UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE BANACH CON CONO

T E S I S

FRANCISCO JAVIER CARDENAS RIOSECO

MEXICO, D. F. 1972

A MIS PADRES

A Sandra.

A MIS HERMANOS Y TIOS

CON MI AGRADECIMIENTO AL MAESTRO HUGO ARIZMENDI PEIMBERT POR SU - VALIOSA COOPERACIÓN PARA LA REA- LIZACIÓN DE ESTE TRABAJO.

INTRODUCCION.

La tesis versa sobre el artículo del Dr. T. Ando, llamado "On Fundamental Properties of Banach Spaces with a Cone", en el cual se demuestran las siguientes propiedades:

Propiedad 1. Si E es un espacio de Banach con cono cerrado K, entonces:

(1) $E=K-K$ si y solo si E' es casi -(o)- completo.

(2) E es casi -(o)- completo si y solo si $E'=K'-K'$.

Donde E' es el dual de E y K' es el cono dual.

Propiedad 2. Si E es un espacio de Banach ordenado, entonces E tiene la propiedad de interpolación si y solo si E' la tiene.

En el Capítulo 2, Secciones 10 y 11, se definen los conceptos de cono, casi -(o)- completo, espacio de Banach ordenado y algunos otros conceptos necesarios para el desarrollo de la tesis.

En la Sección 12 se demuestra la propiedad 1 y para ello se van a necesitar dos lemas. Para demostrar los dos lemas y la propiedad 1, se recurrirá a algunos teoremas sobre espacios de Banach y espacios vectoriales topológicos localmente convexos, como son por ejemplo: El Teorema del Mapeo Abierto, El Teorema de la Gráfica Cerrada, Los Teoremas de Separación, El Teorema Bipolar y algunos otros que se demuestran en el Capítulo 1.

Y POR ÚLTIMO EN LA SECCIÓN 13 SE DEMUESTRA LA PROPIEDAD 2, POR MEDIO DE UNA PROPIEDAD MENOS RESTRICTIVA QUE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN Y POR ALGUNOS TEOREMAS YA MENCIONADOS ANTERIORMENTE.

I N D I C E.

CAPITULO I.

SECCION 1: CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS.

Definición 1.1. Un conjunto S no vacío, es parcialmente ordenado si existe en S una relación, denotada por $\leq$, que satisface las siguientes condiciones:

I) $x \leq x$ para cada x S,$\in$(Propiedad reflexiva).

II) Si $y \leq x$ y $x \leq y$, entonces $x=y$. (Propiedad antisimétrica).

III) Si $y \leq x$ y $x \leq z$, entonces $y \leq z$ (Propiedad transitiva).

Definición 1.2. Sea S un conjunto parcialmente ordenado. Sea $y \in S$. Se dirá que y es un elemento máximo de S, si siempre que $z \leq y$, $z \in S$ entonces $z=y$. Análogamente se define el concepto de elemento mínimo de S.

Definición 1.3. Sea A un subconjunto no vacío de un conjunto S parcialmente ordenado, entonces x es llamada cota superior de A si $x \leq a$ para toda $a \in A$. El concepto de cota inferior se define en forma similar.

Definición 1.4. Sea A un subconjunto no vacío de un conjunto S parcialmente ordenado, entonces x es llamado supremo (denotado por Sup A) si x es cota superior de A y para toda y, cota superior de A, se tiene que $y \leq x$.

De manera análoga se define el concepto de ínfimo de A. (de-

NOTADO POR INF A).

DEFINICIÓN 1.5. UN CONJUNTO S PARCIALMENTE ORDENADO ES LINEALMENTE ORDENADO SI PARA CUALESQUIERA X, Y $\in$ S, SE TIENE QUE X $\geqslant$ Y O Y $\leqslant$ X.

PRINCIPIO MAXIMAL DE HAUSDORFF 1.6. SEA S UN CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO. ENTONCES, EXISTE UN SUBCONJUNTO T DE S MÁXIMO, QUE ES LINEALMENTE ORDENADO, ES DECIR, SI U ES UN SUBCONJUNTO LINEALMENTE ORDENADO DE S TAL QUE T $\subset$ U, ENTONCES T=U.
PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [15].

DEFINICIÓN 1.7. UN CONJUNTO S PARCIALMENTE ORDENADO, SE DIRÁ QUE ES UN LÁTIZ, SI PARA CUALESQUIERA X, Y $\in$ S EXISTE SU SUPREMO, QUE SERÁ DENOTADO POR X $\vee$ Y.

SECCION 2. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

DEFINICIÓN 2.1. SEA E UN CONJUNTO NO VACÍO. SE DIRÁ QUE E ES UN ESPACIO VECTORIAL REAL SI EN E SE HALLAN DEFINIDAS DOS OPERACIONES, LLAMADAS SUMA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR (DENOTADAS RESPECTIVAMENTE POR + Y .) TALES QUE, PARA CUALQUIER $X, Y, Z \in E$ Y $A, B \in R$, SE SATISFACE QUE:

$+: E \times E \to E$

$(X,Y) \to X+Y$

$\cdot: R \times E \to E$

$(A, X) \to AX$

I) $X+Y = Y+X$

II) $(X+Y)+Z = Z+(Y+Z)$

III) EXISTE EN E UN ELEMENTO θ TAL QUE $X+\theta = X$ PARA TODA $X \in E$.

IV) $A(X+Y) = AX + AY$; $A \in R$, $X, Y \in E$

V) $(A+B)X = AX+BX$; $A, B \in R$, $X \in E$

VI) $A(BX) = (AB)(X)$; $A, B \in R$, $X \in E$

VII) $0 \cdot X = \theta$, $1 \cdot X = X$.

DEFINICIÓN 2.2. SEA S UN SUBCONJUNTO NO VACÍO DE UN ESPACIO VECTORIAL E, SE DIRÁ QUE S ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE E, SI $AX + BY \in S$ PARA CUALESQUIERA $X, Y \in S$ Y $A, B \in R$.

ES FÁCIL DEMOSTRAR QUE LA INTERSECCIÓN DE CUALQUIER FAMILIA DE SUBESPACIOS VECTORIALES DE E ES UN SUBESPACIO DE E.

TAMBIÉN DADO UN SUBCONJUNTO A DE E, EXISTE SIEMPRE UN SUBESPACIO VECTORIAL DE E (DENOTADO POR (A)) CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

$A \subset (A)$ Y SI S ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DE E QUE CONTIENE -

a A entonces $(A) \subset S$.

Si A y B son dos subconjuntos de E, $c \in E$ y $r \in R$ usaremos A+c para denotar el conjunto de todos los elementos z de la forma $z = a+c$; donde $a \in A$, rA para denotar el conjunto de las z de la forma $z = ra$; donde $a \in A$, y $A+B$ para denotar el conjunto de las z de la forma $z = a + b$; $a \in A$ y $b \in B$.

Proposición 2.3. El conjunto (A) consiste de todas las combinaciones finitas de la forma siguiente:

$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$; $x_i \in A$, $a_i \in R$.

Definición 2.4. Un espacio vectorial E es un espacio vectorial topológico si E es un espacio topológico y si las operaciones : + : $E \times E \to E$, $\cdot$: $R \times E \to E$ son continuas respecto a la topología usual de R, la topología de E y las topologías producto para $E \times E$ y $R \times E$.

Como consecuencia inmediata de la definición de espacio vectorial topológico se tiene que las funciones

T_x: $E \to E$ tal que $T_x(y) = x+y$, para toda $x \in E$ y

P_b: $E \to E$ tal que $P_b(y) = bx$; para toda $b \in R$, son homeomorfismos. Esto implica que si $O \in N_\theta$ (donde N_θ denota la familia de vecindades de θ) entonces, $x+O$ es una vecindad de x. Además si $b \in R$, $b \neq 0$ y $O \in N_\theta$, entonces $bO \in N_\theta$. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Si E un espacio vectorial topológico, entonces se puede encontrar una base local B de θ que satisfaga las siguientes condiciones:

I) Si $U, V \in B$, entonces existe $W \in B$ tal que $W \subset U \cap V$.

II) Si $U \in B$ y $x \in U$, entonces existe $V \in B$ tal que $x+V \subset U$.

III) Si $U \in B$, entonces existe $V \in B$ tal que $V+V \subset U$.

IV) Si $U \in B$ y $x \in E$, entonces existe $a \in R$ tal que $x \in aU$.

V) Si $U \in B$ y $|a| \leq 1$, entonces $aU \subset U$ y $aU \in B$.

Inversamente dada una colección B de subconjuntos de E que contienen a θ y que satisfacen las condiciones anteriores, existe una topología para E, que hace a E un espacio vectorial topológico con B como base local de θ.

VI) Si $\cap U = (\theta)$ entonces E es de Hausdorff.

Para la demostración ver [15] o [17].

SECCION 3. ESPACIOS DE BANACH.

Definición 3.1. Una función real no negativa $\|\ \|$ definida sobre un espacio vectorial E es llamada una norma si satisface, para cualesquiera x, $y \in E$ y $a \in R$, las siguientes condiciones:

i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$

ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

iii) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$

Definición 3.2. Sea E un espacio vectorial. Una función real d definida sobre $E \times E$ es una métrica, si satisface para cualesquiera x, y, $z \in E$, las siguientes condiciones:

i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Un espacio vectorial con una norma es llamado un espacio vectorial normado. Un espacio vectorial con una métrica es llamado un espacio vectorial métrico. Como consecuencia de las definiciones de norma y métrica, se tiene que todo espacio vectorial normado es métrico (definiendo la métrica d como sigue: $d(x,y) = \|x-y\|$), además todo espacio vectorial métrico es un espacio vectorial topológico (Ver 6).

Definición 3.3. Un espacio vectorial normado E es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma.

DEFINICIÓN 3.4. UN OPERADOR T DE UN ESPACIO VECTORIAL X EN OTRO ESPACIO VECTORIAL Y ES LINEAL SI PARA CUALESQUIERA $x, y \in X$ Y $a, b \in R$ SE TIENE QUE $T(ax+by) = aT(x)+bT(y)$.

SI X, Y SON ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS, DECIMOS QUE EL OPERADOR T ES ACATADO SI EXISTE UN REAL M TAL QUE PARA TODA $x \in X$, $||Tx|| \leq M||x||$. Y A LA MÍNIMA DE ESAS M ES LLAMADA LA NORMA DE T Y SE DENOTA POR $||T||$.

PROPOSICIÓN 3.5. $||T|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Tx||$

PARA LA DEMOSTRACIÓN VER [8]

PROPOSICIÓN 3.6. UN OPERADOR LINEAL T, DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO X EN OTRO ESPACIO VECTORIAL NORMADO Y ES CONTINUO SI Y SÓLO SI ES ACOTADO.

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS QUE T ES CONTINUO PERO QUE NO ESTÁ ACATADO, ENTONCES EXISTE UNA SUCESIÓN (x_n) EN X TAL QUE PARA CADA n TENEMOS QUE $||Tx_n|| > n||x_n||$.

SEA $x_n' = \dfrac{x_n}{n||Tx_n||}$, ENTONCES SE SIGUE QUE $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = 0$

Y $||Tx_n'|| = \dfrac{1}{n||Tx_n||} \, ||Tx_n|| \geq \dfrac{1}{n||Tx_n||} \, n||x_n|| = 1$, LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN A LA HIPÓTESIS DE CONTINUIDAD. POR LO TANTO T ES ACOTADO.

INVERSAMENTE, SUPONGAMOS QUE T ES ACOTADO. SEAN $x, y \in E$. ENTONCES $||Tx-Ty|| = ||T(x-y)|| \leq ||T|| \, ||x-y||$, ENTONCES DADA $\varepsilon > 0$, Y TOMANDO $\delta = \dfrac{\varepsilon}{||T||}$, TENEMOS LA CONTINUIDAD DE T

AÚN MÁS, SU CONTINUIDAD UNIFORME.

PROPOSICIÓN 3.7. EL CONJUNTO B, DE TODOS LOS OPERADORES LINEALES Y ACOTADOS DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO X EN UN ESPACIO Y DE BANACH, ES UN ESPACIO DE BANACH.

PARA LA DEMOSTRACIÓN VER [8]

SECCION 4.

ALGUNAS PROPIEDADES SOBRE ESPACIOS DE BANACH.

A ES DENSO EN E SI $\bar{A}=E$ ($\bar{A}$ DENOTA LA CERRADURA DE A).

SE DICE QUE UN CONJUNTO A ES NO DENSO EN NINGUNA PARTE SI $\sim \bar{A}$ ES DENSO. UN CONJUNTO A ES DE LA PRIMERA CATEGORÍA DE BAIRE SI ES LA UNIÓN NUMERABLE DE CONJUNTOS NO DENSOS EN NINGUNA PARTE Y UN CONJUNTO QUE NO ES DE LA PRIMERA CATEGORÍA ES DE LA SEGUNDA.

PROPOSICIÓN 4.1. SEA E UN ESPACIO DE BANACH Y (O_N) UNA SUCESIÓN NUMERABLE DE SUBCONJUNTOS DENSOS Y ABIERTOS DE E, ENTONCES $\bigcap_{N=1}^{\infty} O_N$ ES NO VACÍA.

DEMOSTRACIÓN:

SEA x_1 UN PUNTO DE O_1 Y S_1 UNA BOLA ABIERTA DE RADIO R_1 DE CENTRO x_1 Y CONTENIDA EN O_1 YA QUE O_2 ES DENSO DEBE HABER UN PUNTO x_2 EN $O_2 \cap S_1$. YA QUE O_2 ES ABIERTO EXISTE UNA BOLA ABIERTA S_2 DE CENTRO x_2 Y CONTENIDA EN O_2 Y PODEMOS TOMAR EL RADIO R_2 COMO EL MÍNIMO $(\frac{1}{2}R_1, R_1-d(x_1,x_2))$ ENTONCES $\bar{S}_2 \subset S_1$. SIGUIENDO EL PROCESO INDUCTIVAMENTE, NOSOTROS OBTENEMOS UNA SUCESIÓN DE ESFERAS TALES QUE $\bar{S}_N \subset S_{N-1}$ Y $S_N \subset O_N$ Y CUYO RADIO TIENDE A CERO (MIN $(\frac{1}{2}R_{N-1}, d(x_N,x_{N-1})) \leq \frac{1}{2^{N-1}}R_1$). TENEMOS (x_N) LA SUCESIÓN DE LOS CENTROS DE LAS BOLAS, ENTONCES PARA $N, M \geqslant N$ TENEMOS QUE $x_N \in S_N$ Y $x_M \in S_N$ Y (x_N) ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY YA QUE $R_N \to 0$. POR SER E DE BANACH EXISTE UN PUNTO X EN E, TAL -

QUE $x_N \to x$. YA QUE $x_N \in S_{N+1}$ PARA $N \geq N$, TENEMOS QUE X ESTÁ EN $\bar{S}_{N+1} \subset S_N \subset O_N$ Y POR LO TANTO $\bigcap_{N=1}^{\infty} O_N \neq \emptyset$.

PROPOSICIÓN 4.2. SEA E UN ESPACIO DE BANACH. ENTONCES NO ES DE LA PRIMERA CATEGORÍA (E NO ES LA UNIÓN NUMERABLE DE CONJUNTOS CERRADOS CUYOS INTERIORES SON VACÍOS).

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS QUE E ES DE LA PRIMERA CATEGORÍA ENTONCES EXISTE UNA SUCESIÓN (E_N) DE CONJUNTOS NO DENSOS EN NINGUNA PARTE TAL QUE $E = \bigcup_{E=1}^{\infty} E_N$, ENTONCES PARA CADA N, $O_N = \sim E_N$ ES UN CONJUNTO DENSO Y ABIERTO Y POR LO TANTO $\bigcap_{N=1}^{\infty} O_N \neq \emptyset$, ESTO IMPLICA QUE EXISTE UNA $x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} O_N$, POR LO TANTO $x \notin \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$ QUE ES UNA CONTRADICCIÓN.

POR LO TANTO E ES DE LA SEGUNDA CATEGORÍA.

TEOREMA DEL MAPEO ABIERTO 4.3. SI T ES UN OPERADOR LINEAL CONTINUO DE UN ESPACIO DE BANACH SOBRE OTRO ESPACIO DE BANACH Y, ENTONCES T ES ABIERTO.

PARA DEMOSTRAR ESTE TEOREMA VAMOS A NECESITAR DOS LEMAS.

LEMA 1. SEAN X Y Y DOS ESPACIOS DE BANACH Y SEA T UN OPERADOR LINEAL CONTINUO DE X SOBRE Y. ENTONCES PARA TODA BOLA ABIERTA $S_R(\theta)$ DE RADIO R Y CENTRO EN θ SE TIENE QUE $\overline{T(S_R(\theta))}$ ES UNA VECINDAD DE θ DE Y.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $V = S_R(\theta)$ UNA BOLA ABIERTA DE RADIO R Y DE CENTRO EN θ, TOMEMOS $V_1 = S_{\frac{R}{2}}(\theta)$. YA QUE T ES SOBRE Y $X = \bigcup_{K=1}^{\infty} KV_1$, TENEMOS

QUE $Y = \bigcup_{K=1}^{\infty} KT(V_1)$. PERO YA QUE Y ES DE BANACH NO ES DE LA PRIMERA CATEGORÍA, ESTO IMPLICA QUE $T(V_1)$ NO PUEDE SER NO DENSO EN NINGUNA PARTE Y $\overline{T(V_1)}$ CONTIENE ALGUNA BOLA ABIERTA $S_R(x)$ DE RADIO R Y CENTRO x; DONDE $x \in \overline{T(V_1)}$, ENTONCES $\overline{T(V_1)} - x \subset \overline{T(V_1)} - \overline{T(V_1)} \subset 2\overline{T(V_1)} = \overline{T(V)}$. POR LO TANTO $\overline{T(S_R(\theta))}$ ES UNA VECINDAD DE θ DE Y.

LEMA 2. SEAN X, Y DOS ESPACIOS DE BANACH Y T UN OPERADOR LINEAL CONTINUO DE X EN Y, CON LA SIGUIENTE PROPIEDAD: CUALQUIERA QUE SEA $R > 0$, EXISTE UN NÚMERO $P > 0$ TAL QUE PARA TODA $x \in X$, LA IMAGEN DE LA BOLA CERRADA $B_R(x)$ ES DENSA EN LA BOLA CERRADA $B_P(Tx)$, ES DECIR $\overline{T(B_R(x))} \supset B_P(Tx)$. ENTONCES PARA TODA $A > R$ LA IMAGEN DE $B_A(x)$ CONTIENE A LA $B_P(T(x))$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA (R_N) UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS POSITIVOS TALES QUE $R_1 = R$ Y $A = R_1 + R_2 + \ldots < \infty$. PARA CADA R_N EXISTE $P_N > 0$ $(P_1 = P)$ TAL QUE $T(B_{R_N}(x))$ ES DENSA EN $B_{P_N}(Tx)$ PARA TODA $x \in X$; PODEMOS SIEMPRE SUPONER QUE $\lim_{N \to \infty} P_N = 0$.

SEA x_0 UN PUNTO DE X, Y Y UN PUNTO DE $B_P(Tx)$.

VAMOS A DEMOSTRAR QUE Y PERTENECE A $T(B_A(x_0))$, PARA ESO VAMOS A DETERMINAR UNA SUCESIÓN (x_N) DE PUNTOS DE X TALES QUE PARA TODA $N \geq 1$ SE TENGA QUE $x_N \in B_{R_N}(x_{N-1})$ Y $T(x_N) \in B_{P_{N+1}}(Y)$.

