

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ONDAS DE CHOQUE EN MAGNETOGAS-
DINAMICA.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A

HECTOR ROMAN PEREZ ENRIQUEZ

México, D. F.

1973



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

A mi novia.

A G R A D E C I M I E N T O S

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al Sr. Dr. Héctor Pérez de Tejada por su valiosa cooperación en la dirección y orientación de este trabajo.

Doy las gracias a la Sra. M. en C. Ruth Gall, jefe del Departamento de Espacio Exterior del Instituto de Geofísica de la UNAM, por sus correcciones y comentarios a esta Tesis.

Agradezco también a la Sra. Fis. Silvia Bravo, al Sr. Dr. Javier Otaola y al Sr. Dr. Flavio Cocho por sus comentarios así como al haber aceptado fungir como sinodales.

I N D I C E

	Página
INTRODUCCION	1
I. ONDAS DE CHOQUE EN GASES NEUTROS.	3
A. Naturaleza de las ondas de choque.	3
B. Relaciones de Rankine-Hugoniot.	9
1.- Onda de choque normal.	9
2.- Onda de choque oblicua.	17
C. Estructura de la onda de choque.	23
II. ONDAS DE CHOQUE EN PLASMAS.	29
A. Efectos producidos por el campo magnético.	29
B. Relaciones de Rankine-Hugoniot.	31
1.- Onda de choque normal.	32
2.- Onda de choque oblicua.	36
3.- Modos rápido y lento (Superalfvénico y Subalfvénico).	41
4.- Frentes de choque "switch-on" y "switch-off".	44
C. Solución analítica para una onda de choque rápida.	47
D. Estructura del frente de choque.	49
E. Solución numérica para las ondas de choque.	52
III. ONDAS DE CHOQUE EN PLASMAS SIN COLISIONES.	63
A. Procesos de transporte en plasmas sin colisiones.	63
B. El viento solar como un plasma sin colisiones.	65
C. Estructura de las ondas de choque en un plasma sin colisiones.	67
D. La onda de choque de la tierra.	70

E.	Ondas de choque en otros cuerpos planetarios.	76
	1.- Validez del comportamiento fluidodinámico de la interacción del viento solar con otros cuerpos planetarios.	76
	2.- Tipos de interacción.	76
	DISCUSION.	79
	APENDICE. Programa para la solución numérica de ondas de choque.	81
	BIBLIOGRAFIA.	84

I N T R O D U C C I O N

Las ondas de choque tienen una gran importancia desde el punto de vista físico, tanto teórico como experimental, debido a que son un fenómeno que presenta características muy especiales y su estudio lleva a resultados, que por su relevancia, deben ser aprovechados.

Hasta ahora, el estudio de las ondas de choque sólo ha sido aplicado en un contexto puramente gasdinámico, como es el caso de la aeronáutica. Pero sería muy importante, por otro lado, intentar el aprovechamiento de los resultados encontrados para las ondas de choque en plasmas - tanto con como sin colisiones -, ya que particularmente estas últimas pueden servir de base para el mejor conocimiento de las propiedades de los plasmas. No obstante este razonamiento, este trabajo se desarrollará en sentido contrario, es decir, tratará de explicar en base a las propiedades conocidas de los plasmas, las características de las ondas de choque en plasmas.

En general, el fenómeno de ondas de choque puede presentarse en forma natural. Sin embargo, es necesario que se cumplan condiciones muy especiales - tanto en gases neutros como en plasmas - para que este fenómeno ocurra.

A pesar de que las leyes de conservación juegan un papel muy importante en el estudio de las ondas de choque, estas leyes se rompen cuando se presenta el fenómeno y es necesario sustituirlas por otras más generales en las que se han incluido términos relacionados con disipación viscosa y conducción del calor.

En la presente tesis se describe y analiza el fenómeno de las ondas de choque tanto en gases neutros como en plasmas y se resumen las explicaciones del fenómeno propuestas por diferentes autores. Se propone una solución analítica para las ondas de choque en plasmas, en presencia de campos magnéticos, para el caso cuando β , la relación entre densidades de energía magnética a cinética, es muy pequeña. Esta solución se compara con la obtenida numéricamente.

El presente trabajo, consta de tres capítulos:

En el primer capítulo se hace una descripción de las ondas de choque en gases neutros. Se analizan aquí resultados importantes

como la solución de la ecuación de onda no lineal y se considera el caso del valor límite de la densidad para ondas de choque muy fuertes.

En el segundo capítulo se estudian las ondas de choque en plasmas en presencia de un campo magnético. Aquí, aunque tomando en cuenta los efectos producidos por el campo magnético aplicado, se sigue un tratamiento similar al llevado a cabo en el capítulo primero, sólo que en este caso el problema se complica tanto, que para facilitar el estudio es necesario introducir algunas restricciones y aproximaciones. Por ejemplo, se considera que el flujo está siempre alineado con el campo magnético.

En el tercer capítulo se da una descripción puramente observacional del fenómeno de las ondas de choque en plasmas sin colisiones. Se tratan bajo ese aspecto las ondas de choque interplanetarias y más detalladamente la onda de choque de la magnetósfera terrestre. La descripción está basada en resultados matemáticos comprobados y en las observaciones.

I. ONDAS DE CHOQUE EN GASES NEUTROS.

A. Naturaleza de las ondas de choque.

El motivo principal de esta discusión es el tratamiento de ciertas discontinuidades en las variables termodinámicas que se observan en gases reales en movimiento. El hecho de que se observen tales discontinuidades, es debido a que existen procesos irreversibles causados por fricción y conducción de calor que pueden modificar el movimiento continuo del gas.

El fenómeno muestra que en los gases reales ocurren estos procesos irreversibles solamente en zonas muy estrechas donde los gradientes de velocidad y temperatura se hacen muy grandes mientras que fuera de estas zonas de transición, el flujo obedece las leyes establecidas por procesos adiabáticos reversibles (Courant y Friedrichs, 1948, p.117).

Los procesos irreversibles van a ser descritos por discontinuidades repentinas que ocurren en una ó más superficies definidas en el fluido. Tales discontinuidades, son zonas muy estrechas en donde se presentan fuertes gradientes en algunas de las cantidades involucradas. Estos gradientes, considerados como infinitos, ocurren cuando se cruza una de tales superficies llamadas por esto "superficies de discontinuidad". Si se supone que la disipación causada por fricción, conducción de calor, etc. ocurre solamente dentro de las superficies de discontinuidad (que es cierto en gran medida), entonces se deben satisfacer ciertas condiciones como conservación de masa, conservación de momento y conservación de energía.

Si el flujo se mueve inicialmente con velocidad supersónica (velocidad mayor que la del sonido en ese medio), al sufrir una discontinuidad va a disminuir su velocidad. El fenómeno que presenta todas las condiciones mencionadas antes se conoce como "onda de choque".

Es necesario recalcar que tratando al fluido como un continuo, la suposición del frente de choque como una discontinuidad matemática es bastante satisfactoria. Para esto es necesario tratar al fluido desde el punto de vista macroscópico aunque se deban tener en

cuenta los efectos de las grandes fuerzas viscosas y la conducción de calor involucrada en procesos de este tipo. Microscópicamente, los cambios que sufre el estado inicial del gas son ocasionados por la transferencia de energías cinética y térmica en las colisiones de las partículas (Méndez, 1966).

Como las otras cantidades termodinámicas, la entropía es discontinua a través de una onda de choque. Por su importancia en los procesos irreversibles, se discutirá brevemente sólo la discontinuidad de la misma. Por la segunda ley de la termodinámica, la entropía de un gas solamente puede aumentar durante un proceso como el de superficies de discontinuidad. De aquí que la entropía final del gas S_2 que ha pasado a través de la onda de choque debe exceder su valor inicial S_1 , esto es,

$$S_2 > S_1 \quad 1.1)$$

Se verá que esta cantidad restringe de manera importante la forma de variación de todas las cantidades en una onda de choque. El aumento en la entropía significa que el movimiento es irreversible, esto es, la energía es disipada. Entonces, en las discontinuidades la energía puede ser disipada en el movimiento de un fluido (Courant y Friedrichs, 1948, p.117).

El verdadero mecanismo por el cual la entropía aumenta a través de ondas de choque, cae por supuesto, en procesos disipativos que ocurren en las delgadas capas que son los frentes de choque (Courant y Friedrichs, 1948, p.117). El estudio de estos procesos disipativos se describirá después al hablar sobre la estructura de la onda de choque. El aumento de entropía en una onda de choque tiene otro importante efecto en el movimiento. Esto se refiere al hecho de que aún si el flujo frente a la onda de choque es potencial (no tiene vórtices), el flujo atrás puede ser rotacional.

Se ha hablado hasta ahora sobre las discontinuidades y sus efectos, y se ha dejado para después su estructura, pero no se ha dicho nada de la formación de estas discontinuidades. Para explicar la formación de una onda de choque se toma el movimiento de una onda sonora. En ella, cuando la amplitud de las oscilaciones de las partículas de fluido es pequeña, los términos cuadráticos en la ecuación de movimiento pueden ser despreciados. Sin embargo, cuando la amplitud de la onda no es necesariamente pequeña, la solución exacta de la ecuación

ción de movimiento resulta ser una onda cuyos gradientes aumentan constantemente y que es una generalización de la solución lineal $f(x - ct)$ de las ecuaciones para amplitudes pequeñas (Landau y Lifshitz, 1959, p.366).

Si la propagación de la onda de sonido es unidimensional, todas las cantidades dependen sólo de x y t . Las ecuaciones de continuidad y momento para el movimiento del fluido son

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

donde P es la presión ejercida por el flujo.

Ahora, si el movimiento es adiabático y la velocidad del flujo depende de las variables termodinámicas ρ y S (densidad y entropía, respectivamente), entonces la velocidad v se puede expresar como una función de ρ solamente. Puede escribirse por lo tanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dv} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Como $\rho = \rho(x, t)$; $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ y si $\rho = cte$

$$\frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial x} = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\rho}$$

y similarmente, como $v = v(x, t)$; $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt$ y si $v = cte$

$$\frac{\partial v / \partial t}{\partial v / \partial x} = - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{v}$$

Se tiene entonces

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\rho} = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{d\rho} \quad (1.6)$$

$$y \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dv} \quad 1.7)$$

Debido a que $v=v(\rho)$, las derivadas para ρ -cte y v -cte son las mismas, i.e.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v \quad \text{así que}$$

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dv} \quad 1.8)$$

Poniendo $dP/dv = (dP/d\rho)(d\rho/dv) = c^2(d\rho/dv)$ en donde c es la velocidad del sonido en ese medio, la ecuación 1.8) queda

$$\frac{dv}{d\rho} = \pm \frac{c}{\rho} \quad 1.9)$$

e integrando esta ecuación se obtiene

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dP}{\rho c} \quad 1.10)$$

Se pueden combinar ahora las expresiones 1.7) y 1.10) para obtener

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_v = v + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dv} = v \pm c \quad \text{ó integrando}$$

$$x = t [v \pm c] + f(v) \quad 1.11)$$

donde $f(v)$ es una función arbitraria, $c(v)$ está dada por 1.10) y los signos determinan la dirección de la onda.

Las fórmulas 1.10) y 1.11) dan la solución general requerida (obtenida por Riemann en 1860). Así mismo determinan la velocidad (y por lo tanto todas las otras cantidades) como función implícita de x y t , i.e. el perfil de la onda en cualquier instante.

Debido a que el movimiento es adiabático, $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ queriendo decir con el subíndice 0 los valores para el gas no perturbado.

$$\text{Entonces } \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}; \quad c = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad 1.12)$$

$$p = p_0 \left(c / c_0 \right)^{\gamma(\gamma-1)} \quad 1.13)$$

Substituyendo 1.13) en 1.10) se tiene (tomando el signo+)

$$v = \int \frac{c}{p} dp = \frac{2}{\gamma-1} \int dc = \frac{2}{\gamma-1} (c - c_0)$$

Por lo tanto, $c = c_0 + \frac{1}{2} (\gamma-1) v$ 1.14)

$$p = p_0 \left[1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) v / c_0 \right]^{\gamma(\gamma-1)} \quad 1.15)$$

$$P = P_0 \left[1 + \frac{1}{2} (\gamma-1) v / c_0 \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad 1.16)$$

Substituyendo 1.14) en 1.11) se obtiene

$$x = t \left[c_0 + \frac{1}{2} (\gamma+1) v \right] + f(v)$$

que se puede escribir como

$$f(v) = \left[x - \left(c_0 + \frac{1}{2} (\gamma+1) v \right) t \right]$$

6 $v = F \left[x - \left(c_0 + \frac{1}{2} (\gamma+1) v \right) t \right]$ 1.17)

donde F es una función arbitraria.

Se ve de la ecuación 1.17) que si $v \ll c$, entonces puede escribirse $v = F(x - c_0 t)$ que es la velocidad de propagación de ondas de sonido ordinarias con velocidad uniforme c_0 . Pero en general, la ecuación 1.17) indica que la propagación de una onda en un gas provoca un cambio en su forma. En efecto, de acuerdo con la ecuación 1.12), la velocidad de la onda es mayor que la velocidad del sonido c_0 para el

fluido no perturbado en regiones donde $\rho > \rho_0$, es decir, regiones de condensación y menor que c_0 en regiones de rarefacción ($\rho < \rho_0$). Esto significa que la onda se distorsiona al propagarse, en tal forma que las regiones de mayor condensación tratan de alcanzar a las de menor condensación (figura I-1) hasta que llega el momento en que la ley adiabática se rompe debido a que los gradientes de velocidad y temperatura se hacen tan grandes que los efectos de fricción y transferencia de calor llegan a ser muy importantes. Esto ocasiona que fenómenos de disipación impiden que la onda se siga deformando llevándola a un estado "estacionario". Se tiene entonces una onda de choque (Landau y Lifshitz, 1959, p.368; Ferraro y Plumpton, 1961, p.91).

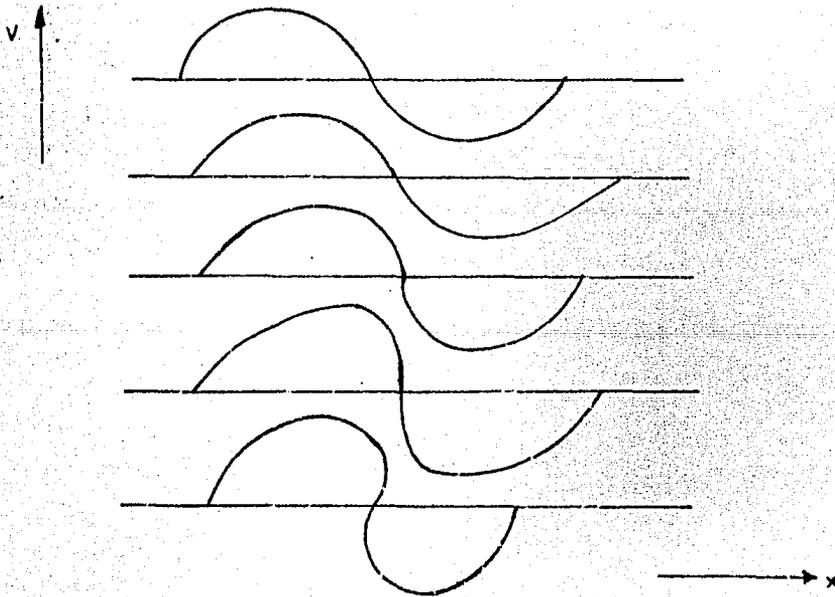


Figura I-1. Deformación sufrida por una onda de amplitud finita por la existencia de una discontinuidad en el movimiento.

B. Relaciones de Rankine-Fugoniot.

Se puede demostrar que el movimiento continuo de un fluido compresible que satisface las ecuaciones de continuidad, de energía para procesos adiabáticos y de momento sin viscosidad es isentrópico.

Para un flujo adiabático no conductor, la ecuación de energía en términos de la velocidad y la entalpía

$$dh + v dv = 0$$

se aplica a lo largo del flujo, y similarmente en la ausencia de fricción, la ecuación de Euler es aplicable

$$v dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

Eliminando v de estas dos ecuaciones se obtiene

$$dh - \frac{dp}{\rho} \quad \text{pero} \quad dS = \frac{1}{T} \left(dh - \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

siendo T la temperatura del gas. Por lo tanto, $dS = 0 \Rightarrow S = \text{cte.}$

Sin embargo, en fluidos reales se observa que en un conducto pueden ocurrir pequeños cambios repentinos de presión, densidad, temperatura y velocidad. Tales discontinuidades, como se vió antes, son conocidas como ondas de choque y no pueden ser explicadas por medio de la teoría de flujo isentrópico (Liepmann y Roshko, 1967, p.49; Daily y Harleman, 1966, p.331).

Para su estudio, se van a dividir a las ondas de choque en normales (incidencia normal al frente de choque) y oblicuas (incidencia oblicua al frente de choque).

1. Onda de choque normal.- Tomando un volumen de control encerrando una onda de choque estacionaria normal al flujo como se muestra en la figura I-2, se facilita la visualización del problema.

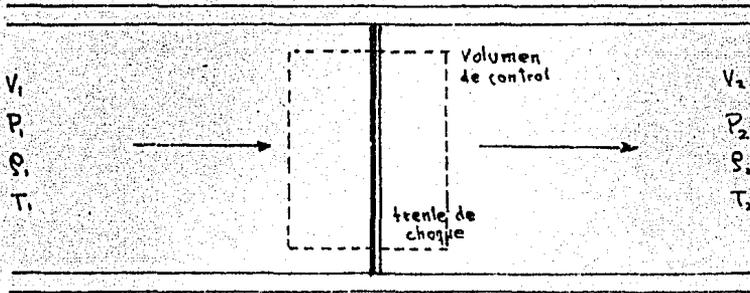


Figura I-2. Esquema de una onda de choque estacionaria con el flujo incidiendo normalmente en un conducto.

Se debe considerar primeramente la conservación de la masa de fluido a través de una onda de choque. Esto queda expresado por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad 1.18$$

pero para este caso concreto el flujo es estacionario y $v=v(x)$, así pues,

$$\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = \frac{d}{dx} (\rho v) = 0$$

cuya solución es $\rho v = \text{cte}$ ó

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad 1.19$$

Considerando un cierto volumen de fluido, la fuerza total ejercida por el mismo en este volumen es igual a la integral

$$-\oint \rho \, d\underline{f} = -\int \nabla \rho \, dV \quad 1.20$$

Así pues, la fuerza por unidad de volumen de fluido es $-\nabla P$.

Escribiendo ahora la ecuación de movimiento para un elemento de volumen de fluido e igualando con $-\nabla P$ se tiene

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla P \quad 1.21$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad 1.22$$

La ecuación 1.22) se conoce como la ecuación de Euler. Como para este caso el flujo es estacionario y $v = v(x)$,

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$P_2 - P_1 = \rho_2 v_1^2 - \rho_1 v_2^2 \quad 1.23)$$

Como el espesor del frente de choque es extremadamente pequeño, se puede suponer que el proceso es adiabático, es decir, no hay intercambio de calor con las paredes del conducto. Usando por lo tanto

$$du + d(pV) = dq = 0$$

se obtiene con $h = e - pv$, donde $u =$ energía total, $e =$ energía interna y $h =$ entalpía

$$d(e + \frac{1}{2} v^2) + d(pV) = 0$$

$$dh + d(\frac{1}{2} v^2) = 0$$

$$\delta \quad h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad 1.24)$$

Puede ahora escribirse ahora el sistema de ecuaciones generales para una onda de choque con incidencia normal

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad 1.25a)$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2 \quad 1.25b)$$

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \quad 1.25c)$$

Este sistema puede resolverse, en general, sólo numéricamente. Sin embargo, para un gas térmica y calóricamente perfecto, esto es, si tanto c_p (capacidad calorífica a presión constante) como c_v (capacidad calorífica a volumen constante) son constantes, es posible obte-

ner soluciones explícitas en términos del número de Mach M_1 (definido como v_1/c_1) del fluido incidente.

Dividiendo ambos miembros de la ecuación de momento 1.25b), respectivamente por $\rho_1 v_1$ y $\rho_2 v_2$, se tiene,

$$V_1 - V_2 = \frac{P_2}{\rho_2 v_2} - \frac{P_1}{\rho_1 v_1}$$

y usando la relación para un proceso adiabático $c^2 = \gamma p/\rho$ donde c es la velocidad del sonido y $\gamma = c_p/c_v$ queda

$$V_1 - V_2 = \frac{C_2^2}{\gamma V_2} - \frac{C_1^2}{\gamma V_1} \quad 1.26)$$

Aquí pueden eliminarse c_1^2 y c_2^2 utilizando la ecuación de energía para un gas perfecto

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{C_1^2}{\gamma-1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{C_2^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} C^{*2} \quad 1.27)$$

donde " $*$ " significa el valor de la variable cuando el número de Mach es igual a 1 (la velocidad del flujo es igual a la velocidad del sonido).

Multiplicando la ecuación 1.27) por $(\gamma-1)/\gamma V_1$ y por $(\gamma-1)/\gamma V_2$, se tienen

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} V_1 + \frac{C_1^2}{\gamma V_1} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{C^{*2}}{V_1}$$

$$\frac{\gamma-1}{2\gamma} V_2 + \frac{C_2^2}{\gamma V_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{C^{*2}}{V_2}$$

y restándolas queda finalmente

$$V_1 V_2 = C^{*2} \quad 1.28)$$

Esta ecuación es conocida como la relación de Prandtl-Meyer.

