac{WX}{L}$$

Sea el intervalo  $0 \leq X \leq L$

$$M = \frac{WL}{6} X - \frac{1}{2} \left( \frac{WX}{L} \right) X \left( \frac{X}{3} \right) = \frac{WLX}{6} - \frac{WX^3}{6}$$

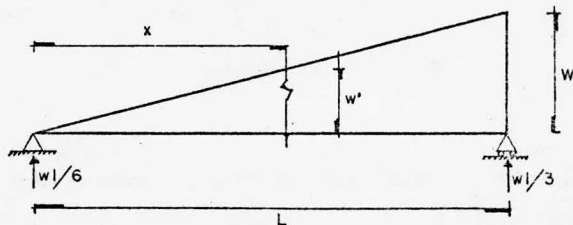
Si  $X=0$ ;  $M=0$

Si  $X=L$ ;  $M=0$

$$V = \frac{WL}{6} - \frac{1}{2} \left( \frac{WX}{L} \right) (X) = \frac{WL}{6} - \frac{WL^2}{2L}$$

Si  $X=0$ ;  $V = \frac{WL}{6}$

Si  $X=L$ ;  $V = -\frac{WL}{3}$



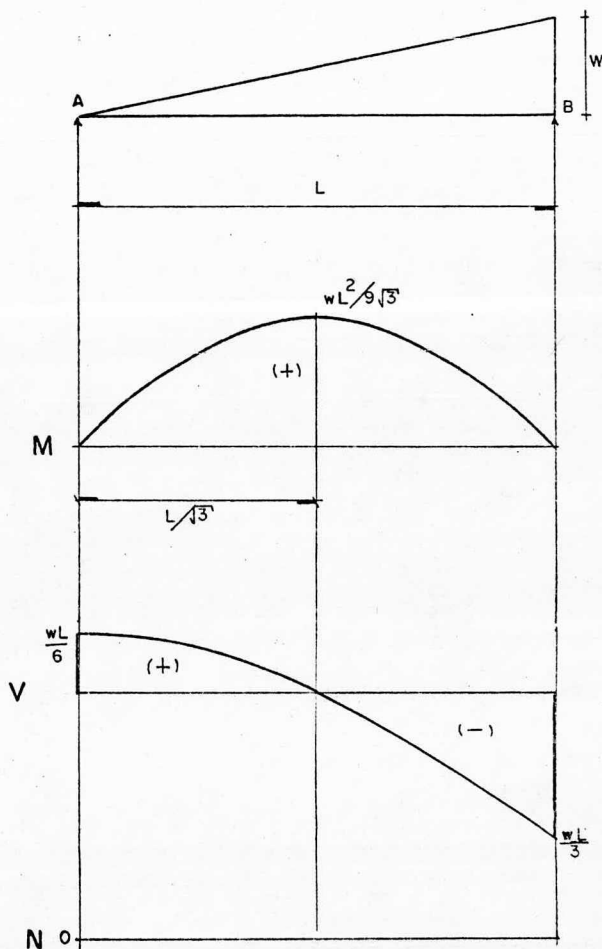
Para localizar el momento máximo hacemos que  $\frac{dM}{dx} = 0$

$$\frac{dM}{dx} = v = \frac{WL}{6} - \frac{Wx^2}{2L} = 0 \quad ; \quad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo en la ecuación de momentos el valor de x:

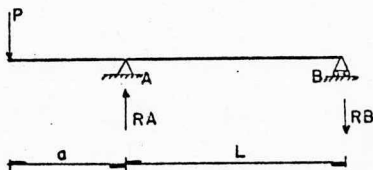
$$M_{\max} = \frac{WL}{6} \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{W}{6} \frac{L^3}{3\sqrt{3}} = \frac{WL^2}{6\sqrt{3}} - \frac{WL^2}{18\sqrt{3}} = \boxed{\frac{WL^2}{9\sqrt{3}}}$$

Trazando los diagramas:



4.2.4

Encontrar los elementos mecánicos de la viga sig:



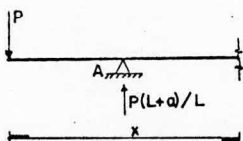
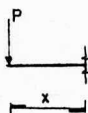
Calculo de las reacciones,

$$\Sigma M_B = - P(L+a) + R_A(L) = 0$$

$$R_A = \frac{P(L+a)}{L}$$

$$\Sigma M_A = - P(a) + R_B(L)$$

$$R_B = \frac{Pa}{L}$$



Sea el intervalo:  $0 \leq x \leq a$

$$M = - Px$$

$$V = - P$$

si,  $x = 0$  ;  $M = 0$

$$V = -P$$

si,  $x = a$  ;  $M = -Pa$

$$V = -P$$

Para el intervalo:  $a \leq x \leq L+a$

$$M = - Px + \frac{P(L+a)}{L} (x-a)$$

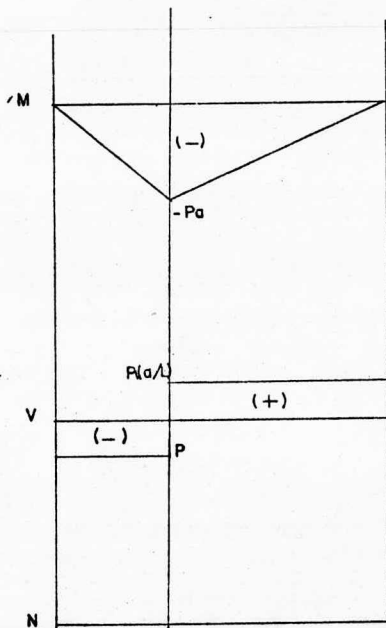
$$V = - P + \frac{P(L+a)}{L}$$

si,  $x = a$  ;  $M = - Pa$

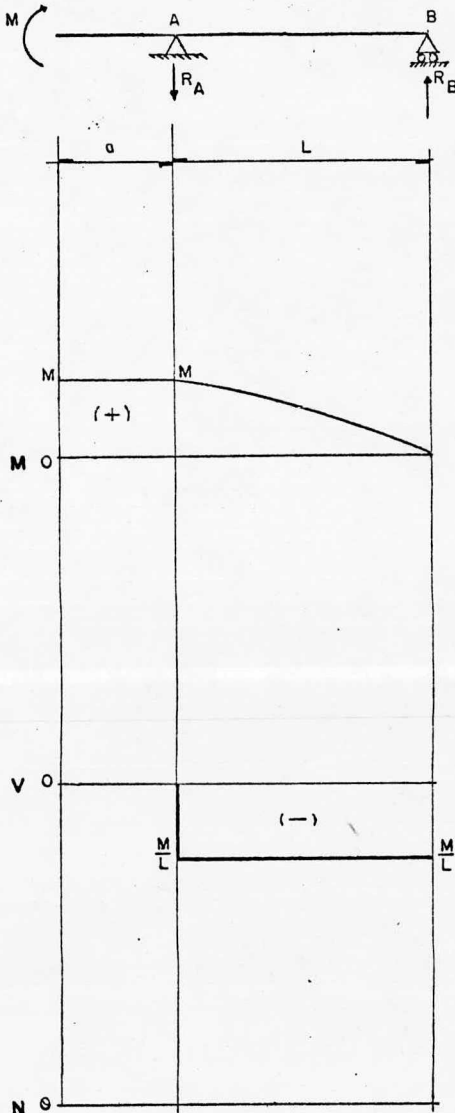
$$V = Pa/L$$

si,  $x = L+a$  ;  $M = 0$

$$V = Pa/L$$



4.2.5 Calcular los elementos mecánicos de la viga siguiente:



Cálculo de las reacciones,

$$\sum M_B = M - R_A(L) = 0$$

$$R_A = \frac{M}{L}$$

$$\sum M_A = M - R_B(L) = 0$$

$$R_B = \frac{M}{L}$$

Sea el intervalo:  $0 \leq x \leq a$

$$M = M \quad M = \text{cte.}$$

$$V = 0$$

$$\text{si, } x = 0 ; \quad M = M$$

$$V = 0$$

$$x = a ; \quad M = M$$

$$V = 0$$

Para el intervalo:  $a \leq x \leq L+a$

$$M = M - \frac{M}{L}(x-a)$$

$$V = -\frac{M}{L}$$

$$\text{Si, } x = a ; \quad M = M$$

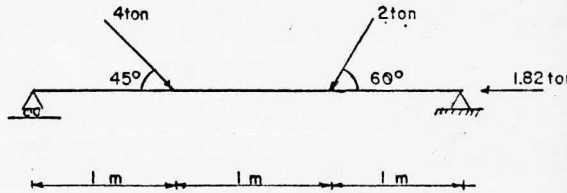
$$V = -M/L$$

$$x = L+a ; \quad M = 0$$

$$V = -M/L$$

4.2.6

Encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente:



convencion de signos

Cálculo de las reacciones,

$$\sum M_B = R_A(3) - 4 \operatorname{sen} 45^\circ(2) - 2 \operatorname{sen} 60^\circ(1) = 0$$

$$R_A = 2.45 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = R_{Bv}(3) - 4 \operatorname{sen} 45^\circ(1) - 2 \operatorname{sen} 60^\circ(2) = 0$$

$$R_B = 2.08 \text{ ton}$$

Cálculo de los momentos y cortantes:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$M = 2.45 x \quad \text{Si, } x = 0 ;$$

$$M = 0$$

$$V = 2.45 \text{ ton}$$

$$V = 2.45 \quad x = 1 ;$$

$$M = 2.45 \text{ t-m}$$

$$V = 2.45 \text{ t-m}$$

$$1 \leq x \leq 2$$

$$M = 2.45 x - 2.82(x-1)$$

$$M = -0.37 x + 2.82 \quad \text{Si, } x = 1 ;$$

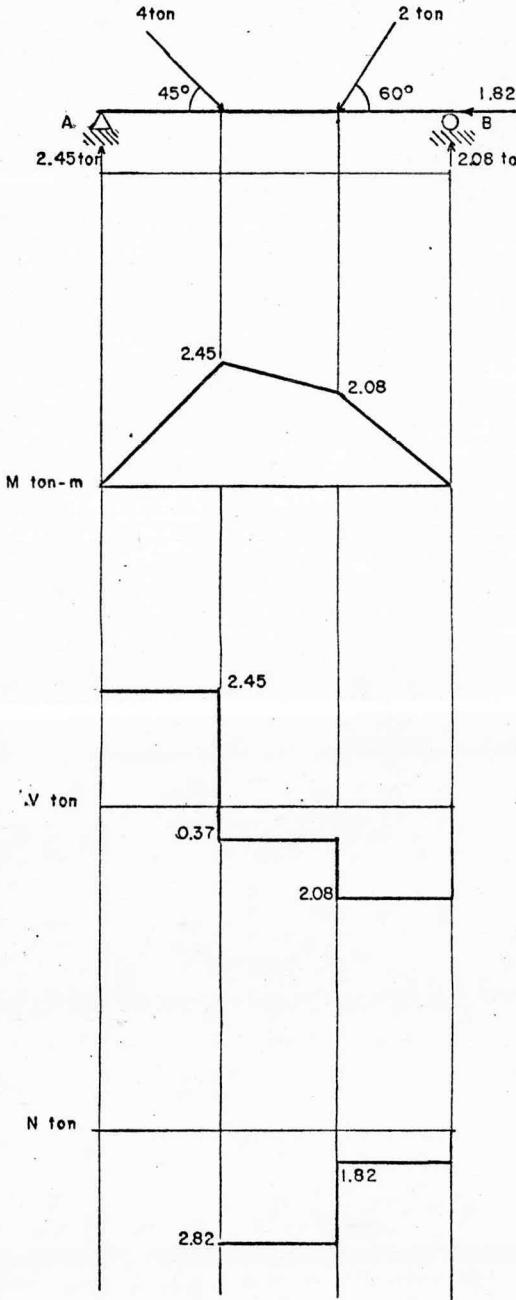
$$M = 2.45 \text{ t-m}$$

$$V = -0.37 \text{ t}$$

$$V = -0.37 \quad x = 2 ;$$

$$M = 2.08 \text{ t-m}$$

$$V = -0.37 \text{ t}$$



$$2 \leq x \leq 3$$

$$M = 2.45x - 2.82(x-1) - 1.73(x-2)$$

$$M = -2.08x + 6.28$$

$$V = -2.08$$

Si,  $x = 2$ ;  $M = 2.08 \text{ t-m}$   
 $V = -2.08 \text{ ton}$

$x = 3$ ;  $M = 0$   
 $V = -2.08 \text{ ton}$

Calculo de las fuerzas normales.

$$0 \leq x \leq 1$$

$$F_N = 0$$

En esta sección de la viga no existe fuerza normal, puesto que la primera que se aparece está aplicada en el punto en el cual empieza el segundo intervalo.

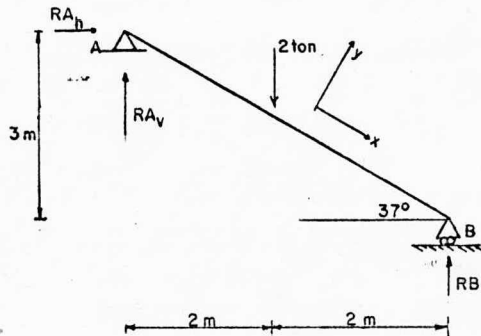
$$1 \leq x \leq 2$$

$F_N = 2.82 \text{ ton}$  y comprime la viga contra el apoyo B. La suma de fuerzas considera todas las acciones y reacciones a la izquierda o a la derecha de la sección, para este caso, se están considerandolas fuerzas a la izquierda.

$$2 \leq x \leq 3$$

$$F_N = 2.82 - 1.0 = 1.82 \text{ ton}$$

4.2.7 En la siguiente viga inclinada, calcule los elementos mecánicos.



Cálculo de las reacciones.

$$\Sigma M_A = 2(2) - R_B(4) = 0$$

$$R_B = 1 \text{ ton}$$

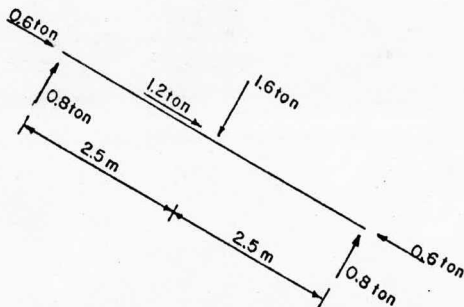
$$\Sigma F_y = R_A - 2 + 1 = 0$$

$$R_A = 1 \text{ ton}$$

Cálculo de los momentos flexionantes.

El procedimiento es esencialmente el mismo, sólo tenemos que recordar que el momento flexionante y la fuerza cortante, los producen las fuerzas que son transversales a la longitud de la viga, así como las reacciones en los apoyos tendrán que proyectarse sobre la barra.

El sistema con las fuerzas proyectadas sobre la barra nos queda:



Las fuerzas en toneladas  
y las distancias en metros.

Cálculo de los momentos flexionantes; y fuerzas cortantes.

$$0 \leq x \leq 2.5$$

$$M = 0.8x \quad \text{Si, } x = 0; \quad M = 0$$

$$V = 0.8 \text{ ton}$$

$$V = 0.8$$

$$x = 2.5; \quad M = 2 \text{ t-m}$$

$$V = 0.8 \text{ ton}$$

$$2.5 \leq x \leq 5.0$$

$$M = 0.8x - 1.6(x - 2.5) \quad \text{Si, } x = 2.5; \quad M = 2; \quad V = -0.8$$

$$V = -0.8$$

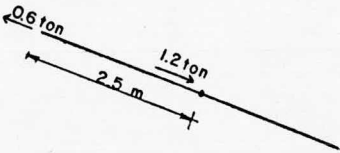
$$x = 5.0; \quad M = 0; \quad V = -0.8$$

Cálculo de las fuerzas normales.

$$0 \leq x \leq 2.5$$

Observemos que en este intervalo - existen dos fuerzas normales, la reacción del apoyo y la proyección de la fuerza actuante.

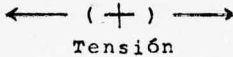
Observemos la figura siguiente:



La suma de fuerzas normales queda:

$$F_N = -0.6 + 1.2 = 0.6 \text{ ton}$$

Las fuerzas actúan sobre la barra tratando de alargarla, entonces decimos que la barra trabaja a tensión

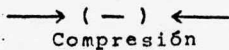
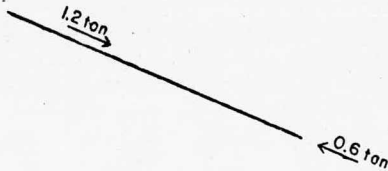


$$2.5 \leq x \leq 5.0$$

En este intervalo consideramos todas las fuerzas - normales. Actuantes en él.

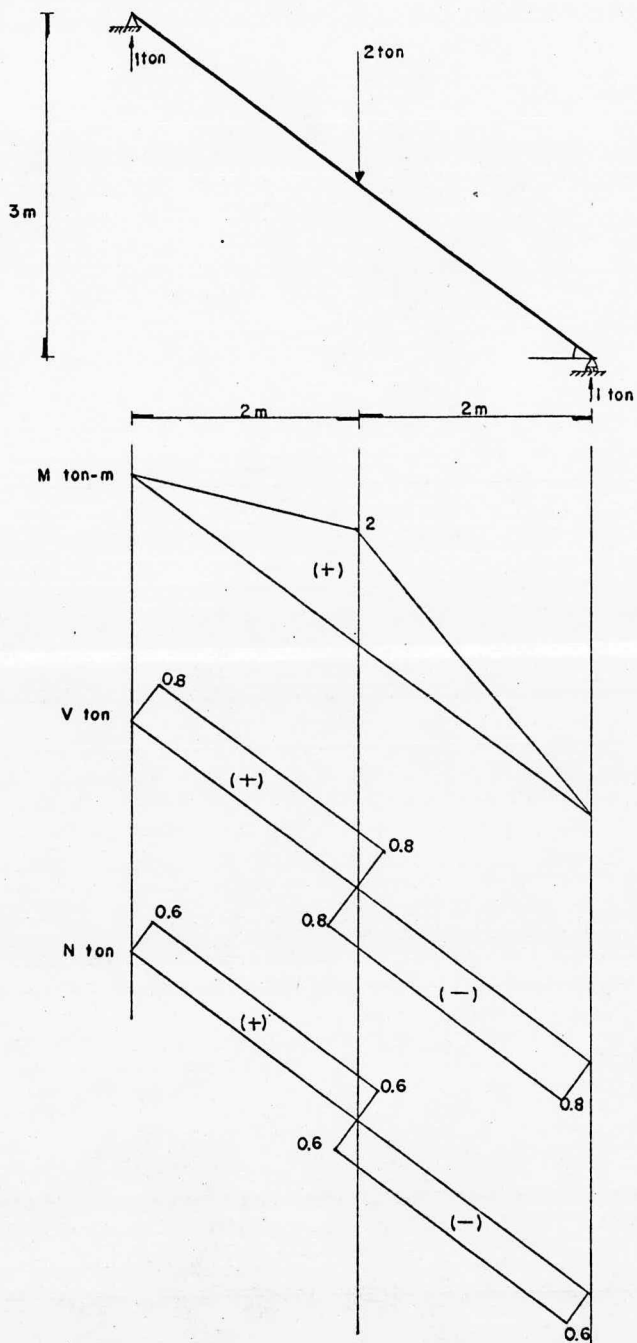
$$F_N = 1.2 - 0.6 = 0.6 \text{ ton}$$

En este caso las fuerzas tratan de acortar la barra, se dice que la - barra trabaja a compresión.



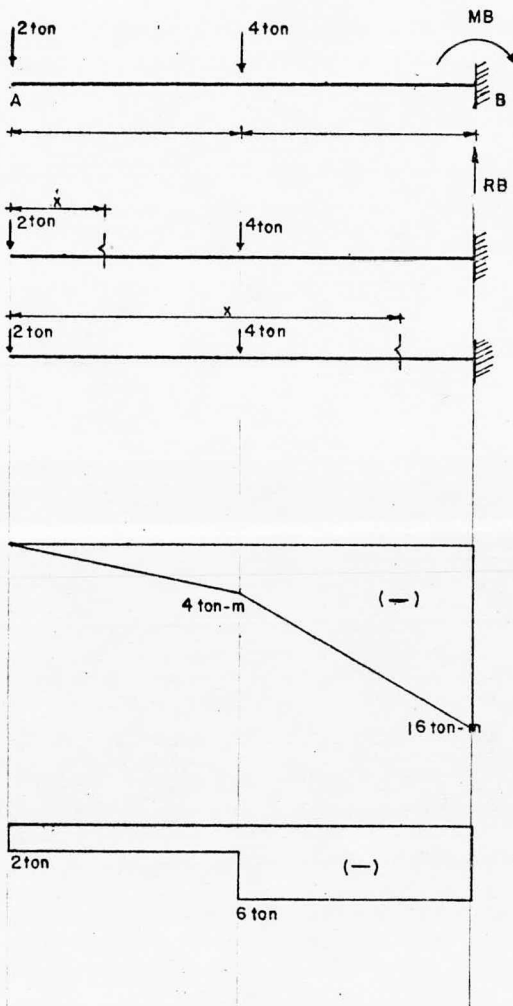


El diagrama finalmente quedo:



## 4.3 VIGAS EN VOLADIZO.

4.3.1 En la viga de la figura siguiente, encuentre los valores de los elementos mecánicos.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_y = -2 - 4 + R_B = 0$$

$$R_B = 6 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = -2(4) - 4(2) + M_B = 0$$

$$M_B = 16 \text{ t-m}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$M = -2x \quad \text{Si, } x=0 ; \quad M=0$$

$$V = -2 \text{ ton}$$

$$V = -2 \quad x=2 ; \quad M = -4 \text{ t-m}$$

$$V = -2 \text{ ton}$$

$$2 \leq x \leq 4$$

$$M = -2x - 4(x-2)$$

$$M = -6x + 8$$

$$V = -6$$

$$\text{Si, } x = 2 ; \quad M = -4 \text{ t-m}$$

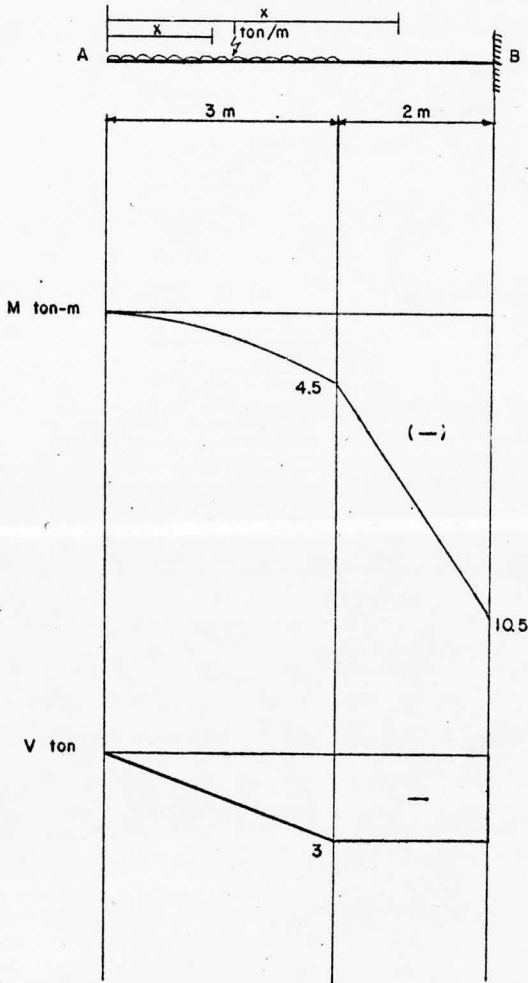
$$V = -6 \text{ ton}$$

$$x = 4 \quad M = -16 \text{ t-m}$$

$$V = -6 \text{ ton}$$

4.3.2

En la siguiente viga, que tiene una carga distribuida en una parte de su longitud, calcule los valores de los elementos mecánicos.