SI LAS x_I ESTÁN DETERMINADAS PARA $0 \leq I \leq N-1$ Y SATISFACEN ESAS RELACIONES SE TIENE, QUE $Y \in B_{P_N}(Tx_{N-1})$, ENTONCES EXISTE UN PUNTO $x_N \in B_{R_N}(x_{N-1})$ CUYA IMAGEN $T(x_N)$ PERTENECE A LA VECINDAD $B_{P_{N+1}}(Y)$, LO QUE DEMUESTRA LA EXISTENCIA DE LA SUCESIÓN (x_N).

La sucesión (x_N) es de Couchy en X porque la distancia de x_N a x_{N+P} está acotada por $R_{N+1}+\dots+R_{N+P}$ que es arbitrariamente pequeña, cuando N es muy grande. Como X es completo la sucesión (x_N) converge a un punto $x \in X$ y la distancia de x_0 a x está acotada por A. Por lo tanto $x \in B_A(x_0)$ y como T es continua, la sucesión $(T(x_N))$ converge a $T(x)$ y se tiene que $T(x_N) \in B_{P_{N+1}}(y)$, por lo tanto $y=T(x)$ y $T(B_A(x)) \supset B_P(Tx)$.

Demostración del teorema 4.4. Por el lema 1, tenemos que para todo número $R>0$, $\overline{T(S_R(\theta))}$ es una vecindad de θ de Y, por consiguiente existe $P>0$ tal que $T(S_R(\theta))$ es denso en $S_P(T(\theta))$. Entonces por el lema 2 se demuestra que para toda $A>R$, $T(S_R(\theta))$ es una vecindad de θ de Y. Entonces para cualquier abierto O en X existen $S_R(\theta)$ tales que $S_R(\theta) \subset O-x$ para cada $x \in O$. Entonces $T(S_R(\theta)) \subset T(O-x)=T(O)-T(x)$ y $T(S_R(\theta)+T(x) \subset T(O)$ donde $T(S_R(\theta))+T(x)$ es una vecindad de $T(x)$.

Por lo tanto $T(O)$ es abierto.

Proposición 4.4. Sea E un espacio vectorial completo con respecto a cada una de las normas $\|\ \|$ y $|||\ |||$. Supongamos que existe una constante c tal que $\|x\| \leq c|||x|||$ para toda $x \in E$. Entonces existe una constante c' tal que $|||x||| \leq c'\|x\|$ para toda $x \in E$.

Para la demostración ver [11]

Teorema del Mapeo Cerrado 4.7. Sea T un operador lineal de un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y. Suponga--

MOS QUE T TIENE LA PROPIEDAD DE QUE SI (x_N) ES UNA SUCESIÓN EN X QUE CONVERGE A UN PUNTO $x \in X$ Y (Tx_N) CONVERGE EN Y A UN PUNTO Y, ENTONCES $y=Tx$; ES DECIR LA GRÁFICA ES CERRADA. ENTONCES T ES CONTINUA.

DEMOSTRACIÓN:

DEFINAMOS UNA NUEVA NORMA EN X COMO SIGUE:

$|||x|||=||x||+||Tx||$, ENTONCES X ES COMPLETO CON LA NORMA $|||\ |||$. PORQUE $|||x_N-x_M|||\to 0$ CUANDO $||x_N-x_M||\to 0$ Y $||Tx_N-Tx_M||\to 0$. POR SER X Y Y ESPACIOS DE BANACH EXISTEN $x \in X$ Y $y \in Y$ TALES QUE $||x_N-x||\to 0$ Y $||Tx_N-y||\to 0$ RESPECTIVAMENTE.- POR HIPÓTESIS TENEMOS QUE $y=Tx$ Y SE SIGUE QUE $|||x_N-x|||\to 0$.- YA QUE $|||x|||\geqslant||x||$. APLICANDO LA PROPOSICIÓN 4.6 TENEMOS QUE $||x||+||Tx||\leqslant c||x||$. SE SIGUE QUE $||Tx||\leqslant c||x||$. POR LO TANTO T ES ACOTADO Y POR LA PROPOSICIÓN 3.6 ES CONTINUA.

SECCION 5. TEOREMA DE HAHN-BANACH.

DEFINICIÓN 5.2. UN OPERADOR LINEAL A DE UN ESPACIO VECTORIAL E EN R SE LE LLAMA FUNCIONAL LINEAL.

SI E ES UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO, EL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONALES LINEALES CONTINUAS SE LLAMA EL ESPACIO DUAL DE E Y SE DENOTA POR E'. SI E ES UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO ENTONCES E' ES DE BANACH.

TEOREMA DE HAHN-BANACH. SEA P UNA FUNCIÓN REAL DEFINIDA EN UN ESPACIO VECTORIAL E QUE SATISFACE $P(X+Y)\leq P(X)+P(Y)$ Y $P(AX)=AP(X)$ PARA CADA $A>0$. SUPONGAMOS QUE F ES UNA FUNCIONAL LINEAL DEFINIDA EN UN SUBESPACIO S DE E Y QUE $F(S)\leq P(S)$ PARA TODA $S\in S$, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIONAL F DEFINIDA EN E TAL QUE $F(X)\in P(X)$ PARA TODA $X\in E$ Y $F(S)=F(S)$ PARA TODA $S\in S$.

PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [11]

COROLARIO 1. SEA X UN ELEMENTO DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO E, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL ACOTADA F EN E TAL QUE $F(X)=\|F\|\|X\|$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA S EL SUBESPACIO GENERADO POR X Y DEFINIMOS $F(LX)=L\|X\|$ Y $P(Y)=\|Y\|$; F ES UNA FUNCIONAL DEFINIDA SOBRE S Y P SATISFACE LAS PROPIEDADES DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH SOBRE TODO E, ENTONCES POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL F EN E TAL QUE $F(Y)\leq\|Y\|$. YA QUE $F(-Y)\leq\|Y\|$ TENEMOS QUE $\|F\|\leq 1$, PERO TAMBIÉN $F(X)=\|X\|\leq\|F\|\|X\|$, DE ESTE MODO $\|F\|=1$ Y $F(X)=\|F\|\|X\|$.

COROLARIO 2. SEA T UN SUBESPACIO DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO E Y X UN ELEMENTO DE E, CUYA DISTANCIA A T ES AL MENOS δ, ESTO ES $\|x-t\| \geq \delta$ PARA TODA $t \in T$. ENTONCES EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL ACOTADA SOBRE E TAL QUE $\|f\| \leq 1$, $f(x)=\delta$ Y $f(t)=0$ PARA TODA $t \in T$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA S EL SUBESPACIO GENERADO POR T Y X, ES DECIR EL SUBESPACIO QUE CONSISTE DE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA FORMA $ax+t$; $t \in T$ Y $a \in R$. DEFINIMOS LA SIGUIENTE FUNCIONAL f EN S, $f(ay+t)=a$ PARA TODO ELEMENTO DE S. YA QUE $\|ax+t\|=|a|\,\|x+\frac{t}{a}\| \geq |a|\delta$ PARA $a \neq 0$, TENEMOS QUE $f(s) \leq \|s\|$ PARA TODA $s \in S$, ENTONCES POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH SE PUEDE EXTENDER f A TODO E Y $f(y) \leq \|y\|$, ESTO IMPLICA QUE $\|f\| \leq 1$ Y POR DEFINICIÓN DE f EN S, TENEMOS QUE $f(t)=0$ PARA TODA $t \in T$ Y $f(x)=\delta$.

COROLARIO 3. CADA FUNCIONAL LINEAL f DEFINIDA EN UN SUBESPACIO S DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO E SE PUEDE EXTENDER A TODO EL ESPACIO, DE TAL MANERA QUE LA NORMA SE PRESERVA, ES DECIR, SE PUEDE ENCONTRAR UNA FUNCIONAL LINEAL F DEFINIDA EN E TAL QUE:

I) $F(x)=f(x)$ PARA TODA $x \in S$

II) $\|f\|_S=\|F\|_E$

PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [8]

SECCION 6.

CONJUNTOS CONVEXOS Y FUNCIONAL DE MINKOWSKI.

DEFINICIÓN 6.1. UN SUBCONJUNTO K DE UN ESPACIO VECTORIAL ES CONVEXO SI DADOS $x, y \in K$ Y $0 \leq a \leq 1$, SE TIENE QUE $ax+(1-a)y \in K$.

PROPOSICIÓN 6.2. SEAN E UN ESPACIO VECTORIAL Y F UNA FAMILIA DE SUBCONJUNTOS CONVEXOS DE E. ENTONCES $\bigcap_{A \in F} A=\emptyset$ ES UN SUBCONJUNTO CONVEXO DE E.

PROPOSICIÓN 6.3. SEAN $x_1, \ldots, x_n$ PUNTOS DE UN SUBCONJUNTO CONVEXO K DE UN ESPACIO VECTORIAL E Y SEAN $a_1, \ldots, a_n$ REALES NO NEGATIVOS TALES QUE $a_1+\ldots+a_n=1$. ENTONCES $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$ ESTÁ EN K.

DEMOSTRACIÓN:

PARA $n=2$ ES CIERTO POR LA DEFINICIÓN DE CONJUNTO CONVEXO. SUPONGAMOS CIERTA LA PROPOSICIÓN PARA n. PARA $n+1$ SE DEMUESTRA DE LA SIGUIENTE MANERA: SEAN $b=a_2+\ldots+a_{n+1}$, $y=\frac{(a_2)}{b}x_2+\ldots+\frac{a_{n+1}}{b}x_{n+1}$, SE SIGUE POR HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN QUE $y \in K$, YA QUE $a_1+b=1$, ENTONCES $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_{n+1}x_{n+1}=a_1x_1+by \in K$.

PROPOSICIÓN 6.4. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL. SI K_1 Y K_2 SON SUBCONJUNTOS CONVEXOS DE E Y $b \in R$. ENTONCES bK_1 Y K_1+K_2 SON SUBCONJUNTOS CONVEXOS DE E.

DEMOSTRACIÓN:

SI $x, y \in bK_1$, ENTONCES EXISTEN x', y' EN K_1, TALES QUE $x=bx'$, $y=by'$, SI $0 \leq a \leq 1$ ENTONCES $ax+(1-a)y=b(ax'+(1-a)y') \in bK_1$, --

POR SER K_1 CONVEXO.

SI $X, Y \in K_1+K_2$, ENTONCES EXISTEN $X', Y' \in K_1, X'', Y'' \in K_2$ TALES QUE $X=X'+X'', Y=Y'+Y''$, SI $0 \leq A \leq 1$ ENTONCES $AX+(1-A)Y=A(X'+X'')+(1-A)(Y'+Y'')=(AX'+(1-A)Y')+(AX''+(1-A)Y'') \in K_1+K_2$ POR SER K_1 Y K_2 CONVEXOS.

DEFINICIÓN 6.5. SI A ES UN SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO VECTORIAL E. LA ENVOLVENTE CONVEXA DE A ES EL MÍNIMO SUBCONJUNTO CONVEXO DE E QUE CONTIENE A A, DENOTAREMOS A ESTE SUBCONJUNTO POR Co(A).

PROPOSICIÓN 6.6. Co(A) ES EL CONJUNTO DE TODAS LAS COMBINACIONES LINEALES $A_1X_1+\ldots+A_NX_N$; TALES QUE $X_I \in A$, $0 \leq A_I \leq 1$ Y $A_1+\ldots+A_N=1$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $B=(A_1X_1+\ldots+A_NX_N \mid X_I \in A,\ 0 \leq A_I \leq 1$ Y $A_1+\ldots+A_N=1)$.

ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 6.3, $B \subset Co(A)$, POR SER Co(A) UN CONJUNTO CONVEXO QUE CONTIENE A A. ADEMÁS $A \subset B$, ENTONCES LO ÚNICO QUE NOS FALTA DEMOSTRAR ES QUE B SEA CONVEXO. PARA ESO TOMEMOS $X=A_1X_1+\ldots+A_NX_N$; $X_I \in A$, $0 \leq A_1 \leq 1$ Y $A_1+\ldots+A_N=1$, $Y=B_1Y_1+\ldots+B_MY_M$; $Y_I \in A$, $0 \leq B_I \leq 1$ Y $B_1+\ldots+B_M=1$. SI $0 \leq C \leq 1$ ENTONCES $CX+(1-C)Y=CA_1X_1+\ldots+CA_NX_N+(1-C)B_1Y_1+\ldots+(1-C)B_MY_M$; $CA_1+\ldots+CA_N+(1-C)B_1+\ldots+(1-C)B_M=1$. ENTONCES B ES CONVEXO.

POR LO TANTO $Co(A)=B$.

PROPOSICIÓN 6.7. SEAN $A \in R$, $A_1,\ldots,A_N$ SUBCONJUNTOS NO VACÍOS DE UN ESPACIO VECTORIAL E. ENTONCES

I) $Co(AA)=ACo(A)$, $Co(A_1+A_2)=Co(A_1)+Co(A_2)$.

II) $Co(A_1 \cup A_2)=Co(A_1,A_2)=\bigcup[x:y]$, DONDE $x\in Co(A_1), y\in Co(A_2)$ Y $[x:y]$ DENOTA AL SEGMENTO DE LÍNEA RECTA QUE UNE A X, Y.

III) $Co(A_1\ldots A_N)=(x|x=a_1x_1+\ldots+a_Nx_N;\ x_i\in A_i, 0\leq a_i\leq 1$ Y - - - $a_1+\ldots+a_N=1)$

PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [7]

PROPOSICIÓN 6.9. SEA K UN SUBCONJUNTO CONVEXO DE UN ESPACIO-VECTORIAL TOPOLÓGICO E. ENTONCES $\overline{K}$ ES CONVEXO.

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS QUE $x_0, y_0\in\overline{K}$ Y $0\leq a\leq 1$. CONSIDEREMOS LA FUNCIÓN-CONTINUA $f(x,y)=(1-a)x+ay$. SEA U CUALQUIER VECINDAD DE - - - $(1-a)x_0+ay_0$, SI DEMOSTRAMOS QUE U CONTIENE PUNTOS DE K. SE - SEGUIRÁ QUE $(1-a)x_0+ay_0\in\overline{K}$ Y POR LO TANTO $\overline{K}$ ES CONVEXO.
YA QUE F ES CONTINUA, EXISTEN VECINDADES V Y W DE x_0, y_0 EN E RESPECTIVAMENTE TALES QUE $f(x,y)\in U$ SI $x\in V$ Y $y\in W$ YA QUE -- $x_0\in\overline{K}$, ENTONCES V CONTIENE ALGÚN PUNTO $x_1\in K$; DE LA MISMA MANERA W CONTIENE ALGÚN PUNTO $y_1\in K$, DE ESTE MODO, YA QUE K ES CONVEXO, ENTONCES $f(x_1,y_1)\in K$, PERO $f(x_1,y_1)\in U$ TAMBIÉN, POR LO TANTO $\overline{K}$ ES CONVEXO.

PROPOSICIÓN 6.10. SEAN $A_1\ldots A_N$ SUBCONJUNTOS COMPACTOS Y CONVEXOS DE UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO E Y SEA $A=\bigcup_{i=1}^{N} A_i$. ENTONCES $Co(A)$ ES COMPACTO.

DEMOSTRACIÓN:

POR LA PROPOSICIÓN 6.8 SABEMOS QUE CUALQUIER ELEMENTO DE --- $Co(A)$ ES DE LA FORMA $a_1x_1+\ldots+a_Nx_N;\ x_i\in A_i,\ 0\leq a_i\leq 1$ Y - - - $a_1+\ldots+a_N=1$. SEA P EL SUBCONJUNTO COMPACTO DE $L^2(N)$ (VER [16] con $a_i \geqslant 0$ y $a_1+\dots+a_n=1$. Observemos que Co(A) es la imagen del Producto Cartesiano de $P\times A_1\times\dots\times A_n$ por el operador continuo $T(a_1\dots a_n, x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$, entonces por el teorema de Tychonoff (ver [6]) sabemos que $P\times A_1\times\dots\times A_n$ es compacto, y por ser T continua se sigue que Co(A) es compacto.

Proposición 6.11. Sea A un subconjunto abierto de un espacio vectorial topológico E. Entonces Co(A) es también abierto.

Demostración:

Sea $x \in Co(A)$, entonces $x=a_1x_1+\dots+a_nx_n$; $x_i \in A$ y $0\leq a_i\leq 1$ y $a_1+\dots+a_n=1$ por la proposición 6.6. Ya que A es abierto, existen vecindades V_i de x_i tales que $V_i\subset A$, $i=1,\dots,n$.

Sea $T=a_1B_1+\dots+a_nV_n$, es decir, el conjunto de todos los elementos de la forma $a_1v_1+\dots+a_nv_n$; $v_i \in V_i$, claramente $x \in T\subset Co(A)$. Entonces lo único que necesitamos es demostrar que T es abierto. Pero por las observaciones hechas al definir espacio vectorial topológico sabemos que a_iV_i es abierto y que $a_iV_i+a_jV_j$ es abierto, de donde T es abierto. Por lo tanto Co(A) es abierto.

Proposición 6.12. Sea K un conjunto convexo en un espacio vectorial E. Supongamos que $x_0 \in Int(K)$ y $y_0 \in \bar{K}$. Entonces, cada punto y de la forma $y=ax_0+(1-a)y_0$, $0\leq a\leq 1$, es punto interior de K.

Demostración:

SEA Y UN PUNTO DE LA FORMA $Y=AX_0+(1-A)Y_0$ Y F LA HOMOTECIA DE CENTRO EN Y Y RAZÓN $L<0$ QUE TRANSFORMA X_0 EN Y_0; SI V ES UNA VECINDAD ABIERTA DE X_0 CONTENIDA EN K, ENTONCES $F(V)$ ES UNA VECINDAD DE Y_0, POR LO TANTO CONTIENE UN PUNTO $F(Z)\in A$; SE TIENE $F(Z)-Y=L(Z-Y)=L(Z-F(Z))+L(F(Z)-Y)$, DE DONDE $Y-F(Z)=\frac{L}{L-1}(Z-F(Z))$, DE ESA MANERA Y ES LA IMAGEN DE Z POR LA HOMOTECIA G DE CENTRO $F(Z)$ Y DE RAZÓN $U=\frac{L}{L-1}$; COMO $0<U<1$, G TRANSFORMA A V EN UNA VECINDAD DE Y CONTENIDA EN K. POR LO TANTO Y ES PUNTO INTERIOR DE K.

PROPOSICIÓN 6.13. SEA K UN CONJUNTO CONVEXO EN UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO E. ENTONCES $\mathrm{INT}(K)$ ES CONVEXO. SI $\mathrm{INT}(K)\neq\emptyset$, ENTONCES $\overline{\mathrm{INT}(K)}=\overline{K}$ E $\mathrm{INT}(K)=\mathrm{INT}(\overline{K})$.

DEMOSTRACIÓN:

TOMEMOS LA ENVOLVENTE CONVEXA DE $\mathrm{INT}(K)$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 6.11, SE SIGUE QUE ES ABIERTO EN E, PERO $\mathrm{Co}(\mathrm{INT}(K))\subset K$ POR SER K CONVEXO, ENTONCES $\mathrm{Co}(\mathrm{INT}(K))=\mathrm{INT}(K)$. POR LO TANTO $\mathrm{INT}(K)$ ES CONVEXO.

SI $\mathrm{INT}(K)\neq\emptyset$, YA QUE $\mathrm{INT}(K)\subset K$, SE SIGUE QUE $\overline{\mathrm{INT}(K)}\subset\overline{K}$. PARA LA OTRA CONTENCIÓN TOMEMOS $X\in\overline{K}$ Y $X_0\in\mathrm{INT}(K)$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 6.12 SE SIGUE QUE $X\in\overline{\mathrm{INT}(K)}$. POR LO TANTO $\overline{\mathrm{INT}(K)}=\overline{K}$.