En términos del número de Mach $M^* = v/c^*$, la ecuación 1.28)

toma la forma

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

Ahora, $M^* \geq 1$ corresponde a $M \geq 1$ y entonces la relación de Prandtl-Meyer muestra que la velocidad disminuye a través de una onda de choque, i. e. el flujo cambia de supersónico a subsónico.

La correspondencia entre M y M^* puede obtenerse dividiendo ambos miembros de la ecuación de energía $\sqrt{2 + \gamma(\gamma-1)} = \frac{1}{2}(\gamma+1)(\gamma-1)^{1/2}$ entre v^2 ,

$$\frac{1}{2} + \frac{C^2}{v^2} \frac{1}{\gamma-1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{C^{*2}}{v^2} \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M^2} = \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{M^{*2}}$$

y finalmente
$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1) M^2}{(\gamma-1) M^2 + 2} \quad 1.29)$$

Si M_1^* y M_2^* son reemplazados en la ecuación de Prandtl-Meyer, es posible obtener la relación entre los números de Mach,

$$M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{(\gamma-1) M_1^2 + 2} \quad \text{y} \quad M_2^{*2} = \frac{(\gamma+1) M_2^2}{(\gamma-1) M_2^2 + 2}$$

pero $M_2^{*2} = 1/M_1^{*2}$ por lo tanto
$$\frac{(\gamma+1) M_2^2}{(\gamma-1) M_2^2 + 2} = \frac{(\gamma-1) M_1^2 + 2}{(\gamma+1) M_1^2}$$

que puede ponerse como
$$\frac{(\gamma+1) M_2^2 - (\gamma-1) [(\gamma-1) M_1^2 + 2]}{2 + (\gamma-1) M_2^2} = \frac{2}{M_1^2}$$

y finalmente
$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad 1.30)$$

Esta ecuación tiene gran importancia ya que a partir de ella va a ser posible la obtención de todas las relaciones de Rankine-Fugoniot que se describe en seguida.

Las relaciones de Rankine-Fugoniot expresan los cambios fraccionales de todas las variables termodinámicas a través de la onda de choque.

El cociente de velocidades puede expresarse en forma simple como

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1^2}{V_1 V_2} = \frac{V_1^2}{C^{*2}} = M_1^{*2} \quad 1.31)$$

Usando la ecuación de continuidad, el cociente de densidades puede expresarse a partir del cociente de velocidades así,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{(\gamma-1) M_1^2 + 2} \quad 1.32)$$

El cociente de presiones usando la ecuación de momento es

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_1} (V_1 - V_2) = \frac{\rho_1 V_1^2}{P_1} \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)$$

Finalmente, con $c_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ y la ecuación 1.32), se tiene

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\gamma V_1^2}{c_1^2} \left(1 - \frac{(\gamma-1)M_1^2 + 2}{(\gamma+1)M_1^2}\right) = \gamma M_1^2 \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2 - (\gamma-1)M_1^2 - 2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]$$

$$\gamma \quad \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \quad 1.33)$$

El cociente de temperaturas puede obtenerse de las ecuaciones 1.32) y 1.33) usando

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right); \quad \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{(\gamma+1) + 2\gamma(M_1^2 - 1)}{(\gamma+1)}\right] \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2 + 2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]$$

$$\delta \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \frac{\gamma M_1^2 + 1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) \quad 1.34)$$

Las relaciones 1.32), 1.33) y 1.34) se conocen como las relaciones de Rankine-Hugoniot.

Se pueden obtener también los cocientes de densidad y presión dividiendo la ecuación de momento entre la ecuación de continuidad y multiplicando por $(v_2 + v_1)$ para obtener

$$\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) \left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right) \quad 1.35)$$

Substituyendo 1.35) en la ecuación de energía 1.20) se obtiene

$$\left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}\right) \left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}\right) \quad 1.36)$$

Pueden ahora despejarse tanto el cociente de densidades como el cociente de presiones y obtener las relaciones de Rankine-Hugoniot para ondas de choque con incidencia normal,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{P_2}{P_1}} = \frac{V_1}{V_2} \quad 1.37)$$

$$\gamma \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad 1.38)$$

Ya ha sido mencionado antes, en el primer inciso, que una onda de choque no es un proceso isentrópico. Se puede demostrar ahora este hecho comparando la relación isentrópica presión-densidad $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^\gamma$ con la ecuación 1.38), por medio de una gráfica (figura I-3).

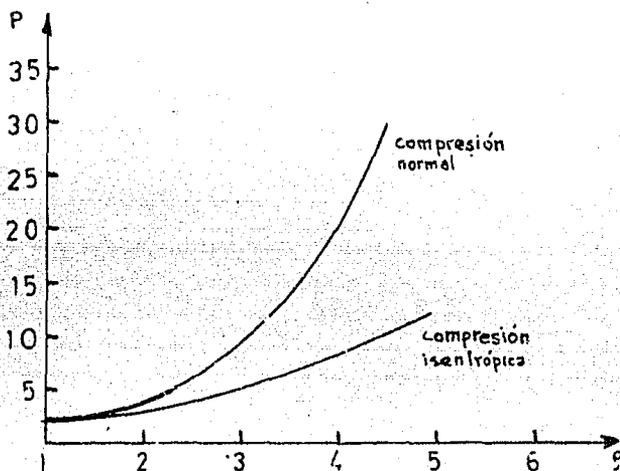


Figura I-3. Comparación gráfica entre la compresión isentrópica y la compresión debida a una onda de choque con incidencia normal.

Si se hace tender el número de Mach a infinito, se ve que el cociente de presiones tiende también a infinito, pero el cociente de densidades tiende al valor límite $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ que es igual a 6 cuando $\gamma = 1.4$. Sin embargo, para incidencia normal, antes de que se alcance la condición $p = \infty$ la suposición adiabática se viola. Esto se debe a que existe un punto para el cual el gas no se puede comprimir más aunque se siga aumentando la presión.

De las relaciones de Rankine-Hugoniot en términos del número de Mach, se observa que para todo flujo supersónico, la presión y la densidad muestran un aumento a través de una onda de choque, y más aún, las ecuaciones para ondas de choque son válidas únicamente para flujos inicialmente supersónicos. Para demostrarlo, es necesario calcular el cambio en entropía a través del frente de choque.

La diferencia en entropía entre dos estados cualesquiera en un gas perfecto está dada por (Daily y Harleman, 1966, p. 339).

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \quad (1.39)$$

Substituyendo aquí las relaciones de Rankine-Hugoniot se obtiene

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = \ln \left[\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \right] \left[\frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right] \quad 1.40)$$

Para un número de Mach cercano a 1, la ecuación 1.40) puede expresarse como la serie

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{(M_1^2 - 1)^3}{3} + \dots \quad 1.40a)$$

Entonces $S_2 - S_1$ es positivo para $M_1 > 1$. Si el número de Mach inicial fuera menor que 1, la ecuación 1.40a) indicaría un descenso en entropía, lo cual viola la segunda ley de la termodinámica y se concluye que ondas de choque que lleven a una disminución en densidad y presión no son posibles (Liepmann y Roshko, 1967, p.60; Daily y Harleman, 1966, p.339).

En esta discusión, se supuso que la onda de choque era estacionaria, con el gas aproximándose al frente de choque de izquierda a derecha con una velocidad v_1 , como se mostró en la figura I-2. Si se aplicara ahora una presión de derecha a izquierda en la región (2) con una velocidad v_2 , entonces el fluido antes del frente de choque estaría en reposo y la onda de choque se propagaría dentro de él con la velocidad de onda

$$c_2 = v_2 \quad 1.41a)$$

de forma tal que todo el sistema se movería con velocidad v . Y en el fluido después de la onda de choque se propagaría con la velocidad

$$v_p = v_2 - v_1 \quad 1.41b)$$

Las relaciones de "brinco" a través del frente de choque pueden reescribirse en términos de c_2 y v_2 usando las ecuaciones 1.41a) y 1.41b).

$$c_2 = M_2 c_1$$

$$\delta \quad C_s = C_1 \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2} \quad 1.42)$$

$$\gamma \quad V_p = V_1 - V_2 = C_s \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$\delta \quad V_p = \frac{C_1}{\gamma} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) \left\{ \frac{2\gamma / (\gamma+1)}{P_2/P_1 + (\gamma-1)/(\gamma+1)} \right\} \quad 1.43)$$

Si el cociente de presiones a través de una onda de choque es muy pequeño, $\Delta P/P \ll 1$, se tiene entonces una onda de choque débil, y los cocientes de densidad y temperatura son correspondientemente pequeños,

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{V_p}{C_1}$$

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P_1}$$

$$\gamma \quad C_s = C_1 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4\gamma} \frac{\Delta P}{P_1} \right)$$

que muestra que para ondas de choque muy débiles $c_s \approx c_1$.

Si el cociente de presiones es muy grande, el número de Mach tiende a infinito y se tiene por lo tanto una onda de choque muy fuerte implicando

$$\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$C_s \rightarrow C_1 \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{P_2}{P_1}$$

$$V_2 \rightarrow C_1 \left(\frac{2}{\gamma(\gamma+1)} \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/2}$$

2. Onda de choque oblicua.- La onda de choque oblicua se presenta cuando el movimiento del fluido tiene una dependencia tanto vertical como horizontal, esto es, el flujo es bidimensional. Por lo tanto, para el tratamiento de ésta se considera principalmente al flujo como estacionario y bidimensional. Su investigación puede hacerse en la misma forma que para la onda de choque con incidencia normal, directamente de las ecuaciones de movimiento, tomando en consideración la componente adicional de la velocidad. Sin embargo, para algunos cálculos se pueden utilizar los resultados obtenidos para la onda de choque normal.

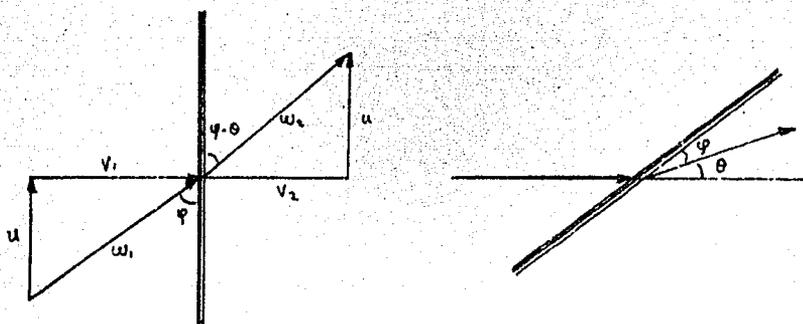


Figura I-4. Esquema de la onda de choque oblicua. a) existe una componente vertical del flujo incidente. b) frente de choque oblicuo después de una rotación de los ejes.

Si una velocidad uniforme u paralela a la onda de choque se impone en el campo de flujo normal, la velocidad resultante puede ajustarse a cualquier dirección simplemente tomando en consideración la magnitud y dirección de u .

Si u es paralela al frente de choque, como se muestra en la figura I-4a, la velocidad resultante a través del frente de choque es $w_1 = \sqrt{v_1^2 + u^2}$ y su inclinación está dada por $\varphi = \tan^{-1}(v_1/u)$. Ahora como v_2 es diferente de v_1 , la inclinación del flujo después de la onda de choque es diferente de la de antes, esto es, el flujo cambia de dirección repentinamente al momento del choque.

Como v_2 es siempre menor que v_1 , el giro es siempre hacia el frente de choque. Para tener el flujo convencionalmente alineado y ver mejor el fenómeno, se puede hacer una rotación de la figura I-4a para obtener la figura I-4b).

Las relaciones para las condiciones antes y después de la onda de choque pueden determinarse fácilmente, ya que la superposición de una velocidad uniforme paralela al frente de choque no afecta la presión estática y otros parámetros estáticos que fueron obtenidos para la onda de choque normal, ya que esta velocidad no cruza el frente de choque. La única modificación es que el número de Mach inicial es ahora $M_1 = w_1/c$, y que $v_1 = w_1 \sin \varphi$ ó

$$\frac{v_1}{c_1} = M_1 \sin \varphi \quad (1.4d)$$

Entonces las relaciones de Rankine-Eugoniot para el caso de una onda de choque oblicua puede escribirse en la forma

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2 \varphi}{(\gamma-1) M_1^2 \sin^2 \varphi + 2} \quad 1.45)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \varphi - 1) \quad 1.46)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{C_2^2}{C_1^2} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{M_1^2 \sin^2 \varphi - 1}{M_1^2 \sin^2 \varphi} (\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi + 1) \quad 1.47)$$

En otras palabras, los cocientes de las variables termodinámicas ρ , p , T dependen solamente de la componente normal de la velocidad. Del análisis de la onda de choque con incidencia normal, esta componente es supersónica, esto es, $M_1 \sin \varphi \geq 1$. Esto establece una inclinación mínima de la onda para un número de Mach dado. La máxima inclinación de la onda está dada por la onda de choque normal $\varphi = \pi/2$. Se tiene entonces para un número de Mach inicial dado un rango de posibles ángulos de la onda

$$\sin^{-1} \frac{1}{M} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad 1.48)$$

Para cada ángulo φ (dado M_1), hay una deflexión correspondiente θ .

El número de Mach M después del choque puede obtenerse debido a que $M_2 = \omega_2/c_2$ y que $v_2/c_2 = M_1 \sin(\varphi - \theta)$. Sustituyendo en 1.30) se obtiene

$$M_2^2 \sin^2(\varphi - \theta) = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \sin^2 \varphi}{\gamma M_1^2 \sin^2 \varphi - \frac{\gamma-1}{2}} \quad 1.49)$$

Para obtener la relación existente entre los ángulos φ y θ se puede hacer uso de la figura I-4 de donde se pueden obtener las relaciones

$$\tan \varphi = \frac{v_1}{u} \quad 1.50a)$$

$$\tan(\varphi - \theta) = \frac{v_2}{u} \quad 1.50b)$$

Eliminando la velocidad u y utilizando la ecuación de continuidad, así como la ecuación 1.45) queda

$$\frac{\tan(\psi - \theta)}{\tan \psi} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \psi + 2}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \psi} \quad (1.51)$$

Ahora por trigonometría, $\tan(\psi - \theta) = \frac{\tan \psi - \tan \theta}{1 + \tan \theta \tan \psi}$

$$\frac{\tan(\psi - \theta)}{\tan \psi} = \frac{\tan \psi - \tan \theta}{\cot \psi + \tan \theta}$$

Substituyendo aquí la ecuación 1.51) y desarrollando se obtiene finalmente

$$\tan \theta = 2 \cot \psi \frac{M_1^2 \sin^2 \psi - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\psi) + 2} \quad (1.52)$$

Como era de esperarse, la expresión 1.52) se anula para $\psi = \pi/2$ y para $\psi = \sin^{-1}(1/M_1)$, que son los límites del rango definido en 1.48).

Dentro de este rango θ es positivo y debe tener por lo tanto un valor máximo (figura I-5).

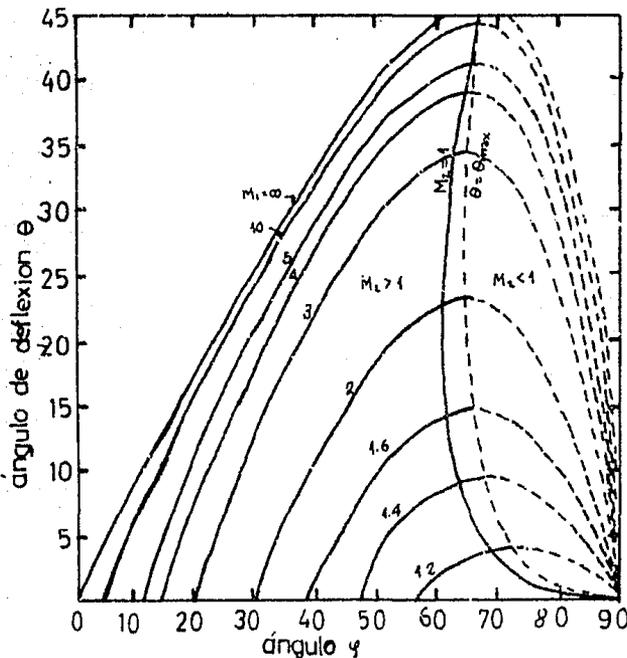


Figura I-5. Solución para una onda de choque oblicua (Liepmann y Roshko, 1967, p. 87).

Si $\theta < \theta_{max}$, entonces para cada valor de θ y M hay dos posibles soluciones, teniendo diferentes valores de φ . El mayor valor de φ da el choque más fuerte. En la solución para una onda de choque fuerte el flujo se hace subsónico, excepto para un rango pequeño de valores de θ un poco menores que θ_{max} . Si $\theta = 0$ entonces $M_1^2 \sin^2 \varphi = 1$ ó $\sin \varphi = 1/M_1$.

En este caso límite, la onda se reduce a una onda sónica u onda de Mach cuya forma se muestra en la figura I-6.

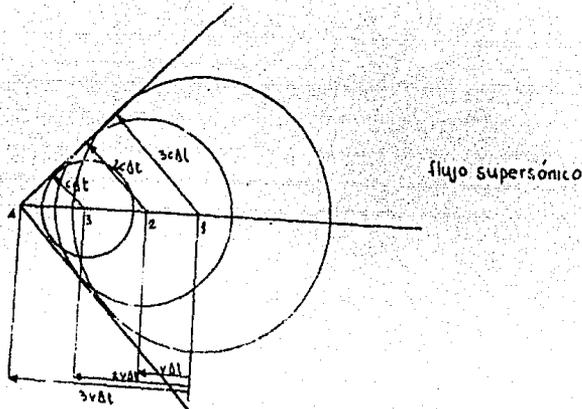


Figura I-6. Representación de una onda de Mach para flujo supersónico (Daily y Harleman, 1966, p.330).

La relación entre φ y θ puede obtenerse también dividiendo el numerador y el denominador del miembro derecho de la ecuación 1.51) por $\frac{1}{2} M_1^2 \sin^2 \varphi$ así,

$$\frac{(1+\gamma) \tan(\varphi - \theta)}{\tan \varphi} - (\gamma - 1) = \frac{2}{M_1^2 \sin^2 \varphi}$$

$$M_1^2 \sin^2 \varphi - 1 = \frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \frac{\sin \varphi \sin \theta}{\cos(\varphi - \theta)} \quad 1.53)$$

Para pequeños ángulos de deflexión θ , la expresión 1.53) puede aproximarse a

$$M_1^2 \sin^2 \varphi - 1 = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \tan \varphi \right) \cdot \theta \quad 1.54a)$$

Si M_1 es muy grande entonces $\varphi < 1$, pero $M_1 \varphi \gg 1$ y la ecuación 1.54a) se reduce a

$$\varphi = \frac{\gamma+1}{2} \theta \quad 1.54b)$$

C. Estructura de las ondas de choque.

En el inicio de este capítulo se consideró a las ondas de choque como superficies geométricas de espesor cero. Considerando ahora la estructura de las superficies de discontinuidad se observa que las ondas de choque son en realidad capas de transición de anchura finita, donde esta anchura disminuye a medida que la magnitud de las discontinuidades crece. Si las discontinuidades no son pequeñas, el cambio ocurre tan marcadamente que el concepto de espesor deja de tener significado (Landau y Lifshitz, 1959, p. 337).

Para el caso en que la capa de transición es de anchura finita es necesario, para la determinación de su estructura y espesor, tener en consideración la viscosidad y la conducción térmica del gas, que antes se habían despreciado.

Se considera primero el flujo a través de una onda de choque normal. Los cambios de presión, velocidad, etc. que ocurren en la onda de choque son exclusivamente en la dirección x (figura I-7),

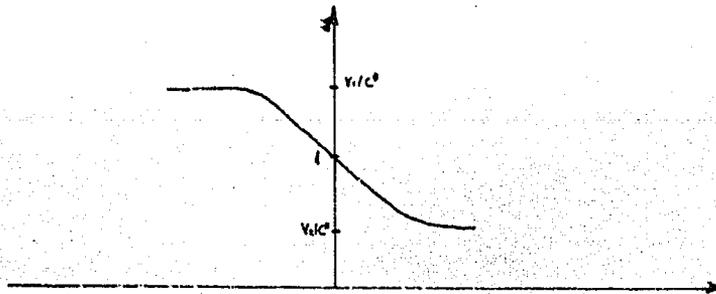


Figura I-7. Representación de la variación del número de Mach (y por lo tanto de las demás variables) con la coordenada horizontal x .

lo cual implica que una onda de choque es una onda longitudinal. Las partículas de fluido pasan de un estado de equilibrio termodinámico a otro estado de equilibrio. Las pérdidas pueden describirse, por lo tanto, en términos de una diferencia de entropía. Como la entropía es una función de estado, no importa la trayectoria de la partícula de fluido y los cambios debidos a la onda de choque son independientes de los coeficientes de viscosidad y transferencia de calor. Esta es la razón más profunda de por qué es posible calcular las perturbaciones.

baciones en un flujo supersónico sin referencia explícita de la viscosidad y conductividad calorífica (Liepmann y Roshko, 1967, p.329).

Si se considera una superficie de discontinuidad como una capa de espesor finito, las condiciones 1.25) deben escribirse no como la igualdad de las cantidades involucradas en los dos lados de la discontinuidad, sino como aplicables a través de todo el espesor de la capa.