En vigas como la de este caso, para obtener los diagramas de los elementos mecánicos, no es necesario calcular las reacciones.

Analizando directamente los intervalos:

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} \quad \text{Si, } x=0 ; \quad M=0$$

$$V=0$$

$$V = -wx \quad x=3 ; \quad M=-4.5$$

$$V=-3$$

$$3 \leq x \leq 5$$

$$M = -1(3)(x - 3/2)$$

$$M = -3x + 4.5$$

$$V = -3$$

$$\text{Si, } x = 3 ; \quad M = -4.5$$

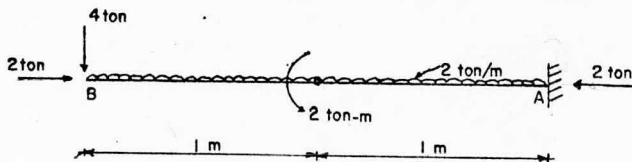
$$V = -3$$

$$x = 5 ; \quad M = -10.5$$

$$V = -3$$

4.3.3

Calcular los elementos mecánicos de la viga siguiente.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_x = 2 - R_h = 0 ;$$

$$R_h = 2 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = -4 - 2(2) + R_v = 0 ;$$

$$R_v = 8 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 2(0) - 4(2) - 2(2)(1) + M_a + 2 = 0$$

$$M_a = 14 \text{ t-m}$$

Cálculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq x \leq 1 \quad M = -4x - x^2 \quad \text{Si, } x = 0 ; \quad M = 0$$

$$x = 1 ; \quad M = -5 \text{ t-m}$$

$$1 \leq x \leq 2 \quad M = -4x - x^2 - 2$$

$$\text{Si, } x = 1 ; \quad M = -5 \text{ t-m}$$

$$x = 2 ; \quad M = -14 \text{ t-m}$$

Obsérvese la discontinuidad en el diagrama, producido por el momento concentrado en "c".

Cálculo de las fuerzas cortantes y normales:

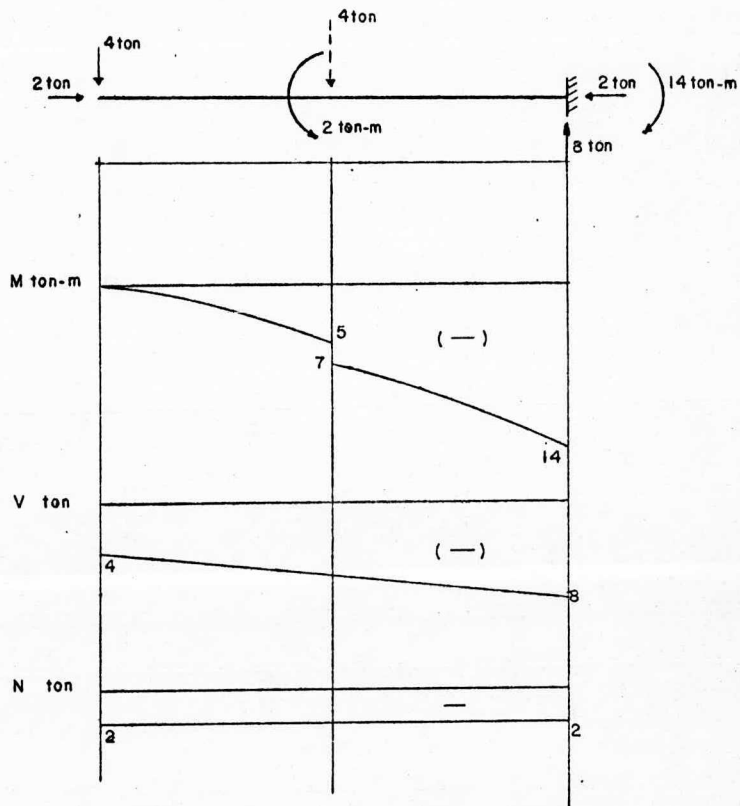
$$0 \leq x \leq 2 \quad V = -4 - 2x \quad \text{Si, } x = 0 ; \quad V = -4 \text{ ton}$$

$$x = 2 ; \quad V = -8 \text{ ton}$$

$$N = -2 \text{ ton (a compresion)}$$

Nótese que para las fuerzas cortante y normal, el momento concentrado no tiene ninguna influencia.

Los diagramas finalmente son:

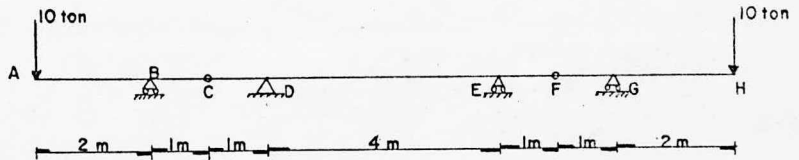


## 4.4

## VIGAS GERBER

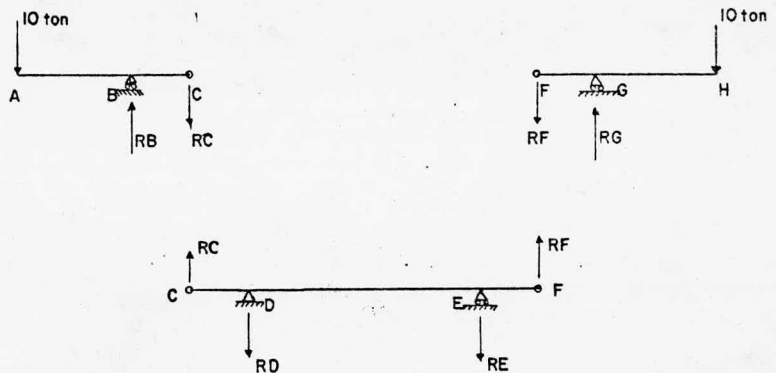
## 4.4.1

En la siguiente viga calcular sus elementos mecánicos.



Para la resolución de este tipo de vigas se hace el -- cálculo de las reacciones por tramos, considerando que se puede dividir la viga a la altura de cada articulación. Con esta división lo que obtenemos son vigas simplemente apoyadas de fácil solución, cuyas reacciones corresponderán, uno a uno de los apoyos reales de la viga y la otra corresponderá a la fuerza que actúa sobre la articulación.

La fuerza que actúa sobre la articulación se transportará de un tramo al otro de la viga, con la misma magnitud pero con el sentido inverso. Gráficamente se puede expresar lo anterior de la forma siguiente.

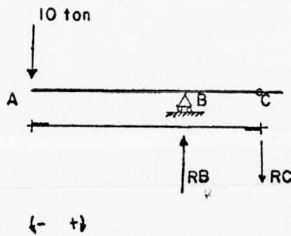


Como vemos, de la división de la viga quedan 3 vigas - simplemente apoyadas de las cuales, las correspondientes a los tramos  $\overline{AC}$  y  $\overline{FH}$  son las más fáciles, por lo tanto se resolverán éstas en primera instancia, para después transportar las reacciones sobre las articulaciones hacia la viga central.

Una vez realizado el equilibrio y haber encontrado las reacciones de la viga, el cálculo de los elementos mecánicos se hace en la forma normal, proponiendo cortes sobre la viga y tomando momentos de las fuerzas respecto a ese punto.

Cálculo de las reacciones:

Tramo  $\overline{AC}$



$$\Sigma M_C = -10(3) + R_B = 0$$

$$R_B = 30 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_B = -10(2) + R_C(1) = 0$$

$$R_C = 20 \text{ ton}$$

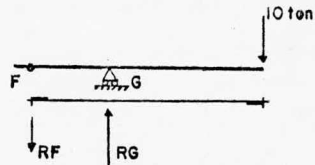
Tramo  $\overline{FH}$

$$\Sigma M_F = 10(3) - R_G(1) = 0$$

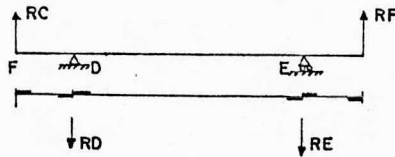
$$R_G = 30 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_G = 10(2) - R_F(1) = 0$$

$$R_F = 20 \text{ ton}$$



Transportando las reacciones de las articulaciones C y F  
obtenidas del cálculo anterior, al tramo intermedio de -  
la viga:



$$\Sigma M_D = 20(1) + R_E(4) - 20(5) = 0$$

$$R_E = 20 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_E = -20(5) - R_D(4) + 20(1) = 0$$

$$R_D = 20 \text{ ton}$$

Cálculo de los elementos mecánicos:

$$0 \leq x \leq 2 \quad M = -10x \quad \text{Si, } x = 0 ; \quad M = 0$$

$$V = -10 \text{ ton}$$

$$x = 2 ; \quad M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = -10 \text{ ton}$$

$$2 \leq x \leq 4 \quad \Sigma M = -10x + 30(x-2) = 20x - 60$$

$$V = 20$$

$$\text{Si, } x = 2 ; \quad M = -20 \text{ t-m}$$

$$V = 20 \text{ ton}$$

$$x = 4 ; \quad M = 20 \text{ t-m}$$

$$V = 20 \text{ ton}$$

$$4 \leq x \leq 8 \quad \Sigma M = -10x + 30(x-2) - 20(x-4)$$

$$M = 20 \text{ t-m} \quad (\text{constante en este tramo})$$

$$V = 0$$



$$8 \leq x \leq 10 \quad \Sigma M = -10x + 30(x-2) - 20(x-4) - 20(x-8)$$

$$M = -20x + 180$$

$$V = -20 \quad (\text{constante para todo el tramo})$$

Si,	$x = 8 ;$	$M = 20 \text{ t-m}$
		$V = -20 \text{ ton}$
	$x = 10 ;$	$M = -20 \text{ t-m}$
		$V = -20 \text{ ton}$

$$10 \leq x \leq 12 \quad \Sigma M = -10x + 30(x-2) - 20(x-4) - 20(x-8)$$

$$+ 30(x-10)$$

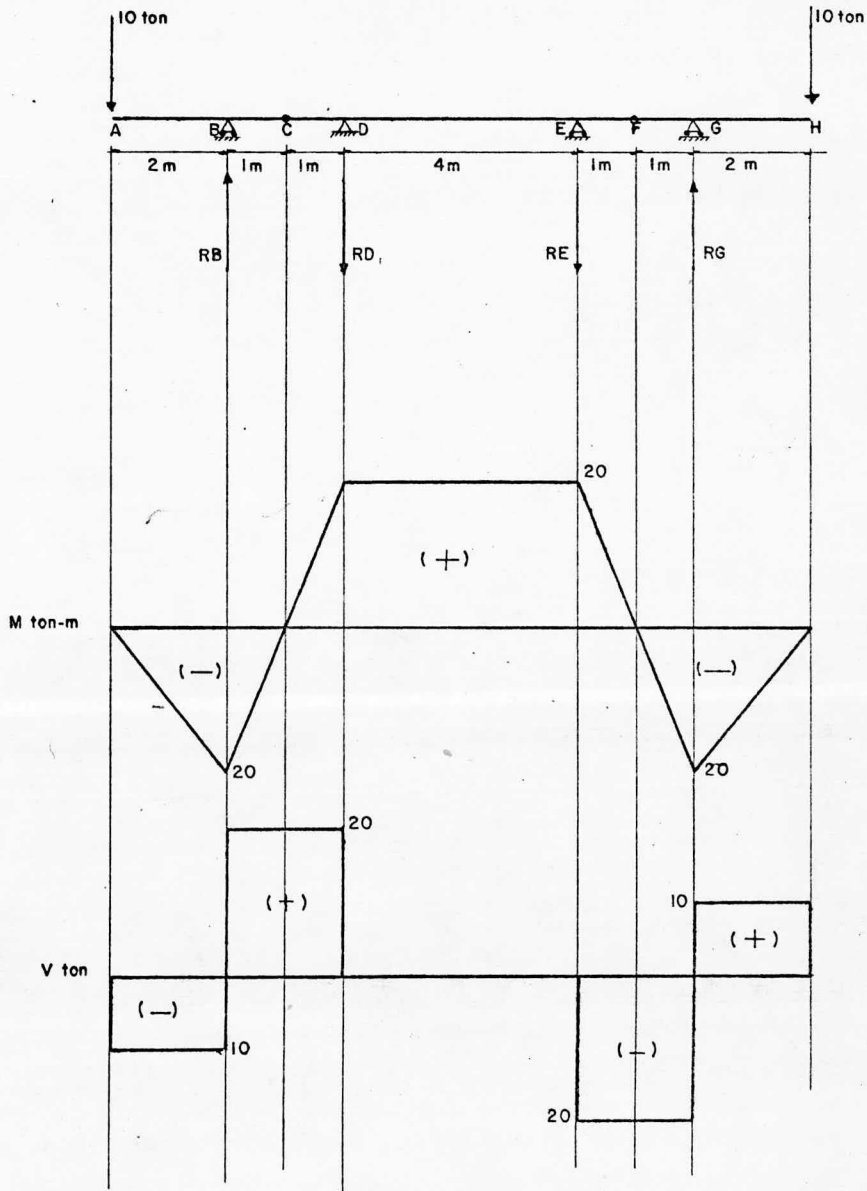
$$M = 10x - 120$$

$$V = 10 \quad (\text{constante para todo el tramo})$$

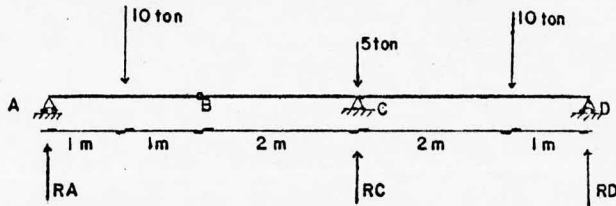
Si,	$x = 10 ;$	$M = -20 \text{ t-m}$
		$V = 10 \text{ ton}$
	$x = 12 ;$	$M = 0$
		$V = 10 \text{ ton}$

Un punto importante que debemos destacar es que en las articulaciones el valor del momento flexionante debe valer cero en todos los casos, puesto que una articulación no está capacitada para resistir tales sollicitaciones.

Los diagramas finales de los elementos mecánicos se presentan a continuación;



4.4.2 Encontrar los elementos mecánicos de la viga siguiente:



Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_B = 0 \quad (\text{tramo AB})$$

$$2 R_A - 10(1) = 0$$

$$R_A = 5 \text{ ton}$$

$$\sum M_D = 0 \quad (\text{del conjunto})$$

$$7(5) - 10(6) + R_C(3) - 5(3) - 10(1) = 0$$

$$R_C = 16.66 \text{ ton}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (\text{tramo CD})$$

$$5(2) - 16.66(2) + 10(4) - R_D(5) = 0$$

$$R_D = 3.37 \text{ ton}$$

n Cálculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq x \leq 1 \quad M = 5x \quad \text{Si,} \quad x = 0 \quad M = 0$$

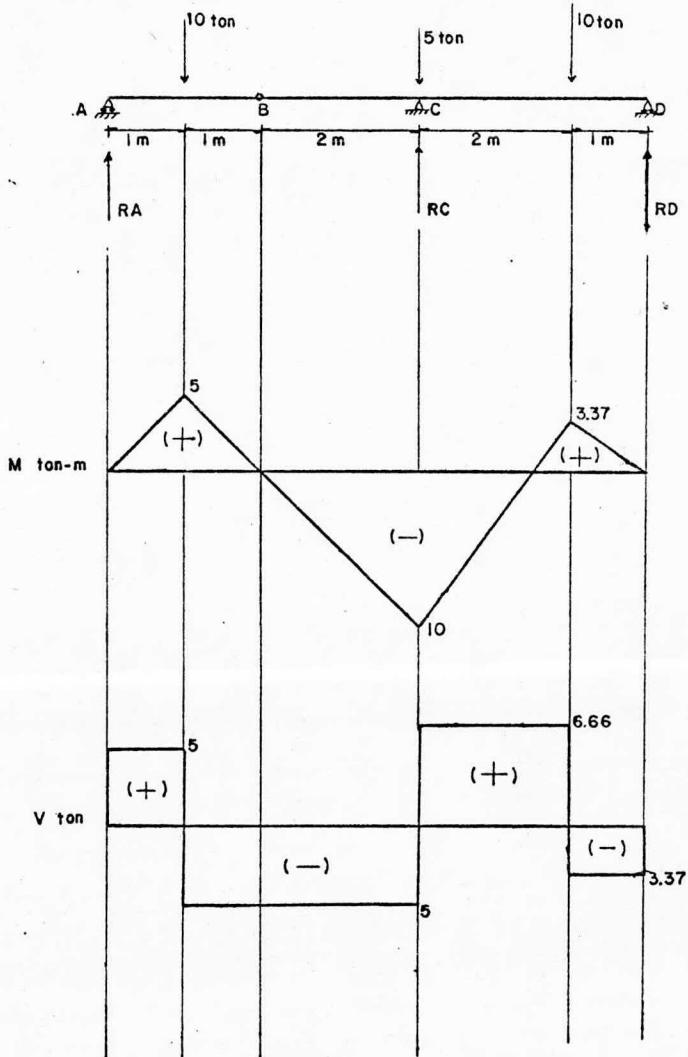
$$x = 1 \quad M = 5 \text{ t-m}$$

$$\begin{array}{llll}
 1 \leq x \leq 4 & M = 5x - 10(x-1) & x = 1 & M = 5 \text{ ton m} \\
 & M = -5x + 10 & x = 4 & M = -10 \text{ ton m} \\
 4 \leq x \leq 6 & M = 5x - 10(x-1) + 11.66(x-4) & & \\
 & & x = 4 & M = -10 \text{ ton m} \\
 & M = 6.66x - 36.64 & x = 6 & M = 3.37 \text{ ton m} \\
 6 \leq x \leq 7 & M = 5x - 10(x-1) + 11.66(x-4) - 10(x-6) & & \\
 & & x = 6 & M = 3.37 \text{ ton m} \\
 & M = -3.33x + 23.33 & x = 7 & M = 0
 \end{array}$$

Cálculo de las fuerzas cortantes:

$$\begin{array}{llll}
 0 \leq x \leq 1 & V = 5 & & V = 5 \text{ ton} \\
 1 \leq x \leq 4 & V = 5 - 10 & & V = -5 \text{ ton} \\
 & V = -5 & & \\
 4 \leq x \leq 6 & V = 5 - 10 + 11.66 & & \\
 & V = 6.66 & & V = 6.66 \text{ ton} \\
 6 \leq x \leq 7 & V = 5 - 10 + 11.66 - 10 & & \\
 & V = -3.33 & & V = -3.33 \text{ ton}
 \end{array}$$

Diagramas finales:

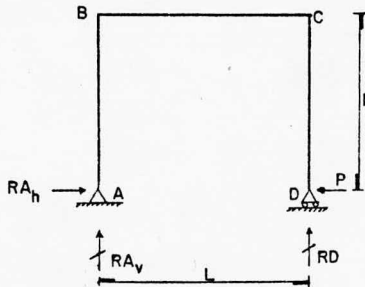


## 4.5

## MARCOS CON DOS APOYOS

## 4.5.1

Cálculo los elementos mecánicos del marco siguiente.



Cálculo de las reacciones

$$\Sigma F_x = R_{hA} - P = 0$$

$$R_{hA} = +P$$

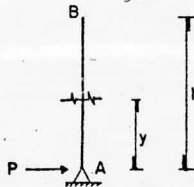
$$\Sigma M_B = R_{AV} (L) = 0$$

$$R_{AV} = 0$$

$$R_D = 0$$

Una vez realizado el equilibrio, elegimos un sentido de recorrido sobre la estructura, para este caso lo haremos en el sentido de las manecillas del reloj.

Analizando el primer tramo ( $\overline{AB}$ ), hacemos un corte en la longitud  $Y$  y tomamos los momentos.

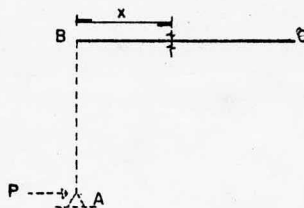


El intervalo será:  $0 \leq Y \leq h$

$$M = -PY \quad \text{Si } Y=0 ; M=0 \quad V=-P$$

$$V = -P \quad \text{Si } Y=h ; M=-Ph \quad V=-P$$

$0 \leq X \leq L$  (tramo horizontal  $\overline{BC}$ )



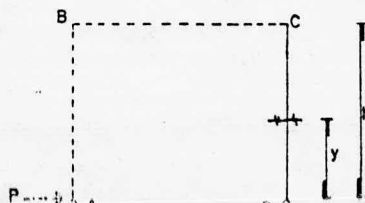
$$M = -Ph \quad \text{Si } X \neq 0 ; M = -Ph$$

$$V = 0$$

$$V = 0 \quad \text{Si } X = L ; M = -Ph$$

$$V = 0$$

$h \geq Y \geq 0$



$$M = -PY \quad \text{Si } Y = h ; M = -Ph$$

$$V = -P$$

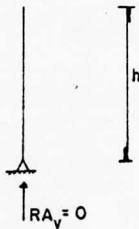
$$V = -P \quad \text{Si } Y = 0 ; M = 0$$

$$V = -P$$

## Cálculo de las fuerzas normales

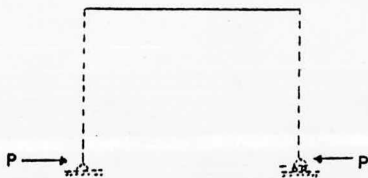
$$0 \leq Y \leq h$$

Para esta sección del marco no hay fuerzas axiales, puesto que  $R_{AV}=0$  es claro que ninguna de las fuerzas actuantes produce compresión o tensión alguna sobre la barra.