DEFINICIÓN 6.14. UN SUBCONJUNTO A DE UN ESPACIO VECTORIAL E ES BALANCEADO SI $aA\subset A$ PARA TODA $a\in R$ TAL QUE $|a|\leq 1$.

POR LA DEFINICIÓN DE QUE A SEA CONJUNTO BALANCEADO SE TIENE QUE $A=-A$ Y $\theta\in A$.

Proposición 6.15. Si E es un espacio vectorial entonces:

I) Si A es un subconjunto balanceado de E y $a \in R$ entonces aA es un subconjunto balanceado de E.

II) Si F es una familia de subconjuntos balanceados de E - entonces $G = \bigcap_{A \in F} A$ es un subconjunto balanceado de E.

III) Si A y B son subconjuntos balanceados de E entonces - $A+B$ es un subconjunto balanceado de E.

Demostración:

I) Sea $x \in aA$, entonces existe $x' \in A$ tal que $x = ax'$. Si ---- $c \in R$ tal que $|c| \leq 1$ entonces $c(ax) = a(cx) \in aA$ por ser A- balanceado. Por lo tanto aA es balanceado.

II) Sea $x \in G$ entonces $x \in A$ para toda $A \in F$. Si $a \in R$ tal que $|a| \leq 1$ entonces $ax \in A$ para toda $A \in F$ por ser A balan-- ceado, se sigue que $ax \in G$. Por lo tanto G es balancea- do.

III) Se demuestra de manera análoga.

Definición 6.16. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio vectorial E. Se dirá que A absorbe a B si existe L_0 tal -- que B LA para toda $L \in R$ tal que $|L| \geq L_0$.

Definición 6.17. Sea A un subconjunto de un espacio vecto- rial E. Se dirá que A es un subconjunto absorbente de E si A absorbe a cada elemento x de E.

Definición 6.18. Un subconjunto A de un espacio vectorial- E es radial a x_0 si $A - x_0$ es un subconjunto absorbente de E. (También se dice que x_0 es punto radial de A).

Proposición 6.19. Sean A y B dos subconjuntos absorbentes de un espacio vectorial E y $a \in R$ y $a \neq 0$. Entonces:

i) aA es un subconjunto absorbente de E.

ii) $A \cap B$ es un subconjunto absorbente de E.

iii) $A+B$ es un subconjunto absorbente de E.

Demostración:

i) Sea $x \in E$. Ya que A es absorbente, existe $l_0 > 0$ tal que $x \in lA$ para toda $l \in R$ tal que $|l| \geq l_0$. Entonces tomemos $l_0' = |a| l_0$ se sigue que $x \in l(aA)$ para toda l tal que $|l| \geq |a| l_0$.

ii) Sea $x \in E$. Ya que A y B son absorbentes, existen $l_0 > 0$ y $u_0 > 0$ tales que $x \in lA$ y $x \in uB$ para toda l y $u \in R$ tales que $|l| \geq l_0$ y $|u| \geq u_0$, Sea $r_0 = \max(l_0, u_0)$ entonces se sigue que $x \in r(A \cap B) = rA \cap rB$ para toda $r \in R$ tal que $|r| \geq r_0$.

iii) Se demuestra de manera análoga.

Definición 6.20. Sea U un subconjunto absorbente de un espacio vectorial E. Entonces una función real p, definida en todo el espacio vectorial E como sigue:

$p(x) = \inf(a > 0 | x \in aU)$, se llama la funcional de Minkowski de U.

Proposición 6.21. Sea U un subconjunto convexo y absorbente de un espacio vectorial E y sea p la funcional de Minkowski de U. Entonces:

i) $p(x) \geq 0$

ii) $p(x) < \infty$

iii) $p(ax) = ap(x)$ si $a > 0$

IV) $P(X+Y) \leq P(X)+P(Y)$

V) SI U ES BALANCEADO ENTONCES $P(AX)=|A|P(X)$ PARA TODA A R Y $A \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN:

I) $P(X) \geqslant 0$ POR DEFINICIÓN DE P.

II) YA QUE U ES ABSORBENTE; PARA CADA X EXISTE $L_0 > 0$ TAL QUE $X \in LU$ PARA TODA $L \in R$ TAL QUE $|L| \geqslant L_0$. ENTONCES $P(X) \leq L_0$

III) PARA $X \in E$ FIJA, SEA $A_X = (B \geqslant 0 | X \in BU)$. SI $A > 0$ Y $B \in A_X$, ENTONCES $X \in BU$, $AX \in ABU$ Y $AB \in A_{AX}$, ENTONCES $P(AX) \leq AB$. PERO YA QUE B ES ARBITRARIA EN A_X SE PUEDE CONCLUÍR QUE $P(AX) \leq AP(X)$. PARA LA OTRA DESIGUALDAD TOMEMOS $B \in A_{AX}$, ENTONCES $AX \in BU$, $X \in \frac{B}{A}U$ Y $\frac{B}{A} \in A_X$, ENTONCES $P(X) \leq \frac{B}{A}$. YA QUE B ES ARBITRARIA EN A_{AX} SE TIENE QUE $P(X) \leq \frac{P(AX)}{A}$. POR LO TANTO $P(X) = AP(X)$.

IV) SEAN $X, Y \in E$ Y $L, U \in R$ TALES QUE $L > 0$ Y $U > 0$, SUPONGAMOS QUE $L^{-1}X$ Y $U^{-1}Y$ ESTÁN EN U, ENTONCES $(L+U)^{-1}(X+Y) = L(L+U)^{-1}(L^{-1}X) + U(L+U)^{-1}(U^{-1}Y)$ PERTENECE A U POR SER U CONVEXO, ENTONCES $P(X+Y) \leq L+U$. TOMANDO EL MÍNIMO SOBRE TODAS LAS L Y U ADMISIBLES OBTENEMOS $P(X+Y) \leq P(X)+P(Y)$.

V) SEAN $X \in E$, $A \neq 0$ Y $B \in A_X$. ENTONCES $X \in BU$, $\frac{AX}{|A||B|} \in U$, POR LO TANTO $AX \in |A|BU$, ENTONCES $P(AX) \leq |A|B$ Y $P(AX) \leq |A|P(X)$ POR SER B ARBITRARIA EN A_X. PARA LA OTRA DESIGUALDAD, TOMEMOS $B \in A_{AX}$, ENTONCES $AX \in BU$, $\frac{A}{B}X \in U$, $\frac{|A|A}{AB}X \in U$, $\frac{|A|}{B}X \in U$, Y $P(X) \leq \frac{B}{|A|}$. YA QUE B ES ARBITRARIA EN A_{AX} SE TIENE QUE $P(X) \leq \frac{P(AX)}{|A|}$. POR LO TANTO $P(AX) = |A|P(X)$.

PROPOSICIÓN 6.22. SEA U UN SUBCONJUNTO CONVEXO Y ABSORBENTE DE UN ESPACIO VECTORIAL E. SEA p LA FUNCIONAL DE MINKOWSKI DE U. ENTONCES $p(x)\leq 1$ SI $x\in U$ Y SI $p(x)<1$ ENTONCES $x\in U$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $x\in U$, ENTONCES $x\in 1U$ Y $p(x)\leq 1$. SI $p(x)<1$, EXISTE β -- TAL QUE $0<\beta<1$ Y $\frac{x}{\beta}\in U$. YA QUE θ Y $\beta^{-1}x$ ESTÁN EN U Y U ES - CONVEXO, ENTONCES $\beta\beta^{-1}x+(1-\beta)\theta=x$, QUE ESTÁ EN U.

PROPOSICIÓN 6.23. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO Y - SEA p LA FUNCIONAL DE MINKOWSKI DE UN SUBCONJUNTO CONVEXO Y ABSORBENTE U DE E. SEAN $U_1=(x\in E|p(x)<1)$ Y $U_2=(x\in E|p(x)\leq 1)$. ENTONCES:

I) $\text{Int}(U)\subset U_1\subset U\subset U_2\subset \bar{U}$

II) $U=U_1$, SI U ES ABIERTO

III) $U=U_2$, SI U ES CERRADO

IV) SI p ES CONTINUA, ENTONCES $U_1=\text{Int}(U)\subset U_2=\bar{U}$

V) p ES CONTINUA SI Y SOLO SI $\theta\in\text{Int}(U)$.

DEMOSTRACIÓN:

I) SUPONGAMOS QUE $x\in\text{Int}(U)$. ENTONCES $\beta x\in U$ PARA β SUFICIENTEMENTE CERCA DE 1, SE SIGUE QUE SE PUEDE ENCONTRAR ALGUNA-$\beta>1$, TAL QUE $\beta x\in U$. ENTONCES $x\in\beta^{-1}U$ Y $p(x)\leq\beta^{-1}<1$ Y POR - LA PROPOSICIÓN 6.22 $x\in U$ Y ADEMÁS $U_1\subset U\subset U_2$.

PARA PROBAR QUE $U_2\subset\bar{U}$ ES SUFICIENTE CONSIDERAR UNA x PARA - LA CUAL $p(x)=1$, ENTONCES $\beta x\in U_1\subset U$ SI $0<\beta<1$. TOMANDO EL-LÍMITE $\beta\to 1$, VEMOS QUE $\beta x\to x$ Y SE SIGUE QUE $x\in\bar{U}$.

II) SUPONGAMOS QUE U ES ABIERTO, ENTONCES POR I) TENEMOS -- QUE $U=\text{Int}(U)\subset U_1\subset U$.

III) SUPONGAMOS QUE U ES CERRADO, ENTONCES POR I) TENEMOS - QUE $U\subset U_2\subset \overline{U}=U$.

IV) SI P ES CONTINUA $p^{-1}((-1,1))$ ES ABIERTO EN E; QUE ES U_1, ENTONCES POR I) SE TIENE QUE $U_1=\mathrm{INT}(U)$, $p^{-1}(-1,1.)$ ES CERRADO EN E Y ES IGUAL A U_2, ENTONCES POR I) SE TIENE QUE $U_2=\overline{U}$.

V) OBSERVAMOS QUE $\theta\in U$, SI P ES CONTINUA, POR IV) SE TIENE- QUE $U_1=\mathrm{INT}(U)$, POR LO TANTO $\theta\in \mathrm{INT}(U)$. SI $\theta\in \mathrm{INT}(U)$, SEA -- $W\in N_\theta$ TAL QUE $W\subset \mathrm{INT}(U)$. ENTONCES $p(x)<1$ SI $x\in W$. DADA $\varepsilon>0$, ENTONCES εW ES UNA VECINDAD DE θ Y TENEMOS QUE $p(x)<\varepsilon$ SI- $x\in \varepsilon U$ PORQUE $\varepsilon^{-1}x\in U$.

S E C C I O N 7.

ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS LOCALMENTE CONVEXOS Y TEOREMAS DE SEPARACION.

Definición 7.1. Un espacio vectorial topológico es llamado localmente convexo si cada vecindad de θ contiene una vecindad de θ que es convexa.

Definición 7.2. Una semi-norma es una función $\|\ \|$ de un espacio vectorial E en los reales que cumple con las siguientes condiciones:

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ para toda $a \in R$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Observamos de esta definición que $\|\theta\| = 0$ y que además puede existir alguna x en E tal que $x \neq 0$ y $\|x\| = 0$.

También observamos que la funcional de Minkowski de un subconjunto U convexo, balanceado y absorbente de E es una semi-norma.

Proposición 7.3. Sea E un espacio vectorial y U una familia de subconjuntos de E no vacíos que satisfacen las siguientes condiciones:

i) Cada miembro de U es balanceado, convexo y absorbente.

ii) Si $V \in U$, existe alguna $a \in R$ tal que $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ y $aV \in U$.

iii) Si V y $W \in U$, existe $Q \in U$ tal que $Q \subset V \cap W$.

iv) Si $V \in U$ y $x \in V$, existe $W \in U$ tal que $x + W \subset V$.

Entonces existe una única topología para E que hace a E un-

ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO LOCALMENTE CONVEXO TENIENDO A U COMO BASE DE 0.

DEMOSTRACIÓN:

DE ACUERDO CON LA PROPOSICIÓN 2.3 Y CON LA HIPÓTESIS QUE TENEMOS, LO ÚNICO QUE NOS HACE FALTA VER PARA QUE E SEA UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO ES QUE, PARA CADA $V \in U$ EXISTE W TAL QUE $W+W \subset V$. POR LA CONDICIÓN II) PARA CADA $V \in U$ EXISTE $A \in R$ TAL QUE $0 \leq A \leq \frac{1}{2}$ Y $AV \in U$. ENTONCES $AV+AV \subset 2AV \subset V$. POR SER $2A \leq 1$ Y V BALANCEADO.

PROPOSICIÓN 7.4. SEA P UNA FAMILIA DE SEMI-NORMAS DEFINIDAS SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL E. PARA CADA $P \in P$ SEA $V(P)=(X \in E | P(X)<1)$. DENOTEMOS POR U A LA FAMILIA DE TODAS LAS INTERSECCIONES FINITAS $R_1V(P_1) \cap \ldots \cap R_NV(P_N)$; $R_N > 0$, $P_N \in P$. ENTONCES U CUMPLE CON LAS CONDICIONES DE LA HIPÓTESIS DE LA PROPOSICIÓN 7.3.

DEMOSTRACIÓN:

I) V(P) ES BALANCEADO, ABSORBENTE, CONVEXO.

BALANCEADO. SEA $X \in V(P)$ Y $A \in R$ TAL QUE $|A| \leq 1$, ENTONCES $P(AX)=|A|P(X)<|A|\leq 1$ Y $AX \in V(P)$.

ABSORBENTE. SEA $X \in E$, TOMEMOS L TAL QUE $|L|>P(X)$, SE SIGUE QUE $X \in LV(P)$.

CONVEXO. SEAN $X,Y \in V(P)$, SI $0 \leq A \leq 1$, ENTONCES $AX+(1-A)Y \in V(P)$ PORQUE $P(AX+(1-A)Y) \leq AP(X)+(1-A)P(Y) < A+(1-A)=1$.

POR LAS PROPOSICIONES 6.2, 6.4, 6.15 Y 6.19 SE SIGUE QUE $R_1V(P_1) \cap \ldots \cap R_NV(P_N)$; $R_N > 0$ Y $P_N \in P$ SON BALANCEADOS, ABSORBENTES Y CONVEXOS.

II) SI $W=R_1V(P_1) \cap \ldots \cap R_NV(P_N)$, ENTONCES PARA CUALQUIER $A \in R$

TAL QUE $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ SE TIENE QUE $aW = aR_1 V(P_1) \cap \ldots \cap aR_N V(P_N)$. POR LO TANTO $aW \in U$.

III) SEAN $W = R_1 V(P_1) \cap \ldots \cap R_N V(P_N)$ Y $S = S_1 V(Q_1) \cap \ldots \cap S_M V(Q_M)$; $R_N, S_N > 0$ Y $P_N, Q_N \in P$. TOMEMOS $Q = W \cap S = R_1 V(P_1) \cap \ldots \cap R_N V(P_N) \cap S_1 V(Q_1) \cap \ldots \cap S_M V(Q_M)$. POR LO TANTO $Q \in U$.

IV) SEA $V = R_1 V(P_1) \cap \ldots \cap R_N V(P_N)$; $R_N > 0$ Y $P_N \in P$ Y SEA $x \in V$, ENTONCES TOMEMOS $W = A_1 V(P_1) \cap \ldots \cap A_N V(P_N)$; DONDE $A_N = R_N - P_N(x)$, ENTONCES $W \in U$ Y $W + x \subset V$.

LA TOPOLOGÍA PARA E GENERADA POR LA FAMILIA U, ES LLAMADA LA TOPOLOGÍA GENERADA POR LA FAMILIA P DE SEMI-NORMAS EN E.

PROPOSICIÓN 7.5. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO LOCALMENTE CONVEXO. ENTONCES LA TOPOLOGÍA PARA E, ES LA TOPOLOGÍA GENERADA POR LA FAMILIA DE TODAS LAS SEMI-NORMAS CONTINUAS EN E.

PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [16]

PROPOSICIÓN 7.6. SEA X, Y DOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS LOCALMENTE CONVEXOS. SI P ES LA FAMILIA DE SEMI-NORMAS QUE GENERAN LA TOPOLOGÍA DE X, ENTONCES UN OPERADOR T DE X EN Y ES CONTINUO SI Y SOLO SI PARA CADA SEMI-NORMA CONTINUA Q DE Y, EXISTE UN SUBCONJUNTO FINITO DE SEMI-NORMAS (P_I, $I = 1 \ldots N$) DE P Y UN NÚMERO $C > 0$ TALES QUE $Q(Tx) \leq C \sup_{I=1,\ldots,N} (P_I(x))$ PARA TODA $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $U = (y \in Y \mid Q(y) < 1)$; DONDE Q ES UNA SEMI-NORMA CONTINUA DE Y. YA QUE T ES CONTINUA Y P GENERA A LA TOPOLOGÍA DE X, EXISTEN VECINDADES $\varepsilon_I V(P_I)$ TALES QUE $T(\bigcap_{I=1}^{N} \varepsilon_I V(P_I)) \subset U$.

TOMANDO $\varepsilon = \min \varepsilon_i$, LA RELACIÓN $\sup_i (p_i(x)) \leq \varepsilon$ IMPLICA QUE -- $Tx \in U$; DE ESTE MODO $q\, Tx \leq 1$ Y ES CLARO QUE $q(Tx) \leq \varepsilon^{-1} \sup_i (p_i(x))$ PARA TODA $x \in X$.

INVERSAMENTE. SEA V UNA VECINDAD DE θ EN Y ABSORBENTE, CONVEXA Y BALANCEADA, SU FUNCIONAL DE MINKOWSKI q ES CONTINUA- POR LA PROPOSICIÓN 6.23, DE ESTE MODO SI $q(Tx) \leq c \sup_{i=1,\ldots,n} (p_i(x))$; DONDE $c>0$ Y $p_i \in P$, SE SIGUE QUE $T(U) \subset V$ PARA LA VECINDAD DE θ, $U = (x \in X \mid cp_i(x) \leq 1,\ i=1,\ldots,n)$ EN X. POR LO TANTO T ES - CONTINUA.

DEFINICIÓN 7.7. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL Y M, N DOS SUBCONJUNTOS DE E, SE DICE QUE UNA FUNCIONAL LINEAL f SOBRE E SEPARA A M Y N SI EXISTE c TAL QUE $f(M) \geq c$ Y $f(N) \leq c$.

PROPOSICIÓN 7.8. UNA FUNCIONAL LINEAL f SEPARA A DOS CONJUNTOS SI Y SOLO SI SEPARA A $M-N$ Y (θ).

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS QUE f SEPARA A M Y N. ENTONCES EXISTE $c \in R$ TAL - QUE $f(M) \leq c \leq f(N)$, SE SIGUE QUE $f(M)-f(N) \leq 0$, ENTONCES $f(M-N) \leq f(\theta)$, SE SIGUE QUE EXISTE $c' \in R$ TAL QUE $f(M-N) \leq c' \leq f(\theta)$. POR LO TANTO f SEPARA A $M-N$ Y (θ).

INVERSAMENTE. SI f SEPARA A $M-N$ Y (θ), ENTONCES EXISTE c TAL QUE $f(M-N) \leq c \leq f(\theta)$, SE SIGUE QUE $f(M-N) \leq 0$, ENTONCES EXISTE $c' \in R$ TAL QUE $f(M) \leq c' \leq f(N)$. POR LO TANTO f SEPARA A M- Y N.