La condición 1.25a) permanece sin cambio:

$$\frac{d(\rho v)}{dx} = 0 \quad (1.55)$$

El efecto debido a la viscosidad está dado por un término de esfuerzo sumado a la ecuación de momento. Este esfuerzo compresivo será denotado por ξ . En la ecuación de energía hay un término similar para el flujo de calor \tilde{q} . Entonces, las ecuaciones de momento y energía son

$$\frac{d(\rho v^2)}{dx} = - \frac{dP}{dx} + \frac{d\xi}{dx} \quad (1.56)$$

$$\frac{d(\rho v J)}{dx} = \frac{d}{dx} (\xi v - \tilde{q}) \quad (1.57)$$

en donde $J = h_0 + \frac{1}{2}v^2$ es la entalpía estacionaria.

Las ecuaciones 1.55), 1.56) y 1.57) pueden integrarse inmediatamente

$$\rho v = m = cte \quad (1.58a)$$

$$\rho v^2 - \rho_1 v_1^2 = -(P - P_1) + \xi \quad (1.58b)$$

$$\rho v J - \rho_1 v_1 J_1 = \xi v - \tilde{q} \quad (1.58c)$$

Si la integración se extiende a través de la onda de choque, hasta la región donde ξ y \tilde{q} desaparecen otra vez, las ecuaciones 1.58b) y 1.58c) dan

$$m (v_1 - v_2) = P_2 - P_1 \quad (1.59a)$$

$$m (J_1 - J_2) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} v_1^2 + h_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \quad 1.59b)$$

que fueron obtenidas previamente de un razonamiento puramente termodinámico.

De aquí que no se espera que \tilde{z} y \tilde{q} influyan en el brinco, pero sí se toman en cuenta para la diferencia de entropía a través de la onda de choque. Esto se ve de la forma diferencial de la segunda ley de la termodinámica escrita por unidad de masa

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left(\frac{dh}{dt} - \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \right) \quad 1.60)$$

y como $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{ds}{dx}$

entonces $m \frac{ds}{dx} = \frac{1}{T} \left(m \frac{dh}{dx} - \frac{m}{P} \frac{dP}{dx} \right)$

y usando 1.55), 1.56) y 1.57)

$$m \frac{ds}{dx} = \frac{\tilde{z}}{T} \frac{dv}{dx} - \frac{1}{T} \frac{d\tilde{q}}{dx}$$

$$\text{ó} \quad m (s_2 - s_1) = \int_1^2 \frac{\tilde{z}}{T} \frac{dv}{dx} dx - \int_1^2 \frac{1}{T} \frac{d\tilde{q}}{dx} dx \quad 1.61)$$

El esfuerzo y flujo de calor están relacionados a los gradientes de velocidad y temperatura respectivamente como

$$\tilde{z} = \tilde{\mu} \frac{dv}{dx} \quad ; \quad \tilde{q} = -\tilde{k} \frac{dT}{dx} \quad 1.62)$$

donde $\tilde{\mu} \neq \mu$ es el coeficiente de viscosidad y $\tilde{k} \neq k$ es el coeficiente de conductividad térmica.

De las ecuaciones 1.61) y 1.62) se obtiene:

$$m (s_2 - s_1) = \int_1^2 \frac{\tilde{\mu}}{T} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{T} \frac{d}{dx} \left(\tilde{k} \frac{dT}{dx} \right) dx$$

Llevando a cabo la segunda integral se tiene

$$m (s_2 - s_1) = \int_1^2 \frac{\tilde{\mu}}{T} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \int_1^2 \frac{\tilde{k}}{T^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dx \quad 1.63)$$

La ecuación 1.63) relaciona el aumento de entropía con la

disipación y transferencia de calor dentro de la zona de choque. Las expresiones $\tilde{\mu}/T (dv/dx)^2$ y $\tilde{k}/T^2 (dT/dx)^2$ son por lo tanto fuentes de entropía y son ambas positivas.

Con las expresiones para \tilde{z} y \tilde{q} , las ecuaciones pueden integrarse, y encontrarse $v(x)$, $T(x)$, esto De éstas se puede definir un espesor de la onda de choque, δ . En general, la integración de la ecuación 1.63) requiere computación numérica. Sin embargo, en dos casos especiales se pueden obtener resultados fácilmente. El primero es el caso cuando

$$P_r = \frac{\tilde{\mu} C_p}{\tilde{k}} = 1 \quad (P_r \text{ es el número de Prandtl})$$

En este caso se ve en seguida que la ecuación 1.63) tiene una integral de energía

$$J = \frac{1}{2} v^2 + h = c^2 e$$

Aquí J no solamente tiene el mismo valor en cualquier lado de la onda de choque sino que también es constante a través de ella.

El segundo caso se presenta cuando se tiene una onda de choque débil (ver inciso B). En este caso $(v_1/c^*) - 1 < 1$.

El problema de definir un espesor de la onda de choque se puede ver de muchas maneras. En todos los casos el espesor δ es proporcional a $\tilde{\mu}$ y a \tilde{k} . Más aún, para gases comunes

$$\frac{\delta \Delta v}{\tilde{\mu}^*} \approx 1 \quad 1.64)$$

Este es un número de Reynolds basado en el cambio de velocidad sufrido a través de la onda de choque. En la ecuación 1.64), tanto el espesor δ como en los valores de ρ y $\tilde{\mu}$ son tomados en el momento en el cual el número de Mach es 1, i.e. se valoran en condiciones sónicas. Este número de Reynolds es del orden de la unidad. Entonces, para el caso en que se tiene una onda de choque débil, por ejemplo, la ecuación 1.64) da el espesor del frente

$$\delta \sim \frac{\tilde{\mu}^*}{\rho^* c^* (M_1 - 1)} \quad 1.65)$$

Como el valor de c^* es muy grande, entonces el espesor δ es en general muy pequeño (Liepmann y Roshko, 1967, p. 332).

II. ONDAS DE CHOQUE EN PLASMAS.

A. Efectos producidos por el campo magnético.

Se va a estudiar ahora el problema de las ondas de choque en un plasma magnetizado. El tratamiento es similar al de gases neutros descrito en el primer capítulo. Sin embargo van a existir en el presente caso diferencias muy importantes, la mayoría de las cuales son producidas por la introducción de un campo magnético.

La presencia de un campo magnético tiene el efecto de aumentar la presión por un factor $B^2/2\mu$ y la energía total por un factor $B^2/2\mu g$. Además, el campo magnético introduce un cierto orden en el flujo de partículas incidentes dando lugar a que la magnitud de la onda de choque sea notablemente menor que para el caso gaseodinámico (dadas las mismas condiciones iniciales).

Mientras que para un gas neutro existe solamente una velocidad característica (velocidad del sonido) arriba de la cual hay la posibilidad de que una onda de choque se presente, para un plasma existen tres velocidades características: velocidad del sonido c , velocidad de Alfvén $V_A = B/\sqrt{\mu g}$ (velocidad de propagación de los disturbios generados en un plasma), y velocidad magnetosónica $c^* = \sqrt{V_A^2 + c^2}$ (velocidad de propagación de algunos disturbios a través de un plasma). Para que una onda de choque se presente, basta con que la velocidad del flujo sea mayor que cualquiera de las tres. Esto es, es suficiente con que el flujo incidente sea supersónico, superalfvénico o supermagnetosónico.

De acuerdo con lo anterior, se pueden definir ahora otros dos números de Mach que van a ser útiles en esta descripción. El número de Mach alfvénico definido por $M_A = V/V_A$ y el número de Mach magnetosónico $M^* = V/c^*$.

Para ondas de choque muy fuertes ($M_A^* \gg 1$), se puede demostrar (siguiendo un procedimiento similar al del primer capítulo) que $R/S \approx (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ que es también el valor límite del cociente de densidades para el caso no magnético.

Además, c^* aumenta con el campo magnético, así que la velocidad del gas puede ser subsónica con respecto a la velocidad del so-

nido local en ambos lados de la onda de choque (Ferraro y Plumpton, 1966, p. 102).

Para el caso especial en que el campo magnético se establece inicialmente en una región de alta presión, la energía creada por la onda de choque resultante, aparece enteramente en la forma gasdinámica de aumento de calor interno y disminución de energía cinética translacional.

Para el caso en que el campo magnético se establece inicialmente en la región de baja presión, la onda de choque resultante, aunque su energía provenga de una fuente puramente gasdinámica, se propaga a través del campo magnético aumentando la presión magnética a expensas de la energía cinética translacional y se llama usualmente onda de choque Magnetogasdínámica (MGD). Además, aunque el resultado de la perturbación es en forma de ondas de choque débiles, éstas tienen una velocidad más alta (Mitohner, 1959).

Debido a que las interacciones básicas entre partículas en un plasma ocurren a través del campo magnético, más bien que a través de colisiones entre partículas, las propiedades de transporte -que serán estudiadas en la parte de la estructura de las ondas de choque magnetogasdínámicas- son funciones del campo magnético.

B. Relaciones de Rankine-Hugoniet.

El tratamiento de las ondas de choque en un plasma en presencia de un campo magnético, es muy similar al gasdinámico, sólo que en este caso, los efectos debidos al campo magnético van a tener gran influencia. Como en el caso no magnético, las ondas de choque son producidas por perturbaciones de amplitud finita, aunque se espera también que puedan producirse por la variación de corrientes convectivas y por turbulencia (Helfer, 1953).

Se va a considerar en este estudio que el plasma está completamente ionizado, es decir, tiene conductividad eléctrica infinita, que es el caso más simple. Introduciendo esta suposición en la ecuación de inducción

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \underline{B} + \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) \quad 2.1)$$

puede despreciarse el término de difusión magnética y se obtiene

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) \quad 2.2)$$

Esta expresión da lugar al teorema de Alfvén que dice:

- a) El flujo magnético que atraviesa un circuito formado por partículas de fluido, es constante conforme el circuito es deformado por el movimiento del fluido.
- b) Todas las partículas de un fluido en movimiento que inicialmente se encuentran sobre una línea magnética continúan en esta posición si el fluido de que se trata tiene conductividad eléctrica infinita.

Para demostrar este teorema, sea un circuito de partículas de fluido. El flujo del campo magnético \underline{B} a través de la superficie abierta S al tiempo t está dado por

$$\phi = \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} \quad 2.3)$$

Derivando el flujo con respecto al tiempo debido a que el flujo está en movimiento se obtiene

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \underline{B} \cdot d\underline{S} = \int_S \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot d\underline{S} + \oint_C (\underline{v} \times d\underline{l}) \cdot \underline{B}$$

pero por el teorema de Stokes

$$\oint (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = - \int \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

entonces $\frac{d\phi}{dt} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S}$

pero por la ecuación de inducción (2.2) se concluye

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = c t^2 \quad (2.4)$$

Esto indica que las líneas de campo son arrastradas por el flujo. Alfvén ha expresado esto diciendo que las líneas de fuerza del campo magnético están "congeladas" en el fluido cuando se cumple la ecuación (2.2) (Ferraro y Plumpton, 1966, p. 21).

Por otro lado, si se considera el caso de conductividad pequeña, existe un valor crítico para el campo magnético B de tal manera que si un campo magnético inicial menor que el valor crítico se presenta, se produce una onda de choque aguda, precedida por una ancha región en la cual el campo, la velocidad y la temperatura cambian lentamente, y si el campo magnético es mayor que ese valor crítico no ocurre tal onda de choque y todas las variables cambian muy lentamente en una región muy ancha (Marshall, 1955). En ambos casos el problema no es de mayor interés.

Para el estudio de las ondas de choque en Magnetogasdinámica, se va a dividir el problema en los casos normal y oblicuo como se hizo antes en ausencia de un campo magnético. Pero antes, es útil señalar que la onda de choque es una zona relativamente estrecha de actividad irreversible, que separa dos regiones en las que se puede suponer que no existe ni difusión ni disipación, por lo cual las dos regiones a uno y otro lado de la onda de choque, son virtualmente uniformes. Así pues, fuera de la onda de choque B es uniforme y la corriente inducida j es cero, pero habrá corrientes fluyendo en la onda de choque y dando lugar a una fuerza magnética normal al frente de choque.

Finalmente, como en el problema gasdinámico, es posible encontrar aquí la relación que existe entre los valores de las variables termodinámicas a uno y otro lado del frente de choque sin considerar los procesos internos que se presentan en él.

1.- Onda de choque normal. Se supone la existencia de una on-

da de choque como se presenta en la figura II-1.

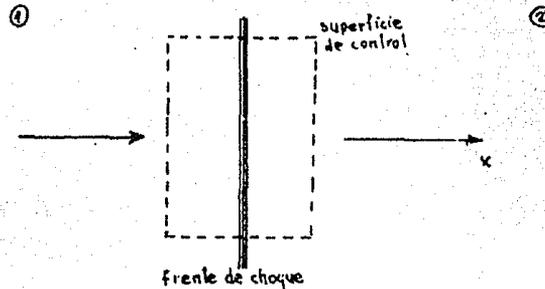


Figura II-1. Esquema de una onda de choque con el flujo incidiendo normalmente.

Con la ayuda del volumen de control y de la sección transversal unitaria se pueden formular los postulados de conservación a través de la onda de choque.

Se van a considerar dos casos por separado, estos son, el campo magnético \underline{B} paralelo al frente de choque y \underline{B} perpendicular al frente de choque.

Si el campo magnético \underline{B} es perpendicular al frente de choque, es decir, que está alineado al flujo, entonces el producto $\underline{v} \times \underline{B}$ es igual a cero y por lo tanto no existe fuerza magnética que perturbe el movimiento del flujo. En caso de presentarse una onda de choque, ésta puede estudiarse de la misma manera que el problema gasdinámico, esto es, como si no existiera un campo magnético.

Si por otro lado, el campo magnético \underline{B} es paralelo al frente de choque, se pueden establecer las ecuaciones de conservación de la misma manera que para el caso gasdinámico.

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (2.5)$$

$$\rho_1 v_1^2 + P_1^* = \rho_2 v_2^2 + P_2^* \quad (2.6)$$

$$\rho_1 v_1 e_1^* + P_1^* v_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 = \rho_2 v_2 e_2^* + P_2^* v_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^3 \quad (2.7)$$

donde $P_i^* = P_i + \frac{B_i^2}{2\mu}$ y $e_i^* = e_i + \frac{B_i^2}{2\mu\rho}$ ($i=1,2$) siendo e la energía interna.

Además, debido a la presencia del campo magnético, existe un campo eléctrico \underline{E} perpendicular tanto a \underline{B} como a la velocidad del flu-

jo \underline{v} . Y ya que fuera del frente de choque no hay corrientes,

$$\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B} = 0 \quad \text{esto es, } \underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$$

Como las ecuaciones varían sólo con x , la ecuación $\nabla \times \underline{E} = 0$ implica $dE/dx = 0$ y así $E_1 = E_2$, lo que a su vez implica la siguiente ecuación de conservación

$$B_1 v_1 = B_2 v_2 \quad (2.8)$$

Para que la onda de choque exista, las ecuaciones de conservación deben tener alguna solución. Es necesario también que la entropía aumente a través del frente de choque. Además, la discontinuidad debe ser estable a pequeños disturbios y deben llevarse a cabo mecanismos capaces de explicar la transición de un estado a otro.

Las ecuaciones 2.5), 2.6) y 2.7) pueden escribirse en forma más explícita y más fácil de tratar utilizando las igualdades: $e = c_v T$, $P = \gamma RT$, $R = c_p - c_v$, $c_p / c_v = \gamma$ e introduciendo la velocidad de Alfvén.

El sistema de ecuaciones queda entonces

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (2.9)$$

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 + \frac{\rho_1 V_{A1}^2}{2} = P_2 + \rho_2 v_2^2 + \frac{\rho_2 V_{A2}^2}{2} \quad (2.10)$$

$$\frac{v_1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + V_{A1}^2 = \frac{v_2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} + V_{A2}^2 \quad (2.11)$$

$$B_1 v_1 = B_2 v_2 \quad (2.12)$$

De las ecuaciones 2.8) y 2.9) junto con la definición de velocidad de Alfvén se deduce

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{V_{A2}^2}{V_{A1}^2} \quad (2.13)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones 2.9)-2.12) sean primeramente $P_1/\rho_1 = \sigma$ y $P_2/\rho_2 = \zeta$. Entonces, con ayuda de 2.13)

$$B_2^2 = B_1^2 \sigma^2 \quad ; \quad V_{A2}^2 = V_{A1}^2 \rho_1^2 / \rho_2^2 \quad (2.14)$$

La ecuación puede escribirse

$$\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 + P_1 - P_2 + \frac{\rho_1 V_{A1}^2}{2} - \frac{\rho_2 V_{A2}^2}{2} = 0 \quad \text{de aquí}$$

$$\rho_1 V_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) + P_1 \left[(1 - \tau) + \frac{1}{2} \gamma M_{A1}^2 (1 - \sigma^2) \right] = 0 \quad 2.15)$$

La ecuación 2.11) puede escribirse multiplicándola por $2\rho_1$

$$\rho_1 V_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) + P_1 \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\tau}{\sigma}\right) + 2\gamma \frac{V_{A1}^2}{c_1^2} (1 - \sigma^2) \right] = 0 \quad 2.16)$$

La condición para la existencia de una solución no trivial del sistema 2.15)-2.16) es que su determinante sea cero, i.e.

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{\sigma^2} & 1 - \tau + \frac{1}{2} \gamma M_{A1}^2 (1 - \sigma^2) \\ 1 - \frac{1}{\sigma^2} & \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\tau}{\sigma}\right) + 2\gamma M_{A1}^2 (1 - \sigma^2) \end{vmatrix} = 0$$

Calculando el determinante se encuentra:

$$M_{A1}^2 = \frac{2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (\sigma - \tau) + 2(\sigma\tau - 1)}{\gamma (1 - \sigma)^2} \quad 2.17)$$

Resolviendo esta ecuación para τ se tiene

$$\tau = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma - 1 - \frac{1}{2} \gamma M_{A1}^2 (1 - \sigma)^2}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \sigma} \quad 2.18)$$

Esta ecuación junto con otra para γ en términos de τ forman las relaciones de Rankine-Hugoniot para ondas de choque con incidencia normal en un plasma magnetizado.

El cociente entre los números de Mach alfvénicos a través del frente de choque queda

$$\frac{M_{A2}^2}{M_{A1}^2} = \frac{(V_{A2}/V_{A1})^2}{(c_2/c_1)^2} = \frac{\sigma^2}{\tau} = \frac{\sigma^2 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \sigma\right)}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sigma - 1 - \frac{1}{2} \gamma M_{A1}^2 (1 - \sigma)^2} \quad 2.19)$$

ó también
$$M_{A2}^2 = \frac{1 - \tau}{\gamma \tau (1 - \sigma)} + \frac{(1 + \sigma) M_{A1}^2}{2 \tau} \quad 2.20)$$

La expresión 2.20) es una solución para el número de Mach

alfvénico final en términos de los valores para σ y τ .

2.- Onda de choque oblicua. Se va a considerar ahora el movimiento de un flujo de plasma haciendo un ángulo θ , con el frente de choque.

Sean el eje n perpendicular al frente de choque y el eje k paralelo al mismo, como se muestra en la figura II-2.

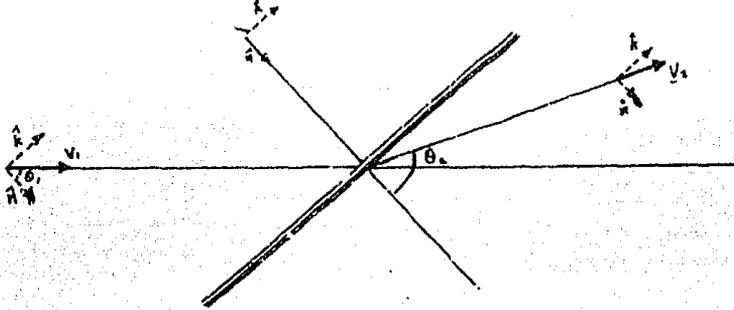


Figura II-2. Esquema de una onda de choque con el flujo incidiendo a un ángulo θ , con respecto al frente de choque.

Para resolver el problema, se va a llevar a cabo una simplificación que consiste en que el campo magnético está alineado a la dirección del flujo. Como esto no es siempre el caso, se puede tratar de trabajar solamente con la componente normal del campo magnético primero y después con la componente transversal, pero esto resulta extremadamente complicado.

Las ecuaciones de conservación van a escribirse ahora de la siguiente manera (Kalikman, 1967, p.127).

