

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORIA DE
CORRELACIONES ANGULARES**

T E S I S

Que para obtener el título de

F I S I C O

P r e s e n t a

MA. DEL CARMEN CISNEROS GUDIÑO

México, D. F.

1969



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres y a mis
hermanos*

Agradecimientos

Presento mi gran agradecimiento al Dr. J. Rickards C. por su dirección y ayuda continuas en cada una de las partes que forman la tesis; asimismo agradezco a I. Alvarez su ayuda en la discusión de problemas que se presentaron durante su desarrollo; a M. Flores por los programas y cálculos en la computadora y los comentarios sobre los resultados; a L. Gómez por el trazo de las gráficas y finalmente al Dr. F. Alba A., Director del Instituto de Física de la UNAM., por las facilidades que me brindó para llevarla a cabo.

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION .	1
I.- ANALISIS DE LA TEORIA DE DOBLE CORRELACION .	4
II.- EJEMPLOS DE LA APLICACION DE LA FUNCION DE DOBLE CORRELACION .	17
a) Reacciones partícula-gamma con mezclas de multipolaridades.	17
b) Reacciones partícula-gamma con mezclas de espín del canal y de momento angular.	28
III.- ANALISIS DE LA FUNCION DE CORRELACION PARTICULA-GAMMA-GAMMA .	40
IV.- GEOMETRIAS .	
V.- EJEMPLOS DE APLICACION DE LA FUNCION DE TRIPLE CORRELACION .	66
CONCLUSIONES .	75
REFERENCIAS .	78
APENDICE	80

INTRODUCCION

Es el presente trabajo una somera exposición de la teoría de la doble y triple correlación y de su utilidad al aplicarla a algunos problemas particulares en los que se desean determinar los espines y paridades de los niveles nucleares, así como una serie de parámetros no cuantizados δ , que representan mezclas de estados caracterizados por diferentes números cuánticos, o bien mezclas de multipolos en el caso de radiaciones γ .

El desarrollo de dicha teoría permite analizar con detalle las distribuciones angulares (doble correlación) y la triple correlación, y asignar comparando con los resultados experimentales bajo ciertas condiciones geométricas, los números cuánticos provenientes de resonancias aisladas.

En la primera sección se introducen los parámetros de mezcla en la función que describe la correlación doble, a fin de obtener los coeficientes de los polinomios de Legendre; - - asimismo se presenta a $W(\theta)$ como una serie de potencias pares de $\cos \theta$ que facilita la elaboración y el ajuste de las curvas,

y se analizan ejemplos. Uno de ellos muestra que en el caso de tener un núcleo residual con espín diferente de cero, y con un solo parámetro δ , lleva con frecuencia a resultados ambiguos. (Litherland y Ferguson (22), Smulders (16), Van Rinsvelt (7), (Sección II).

Dicha ambigüedad es posible de salvar si se dispone de otra radiación gamma, es decir, si el estado final, para el caso de doble correlación, decae nuevamente por gamma, se está entonces en condición de medir la triple correlación, o sea, las intensidades de las diferentes componentes de la cascada en coincidencia, como función de los ángulos involucrados en el proceso, para este caso: la dirección del haz incidente y las direcciones de cada una de las radiaciones gamma salientes. La teoría general para estos casos está descrita en la Sección III.

Si bien los experimentos de triple correlación son mucho más complicados que los de doble correlación, sin embargo dicha complicación es compensada por la calidad de información que se puede obtener de ellos.

La complejidad de los experimentos de correlación triple puede ser simplificada por el uso de arreglos geométricos de los detectores con base en las características especiales de las funciones angulares (Sección IV).

La Sección V muestra un ejemplo en el que se observa

claramente la utilidad de la triple correlación, para asignar valores a los espines y parámetros no cuantizados en las reacciones nucleares.

Quedan por mencionar las limitaciones del desarrollo: se tratan resonancias aisladas, el orden de la máxima radiación multipolar, 2, además del cuidado que se debe tener al proponer la secuencia de los números cuánticos involucrados en la reacción y del rango cubierto por las tablas disponibles para este tipo de tratamiento.