PROPOSICIÓN 7.9. SEAN M Y N DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS Y AJENOS DE UN ESPACIO VECTORIAL E Y SUPONGAMOS QUE M ES RADIAL- A ALGÚN PUNTO $x \in E$. ENTONCES EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL NO

TRIVIAL QUE SEPARA A M Y N.

DEMOSTRACIÓN:

SEA m UN PUNTO RADIAL DE M, ENTONCES θ ES PUNTO RADIAL DE $M-N$. DE ESTE MODO f SEPARA A M Y N SI Y SOLO SI SEPARA A $M-m$ Y $N-m$($f(m)\leq c\leq f(N)$ SI Y SOLO SI $f(M)-f(m)\leq c-f(m)\leq f(N)-f(m)$).

ENTONCES ES SUFICIENTE SUPONER QUE M ES ABSORBENTE. SEA p CUALQUIER PUNTO DE N, PARA QUE $-p$ SEA PUNTO RADIAL DE $M-N$ Y θ PUNTO RADIAL DE $K=M-N+p$, ES NECESARIO QUE $p\notin K$, PORQUE DE OTRA MANERA NOS IMPLICARÍA QUE M Y N NO SON AJENOS.

YA QUE M ES RADIAL A θ, SE SIGUE QUE $M-p$ ES RADIAL A $-p$, ENTONCES PARA CADA $p\in N$, POR LO TANTO $-p$ ES PUNTO RADIAL DE $M-N$ Y θ DE K.

SEA f_K LA FUNCIONAL DE MIKOWSKI DE K, ENTONCES $f_K(p)\geqslant 1$. SI DEFINIMOS $f_0(ap)=af_K(p)$ ENTONCES f_0 ES UNA FUNCIONAL DEFINIDA SOBRE EL SUBESPACIO GENERADO POR p. AUN MÁS $f_0(ap)\leq f_K(ap)$ PARA TODO REAL a. SI $a>0$, TENEMOS QUE $f_0(ap)=af_K(p)=f_K(ap)$ Y SI $a<0$, $f_0(ap)=af_K(p)<0\leq f_K(ap)$. ENTONCES POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH, f_0 SE PUEDE EXTENDER A UNA FUNCIONAL LINEAL F TAL QUE $F(x)\leq f_K(x)$ PARA TODA $x\in E$. SE SIGUE QUE $F(K)\leq 1$, MIENTRAS QUE $F(p)\geqslant 1$, DE ESTE MODO F SEPARA K Y (p) ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 7.8 SEPARA A $M-N$ Y (θ) Y OTRA VEZ POR LA MISMA PROPOSICIÓN, F SEPARA A M Y N.

PROPOSICIÓN 7.10. SEA f UNA FUNCIONAL LINEAL EN UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO E QUE SEPARA A DOS SUBCONJUNTOS DE E Y UNO DE ELLOS TIENE INTERIOR NO VACÍO.

ENTONCES f ES CONTINUA.

DEMOSTRACIÓN:

SEAN A Y B DOS SUBCONJUNTOS DE E, f UNA FUNCIONAL QUE SEPARA A A Y B, Y p UN PUNTO INTERIOR DE A. SEA N UNA VECINDAD DE θ TAL QUE $p+N\subset A$. ENTONCES $f(N)\subset f(A)-f(p)$ Y $f(N)$ ESTÁ CONTENIDO EN UN INTERVALO $[-a,\infty)$ O $(-\infty,a]$, DONDE $0\leq a<\infty$. SEA $M=N\cap(-N)$, ENTONCES $M=-M$ Y M ES UNA VECINDAD DE θ TAL QUE $f(M)$ ESTÁ CONTENIDA EN EL INTERVALO $[-a,a]$. EN ESTE CASO $f(\varepsilon a^{-1}M)$ ESTÁ CONTENIDA EN EL INTERVALO $[-\varepsilon,\varepsilon]$. YA QUE $\varepsilon a^{-1}M$ ES UNA VECINDAD DE θ. POR LO TANTO f ES CONTINUA.

PROPOSICIÓN 7.11. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO. CUALQUIER PAREJA DE SUBCONJUNTOS CONVEXOS Y AJENOS TALES QUE AL MENOS UNO DE ELLOS TENGA INTERIOR NO VACÍO PUEDEN SER SEPARADOS POR UNA FUNCIONAL LINEAL CONTINUA EN E.

DEMOSTRACIÓN:

TODO PUNTO INTERIOR DE UN CONJUNTO A ES PUNTO RADIAL DE ÉL, ENTONCES POR LAS PROPOSICIONES 7.9 Y 7.10 EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL CONTINUA f QUE SEPARA A DICHOS CONJUNTOS.

PROPOSICIÓN 7.12. SEAN K, Q DOS CONJUNTOS CONVEXOS, CERRADOS Y AJENOS DE UN ESPACIO VECTORIAL LOCALMENTE CONVEXO, E. SI K ES COMPACTO, ENTONCES EXISTEN CONSTANTES $c,\varepsilon>0$ Y UNA FUNCIONAL LINEAL f CONTINUA SOBRE E TALES QUE $f(Q)\leq c-\varepsilon\leq c\leq f(K)$.

DEMOSTRACIÓN:

EL CONJUNTO K-Q ES CERRADO (VER [5]) Y CONVEXO QUE NO CONTIENE A θ, ENTONCES EXISTE UNA VECINDAD U, CONVEXA DE θ, TAL -

QUE $U\cap(K-Q)=\emptyset$. ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 7.11, EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL F CONTINUA NO TRIVIAL QUE SEPARA A U Y $K-Q$. ENTONCES EXISTE UNA CONSTANTE D TAL QUE $F(K-Q)\geq D$ Y $F(U)\leq D$. YA QUE F ES NO TRIVIAL, EXISTE $X\in E$ TAL QUE $F(X)=1$. SE SIGUE QUE $F(AX)=A$, POR OTRO LADO SE TIENE QUE, $AX\in U$ PARA $A\in R$ SUFICIENTEMENTE PEQUEÑA; DE ESTE MODO EXISTE $\varepsilon>0$ TAL QUE --- $F(U)<\varepsilon$. SE SIGUE QUE $F(K)-F(Q)=F(K-Q)\geq D\geq\varepsilon$ Y $F(K)\geq F(Q)+\varepsilon$; ES DECIR CUALQUIER NÚMERO EN $F(K)$ DEBE SER MAYOR A CUALQUIER NÚMERO DE $F(Q)$ AL MENOS POR ε. ENTONCES $F(K)\geq \text{INF } F(K)\geq F(Q)+\varepsilon$. POR LO TANTO $F(K)\geq C>C-\varepsilon\geq F(Q)$; DONDE $C=\text{INF}(F(K))$.

COROLARIO 1. SEA K UN CONJUNTO CONVEXO Y CERRADO DE UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO LOCALMENTE CONVEXO. SI $P\notin K$, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL CONTINUA QUE SEPARA A K Y - (P), ES DECIR, $F(K)\neq F(P)$.

COROLARIO 2. SEAN P Y Q DOS PUNTOS DISTINTOS EN UN ESPACIO-VECTORIAL TOPOLÓGICO LOCALMENTE CONVEXO. ENTONCES EXISTE -- UNA FUNCIONAL LINEAL CONTINUA QUE SEPARA A P Y Q; ES DECIR- $F(P)\neq F(Q)$.

SECCION 8.

TOPOLOGIA DEBIL DE E Y LA TOPOLOGIA DEBIL DE E'.

ANTES DE HABLAR DE LAS TOPOLOGÍAS DÉBILES DE E Y E', HABLAREMOS DE LA INMERSIÓN DE E (ESPACIO VECTORIAL NORMADO) EN E'' (DUAL DEL DUAL DE E).

PARA CADA X FIJA EN E DEFINIMOS LA FUNCIONAL F_X SOBRE E' DE LA SIGUIENTE MANERA: $F_X(F)=F(X)$, $F\in E'$. VEAMOS QUE F_X ES UNA FUNCIONAL LINEAL CONTINUA SOBRE E. PARA ESO:

$F_X(F_1+F_2)=(F_1+F_2)(X)=F_1(X)+F_2(X)=F_X(F_1)+F_X(F_2)$, $F_X(LF_1)=(LF_1)(X)=LF_1(X)=LF_X(F_1)$ Y $|F_X(F)|=|F(X)|\leq ||X||\,||F||$, ENTONCES $||F_X||\leq ||X||$ Y POR LA PROPOSICIÓN 3.6 F_X ES CONTINUA, AÚN MÁS $||F_X||=||X||$; POR EL COROLARIO 1 DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH, EXISTE F_0 TAL QUE $F_0(X)=||X||$ Y $||F_0||=1$, ENTONCES PARA ESA FUNCIONAL LINEAL TENEMOS QUE $|F_X(F_0)|=|F_0(X)|=||F_0||\,||X||=||X||$ Y SE SIGUE QUE $||F_X||\geqslant ||X||$.

TAMBIÉN $F_{X_1+X_2}(F)=F(X_1+X_2)=F(X_1)+F(X_2)=F_{X_1}(F)+F_{X_2}(F)$ Y $F_{LX}(F)=F(LX)=LF(X)=LF_X$, ENTONCES A CADA $X\in E$ LE PUEDO ASOCIAR UNA $F\in E''$, ES DECIR EXISTE $\delta: X\to F_X$, LINEAL, INYECTIVA Y CONTINUA PORQUE $||F_X||=||X||$. POR ESA INMERSIÓN DE E EN E'' PODEMOS PENSAR A LAS $X\in E$ COMO FUNCIONALES LINEALES CONTINUAS SOBRE E'.

DEFINICIÓN 8.1. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. DENOTEMOS POR $\sigma(E,E')$ A LA MÍNIMA TOPOLOGÍA PARA LA CUAL TODAS LAS FUNCIONALES $F\in E'$ SON CONTINUAS SOBRE E.

OBSERVAMOS DE ESTA DEFINICIÓN QUE LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ ES MÁS DÉBIL QUE LA TOPOLOGÍA DE LA NORMA DE E, POR ESO ES LLA

MADA LA TOPOLOGÍA DÉBIL DE E Y ADEMÁS QUE LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ TIENE COMO SUB-BASE A LA COLECCIÓN DE $F^{-1}(O)$; $F \in E'$ Y O ES ABIERTO EN R.

DEFINICIÓN 8.2. SEA E' EL DUAL DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO E. DENOTEMOS POR $\sigma(E',E)$, A LA MÍNIMA TOPOLOGÍA PARA E', TAL QUE CADA $x \in E$ DA LUGAR A UNA FUNCIONAL CONTINUA F_x SOBRE E'.

A ESTA TOPOLOGÍA SE LE LLAMA LA TOPOLOGÍA DÉBIL* DE E'.

PROPOSICIÓN 8.3. LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ DE E ES LA MISMA QUE LA GENERADA POR LA SIGUIENTE COLECCIÓN B FORMADA POR TODOS LOS CONJUNTOS $V(A,\varepsilon)=(x \in E \mid |F(x)|<\varepsilon$, PARA CADA $F \in A)$, DONDE A ES FINITO. AÚN MÁS, LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ ES LOCALMENTE CONVEXA Y DE HAUSDORFF.

DEMOSTRACIÓN:

PRIMERO VAMOS A DEMOSTRAR QUE LA COLECCIÓN B GENERA UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO. PROBAREMOS QUE SATISFACE LAS HIPÓTESIS DE LA PROPOSICIÓN 7.3.

I) $V(A,\varepsilon)$ ES CONVEXO, BALANCEADO Y ABSORBENTE.

CONVEXO. SEA $x,y \in V(A,\varepsilon)$, SI $0 \leq a \leq 1$ ENTONCES $ax+(1-a)y \in V(A,\varepsilon)$ PORQUE $|F(ax+(1-a)y)| \leq a|F(x)|+(1-a)|F(y)| < (a+(1-a))\varepsilon = \varepsilon$ PARA TODA $F \in A$.

BALANCEADO. SEA $x \in V(A,\varepsilon)$, SEA $a \in R$ TAL QUE $|a| \leq 1$, ENTONCES $ax \in V(A,\varepsilon)$ PORQUE $|F(ax)|=|a||F(x)|<|a|\varepsilon \leq \varepsilon$ PARA TODA $F \in A$.

ABSORBENTE. SEA $x \in E$, SEA $L_0=\frac{1}{\varepsilon}\sup_{F \in A}\|F\|$ ENTONCES $x \in LV(A,\varepsilon)$ PARA $|L| \geq L_0$.

ii) Sea $a \in R$ tal que $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ entonces $aV(A,\varepsilon)=V(A,a\varepsilon)$.

iii) Tomemos como $Q=V(A_1 \cup A_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, por lo tanto $Q \in B, Q \subset V(A_1,\varepsilon_1) \cap V(A_2,\varepsilon_2)$.

iv) Para cada $x \in V(A,\varepsilon)$, sea $\delta = \sup_{f \in A} |f(x)|$; se tiene que $0 \leq \delta < \varepsilon$. Entonces $x+V(A,\varepsilon-\delta) \subset V(A,\varepsilon)$.

Por lo tanto B genera un espacio topológico localmente convexo. Además es de Hausdorff ya que $\bigcap_{V \in B} V(A,\varepsilon)=(\theta)$ porque, para cada $x \in E$ existe una funcional lineal continua tal que $f(x)=||x||$. Por último vamos a demostrar que coinciden las topologías.

Sea $V(A,\varepsilon) \in B$ entonces $V(A,\varepsilon)$ es abierto en $\sigma(E,E')$ ya que $V(A,\varepsilon)=\bigcap_{f \in A} f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$. Sea U una vecindad de θ en $\sigma(E,E')$ entonces existe $W \in \sigma(E,E')$ tal que $W=\bigcap_{i=1}^{N} f_i^{-1}(O_i)$ donde $O_i=(-\varepsilon_i,\varepsilon_i)$ y $f_i \in E'$, $\theta \in W \subset U$, sea $\varepsilon=\min(\varepsilon_i)$ entonces $\theta \in V(A,\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{N} f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset U$, donde $A=(f_i)$, $i=1,\ldots,N$.

Por lo tanto coinciden las topologías.

Proposición 8.4. La topología $\sigma(E',E)$ de E' coincide con la topología generada por la colección B formada por todos los conjuntos $V(A,\varepsilon)=(f \in E' \mid |f(x)|<\varepsilon$, para cada $x \in E)$, donde A es finito. Aún más $\sigma(E',E)$ es una topología localmente convexa y de Hausdorff.

La demostración se hace de manera similar de la proposición anterior.

Observamos de las definiciones de las topologías $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E',E)$ que x_n converge debilmente a x ($x_n \xrightarrow{D} x$) si y solo si $f(x_n) \to f(x)$ para toda $f \in E'$ y de manera análoga f_n conver-

GE DÉBILMENTE A F ($F_N \xrightarrow{D^*} F$) SI Y SOLO SI $F_N(X) \to F(X)$ PARA TODA $X \in E$, ENTONCES UNA SUCESIÓN QUE CONVERGE EN NORMA CONVERGE - DÉBILMENTE. TODO CERRADO EN LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ ES CERRADO- EN LA TOPOLOGÍA ORIGINAL DE E Y ANÁLOGAMENTE TODO CERRADO - EN LA TOPOLOGÍA $\sigma(E',E)$ ES CERRADO EN LA TOPOLOGÍA ORIGINAL- DE E'. POR ÚLTIMO PODEMOS CONSIDERAR A E' COMO UN SUBCONJUNTO DEL PRODUCTO TOPOLÓGICO R^E.

PROPOSICIÓN 8.5. SEA $S \subset E'$, ACOTADO CON RESPECTO A LA NORMA- DE E' Y CERRADO RESPECTO A $\sigma(E',E)$. ENTONCES S ES COMPACTO - CON RESPECTO A $\sigma(E',E)$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $C = \sup_{F \in S} \|F\|$. PARA CADA $X \in E$ TOMEMOS $A_X = (A \in R \mid |A| \leq C\|X\|)$ Y $A = \prod_{X \in E} A_X$ (PRODUCTO CARTESIANO). POR EL TEOREMA DE TYCHONOFF (VER[6]) A ES COMPACTO POR SER A_X UN SUBCONJUNTO CERRADO Y - ACOTADO DE R. SEA $F \in S$, ENTONCES PARA CADA $X \in E$, TENEMOS QUE $\|F(X)\| \leq \|F\|\|X\| \leq C\|X\|$ Y $F \in A$ (CONSIDERANDO A E' SUMERGIDO EN $\prod_{X \in E} R$ CON LA TOPOLOGÍA DEL PRODUCTO). PARA PROBAR --- NUESTRA PROPOSICIÓN ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE S ES CERRADO EN A. SUPONGAMOS QUE F ES UN ELEMENTO DE LA CERRADURA DE S - EN A. CONSIDEREMOS CUALQUIER $\varepsilon > 0$ Y CUALESQUIERA $X, Y \in E$, EL CONJUNTO DE TODAS LAS $G \in A$ TALES QUE $|G(X)-F(X)| < \varepsilon$, $|G(Y)-F(Y)| < \varepsilon$ Y $|G(X+Y)-F(X+Y)| < \varepsilon$, ES UNA VECINDAD DE F EN A. -- ESTA VECINDAD CONTIENE UN PUNTO $H \in S$. YA QUE H ES UNA FUNCIONAL LINEAL TENEMOS QUE $|F(X+Y)-F(X)-F(Y)| \leq |F(X+Y)-H(X+Y)| + |H(X)-F(X)| + |H(Y)-F(Y)| < 3\varepsilon$, SE SIGUE QUE $F(X+Y) = F(X)+F(Y)$, TAMBIÉN TOMEMOS EL CONJUNTO DE TODAS LAS $G \in A$, PARA LAS CUA-

LES $|G(x)-F(x)|<\varepsilon$ Y $|G(Bx)-F(Bx)|<\varepsilon$, PARA B FIJA, EN R ESTA ES UNA VECINDAD DE F EN A, ESTA VECINDAD CONTIENE UN PUNTO $W\in S$. YA QUE W ES UNA FUNCIONAL LINEAL TENEMOS QUE $|F(Bx)-BF(x)|\leq |F(Bx)-W(Bx)|+|BF(x)-BW(x)|<(1+|B|)\varepsilon$, SE SIGUE QUE $F(Bx)=BF(x)$, POR LO TANTO F ES LINEAL. SABEMOS QUE $F(x)\in A_X$, IMPLICA QUE $|F(x)|\leq C||x||$, PARA TODA $x\in E$, $F\in E'$ Y $F\in S$ POR SER S CERRADO EN LA TOPOLOGÍA $\sigma(E',E)$ DE E'. POR LO TANTO S ES COMPACTO.

COROLARIO 8.6. $U'=(f\in E'$ TAL QUE $|f|\leq 1)$ ES COMPACTO.

DEMOSTRACIÓN:

U' ES ACOTADO EN NORMA POR DEFINICIÓN Y U' ES CERRADO EN $\sigma(E',E)$ YA QUE SI $f_N \xrightarrow{D^*} f$, ENTONCES $f\in U'$ PORQUE PARA CADA X, SE TIENE QUE $|f_N(x)|\leq 1$. POR LO TANTO U' ES COMPACTO EN $\sigma(E',E)$.

S E C C I O N 9.

POLOS Y POLARES.

DEFINICIÓN 9.1. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO, PARA UN SUBCONJUNTO A DE E, EL CONJUNTO POLAR O SIMPLEMENTE POLAR DE A, ESTÁ DEFINIDO COMO $A^{o}=(f\in E'|f(x)\leq 1$ PARA TODA $x\in A)$. PARA UN SUBCONJUNTO A DE E' EL CONJUNTO POLAR DE A SE DEFINE COMO $A^{o}=(x\in E|f(x)\leq 1$ PARA TODA $f\in A)$.