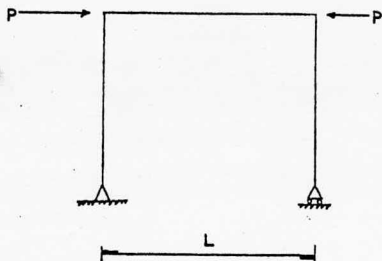
$$0 \leq X \leq L$$

Para la barra horizontal se produce una compresión debida a la fuerza  $P$ , la cual no está aplicada directamente sobre la barra, la fuerza es transmitida por medio de las barras verticales en forma de fuerza cortante puesto que actúan en forma transversal al eje longitudinal de éstas.



Sin embargo al llegar al extremo superior, como la estructura cambia de dirección, la fuerza "P" que en la barra vertical actúa como cortante se transforma en una fuerza normal.

Concluyendo, la barra horizontal tendrá una fuerza normal equivalente a la fuerza cortante que llega a los extremos que la limitan.



$$N = -P \quad (\text{a compresión})$$

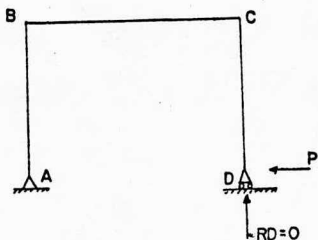
$$\text{Si } X=0 \quad N = -P$$

$$\text{Si } X=L \quad N = -P$$

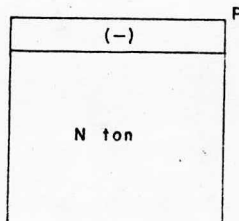
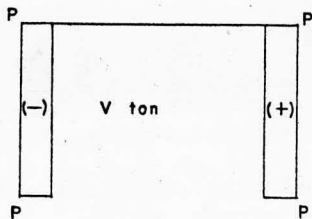
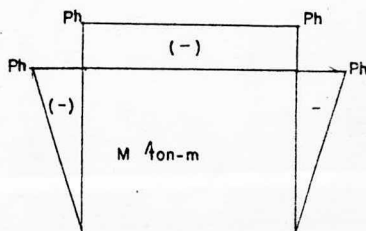
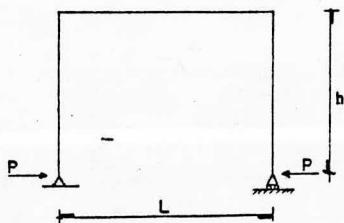
$h \geq Y \geq 0$

$N = 0$

Se presenta el mismo caso que --  
para la barra  $\overline{AB}$

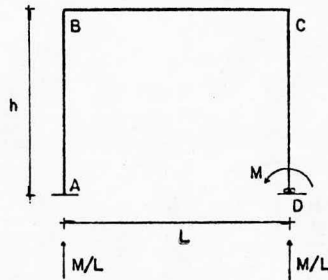


Los diagramas de los elementos mecánicos finalmente --  
son:





- 4.5.2 Encuentre los diagramas de los elementos mecánicos de la estructura siguiente.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_D = -M + A_y(L) = 0$$

$$A_y = M/L$$

$$\sum F_y = -D_y - M/L = 0$$

$$D_y = M/L$$

Cálculo de los momentos flexionantes:

Tramo AB;  $0 \leq y \leq h$        $M = 0$  (no existen acciones ni reacciones en este tramo que provoquen momento.)

Tramo BC;  $0 \leq x \leq L$        $M = \frac{M}{L}x$

Si,       $x = 0$  ;       $M = 0$

$x = L$  ;       $M = M$  t-m

Tramo CD ;       $h \geq y \geq 0$

$$M = \frac{M}{L} L = M$$

Si,       $y = h$  ;       $M = M$  t-m

$y = 0$  ;       $M = M$  t-m

Cálculo de las fuerzas cortantes y normales:

$$0 \leq y \leq h$$

$$v = 0$$

$N = M/L$  (a compresión, constante sobre toda la barra)

$$0 \leq x \leq L$$

$$v = M/L \text{ cte.}$$

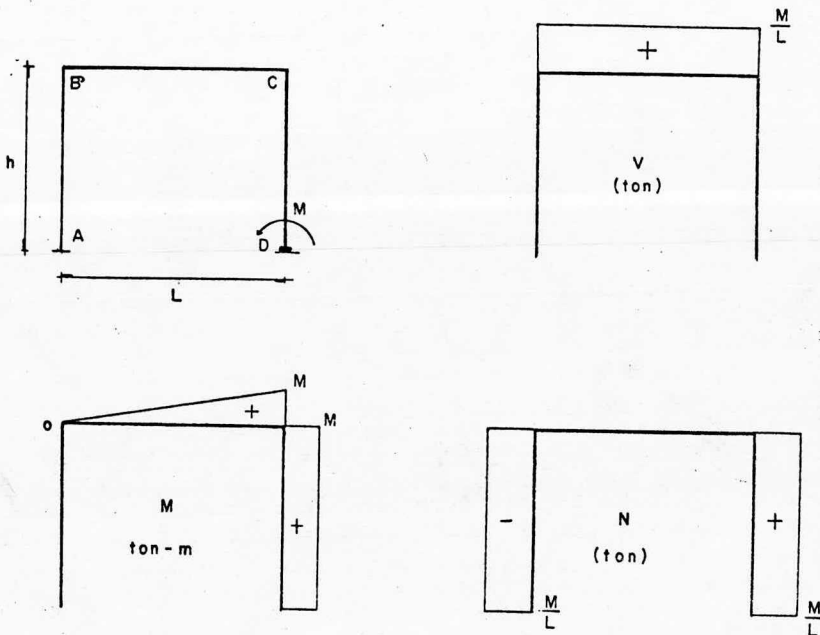
$$N = 0$$

$$H \geq y \geq 0$$

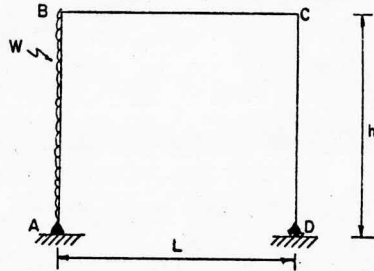
$$v = 0$$

$N = M/L$  (a tensión)

Los diagramas son:



4.5.3 Encontrar los elementos mecánicos del marco siguiente:



Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma F_x = wh - A_x = 0$$

$$\Sigma M_A = -\frac{wh^2}{2} + D_y L = 0$$

$$\Sigma M_D = A_y L - \frac{wh^2}{2} = 0$$

$$A_x = wh$$

$$D_y = \frac{wh^2}{2L}$$

$$A_y = \frac{wh^2}{2L}$$

Cálculo de los momentos flexionantes:

$$0 \leq y \leq h \quad M = why - \frac{wy^2}{2} \quad \text{Para: } \begin{array}{l} y = 0 \quad M = 0 \\ y = h \quad M = \frac{wh^2}{2} \end{array}$$

$$0 \leq x \leq L \quad M = \frac{wh^2}{2} - \frac{wh^2 x}{2L} \quad \text{Para: } \begin{array}{l} x = 0 \quad M = \frac{wh^2}{2} \\ x = L \quad M = 0 \end{array}$$

$$h \geq y \geq 0 \quad M = 0$$

Cálculo de las fuerzas cortantes y normales:

$$0 \leq y \leq h \quad V = wh - wy \quad \text{Para: } y = 0 \quad V = wh \text{ ton}$$

$$y = h \quad V = 0$$

$$N = \frac{wh^2}{2L} \quad (\text{cte. a tensión})$$

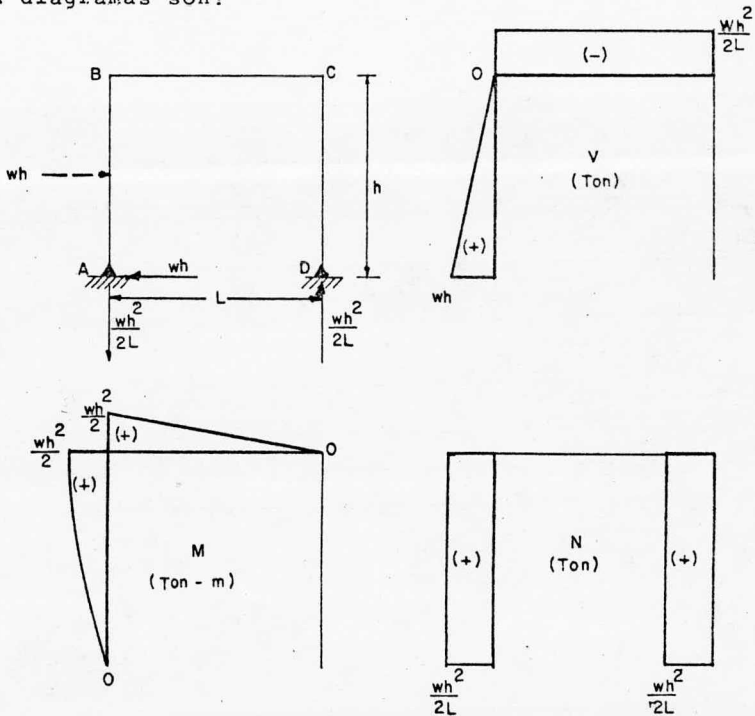
$$0 \leq x \leq L \quad V = -\frac{wh^2}{2L} \text{ ton (cte. en toda la sección)}$$

$$N = 0$$

$$h \geq y \geq 0 \quad V = -wh + wh = 0$$

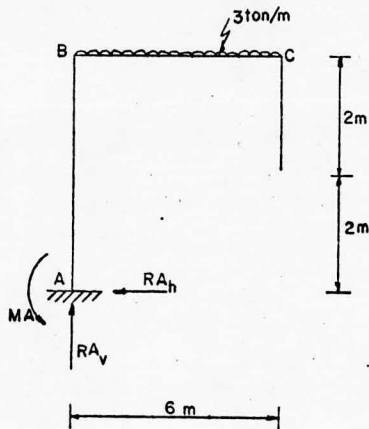
$$N = -\frac{wh^2}{2L} \quad (\text{cte. a compresión})$$

Los diagramas son:



## 4.6 Marcos en voladizo.

4.6.1 Calcular los elementos mecánicos del marco siguiente:  
Cálculo de las reacciones:



$$\sum M_A = -M_a + 3(6)(6/2) = 0$$

$$M_a = 54 \text{ t-m}$$

$$\sum Fy = Rv - 3(6) = 0$$

$$Rv = 18 \text{ ton}$$

$$\sum Fx = 0$$

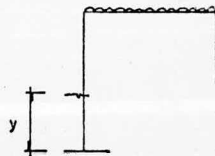
$$Rh = 0$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = -54 \text{ (cte.)}$$

$$V = 0$$

$$N = 18 \text{ ton (a compresión)}$$



$$0 \leq x \leq 6$$

$$M = -54 + 18x - 3(x)(x/2) \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad M = -54$$

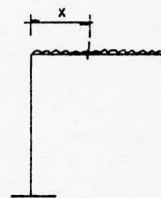
$$V = 18$$

$$V = 18 - 3x$$

$$x = 6 \quad ; \quad M = 0$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

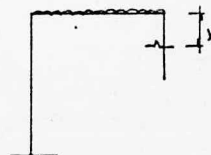


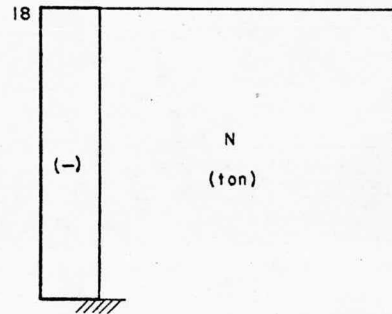
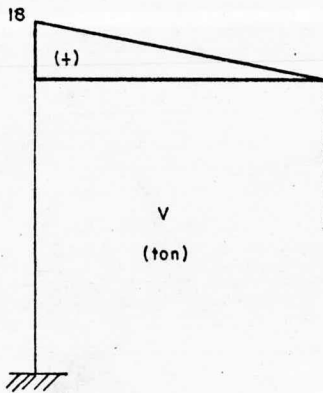
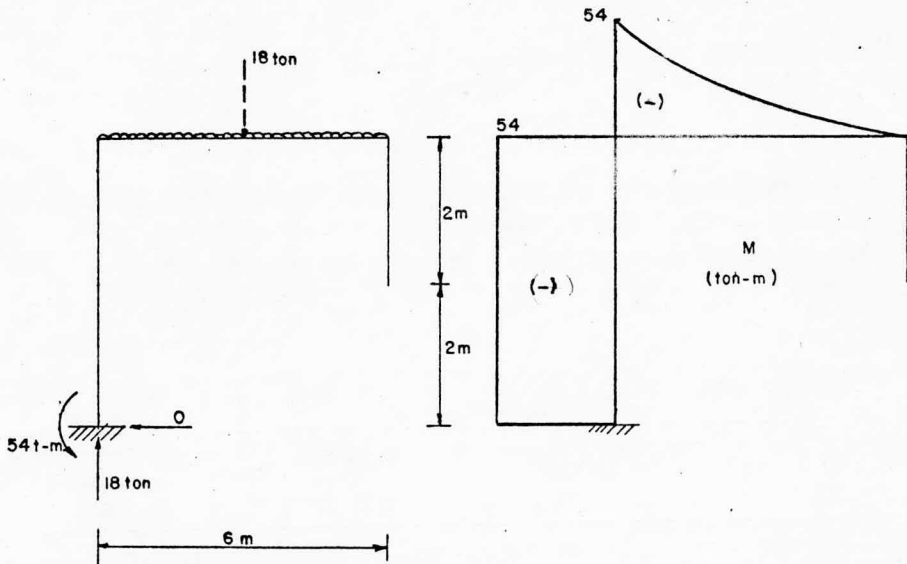
$$2 \geq y \geq 0$$

$$M = -54 + 18(6) - 18(3) = 0$$

$$V = 0$$

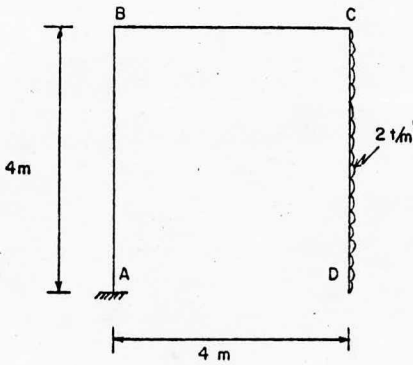
$$N = 0$$





DIAGRAMAS DEL PROBLEMA 4.6.1

4.6.2 Resolver el marco siguiente y evaluar los elementos mecánicos.



Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma M_A = M_a - 2(4)(2) = 0$$

$$M_a = 16 \text{ t-m}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_x = -2(4) + R_A = 0$$

$$R_A = 8 \text{ ton}$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = 16 - 8y \quad \text{Si, } y = 0 ; M = 16 \text{ t-m}$$

$$; V = -8 \text{ ton}$$

$$y = 4 ; M = -16 \text{ t-m}$$

$$V = -8 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$M = 16 - 8(4) = -16 \text{ t-m (cte. en el tramo)}$$

$$V = 0$$

$$N = 8 \text{ ton (cte, a compresión)}$$

$0 \leq y \leq 4$  (utilizando la convención a la derecha de la sección)

$$M = 16 - 8(4) - y - 2(y)(y/2)$$

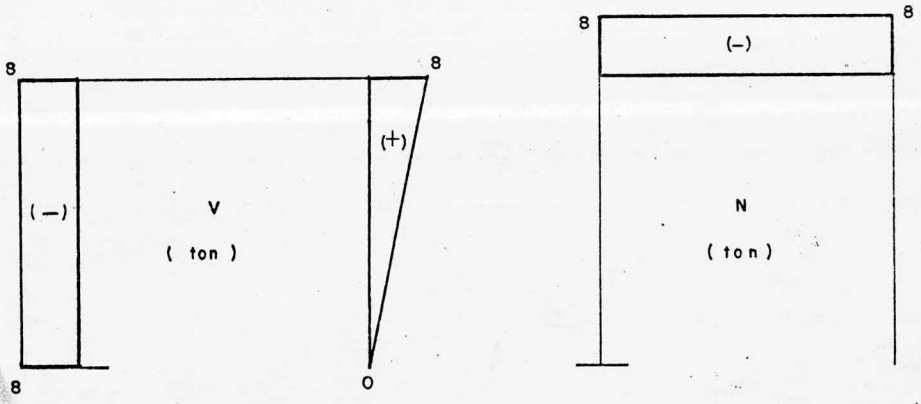
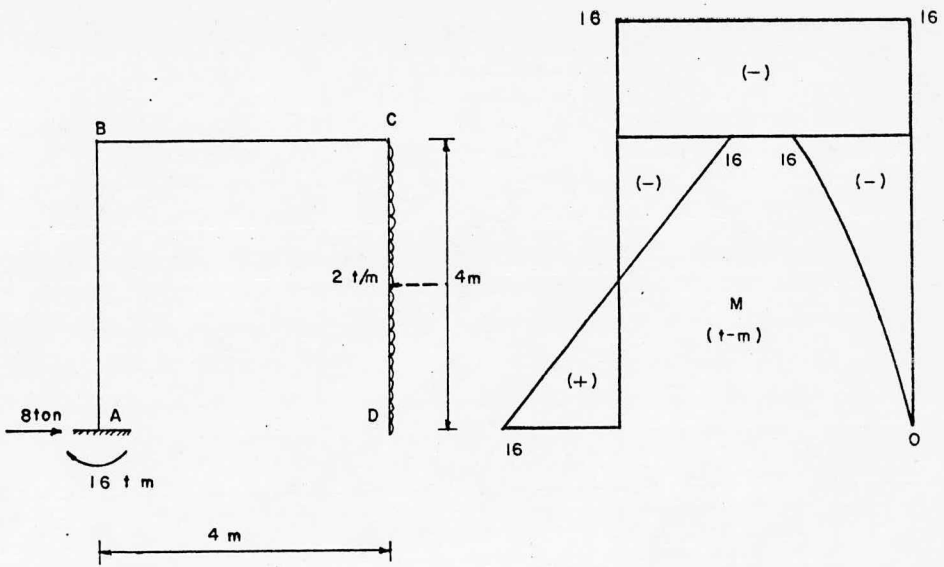
$$M = -16 + 8y - y^2 \quad \text{Si, } y = 0 ; M = -16$$

$$V = 8$$

$$y = 4 ; M = 0$$

$$V = 0$$

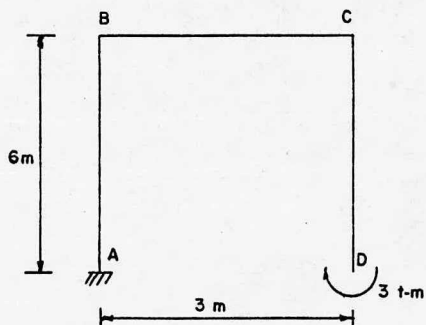
$$N = 0$$



PROBLEMA 4.6.2



4.6.3 Determine los diagramas de los elementos mecánicos del marco siguiente.



Cálculo de las reacciones:

$$\Sigma M_A = -M_a + 3$$

$$M_a = 3 \text{ t-m}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad R_{Ah} = 0$$

$$F_y = 0; \quad R_{Av} = 0$$

$$0 \leq y \leq 6$$

$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{Si, } y = 0; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$V = 0 \quad y = 6; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{Si, } x = 0; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$V = 0 \quad x = 3; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$N = 0$$

$$0 \leq y \leq 6$$

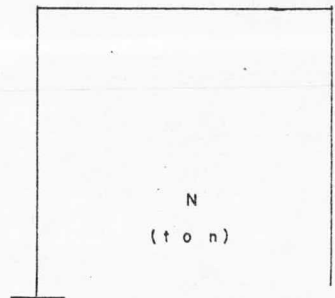
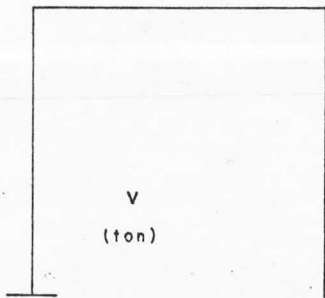
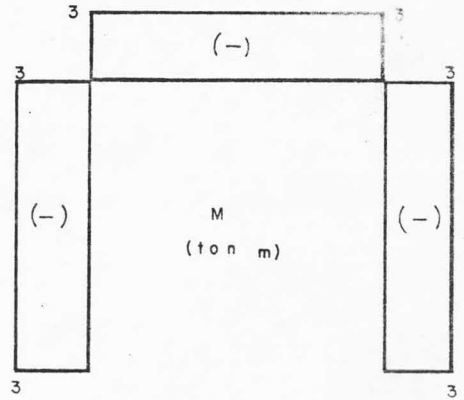
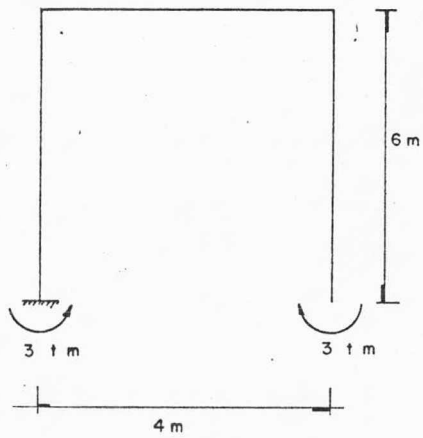
$$M = -3 \text{ t-m} \quad \text{Si, } y = 0; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

$$V = 0 \quad y = 6; \quad M = -3 \text{ t-m}$$

$$V = 0$$

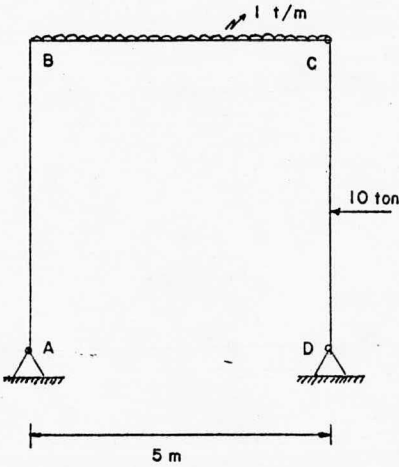
$$N = 0$$



PROBLEMA 4.6.3

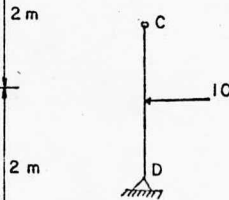
## 4.7 MARCOS TRIARTICULADOS.