Conservación de la componente normal del campo magnético

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} (B_n) + \frac{\partial}{\partial k} (B_k) = 0$$

y como $\frac{\partial}{\partial k} (B_k) = 0$, ya que el campo no cambia con la componente k , entonces

$$B_n = cte \quad (2.21)$$

La ecuación de continuidad es

$$\nabla \cdot (P\underline{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} (P V_n) + \frac{\partial}{\partial k} (P V_k) = 0$$

y como $\frac{\partial}{\partial k_i} (\rho v_k) = 0$, porque la velocidad se supuso paralela a \underline{E} , entonces

$$\rho v_n = cte \quad (2.22)$$

Por la ecuación de la conservación del flujo

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial t} &= \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) = 0 \\ \hat{k} \frac{\partial}{\partial t} (v_n B_k - v_k B_n) &= 0 \\ \text{y} \quad v_n B_k - v_k B_n &= cte \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para un flujo alineado con el campo magnético, el valor de la constante es cero y por lo tanto

$$\frac{v_k}{v_n} = \frac{B_k}{B_n} \quad (2.24)$$

La conservación del momento se puede escribir en la forma

$$\rho (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla P + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B}$$

donde $\frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = \frac{1}{\mu} (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{B} - \frac{1}{2\mu} \nabla |\underline{B}|^2$

Es fácil demostrar que

$$(\hat{n} \cdot \nabla) (\rho v_n \underline{v}) = -\nabla P + \frac{1}{\mu} (\hat{n} \cdot \nabla) (B_n \underline{B}) - \frac{1}{2\mu} \nabla^2 |\underline{B}|^2$$

Usando ahora la identidad $\nabla \phi = (\hat{n} \cdot \nabla) (\phi \hat{n})$, esta expresión resulta

$$(\hat{n} \cdot \nabla) \left\{ \rho v_n \underline{v} + \left(P + \frac{B^2}{2\mu} \right) \hat{n} - \frac{1}{\mu} B_n \right\} \underline{B} = cte \quad (2.25)$$

La componente \hat{n} de la ecuación de momento puede escribirse

$$\rho v_n^2 + P + \frac{B^2}{2\mu} - \frac{B_n^2}{2\mu} = cte \quad \text{pero } B_n = cte \text{ por 2.21) así que}$$

$$\rho v_n^2 + P + \frac{B^2}{2\mu} = cte \quad (2.26)$$

La componente \hat{k} de la ecuación de momento es simplemente:

$$\rho v_n v_k - \frac{1}{\mu} B_n B_k = cte \quad (2.27)$$

La variación de la energía con el tiempo en un sistema Magnetodinámico está dada por

$$\rho \frac{d}{dt} \left\{ e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right\} = \underline{E} \cdot \underline{J} \quad (2.28)$$

donde $\underline{E} \cdot \underline{J}$ es la variación de la energía debida al campo electromagnético.

Como $\underline{\mu J} = \nabla \times \underline{B}$, entonces

$$\underline{E} \cdot \underline{J} = \frac{1}{\mu} \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{B}) = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{B})$$

nótese que $\underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{E}) = - \underline{B} \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ y como $\underline{E} = - \underline{v} \times \underline{B}$, entonces

$$\underline{E} \cdot \underline{J} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot ((\underline{v} \times \underline{B}) \times \underline{B}) = - \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (B^2 \underline{v} - (\underline{B} \cdot \underline{v}) \underline{B})$$

La ecuación 2.28) puede escribirse por lo tanto

$$\rho v_n \left(c + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{B_k^2}{\mu} v_n - \frac{B_n}{\mu} (B_k v_k) = cte \quad (2.29)$$

La entalpia $\left\{ e + (p/\rho) \right\}$ puede escribirse como $(\gamma/\gamma - 1)(p/\rho)$.

Así pues,

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2 + v_k^2}{2} + \frac{B_k^2}{\mu \rho} - \frac{B_n}{\mu \rho} \cdot \frac{B_k v_k}{v_n} = cte$$

Y utilizando la condición 2.24), la ecuación de energía queda finalmente

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2 + v_k^2}{2} = cte \quad (2.30)$$

Utilizando la componente \hat{k} de la ecuación de momento y las relaciones a uno y otro lado del frente de choque para velocidad y campo magnético, se puede obtener una expresión para el ángulo θ_2 formado por la dirección del flujo con el frente de choque.

$$\rho_1 v_{n1} v_{k1} - \frac{1}{\mu} B_{n1} B_{k1} = \rho_2 v_{n2} v_{k2} - \frac{1}{\mu} B_{n2} B_{k2} \quad ;$$

$$\rho_1 V_{n1}^2 \frac{V_{k1}}{V_{n1}} - \frac{B_{n1}^2}{\mu} \frac{B_{k1}}{B_{n1}} = \rho_2 V_{n2}^2 \frac{V_{k2}}{V_{n2}} - \frac{B_{n2}^2}{\mu} \frac{B_{k2}}{B_{n2}} \quad \text{de donde}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{V_{n1}^2 - B_{n1}^2 / \mu \rho_1}{V_{n1}^2 - (\rho_2 / \rho_1) B_{n1}^2 / \mu \rho_1} \frac{\tan \theta_1}{\rho_1 / \rho_2}$$

Finalmente, introduciendo el parámetro β definido como

$$\beta_n = \frac{B_n^2 / \mu \rho}{V_n^2} = \frac{B^2 \cos^2 \theta / \mu \rho}{V^2 \cos^2 \theta} = \frac{B^2 / \mu \rho}{V^2} \quad \text{se tiene}$$

$$\tan \theta_2 = \left[\frac{1 - \beta}{1 - \beta (\rho_2 / \rho_1)} \right] \frac{\rho_2}{\rho_1} \tan \theta_1 \quad (2.31)$$

Por otro lado, las ecuaciones de energía y momento pueden reducirse de tal manera que se tenga una expresión solamente en términos del ángulo, la presión y la densidad.

Los dos términos magnéticos de la ecuación de energía pueden reducirse de la siguiente manera

$$\frac{B_z^2}{\mu \rho} - \frac{B_n B_k V_k}{\mu \rho V_n} = \frac{B_k^2}{\mu \rho} \left[1 - \frac{B_n / B_k}{V_n / V_k} \right] = 0$$

ya que $B_n / B_k = V_n / V_k$. La ecuación de energía queda

$$\frac{V_{n1}^2}{2} \left[(1 + \tan^2 \theta_1) - \left(\frac{V_{k1}}{V_{n1}} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_2) \right] = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right]$$

y como $\rho_1 V_{n1} = \rho_2 V_{n2}$, entonces

$$\rho_1 V_{n1}^2 \left[(1 + \tan^2 \theta_1) - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_2) \right] + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} P_1 \left(1 - \frac{\rho_2 / P_2}{\rho_1 / P_1} \right) = 0 \quad (2.32)$$

La reducción de la ecuación de momento puede escribirse como

$$(P_1 - P_2) + (\rho_1 V_{n1}^2 - \rho_2 V_{n2}^2) + \rho_1 \left(\frac{B_{k1}^2}{2\mu \rho_1} \right) - \rho_2 \left(\frac{B_{k2}^2}{2\mu \rho_2} \right) = 0$$

y usando la ecuación de continuidad se tiene

$$\rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + P_1 \left[1 - \frac{P_2}{P_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{B_{k1}^2}{2\mu \rho_1} \right) \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{B_{k2}^2}{2\mu \rho_2} \frac{2\mu \rho_1}{B_{k1}^2} \right) \right] = 0$$

Se define ahora $\frac{B_{k1}^2 / \mu \rho_1}{2 P_1 / \rho_1} = \frac{B_{k1}^2 / 2\mu}{P_1} = \epsilon_{k1}$ para obtener

$$\rho_1 V_{n1}^2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + P_1 \left[1 - \frac{P_2}{P_1} + \epsilon_{k1} \left(1 - \frac{\tan^2 \theta_2}{\tan^2 \theta_1} \right) \right] = 0 \quad (2.33)$$

Las ecuaciones 2.31), 2.32) y 2.33) forman un sistema cerrado de ecuaciones con tres incógnitas ρ_1 , P_2 y $\tan\theta_2$. Además, estas ecuaciones están en términos de tres variables: ρ_1 , P_1 y $\tan\theta_1$, con tres parámetros fijos: β , ϵ , y $\gamma M_n^2 = (\rho_1 V_n^2)/P_1$.

Sea para simplificar, $\psi = \tan\theta$. El sistema de ecuaciones 2.32)-2.33) tiene solución no trivial si su determinante es igual a cero. Esto es,

$$\begin{vmatrix} 1 - \sigma & 1 + \psi^2 - \frac{1 + \psi^2}{\sigma^2} \\ 1 - \sigma + \epsilon \left(1 - \frac{\psi^2}{\sigma^2}\right) & \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\psi^2}{\sigma^2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

lo cual implica,

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \left(1 - \frac{\psi^2}{\sigma^2}\right) - \left(1 + \psi^2 - \frac{1 + \psi^2}{\sigma^2}\right) \left[1 - \sigma + \epsilon \left(1 - \frac{\psi^2}{\sigma^2}\right)\right] = 0$$

La solución para el cociente P_2/P_1 queda

$$\sigma = \frac{\left\{ \left[\epsilon \left(1 + \psi^2\right) - \left(1 + \psi^2\right) \right] \left[1 + \epsilon \left(1 - \psi^2/\sigma^2\right) \right] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\sigma-1) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{ \left[\sigma^2 \left(1 + \psi^2\right) - \left(1 + \psi^2\right) \right] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\sigma-1) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{ó } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 (1 + \tan^2\theta_1) - (1 + \tan^2\theta_2) \right] \left[1 + \epsilon \left(1 - \frac{\tan^2\theta_2}{\tan^2\theta_1}\right) \right] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)}{\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 (1 + \tan^2\theta_1) - (1 + \tan^2\theta_2) \right] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{P_2}{P_1} - 1\right)} \quad 2.34)$$

El cociente P/P puede ser ahora eliminado igualando esta ecuación con la ecuación 2.33) escrita en la forma

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_1 V_n^2}{P_1} \left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) + 1 + \epsilon \left(1 - \frac{\tan^2\theta_2}{\tan^2\theta_1}\right) \quad 2.35)$$

donde $\frac{\rho_1 V_n^2}{P_1} = \gamma \frac{V_n^2}{c^2} = \gamma M_n^2$

La expresión que resulta contiene solamente $\tan\theta$ y el cociente ρ_2/ρ_1 . Además, $\tan\theta$ puede ser expresado en términos de ρ_2/ρ_1 , por medio de la ecuación 2.31), así que se termina con una ecuación para ρ_2/ρ_1 .

Sabiendo el valor del cociente $\sigma = \rho_2/\rho_1$, el resto de las variables puede ser determinado en seguida. Como en el caso no magnético,

estos resultados son conocidos con el nombre de relaciones de Rankine-Hugoniot.

El procedimiento es el siguiente:

El cociente $Z = P_2/P_1$ está dado por la ecuación 2.33) escrita en la forma

$$Z = \gamma M_n^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + 1 + \epsilon_r \left[1 - \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2\right] \quad 2.36)$$

El vector de campo magnético $B_1 = \sqrt{B_{n1}^2 + B_{t1}^2} = B_{n1} \sqrt{1 + (B_{t1}^2/B_{n1}^2)}$ y dado que $B_{r1} = B_{n1}$ y que $(B_{t1}/B_{n1}) = \tan\theta_1$, entonces

$$\frac{B_2}{B_1} = \cos\theta_1 \sqrt{1 + \sigma^2 \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \tan^2\theta_1} \quad 2.37)$$

El vector velocidad del fluido está dado por $v_2 = \sqrt{v_{n2}^2 + v_{t2}^2}$ ó $v_2 = v_{n2} \sqrt{1 + (v_{t2}^2/v_{n2}^2)}$.

Y dado que $\rho_2 v_{n2} = \rho_1 v_{n1}$ y $v_{t2}/v_{n2} = \tan\theta_2$, entonces

$$v_2 = \frac{v_{n1}}{\sigma} \sqrt{1 + \tan^2\theta_2}$$

como además $v_{n1} = v \cos\theta$, y $\tan\theta_2 = (1-\beta)/(1-\sigma\beta) \cdot \sigma \tan\theta$, se obtiene finalmente,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos\theta}{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2 \tan^2\theta} \quad 2.38)$$

3.- Modos rápido y lento (Superalfvénico y Subalfvénico).

Utilizando la componente \hat{k} de la ecuación de momento, ecuación 2.27)

$$\rho v_n v_k - \frac{1}{\mu} B_n B_k = cte$$

y la condición 2.24) $v_k/B_k = v_n/B_n$, es posible encontrar una expresión en términos del campo magnético y el factor β mediante la cual, la descripción de los modos de propagación de las ondas de choque se facilita grandemente.

Se puede escribir la componente \hat{k} de la ecuación de momento

como $\frac{\rho v_n^2 B_k}{B_n} - \frac{1}{\mu} B_n B_k = cte$ 6

$$B_{K_2} \left(\frac{1}{\beta_2} - 1 \right) = B_{K_1} \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 \right) = k \quad 2.39)$$

en donde $\beta_2 = \frac{\rho_2}{\mu \rho_1^2 v_{A1}^2 / B_{K_1}^2} \sim \rho_2$ y $k = \text{cte.}$ De ésta,

$$\hat{B}_2 \left(\frac{1}{\beta_2} - 1 \right) = \left(\frac{1}{\beta_1} - 1 \right) \quad 2.40)$$

en donde $\hat{B}_2 = B_{K_2} / B_{K_1}$.

Se introducen ahora los términos "rápido" y "lento" para distinguir los estados donde $v_1 > v_{A1}$, llamado también superalfvénico y donde $v_1 < v_{A1}$, llamado también subalfvénico, respectivamente (de Hoffmann y Teller, 1950).

Si $v_1 > v_{A1}$, entonces β_1 es menor que 1 y la constante k es menor que cero. En el caso de que $\beta_1 < 1$, el fluido es superalfvénico.

Si $v_1 < v_{A1}$, entonces β_1 es mayor que 1 y la constante k es mayor que cero. Si $\beta_1 > 1$, el fluido es subalfvénico.

La dependencia del valor \hat{B}_2 con respecto a $\beta_2 \sim \rho_2$ se muestra en las gráficas (figura II-3) obtenidas a partir de la ecuación 2.40) para $\beta_1 < 1$ y $\beta_1 > 1$. Shercliff grafica sólo el caso $\beta_1 < 1$ y trata todas las transiciones en términos de esa curva.

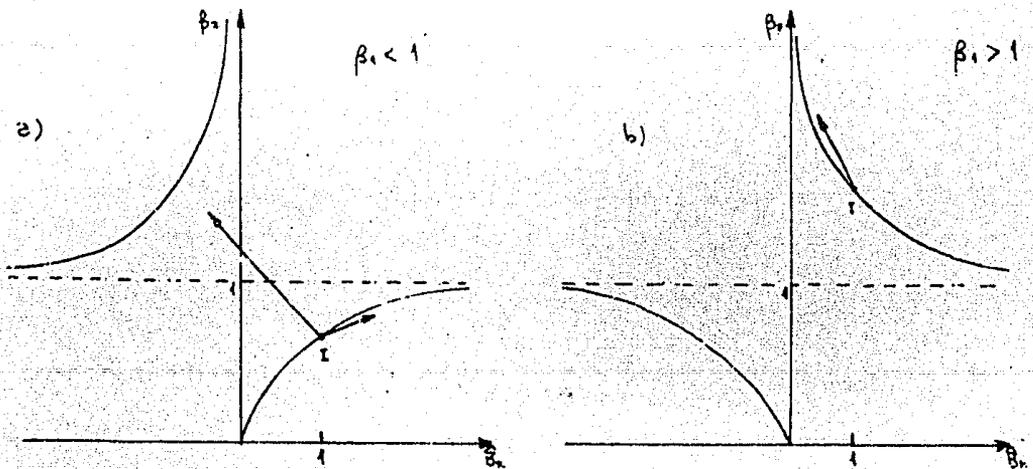


Figura II-3. Ilustración gráfica de las transiciones posibles para los modos de propagación rápido y lento.

Las transiciones permitidas entre estados representados en estas curvas, son aquellas en las que la densidad aumenta a través de la onda de choque

El estado inicial de cualquier transición, está caracterizado por la condición $B_{k1} = B_{k2}$ y puede identificarse con el punto I. Las transiciones deben ocurrir hacia puntos con una ordenada mayor que la del punto I.

En la gráfica (figura II-3a) que corresponde a flujos superalfvénicos, se aprecian dos tipos posibles de transiciones. Si el estado final del fluido está incluido en la rama inferior, esto es, β_2 sigue siendo menor que 1, el flujo permanece superalfvénico y la transición se denomina "rápida". En este caso, la ecuación 2.40) indica que \hat{B}_k aumenta, es decir, el campo es refractado fuera de la normal (figura II-4a).

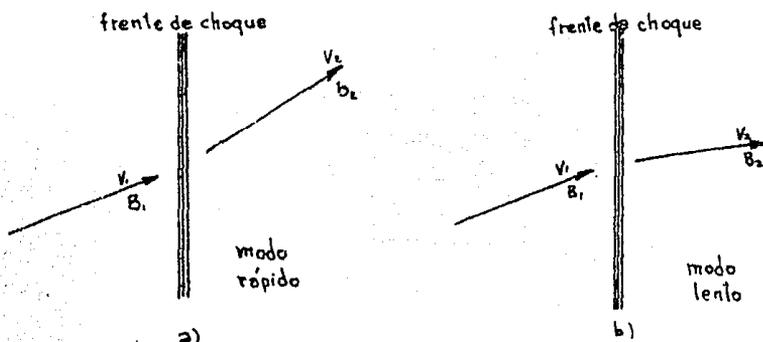


Figura II-4. Esquema de los frentes de choque para los modos de propagación rápido y lento.

Si el estado final del fluido está incluido en la rama superior, esto es, β_2 es ahora mayor que 1, el flujo a pasado a ser subalfvénico. En este caso se habla de una transición intermedia ó transalfvénica. Estas transiciones se distinguen además porque \hat{B}_k se hace negativo. Hay que hacer notar, que estos frentes de choque son muy inestables por lo que no se han observado todavía.

En la gráfica (figura II-3b) que corresponde a flujos subalfvénicos, se ve que solamente puede existir un tipo de transición. En este caso el flujo permanece por necesidad subalfvénico ($\beta_2 > 1$) y la transición se denomina "lenta". Los frentes de choque asociados con estas transiciones tienen la característica de que $\hat{B}_k < 1$, es decir, el campo magnético disminuye a través de la onda de choque.

Nótese que aunque la figura II-4a parece corresponder a una onda de choque oblicua ordinaria, este no es el caso, ya que la compo-

nente paralela de la velocidad no es constante. Para ambos modos rápido y lento, la componente \hat{k} del campo magnético no cambia de signo.

4.- Frentes de choque "switch-on" y "switch-off". Se ha encontrado que existen casos en los cuales el flujo incide normalmente al frente de choque y sale de él con una componente vertical. Esto es, $B_{x1} = 0$ y $B_{x2} \neq 0$. Este caso se conoce como frente de choque "switch-on" (figura II-5a).

Existe otro caso, completamente opuesto, para el cual el flujo incide con una cierta componente vertical la cual desaparece al pasar a través del frente de choque. Esto es, $B_{x1} \neq 0$ y $B_{x2} = 0$. A este caso se le conoce como frente de choque "switch-off" (figura II-5b).

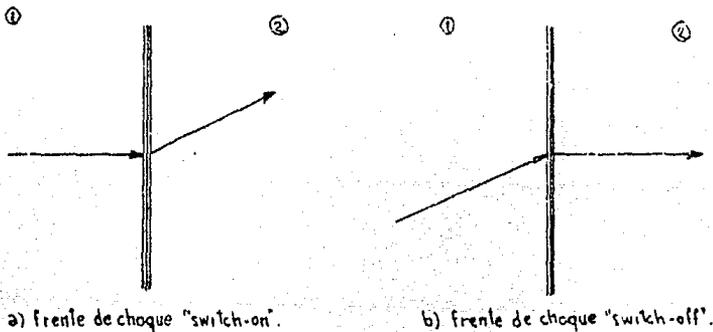


Figura II-5. Esquema de los frentes de choque "switch-on" y "switch-off".

Sean $B_{x1} = 0$ y $B_{x2} \neq 0$. Esto implica en la ecuación 2.39) que $\beta_2 = 1$. Entonces, poniendo como condición inicial $\beta_1 = 1$ se tiene:

$$\beta_2 = \frac{B_2^2 / \mu}{\rho_2 v_2^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_2^2 / \mu}{B_1^2 / \mu} = \frac{\rho_2^2 v_2^2}{B_1^2 / \mu} \quad \text{de aquí}$$

$$\hat{B}_2^2 = \frac{B_2^2}{B_1^2} = \frac{\rho_2^2 v_2^2 \rho_1 v_1^2}{\rho_1 v_1^2 B_1^2 / \mu} \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_2 = \hat{\rho}_2 \hat{v}_2 \frac{1}{\beta_1}$$

pero $\hat{B}_2 = \hat{\rho}_2 \hat{v}_2$ para flujo alineado, así pues, $\hat{B}_2^2 = \hat{\rho}_2^2 v_2^2 \frac{1}{\beta_1}$, lo cual implica $\hat{\rho}_2 \beta_1 = 1$.

La condición para que exista frente de choque "switch-on" es entonces $\hat{\rho}_2 \beta_1 = 1$ y como $\hat{\rho}_2$ es mayor que la unidad se implica que $\beta_1 < 1$, i.e. una onda de choque "switch-on" ocurre solamente para ondas rápidas.

Además, introduciendo este resultado en la ecuación 2.31), se ve que sólo en este caso es posible obtener un valor de $\tan^2 \theta_2 \neq 0$ para un ángulo inicial igual con cero.

Por otro lado, si $B_{K1} \neq 0$ y $B_{K2} = 0$, la ecuación 2.39) implica que $\beta_1 = 1$. Introduciendo este resultado en la ecuación 2.31) se obtiene que $\tan^2 \theta_1 = 0$ aunque $\tan^2 \theta_2 \neq 0$ que es el resultado esperado para una onda de choque "Switch-off".