PROPOSICIÓN 9.2. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO Y A UN SUBCONJUNTO CUALQUIERA DE E. ENTONCES:

I) $A^{o}=\bigcap((x)^{o}|x\in A)$

II) A^{o} ES CONVEXO, CONTIENE AL CERO Y ES CERRADO CON RESPECTO A LA TOPOLOGÍA $o(E',E)$ DE E'.

III) $A\subset A^{oo}$

IV) PARA CUALQUIER FAMILIA (A_{i}) DE SUBCONJUNTOS DE E, TENEMOS QUE $(\cup A_{i})^{o}=\cap A_{i}^{o}$

V) PARA $l\in R$ Y $l\neq 0$; $(lA)^{o}=l^{-1}A^{o}$

VI) SI A ES BALANCEADO, ENTONCES A^{o} ES BALANCEADO.

VII) SI $A\subset B$ ENTONCES $B^{o}\subset A^{o}$

VIII) SEA Co(A) DE A, ENTONCES $(Co(A))^{o}=A^{o}$

IX) $(Co(A,B))^{o}=A^{o}\cap B^{o}$

DEMOSTRACIÓN:

I) $f\in A^{o}$ SI Y SOLO SI $f(x)\leq 1$ PARA TODA $x\in A$ SI Y SOLO SI $f\in\bigcap((x)^{o}|x\in A)$

II) $0\in A^{o}$, YA QUE $O(x)=0$ PARA TODA $x\in A$. SEAN $f,g\in A^{o}$, SI $0\leq a\leq 1$, ENTONCES $af+(1-a)g\in A^{o}$ YA QUE $(af+(1-a)g)(x)=af(x)+$

$(1-a)g(x) \leq a+(1-a) \leq 1$ para toda $x \in A$. Sea $(f_n) \subset A^o$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{D^*} f$, entonces $f(x) \leq 1$ para toda $x \in A$ porque $f_n(x) \leq 1$ para $x \in A$, y por la observación a la proposición 8.4, entonces $f \in A^o$ y por lo tanto A^o es cerrado en $\sigma(E',E)$

iii) $A^{oo} = (x \in E \mid f(x) \leq 1$, para toda $f \in A^o)$. Sea $x \in A$, se sigue que $f(x) \leq 1$, para toda $f \in A^o$ por la definición de Polar de A, entonces $A \subset A^{oo}$.

iv) Sea A_i una familia de subconjuntos de E.

$f \cdot (\dot{U} A_i)^o$ si y solo si $f(x) \leq 1$ para toda $x \in \bigcup A_i$ si y solo si $f \in A_i^o$ para toda i si y solo si $f \in \bigcap A_i^o$.

v) Sea $f \in (lA)^o$, entonces $f(x) \leq 1$ para toda $x \in lA$. Para cada $x \in lA$, existe $x' \in A$ tal que $x = lx'$, entonces $f(x) = f(lx') = lf(x') \leq 1$, esto implica que existe $f' \in A^o$ tal que $l^{-1}f = f'$, por lo tanto $(lA)^o \subset l^{-1}A^o$, la otra contención se obtiene en forma obvia.

vi) Sea $f \in A^o$, entonces $f(x) \leq 1$ para toda $x \in A$, ya que A es balanceado para toda $l \in R$, tal que $|l| \leq 1$, se tiene que $lf(x) = f(lx) \leq 1$, entonces A^o es balanceado.

vii) Sean $A \subset B$ y $f \in B^o$, entonces $f(x) \leq 1$, para toda $x \in B$, se sigue que $f \in A^o$ ya que $A \subset B$. Por lo tanto $B^o \subset A^o$.

viii) Ya que $A \subset Co(A)$, se sigue por vii que $Co(A)^o \subset A^o$. Sea $f \in A^o$, ya que cada $x \in Co(A)$ se puede escribir como $l_1x_1 + \ldots + l_nx_n$; x_i A, $0 \leq l_i \leq 1$ y $l_1 + \ldots + l_n = 1$, se tiene que $f(x) = f(l_1x_1 + \ldots + l_nx_n) = l_1f(x_1) + \ldots + l_nf(x_n) \leq l_1 + \ldots + l_n = 1$, entonces $f \in Co(A)^o$, $Co(A)^o \supset A^o$, por lo tanto $Co(A)^o = A^o$.

ix) Sean $A, B \subset E$, por iv) se tiene que $(A \cup B)^o = A^o \cap B^o$ y por viii) se tiene $Co(A,B)^o = A^o \cap B^o$.

Observamos que el teorema es válido para A E'.

Proposición 9.3. Sea E un espacio vectorial normado. Sean f_i, $i=1,\dots,n$ elementos de E' linealmente independientes, entonces existen n elementos $x_i \in E$ linealmente independientes tales que $f_i(x_j)=\delta_{ij}$. $i,j=1,\dots,n$.

Demostración:

Se hará por inducción. Para n=1 es cierta la proposición. Si $n>1$, por hipótesis de inducción existe el conjunto $(\overline{x}_i)$ - para las cuales $f_i(\overline{x}_j)=\delta_{ij}$, $i,j=1,\dots,n-1$. Sea M_N el subespacio generado por los elementos $\overline{x}_i$ y $F_N=(x\in E \mid f_j(x)=0, j=1,\dots,n-1)$. Es claro que $E=F_N \oplus M_N$ y que f_N no puede ser nula sobre F_N porque de otra manera f_N sería combinación lineal de las - f_i, $i=1,\dots,n-1$. Se sigue que debe existir una $x_N \in F_N$ tal que $f_N(x_N)=1$ y definiendo $x_i=\overline{x}_i-f_N(\overline{x}_i)x_N$, obtenemos lo deseado.

Proposición 9.4. Sea E un espacio vectorial normado. Si la - funcional lineal f es $\sigma(E,E')$ continua entonces $f\in E'$.

Demostración:

Por la proposición 7.6, existen $f,\dots,f_N \in E'$ tales que $|f(x)| \leq C \sup|f_i(x)|$ para toda $x\in E$. De este modo f es nula sobre $L=\bigcap f_i^{-1}(0)$. Por otro lado, supongamos que $f_1,\dots,f_R$ son linealmente independientes. Entonces por la proposición 9.3 -- existen $x_1,\dots,x_R \in E$ linealmente independientes tales que -- $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ para $i,j=1,\dots,R$. Entonces E se puede escribir como $E=L\oplus H$, donde H es el subespacio generado por las x_i. Entonces toda $x\in E$ se puede escribir de la siguiente manera --

$x=f_1(x)x_1+\ldots+f_R(x)x_R+l$ DONDE $l\in L$. SE SIGUE QUE $f=f_1+\ldots+f_R$. POR LO TANTO $f\in E'$.

TEOREMA BIPOLAR 9.5. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. SEA $A\subset E$. ENTONCES $A^{oo}=\overline{Co(A,(\theta))}^D$ DONDE $\overline{}^D$ DENOTA LA CERRADURA-DÉBIL.

DEMOSTRACIÓN:

POR LA PROPOSICIÓN 9.2, INCISOS II) Y III) SE TIENE QUE $A^{oo}\supset \overline{Co(A,(\theta))}^D$. SEA $K=\overline{Co(A,(\theta))}^D$. SUPONGAMOS $x\notin K$. YA QUE E CON LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$ ES UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLÓGICO LO-- CALMENTE CONVEXO Y K ES CONVEXO Y CERRADO, ENTONCES POR EL - COROLARIO 1 DE LA PROPOSICIÓN 7.12, EXISTE UNA FUNCIONAL CONTINUA f DEBILMENTE QUE SEPARA A K Y (x) DONDE $f(x)\geq l > l-\varepsilon \geq f(K)$, PARA ALGUNA $l\in R$. YA QUE $\theta\in K$ IMPLICA QUE $l>0$ Y -- QUE EXISTE $a\in R$ TAL QUE $a\,f(K)\leq 1$ Y $a\,f(x)>1$. POR LA PROPOSICIÓN 9.4 $f\in E'$ Y ADEMÁS $x\notin A^{oo}$. POR LO TANTO $A^{oo}=\overline{Co(A,(\theta))}^D$.

PROPOSICIÓN 9.6. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. SI A ES UN SUBCONJUNTO DE E, CERRADO, CONVEXO Y CONTENIENDO AL CERO - DE E ENTONCES A ES CERRADO EN LA TOPOLOGÍA $\sigma(E,E')$.

DEMOSTRACIÓN:

DEMOSTRANDO QUE $A=A^{oo}$ SE OBTIENE LO DESEADO, PERO YA QUE A - ES CERRADO, CONVEXO Y CONTIENE A θ SE TIENE QUE $A^{oo}=A$.

PROPOSICIÓN 9.7. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. SI A ES CERRADO EN $\sigma(E',E)$, CONVEXO Y CONTIENE AL CERO DE E'. ENTONCES $A^{oo}=A$.

LA DEMOSTRACIÓN SE HACE DE MANERA ANÁLOGA A LA DE LA PROPOSI

CIÓN 9.6.

PROPOSICIÓN 9.8. SI A Y B SON DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS, CE-- RRADOS Y CONTENIENDO EL CERO DE UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO- E. ENTONCES $(A \cap B)^{o} = \overline{Co(A^{o}, B^{o})}^{D^*}$.

DEMOSTRACIÓN:

POR LA PROPOSICIÓN 9.6 SE TIENE QUE $A^{oo} = A$ Y $B^{oo} = B$ Y POR LA -- PROPOSICIÓN 9.2 SE TIENE QUE $(A^{oo} \cap B^{oo})^{o} = (A^{o} \cup B^{o})^{oo} = \overline{Co(A^{o}, B^{o})}^{D^*}$.

PROPOSICIÓN 9.9. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. SI A Y B SON DOS SUBCONJUNTOS DE E' CONVEXOS, CERRADOS EN $\sigma(E', E)$ Y -- CONTIENEN AL CERO. ENTONCES $\overline{Co(A^{o}, B^{o})} = (A \cap B)^{o}$.

LA DEMOSTRACIÓN SE HACE DE MANERA ANÁLOGA A LA DE LA PROPOSICIÓN 9.8.

PROPOSICIÓN 9.10. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO. ENTONCES PARA QUE UN CONJUNTO $A \subset E'$ CONVEXO SEA CERRADO EN LA TOPOLOGÍA $\sigma(E', E)$, ES SUFICIENTE QUE PARA TODA VECINDAD U DE θ DE E, $A \cap U^{o}$ SEA CERRADO EN $\sigma(E', E)$.

PARA LA DEMOSTRACIÓN VEASE [3]

CAPITULO 2.
SECCION 10.
ESPACIOS VECTORIALES ORDENADOS.

DEFINICIÓN 10.1. UN ESPACIO VECTORIAL E SE LLAMA ORDENADO, - SI E ES PARCIALMENTE ORDENADO Y ADEMÁS CUMPLE CON LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

I) SI $x \geqslant y$; ENTONCES PARA TODA $z \in E$, SE TIENE $x+z \geqslant y+z$

II) SI $x \geqslant y$, ENTONCES PARA TODA $a \in R^+$, SE TIENE $ax \geqslant ay$.

DEFINICIÓN 10.2. UN SUBCONJUNTO K DE UN ESPACIO VECTORIAL E- SE LLAMA CONO SI K CUMPLE CON LO SIGUIENTE:

I) $K+K \subset K$

II) $aK \subset K$; PARA TODA $a \in R^+$

III) $K \cap (-K) = (\theta)$.

(DE AQUÍ EN ADELANTE K, VA A DENOTAR UN CONO DE E).

PROPOSICIÓN 10.3. CADA ESPACIO VECTORIAL ORDENADO E, GENERA- UN CONO, INVERSAMENTE, CADA CONO EN E GENERA UN ORDEN PARCIAL QUE CUMPLE CON LAS CONDICIONES DE 10.1 QUE HACEN A E UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $K=(x \in E | x \geqslant \theta)$. DEMOSTRAREMOS QUE K CUMPLE CON LAS CONDICIONES I), II), III) DE 10.2.

I) SI $x, y \in K$ ENTONCES $x+y \geqslant x \geqslant \theta$ POR SER E UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO. POR LO TANTO $x+y \in K$.

II) SI $x \in K$ Y $a \in R^+$, ENTONCES $ax \geqslant \theta$ POR SER E UN ESPACIO VEC

TORIAL ORDENADO. POR LO TANTO $ax \in K$.

III) SEA $x \in K \cap (-K)$, ENTONCES $x \in K$ Y $x \in -K$, SE SIGUE QUE ---
$x \geqslant \theta$ Y $x \leqslant \theta$, ENTONCES $x=\theta$. POR LO TANTO $K \cap (-K)=(\theta)$.

POR LO TANTO K ES UN CONO.

INVERSAMENTE. SEA K UN CONO DE E. DEFINIMOS UN ORDEN PARA E- COMO SIGUE: $x \geqslant y$ SI Y SOLO SI $x-y \in K$.

DEMOSTREMOS QUE ES UN ORDEN PARCIAL.

I) $x \geqslant x$, YA QUE $x-x=\theta$ Y $\theta \in K$.

II) SI $x \geqslant y$, $y \geqslant x$, SE SIGUE POR LA DEFINICIÓN DEL ORDEN QUE $x-y \in K$, $y-x \in K$, PERO YA QUE $K \cap (-K)=(\theta)$ SE TIENE QUE $x-y=\theta$ Y $x=y$.

III) SI $x \geqslant y$, $y \geqslant z$, ENTONCES $x-y \in K$ Y $y-z \in K$, PERO YA QUE K- ES UN CONO, SE SIGUE QUE $x-y+y-z \in K$ Y $x \geqslant z$.

POR LO TANTO ES UN ORDEN PARCIAL. POR ÚLTIMO NOS FALTA DEMOS TRAR QUE ESTE ORDEN CUMPLE CON LAS CONDICIONES I) Y II) DE - LA DEFINICIÓN 10.1 PARA QUE E SEA UN ESPACIO VECTORIAL ORDE- NADO.

I) SI $x \geqslant y$, ENTONCES $x-y \in K$, SE SIGUE QUE PARA CUALQUIER $z \in E$, $z+x-(y+z) \in K$. POR LO TANTO $x+z \geqslant y+z$.

II) SI $x \geqslant y$, ENTONCES $x-y \in K$. SE SIGUE QUE $a(x-y) \in K$ PARA $a>0$ POR SER K UN CONO. POR LO TANTO $ax \geqslant ay$.

POR LO TANTO E ES UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO.

EJEMPLO 1. SEA E LOS REALES Y $K=[0,\infty)$. ENTONCES R ES UN ES- PACIO VECTORIAL ORDENADO.

EJEMPLO 2. SEA E=R, DEFINIMOS EN R EL SIGUIENTE ORDEN $x \geqslant y$ - SI Y SOLO SI $x-y \in [0,\infty) \cap Q$. ENTONCES R CON ESTE ORDEN NO ES UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO, PORQUE $(x \mid x \geqslant 0)$ NO ES UN CONO.

EJEMPLO 3. SEA $E=R^2$ Y $K=((x,o)|x\geq o)$. ENTONCES R^2 ES UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO POR SER K UN CONO EN R^2. SEA E' EL ESPACIO DUAL DE R^2 Y SEA $K'=(f\in E'|f(x)\geq o$ PARA TODA $x\in K)$. ES FÁCIL VERIFICAR QUE K' CUMPLE CON LAS CONDICIONES I), II) DE LA DEFINICIÓN 10.2 PERO K' NO CUMPLE CON LA CONDICIÓN III).- POR EJEMPLO TOMEMOS LA FUNCIONAL LINEAL $f((x,y))=y$, ENTONCES $f\in K'$, Y TAMBIÉN $-f\in K'$, ENTONCES SE SIGUE QUE K' NO ES UN CONO. ENTONCES E' NO ES PARCIALMENTE ORDENADO, POR EL ORDEN GENERADO POR K.

PROPOSICIÓN 10.4. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO Y ORDENADO. ENTONCES E' ES UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO SI Y SOLO SI K-K ES DENSO EN E.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $K'=(f\in E'|f(x)\geq o$ PARA TODA $x\in K)$.

PARA DEMOSTRAR LA PROPOSICIÓN, SOLAMENTE ES NECESARIO DEMOSTRAR QUE K' ES UN CONO SI Y SOLO SI K-K ES DENSO EN E.

SUPONGAMOS QUE K-K ES NO DENSO EN E, YA QUE K-K ES UN SUBESPACIO DE E, EXISTE $x_o\in E$ TAL QUE $d(K-K,x_o)=\delta>o$. ENTONCES -- POR EL COROLARIO 2 DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL f TAL QUE $f(x)=o$ PARA TODA $x\in K-K$ Y $f(x_o)=\delta$, - ENTONCES $f\in K'$ Y TAMBIÉN $-f\in K'$ PERO $f\neq o$. ESTO ES UNA CONTRADICCIÓN. POR LO TANTO K-K ES DENSO EN E.

INVERSAMENTE. SUPONGAMOS QUE EXISTE UNA FUNCIONAL LINEAL $f\in E'$ TAL QUE f Y $-f\in K'$, ESTO IMPLICA QUE $f(x)=o$ PARA TODA $x\in K-K$, PERO YA QUE K-K ES DENSO EN E Y POR LA CONTINUIDAD DE f, SE TIENE QUE $f=o$. POR LO TANTO K' CUMPLE CON LA CONDICIÓN III) DE LA DEFINICIÓN 10.2.

Las otras dos condiciones de la definición 10.2 son fáciles de verificar. Por lo tanto K' es un cono.

Definición 10.5. Sea K un cono en un espacio vectorial E. - Se dirá que K es generador de E si $E=K-K$.

Proposición 10.6. Sea E un espacio vectorial. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

i) K es generador.

ii) Para cada $x \in E$, existe $u \geq 0$, tal que $u \geq x$.

iii) E con la relación $\geq$ dada por K constituye un conjunto dirigido.

Demostración:

i) implica ii). Dada $x \in E$, ya que K es generador, existen - u y $v \in K$ tales que $x=u-v$, entonces $v=u-x$. Por lo tanto $u \geq x$.

ii) implica iii). Si $x, y \in E$, existen $u, v \in K$ tales que $u \geq x$, $v \geq y$, entonces $u+v \geq x$, $u+v \geq y$. Por lo tanto E es dirigido.

iii) implica i). Dada $x \in E$, por ser E dirigido por $\geq$, existe siempre $u \in K$ tal que $u \geq x$, entonces tómese $v=u-x$, $v \in K$, - se sigue que $x=u-v$. Por lo tanto K es generador.

Definición 10.7. Sea E un espacio vectorial ordenado. Se dice que E tiene la propiedad de interpolación con respecto $\geq$, en el caso que $a, b \geq c, d$ implica que existe $x \in E$ tal que $a, b \geq x \geq c, d$.

Definición 10.8. Sea E un espacio vectorial ordenado. Se di

CE QUE E TIENE LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN CON RESPECTO , EN EL CASO QUE $A,B,X \in K$ Y $A+B \geq X$, IMPLICA EXISTAN $C,D \in K$ TALES QUE $X=C+D$, $A \geq C$, $B \geq D$.

PROPOSICIÓN 10.9. LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN ES EQUIVALENTE A LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN.

DEMOSTRACIÓN:

LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN IMPLICA LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN.