- 4.7.1 Encontrar los diagramas de los elementos mecánicos para cada uno de los marcos de tres articulaciones que se --  
presentan a continuación.



Cálculo de las reacciones:

aislando el tramo CD,



$$\sum M_C = 10(2) - R_{Dh}(4) = 0$$

$$R_{Dh} = 5 \text{ ton}$$

considerando todo el marco,

$$\sum F_x = R_{Ah} - 10 + 5 = 0$$

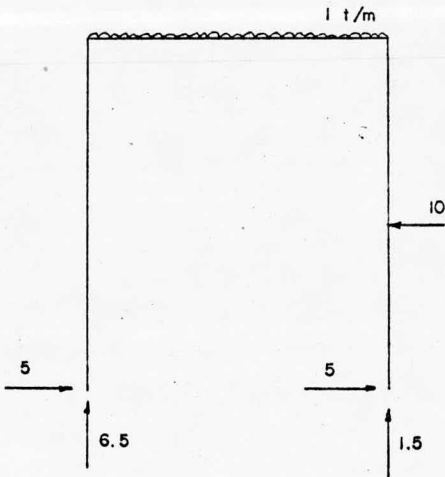
$$R_{Ah} = 5 \text{ ton}$$

$$\sum M_A = 1(5)(5/2) - 10(2) + R_D(5) = 0$$

$$R_{Dv} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = R_A - 5 - 1.5 = 0$$

$$R_A = 6.5 \text{ ton}$$



Una vez determinado el equilibrio, procedemos a obtener los elementos mecánicos en la forma acostumbrada.

$$0 \leq y \leq 4$$

$$\begin{array}{llll} M = -5y & \text{Si,} & y = 0 ; & M = 0 \\ V = -5 & (\text{cte.}) & y = 4 ; & V = -5 \text{ ton} \\ & & & M = -20 \text{ t-m} \\ & & & V = -5 \text{ ton} \\ N = -6.5 \text{ ton} & (\text{a compresión}) & & \end{array}$$

$$0 \leq x \leq 5$$

$$\begin{aligned} M &= -5(4) + 6(5) - 1(x)(x/2) \\ M &= -20 + 6.5x - x^2/2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} y = 6.5 - x & \text{Si,} & x = 0 ; & M = -20 \text{ t-m} \\ & & & V = 6.5 \text{ ton} \\ N = 5 \text{ ton} & (\text{a compresión}) & x = 5 ; & M = 0 \\ & & & V = 1.5 \end{array}$$

$$4 \geq y \geq 2$$

$$\begin{array}{llll} M = 6.5(5) - 5y - 5(2.5) & & & \\ M = 20 - 5y & \text{Si,} & y = 4 ; & M = 0 \\ & & & V = 5 \text{ ton} \\ y = 5 & & y = 2 ; & M = 10 \text{ t-m} \\ & & & V = 5 \text{ ton} \\ N = 1.5 \text{ ton} & (\text{a tensión}) & & \end{array}$$

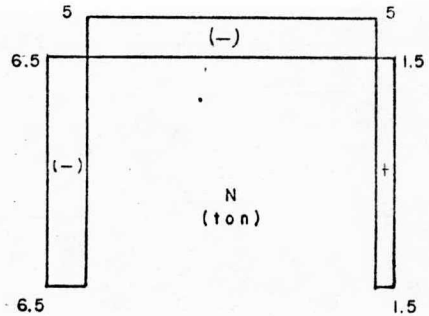
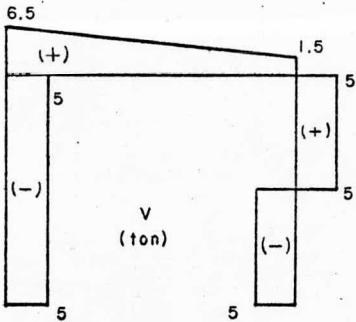
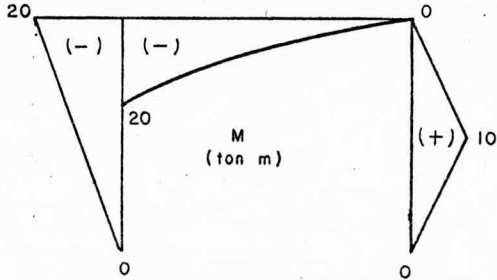
$$2 \geq y \geq 0$$

$$M = 6.5(5) + 5y - 3(2.5) - 10(2-y)$$

$$M = 5y$$

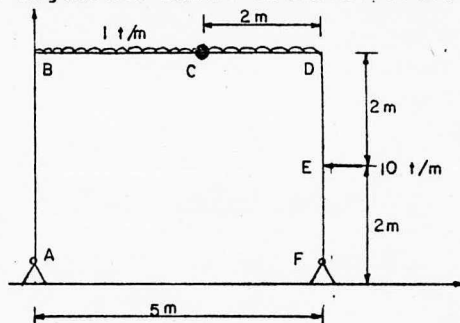
$$\begin{array}{lll}
 V = -5 & \text{Si,} & y = 2 ; & M = 10 \text{ t-m} \\
 & & & V = -5 \text{ ton} \\
 N = + 1.5 \text{ ton} & & y = 0 ; & M = 0 \\
 \text{(a tensión)} & & & V = - 5 \text{ ton}
 \end{array}$$

Los diagramas obtenidos son:



4.7.2

Resolver el siguiente marco triarticulado.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum M_A = 0 ; \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum M_A = 5(2.5) - 10(2) + R_{Fy}(5) = 0$$

$$R_{Fy} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum F_y = R_{Ay} - 5 - 1.5 = 0$$

$$R_{Ay} = 6.5 \text{ ton}$$

$$\sum M'_C = 0 ; \quad (\text{del tramo CF})$$

$$\sum M'_C = 2(1) + 10(2) + 1.5(2) - R_{Fx}(4) = 0$$

$$R_{Fx} = 6.25 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 ; \quad (\text{del conjunto})$$

$$\sum F_x = R_{Ax} - 10 + 6.25 = 0$$

$$R_{Ax} = 3.75 \text{ ton}$$

Cálculo de los momentos flexionantes.

$$0 \leq y \leq 4$$

$$M = -3.75y \quad \begin{array}{l} \text{Si, } y = 0 ; \quad M = 0 \\ y = 4 ; \quad M = -15 \text{ t-m} \end{array}$$

$$0 \leq x \leq 3$$

$$M = -3.75(4) + 6.5x - x^2/2$$

$$M = -15 + 6.5x - x^2/2$$

$$\text{Si, } x = 0 ; \quad M = -15 \text{ t-m}$$

$$x = 3 ; \quad M = 0$$

$$\text{Para } M_{\max} \quad x = 5 ; \quad M = 5 \text{ t-m}$$

$$\frac{dM}{dx} = 6.5 - x = 0$$

$$x = 6.5 \text{ m}$$

Nótese que el valor de  $x$  queda fuera de la barra.

$$4 \geq y \geq 2$$

$$M = 6.5(5) - 5(2.5) - 3.75y$$

$$M = 20 - 3.75y \quad \begin{array}{l} \text{Si, } y = 4 ; \quad M = 5 \text{ t-m} \\ y = 2 ; \quad M = 12.5 \text{ t-m} \end{array}$$

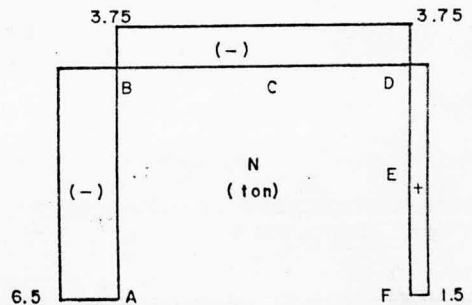
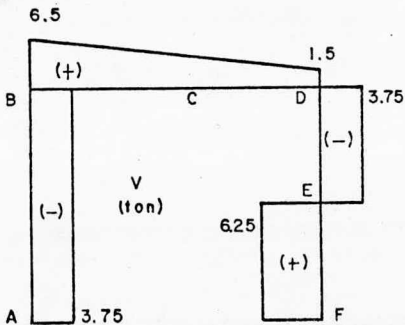
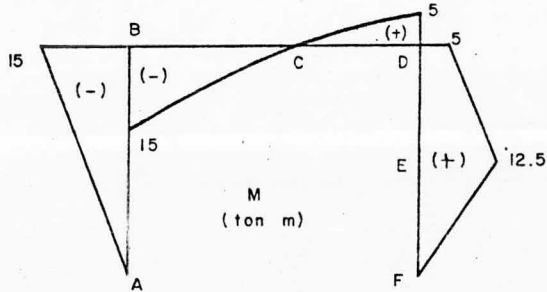
$$2 \geq y \geq 0$$

$$M = 6.5(5) - 5(2.5) - 3.75y - 10(2-y)$$

$$M = 6.25y \quad \begin{array}{l} \text{Si, } y = 2 ; \quad M = 12.5 \text{ t-m} \\ y = 0 ; \quad M = 0 \end{array}$$

## Cálculo de las fuerzas cortantes y normales:

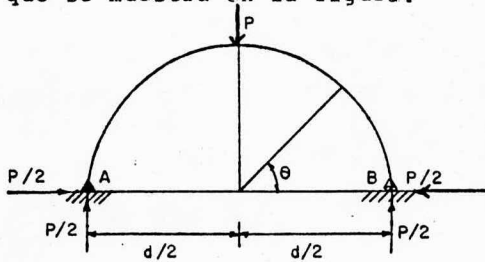
$0 \leq y \leq 4$	$V = -3.75$	$V = -3.75 \text{ ton}$
	$N = -6.5 \text{ (comp.)}$	$N = -6.5 \text{ ton}$
$0 \leq x \leq 5$	$V = 6.5 - x$	
	$N = -3.75 \text{ (compresión)}$	
	Si, $x = 0$ ;	$V = 6.5 \text{ ton}$
		$N = -3.75 \text{ ton}$
	$x = 5$ ;	$V = 1.5 \text{ ton}$
		$N = -3.75 \text{ ton}$
$4 \geq y \geq 2$	$V = 3.75$	$V = 3.75 \text{ ton}$
	$N = 6.5 - 5$	$N = 1.5 \text{ ton}$
$2 \geq y \geq 0$	$V = 3.75 - 10$	$V = -6.25 \text{ ton}$
	$N = 6.5 - 15$	$N = 1.5 \text{ ton}$





## 4.8 ARCOS SIMPLES.

- 4.8.1 Encuentre los diagramas de los elementos mecánicos para el arco que se muestra en la figura.



Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_x = 0 ; \quad - P/2 + A_x = 0$$

$$A_x = P/2$$

$$\sum M_A = P(d/2) - B_y (d) = 0$$

$$B_y = P/2$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad P/2 - P + A_y = 0$$

$$A_y = P/2$$

Cálculo de los momentos flexionantes:

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$M_F = P/2(x-r) - P/2(y) \quad \text{pero:} \quad x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$M_F = P/2(r \cos \theta) + P/2(r) - P/2(r \sin \theta)$$

$$M_F = P/2(r(\cos \theta + 1 - \sin \theta))$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$M_F = P/2(x+r) - P/2 y - Px$$

$$M_F = P/2(r \cos \theta) + P/2(r) - P/2(r \sin \theta) - P(r \cos \theta)$$

$$M_F = P/2 r(1 - \cos \theta - \operatorname{sen} \theta)$$

Cálculo de las fuerzas cortantes:

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$V = R e_v ;$$

$$e_v (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$$

$$R = P/2i + P/2j$$

$$V = [P/2i + P/2j \cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j]$$

$$V = P/2 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$R = P/2i - P/2j$$

$$V = [P/2i - P/2j \cos \theta i + \operatorname{sen} \theta j]$$

$$V = P/2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta$$

Cálculo de las fuerzas normales:

$$N = R e_N$$

$$e_N (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 90^\circ$$

$$R = P/2i + P/2j$$

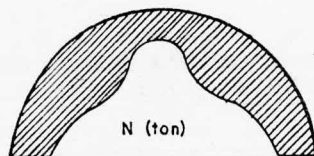
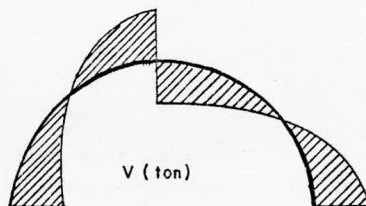
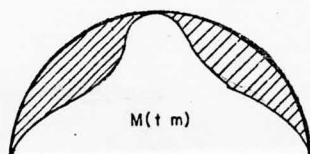
$$N = P/2 [-\operatorname{sen} \theta + \cos \theta]$$

$$90^\circ \geq \theta \geq 0^\circ$$

$$R = P/2i - P/2j$$

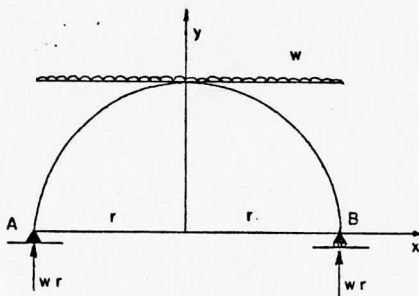
$$N = P/2 [-\operatorname{sen} \theta - \cos \theta]$$

$\theta$	MF	V	N
grados	ton-m	ton	ton
0	0	0.5P	- 0.5P
30	-0.18Pr	0.18P	- 0.69P
45	-0.20Pr	0	- 0.70P
60	-0.18Pr	-0.18P	- 0.69P
90	0	-0.5 P	- 0.5 P
		0.5 P	- 0.5 P
120	-0.18Pr	0.18P	- 0.69P
135	-0.20Pr	0	- 0.70P
150	-0.18Pr	-0.18P	- 0.69P
180	0	-0.5 P	- 0.5 P



4.8.2

En el arco siguiente, encuentre los diagramas de los elementos mecánicos.



$$\sum M_A = w(2r)r - B_y(2r) = 0$$

$$B_y = wr$$

$$\sum F_y = -2wr + wr + A_y = 0$$

$$A_y = wr$$

$$\sum F_x = 0$$

Cálculo de las ecuaciones para los elementos mecánicos:

$$MF = wr(x+r) - \frac{w(x+r)(x+r)}{2}$$

$$MF = \frac{w}{2} 2r - (r+x)(r+x)$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} - \frac{wx^2}{2} = \frac{wr^2}{2} - \frac{w(r \cos \theta)^2}{2}$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} - \frac{w(r \cos \theta)^2}{2}$$

$$180^\circ \geq \theta \geq 0$$

$$MF = \frac{wr^2}{2} \sin^2 \theta$$

$$V = e_y R \quad e_v \cos \theta, \sin \theta$$

$$R = wr - w(x+r) \quad j = (-wx)j$$

$$V = - wx \operatorname{sen} \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$V = - wr \cos \theta, \operatorname{sen} \theta$$

$$N = \overline{e_n \cdot R}$$

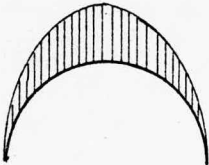
$$e_n [-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta]$$

$$R = [wr - w(x + r)] \quad j = (-wx)j$$

$$N = - wx \cos \theta$$

$$N = - wr \cos^2 \theta$$

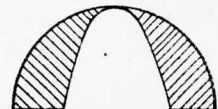
$\theta$	Mr	V	N
grados	ton-m	ton	ton
0	0	0	- wr
30	$0.125wr^2$	$-0.433wr$	$-0.75 wr$
45	$0.25 wr^2$	$-0.5 wr$	$-0.5 wr$
60	$0.375wr^2$	$-0.433wr$	$-0.25 wr$
90	$0.5 wr^2$	0	0
120	$0.375wr^2$	$+0.433wr$	$-0.25 wr$
135	$0.25 wr^2$	$+0.5 wr$	$-0.5 wr$
150	$0.125wr^2$	$+0.433wr$	$-0.75 wr$
180	0	0	- wr



M (t-m)



V (ton)

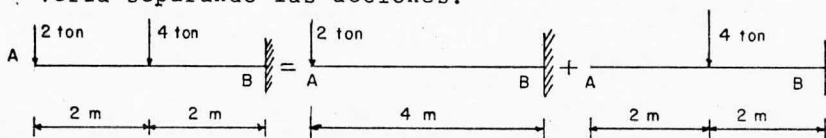


N (ton)

## 4.9 SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS

Al igual que en el capítulo anterior, donde vimos que, resolver una viga considerando la acción conjunta de todas las fuerzas daba el mismo resultado que tomar la acción de las mismas, una por una y después sumar algebraicamente -- sus reacciones, así los diagramas de elementos mecánicos -- pueden ser utilizados de la misma forma.

El ejercicio 4.3.1, es una viga en voladizo con dos -- cargas. Ya con anterioridad fue resuelta considerando la -- acción conjunta de las fuerzas; ahora procederemos a resolverla separando las acciones.



Resolviendo las vigas.

a) Calculando las reacciones:

Viga a)

$$\Sigma M_B = M_b - 2(4) = 0$$

$$M_b = 8 \text{ t-m}$$

$$\Sigma F_y = R_B - 2 = 0$$

$$R_B = 2 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = R_{Bh} = 0$$

Viga b)

$$\Sigma M_B = M_b - 4(2) = 0$$

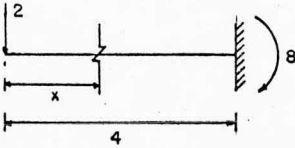
$$M_b = 8 \text{ t-m}$$

$$\Sigma F_y = R_B - 4 = 0$$

$$R_B = 4 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = R_{Bh} = 0$$

$0 \leq x \leq 4$



$$M = -2x \quad \text{Si, } x=0 ; M = 0$$

$$V = -2 \quad V = -2 \text{ ton}$$

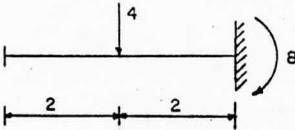
$$N = 0$$

$$x=4 ; M = -8 \text{ t-m}$$

$$V = -2 \text{ ton}$$

$$N = 0$$

$0 \leq x \leq 2$



$$M = 0 \quad M = 0$$

$$V = 0 \quad V = 0$$

$$N = 0 \quad N = 0$$

$2 \leq x \leq 4$

$$M = -4(x-2) \quad \text{Si, } x=2 ; M = 0$$

$$V = -4 \quad V = -4 \text{ ton}$$

$$N = 0 \quad N = 0$$

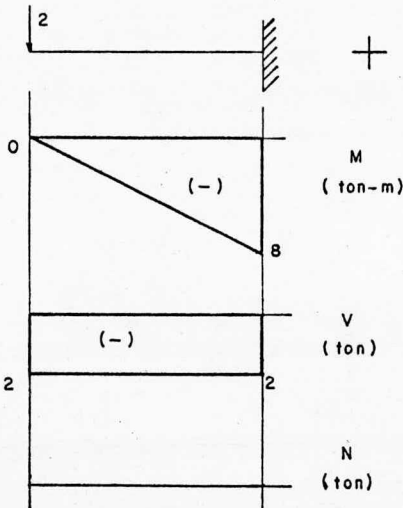
$$x=4 ; M = -8 \text{ t-m}$$

$$V = -4 \text{ ton}$$

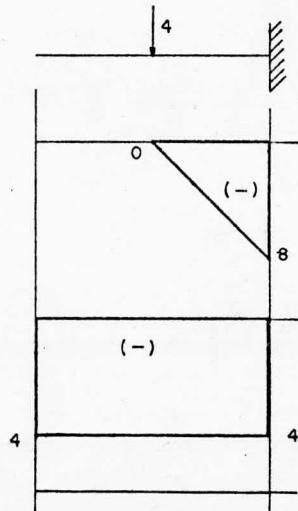
$$N = 0$$

Los diagramas individuales son:

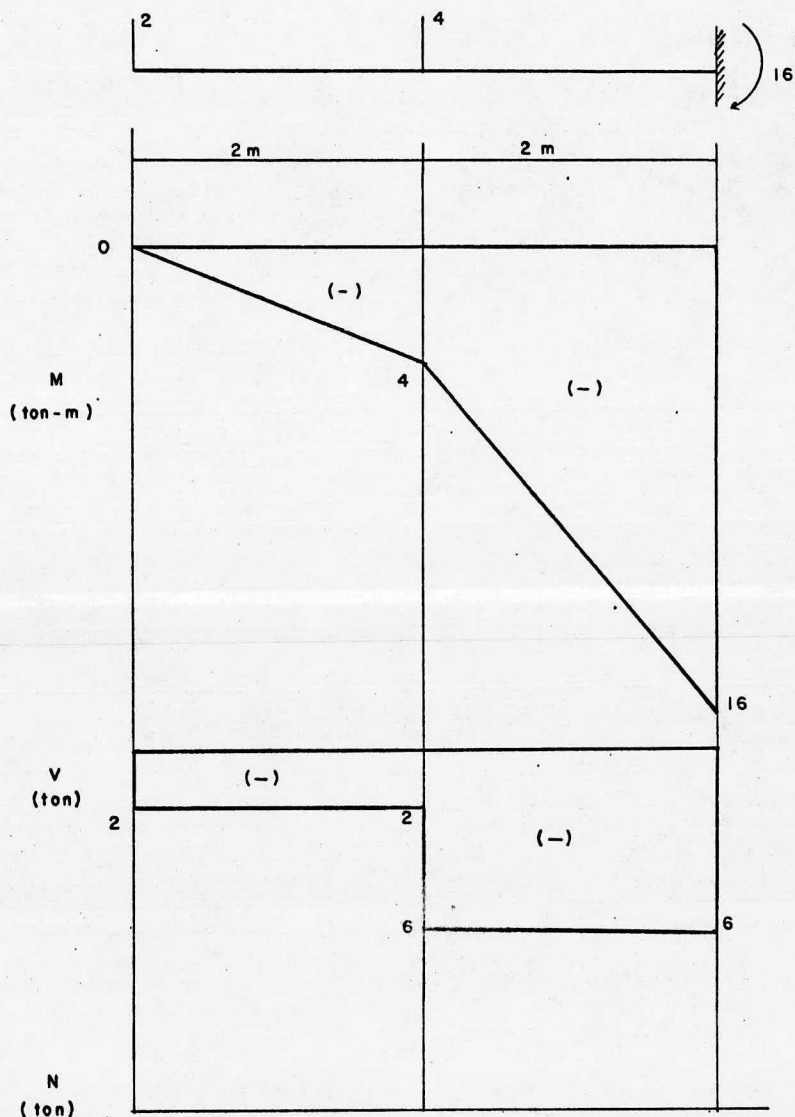
a) -



b) -



Sumando directamente los diagramas obtenemos lo siguiente:



que es idéntico al diagrama del problema 4.3.1.