Tomando la ecuación 2.39) se observa que tanto si $E_{K1} = 0$, como si $\beta_1 = 1$, esto es equivalente a anular el valor de la constante, lo que en la gráfica representa los diferentes estados

$$B_{K2} = 0 \quad y \quad \beta_2 = 1 \quad e.1)$$

$$B_{K2} = 0 \quad y \quad \beta_2 \neq 1 \quad e.2)$$

$$B_{K2} \neq 0 \quad y \quad \beta_2 = 1 \quad e.3)$$

que cumplen con las condiciones de la discontinuidad.

Una cosa muy importante puede decirse ahora. Es posible encontrar el ángulo de salida para una onda de choque "switch-on" tan sólo dando los valores de M y β .

En efecto, tomando las ecuaciones 2.34) y 2.35), substituyendo el valor de $\theta_1 = 0$ e igualándolas se tiene

$$\frac{[\sigma^2 - (1 + \tan^2 \theta_2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \sigma (\sigma-1)}{[\sigma^2 - (1 + \tan^2 \theta_2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\sigma-1)} = \gamma M_2^2 (1 - \frac{1}{\sigma}) + 1$$

pero $\sigma\beta = 1$ para una onda de choque "switch-on". Por lo tanto,

$$\frac{[\frac{1}{\beta^2} - (1 + \tan^2 \theta_2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\beta} (\frac{1}{\beta} - 1)}{[\frac{1}{\beta^2} - (1 + \tan^2 \theta_2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\frac{1}{\beta} - 1)} = \gamma M_2^2 (1 - \beta) + 1$$

de donde se obtiene

$$\tan^2 \theta_2 = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{2 + (\gamma-1)M^2}{(\gamma-1)M^2} \right] - \frac{1}{\beta} \left[\frac{2\gamma M^2(1-\beta) + 2}{(\gamma-1)M^2} \right] - 1 \quad 2.41)$$

Al tratar estos casos se debe recordar que para que las condiciones del "brinco" para las ondas de choque puedan ser aceptadas como genuinas, debe ser demostrado también que:

a) tratadas como discontinuidades, las ondas de choque son esta-

bles, esto es, responden establemente a pequeñas perturbaciones y
b) procesos irreversibles son capaces de afectar las transiciones,
esto es, existe la estructura del frente de choque (Shercliff, 1965,
p.221).

C. Solución analítica para una onda de choque rápida ($\beta \ll 1$).

Cuando el parámetro β es muy pequeño ($M_A \gg 1$), la ecuación 2.31) puede escribirse en buena aproximación como

$$\tan \theta_2 = \sigma \tan \theta, \quad (2.42)$$

Con esta expresión, la ecuación 2.32) se reduce a

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} V_{n1}^2 \left[1 + \tan^2 \theta - \frac{1 + \sigma^2 \tan^2 \theta}{\sigma^2} \right] + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{z}{\sigma} \right) = 0$$

con $\rho_2 v_{n2}^2 / \rho_1 = \gamma M_n^2$. Por lo tanto,

$$M_n^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{2}{\gamma-1} \left(1 - \frac{z}{\sigma} \right) = 0$$

$$\delta \quad M_n^2 (\sigma^2 - 1) + \frac{2}{\gamma-1} (\sigma^2 - \sigma z) = 0 \quad (2.43)$$

La ecuación 2.33) puede ser también reducida.

$$\gamma M_n^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) + \{ 1 - z + \epsilon_k (1 - \sigma^2) \} = 0$$

$$z = \gamma M_n^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) + 1 + \epsilon_k (1 - \sigma^2)$$

$$\sigma z = \gamma M_n^2 (\sigma - 1) + \sigma + \epsilon_k \sigma (\sigma^2 - 1)$$

de donde se puede obtener

$$\sigma^2 - \sigma z = \sigma (\sigma - 1) - \gamma M_n^2 (\sigma - 1) + \epsilon_k \sigma (\sigma^2 - 1) \quad (2.44)$$

Substituyendo esta ecuación en 2.43) se obtiene

$$\frac{\gamma-1}{2} M_n^2 (\sigma+1) + \sigma - \gamma M_n^2 + \epsilon_k \sigma (\sigma+1) = 0$$

que lleva finalmente a la expresión

$$\epsilon_k \sigma^2 + \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2 + \epsilon_k \right) \sigma - \gamma M_n^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \right) = 0 \quad (2.45)$$

Resolviendo esta ecuación de 2º grado para σ se obtiene finalmente

$$\frac{Q_2}{S_2} = \frac{(\gamma+1) M_n^2}{(1+\epsilon_n + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2) \left[1 + \sqrt{\frac{2(\gamma+1)\epsilon_n M_n^2}{(1+\epsilon_n + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2)^2}} \right]} \quad (2.46)$$

En esta expresión todos los parámetros involucrados tales como ϵ y M se refieren al flujo incidente y por lo tanto son conocidos.

Así mismo, por medio de este resultado se pueden conocer todas las relaciones de Rankine-Hugoniot para el modo rápido.

El ángulo para el cual ya no se presenta una onda de choque es aquel que corresponde $\rho_2/\rho_1 = 1$, esto es, la densidad no cambia.

Poniendo la condición $\rho_2/\rho_1 = 1$ en la ecuación 2.46) es posible obtener el ángulo buscado

$$1 = \frac{(\gamma+1) M_n^2}{(1+\epsilon_n + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2) \left[1 + \sqrt{\frac{2(\gamma+1)\epsilon_n M_n^2}{(1+\epsilon_n + \frac{\gamma-1}{2} M_n^2)^2}} \right]}$$

que puede ser reducida hasta llegar a

$$M_n = \sqrt{2\epsilon_n + 1}$$

pero $M_n = M \cos \theta$ y $\epsilon_n = \epsilon \sin \theta$, por lo tanto, se tiene finalmente

$$\sin \theta = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + M^2(M^2 - 1)}}{M^2} \quad (2.47)$$

Si se evalúa la ecuación 2.47) en $\epsilon = 0$ queda

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} \quad \text{o} \quad \cos \theta = \frac{1}{M} \quad (2.48)$$

que como era de esperarse es el ángulo de Mach.

D. Estructura del frente de choque.

Como ya se ha mencionado antes, la estructura del frente de choque va a depender en gran medida de los efectos debidos al campo magnético presente. Va a depender también de parámetros como el número de Mach alfvénico $M_A = V/V_A$ donde V_A es la velocidad de Alfvén, el ángulo θ entre la dirección del flujo y el campo magnético, y el cociente entre las presiones térmica y magnética, ϵ .

Las ondas de choque muy débiles degeneran -como en el caso no magnético-, en ondas de sonido pero ondas de choque muy fuertes degeneran en ondas electromagnéticas (de Hoffman y Teller, 1950).

En el problema de la determinación del espesor del frente de choque es necesario tener en consideración los efectos magnéticos, las fuerzas viscosas y la conducción térmica (Marshall, 1955).

La magnitud del campo magnético está directamente involucrada con el espesor del frente de choque. Para caracterizarla se utiliza el parámetro ϵ definido arriba.

Una forma de tratar el problema del espesor del frente de choque es como en el desarrollado por Marshall (1955), por medio de aproximaciones de la conductividad (muy baja y muy alta).

Para alta conductividad, el frente de choque tiene un espesor de algunos caminos libres medios donde c.l.m. es el espacio recorrido por una partícula antes de ser perturbada en su movimiento. Para conductividad baja, por otro lado, sucede lo que ya se mencionó antes, es decir, que para un cierto valor crítico se forma un frente ancho, y si el campo magnético sobrepasa ese valor crítico no ocurre frente de choque.

Esto se debe a que la componente transversal del campo magnético introduce un cierto orden en el movimiento del plasma que al ser muy grande no permite ya la existencia de efectos turbulentos que son los causantes principales de la existencia de una onda de choque. Esta es también la razón del por qué una onda de choque gasdinámica es siempre más fuerte y más gruesa que una magnetogasdinámica.

Los casos más simples para tratar la estructura son aquellos en que se considera a la conductividad del flujo como infinita, como ya se mencionó al principio, y es la consideración que hace Marshall para

tratar el problema de la estructura del frente de choque con un campo magnético aplicado. Como la condición es de conductividad infinita, las líneas de campo van a ser arrastradas por el flujo.

Un método alternativo es dar una estimación del orden de magnitud del frente de choque para el campo magnético, la velocidad y la temperatura por análisis de las ecuaciones de conservación del problema (Ferraro y Plumpton, 1961, p.103).

Las ecuaciones son (con λ = coeficiente de conductividad térmica y ν = viscosidad cinemática):

$$\rho v = m \quad (2.49)$$

$$\rho v^2 + P + \frac{B^2}{2\mu} - \frac{4}{3} \rho v \frac{dv}{dx} = E \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{2} \rho v^3 + P v + \frac{B^2 v}{\mu} - \frac{4}{3} \rho v v \frac{dv}{dx} - \lambda \frac{dT}{dx} = L \quad (2.51)$$

$$B v - \frac{1}{\mu \sigma} \frac{dB}{dx} = M \quad (2.52)$$

donde m , E , L , M son constantes. Introduciendo las variables adimensionales ξ , ζ y ζ definidas por

$$v = v_1 \xi, \quad T = T_1 \zeta, \quad B = B_1 \zeta, \quad P = RT_1 \rho_1 \zeta / \xi \quad (2.53)$$

donde v_1 , ρ_1 , B_1 , T_1 se refieren a los valores v , ρ , B , T en $x = -\infty$ (es decir, antes de la transición). Usando la ecuación 2.49) para eliminar ρ de las demás ecuaciones, éstas pueden escribirse:

$$\xi + \frac{RT_1}{v_1^2} \frac{\zeta}{\xi} + \frac{B_1^2}{2\mu \rho_1 v_1^2} \zeta^2 - \frac{4v}{3v_1 \xi} \frac{d\xi}{dx} = e \quad (2.54)$$

$$\xi^2 + \frac{2RT_1}{v_1^2} \zeta + 2 \frac{B_1^2}{\mu \rho_1 v_1^2} \zeta^2 - 2 \frac{4v}{3v_1} \frac{d\xi}{dx} - \frac{2\lambda T_1}{m v_1^2} \frac{d\zeta}{dx} = h \quad (2.55)$$

$$\xi \zeta - \frac{1}{\mu \sigma v_1} \frac{d\zeta}{dx} = m_0 \quad (2.56)$$

donde e , h , m_0 son constantes. Las ecuaciones 2.54)-2.56) pueden escribirse finalmente:

$$\xi + \frac{A\zeta}{\xi} + \frac{1}{2} F \zeta^2 - \frac{C}{\xi} \frac{d\xi}{dx} = e \quad (2.57)$$

$$\xi^2 + 2Az + 2F\xi^2 - 2C \frac{d\xi}{dx} - \frac{2\lambda T_1}{mV_1^2} \frac{d\xi}{dx} = A \quad (2.58)$$

$$\xi^2 - \frac{1}{\mu\sigma v} \frac{d\xi}{dx} = m. \quad (2.59)$$

en donde $A = R T_1 / V_1^2 = c^2 / V_1^2 = M_1^2$

$$F = B^2 / \mu g \cdot V_1^2 = V_{A1}^2 / V_1^2$$

$$C = 4\nu / 3V_1 = 4\lambda_1 / 9$$

Aquí σ , denota la velocidad del sonido, v_m la velocidad de las ondas de Alfvén y l el camino libre medio en el frente de choque. Un examen de estas ecuaciones hace suponer que el cambio en v ó en ξ tendrá lugar sobre un espesor del orden de C , i.e. del orden de un camino libre medio, mientras el cambio en la temperatura ocurrirá sobre un espesor del orden de λ/R_m (R_m es el número de Reynolds magnético definido como $\mu\sigma v l$) que es también del orden de un camino libre medio. La ecuación 2.59) muestra que el espesor de la capa de transición para el campo magnético es del orden de $1/\mu\sigma v$, y es por lo tanto menor cuanto mayor sea la conductividad eléctrica. Para una alta conductividad eléctrica, este espesor puede también ser menor que un camino libre, y en este caso se puede esperar que el campo magnético sea proporcional a la densidad ($B = \xi v$). Sin embargo, si la conductividad es baja, la capa de transición es mucho más ancha y esta tendencia se refleja en la variación de la velocidad y la temperatura ya que todas las variables que aparecen en las ecuaciones 2.57)-2.59) están acopladas.

E. Solución numérica para las ondas de choque.

Ante la imposibilidad de obtener analíticamente una solución del sistema de ecuaciones

$$\tan^2 \theta_2 = \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2 \tan^2 \theta_1$$

$$Z = \frac{[\sigma^2(1+\tan^2 \theta_1) - (1+\tan^2 \theta_2)] [1 + \epsilon_k (1 - \frac{\tan^2 \theta_2}{\tan^2 \theta_1})] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \sigma(\sigma-1)}{[\sigma^2(1+\tan^2 \theta_1) - (1+\tan^2 \theta_2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\sigma-1)}$$

$$Z = \gamma M_k^2 (1 - \frac{1}{\sigma}) + 1 + \epsilon_k (1 - \frac{\tan^2 \theta_2}{\tan^2 \theta_1})$$

se utiliza un programa de computación con una subrutina para calcular numéricamente de las ecuaciones

$$Z = \frac{[\sigma^2(1+\tan^2 \theta_1) - (1 + \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2 \tan^2 \theta_1)] [1 + \epsilon_k (1 - \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \sigma(\sigma-1)}{[\sigma^2(1+\tan^2 \theta_1) - (1 + \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2 \tan^2 \theta_1)] - \frac{2\gamma}{\gamma-1} (\sigma-1)}$$

$$Z = \gamma M_k^2 (1 - \frac{1}{\sigma}) + 1 + \epsilon_k (1 - \frac{1-\beta}{1-\sigma\beta} \sigma^2)$$

para valores dados de β , ϵ , γ , M y θ . La densidad se hace variar de 1 a 6 y se toma la diferencia de los dos cómputos. Cuando la resta se anula ó es lo suficientemente pequeña para considerarla cero, se obtiene la solución σ y con ésta se calculan todos los resultados que puedan requerirse y cuyas fórmulas analíticas se han obtenido previamente.

Los resultados que aquí se obtienen son presión, temperatura, campo magnético, ángulo final y ϵ final.

La solución de la densidad para ondas de choque muy rápidas ($\beta \leq 1$) se grafican para distintos valores de ϵ en términos del ángulo de incidencia. Las gráficas resultantes se comparan con las dibujadas para las soluciones obtenidas en forma analítica de la aproximación $\tan^2 \theta_2 = \sigma^2 \tan^2 \theta_1$. El tratamiento de las soluciones rápidas $1 < \beta < 1$ y lentas $\beta > 1$ no se incluyen en este trabajo debido tanto al alto grado de complejidad de sus soluciones como a la gran variedad de ellas que hacen que el problema se generalice demasiado.

A continuación se presentan las gráficas de las soluciones para la densidad con respecto al ángulo de incidencia, tanto numéricas como analíticas. De la comparación entre ellas se deduce que la aproximación usada es bastante satisfactoria.

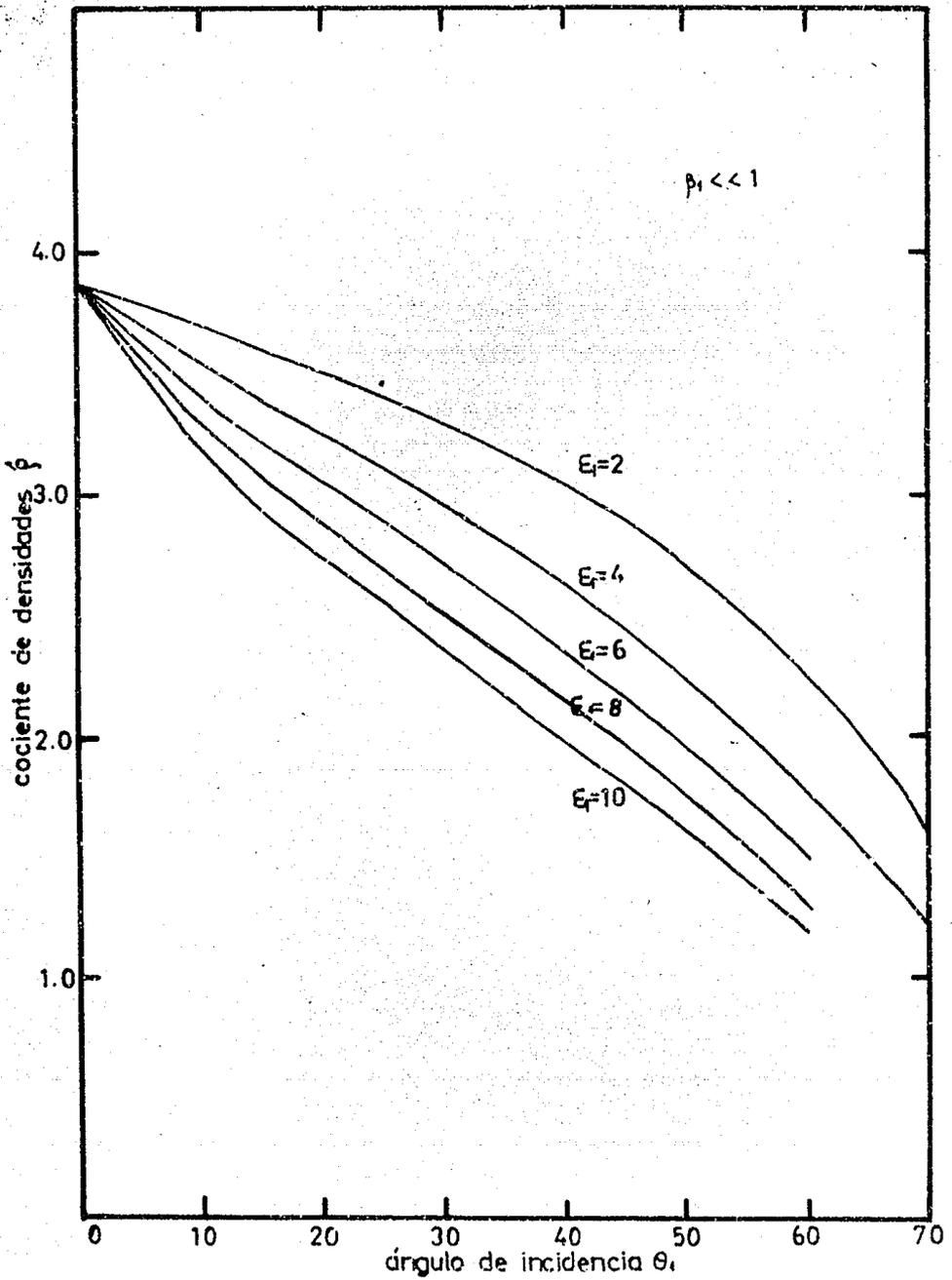
Como puede verse de las gráficas para $\beta=0.05$, $\beta=0.07$ y $\beta=0.09$, se espera que existan ciertos valores para los cuales la densidad deje de variar con respecto al ángulo para ciertos valores de los parámetros. Además, puede verse que para estos valores de β las soluciones dejan de ser parecidas a las soluciones aproximadas excepto para valores de ϵ altos.