SUPONGAMOS QUE A,B, Y $X \in K$ Y QUE $A+B \geq X$, ENTONCES SE TIENE QUE $A,X \geq X-B,\theta$, ENTONCES POR LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN EXISTE C TAL QUE (1) $A,X \geq C \geq X-B,\theta$, ENTONCES $C \in K$ Y $C \leq A$. DEFINAMOS $D=X-C$, ENTONCES POR 1) $D \in K$ Y $B-D=B-(X-C)=C-(X-B) \in K$, POR LO TANTO $B \geq D$ Y $X=C+D$.

LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN IMPLICA LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

SEAN $A,B,C,D \in E$ TALES QUE $A,B \geq C,D$ ENTONCES $(A-C),(B-D)$ Y $(A-D)$ $\in K$. ADEMÁS $(A-C)+(B-D) \geq A-D$, YA QUE LA DIFERENCIA $B-C \in K$, ENTONCES POR LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN EXISTEN $U,V \in K$ TALES QUE (1) $U \leq A-C$, (2) $V \leq B-D$ Y (3) $A-D=U+V$.

CONSIDERE EL ELEMENTO $A-U$, ENTONCES DE (2) Y (3) SE TIENE QUE $A-U=D+V$ Y $D+V \leq B$. POR LO TANTO $A-U \leq B$, ADEMÁS $A-U \leq A$ YA QUE $U \in K$. EN ESTE MOMENTO TENEMOS QUE $A-U \leq A$ Y $A-U \leq B$, ENTONCES PARA QUE $A-U$ CUMPLA CON LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN DEBEMOS DEMOSTRAR QUE $A-U \geq D,C$ PARA ESO NOS FIJAMOS EN (1) Y OBTENEMOS QUE $A-U \geq C$ Y PARA D NOS FIJAMOS EN (3) Y TENEMOS QUE $A=D+U+V$, $A-U=D+V \geq D$, POR LO TANTO LA PROPIEDAD DE DESCOMPOSICIÓN-

IMPLICA LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

SECCION 11.

LATIZ VECTORIAL.

Definición 11.1. Un espacio vectorial ordenado E, se dirá que es un látiz vectorial si para cada pareja $a,b \in E$, existe su supremo $a \vee b$ y su ínfimo $a \wedge b$.

Definición 11.2. Sea E un látiz vectorial para cada $a \in E$, $a^{+}=a \vee \theta$, $a^{-}=(-a) \vee \theta$.

Proposición 11.3. Sea E un látiz vectorial entonces:

i) $a \wedge b=-((-a) \vee (-b))$

ii) $(a \substack{\vee \\ \wedge} b)+c=(a+c) \substack{\vee \\ \wedge} (b+c)$

iii) $r(a \substack{\vee \\ \wedge} b)=(ra) \substack{\vee \\ \wedge} (rb)$ si $r > 0$

iv) $a+b=a \vee b+a \wedge b$, $a=a^{+}-a^{-}$

Para la demostración ver [18]

Proposición 11.4. Si E es un látiz vectorial y definimos $|a|=a \vee (-a)$ para cada $a \in E$, entonces:

i) $|a| \geqslant \theta$, $|a|=\theta$ si y solo si $a=\theta$

ii) $|a+b| \leq |a|+|b|$

iii) $|ra|=|r||a|$; $r \in R$

iv) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

Para la demostración ver [18]

Proposición 11.5. Si E es un látiz vectorial, entonces E tiene la propiedad de interpolación y su cono es generador.

DEMOSTRACIÓN:

POR LA PROPOSICIÓN 10.7 ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE E ES DIRIGIDO POR $\geqslant$, PARA QUE SU CONO SEA GENERADOR. PERO YA QUE PARA CUALQUIER PAREJA $A,B\in E$, EXISTE SU SUPREMO $A\vee B$, ENTONCES E ES DIRIGIDO Y POR LO TANTO SU CONO ES GENERADOR.

LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN. SEAN $A,B,C,D\in E$ TALES QUE $A,B\geqslant C,D$. SEA $X=A\wedge B$, ENTONCES $A,B\geqslant X$ Y $C,B\geqslant X$. POR LO TANTO EN E-SE CUMPLE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

EJEMPLO 4. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL DISTINTO DE θ Y $K=(\theta)$ - ENTONCES E NO ES UN LÁTIZ VECTORIAL.

EJEMPLO 5. SEA $E=R^2$ Y $K=((x,0)|x\geqslant 0)$. ENTONCES R^2 CON EL OR-DEN PARCIAL GENERADO POR K NO ES UN LÁTIZ VECTORIAL PORQUE K-NO ES GENERADOR PERO SI CUMPLE CON LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

EJEMPLO 6. SEA E=AL ESPACIO DE TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS-EN $[-1,1]$ QUE TENGAN PRIMERA DERIVADA SOBRE TODO $(-1,1)$ CON - EL ORDEN PARCIAL SIGUIENTE: $F\geqslant G$ SI Y SOLO SI $F-G\geqslant 0$. SU CONO K ES GENERADOR YA QUE PARA CADA $F\in E$ EXISTE $M>0$ TAL QUE $F\leq M$. PERO E NO ES UN LÁTIZ VECTORIAL PORQUE SI $F(X)=X$ Y $G(X)=-X$ ENTONCES $F\vee G=|X|$ QUE NO TIENE DERIVADA EN CERO.

EJEMPLO 7. SEA $E=R$ Y $K=[0,\infty)$. ENTONCES R ES UN LÁTIZ VECTO-RIAL.

EJEMPLO 8. SEA E=AL ESPACIO DE LAS FUNCIONES REALES LEBESGUE-MEDIBLES, CON EL ORDEN PARCIAL SIGUIENTE: $F\geqslant G$ SI Y SOLO SI - $F-G\geqslant 0$. ENTONCES E ES UN LÁTIZ VECTORIAL.

DEFINICIÓN 11.6. UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO E ES O- COMPLETO, SI PARA CUALQUIER SUBCONJUNTO A DIRIGIDO POR $\geqslant$ Y ACOTADO-superiormente tiene supremo.

Observamos que no todo espacio o- completo es un látiz vectorial. Por ejemplo ver los ejemplos 4 y 5.

Proposición 11.7. Sea E un espacio o- completo, con cono generador y con la propiedad de Interpolación. Entonces E es un látiz vectorial.

Demostración:

Ya que el cono es generador, entonces E es dirigido por $\geqslant$. Sean $x, y \in E$ y $S_{XY} = (z \in E \mid z \leq -x, z \leq -y)$. El conjunto S_{XY} es no-vacío por ser E dirigido por $\geqslant$. Sean $z_1, z_2 \in S_{XY}$, entonces $z_1, z_2 \leq -x, -y$, entonces por la propiedad de interpolación existe $z \in E$, tal que $z_1, z_2 \leq z \leq -x, -y$, por lo tanto S_{XY} es un conjunto dirigido por $\geqslant$ y además está acotado por $-x$. Ya que E es o- completo existe supremo u de S_{XY}. Entonces por la proposición 11.3, inciso i) se tiene que $-u = x \vee y$. Por lo tanto E es un látiz vectorial.

Definición 11.8. Un espacio vectorial ordenado E es σ-(o)-completo, si para cualquier subconjunto numerable A de E, dirigido por $\geqslant$ y acotado superiormente, tiene supremo.

Definición 11.9. Un espacio vectorial ordenado es casi -(o) completo, en el caso que para cualquier sucesión (a_i) tal que $\theta \leq a_1 \leq \ldots \leq a$ y $a_{i+j} - a_i \leq \varepsilon_i a$ con $\varepsilon_i \downarrow 0$ tiene supremo.

Ejemplo 9. Sea E= al espacio de las funciones reales continuas sobre $[0,1]$, con el orden parcial siguiente: $f \geqslant g$ si y-

SOLO SI $f-g \geqslant 0$. CON ESTE ORDEN PARCIAL E ES UN LÁTIZ VECTORIAL PERO NO ES O- COMPLETO NI σ-(O)- COMPLETO.

EJEMPLO 10. SEA E= AL ESPACIO DE LAS FUNCIONES REALES LEBESGUE MEDIBLES, CON EL ORDEN PARCIAL SIGUIENTE: $f \geqslant g$ SI Y SOLO SI $f-g \geqslant 0$. ENTONCES E ES σ-(O)- COMPLETO PERO NO ES O-COMPLETO.

DEFINICIÓN 11.10. SEA E UN LÁTIZ VECTORIAL, DE BANACH. E SE LLAMA LÁTIZ DE BANACH SI $|a| \leq |b|$ IMPLICA QUE $\|a\| \leq \|b\|$ PARA TODA PAREJA a Y $b \in E$, DONDE $\| \ \|$ ES LA NORMA EN EL ESPACIO.

PROPOSICIÓN 11.11. SEA E UN LÁTIZ DE BANACH. ENTONCES SU CONO ES CERRADO.

DEMOSTRACIÓN:

SEA (x_n) UNA SUCESIÓN DE ELEMENTOS DEL CONO QUE CONVERGE A x. PARA QUE $x \in K$ ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE $(|x_n|) \rightarrow |x|$.- YA QUE $||x_n|-|x|| \leq |x_n-x|$ SE SIGUE QUE $\| |x_n|-|x| \| \leq \|x_n -x\|$, PERO YA QUE $(x_n) \rightarrow x$, SE SIGUE QUE $|x_n| \rightarrow |x|$, PERO YA QUE $x_n \in K$, IMPLICA QUE $|x_n|=x_n$, SE SIGUE QUE $|x|=x$ Y $x \geqslant \theta$. POR LO TANTO SU CONO ES CERRADO.

EJEMPLO 11. SEA E=R, $K=(-\infty,0]$. E ES UN LÁTIZ VECTORIAL PERO NO ES UN LÁTIZ DE BANACH PORQUE SI $|a| \leq |b|$ ENTONCES $\|b\| \leq \|a\|$ DONDE $\| \ \|$ DENOTA EL VALOR ABSOLUTO DE R.

PROPOSICIÓN 11.12. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO Y NORMADO CON CONO CERRADO. SI $a_n \leq a$, $n=1,2,3...$ Y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$,

ENTONCES $X \leq A$.

DEMOSTRACIÓN:

YA QUE $A_N \leq A$, $N=1,2,3\ldots$, ENTONCES $A-A_N \geq \theta$, $N=1,2,3\ldots$.
POR SER EL CONO CERRADO SE TIENE QUE $\lim_{N\to\infty}(A-A_N)=A-X \in K$, POR LO TANTO $A \geq X$.

PROPOSICIÓN 11.13. SEA E UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO Y NORMADO CON CONO CERRADO, $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ Y $\lim_{N\to\infty} A_N = A$, ENTONCES A ES EL SUPREMO DE (A_N).

DEMOSTRACIÓN:

PARA CADA NATURAL N, $A_M - A_N \geq \theta$ PARA $M \geq N$, TOMANDO EL $\lim_{M\to\infty}(A_M - A_N)$ SE TIENE QUE $A-A_N \geq \theta$ POR SER EL CONO CERRADO, ENTONCES $A \geq A_N$; $N=1,2,3,\ldots$. POR LO TANTO A ES COTA SUPERIOR DE (A_N).
SEA X OTRA COTA SUPERIOR DE (A_N), POR LA PROPOSICIÓN 11.12 SE SIGUE QUE $X \geq A$. POR LO TANTO A ES EL SUPREMO DE (A_N).

PROPOSICIÓN 11.14. SEA E UN LÁTIZ DE BANACH, ENTONCES E ES CASI -(O)- COMPLETO.

DEMOSTRACIÓN:

SEA (A_N) UNA SUCESIÓN TAL QUE $\theta \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A$ Y QUE $\theta \leq A_{I+J} - A_I \leq \varepsilon_I A$, $\varepsilon_I \downarrow 0$. POR SER E UN LÁTIZ DE BANACH SE TIENE QUE $\|A_{I+J} - A_I\| \leq \varepsilon_I \|A\|$, POR LO TANTO (A_I) ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY, POR SER E DE BANACH CONVERGE Y POR LA PROPOSICIÓN 11.13, (A_N) TIENE SUPREMO.

DEFINICIÓN 11.15. UN ESPACIO VECTORIAL ORDENADO DE BANACH Y CASI (O)- COMPLETO, CON CONO GENERADOR CERRADO, ES LLAMADO UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO.

SECCION 12.

DEMOSTRACION DE LA PROPIEDAD 1.

EN ESTA SECCIÓN E SERÁ UN ESPACIO DE BANACH CON CONO CERRADO K Y U LA BOLA UNITARIA CERRADA.

LEMA 1. LAS SIGUIENTES CONDICIONES SON EQUIVALENTES.

1). K GENERA A E

2). $\overline{(K\cap U-K\cap U)}\supset aU$

3). $(K\cap U-K\cap U)\supset bU$

4). PARA CUALQUIER $x\in E$, ADMITE UNA DESCOMPOSICIÓN $x=y-z$, CON y,z TALES QUE $y,z\in K$ Y $\|y\|,\|z\|\leq p\|x\|$.

DONDE a, b Y p SON CONSTANTES POSITIVAS.

DEMOSTRACIÓN:

1 IMPLICA 2.

DADA $x\in E$, EXISTEN $y,z\in K$ TALES QUE $x=y-z$, DONDE $\|y\|<n_1$ Y $\|z\|<n_2$ Y n_1,n_2 ENTEROS POSITIVOS.

TOMEMOS $n=\max(n_1,n_2)$, SE SIGUE QUE $\frac{y}{n},\frac{z}{n}\in K\cap U$ Y $-\frac{z}{n}\in -K\cap U$, ENTONCES $x\in n(K\cap U-K\cap U)$.

POR LO TANTO $E=K-K=\bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{(K\cap U-K\cap U)}$. YA QUE E ES DE LA SEGUNDA CATEGORÍA SE SIGUE QUE EXISTE UNA VECINDAD DEL ORIGEN CONTENIDA EN $\overline{(K\cap U-K\cap U)}$, ES DECIR, EXISTE $a>0$ TAL QUE $\overline{(K\cap U-K\cap U)}\supset aU$.

2 IMPLICA 3.

SEA $V=K\cap U-K\cap U$. DEMOSTRAREMOS QUE 2 IMPLICA 3 CON EL SIGUIENTE ORDEN:

I) V ES CONVEXO Y BALANCEADO.

II) LA FUNCIONAL DE MINKOWSKI P_V DE V DEFINIDA EN EL SUBESPACIO F GENERADO POR V ES UNA NORMA.

iii) F es completo con respecto a la norma definida por la funcional de Minkowski de V.

i) Convexo. K y U son convexos, entonces por las proposiciones 6.2 y 6.4 V es convexo.

Balanceado. Sean $x \in V$ y $a \in R$ tal que $|a| \leq 1$, entonces existen k_1 y k_2 K U tales que $x = k_1 - k_2$ si a 0 entonces ak_1, $ak_2 \in K \cap U$, si $a < 0$ entonces $ak_1, ak_2 \in -K \cap U$, se sigue en ambos casos que $ak_1 - ak_2 = ax \in V$.

ii) Sea F el subespacio generado por V, entonces V es un subconjunto absorbente de F por ser V convexo y balanceado. Por ser V convexo, absorbente y balanceado la funcional de Minkowski P_V de V definida en F es una semi-norma.

Para que P_V sea una norma es suficiente demostrar que para cada $x \in V, x \neq \theta$ se tiene que $P_V(x) \neq 0$. Ya que $K \cap U - K \cap U \subset 2U$. Si $c = \|x\|$, entonces $x \notin \frac{c}{4} V \subset \frac{c2U}{4} = \frac{cU}{2}$, ya que $x \notin \frac{c}{2} U$. Por lo tanto $P_V(x) \neq 0$.

iii) Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en (F, P_V), entonces tomemos la subsucesión $(x_i) \subset F$ tal que $P_V(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{1}{2^i}$, entonces por la definición de la norma tenemos que $x_{i+1} - x_i \in \frac{1}{2^i} V$.

Ya que $x_{i+1} - x_i \in \frac{1}{2^i} V$ existen $y_i, z_i \in \frac{1}{2^i} V$ tales que $x_{i+1} - x_i = y_i - z_i$, entonces $x_{i+1} = y_i + \ldots + y_i - (z_1 + \ldots + z_i) + x_1$.

Pero cada una de las series $y_1 + y_2 + \ldots$ y $z_1 + z_2 \ldots$ son absolutamente sumables. Ya que E es de Banach se tiene que $\lim_{i \to \infty} (y_i + \ldots + y_i) = y_0$ y $\lim_{i \to \infty} (z_1 + \ldots + z_i) = z_0$ y además $\|y_0\| \leq 1$, $\|z_0\| \leq 1$ y $y_0, z_0 \in K$ por ser K cerrado. Sea $x = y_0 - z_0 + x_1$, entonces $x \in F$, ya que $y_0, z_0 \in V$ y $x_1 \in F$. Se sigue que $x_i - x = x_i - x_1 - y_0 + z_0 = -(y_i + y_{i+1} + \ldots) + (z_i + z_{i+1} + \ldots) \in \frac{1}{2^{i-1}} V$, entonces $P_V(x_i - x) < \frac{1}{2^{i-1}}$ si -

$i \geq 1$. Por lo tanto $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ y F es completo con respecto a la norma P_V.

Sea $T: F \to E$ tal que $T(x)=x$. Por la demostración de la parte ii) se sigue que $\|T(x)\| \leq 4P_V(x)$ entonces T es continua. - Entonces por el lema 2 de la proposición 4.3 se sigue existe $b>0$ tal que $(K \cap U - K \cap U) \supset bU$.

3 implica 4. Ya que $(K \cap U - K \cap U) \supset bU$, se sigue que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(K \cap U - K \cap U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nbU$. Sea $x \in E$, entonces $x \in n(K \cap U - K \cap U)$ para alguna n, se sigue que existen $y, z \in n(K \cap U)$ tales que $x=y-z$. Sean $r = \max(\|y\|, \|z\|)$ y $p = \frac{r}{\|x\|}$, entonces $\|y\|, \|z\| \leq p\|x\|$.

4 implica 1. Sea $x \in E$ por 4 existen $y, z \in E$ tales que $x=y-z$. Por lo tanto el cono es generador.

Lema 2. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1) E es casi -(o)- completo.

2) Cada intervalo está acotado en norma.

3) $a \leq x \leq b$, implica $\|x\| \leq p\max(\|a\|, \|b\|)$.

4) $(U+K) \cap (U-K) \subset pU$.

Donde p es una constante positiva.

1 implica 2.

Para cada $a \in K$, tomemos $V_a = (x \mid -a \leq x \leq a)$. Demostraremos que - V_a está acotado en norma siguiendo el orden siguiente:

i) V_a es convexo, balanceado.

ii) La funcional de Minkowski P_a de V_a definida en el subespacio F_a generado por V_a es una norma.

iii) F_a es completo con respecto a la norma P_a.

iv) La gráfica de la inclusión $T: F_a \to E$ es cerrada.

I) CONVEXO. SEAN x, y V_A, SI $0 \leq c \leq 1$, ENTONCES $cx+(1-c)y \in V_A$ PORQUE $-ca \leq cx \leq ca$, $-(1-c)a \leq x \leq (1-c)a$ Y $-a \leq ((1-c)+c)a \leq cx+(1-c)y \leq (c+(1-c))a \leq a$.

BALANCEADO. SEA $x \in V_A$ Y $|c| \leq 1$, ENTONCES $-a \leq -ca \leq cx \leq ca \leq a$ SI $c > 0$ Y $-a \leq ca \leq cx \leq -ca \leq a$ SI $c < 0$. POR LO TANTO V_A ES BALANCEADO.