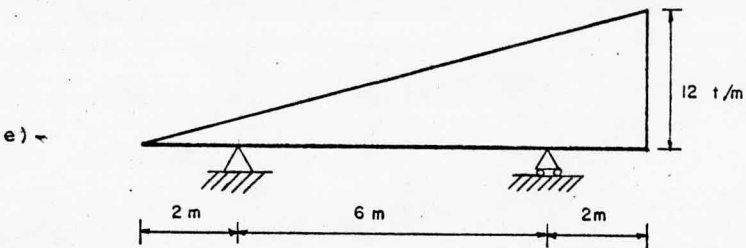
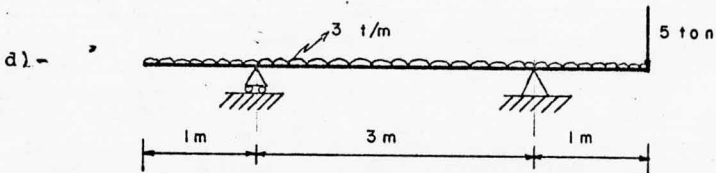
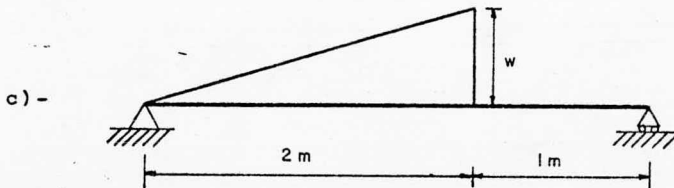
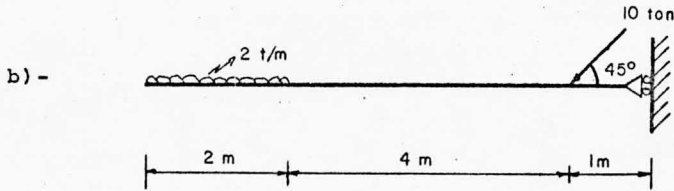
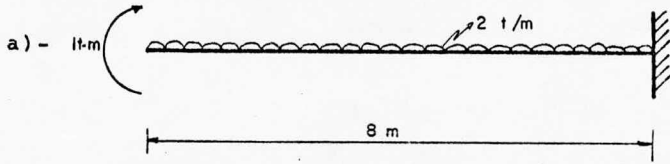


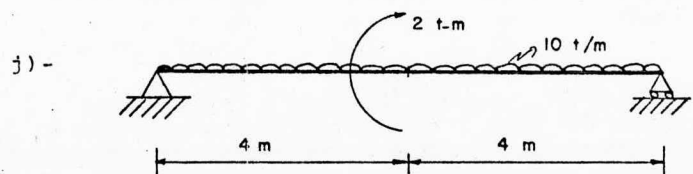
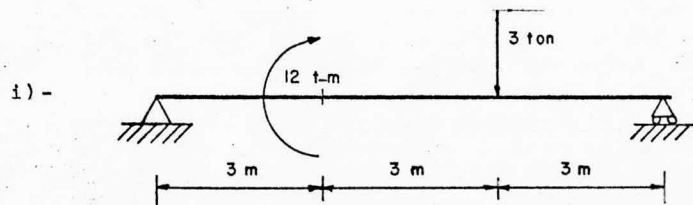
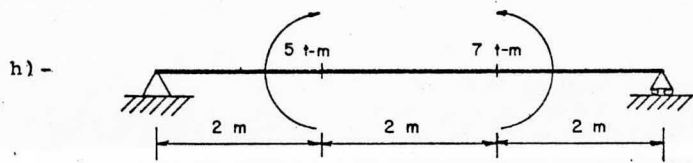
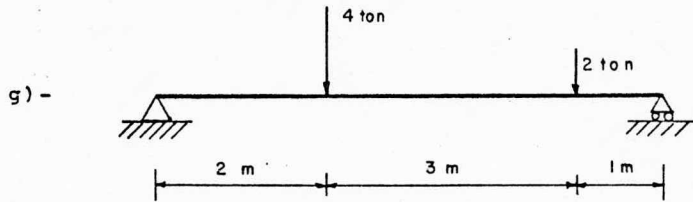
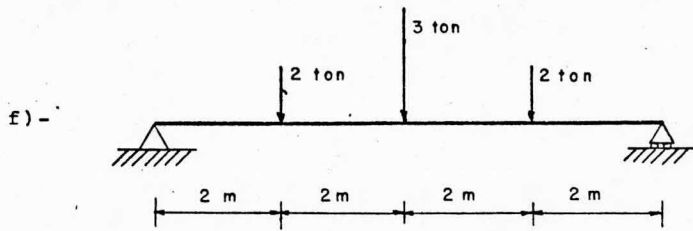
4.10

PROBLEMAS PROPUESTOS.

4.10.1

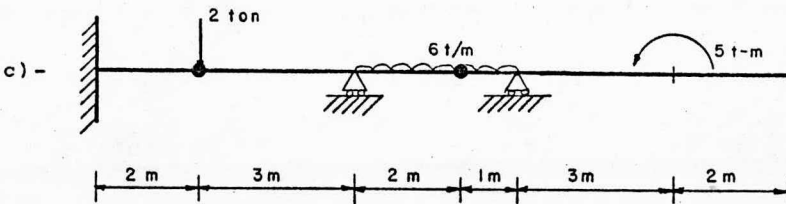
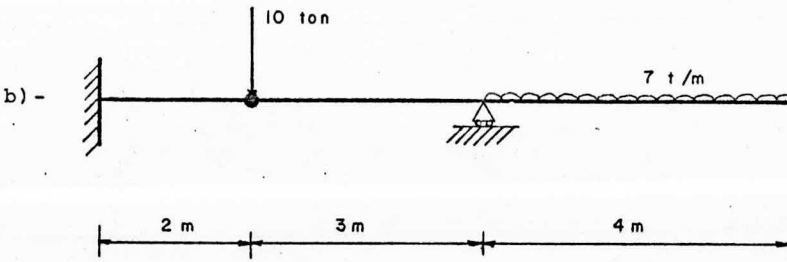
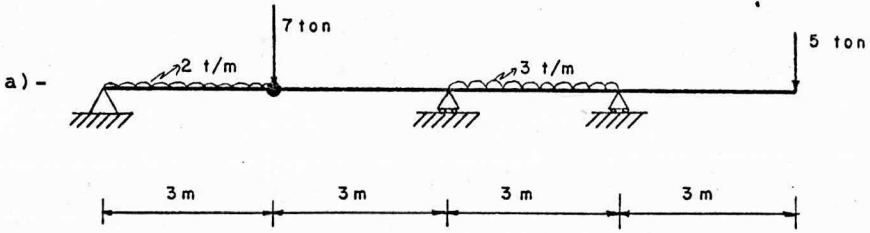
Vigas simplemente apoyadas.





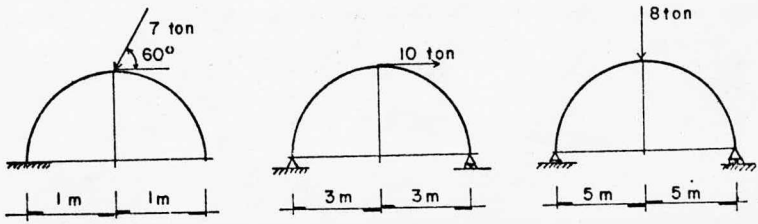
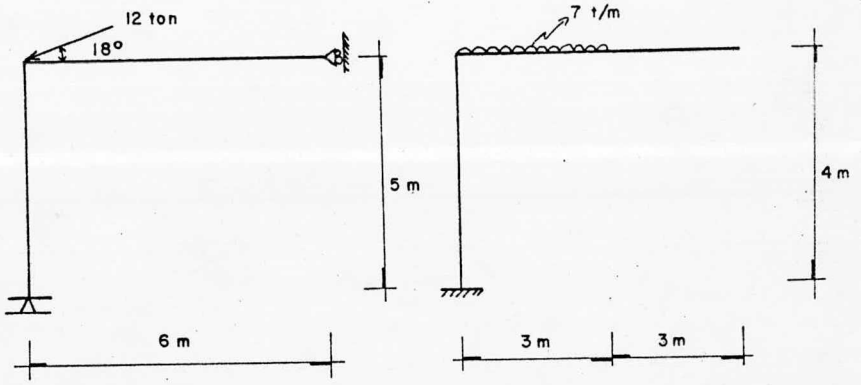
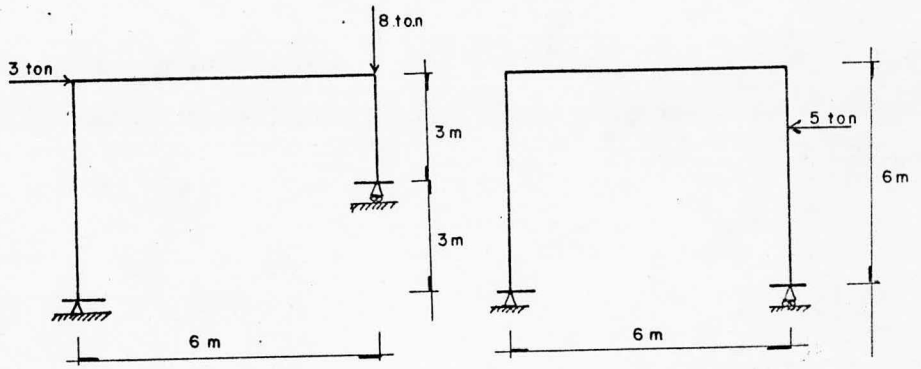
## 4.10.2

## Vigas gerber.



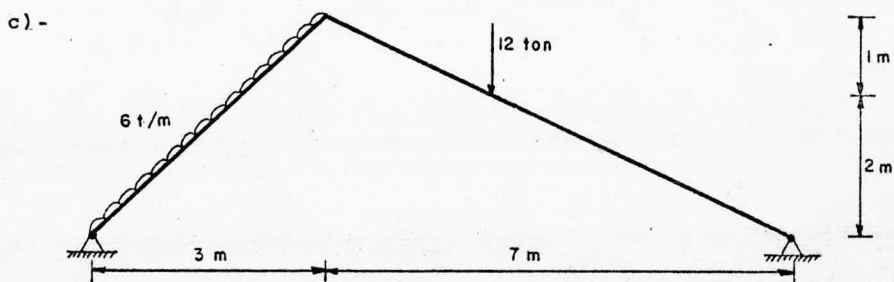
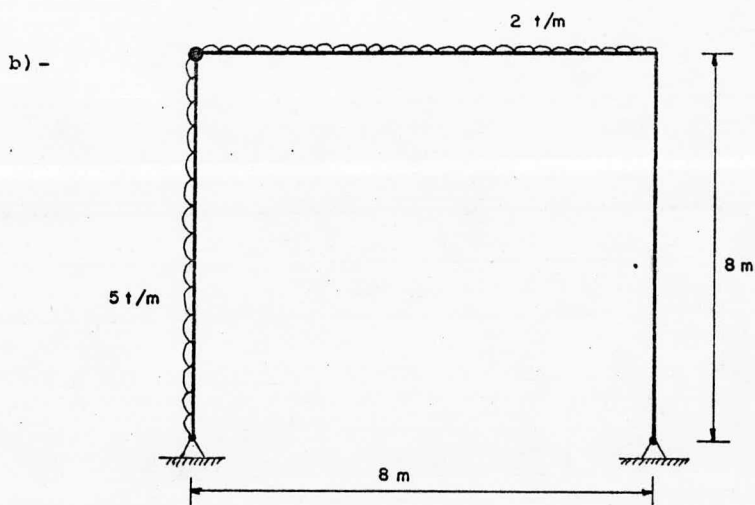
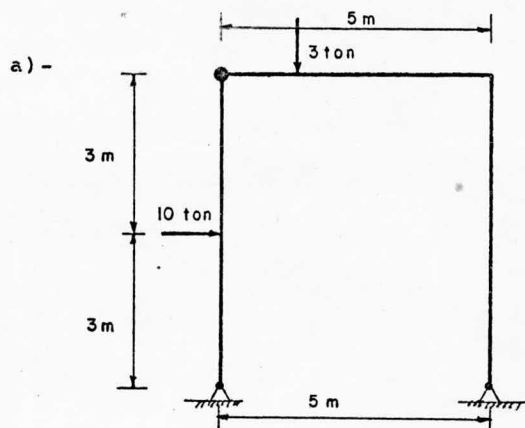
4.10.3

Marcos simplemente apoyados y en voladizo.



## 4.10.4

## Marcos triarticulados.



---

# CAPITULO V

ARMADURAS ISOSTATICAS

---

## CAPITULO V

## ARMADURAS ISOSTATICAS

## 5.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

## 5.1.1 SISTEMAS EN CELOSIA.

Son sistemas mecánicos o estructurales forrados por vigas o barras, interconectadas entre sí, mediante -- articulaciones que aceptán cualquier condición de carga.

## 5.1.2 ARMADURAS.

Es una estructura en celosía que cumple con las siguientes características:

- a) El sistema de cargas que actúa sobre la estructura está contenido en el plano definido por todos los miembros que la constituyen.
- b) Los miembros de la estructura son elementos rígidos interconectados por medio de pasadores lisos perfectamente ajustados a los miembros que unen.
- c) Los sistemas de fuerzas activas y reactivas sólo -- actúan sobre las uniones de los elementos.

## 5.1.3 ELEMENTOS DE REACCION

Es el número de fuerzas de reacción, proporcionadas por los apoyos de la armadura.

## 5.1.4 BARRAS.

Llamaremos barras, a cada uno de los elementos componentes de las armaduras. Se considera que una barra es el miembro que se encuentra entre dos nudos.

## 5.1.5 NUDO.

Llamaremos nudo al punto donde concurren dos o más miembros de la armadura. Los nudos son también, las -- articulaciones que unen a las barras, además de ser -- los puntos donde actúan las fuerzas.

### 5.1.6 ISOSTATICIDAD DE UNA ESTRUCTURA.

Decimos que una estructura es isostática cuando el número de elementos de reacción desconocidos es igual a la cantidad de ecuaciones de la estática disponibles para el cálculo de ellos.

### 5.1.7 HIPERESTATICIDAD.

La condición de hiperestaticidad de una estructura tiene lugar cuando el número de elementos desconocidos de reacción es mayor que el de ecuaciones de la estática disponibles para su cálculo.

### 5.1.8 INESTABILIDAD.

Se dice que una estructura es inestable o hipostática si el número de elementos desconocidos de reacción es menor que el de ecuaciones disponibles para su cálculo.

### 5.1.9 GARANTIA DE ISOSTATICIDAD.

Supongase una armadura compuesta por " b " número de barras y por " n " número de nudos.

De acuerdo con los lineamientos de la estática, sabemos que sobre cada nudo encontraremos un sistema de fuerzas concurrentes, los cuales para garantizar su equilibrio sólo necesitan que  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ . Es decir, cada nudo proporcionará dos ecuaciones para resolver las incógnitas de la armadura. Así que el número de nudos multiplicado por dos proporcionará el total de ecuaciones disponibles.



La cantidad de fuerzas incógnitas estará determinado por el número de barras, puesto que en cada barra es tá actuando una fuerza, ya sea de compresión o de -- tensión, más todas las reacciones que produzcan los apoyos.

Así, el total de incógnitas será:

$$" b + r "$$

donde:  $b = \text{N}^\circ$  de barras.

$r = \text{N}^\circ$  de reacciones.

Basados en el planteamiento anterior, podemos clasificar las armaduras como:

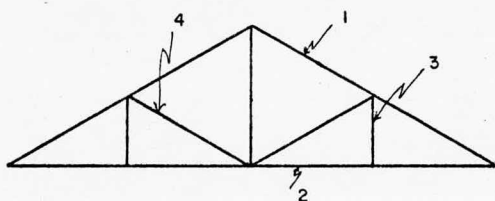
INESTABLES, si  $b + r < 2n$

ISOSTATICAS, si  $b + r = 2n$

HIPERESTATICAS, si  $b + r > 2n$

#### 5.1.10

#### PARTES DE LAS ARMADURAS

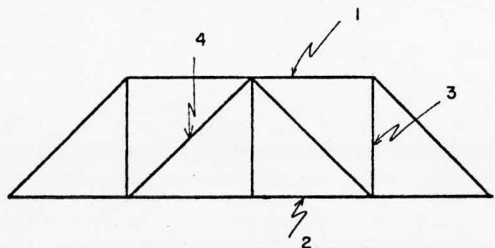


(1) Cuerda superior.

(2) Cuerda inferior.

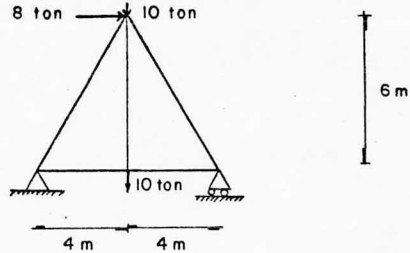
(3) Montantes.

(4) Diagonales.



## 5.2 METODO DE LOS NUDOS

5.2.1 Calcular las fuerzas en cada barra de la siguiente armadura.



El primer paso en la resolución de armaduras es comprobar su isostaticidad.

$$b = 5$$

$$b + r = 2n$$

$$n = 4$$

$$5 + 3 = 2(4)$$

$$r = 3$$

$$8 = 8$$

En seguida se procede a evaluar las reacciones en los apoyos.

$$\Sigma M_A = 8(6) + 10(4) + 10(4) - R_D(8) = 0$$

$$R_D = 16 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_y = R_A - 10 - 10 + 16 = 0$$

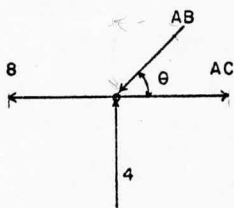
$$R_A = 4 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = -R_{Ax} + 8 = 0$$

$$R_{Ax} = 8 \text{ ton}$$

Una vez hecho el equilibrio externo, calcularemos la fuerza actuante en cada barra aislando cada nudo en un diagrama de cuerpo libre.

## Nudo A



$$\theta = 56.4^\circ$$

El sistema de fuerzas que se forma en cada nudo, es concurrente a un sólo punto, de tal suerte que las barras AB y AC podemos conocerlas planteando las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 4 - AB \sin 56.4^\circ = 0$$

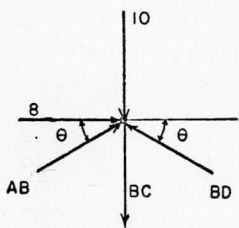
$$AB = 4.8 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_x = -8 - 4.8 \cos 56.4^\circ + AC = 0$$

$$AC = 10.65 \text{ ton}$$

Cabe mencionar que el sentido de las fuerzas es propuesto y se comprueba con el signo del resultado. Se considera que la barra -- trabaja a compresión si la flecha llega al nudo en el diagrama de cuerpo libre, y a tensión en caso contrario.

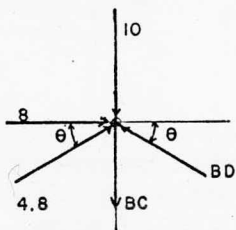
## Nudo B



En el diagrama de cuerpo libre se observa la presencia de tres incógnitas, sin embargo, la fuerza correspondiente a la barra AB se calculó en el nudo A, por tanto el problema se reduce a dos incógnitas.

$$\Sigma F_x = 8 + 4.8 \cos 56.4^\circ - BD \cos 56.4^\circ = 0$$

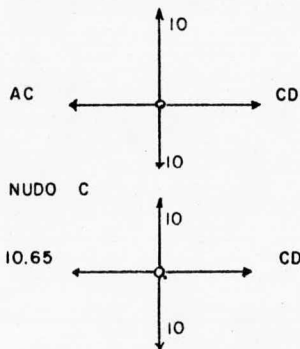
$$BD = 19.23 \text{ ton}$$



$$\Sigma F_y = -10 + 4.8 \sin 56.4^\circ - BC + 19.23 \sin 56.4^\circ = 0$$

$$BC = 10 \text{ ton}$$

El cálculo de las barras es posible solamente cuando hay una o dos incógnitas en el mismo nudo. Es conveniente llevar una secuencia ordenada para que las barras que calculemos en un nudo sirvan en los siguientes.



En este nudo sólo hay una incógnita, la barra Ac fue calculada en el nudo A.

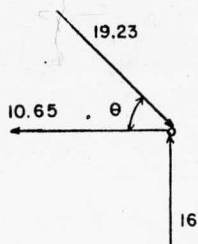
$$\Sigma F_x = -10.65 + CD = 0 ; \quad \boxed{CD = 10 \text{ ton}}$$

La suma de fuerzas en y, sólo sirve en este nudo para comprobar el equilibrio dado que en éste caso no existen incógnitas en esta dirección.

$$\Sigma F_y = 10 - 10 = 0$$

Hasta este momento ya hemos conocido el valor de la fuerza --- actuante en cada barra: El nudo D, ya no es necesario analizarlo, - pero si se quiere comprobar el equilibrio, las sumas de fuerzas - -- ( $F_x, F_y$ ), en ese nudo así como en todos los demás tiene que ser -- igual con cero.