Se ha graficado también el campo magnético normalizado (B_z/B_1) contra el ángulo de incidencia y se ha encontrado que existe un cierto ángulo para el cual el campo magnético alcanza un valor máximo a través del frente de choque. Esto se ve claramente de la ecuación 2.37)

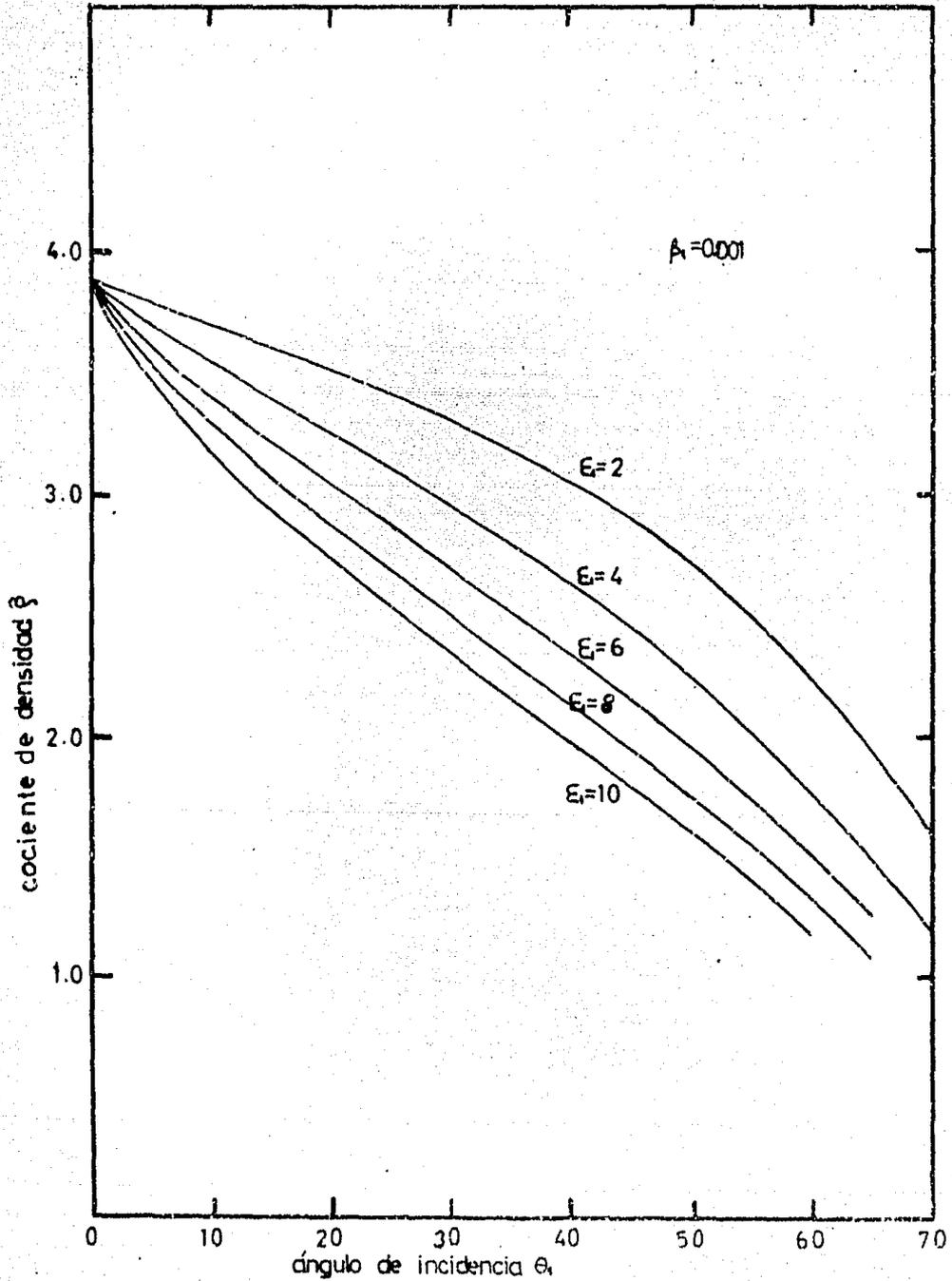
$$\frac{B_z}{B_1} = \cos \theta_1 \sqrt{1 + \sigma^2 \tan^2 \theta_1} \quad \text{con } \beta \ll 1$$

Para ángulos de incidencia muy bajos $B_z/B_1 = 1$ y para aquel ángulo al cual ya no se produce una onda de choque $B_z/B_1 = 1$. Por lo tanto debe existir un valor máximo para \hat{B} .

Una razón posible de que exista este valor máximo es que la eficiencia de los efectos magnéticos crece continuamente al ir aumentando el ángulo de incidencia pero la fuerza de la onda de choque decrece y hay un momento en que este efecto es mayor que el otro e impide que el cociente B_z/B_1 siga aumentando.



Gráfica 1. Solución analítica aproximada para ondas de choque rápidas ($\rho_1 \ll 1$).



Gráfica 2. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_1 = 0.001$.

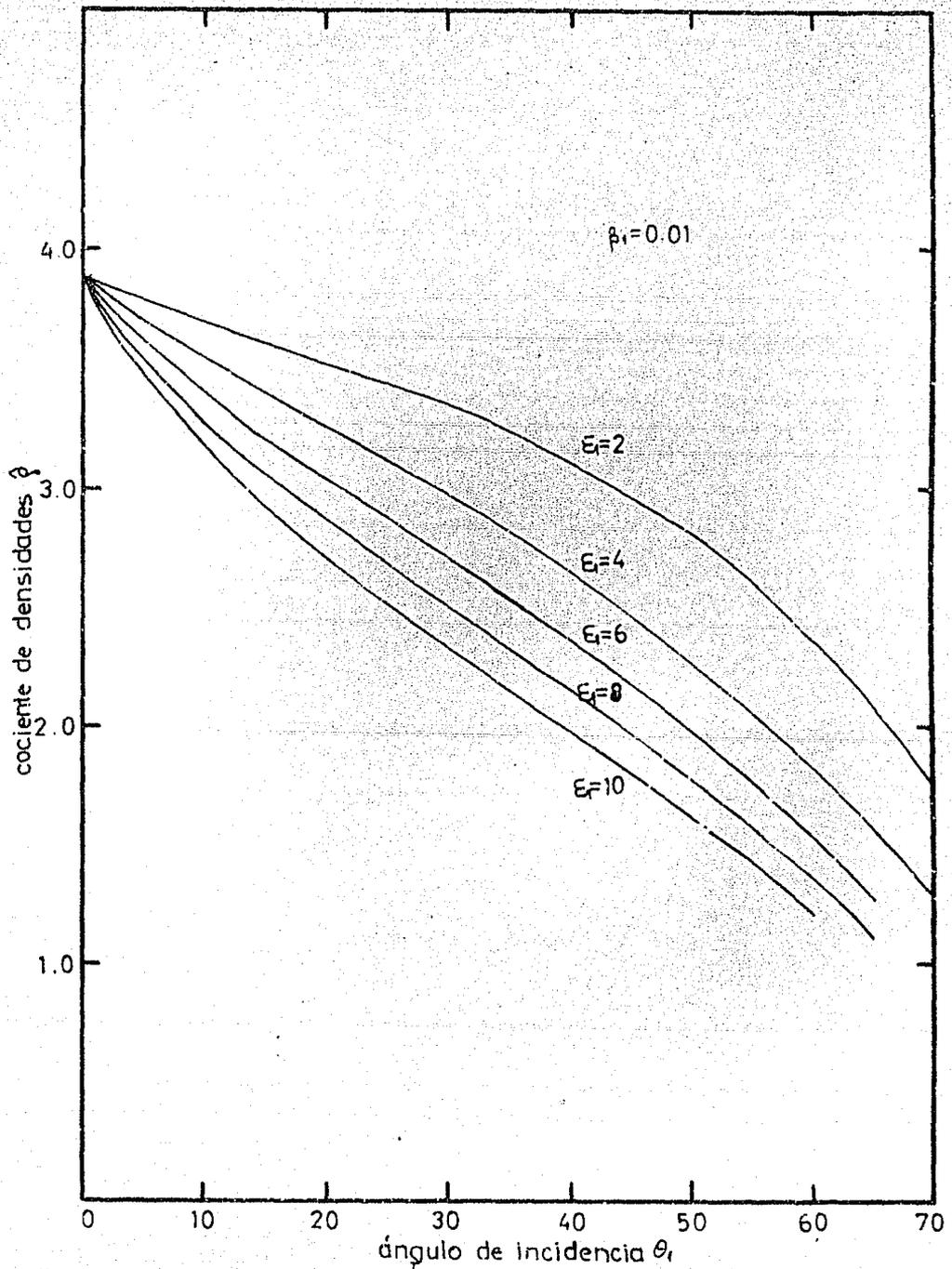
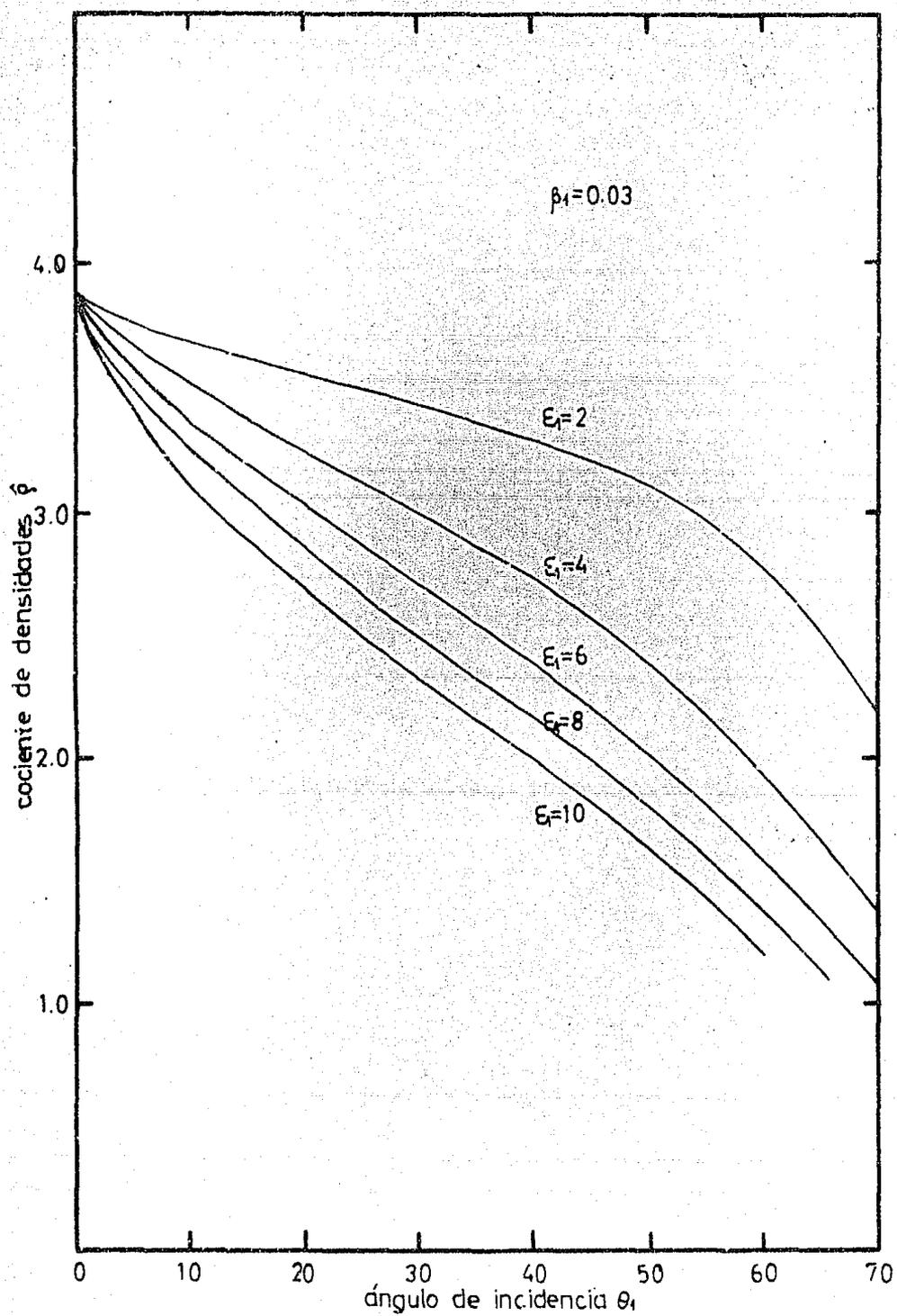
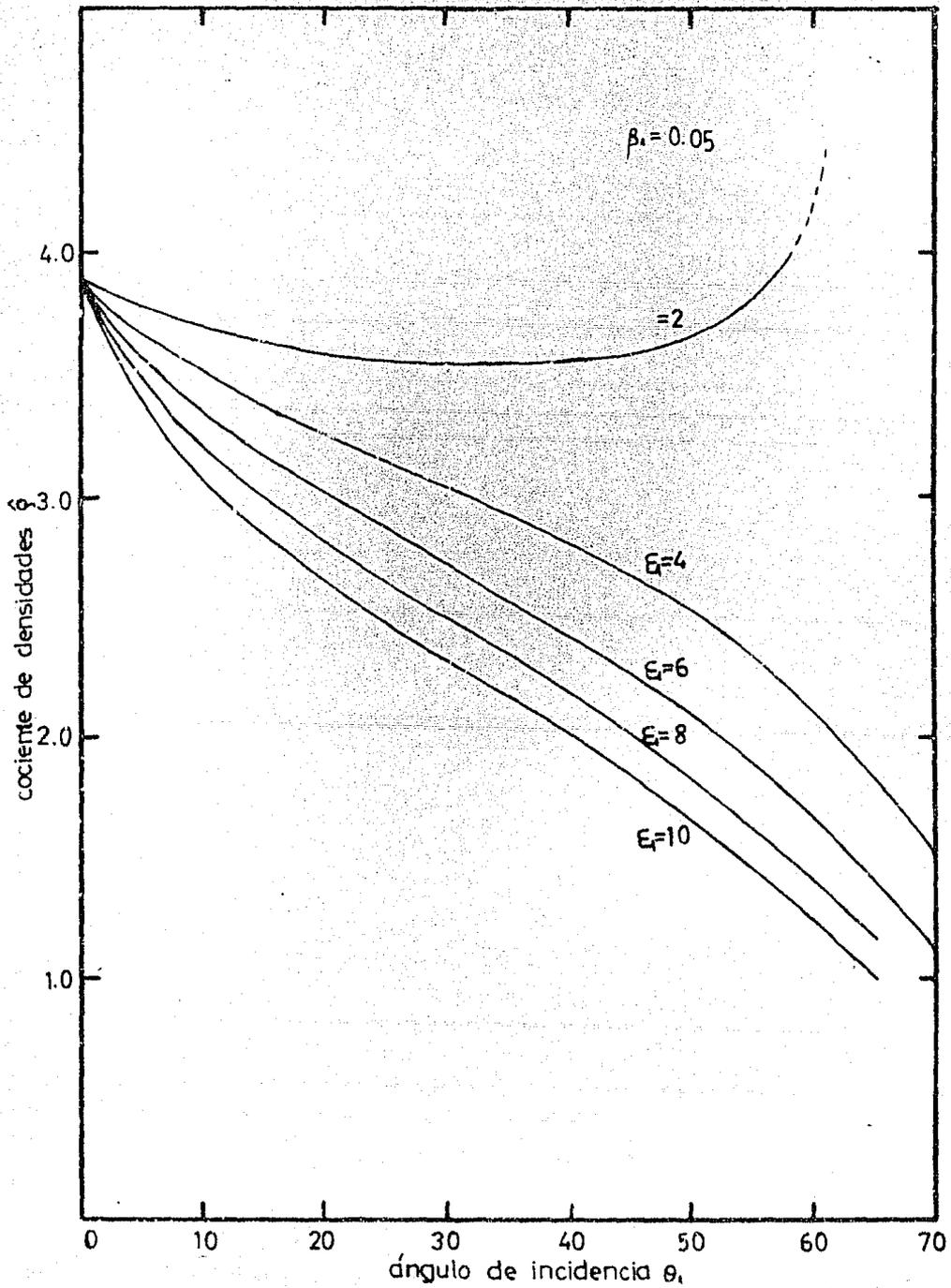


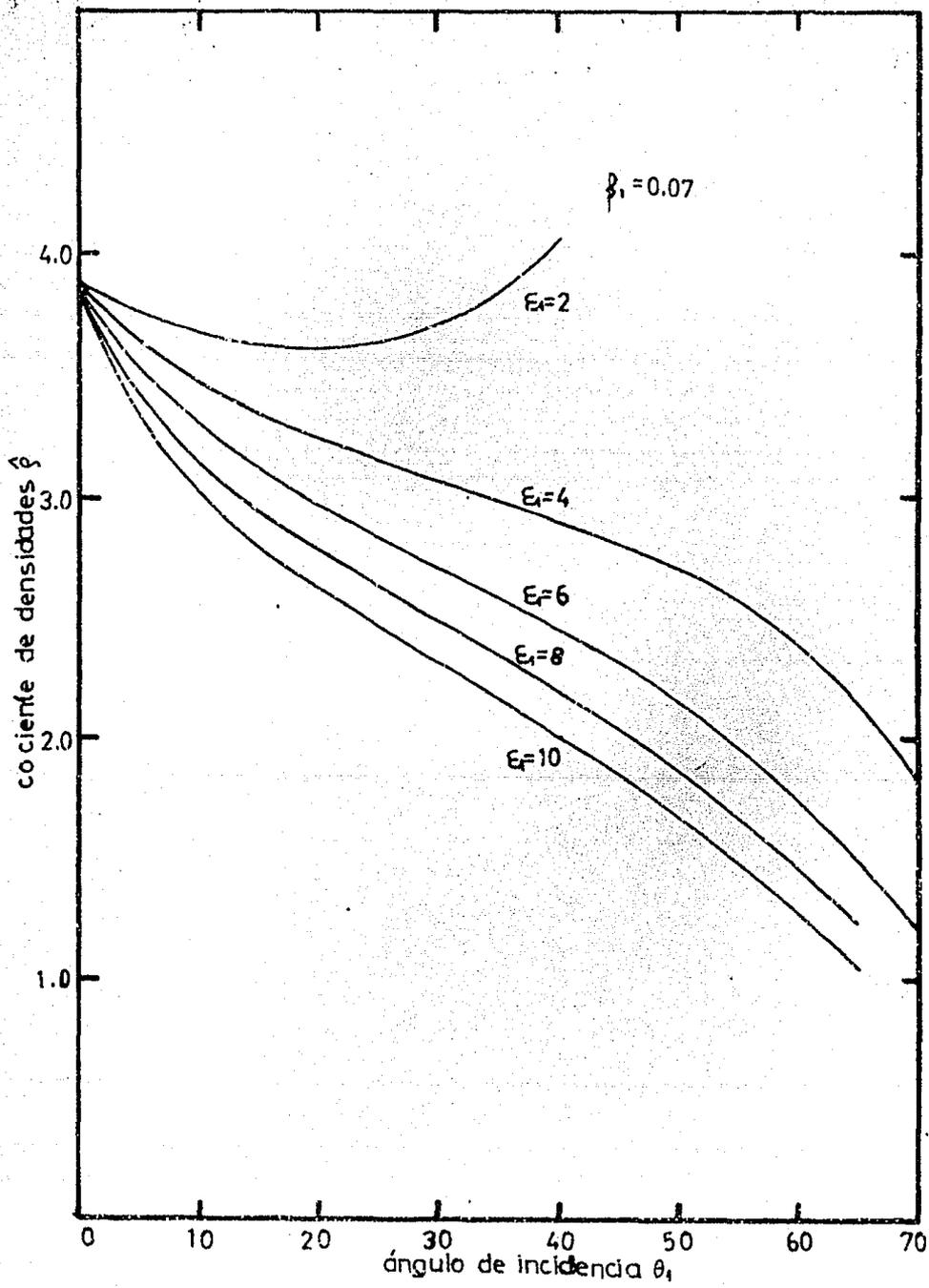
Gráfico 3. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_i = 0.01$.



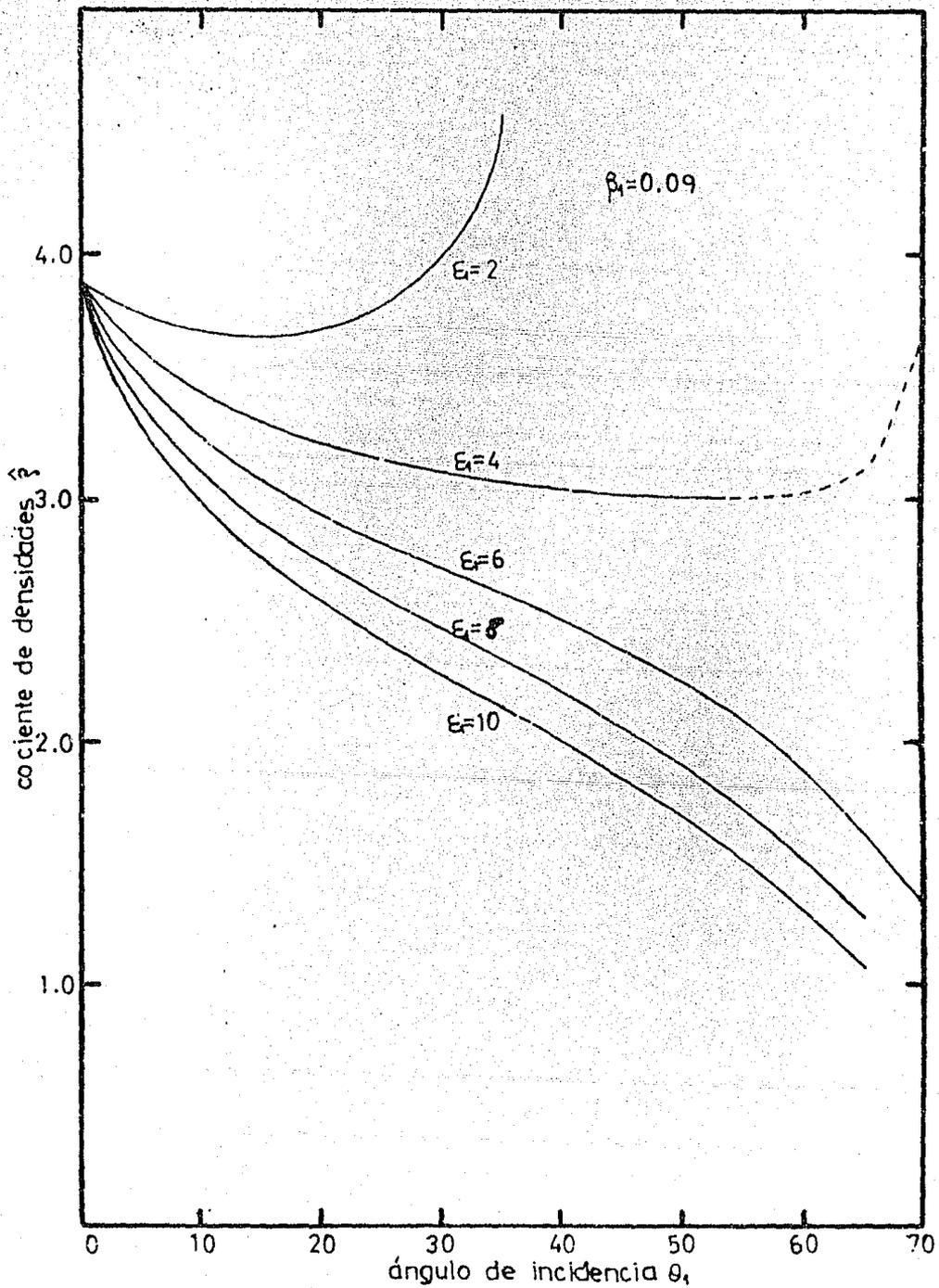
Gráfica 4. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_1 = 0.03$.