II) SEA F_A EL SUBESPACIO GENERADO POR V_A Y P_A LA FUNCIONAL DE MINKOWSKI DE V_A DEFINIDA EN F_A. P_A ES UNA SEMI-NORMA POR SER V_A CONVEXO, BALANCEADO Y ABSORBENTE. PARA DEMOSTRAR QUE P_A ES UNA NORMA, ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE PARA $x \in V_A$, $x \neq \theta$ $P_A(x) \neq 0$. SUPONGAMOS QUE $P_A(x)=0$, ENTONCES POR LA DEFINICIÓN DE LA FUNCIONAL DE MINKOWSKI, SE SIGUE QUE $-la \leq x \leq la$ PARA TODA $l > 0$. YA QUE K ES CERRADO SE SIGUE QUE $x=\theta$, LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN. POR LO TANTO, P_A ES UNA NORMA PARA F_A.

III) SEA (x_n) UNA SUCESIÓN DE CAUCHY EN (F_A, P_A). TOMEMOS LA SUBSUCESIÓN (x_i) TAL QUE $P_A(x_{i+1}-x_i) \leq \frac{1}{2^i}$, $i=1,2,\ldots$.

POR LA DEFINICIÓN DE LA NORMA SE SIGUE QUE $-\frac{1}{2^i}a \leq x_{i+1}-x_i \leq \frac{1}{2^i}a$ Y SE DEDUCE QUE $\theta \leq x_{i+1}-x_i+\frac{1}{2^i}a$.

SEA $y_i = x_{i+1}-x_i+\frac{1}{2^i}a$. TOMEMOS LA SUCESIÓN (z_i) DONDE $z_i = y_1+\ldots+y_i$. OBSERVAMOS LO SIGUIENTE:

I) $z_i = y_1+\ldots+y_i = x_{i+1}-x_1+a\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^i}\right) \leq 2a$.

II) $\theta \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq 2a$. $(y_i \geq \theta)$.

III) $z_{i+j}-z_i = x_{i+j+1}-x_{i+1}+a\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{i+j}}\right) \leq 2a\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{i+j}}\right)$

$2a\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\ldots\right) \leq 2a\epsilon_i$ DONDE $\epsilon_i = \left(\frac{1}{2^{i+1}}+\ldots\right)$ $\epsilon_i \downarrow 0$.

Ya que E es casi -(o)- completo, existe el supremo Y del -- conjunto (z_n). Sea $x=y+x_1-a$, entonces $x\in F_a$, ya que $-2a\leq\theta$ $y\leq 2a$.

$x-x_i$ es el supremo de la sucesión $(x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}})_{k\geq i}$.

Supongamos que existe $k\geq i$ tal que $x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}} > x-x_i=y-a+x_1-x_i\geq x_k-x_1+a(\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}})-a+x_1-x_i=x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}}$, se sigue que $-\frac{a}{2^{k-1}} > -\frac{a}{2^{k-1}}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x-x_i$ es cota superior del conjunto $(x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}})_{k\geq i}$.

Supongamos que c es cota superior de $(x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}})_{k\geq i}$ tal - que $x-x_i\geq c$. Entonces para todo natural $k\geq$ y se tiene que- $y+x_1-a-x_i\geq c\geq x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}}$ y $y\geq c-x_1+a+x_i\geq x_k-x_1-\frac{a}{2^{k-1}}+a=x_k-x_1+a(\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}})=z_k$, pero ya que y es el supremo de (z_k) de donde $y\leq c-x_1+a+x_i$, por lo tanto $x-x_i=y+x_1-a-x_i\leq c$ y $x-x_i$ es el supremo de $(x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}})_{k\geq i}$. Por último vamos a demostrar que $-\frac{a}{2^{i-1}}\leq x-x_i\leq\frac{a}{2^{i-1}}$. Ya que $x-x_i\geq x_k-x_i-\frac{a}{2^{k-1}}$ para $k\geq i$, entonces para $k=i$ tenemos que $-\frac{a}{2^{i-1}}\leq x-x_i$. Por otro lado $x_k-x_i=x_k-x_{k-1}+\dots+x_{i+1}-x_i\leq a(\frac{1}{2^i}+\dots+\frac{1}{2^{k-1}})\leq\frac{a}{2^{i-1}}$, por lo tanto $x_k-x_i\leq\frac{a}{2^{i-1}}$ y $x_k-x_i-\frac{a}{2^{i-1}}\leq\frac{a}{2^{i-1}}-\frac{a}{2^{i-1}}\leq\frac{a}{2^{i-1}}$, se deduce que $x-x_i\leq\frac{a}{2^{i-1}}$ y $P_a(x-x_i)\leq\frac{1}{2^{i-1}}$, entonces $\lim_{i\to\infty}x_i=x$. Por lo tanto F_a es completo.

iv) Para demostrar que la gráfica de la inclusión T es ce-- rrada es suficiente demostrar que $(T(U)+V \mid U\in W, V\in Q)=(\theta)$, donde W y Q son bases locales de θ en F_a y E, respectivamen te (ver 7).

Sean $W=(\frac{1}{n}U)$, donde U es la bola unitaria abierta en F_A, $n=1, 2, \ldots$) y $Q=(\frac{1}{n}V)$, donde V es la bola unitaria abierta en E, $n=1,2,\ldots$.

Sea $x \in \bigcap (T(U)+V | U \quad W, V \quad Q)$, entonces para cada n existen - $x_n \in \frac{1}{n}U$, $y_n \in \frac{1}{n}V$ tales que $x=x_n+y_n$. Ya que $-\frac{1}{n}a \leq x_n \leq \frac{1}{n}a$, entonces $x_n=\frac{1}{n}a-k_n$ y $x_n=k_n'-\frac{1}{n}a$, con k_n y $k_n' \in K$, se sigue que $-\frac{1}{n}a+y_n \leq x \leq \frac{1}{n}a+y_n$. Pero ya que $\frac{1}{n}a \to \theta$, $y_n \to \theta$ y el cono es cerrado se sigue que $\theta \leq x \leq \theta$, entonces $x=\theta$. Por lo tanto la gráfica es cerrada. Se sigue que la inclusión T es continua. Por lo tanto $V_a=(x|-a \leq x \leq a)$ es acotado en la norma de E.

Sea $[a;b]$ cualquier intervalo, entonces $b-a \geqslant \theta \ngeqslant -(b-a)$. Por lo tanto cualquier intervalo está acotado en norma.

2 implica 3.

Ya que $[a;b]$ está acotado, existe $M>0$ tal que $\|x\| \leq M$, para toda $x \in [a;b]$. Sea $c=\max(\|a\|,\|b\|)$, entonces $\|x\| \leq \frac{M}{c}\max(\|a\|,\|b\|)=p\max(\|a\|,\|b\|)$, donde $p=\frac{M}{c}$.

3 implica 4.

Supongamos que $(K+U)\cap(U-K)$ no está acotado, entonces se pueden construír dos sucesiones con las siguientes características:

$\theta \leq y_n \leq x_n$; donde $\|x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ y $\|y_n\| \geqslant n$. Ya que K es cerrado implica que $\lim_{n \to \infty}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=x_0 \in K$ y $\theta \leq y_n \leq x_0$ para toda n porque $x_n \leq x_0$, entonces $[\theta,x_0]$ no estaría acotado que es - una contradicción. Por lo tanto existe $b>0$ tal que $(K+U)\cap(U-K)\subset bU$.

4 implica 1.

SEA (A_N) UNA SUCESIÓN TAL QUE $\theta \leq A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A$ Y $\theta \leq A_{I+J} - A_I \leq \varepsilon_I A$ CON $\varepsilon_I \downarrow 0$. SIN PERDER GENERALIDAD PODEMOS SUPONER QUE $A \in U$ Y $A_I \in (K+U) \cap (U-K)$, ENTONCES $\|A_{I+J}-A_I\| \leq \varepsilon_I P \|A\|$ DONDE $P = \frac{B}{\|A\|}$, ENTONCES (A_N) ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY PERO YA QUE E ES DE BANACH, (A_N) CONVERGE Y POR LA PROPOSICIÓN 11.13 X ES EL SUPREMO DE (A_N). POR LO TANTO E ES CASI -(o)-COMPLETO.

PROPOSICIÓN 12.1. SEAN K' EL CONO DUAL DE E, U' LA BOLA UNITARIA CERRADA DUAL DE E Y A Y B DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS DE E QUE CONTIENEN A θ. ENTONCES $K^o = -K'$, $U^o = U'$ Y $A+B \supset Co(A,B) \supset \frac{1}{2}(A+B)$.

DEMOSTRACIÓN:

$K^o = (f \in E' | f(x) \leq 1$ PARA TODA $x \in K)$, PERO YA QUE $Lf(x) = f(Lx) \leq 1$ PARA TODA $L > 1$, SE SIGUE $f(x) \leq 0$ PARA TODA $x \in K$, ENTONCES $f \in -K'$. POR LO TANTO $K^o \subset -K'$. LA OTRA CONTENCIÓN SE OBTIENE EN FORMA TRIVIAL. POR LO TANTO $K^o = -K'$. $U^o = (f \in E' | f(x) \leq 1$ PARA TODA $x \in U)$. SEA $f \in U^o$, SI EXISTE ALGUNA $x \in U$ PARA LA CUAL $f(x) < -1$, ENTONCES TAMBIÉN $-x \in U$ Y $f(-x) > 1$, LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN, ENTONCES $|f| \leq 1$. POR LO TANTO $U^o \subset U'$. LA OTRA CONTENCIÓN SE OBTIENE EN FORMA TRIVIAL. POR LO TANTO $U^o = U'$.

$A+B \supset Co(A,B) \supset \frac{1}{2}(A+B)$. SEA $x \in \frac{1}{2}(A+B)$, ENTONCES EXISTEN $a \in A$ Y $b \in B$ TALES QUE $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 6.7 $x \in Co(A,B)$, ENTONCES $\frac{1}{2}(A+B) \subset Co(A,B)$.

SEA $x \in Co(A,B)$, ENTONCES EXISTEN $a \in A$, $b \in B$ Y $r > 0$, $s > 0$ TALES QUE $x = ra + sb$ Y $r+s = 1$. YA QUE A Y B SON CONVEXOS Y CONTIENEN A θ, ENTONCES $ra \in A$, $sb \in B$ Y $x \in A+B$. POR LO TANTO $Co(A,B) \subset A+B$.

TEOREMA 1. (1) K genera a E si y solo si E' es casi -(o)- completo.

(2) K' genera a E' si y solo si E es casi -(o)- completo.

Demostración:

(1) Si K genera a E, entonces por el LEMA 1, existe $A>0$ tal que $\overline{(U\cap K-U\cap K)}\supset AU$, entonces por la proposición 12.1 se sigue que $\overline{Co(U\cap K,-(U\cap K))}\supset \frac{A}{2}U$, entonces por las proposiciones 9.8 y 12.1 se sigue que $(\overline{Co(U\cap K,(-U\cap K))})^{o}=(U\cap K)^{o}\cap (U\cap(-K))^{o}$ $=\overline{Co(U^{o},K^{o})}^{D*}\cap\overline{Co(U^{o},-K^{o})}^{D*}=\overline{Co(U',-K')}^{D*}\cap\overline{Co(U',K')}^{D*}\subset\frac{2}{A}U'$. También por la proposición 12.1 tenemos que $\overline{(U'-K')}^{D*}\cap\overline{(K'+U')}^{D*}\subset pU'$, donde $p>0$, por lo tanto se sigue que $(U'-K')\cap(K'+U')\subset pU'$, entonces por el LEMA 2 se sigue que E' es casi -(o)- completo.

Si E' es casi -(o)- completo, entonces por el LEMA 2 se sigue que existe $p>0$ tal que $(U'-K')\cap(U'+K')\subset pU'$. Ya que U' es compacto debilmente y K' cerrado debilente entonces $\overline{(U'-K')}^{D*}\cap\overline{(K'+U')}^{D*}\subset pU'$, entonces por la proposición 12.1 se sigue que $\overline{Co(U^{o},K^{o})}^{D*}\cap\overline{Co(U^{o},-K^{o})}^{D*}\subset pU^{o}$, entonces por el teorema bipolar tenemos que $(\overline{Co(U^{o},K^{o})}^{D*}\cap\overline{Co(U^{o},-K^{o})}^{D*})^{o}=((U\cap K)^{o}\cap(U\cap -K)^{o})^{o}$ $=\overline{Co(U\cap K,-U\cap K)}\subset p^{-1}U^{oo}=p^{-1}U$, entonces por la proposición 12.1 tenemos que $\overline{(U\cap K-U\cap K)}\quad p^{-1}U$, entonces por el LEMA 1 se sigue que K es generador.

(2) Si K' es generador de E', entonces por el LEMA 1 se sigue que existe $A>0$ tal que $(U'\cap K'-U'\cap K')\supset AU'$, pero ya que U' es compacto debilmente y K' cerrado se sigue que $\overline{(U'\cap K'-U'\cap K')}^{D*}\supset AU'$, entonces por la proposición 12.1, tenemos que $\overline{Co(U'\cap K',-U'\cap K')}^{D*}\supset A'U$ para alguna $A'>0$, entonces por las proposiciones 9.2 y el teorema bipolar tenemos que $(\overline{Co(U'\cap K'}$

$\overline{-U'\cap K'})^{0})^{o}=(U'\cap K')^{o}\cap (U'\cap (-K'))^{o}=\overline{Co(U,-K)}\cap\overline{Co(U,K)}\subset \frac{1}{A'}U,$ ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 12.1 SE TIENE QUE $\overline{(U-K)}\cap\overline{(U+K)}\subset$ BU PARA ALGUNA $B>0$, ENTONCES SE SIGUE QUE $(U-K)\cap(U+K)\subset BU$ Y POR EL LEMA 2 SE TIENE QUE E ES CASI -(o)- COMPLETO.

SI E ES CASI -(o)- COMPLETO, ENTONCES POR EL LEMA 2 SE SIGUE QUE EXISTE B O TAL QUE $(U+K)\cap(U-K)\subset BU$ ENTONCES POR LAS PROPOSICIONES 6.13 SE SIGUE QUE $\overline{(U+K)}\cap\overline{(U-K)}\subset BU$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 12.1 SE SIGUE QUE $\overline{Co(U,K)}\cap\overline{Co(U,-K)}\subset BU$, ENTONCES POR EL TEOREMA BIPOLAR TENEMOS QUE $\overline{(Co(U,K)}\cap\overline{Co(U,-K}))^{o}=((U'\cap K')^{o}\cap(U'\cap(-K')^{o})^{o}=\overline{Co(U'\cap K',-U'\cap K')^{0}}^{*}\subset B^{-1}U'$, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 12.1 TENEMOS QUE $\overline{(U'\cap K'-U'\cap K')^{0}}^{*}$ $\subset B^{-1}U'$ PERO YA QUE U' ES COMPACTO DÉBILMENTE Y K' ES CERRADO DÉBILMENTE, ENTONCES TENEMOS QUE $U'\cap K'-U'\cap K'$ ES CERRADO DÉBILMENTE, SE SIGUE QUE $(U'\cap K'-U'\cap K')\subset B^{-1}U'$, ENTONCES POR EL LEMA 1 SE SIGUE QUE K' GENERA A E'.

PROPOSICIÓN 12.2. SI E' ES CASI -(o)- COMPLETO, ENTONCES TODOS LOS INTERVALOS EN E' SON COMPACTOS DÉBILMENTE.

DEMOSTRACIÓN:

POR SER E' CASI -(o)- COMPLETO SE SIGUE QUE TODO INTERVALO ESTÁ ACOTADO EN NORMA Y ADEMÁS ES CERRADO DÉBILMENTE POR SER K' CERRADO DÉBILMENTE, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 8.5 SE SIGUE QUE TODO INTERVALO ES COMPACTO DÉBILMENTE.

PROPOSICIÓN 12.3. SI E' ES CASI -(o)- COMPLETO ENTONCES E' ES σ-(o)- COMPLETO Y O-COMPLETO.

DEMOSTRACIÓN:

Sea (a_n) un subconjunto numerable dirigido por $\geqslant$ y acotado superiormente por a, entonces $a_n \leq a$ para toda n. Pero ya que el intervalo $[a_1, a]$ es compacto debilmente, entonces existe una subsución (a_{nk}) que converge alguna $x \in [a_1, a]$. Por lo tanto $a_{nk} \leq x$ por ser K' cerrado debilmente. Ya que $a_n \leq a_{nk} \leq x$ para toda n, ya que x es el supremo de a_{nk}, entonces también lo es de (a_n). Por lo tanto E' es o -(o)- completo.

Sea $(a_i)_{i \in I}$ un subconjunto de E' dirigido por $\geqslant$ y acotado superiormente por a, tomemos $i_0 \in I$, entonces el intervalo $[a_{i_0}, a]$ es compacto, entonces existe una subred $(a_{i_0 j})_{j \in J}$ que converge alguna $x \in [a_{i_0} a]$, entonces $a_{i_0 j} \leq x$ por ser K' - cerrado debilmente. Ya que para cada $i \in I$ existe j tal que - $a_i \leq a_{i_0 j} \leq x$ y por ser x el supremo de $(a_{i_0 j})_{j \in J}$ se sigue -- que x es el supremo de $(a_i)_{i \in I}$. Por lo tanto E' es o - completo.

S E C C I O N 13.

DEMOSTRACION DE LA PROPIEDAD 2.

EN ESTA SECCIÓN E SERÁ UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO.

PROPOSICIÓN 13.1. SEA E UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO, ENTONCES E' ES UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO.

DEMOSTRACIÓN:

YA QUE E ES CASI -(O)- COMPLETO Y SU CONO K ES GENERADOR, ENTONCES POR EL TEOREMA 1 SE SIGUE QUE E' ES CASI -(O)- COMPLETO Y SU CONO K' ES GENERADOR.

YA QUE $K^0 = -K'$, ENTONCES K' ES CERRADO.

POR LO TANTO E' ES UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO.

LEMA 3. SEA E UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO. ENTONCES LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN PUEDE OBTENERSE A PARTIR DE LA SIGUIENTE PROPIEDAD: SI PARA CUALQUIERA $\varepsilon > 0$ Y $a_i \geqslant b_j$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, EXISTEN $x \in E$, $y \in K$ TALES QUE $a_i \geqslant x-y$, $x \geqslant b_j$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ Y $\|y\| \leq \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN:

SEAN $a,b,c,d \in E$ TALES QUE $a,b \geqslant c,d$. ENTONCES PODEMOS ENCONTRAR $x_i \in E$, $y_i \in K$ TALES QUE $a,b,x_{i-1} \geqslant x_i - y_i$, $x_i \geqslant c,d,x_{i-1}-y_{i-1}$ Y $\|y_i\| \leq \frac{1}{2^i}$ PARA $i=1,2,3,\ldots$, COMO SIGUE:

PARA $\varepsilon = 1$, EXISTEN, $x_0 \in E$, $y_0 \in K$ TALES QUE $a,b \geqslant x_0 - y_0$, $x_0 \geqslant c,d$ Y $\|y_0\| \leq 1$. PERO YA QUE $y_0 \in K$ SE SIGUE QUE $x_0 \geqslant x_0 - y_0$. POR LO TANTO $a,b,x_0 \geqslant c,d,x_0-y_0$.