Nudo D.



$$\theta = 56.4^\circ$$

$$\Sigma F_x = -10.65 + 19.23 \cos 56.4$$

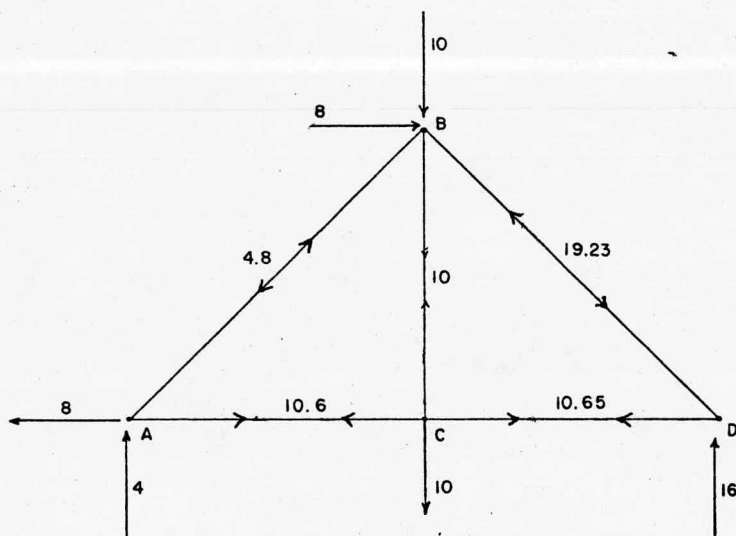
$$\boxed{F_x = 0}$$

$$\Sigma F_y = 16 - 19.23 \sin 56.4^\circ$$

$$\boxed{F_y = 0}$$

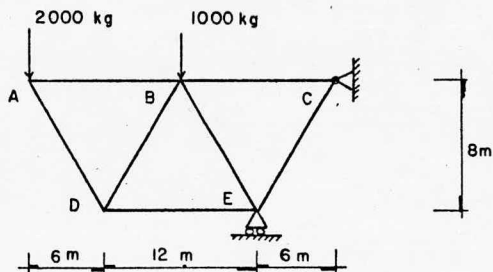
Los resultados obtenidos podemos presentarlos de una forma más ordenada por medio de una tabla, o también en un diagrama de la armadura indicando su magnitud y su forma de trabajo.

BARRA	MAGNITUD (ton)	TENSION	COMPRESION
A B	4.80		x
A C	10.65	x	
B D	19.23		x
B C	10.00	x	
C D	10.65	x	



## 5.2.2

Utilizando el método de los nudos, determine la fuerza en cada miembro de la armadura que se muestra en la figura siguiente.



Cálculo de las reacciones.

$$\Sigma M_C = -2000(24) - 1000(12) + R_E(6) = 0$$

$$R_E = 10000 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_x = R_{Cx} = 0$$

$$R_{Cx} = 0$$

$$\Sigma F_y = -2000 - 1000 + 10000 - R_{Cy} = 0$$

$$R_{Cy} = 7000 \text{ Kg}$$

Condición isostática:

$$b = 7 \quad b + r = 2N$$

$$n = 5 \quad 7 + 3 = 2(5)$$

$$r = 3 \quad 10 = 10 \quad (\text{Si es isostática})$$

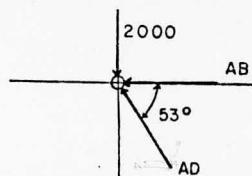
$$\Sigma F_y = -2000 + AD \sin 30^\circ = 0$$

$$AD = \frac{2000}{\sin 57^\circ} = \boxed{2500 \text{ Kg}}$$

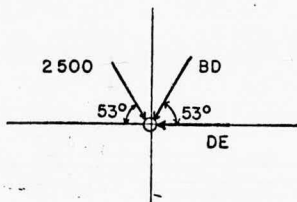
$$\Sigma F_x = AB - 2500 \cos 53^\circ = 0$$

$$AB = 2500 \cos 53^\circ = \boxed{1500 \text{ Kg}}$$

NUDO A



Nudo D



$$\Sigma F_y = -2500 \cos 37^\circ + BD \cos 30^\circ = 0$$

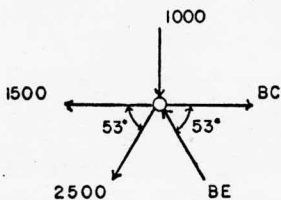
$$\boxed{BD = 2500 \text{ Kg}}$$

$$\Sigma F_x = 2500 \sin 37^\circ + 2500 \sin 37^\circ -$$

$$- DE = 0$$

$$\boxed{DE = 3000 \text{ Kg}}$$

Nudo B



$$\Sigma F_y = -1000 - 2500 \sin 53^\circ +$$

$$+ BE \sin 53^\circ = 0$$

$$\boxed{BE = 3750 \text{ Kg}}$$

$$\Sigma F_x = -1500 - 2500 \cos 53^\circ -$$

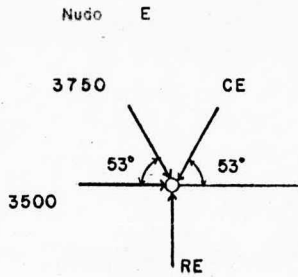
$$- 3750 \cos 53^\circ + BC = 0$$

$$\boxed{BC = 5250 \text{ Kg}}$$

Nudo E

$$\Sigma F_x = 3000 + 3750 \cos 53^\circ -$$

$$- CE \cos 53^\circ = 0$$



$$CE = 8750 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_y = -3750 \text{ sen}53^\circ - 8750 \text{ sen}53^\circ + RE = 0$$

$$RE = 10000 \text{ Kg}$$

Valor idéntico al calculado en el equilibrio externo.

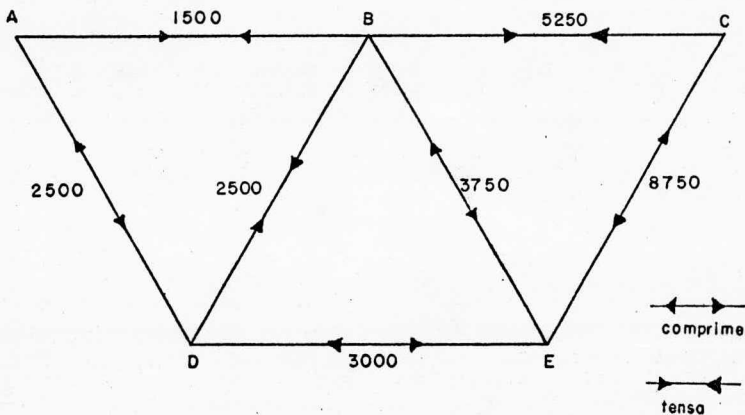
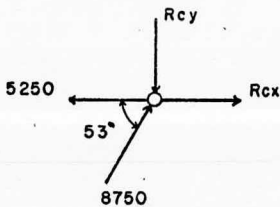
Nudo C

$$\Sigma F_x = -5250 + 8750 \text{ cos}53^\circ - R_{Cx} = 0$$

$$R_{Cx} = 0$$

$$\Sigma F_y = 8750 \text{ sen}53^\circ - R_{Cy} = 0$$

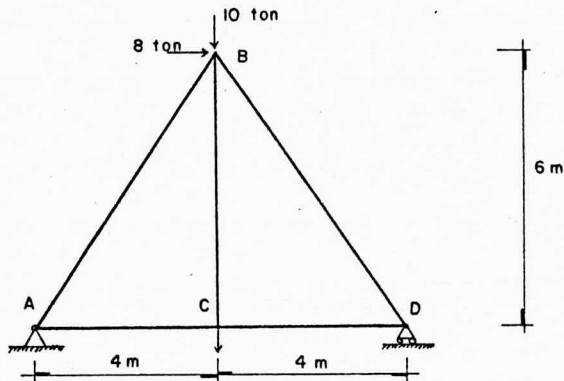
$$R_{Cy} = 7000 \text{ Kg}$$





## 5.3 METODO DE LAS SECCIONES.

5.3.1 La armadura siguiente fué resuelta en el problema 5.2.1 por el método de los nudos, en esta ocasión se resolverá por el método de las secciones.



Comprobando su isostaticidad, tenemos que:

$$b = 5 \quad b + r = 2n$$

$$n = 4 \quad 5 + 3 = 2(4)$$

$$r = 3 \quad 8 = 8 \quad (\text{sí es isostática})$$

Ahora, realizando su equilibrio externo:

$$\Sigma M_A = 8(6) + 10(4) + 10(4) - R_D(8) = 0$$

$$R_D = \frac{48 + 40 + 40}{8} = \frac{128}{8}$$

$$R_D = 16 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_B = 8(6) - 10(4) - 10(4) + R_A(8) = 0$$

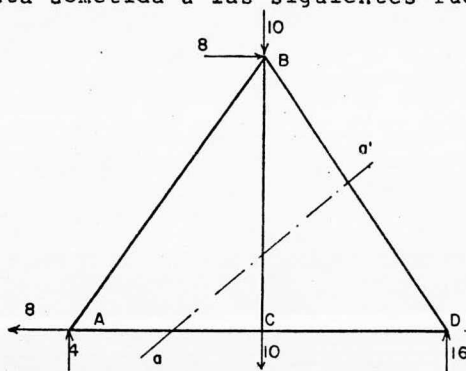
$$R_A = \frac{-48 + 40 + 40}{8} = \frac{32}{8}$$

$$R_A = 4 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = -R_{Ax} + 8 = 0$$

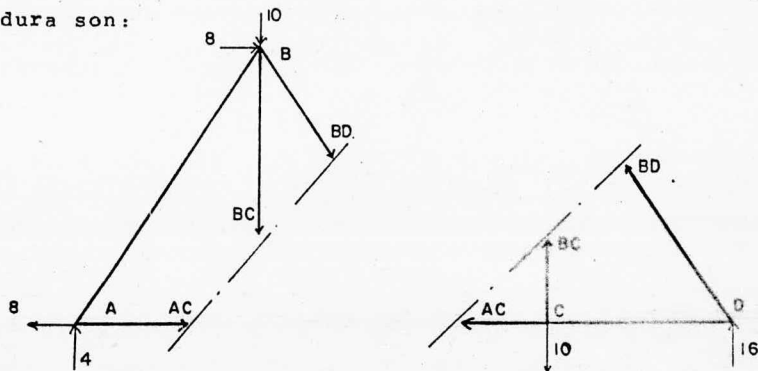
$$R_{Ax} = 8 \text{ ton}$$

Una vez terminado el equilibrio, vemos que la armadura está sometida a las siguientes fuerzas:



El método de las secciones propone en primera instancia, hacer un corte en la armadura, tal que éste divida la armadura en dos partes, teniendo presente -- que el corte solo debe cruzar un máximo de tres barras incógnitas.

Una vez realizado el corte, las secciones de la armadura son:



Analicemos el corte a la derecha, éste, es un diagrama de cuerpo libre sobre el cual actúan las fuerzas de 10 y 16 ton, además de las fuerzas que producen las barras AC, BC y BD.

Suponemos el sentido de las fuerzas en las barras, recordando que si éste es saliendo del nudo, significa que la barra trabaja a tensión y en caso contrario, a compresión.

El sistema de fuerzas formado al seccionar la armadura, es de tipo coplanar general, por lo tanto su equilibrio está garantizado por  $\Sigma M_O = 0$ ,  $\Sigma F_x = 0$ ,  $\Sigma F_y = 0$ . Apoyándonos en estas ecuaciones y planteando el equilibrio en cada sección, podremos conocer la fuerza actuante en cada una de las barras incógnitas afectadas por el corte.

$$\text{Sea, } \Sigma M_C = 0$$

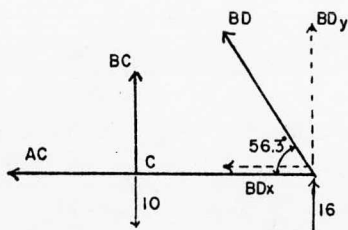
$$\Sigma M_C = -64(4) - BD_y(4) +$$

$$+ BD_x(0) = 0$$

$$\Sigma M_C = -64 - BD \text{ sen} 56.3^\circ(4) = 0$$

$$BD = \frac{-64}{4 \text{ sen} 56.3^\circ}$$

$$BD = -19.23 \text{ ton} \quad (\text{mal supuesto})$$



Puesto que el signo resultó negativo, BD está mal su-  
puesta; el valor será el mismo, solo que no tensa, si  
no comprime.

$$BD = 19.23 \text{ ton} \quad (\text{a compresión})$$

$$\text{Sea } \Sigma M_D = 0$$

$$\Sigma M_D = -10(4) + BC(4) + AC(0) = 0$$

$$BC = \frac{40}{4}$$

$$\boxed{BC = 10 \text{ ton}} \quad (\text{a tensión})$$

$$\text{Sea } \Sigma F_x = 0$$

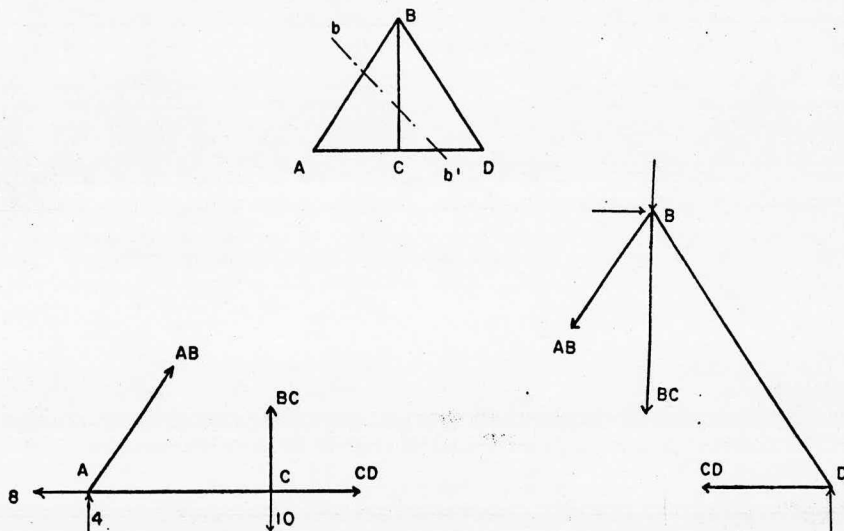
$$-AC + BD \cos 56,3^\circ = 0$$

$$AC = 19,23 \cos 56,3^\circ$$

$$\boxed{AC = 10,65 \text{ ton}} \quad (\text{a tensión})$$

Continuando con el método se hacen cortes sucesivos de modo tal que cada corte permita seguir conociendo cada vez más incógnitas.

Propongamos un segundo corte:



$$\Sigma M_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 4(4) + AB \operatorname{sen} 56.3^\circ (4) = 0$$

$$AB = \frac{16}{4 \operatorname{sen} 56.3^\circ}$$

$$AB = -4.80 \text{ ton} \quad (\text{mal supuesta})$$

$$\Sigma M_A = 0$$

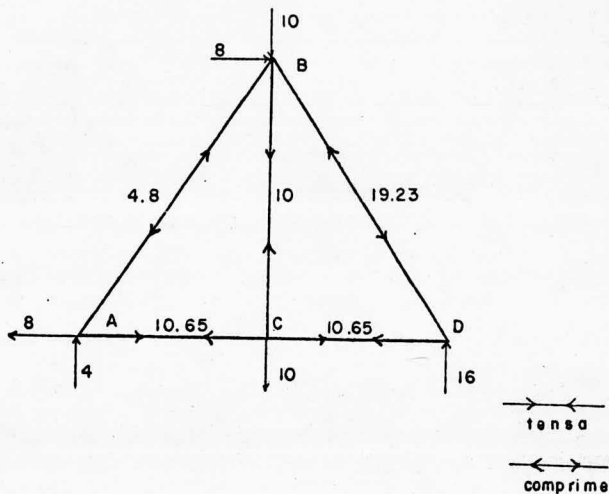
$$\Sigma M_A = 10(4) - BC(4) = 0$$

$$BC = 10 \text{ ton} \quad (\text{mismo valor obtenido que en el corte anterior})$$

$$\Sigma F_x = 0$$

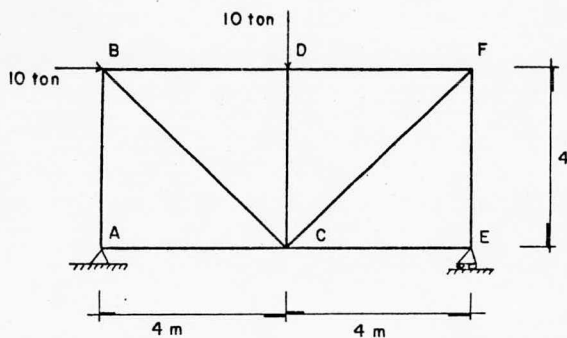
$$\Sigma F_x = -8 - 4.8 \cos 56.3^\circ + CD = 0$$

$$CD = 10.65 \text{ ton}$$



5.3.2

Por el método de las secciones, resuelva la armadura siguiente.



$$b = 9 \quad b + r = 2n$$

$$n = 6 \quad 9 + 3 = 2(6)$$

$$r = 3 \quad 12 = 12$$

Cálculo de las reacciones

$$\Sigma M_A = 10(4) + 10(4) - R_E(8) = 0$$

$$R_E = \frac{40 + 40}{8}$$

$$R_E = 10 \text{ ton}$$

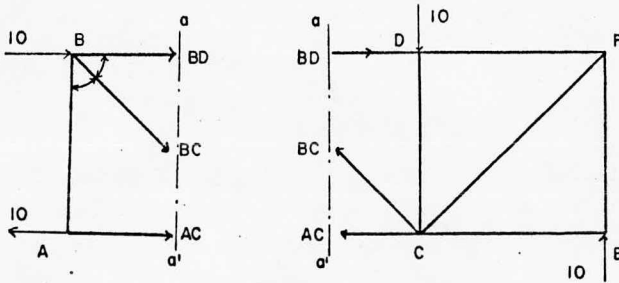
$$\Sigma M_E = 10(4) - 10(4) + R_{Ay}(8) = 0$$

$$R_{Ay} = 0$$

$$\Sigma F_x = 10 + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 10 \text{ ton}$$

Trabajando con el corte A-A'.



En la parte derecha del corte:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\Sigma M_B = 10(4) - AC(4) = 0$$

$$AC = 10 \text{ ton}$$

A la izquierda del corte:

$$\Sigma M_C = -10(4) + BD(4) = 0$$

$$BD = 10 \text{ ton}$$

Nuevamente en el lado izquierdo:

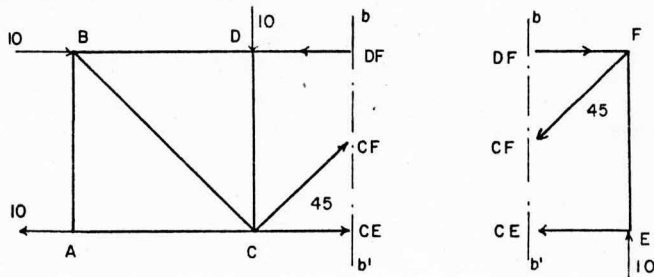
$$\Sigma M_A = 10(4) - 10(4) + BC \cos 45^\circ = 0$$

$$BC = 0$$

Como se observa, podemos tomar indistintamente ambos lados del corte, sin que ésto afecte los resultados. El utilizar uno u otro lado del corte dependerá de la dificultad con que las ecuaciones se presenten; es recomendable que primero se utilice-

el lado con mayor número de fuerzas conocidas y en él, proponer la suma de momentos o suma de fuerzas de tal forma que se presenten ecuaciones con una sola incógnita, que son muy fáciles de resolver.

Utilizando el corte B-B'.



A la derecha del corte:

$$\sum M_F = 10(0) + CE(4) = 0$$

$$\boxed{CE = 0}$$

A la izquierda del corte:

$$\sum M_C = 10(4) - DF(4) = 0$$

$$\boxed{DF = 10 \text{ ton}}$$

A la izquierda del corte:

$$\sum M_E = 10(4) - CF \text{ sen}45^\circ(4) = 0$$

$$CF = \frac{40}{4 \text{ sen}45^\circ}$$

$$\boxed{CF = 14,14 \text{ ton}}$$

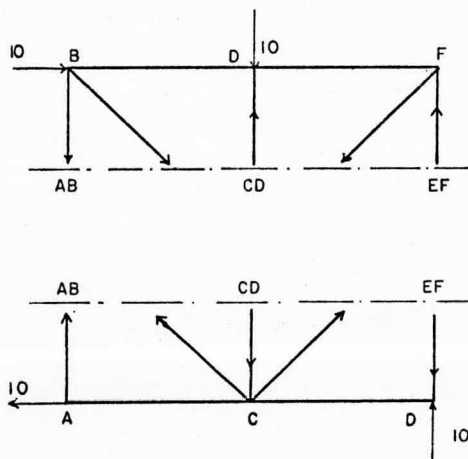
Nótese que muchas de las barras no están trabajando,



sin embargo no podemos suprimirlas de la armadura por que provocaríamos la inestabilidad de la misma.

Con el corte C-C' (horizontal) estamos afectando 5 barras, de las cuales BC y CF son valcres calculados en

cortes anteriores, así que solo quedan los tres momentos como incógnitas.



veamos que sucede al plantear las ecuaciones.

Arriba del corte:

$$\Sigma M_B = 10(4) - CD(4) + 14,14 \cos 45^\circ (8) - EF(8) = 0$$

$$\Sigma M_D = -AB(4) - EF(4) + 14,14 \cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma M_E = -AB(8) - 10(4) + CD(4) = 0$$

Cada ecuación es de dos incógnitas, no se pueden resolver individualmente; planteando las ecuaciones en cada nudo del corte obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que al resolverse proporcionará los valores de las barras.

Así:

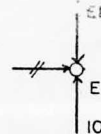
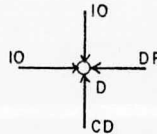
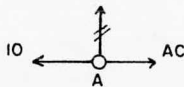
$$AB = 0$$

$$CD = 10$$

$$EF = 10$$

Pero el método de las secciones se utiliza para simplificar los cálculos, no para complicarlos. Podemos proponer otros cortes, la inclinación de éstos no afecta el método.

Los valores de los tres momentos puede obtenerse con con mayor facilidad analizando los nudos A, D, E.