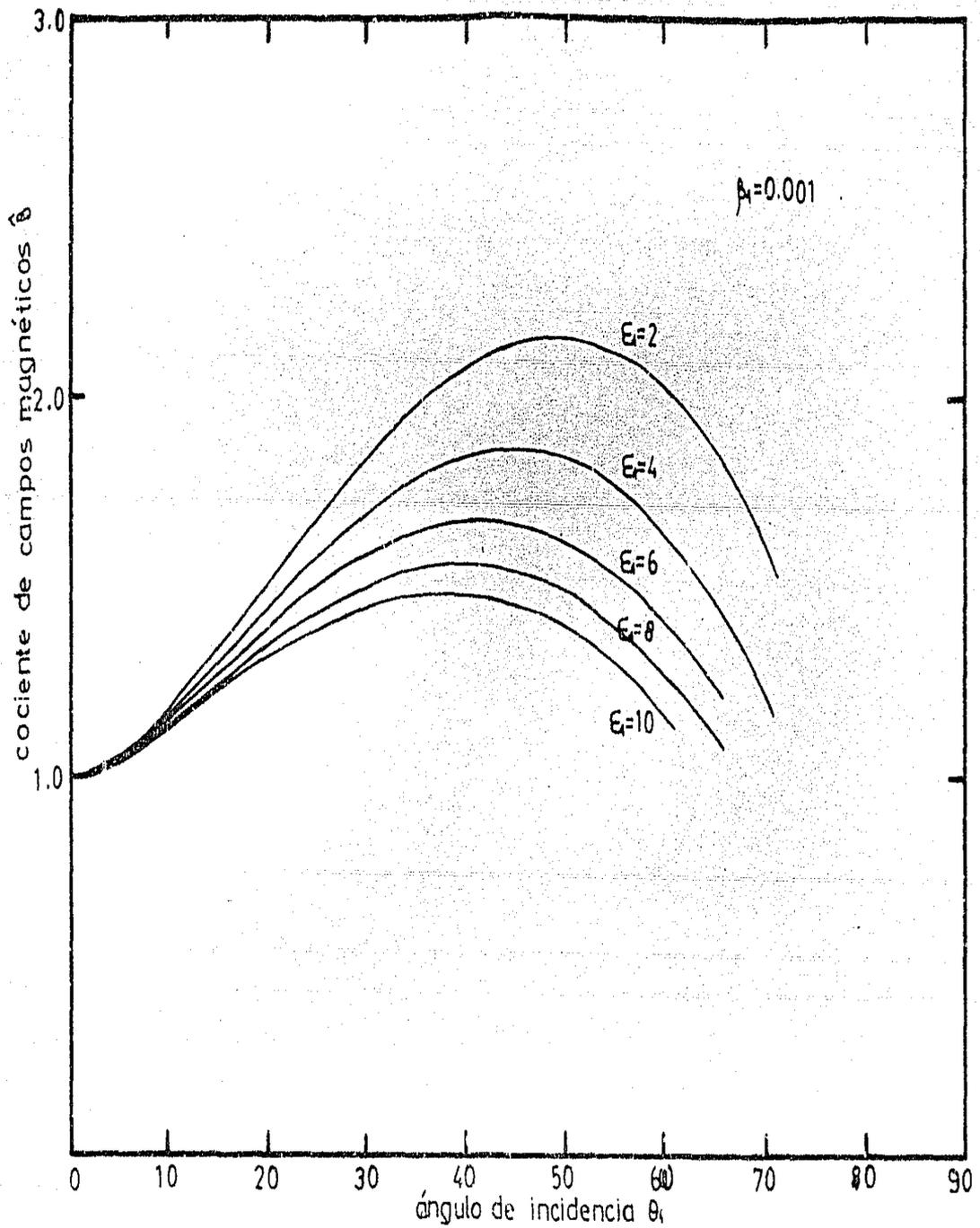
Gráfica 5. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_1 = 0.05$.



Gráfica 6. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_1 = 0.07$.



Gráfica 7. Solución numérica para una onda de choque cuando $\beta_1 = 0.09$.



Gráfica 8. Solución numérica para el valor máximo del cociente B_2/B_1 .

III. ONDAS DE CHOQUE EN PLASMAS SIN COLISIONES.

A. Procesos de transporte en plasmas sin colisiones.

En los plasmas, pueden ocurrir interacciones entre los elementos de fluido en una base diferente a las colisiones binarias entre partículas individuales. Efectos colectivos llevan a una turbulencia del plasma que produce disipación en una escala que puede ser menor que la de una colisión ordinaria pero que sin embargo existe.

En un plasma con colisiones, los efectos disipativos están a cargo de las interacciones coulombianas entre las partículas componentes del gas.

En plasmas sin colisiones, por otro lado, se presentan también mecanismos disipativos pero no en el sentido clásico sino por medio de la interacción de partículas con campos electromagnéticos turbulentos. Para plasmas sin colisiones, la conductividad térmica no es muy importante por lo cual los efectos disipativos principales son resistividad y viscosidad. La resistividad prohíbe la existencia de corrientes eléctricas que resultan del reflujo relativo de iones y electrones, mientras que la viscosidad prohíbe el amontonamiento de partículas en el plasma (Friedman et al, 1971).

Hablando en general, sucede también, como en los plasmas con colisiones, que en plasmas sin colisiones efectos de resistividad afectan principalmente a los electrones mientras que los efectos de viscosidad afectan a los iones.

Los campos electromagnéticos turbulentos, causantes principales de la disipación, se presentan en plasmas que se encuentran fuera de equilibrio debido a que existen inhomogeneidades o funciones de distribución no Maxwellianas, o ambas, que generan fluctuaciones inestables cuando el plasma tiende a su estado de equilibrio. Así mismo, estos campos causan una dispersión aleatoria de las partículas de plasma, aumentando por lo tanto su velocidad aleatoria y produciendo disipación a una escala que depende de la inestabilidad particular (Friedman et al, 1971).

Como ya se ha mencionado en el capítulo anterior, en un fluido ionizado pueden existir ondas de choque fluyendo a velocidades su-

persónicas ($v > c$), superalfvénicas ($v > v_A$) ó supermagnetosónicas ($v > c^*$). En un plasma sin colisiones, la onda de choque se presenta también como una discontinuidad en la descripción del flujo y depende de ciertas condiciones el que sea estrecha o gruesa.

B. El viento solar como un plasma sin colisiones.

El estudio de los plasmas sin colisiones ha recibido durante los últimos 10 años un acelerado impulso propiciado por observaciones del medio interplanetario, las cuales revelan la presencia de un gas sumamente tenue que fluye radialmente hacia afuera del sol a altas velocidades y que aparentemente es originado por la expansión acelerada de la corona solar.

Este gas, al que se le conoce como viento solar, fué predicho teóricamente por Parker en 1958 y detectado posteriormente por medio de las primeras sondas espaciales que lograron salir del campo gravitacional de la tierra.

El flujo de viento solar tiene, bajo condiciones normales, una densidad promedio de 10 cm^3 partículas a una distancia del sol de una unidad astronómica (1 u.a. es la distancia de la tierra al sol), está casi totalmente ionizado y tiene asociado un campo magnético el cual está conectado con la superficie solar en una configuración de espiral como se muestra en la figura III-1.

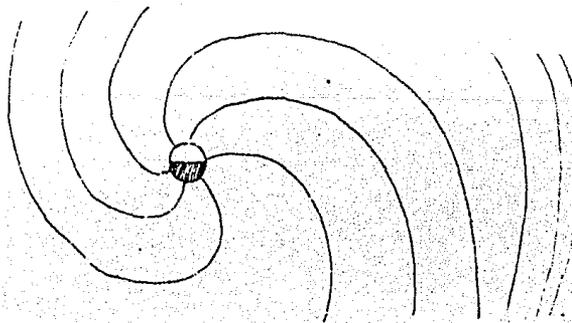


Figura III-1. Configuración del campo magnético interplanetario.

Debido a su extrema baja densidad, el camino libre medio para colisiones de tipo coulombiano es del orden de 10^9 Km , debido a lo cual puede considerarse muy adecuadamente como un plasma sin colisiones.

Es interesante hacer notar que a pesar de ser un plasma sin colisiones, las observaciones han mostrado que se comporta, en buena aproximación como un fluido continuo.

Algunas observaciones realizadas con magnetómetros a bordo de sondas espaciales, han revelado la presencia de discontinuidades

que se propagan en el medio interplanetario y discontinuidades estacionarias en torno a ciertos objetos planetarios.

Estas discontinuidades han sido interpretadas como ondas de choque que resultan de la propagación supersónica de perturbaciones generadas por explosiones repentinas en la superficie del sol u ocasionadas por la presencia de objetos que perturban el movimiento libre del viento solar.

Es posible dar esta interpretación a tales discontinuidades debido a que el viento solar excede en velocidad a las dos principales velocidades de propagación de una onda (velocidad del sonido y velocidad de Alfvén) en este fluido.

Al paso de la onda de choque, el gas del viento solar se modifica aumentando su temperatura, densidad y campo magnético, y reduciendo su velocidad. Dryer et al (1972) han presentado un reporte completo de las observaciones llevadas a cabo por el Pionero 7 en 1966 acerca de las ondas de choque.

Actualmente, no existe todavía una teoría adecuada para describir el comportamiento y la dinámica de las ondas de choque detectadas en el viento solar. Sin embargo, se han desarrollado análisis en los que se prescriben algunas características generales de las ondas de choque tales como su estructura, formación y amortiguamiento.

A continuación se presentará un breve resumen de estos estudios con referencia especial al tipo de procesos que determinan el espesor y magnitud de la discontinuidad.

C. Estructura de las ondas de choque en un plasma sin colisiones.

La estructura del frente de choque en un plasma sin colisiones, para bajo número de Mach y disipación débil, está determinada por efectos dispersivos. Para números de Mach más altos, domina la disipación no clásica en forma de turbulencia (Friedman et al, 1971).

Una importante faceta en las ondas de choque en plasmas sin colisiones es la aparición de valores críticos en los parámetros involucrados. Existe un número de Mach crítico M_c^* arriba del cual la disipación resistiva es insuficiente para formar una onda de choque, por lo que se requiere una disipación viscosa.

El primero en estudiar la estructura de choque interplanetario considerando al flujo de iones y electrones del viento solar como dos fluidos separados, fué Wilson en 1962.

La descripción de un plasma sin colisiones bajo este aspecto resulta ser válida sólo en regiones donde ciertas escalas menores que un camino libre medio proveen la base para el uso de ecuaciones de fluidos.

En otras regiones del espacio sin embargo, en las que por ejemplo $k \lambda_D \sim 1$ (k = número de onda y λ_D = distancia de Debye), las ecuaciones de fluidos no son adecuadas y se necesita dar una descripción cinética. No obstante, la descripción en función de dos fluidos ha sido útil para predecir las propiedades generales del comportamiento de perturbaciones en un plasma sin colisiones.

En Gasdinámica ordinaria, un pulso de presión se deforma por efectos no lineales hasta que ocurren gradientes suficientemente grandes para hacer que efectos disipativos se hagan importantes y se produzca una estructura estacionaria. Lo mismo sucede en Magnetogasdinámica. En ambos casos, la velocidad de propagación de ondas de pequeña amplitud es independiente de la longitud de onda.

Las ecuaciones para dos fluidos son equivalentes a las ecuaciones magnetogasdinámicas para longitudes de onda que son grandes comparadas con $R_i = c/\omega_{pi}$ (distancia inercial, donde c es la velocidad de la luz y ω_{pi} es la frecuencia iónica del plasma). Para estos casos, se espera que un pulso en un plasma sin colisiones se deforme ya que R_i re-

presenta una escala abajo de la cual la detección es imposible. Sin embargo, a cortas longitudes de onda, la dispersión y no la disipación, es la que limita la deformación del pulso. Al mismo tiempo, se generan ondas de pequeña amplitud que acarrean energía hacia adelante o hacia a trás del choque dependiendo de sus propiedades dispersivas. El resultado es una estructura oscilatoria con trenes de onda adelante o atrás.

Cuando un pulso se deforma, la teoría lineal se rompe y se deben buscar soluciones no lineales de las ecuaciones para dos fluidos.

En general, la onda no lineal aparece como un pulso viajando a una velocidad mayor que la de una onda rápida y es precedida o seguida por un tren de onda. Estos trenes de onda no lineales tienen relevancia para choques en plasmas sin colisiones ya que una cantidad pequeña de disipación los amortigua ocasionando una mayor deformación del pulso y dando lugar a la onda de choque.

El espesor de la región de transición ha sido tratado de muchas maneras por distintos autores. Krall y Book (1969) han dado, por medio de una teoría cuasilineal e incluyendo el efecto del campo magnético, una estimación para el espesor del frente de choque de

$$L_c = (3R_e/2) \ln(\omega_{pe}/\omega_{ce}) \quad 3.1)$$

donde ω_{pe}/ω_{ce} es el cociente de la frecuencia del plasma a la girofrecuencia de los electrones y R_e es la distancia inercial de los electrones.

Bekashtein y Sagdeev (1970), han considerado el amortiguamiento de las ondas por los iones y llegado a un resultado diferente:

$$L_c \sim (m_i/m_e)^{1/4} R_e \quad 3.2)$$

donde m_i y m_e son las masas de iones y electrones respectivamente.

Tanto la ecuación 3.1) como la expresión 3.2) son consistentes con las observaciones.

La integración numérica de las ecuaciones para dos fluidos, introduciendo una viscosidad artificial, indica que la estructura puede separarse en una capa delgada viscosa de iones calientes metida dentro de una estructura magnética más ancha (Macmahon, 1968).

Si se considera la propagación de una onda de choque cuyo frente es normal al flujo y se considera también que el valor de β es pequeño, el carácter de la estructura cambia al ir aumentando el número de Mach (Friedman et al, 1971). Por ejemplo:

Si el número de Mach alfvénico está dentro del intervalo $1 < M_A < 2$, la estructura del frente de choque está dominada por dispersión más que por disipación. Las teorías lineal y no lineal predicen, para estas condiciones, gradientes iniciales de longitud del orden de R_e seguidos por un tren de onda con longitud de onda del orden de R_e . Aunque la disipación no es dominante, se manifiesta en el amortiguamiento del tren de onda.

Si $2 < M_A < M_A^*$, la disipación es suficientemente fuerte para amortiguar completamente el tren de onda, y la estructura se hace monotónica con espesor del orden de $10 R_e$. Solamente los electrones son calentados y no hay viscosidad presente. El espesor del frente de choque es mayor de lo que se esperaría si no se presentaran colisiones electrónicas, y se concluye que existe una resistividad anómala que ensancha el frente de choque más allá de R_e . La disipación requerida puede darse por una resistividad anómala producida por turbulencia.

Si $M_A^* < M_A < 4$, la presencia de iones termalizados viola la hipótesis de corrientes sencillas hecha en la descripción en función de dos fluidos, siendo necesaria ya sea una teoría cinética o una descripción de fluido multiiónico.

Si $M_A > 4$, la estructura total del espesor del frente de choque es del orden de R_e y la doble estructura desaparece.

Por otro lado, si $M_A < M_A^*$ y $\beta \approx 1$, el frente de choque es similar al caso de β pequeño, con $L_c \sim 10 R_e$. Por arriba del número de Mach crítico, el frente se ensancha y no se observa doble estructura. Si M_A sigue aumentando, el espesor se aproxima a R_e .

Si β aumenta hasta un valor de 5 aproximadamente y M_A es del orden de 4, el frente de choque es más ancho que en el caso de β pequeña ($\sim R_e$) (Chodura et al, 1969).

Cuando el frente de choque no es perpendicular a la dirección del flujo, la estructura cambia mucho y se esperan trenes de onda precursores con espesor del frente de choque del orden de R_e . El espesor es de pocas veces R_e para M_A entre 1.5 y 3, y se obedecen las condiciones de Rankine-Hugoniot.

D. La onda de choque de la tierra.

El viento solar fluye en el medio interplanetario a velocidades supermagnetosónicas y llega a las inmediaciones de la tierra interactuando con el campo magnético terrestre, el cual es deformado por este flujo y confinado en una región llamada usualmente Magnetósfera (figura III-2). El confinamiento es el resultado de la alta conductividad eléctrica del viento solar y la frontera está determinada por un balance dinámico entre la presión del campo geomagnético y la presión total de impacto del viento solar (Parker, 1969).

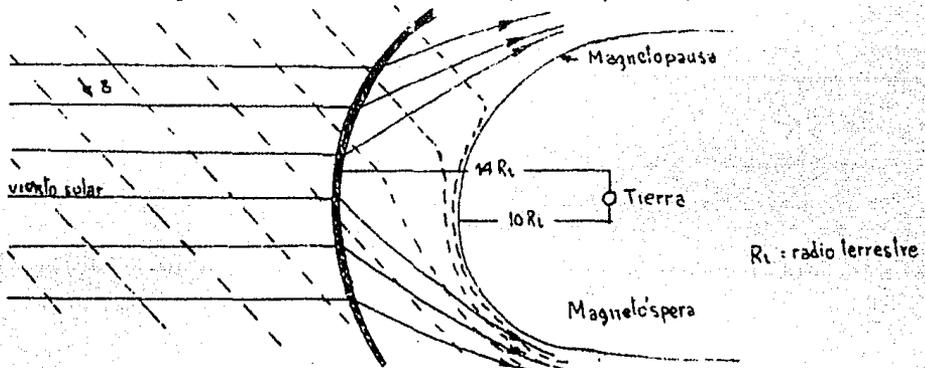


Figura III-2. Esquema de la onda de choque de la tierra en el plano de la eclíptica.

La presencia de la cavidad magnetosférica, provoca que el viento solar sufra una disminución repentina en su velocidad aún antes de llegar a ella. Este cambio brusco, es una discontinuidad que se conoce como onda de choque terrestre y ha sido observada por satélites artificiales. Esta se encuentra aproximadamente a 14 radios terrestres y se extiende envolviendo completamente la parte frontal de la cavidad.

Una importante cuestión es la estructura y estabilidad de la Magnetopausa o sea la frontera de la cavidad magnetosférica. Esta pequeña capa de transición de 100 a 500 Km de espesor entre el campo geomagnético y el viento solar no está en estado estacionario debido a ondas que se presentan en la magnetopausa o a la respuesta de la magnetósfera al flujo variable del viento solar.

Investigaciones teóricas de la estabilidad de la magnetopausa, indican que ésta es estable excepto cuando los campos inmediatamente fuera de ella son paralelos o antiparalelos (Dungey, 1961;

Parker, 1969).

Debido a que la magnetopausa está generalmente fuera de equilibrio, la onda de choque de la tierra está en movimiento continuo y parece oscilar con una excursión máxima de un radio terrestre. Su velocidad promedio con respecto a la tierra es de 10 km/seg (Holzer et al, 1966).

Mediante la ayuda de los satélites artificiales, ha sido posible obtener una gran cantidad de datos que han ayudado grandemente a un conocimiento más preciso del frente de choque terrestre.

Como ya ha sido mencionado en los capítulos previos, el proceso básico que se presenta a través de una onda de choque es la disminución o aumento de los parámetros involucrados. El cambio total del campo magnético se ha medido con magnetómetros instalados en las sondas espaciales obteniendo como valores típicos $|E_1| \approx 4 \times 10^{-3}$ gauss y $|E_2| \approx 16 \times 10^{-3}$ gauss. Estas medidas junto con otras como la velocidad del frente relativo a la tierra (~ 10 Km/seg) han possibilitado el dar una estimación del espesor del frente de choque.

Por otro lado, así como para la onda de choque Magnetogasdinámica los parámetros dependen del plasma incidente, en la onda de choque de la tierra los valores de los parámetros se siguen directamente de las características del viento solar (Schindler, 1969).

Algunos resultados de las observaciones de los parámetros del viento solar incidente (table I) fueron dados por (Wolfe et al, 1966; Neugebauer y Snyder, 1962 y 1966; Tidman, 1967).

TABLA I

$V_1 \sim 300-700$ Km/seg	velocidad
$M_A \sim 5-10$	número de Mach alfvénico
$\beta \sim 0.3-3$	coeficiente de densidades de energía
$T_1 \leq 10^5$ °K	temperatura
$\rho \sim 3-10$ cm ⁻³	densidad
$ E_1 \sim 4-7$ γ	campo magnético

Las variaciones en los parámetros son debidas a la actividad solar ya que ocasiona cambios en la velocidad y dirección del viento solar así como cambios en temperatura, densidad, etc.

Algunos valores típicos de los parámetros a través de la on-

da de choque de la tierra establecen por ejemplo: $V_1 \sim 140-340$ Km/seg, lo que da como resultado una disminución en la velocidad de 2 a 4 veces. $T_1 \geq 10^6$ °K lo que da un aumento en la temperatura de un factor de 10 (Wolfe et al, 1966; Neugebauer y Snyder, 1966). El campo magnético aumenta en aproximadamente cuatro veces (Spreiter y Alksene, 1968).