ENTONCES PARA $\varepsilon = \frac{1}{2}$, EXISTEN $x_1 \in E$, $y_1 \in K$ TALES QUE $a,b,x_0 \geqslant x_1 - y_1$, $x_1 \geqslant c,d,x_0-y_0$ Y $\|y_1\| \leq \frac{1}{2}$. PERO YA QUE $y_1 \in K$, ENTONCES $x_1 \geqslant x_1 - y_1$. POR LO TANTO $a,b,x_1 \geqslant x_1-y_1,c,d$. DE ESTE MODO PARA cada i existen $x_i \in E$, $y_i \in K$ tales que $a,b,x_{i-1} \geq x_i - y_i, x_i \geq c, d, x_{i-1}-y_{i-1}$, entonces se sigue que $-y_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} \leq y_i$ y además $-(y_{i-1}+y_i+\dots) \leq x_i - x_{i-1} \leq (y_i+y_{i+1}+\dots)$. Ya que E es casi -(o)- completo y $\|y_i\| \leq \frac{1}{2^i}$, se sigue que existe $p > 0$ -- tal que $\|x_j - x_{j-1}\| \leq \frac{p}{2^{i-2}}$ para $j \geq 1$. Por lo tanto (x_i) es - una sucesión de Cauchy. Pero ya que E es de Banach, implica que existe $\lim_{i \to \infty} x_i = x$. Ya que $\lim_{i \to \infty} y_i = \theta$ y K es cerrado, podemos concluír que $a,b \geq x \geq c,d$ porque $a,b \geq x_i - y_i, x_i \geq c,d$.

Definición 13.3. Para cada $A \subset E$, $A^{\#} = (f \in K' | f(x) \geq 1$ para toda $x \in A)$.

Definición 13.4. Para cada $A \subset E'$, $A^{\#} = (x \in K | f(x) \geq 1$ para toda $f \in A)$.

Proposición 13.5. Si $A \subset E$, entonces $A^{\#}$ es convexo y cerrado en $\sigma(E',E)$.

Demostración:

Sean f y $f \in A^{\#}$, si $0 \leq a \leq 1$, entonces $af+(1-a)g \in A^{\#}$, ya que- $af(x)+(1-a)g(x) \geq a+(1-a)=1$ para toda $x \in A$. Por lo tanto $A^{\#}$ es convexo.

Sea (f_n) una sucesión de elementos de $A^{\#}$. Supongamos que - $(f_n) \xrightarrow{D^*} f$, entonces $f \in A^{\#}$. Ya que $f(x)$ 0 para toda x K y $f(x) \geq 1$ para toda $x \in A$. Por lo tanto $A^{\#}$ es cerrado debilmente.

Proposición 13.6. Para cada $a \in K$, entonces $(a)^{\#\#} = (x \in E | x \geq a) = a+K$.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $A=(x\in E|x\geqslant a)$. SEA $x\in A$, ENTONCES $x\geqslant a$, SE SIGUE QUE $x=a+k$ DONDE $k\in K$. POR LO TANTO $A\subset(a+K)$. SEA $x\in(a+K)$ ENTONCES EXISTE $k\in K$ TAL QUE $x=a-k$, ENTONCES $x\geqslant a$. POR LO TANTO $(a+K)\subset A$. POR LO TANTO $A=(a+K)$.

SEA $x\in(a+K)$, ENTONCES EXISTE $k\in K$ TAL QUE $x=a+k$. SEA $f\in(a)^{\#}$, ENTONCES $f(a+k)=f(a)+f(k)\geqslant 1+f(k)$, PERO YA QUE $f\in K'$, SE SIGUE QUE $f(a+k)\geqslant 1$, ENTONCES $a+k\in(a)^{\#\#}$. POR LO TANTO $a+K\subset(a)^{\#\#}$. PARA LA OTRA CONTENCIÓN HAGAMOS LO SIGUIENTE:

SEA $x\in(a)^{\#\#}$. SUPONGAMOS QUE $x\notin(a+K)$. YA QUE $a+K$ ES CERRADO Y CONVEXO, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 7.12, EXISTE f CONTINUA TAL QUE $f(x)<1\leqslant f(a+K)$, ENTONCES $f(a)\geqslant 1$ Y $f(K)\geqslant 0$ Y SE SIGUE QUE $x\notin(a)^{\#\#}$ ESTO ES UNA CONTRADICCIÓN. ENTONCES $x\in(a+K)$. POR LO TANTO $(a+K)\supset(a)^{\#\#}$.

POR LO TANTO $(a+K)=(a)^{\#\#}$.

PROPOSICIÓN 13.7. SI E TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN, ENTONCES E' TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

DEMOSTRACIÓN:

ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE PARA CADA $f\in E'$, EXISTE $f\vee 0$ EN E' (VER 9).

PARA CADA $u\in K$, DEFINIMOS $f^{+}(u)=\mathrm{Sup}(f(x)|0\leq x\leq u)$, (POR SER $[0,u]$ ACOTADO EN NORMA Y f CONTINUA EXISTE EL SUPREMO), ES CLARO QUE $f^{+}(tu)=tf^{+}(u)$ PARA CADA $t\geqslant 0$.

SEAN $u,v,x,y\in K$ TALES QUE $0\leq x\leq u$, $0\leq y\leq v$, ENTONCES $f(x+y)=f(x)+f(y)\leq f+(u+v)$ DONDE SE DEDUCE QUE $f^{+}(u)+f^{+}(v)\leq f^{+}(u+v)$.

POR OTRO LADO TOMEMOS $x\in E$ TAL QUE $0\leq x\leq u+v$, ENTONCES POR-

HIPÓTESIS Y POR LA PROPOSICIÓN 10.9 EXISTEN $x_1, x_2 \in K$ TALES QUE $0 \leq x_1 \leq u$, $0 \leq x_2 \leq v$ Y $x = x_1 + x_2$, ENTONCES $f(x) = f(x_1) + f(x_2) \leq f^+(u) + f^+(v)$ Y SE SIGUE QUE $f^+(u+v) \leq f^+(u) + f^+(v)$. POR LO- TANTO $f^+(u+v) = f^+(u) + f^+(u) + f^+(v)$.

HEMOS PROBADO QUE f^+ ES ADITIVA, HOMOGENEAMENTE POSITIVA Y ADEMÁS f^+ ES CONTINUA SOBRE K, YA QUE $\operatorname{Sup}(f(x), 0 \leq x \leq u) \leq t \, \|f\|$ PARA $u \in tU \cap K$ DONDE U ES LA BOLA UNITARIA CERRADA DE E Y $t > 0$.

POR LO TANTO f^+ SE PUEDE EXTENDER A UNA FUNCIONAL LINEAL - SOBRE E (VER, [9]), QUE LA NOTAREMOS OTRA VEZ POR f^+, $f^+ = f \vee 0$ PORQUE SI $g \geqslant f$ Y $g \geqslant 0$ ENTONCES $g(u) \geqslant f^+(u)$ PARA CADA $u \in K$, ENTONCES $f^+ \leq g$. YA QUE $0 \leq f^+$ Y $f \leq f^+$, SE SIGUE QUE - $f^+ = f \vee 0$, ENTONCES POR LAS PROPOSICIONES 11.5 Y 10.10, SE SI GUE QUE E' TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

TEOREMA 2. E TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN SI Y SOLO SI E' TIENE ESTA MISMA PROPIEDAD.

DEMOSTRACIÓN:

SUPONGAMOS QUE E' TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN, EN- TONCES ES SUFICIENTE DEMOSTRAR QUE EN E SE CUMPLE LA FORMA MENOS RESTRICTIVA DE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN, ENTON- CES POR EL LEMA 3 SE SIGUE QUE E TIENE LA PROPIEDAD DE IN TERPOLACIÓN.

TOMEMOS $a_i \geqslant b_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. SIN PERDER GENERALIDAD PODE MOS SUPONER QUE LAS $b_j \in K$, PORQUE EL CONO ES GENERADOR.

PARA CADA $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ DEFINIMOS LOS SIGUIENTES CONJUNTOS:

$A = (1+\varepsilon)\operatorname{Co}((b_i)^{\#}_{;} i = 1, 2, \ldots, n) = (1+\varepsilon)(r_1 f_1 + \ldots + r_n f_n \mid f_i \in (b_i)^{\#}_{;} \; 0 \leq a_i \leq 1$ Y $a_i + \ldots + a_n = 1)$ Y

$B=Co((A_I-K)^o \cap \gamma U^o; I=1,2,\ldots N)=(S_1G_1+\ldots+S_NG_N | G_I \in (A_I-K)^o$
$U^o, 0 \leq S_I \leq 1$ Y $S_1+\ldots+S_N=1)$.

ENTONCES $A \cap B=\emptyset$. PORQUE DE OTRA MANERA, YA QUE E' ES UN ESPACIO DE BANACH ORDENADO CON LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN, ENTONCES EXISTE $X \in E''$ TAL QUE $A_I \geq X \geq B_J$, YA QUE γ (LA INMERSIÓN DE E EN E'') PRESERVA EL ORDEN. ENTONCES $X(F) \leq 1$ Y $X(F) \geq 1+\varepsilon$ PARA CADA F EN $A \cap B$, PORQUE F PUEDE SER REPRESENTADO COMO: $F=R_1F_1+\ldots+R_NF_N; F_I \in (B_I)^{\#}, R_I \geq 0$ Y $R_1+\ldots+R_N=1+\varepsilon$, ENTONCES $X(F)=R_1X(F_1)+\ldots+R_NX(F_N) \geq R_1F_1(B_1)+\ldots+R_NF_N(B_N) \geq R_1+\ldots+R_N=1+\varepsilon$ Y F TAMBIÉN PUEDE SER REPRESENTADO COMO: $F=S_1G_1+\ldots+S_NG_N; G_I \in (A_I-K)^o \cap \gamma U^o, S_I \geq 0$ Y $S_1+\ldots+S_N=1$, ENTONCES $X(F)=S_1X(G_1)+\ldots+S_NX(G_N) \leq S_1G_1(A_1)+\ldots+S_NG_N(A_N) \leq R_1+\ldots+R_N=1$. ESTO ES UNA CONTRADICCIÓN. POR LO TANTO HEMOS PROBADO QUE A Y B -- SON AJENOS.

PROBAREMOS QUE A ES DÉBILMENTE CERRADO Y B DÉBILMENTE COMPACTO.

PARA DEMOSTRAR QUE A ES DÉBILMENTE CERRADO, TOMAREMOS N=2 POR SIMPLICIDAD. ENTONCES ES SUFICIENTE DEMOSTRAR POR LA PROPOSICIÓN 9.10 QUE $Co((B_I)^{\#}, I=1,2) \cap PU^o$ ES DÉBILMENTE CERRADO, DONDE U ES LA BOLA UNITARIA CERRADA DE E Y $P>0$.

SUPONGAMOS QUE UNA RED $(R_IF_I+(1-R_I)G_I)$ CONVERGE DÉBILMENTE ALGUNA $H \in E'$ DONDE $F_I \in (B_1)^{\#}, G_I (B_2)^{\#}, 0 \leq R_I \leq 1$ Y $\|R_IF_I+(1-R_I)G_I\| \leq P$.

YA QUE E' ES CASI-(O)- COMPLETO, ENTONCES POR EL LEMA 2, $\|R_IF_I\|$ Y $\|(1-R_I)G_I\|$ SON UNIFORMEMENTE ACOTADAS PORQUE $\frac{R_IF_I}{P}=N-\frac{(1-R_I)G}{P}$ DONDE $N \in U'$, $\frac{R_IF_I}{P}, \frac{(1-R_I)G_I}{P} \in K'$, POR LO TANTO $\frac{R_IF_I}{P} \in (K'+U') \cap (U'-K')$ Y ANÁLOGAMENTE SE DEMUESTRA QUE $\frac{(1-R_I)G_I}{P} \in$

$(K'+U')\cap(U'-K')$.

PODEMOS SUPONER QUE (r_i) CONVERGE ALGUNA r R. SI $0<r<1$, - YA QUE $(f_i),(g_i)$ SON UNIFORMEMENTE ACOTADAS, SE SIGUE QUE PODEMOS SUPONER QUE (f_i) Y (g_i) CONVERGEN DÉBILMENTE A f Y g - RESPECTIVAMENTE POR SER U' DÉBILMENTE COMPACTO.

YA QUE $(B_i)^{\#}; i=1,2$ SON DÉBILMENTE CERRADOS, SE SIGUE QUE $h= af+(1-a)g$ ESTÁ EN $Co((B_i)^{\#}; i=1,2)$. SI $a=1$, PODEMOS SUPONER - QUE (f_i) CONVERGE DÉBILMENTE ALGUNA f EN $(B_1)^{\#}$, ENTONCES $f\leq h$ PORQUE $a_i f_i+(1-a_i)g_i \geq a_i f_i$, f_i, g_i K' Y K' DÉBILMENTE CERRADO, ENTONCES SE SIGUE QUE $h\in(B_1)^{\#}$ POR LA DEFINICIÓN DE $(B_1)^{\#}$. POR LO TANTO A ES CERRADO DÉBILMENTE.

PARA B, YA QUE $(A_i-K)^0\cap\gamma U^0$ ES COMPACTO DÉBILMENTE, ENTON-- CES POR LA PROPOSICIÓN 6.10 SE SIGUE QUE B ES DÉBILMENTE COMPACTO.

YA QUE A ES CERRADO DÉBILMENTE Y B COMPACTO DÉBILMENTE COMPACTO, ENTONCES POR LAS PROPOSICIONES 7.12 Y 9.4, SE SIGUE QUE- EXISTE c EN E TAL QUE $f(c)\geq 1>g(c)$ PARA TODA $f\in A$ Y $g\in B$. - DE LA PROPOSICIÓN 13.6 SE SIGUE QUE $(1+\varepsilon)c\geq B_i\,(i=1,2,\ldots N)$- YA QUE $(1+\varepsilon)c\in(B_i)^{\#\#}$.

POR EL TEOREMA BIPOLAR SE SIGUE QUE $c\in\bigcap\overline{(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)}$ PORQUE $c\in B^0=(Co((A_i-K)^0\cap\gamma U^0))^0=\bigcap((A_i-K)^0\cap\gamma U^0)^0=\bigcap\overline{Co(A_i-K,\frac{1}{\gamma}U)}$ $\bigcap\overline{(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)}$, ENTONCES EXISTEN $(c_i), i=1,2\ldots,N$ TALES QUE -- $c+c_i\leq A_i$ Y $\|c_i\|\leq\frac{2}{\gamma}$. YA QUE SI $c\in(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)$, ENTONCES $c=A_i-K+\frac{1}{\gamma}u$, DONDE $u\in U$, SE SIGUE QUE $c-\frac{1}{\gamma}u\leq A_i-K\leq A_i$, POR LO TANTO- EXISTE $c_i=-\frac{1}{\gamma}u$ TAL QUE $c+c_i\leq A_i$ Y $\|c_i\|\leq\frac{2}{\gamma}$, SI $c\in\overline{(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)}$, YA QUE A_i ES PUNTO INTERIOR DE $(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)$, SE SIGUE POR LA -- PROPOSICIÓN 6.12 QUE $sA_i+(1-s)c\in(A_i-K+\frac{1}{\gamma}U)$ PARA $0<s<1$, EN-

TONCES $sa_i+(1-s)c=a_i-k+\underline{1}u$, DONDE u U, SE SIGUE QUE $c=\frac{1u}{(1-s)}$ $\leq a_i-\frac{k}{(1-s)}\leq a_i$, ENTONCES PARA $0<s\leq\frac{1}{2}$ SE CUMPLE LO DESEADO.

YA QUE EL CONO ES GENERADOR, ENTONCES POR EL LEMA 1, EXISTEN $d_i e_i \in K$, $r_i>0$ TALES QUE $c_i=d_i-c_i$ Y $\|d_i\|, \|e_i\|\leq p_1\|c_i\|$ - PARA CADA $i=1,2...n$; DONDE $p_1=\frac{1}{B}$, DONDE B ES LA B DE LA PARTE III) DEL LEMA 1.

FINALMENTE TOMEMOS $x=(1+\epsilon)c$, $y=\epsilon c+(e_1+...+e_n)$, ENTONCES --- $x-y\leq a_i$, $x\geq b_i$ PORQUE $(1+\epsilon)c-\epsilon c-(e_1+...+e_n)=c-(e_1+...+e_n)\leq c-e_i=c+c_i-d_i\leq a_i$, $x\geq b_i$ POR DEFINICIÓN DE X Y $\|y\|\leq\epsilon\|c\|+(\|e_i\|+...+\|e_n\|)\leq\epsilon\|c\|+\frac{2p_1n}{\gamma}$.

POR OTRO LADO $c_1\leq c\leq a_1-c_1$, ENTONCES POR EL LEMA 2 SE SIGUE- QUE $\|c\|\leq p_2\max(\|c_1\|, \|a_1-c_1\|)\leq p_2\max(\|c_1\|, \|a_1\|+\|c_1\|)\leq p_2(\|a_1\|+\frac{4}{\gamma})$.

SE SIGUE QUE $\|y\|\leq\epsilon(p_2(\|a_1\|+\frac{4}{\gamma})+\frac{2p_1n}{\gamma}$

YA QUE $\epsilon>0$ Y $\gamma>0$ SON ARBITRARIAS, EL RESULTADO ES OBTENI- DO.

SUPONGAMOS QUE E TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN, ENTONCES POR LA PROPOSICIÓN 13.7 SE SIGUE QUE E' TIENE LA PROPIEDAD DE INTERPOLACIÓN.

B I B L I O G R A F I A.

[1] ANDO T. "ON FUNDAMENTAL PROPERTIES OF A BANACH SPACE WITH A CONE", AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, 1962.

[2] BIRKOFF G., "LATTICE THEORY", REVISED EDITION. AMER. MATH. SOC. COLLOQUIUM PUBLICATIONS, VOL. XXV, 1948.

[3] BOURBAKI. "ELÉMENTS DE MATHEMATIQUE", LIV. 5, CAPÍTULOS 1-5. HERMAN Y CIE, EDITEURS. PARÍS 1953.

[4] CHOQUET G. "LECTURES ON ANALYSIS", VOL. II. W.A. BENJAMIN, INC., 1969.

[5] DUNFORD-SCHWARTZ, "LINEAR OPERATORS", PART I. INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., 1966.

[6] HU S.T. "INTRODUCTION TO GENERAL TOPOLOGY". HOLDEN DAY, INC. 1966.

[7] KELLEY-NAMIOKA. "LINEAR TOPOLOGICAL SPACES". D. VAN-NOSTRAND, COMPANY, INC. 1963.

[8] LIUSTERNIK AND SOBOLEV. "ELEMENTS OF FUNCIONAL ANALYSIS". F. UNGAR, PUBLISHING CO., 1965.

[9] NAMIOKA I. "PARTIALLY ORDENED LINEAR TOPOLOGICAL SPACES". AMER. MATH. SOC., 1957.

[10] PERESSINI A.L. "ORDENED TOPOLOGICAL VECTOR SPACES".- HARPER AND ROW., 1967.

[11] ROYDEN H.L. "REAL ANALYSIS", MACMILLAN COMPANY. 1968.

[12] RUDIN W. "PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS". MC-- GRAW-HILL BOOK COMPANY., 1964.

[13] SCHAEFER H.H. "TOPOLOGICAL VECTOR SPACES". MACMILLAN. 1966.

[14] SIMMONS G.F. "INTRODUCTION TO TOPOLOGY AND MODERN -- ANALYSIS". MAC GRAW-HILL BOOK COMPANY INC. - 1963.

[15] SUPPES P.C. "AXIOMATIC SET THEORY". PRINCETON, VAN - NOSTRAND, 1960.

[16] TAYLOR A., "INTRODUCTION TO FUNCIONAL ANALYSIS". J. WELEY AND SONS, INC., 1958.

[17] VERA A. "UN TEOREMA ESPECTRAL PARA OPERADORES POSITIVOS EN ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS ORDENADOS". TESIS, 1971.

[18] YOSIDA K. "FUNCIONAL ANALYSIS". SPRENGER-VERLAG, - 1966.