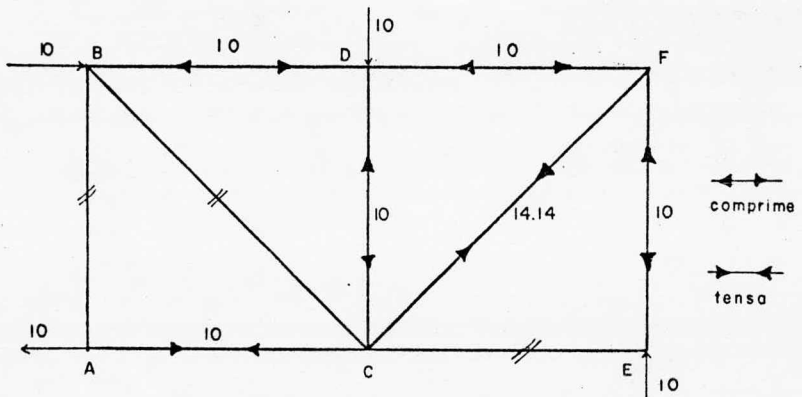


$$AC = 10 \text{ ton}$$

$$CD = 10 \text{ ton}$$

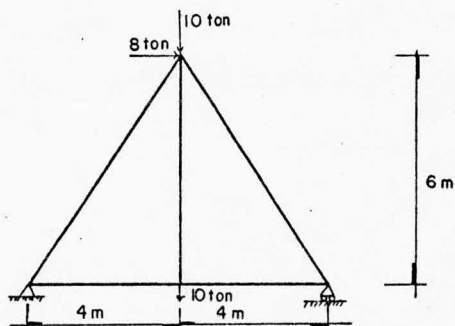
$$EF = 10 \text{ ton}$$

Finalmente la armadura queda:



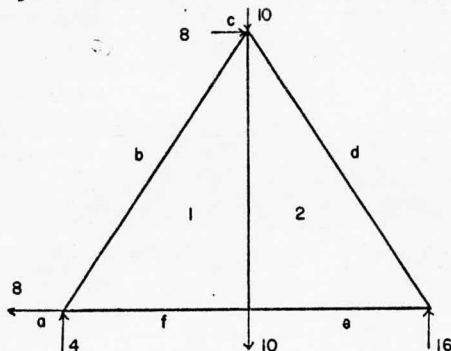
## 5.4 METODO GRAFICO. (MAXWELL - CREMONA)

5.4.1 Resolver la siguiente armadura por el método grafico.



La figura debe estar trazada perfectamente a escala, -- puesto que el método es grafico.

Identifiquemos las barras y las fuerzas que actúan en -- la armadura proponiendo una nomenclatura como la siguien -- te. En el sentido de las manecillas del reloj y por la -- parte exterior de la armadura coloquemos una letra en -- tre cada fuerza, a continuación colóquese un numero por cada triangulo interior de la armadura.

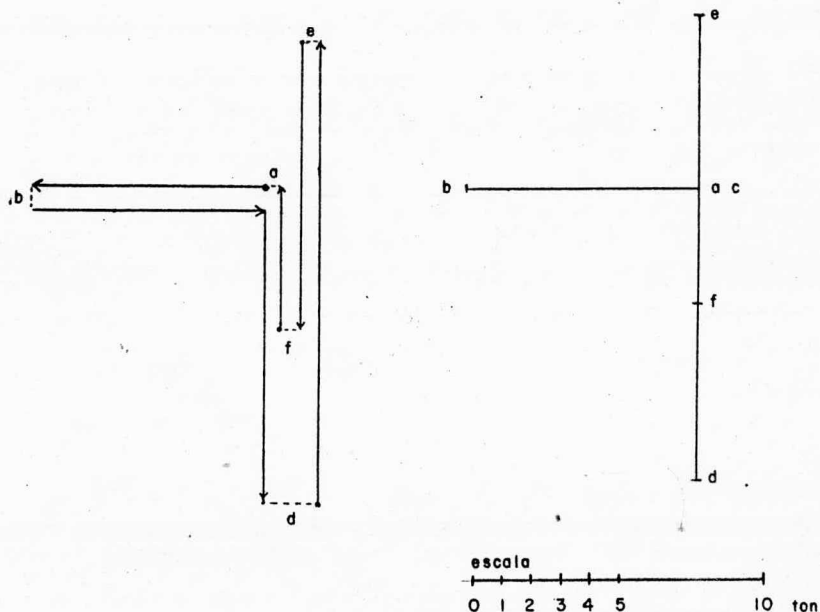


Con esto, todas las fuerzas y las barras estaran identi -- ficadas por dos letras, dos numeros, o bien por una le -- tra y un numero.

El siguiente paso será, trazar con una escala determinada, un polígono formado por todas las fuerzas activas y reactivas de modo que una fuerza inicie en el punto donde termine la anterior.

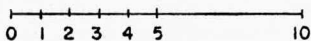
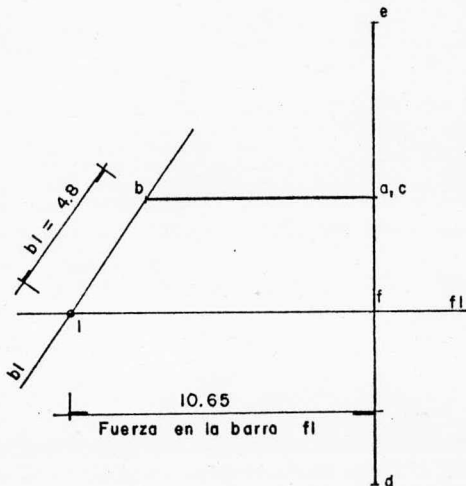
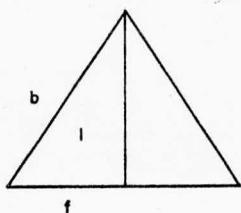
Propongamos la posición de un punto cualquiera de los que identifican las fuerzas de la armadura, por ejemplo el punto "a", nótese que en la figura 2 la fuerza de 8 toneladas correspondiente a la reacción horizontal del apoyo A está ubicada entre las letras "a" y "b" las cuales la identifican. Ahora bien, el punto a está localizado puesto que su posición fue propuesta, la ubicación del punto "b" se determinara midiendo a partir de "a" la distancia que nos represente la fuerza identificada por ab, sucesivamente a partir de b se determina c y de éste el punto d etc.

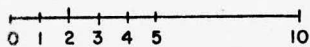
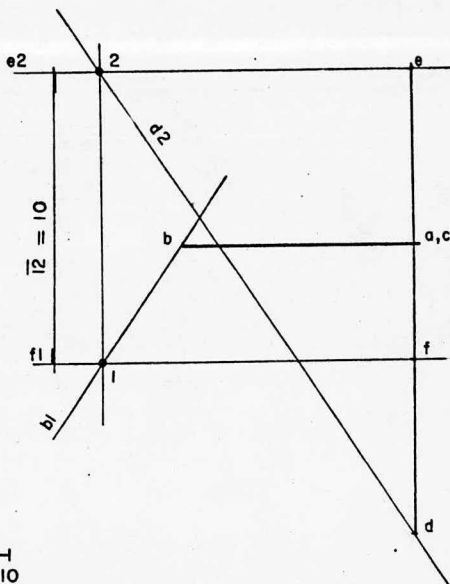
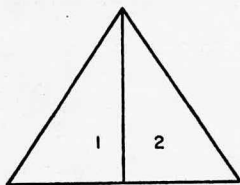
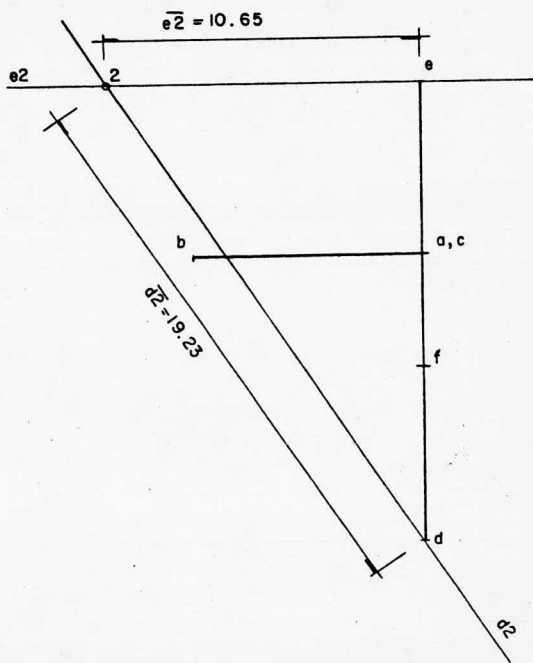
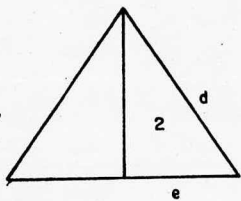
Polígono de fuerzas.



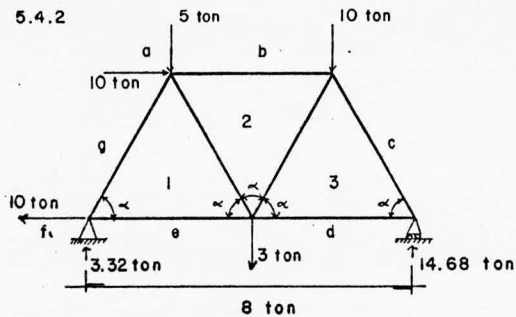
El polígono siempre termina en el punto donde empieza, - esto es una garantía de equilibrio. Observemos que la - figura fue hecha con los valores de las fuerzas conocidas y las fuerzas actuantes en las barras aún siguen -- siendo incógnitas.

El proceso continua con la localización de los puntos - marcados con numeros los cuales no aparecen en la figura 3, dichos puntos identifican las fuerzas en las barras y éstas son desconocidas, sin embargo conocemos la dirección de las fuerzas puesto que coincide con la de las barras. Podemos conocer la posición de éstos puntos haciendo pasar líneas que concurren a ellos pero que en su trayectoria concurren también a otros ya conocidos. Por ejemplo conocemos la dirección de la barra bl, ésta pasa por el punto b que ya fue localizado además tiene que pasar por el punto "l". La dirección de la barra fl es conocida y pasa por el punto "f" también determinado a su vez concurre al punto "l". Con esto queremos decir que la posición del punto l se determina trazando las - líneas de acción de las barras bl y fl y estará en la - intersección de las mismas.

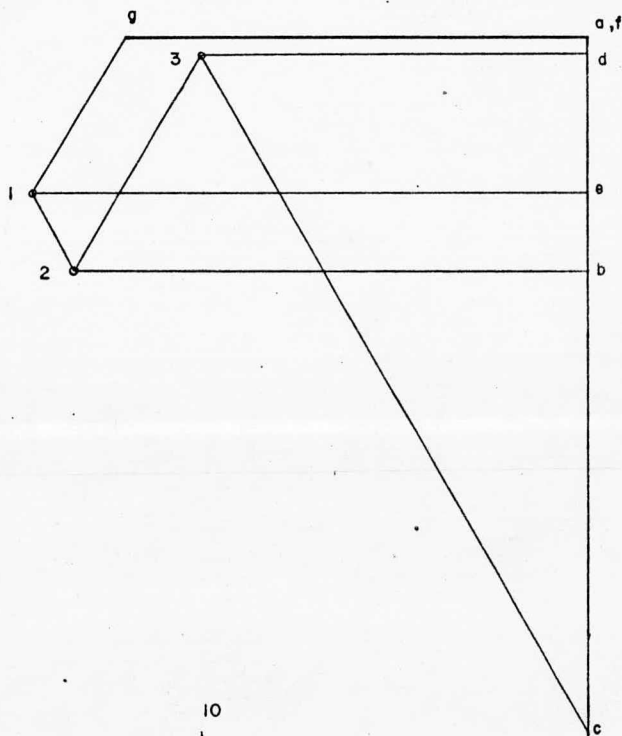




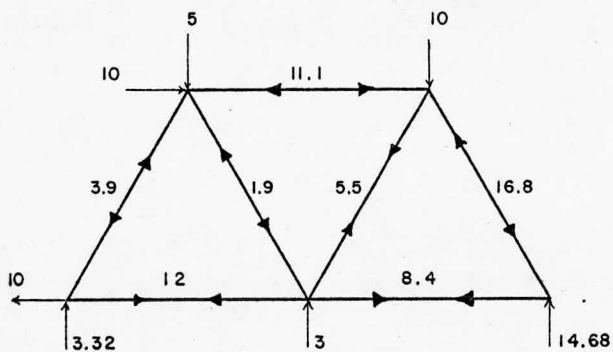
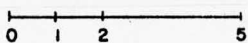
5.4.2



$\alpha = 60^\circ$



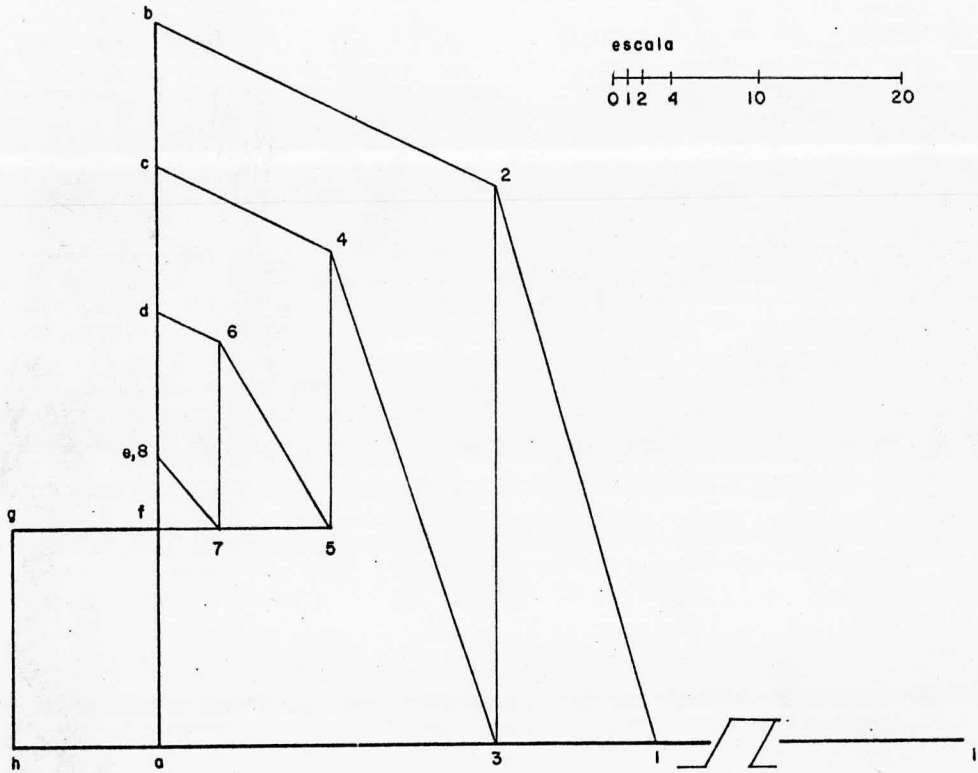
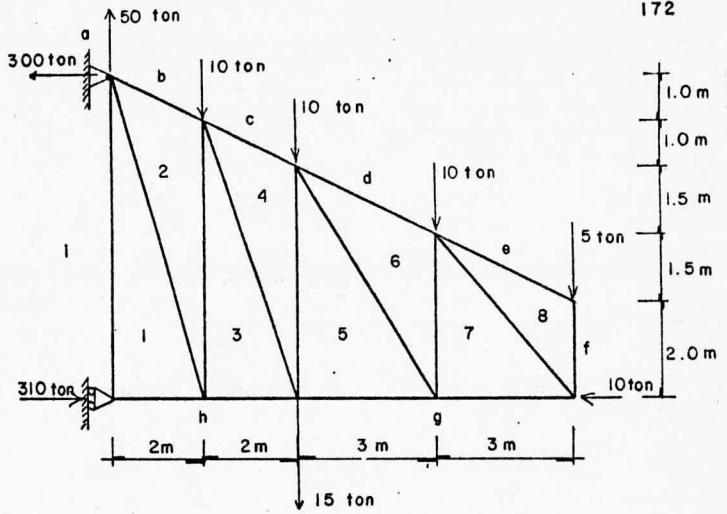
escala



← →  
comprime

← →  
tensa

5.4.3



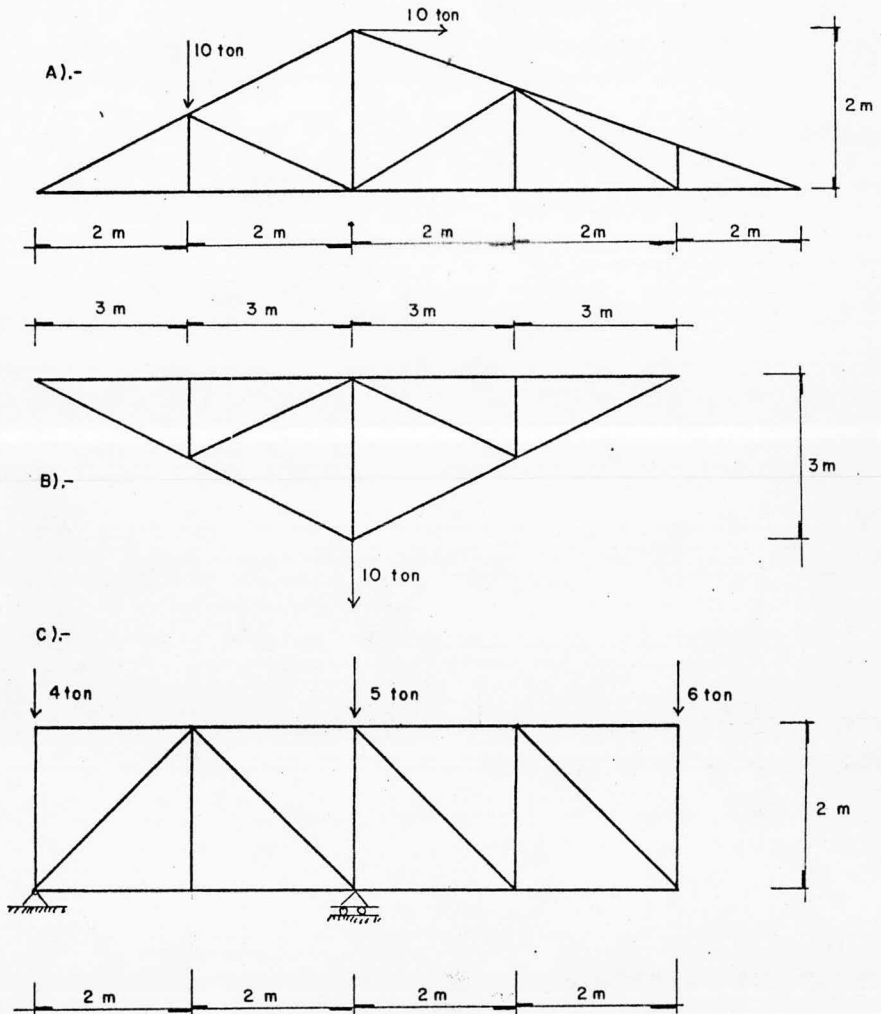


## 5.5

## PROBLEMAS PROPUESTOS.

## 5.5.1

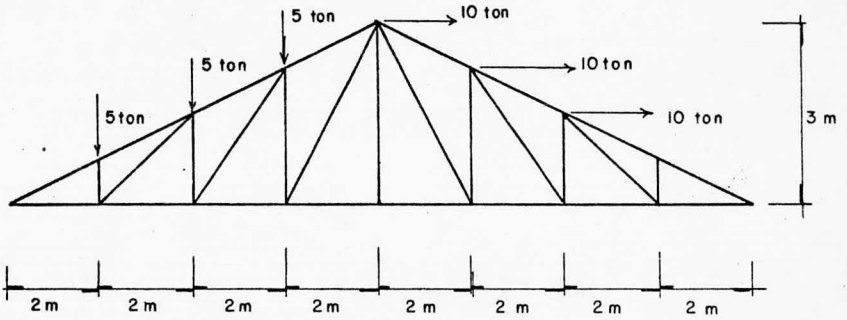
Resuelva las armaduras siguientes por el método de los nudos y de las secciones.



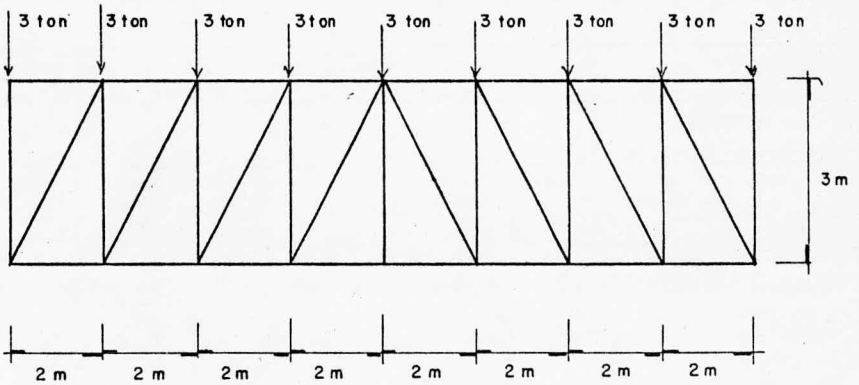
## 5.5.2

Por el método gráfico, resuelva las armaduras siguientes:

A).-



B).-



---

# CAPITULO VI

CABLES

---

## CAPITULO VI

## C A B L E S

## 6.1 Conceptos Fundamentales.

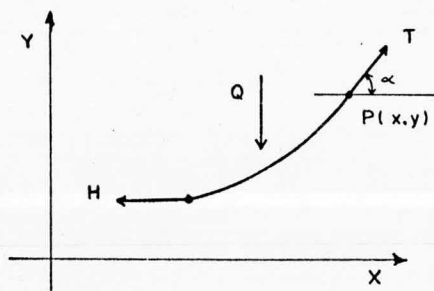
## 6.1.1 Cables flexibles e inextensibles.

Son aquellos incapaces de resistir flexión y que no se alargan.

El momento flexionante en cualquier sección transversal de un cable es nulo, al igual que la fuerza cortante; - el único elemento mecánico que puede transmitir es la - fuerza normal de tensión.

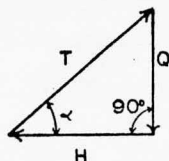
## 6.1.2 Ecuación diferencial de un cable.

Consideremos la figura siguiente:



$$\text{Tg } \alpha = \frac{dy}{dx}$$

T, H, Q son las fuerzas que mantienen equilibrada la porción del cable como cuerpo rígido; partiendo de esto, -- sabiendo que Q y H son perpendiculares entre sí.



$$\text{Tg } \alpha = \frac{Q}{H}$$

$$T = \sqrt{Q^2 + H^2}$$

Finalmente igualando los valores de  $\text{Tg } \alpha$ , tenemos la ecuación diferencial de cualquier cable.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H}$$

## 6.1.3

Cable de elementos rectilíneos.

Es aquel cuya carga está formada exclusivamente por -- fuerzas verticales concentradas y no se tiene en cuenta el peso propio del cable.

Para esta condición de carga se tiene:

$$Q = \text{cte.} = k$$

de donde  $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H}$

cuya solución es del tipo:  $y = Ax + B$ , la cual corresponde a la ecuación de una recta.