Como puede verse de la tabla I, algunas observaciones experimentales en el viento solar indican un valor de 10 para el número de Mach alfvénico. Esto significa que $(B_1^2/2\mu)/\rho V^2 = 0.01$, es decir, la densidad de energía magnética es muy pequeña comparada con la densidad de energía traccional. Se llega entonces a un resultado conocido y previsible, es decir, a través de la onda de choque de la tierra el papel más importante no lo juega el campo magnético sino el movimiento de las partículas (Spreiter y Alksene, 1969).

Aunque en muchas ocasiones se ha observado que el frente de choque oscila, en otras el movimiento es muy diferente y podría ser explicado como una "corrugación" viajando a lo largo del frente de choque.

Una cuestión tan importante como la extensión del frente de choque no ha sido completamente desarrollada en el aspecto teórico y no se tienen suficientes resultados experimentales como para dar una evidencia clara de ella. Sin embargo, se cree que tiene una extensión de lo menos 22 R_1 en la dirección perpendicular a la dirección del viento solar (Gosling et al, 1967).

La interpretación de las medidas para el grosor de la onda de choque realizadas por varios autores ha indicado que el frente de choque es por lo general más delgado que el radio del ciclotrón o radio de Larmor R_L , y dan un espesor del frente del orden de 100 Km. Sin embargo, debido a que las condiciones del viento solar son variables, la estructura del frente lo es también.

La cantidad de observaciones ha sido cada vez mayor y la variación de éstas ha sido también cada vez mayor. Algunas observaciones han sugerido la existencia de una estructura de escala fina y otras la existencia de un ancho espectro de turbulencia. Se ha observado que la escala de turbulencia aumenta en amplitud y hace que el espectro cambie también. Por lo tanto, el aumento de la turbulencia no puede ser explicado como una compresión del campo magnético ordi-

nario sino que indica que las ondas se están generando en el frente de choque (Friedman et al, 1971).

Otra observación muy interesante ha sido la de un flujo de protones saliendo hacia adelante del frente de choque. Parece ser que parte del viento solar es acelerado a muy altas velocidades y reemitido después hacia adelante (Tidman, 1967).

Se supone que las perturbaciones observadas en el campo magnético a través del frente de choque son debidas principalmente a las ondas turbulentas. Entonces, el mecanismo básico y principal de la onda de choque es la generación de ondas iónicas inestables y como parte secundaria está la respuesta que da el campo magnético involucrado (Tidman, 1967).

La onda de choque tiene por lo tanto dos capas de estructura. Una capa es gobernada por ondas iónicas y tiene un espesor dado por

$$L_c = A (V_i / \omega_{ii}) \quad (3.4)$$

donde V es la velocidad del flujo antes del choque, ω_{ii} es la frecuencia inicial de los iones y A es una constante con un valor del orden de 10.

Asociado con este brinco, está una escala más ancha L_g debida a la respuesta del campo magnético.

$$L_g \approx \frac{2m_e V_{e2}}{e \langle B_{11} \rangle} \quad (3.5)$$

donde V_{e2} es la velocidad térmica del electrón atrás del frente de choque y $\langle B_{11} \rangle$ es la componente normal del campo magnético inicial.

Utilizando las ecuaciones 3.4) y 3.5), se han obtenido los valores típicos $L_g = 16$ Km y $L_c = 0.25$ A Km.

Una interpretación bastante precisa de todas las observaciones realizadas se basa en la afirmación de que la estructura del frente de choque depende en todos lados de la orientación local del campo magnético interplanetario (Greenstadt et al, 1970).

Esta afirmación surgió cuando las observaciones realizadas con ayuda de dos satélites establecieron la existencia de ondas de pul-

sación con ondas magnéticas dirigidas contra la dirección del viento solar, siempre que la dirección del campo magnético interplanetario no es tangente a la superficie del frente de choque. Según las observaciones, existe una envoltura o "cubierta" del frente de choque pulsante que junto con las ondas magnéticas parece expandirse en la dirección del campo interplanetario. Estos efectos, sugieren un modelo del frente de choque presentando ambos caracteres -abrupto y pulsante- con la estructura en cualquier punto dictada por la orientación local del campo magnético interplanetario con respecto al contorno del frente de choque. El modelo describe a la envoltura del frente de choque como teniendo un perfil ondulante, usualmente asimétrico y dependiente del tiempo. La asimetría promedio de la cubierta sería más pronunciada durante periodos de quietud solar que en tiempos de actividad.

Cuando el campo magnético interplanetario sea perpendicular al frente de choque, éste será de forma pulsante. Cuando sea paralelo, el frente será de forma abrupta (figura III-3). El frente de choque abrupto es delgado mientras que el pulsante es ancho.

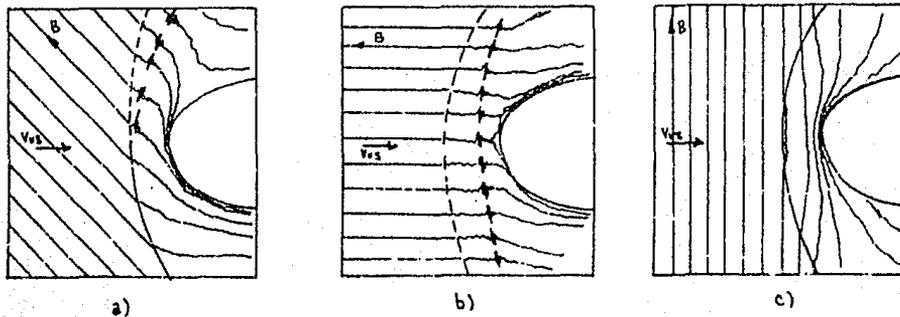


Figura III-3. Perfiles de la onda de choque terrestre para diferentes orientaciones del campo magnético interplanetario.

En la mayoría de los casos, existe una dualidad de la estructura del frente de choque ya que los frentes pulsantes y abruptos pueden coexistir sobre diferentes regiones de la frontera (figura III-3a).

A una cierta orientación del campo magnético interplanetario, el frente de choque se disipa en un tren extendido de pulsación a lo largo del campo magnético interplanetario, dependiendo su espesor de lo favorable de la orientación de éste.

El frente de choque pulsante tiene, según las observaciones, un gran espesor. La región de pulsación puede ir de 1 a 2 R_{\odot} más, debido a que las regiones interior y exterior de la envoltura pueden separarse mucho.

Si fuera posible observar desde una cierta distancia el frente de choque completo, se vería como una superficie pulsante, desigual, corrugando primero un lugar y después otro en respuesta a las variaciones en la orientación del campo magnético interplanetario. Aparecerían ondas dirigidas contra el viento solar temporalmente en un lugar y luego en otro.

En suma, el frente de choque de la tierra no es rotacionalmente simétrico.

La onda de choque de la tierra no es una superficie continua, marcando cambios repentinos del estado del plasma no perturbado al perturbado. El frente de choque abrupto y delgado, puede ser reemplazado completamente por otro pulsante y ancho con grandes oscilaciones en el campo magnético y un espectro irregular e imposible de reproducir.

E. Ondas de choque en otros cuerpos planetarios.

1.- Validez del comportamiento fluidodinámico de la interacción del viento solar con cuerpos planetarios. El comportamiento fluido del viento solar ha sido observado no solamente en relación con el confinamiento que éste produce al campo geomagnético sino también en relación con otros tipos de interacción presentes en algunos objetos planetarios.

Gracias a los trabajos teóricos realizados por Dryer (1970, 1972), Scarf (1969, 1972), Heffner (1971) y Kennel (1972), ha sido posible predecir en qué planetas u otros objetos celestes se puede presentar una onda de choque. La comprobación de estas suposiciones se ha llevado a cabo en algunos casos por medio de satélites artificiales. Los casos concretos son Marte, Venus y la Luna. En los dos primeros, una onda de choque ha sido detectada (Dryer y Heckman, 1967; Smith et al, 1965; Gringauz et al, 1968; Bridge et al, 1967).

Los trabajos teóricos que ya han sido mencionados, se establecieron en base a la suposición de que el viento solar se comporta como un fluido hipersónico. A esta suposición se le conoce como la analogía hipersónica y gracias a ella se puede afirmar que la interacción del viento solar con planetas tales como Júpiter, la Tierra, Marte y Venus puede ser interpretada en función de conceptos magnetohidrodinámicos. De acuerdo con Dryer, la validez de esta analogía está determinada por el llamado número de Knudsen K_n y que se define como $K_n = \log(r/d)$, donde r_i es el radio de giro de los iones y d tiene que ver con el diámetro físico que se opone al paso del viento solar; (en el caso de la tierra por ejemplo, d es el diámetro de la cavidad magnetosférica). Es decir, el número de Knudsen está ligado al tamaño del objeto. De acuerdo con esto, se supone que Júpiter, Tierra, Venus Saturno y Marte tienen la más alta probabilidad de presentar una onda de choque (Dryer, 1970; Dryer et al, 1972).

2.- Tipos de interacción. Actualmente, se piensa que existen tres diferentes tipos de interacción entre el viento solar y un cuerpo planetario. Estos son:

- Interacción con un campo magnético planetario.
- Interacción con una atmósfera planetaria.

- Interacción directa con la superficie del objeto.

El primer tipo de interacción se establece a través del confinamiento del campo magnético, tal y como sucede en el caso de la Tierra. Se sabe actualmente que una configuración similar tiene lugar en el caso de Júpiter, el cual posee un campo magnético del orden de 10 gauss.

Este tipo de interacción sólo tiene lugar en el caso en que el campo magnético del objeto planetario sea lo suficientemente grande como para que la presión magnética equivalente, fuera de cualquier atmósfera que el objeto pudiera tener, sea capaz de balancear y por ende detener el flujo del viento solar. Las dimensiones de la región de interacción en ambos casos deben ser lo suficientemente grandes como para garantizar el comportamiento fluido del viento solar.

El segundo tipo de interacción ocurre en situaciones en las que el campo magnético del objeto no es capaz de detener el flujo del viento solar y éste incide sobre las capas superiores de la atmósfera del planeta u objeto planetario. En este caso se cree que se encuentran Marte y Venus. Como en estos casos la región de interacción está restringida a la de la atmósfera, puede ocurrir que las dimensiones no sean lo suficientemente grandes como para presentar una onda de choque. Por último, cuando el cuerpo planetario no posee ni campo magnético ni atmósfera para deflectar el viento solar incidente, las partículas de éste son absorbidas y neutralizadas en la superficie. Tal es la situación observada en la vecindad de la Luna, en donde los datos obtenidos por medio de satélites, indican que no existe una onda de choque alrededor de ella (Spreiter et al, 1970; Whang y Ness, 1972).

D I S C U S I O N

El estudio de las ondas de choque se ha realizado aquí en tres medios diferentes: gases neutros, plasmas con colisiones y plasmas sin colisiones. Sin embargo, es importante hacer notar que los resultados de los tres están muy compenetrados ya que son obtenidos de maneras similares. Así por ejemplo, los resultados que se han obtenido para ondas de choque en plasmas con colisiones, son directamente aplicables para plasmas sin colisiones, ya que se han llevado a cabo aproximaciones tales como considerar sólo ondas rápidas y conductividad infinita que se presentan en casos como el del viento solar y cuyas características son precisamente las utilizadas en el cálculo numérico en relación con plasmas con colisiones.

La comparación que pueda hacerse (y que en algunos casos se ha realizado), entre las predicciones teóricas y la comprobación experimental de los resultados, lleva a la conclusión de que la aproximación al considerar que, en regiones grandes comparadas con el tamaño del fenómeno, las leyes de conservación se satisfacen, es muy acertada y es la principal arma para atacar el problema ya que sin esta consideración, el tratamiento teórico no se podría llevar a cabo y habría que restringirse a resultados puramente experimentales. Aunque al problema de la estructura de una onda de choque que se desarrolla en un plasma es de una complejidad extrema, la estimación del orden de magnitud de las ecuaciones de conservación concuerda en buena medida con los resultados encontrados experimentalmente.

La solución analítica descrita en esta tesis para ondas de choque rápidas, tiene una gran importancia ya que hasta ahora en la bibliografía sólo se encuentran soluciones obtenidas numéricamente.

Por otro lado, la solución numérica obtenida para ondas de choque con valores de β_1 de hasta 0.09, abre la posibilidad de conocer el comportamiento peculiar de la densidad, que como se indicó en su oportunidad, puede mantenerse constante en ciertas regiones y además puede seguir un comportamiento similar al de ondas rápidas cuando β_1 es pequeño aunque el factor ϵ_1 haya aumentado mucho.

Hasta aproximadamente 1970, se creía que la existencia de ondas de choque en el medio interplanetario estaba limitada a la presencia de un campo magnético fuerte. Sin embargo, con la introducción del número de Knudsen en el tratamiento de la formación y existencia de ondas de choque interplanetarias se supone que éstas no están limitadas de esa manera sino que su existencia depende de muchos factores que comunmente aparecen en las observaciones y que deben seguir siendo estudiados.

A P E N D I C E

SOLUCION NUMERICA PARA LAS ONDAS DE CHOQUE

C SOLUCION EXACTA PARA UN FRENTE DE CHOQUE CON COMPO MAGNETICO ALINEADO

```
REAL MN, M, W2
COMMON/APOLO/BETA, T1, MN, EK, H
READ 1, WF

1 FORMAT (I10)
DO 25 I=1,NF
READ 2,M,BETA
2 FORMAT(2F10.5)
PRINT 4

4 FORMAT('1 EXACT SHOCK FRONT SOLUTION FOR AN ALIGNED FLOW'//)
PRINT15, M, BETA
15 FORMAT(5X,'M=',F4.1,5X,'BETA=',F6.3,/6X,'E1',8X,'A1',9X,'D',9X,
1'P',9X,'T',9X,'M',9X,'B',7X,'E2',8X,'ANG',6X,'DIF',/)
DO 25 J=1,91,5
ALFA=J-1.
ANG1=ALFA*0.017453
T1=TAN(ANG1)
MN=M*COS(ANG1)
DO 25 K=2,10,2
KC=1.0
E=K
EK=E*SIN(ANG1)
H=0.1
RA=1.000001
5 FA=F(RA)
RB=RA+H
FB=F(RB)
IF (FA) 6,10,7
6 IF (FB) 8,10,9
7 IF (FB) 9,10,8
8 RA=RB
IF (RA .LE. 6.0) GO TO 5
IF (H=0.1) 20,23,20
23 RA=1.000001
H=0.01
GO TO 5
20 CONTINUE
PRINT 24,E,ALFA
24 FORMAT(2F10.3,5X,'SOLUTION INCLUDES DENSITY GREATER THAN 6.0')
GO TO 25
9 FF=ABS(FB)
IF (FF .LT. 0.005) GO TO 10
```

```
H=H/10.
KC=KC+1.
IF (KC .GT. 10.0) GO TO 10
GO TO 5

10 T2=RA*T1+(1.-BETA)/(1.-RA*BETA)
   FF =ABS(FB)
   ALFA2= ATAN(T2)
   ANG2=ALFA2/0.017453
   P2=5.*MN**2*(1.-1./RA)3+1.+EK*(1.- (RA*(1.-BETA)/(1.-RA*BETA))2
1)
   TEMP=P2/RA
   IF (TEMP .GT. 0.0) GO TO 21
   PRINT 22, E, ALFA, RB, P2, ANG2, FF, KC
22 FORMAT(4F10.3, 3X, 'SOLUTION INCLUDES NEGATIVE TEMPERATURE', F9.3, F10
1.5, I10)
   GO TO 25
21 CONTINUE
   XA=ABS((1.-BETA)/(1.-RA*BETA))
   B2=COS(ANG1)*SQRT(1.+(XA*RA*TAN(ANG1))2)
   M2=M*B2/SQRT(TEMP)*RA
   E2=B2**2/P2
   PRINT 11, E, ALFA, RB, P2, TEMP, M2, B2, E2, ANG2, FB, KC
11 FORMAT(9F10.3, F10.5, I10)
25 CONTINUE
   STOP
   END
```

```
FUNCTION F(R)
COMMON/ APOLO/ BETA, T1, MN, EK, H
REAL MN, M
1 CONTINUE
T2(R) = R * T1 * ((1. - BETA) / (1. - R * BETA))
CA(R) = R ** 2 * (1. + T1 ** 2) - (1. + T2(R) ** 2)
CB(R) = 1. + EK * (1. - (R * ((1. - BETA) / (1. - R * BETA))) ** 2)
CC(R) = 5. + R + (R - 1.)
CD(R) = EK * (1. - (R * (1. - BETA) / (1. - R * BETA))) ** 2)
CE(R) = (5. * MN ** 2) * (1. - 1. / R) / 3.
XXX = CA(R) - CC(R) / R
IF (XXX .EQ. 0.0) GO TO 2
GO TO 3
2 R = R + H
GO TO 1
3 CONTINUE
SA(R) = (CA(R) * CB(R) - CC(R)) / (CA(R) - CC(R) / R)
SB(R) = CE(R) + 1. + CD(R)
F = SA(R) - SB(R)
RETURN
END
```

B I B L I O G R A F I A

- Bekhtein, G.E. y Sagdeev, R.Z., 1970: JETP Lett., V11, 194.
- Behachevsky, I.O., 1962: The Physics of Fluids, V5, 1456.
- Bridge, H.S., Lazarus, A.J., Snyder, C.W., Smith, E.J., Davis, L., Jr.,
Coleman, P.J., Jr. y Jones, D.E., 1967: Science, V158, 1669.
- Chodura, R., Keilhacker, M., Kornherr, M., Niedermeier, H. 1969:
Plasma Phys. Contr. Nucl. Fusion Res., V1, 81.
- Courant, R. y Friedrichs, K.O., 1948: Supersonic Flow and Shock
Waves, Interscience.
- Daily, J.W. y Harleman, D.R., 1966: Fluid Dynamics, Add-Wesley.
- Dryer, M., 1970: Cosmic Electrodynamics, V1, 115.
- Dryer, M., Rizzi, A.W. y Shan, W.W., 1972: Cosmic Electrodynamics,
V (in press).
- Dryer, M. y Heckman, G.R., 1967: Solar Physics, V2, 112.
- Dryer, M., Smith, Z.K., Endrud, G.H. y Wolfe, J.H., 1972: Cosmic
Electrodynamics, V3, 184.
- Dungey, J.W., 1961: Physics Review Letters, V6, 47.
- Ferraro, V.C. y Plumpton, C.A., 1961: Magneto-fluid Mechanics, Oxford.
- Friedman, H.W., Linson, L.M., Patrick, R.M. y Petschek, H.E., 1972:
Annual Review of Fluid Mechanics, V3, 63, Palo Alto.
- Goosling, J.T., Absridge, J.R., Bame, S.L. y Strong, I.B., 1967:
Journal of Geophysical Research, V73, 43.
- Greenstadt, E.W., Green, I.M., Inouye, G.T., Colburn, D.S., Binsack,
J.H. y Lyon, E.F., 1970: Cosmic Electrodynamics, V1, 316.
- Gringauz, K.I., Bezrukih, V.V., Musatov, L.S. y Brus, T.K., 1968:
Kosmich Issled, V6, 411.

- Haffner, J.W., 1971: AIAA J., V9, 2422.
- Helfer, L.H., 1953: Astrophysical Journal, V117, 177.
- Hoffmann de, F. y Teller, E., 1950: Physics Review, V80, 692.
- Marshall, W., 1955: Proc. Royal Society London, A233, 367.
- Méndez, R.M., 1966: Tesis Profesional, UNAM.
- Mitonen, M., 1959: The Physics of Fluids, V2, 62.
- Neugebauer, M. y Snyder, C.W., 1962: Science, V138, 1095.
- Neugebauer, M. y Snyder, C.W., 1966: Jet Propulsion Lab. Tech. Mem., V15, 33.
- Parker, E.N., 1958: Astrophysical Journal, V128, 664.
- Parker, E.N., 1969: Magnetospheric Physics, Review of Geophysics, V7, 3, Nos. 1 y 2.
- Scarf, F.L., 1969: Planetary Space Science, V17, 545.
- Scarf, F.L., 1972: TRW Systems Group, Redondo Beach, Calif.
- Schindler, K., 1969: Magnetospheric Physics, Review of Geophysics, V7, 51, Nos. 1 y 2.
- Shercliff, J., 1965: A text book of MHD, Pergamon, Oxford.
- Smith, E.J., Coleman, L.Jr. y Jones, D.E., 1965: Science, V149, 1241.
- Spreiter, J.R., Marsh, M.C. y Summers, A.L., 1970: Cosmic Electrodynamics, V1, 5.
- Spreiter, J.R. y Alksene, A.Y., 1968: Planetary Space Science, V16, 971.
- Spreiter, J.R. y Alksene, A.Y., 1969: Magnetospheric Physics, Review of Geophysics, V7, 11, Nos. 1 y 2.
- Tidman, D.A., 1967: Journal of Geophysical Research, V72, 1799.
- Whang, Y.C. y Keen, N.F., 1972: Journal of Geophysical Research, V77, 1109.

lson, T.A., 1962: The Physics of Fluids, 75, 1451.

lfe, J.H., Silva, R.W. y Myers, M.A., 1966: Journal of Geophysical
Research, V71, 1319.