Para resolver un cable de este tipo de condición de -- carga, es necesario conocer la posición de tres de sus puntos: sus dos extremos y cualquier punto intermedio. Ahora bien, por medio de la Estática, puede encontrarse la solución de un cable considerando que cualquier punto de él se comporta como una articulación, debido a que el momento flexionante, en cualquiera de sus secciones vale cero. Esto permite estudiar los cables -- en forma similar a los arcos de tres articulaciones.

## 6.1.4

Cable Parabolico.

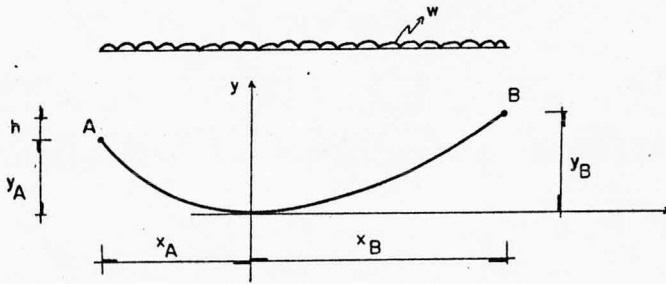
Cuando la carga está uniformemente repartida por una unidad de longitud, según un eje horizontal, considerán--dose o no el peso propio del cable, en la ecuación diferencial tenemos que:

$$Q = wx$$

de donde  $\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$

cuya solución es del tipo:  $Ax^2 + B$ , correspondiente a la ecuación de una parábola.

Sea el cable de la siguiente figura:



Segun se obtuvo anteriormente:  $\frac{dy}{dx} = \frac{wx}{H}$

integrando la ecuación se tiene:

$$y = \frac{Wx^2}{2H} + c$$

para valuar la constante y con relación al sistema de --  
referencia de la figura:

si  $x=0$ ;  $y=0$ , por lo que  $C=0$

necesariamente, la ecuacion diferencial del cable parabólico queda expresada de la forma:

$$y = \frac{Wx^2}{2H}$$

Para llegar a la solución de un cable con carga parabólica, es decir, para obtener el valor de las reacciones, el valor de la tensión en cualquier punto y su geometría general, es necesario conocer la posición de sus apoyos y las coordenadas de cualquier punto de su eje longitudinal o una coordenada cualquiera de su punto inferior.

Una vez obtenidos los valores de las reacciones, de la -- fuerza horizontal en el punto inferior del cable y su --- geometría general, para calcular la tensión de cualquier punto se aplica la formula:

$$T = \sqrt{H^2 + (wx)^2}$$

## 6.1.5

## Cable Catenario.

Cuando toda la carga está uniformemente repartida por unidad de longitud, según un eje que coincida con el eje del cable. En este caso, la carga es el peso propio del cable u otra de comportamiento similar.

Teniendo entonces que:

$$Q = qs \quad q = \text{Carga por unidad de longitud.}$$

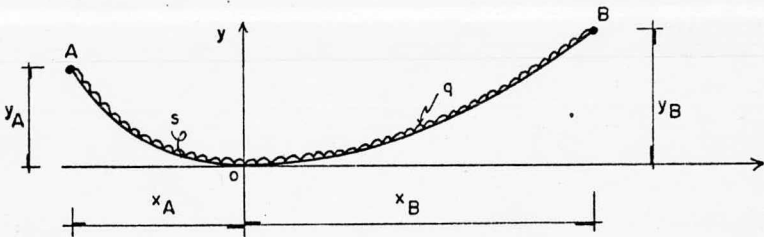
$$Q = q\phi(x, y) \quad s = \text{Porción del cable en función de sus coordenadas.}$$

sustituyendo en la ecuación general:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{H}$$

cuya solución es del tipo:  $y = A \cosh Bx + C$ , la cual corresponde a la ecuación de una catenaria.

Considerese el cable de la figura siguiente:

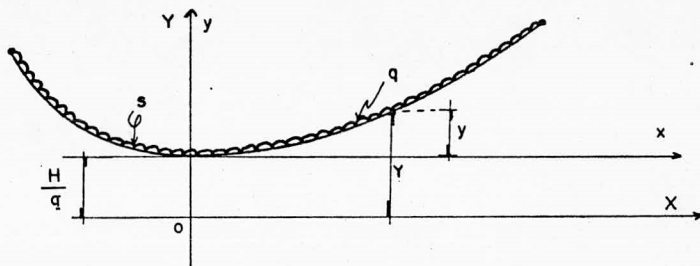


Partiendo de la ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{qs}{H}$

se llega a la solución:

$$y = \frac{H}{q} \left[ \cosh \left( \frac{qx}{H} \right) - 1 \right]$$

La ecuación anterior puede expresarse en forma más sencilla, si se realiza una translación de ejes en el sistema de referencia original:



donde 
$$y = \frac{H}{q} \cos h \left( \frac{qx}{H} \right) - \frac{H}{q}$$

$$Y = y + \frac{H}{q}$$

Por lo tanto la ecuación de la catenaria referida al nuevo sistema es:

$$Y = \frac{H}{q} \cos h \left( \frac{qx}{H} \right)$$

La tensión en cualquier punto del cable estará dada por:

$$T = qY$$

Por otra parte, una expresión que no contiene la variable "x", pero que también es representativa de este tipo de cables, es la siguiente:

$$Y^2 - s^2 = \frac{H^2}{q^2}$$

Cuando se desea una ecuación de relación independiente de cualquiera de los dos sistemas de referencia empleados en el desarrollo, se acostumbra utilizar:

$$\operatorname{sen} h \left( \frac{xq}{H} \right) = \frac{qs}{H}$$

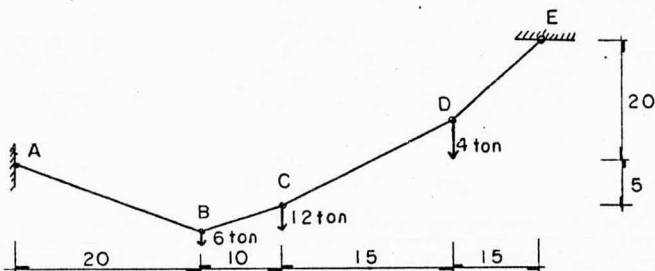


## PROBLEMAS RESUELTOS.

6.2 Cables con cargas concentradas.

6.2.1 El cable AE soporta tres cargas verticales en los puntos indicados. Si el punto C esta 5 metros por debajo del soporte de la izquierda, determínese:

- a)- la elevación de los puntos B y D.  
 b)- la tensión máxima y la pendiente máxima del cable.



Solución:

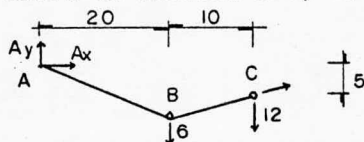
Las componentes  $A_x$  y  $A_y$  de la reacción en A se determinan como sigue:

considerando la totalidad del cable hacemos  $\sum M_E = 0$

$$A_x(20) - A_y(60) + 6(40) + 12(30) + 4(15) = 0$$

$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

Tomando ahora la sección ABC, hacemos  $\sum M_C = 0$



$$-A_x(5) - A_y(30) + 6(10) = 0$$

$$-5A_x - 30A_y + 60 = 0$$

Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones:

$$A_x = -18 \text{ ton}$$

$$A_y = 5 \text{ ton}$$

$A_x = 18 \text{ ton}$
------------------------

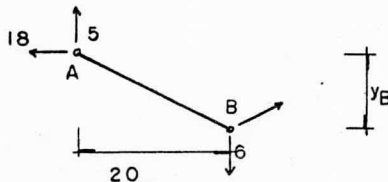
$A_y = 5 \text{ ton}$
-----------------------

a) - Elevación del punto B.

Considerando la porción AB del cable tenemos:

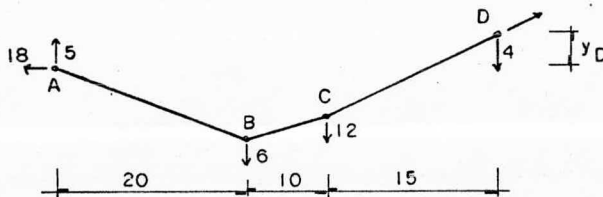
$$\sum M_B = 0: (18 \text{ ton})y_B - (5 \text{ ton})(20 \text{ m}) = 0$$

$$y_B = 5.56 \text{ m} \quad \text{por debajo de A}$$



Elevación del punto D.

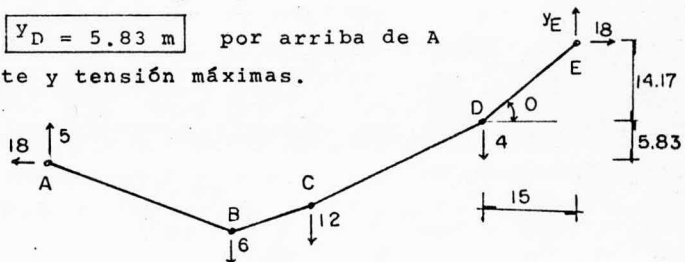
Considerando la porción ABCD del cable como cuerpo libre tenemos:



$$\sum M_D = 0; \quad -(18 \text{ ton})y_D - (5 \text{ ton})(45 \text{ m}) + 6(25) + 12(15) = 0$$

$$y_D = 5.83 \text{ m} \quad \text{por arriba de A}$$

b) - Pendiente y tensión máximas.



Observamos que la pendiente máxima ocurre en la -- parte DE. Ya que la componente horizontal de la -- tensión es constante igual a 18 ton, tenemos que:

$$\tan \theta = \frac{14.17}{15}$$

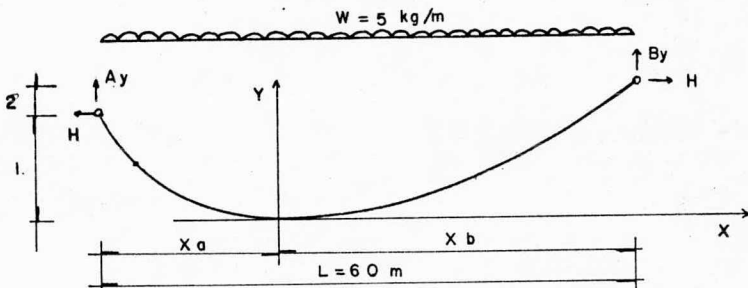
$$\theta = 43.4^\circ$$

$$T_{\max} = \frac{18 \text{ ton}}{\cos 0}$$

$$T_{\max} = 24.8 \text{ ton}$$

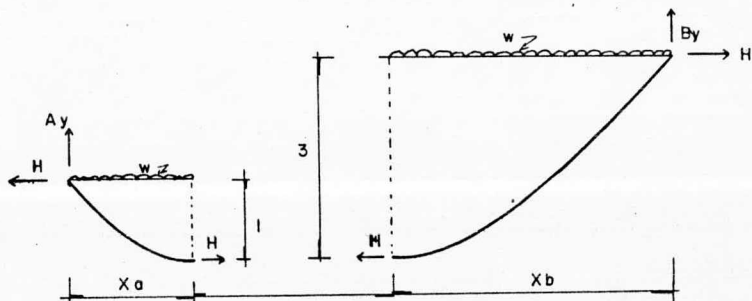
## 6.3 Cable Parabólico.

6.3.1 Resuelva el cable mostrado en la figura siguiente:



Observese que en este caso se da la coordenada de relación para localizar el punto inferior del cable.

Se tendrán como diagramas de cuerpo libre:



Por lo tanto, en función de las condiciones analíticas de equilibrio se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

Incógnitas:  $X_A, X_B, H, A_y, B_y$

Ecuaciones:

1)- De la geometría:  $X_A + X_B = 60 \text{ m}$

2)- Por  $\sum F_y = 0$  del conjunto:

$$A_y + B_y = 300 \text{ kg}$$

3)- Por  $\sum M_B = 0$  del conjunto:

$$60 A_y + 2H - 300 \times 30 = 0$$

$$30 A_y + H - 4500 = 0$$

4)- Por  $\Sigma Fy=0$  de la porción 1:

$$Ay - 5x_A = 0$$

5)- Por  $\Sigma M_A=0$  de la porción 1:

$$\frac{5x_A^2}{2} - H = 0$$

Donde resolviendo el sistema:

$$x_A = 22 \text{ m}$$

$$x_B = 38 \text{ m}$$

$$H = 1210 \text{ kg}$$

$$Ay = 110 \text{ kg}$$

$$By = 190 \text{ kg}$$

la ecuación del cable será:

$$y = \frac{wx^2}{2H}$$

$$y = \frac{x^2}{484}$$

comprobandola para  $y=3$

$$x^2 = 3 (484) = 1452$$

$$x = 38 \text{ m}$$

valor que coincide con el obtenido en  $x_B = 38 \text{ m}$

6.4 Cable Catenaria.

6.4.1 Se tiene un cable de 800 m de longitud con un peso propio de 100 kg/m, obtenga su flecha máxima, el claro y la componente horizontal de las tensiones, sabiendo que las tensiones extremas tienen un valor de 150,000 kg.

Solución:

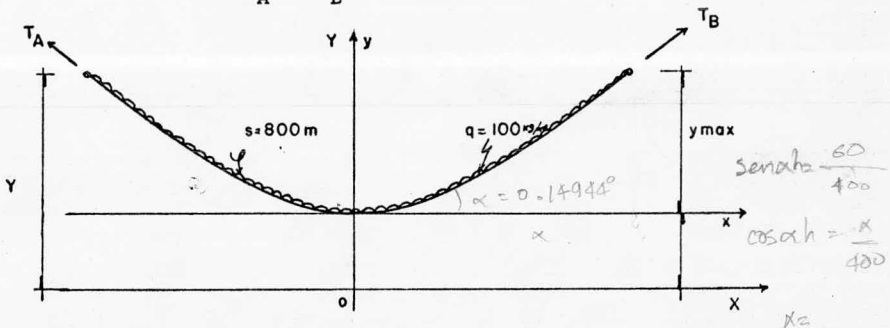
Aplicando la formula  $T = qY$  tenemos:

$$Y = \frac{T}{q} = \frac{150,000}{100} = 1,500 \text{ m}$$

pero recordemos que la distancia  $Y$ , no corresponde a la flecha máxima en el sistema de referencia mostrado, por lo que:

$$y_{\max} = Y - \frac{H}{q}$$

$$T = T_A = T_B = 150,000 \text{ kg}$$



Por lo tanto para encontrar la flecha máxima, es necesario obtener primero, el valor del cociente  $H/q$ , para lo cual aplicamos la formula:

$$Y^2 - s^2 = \frac{H^2}{q^2}$$

$$\frac{H}{q} = (1,500)^2 - (400)^2 = 1440$$

de donde  $y_{\max} = 1,500 - 1440 = 60 \text{ m}$

$$H = 1,440 \text{ q} = 1,440 (100) = 144,000 \text{ kg}$$

y para obtener el valor del claro aplicamos la siguiente expresión:

$$y = \frac{H}{q} \cosh \left( \frac{xq}{H} \right)$$

$$1,500 = 1,440 \cosh \frac{x}{1,440}$$

$$x = \text{ang} \cosh \left( \frac{1,500}{1,440} \right) (1,440)$$

$$x = 414.26 \text{ m}$$

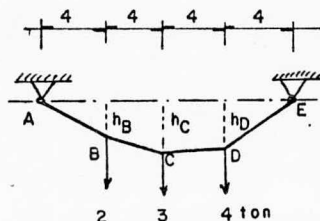
como el claro total equivale a 2x:

$$\text{claro} = 828.52 \text{ m}$$

## 6.5 PROBLEMAS PROPUESTOS.

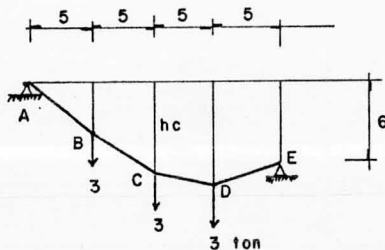
6.5.1 Se sostienen tres cargas de un cable como se muestra -- sabiendo que  $h_c = 3\text{ m}$ , determinese:

- las componentes de la reacción en E.
- el valor máximo de la tensión en el cable.



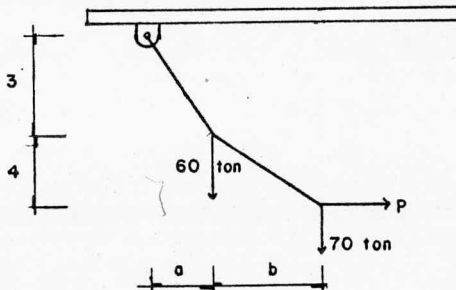
6.5.2 Si  $h_c = 7\text{ m}$ , determinese:

- las componentes de las reacciones en E.
- la tensión máxima del cable.



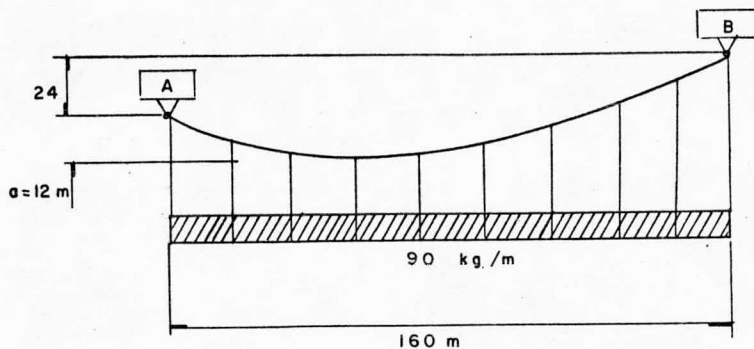
6.5.3 El cable ABC soporta dos cargas como se muestra. Si queremos que la distancia  $b$  sea  $7\text{ m}$ , determinese:

- la magnitud requerida de la fuerza  $P$ .
- la correspondiente distancia  $a$ .



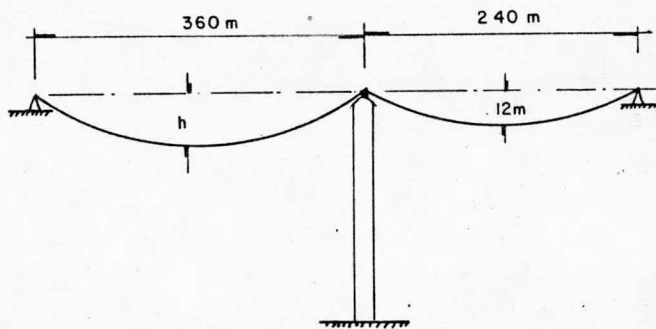
6.5.4

El cable AB soporta una carga distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, como se muestra. el punto más bajo del cable se localiza a una distancia  $a = 12$  m por debajo del soporte A. Determinense los valores máximo y mínimo de la tensión en el cable.



6.5.6

Dos cables del mismo calibre se fijan a una torre de transmisión en B. Como la torre es delgada, la componente horizontal de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables en B es cero. Suponiendo que los cables son parabólicos, encuentrese la flecha  $h$  que se requiere para el cable AB.





## CONCLUSIONES

Desde luego que todos los conceptos son importantes pero debemos destacar aquellos cuyo papel es relevante para obtener el conocimiento firme de una materia.

Aspecto por demás importante en el estudio de las estructuras es el equilibrio de éstas. Conocer la manera en que es afectada una estructura debido a la acción de fuerzas externas es básico para el diseño de la misma, por lo tanto el Ingeniero debe estar capacitado para garantizar la estabilidad de un elemento sujeto a tales acciones.

La presentación numérica de los resultados que se obtienen al resolver un problema usualmente es difícil de comprender; sin embargo, cuando representamos dichos resultados por medio de gráficas se establece una visión más clara del comportamiento de las variables, en el capítulo de Elementos Mecánicos se puede apreciar que por medio de gráficas, como son los diagramas de momentos flexionantes, fuerza cortante y fuerza normal, se puede percibir en forma especial cómo es que, la estructura está respondiendo a los efectos de las fuerzas, inclusive se notan claramente los puntos en los cuales las acciones producen la respuesta crítica de una estructura.

A lo largo de los ejemplos hemos establecido el sentido hacia donde las fuerzas y los momentos son positivos o negativos, sin embargo esto no es más que una simple convención, que no es la única, de manera arbitraria podemos nosotros indicar los parámetros y marcos de referencia para cada problema, si así nos place, lo que es necesario tomar en cuenta es no combinar criterios, es decir, que durante la resolución de un problema no podemos bruscamente alterar la convención de los signos o cambiar un marco de referencia, a menos que se tenga plena conciencia del propósito y conse

cuencias de este cambio.

El conocimiento de las diversas formas en que un problema puede resolverse proporciona un amplio criterio y obviamente mayor cantidad de recursos que harán más fácil la solución de otros que se presenten. Es de valor inapreciable el manejar varios métodos para la resolución de estructuras dado que cierto tipo de ellas por sus características se adaptan en especial a uno de ellos, otros no son así, y para atacarlos es necesario utilizar más de un método a la vez.

En el caso de las armaduras podemos ver claramente las diferencias en la forma de resolverlas, si tomamos por ejemplo el método de los nudos resulta largo y tedioso el proceso, más cuando la armadura está compuesta por docenas de ellos.

Sin embargo este método puede programarse de alguna forma en una computadora y esto simplifica su aplicación. Imaginemos --- ahora que necesitamos conocer la fuerza actuante en una barra específica, utilizar el método de los nudos sería poco práctico, si conocemos el método de las secciones el cual permite hacer esto con un mínimo de operaciones. El método gráfico por su parte es tan simple que no necesita de operaciones matemáticas para proporcionar resultados, no es tan preciso como el de los nudos o las secciones pero, para los fines que en Ingeniería se persiguen la aproximación es -- aceptable.

Finalmente podemos decir que, la cantidad de ejemplos que deben resolverse está en función de la habilidad propia del estudiante, pero debemos recordar que siempre habrá nuevas variantes o -- combinación de ellas en cada problema que se nos presente.

## B I B L I O G R A F I A

- MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS  
ESTATICA  
FERDINAND P. BEER - E. RUSSELL JOHNSTON  
CUARTA EDICION  
EDIT. MC GRAW HILL
  
- APLICACIONES DE LA ESTATICA  
ANTONIO MURRIETA WECOECHEER  
SEGUNDA EDICION  
EDIT. LIMUSA
  
- FISICA GENERAL  
CAREL W. VAN DER MERWE  
SEXTA EDICION  
EDIT. MC GRAW HILL
  
- APUNTES DE ESTRUCTURAS ISOSTATICAS  
UNAM. FACULTAD DE INGENIERIA
  
- MANUAL DE FORMULAS TECNICAS  
KURT GIECK  
18a. EDICION  
EDIT. REPRESENTACIONES Y SERVICIOS DE INGENIERIA