1. ANALISIS DE LA FUNCION DE DOBLE CORRELACION

La función de correlación angular expresada en términos de los tensores estadísticos, introducidos por A. J. Ferguson

(1) toma para reacciones partícula-gamma, la forma :

reacciones
partícula-gamma

$$W(\theta) = \sum_{\substack{a \ell_1 \ell_1' \ell_2 \\ \ell_2' b b' k}} (-)^{a-c} \frac{1}{16\pi^2 \hat{a}^2} \bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b'; a k) \\ \bar{Z}_1(\ell_2 b \ell_2' b'; c k) \langle b || \ell_1 | a \rangle \langle b' || \ell_1' | a \rangle^* \\ \langle c | \ell_2 || b \rangle \langle c | \ell_2' || b' \rangle^* Q_k P_k(\cos \theta) \quad (1.1)$$

y para reacciones partícula-partícula :

reacciones
partícula-partícula

$$W(\theta) = \sum_{\substack{a \ell_1 \ell_1' \ell_2 \\ \ell_2' b b' k}} (-)^{a-c} \frac{1}{16\pi^2 \hat{a}^2} \bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b'; a k) \\ \bar{Z}(\ell_2 b \ell_2' b'; c k) \langle b || \ell_1 | a \rangle \langle b' || \ell_1' | a \rangle^* \\ \langle c | \ell_2 || b \rangle \langle c | \ell_2' || b' \rangle^* Q_k P_k(\cos \theta)$$

Los coeficientes \bar{Z} y \bar{Z}_1 se encuentran tabulados,

y los términos : $\langle b || \ell_1 | a \rangle \langle b' || \ell_1' | a \rangle^*$, $\langle c | \ell_2 || b \rangle \langle c | \ell_2' || b' \rangle^*$,
 $\langle c | \ell_2 || b \rangle \langle c | \ell_2' || b' \rangle^*$, (ver apéndice).

son elementos reducidos de matriz que describen la dinámica del sistema. Devons y Goldfarb (2).

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son de gran generalidad ya que se aplican a reacciones que presentan mezclas de estados caracterizados por diferentes momentos angulares (l, l'), mezclas de multipolaridades de rayos gamma (L, L'), tanto en el canal de entrada como en el de salida, así como también al caso en que hay mezclas de estados intermedios (b, b') y en el espín del canal (a, a'). Es muy conveniente sin embargo tratar exclusivamente con resonancias aisladas, o sea con reacciones que presenten un solo estado intermedio ($b = b'$), restricción que se impondrá a las fórmulas anteriores.

condición :
resonancias
aisladas

Otras limitaciones están ya involucradas en la fórmula misma : se suponen haces y núcleos no polarizados y energías definidas para haces entrantes y salientes ya sea de partículas o de rayos gamma.

haces no polariza-
dos y energías
definidas

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) pueden escribirse en forma compacta como :

$$W(\theta) = \sum_k a_k P_k(\cos\theta) \quad (1.3)$$

Por comparación de (1.1) y (1.2) con (1.3) y normalizando $W(\theta)$ se obtendrán los coeficientes a_k en función de elementos tabulados y de los parámetros de mezcla δ . Como la función de correlación varía notablemente para diferentes

valores de δ dichas expresiones resultan muy importantes.

Mediante esas expresiones se puede calcular su valor y obtener

así, por ejemplo, la intensidad relativa de las radiaciones. Por

definición, Biedenharn (3)

$$\delta^2 = \frac{\text{Intensidad de la radiación } L'}{\text{Intensidad de la radiación } L} = \frac{|\langle c|L'|b \rangle|^2}{|\langle c|L|b \rangle|^2}; \quad (1.4)$$

la mezcla de multipolos :

$$\delta_2 = \frac{\langle c|L_2|b \rangle}{\langle c|L_1|b \rangle} \quad (1.5) \quad \text{mezclas de multipolos}$$

la mezcla de estados caracterizados por diferentes momentos angulares

$$\delta_1(a') = \frac{\langle b||L_1|a' \rangle}{\langle b||L_2|a' \rangle} \quad (1.6) \quad \text{mezclas de momentos angulares}$$

y la mezcla en el espín del canal

$$\delta_0 = \left| \frac{\langle b||L_1|a' \rangle}{\langle b||L_2|a' \rangle} \right|^2 \quad (1.7) \quad \text{mezcla en el espín del canal}$$

Por el hecho de haber supuesto que no existen interferencias en el estado compuesto b , los valores de k se restringen a números pares, ya que una k impar implica mezclas de estados intermedios de paridades diferentes; además es muy poco probable que el valor de k exceda de 4 en las reacciones que involucran rayos gamma, pues las radiaciones gamma con orden

multipolar mayor que 2 generalmente no se presentan y k es tal que $k \leq 2L_{\max}$. Análogamente para el caso de partículas $k \leq 2l_{i \max}$ Devons y Goldfarb (2).

$$\begin{aligned} k &\leq 2L_{\max} \\ k &\leq 2l_{i \max} \end{aligned}$$

El factor Q_k que aparece en las fórmulas (1.1) y (1.2) es el coeficiente de atenuación que depende de las características físicas y geométricas del detector, así como de su distancia al blanco. Los valores numéricos para algunos casos están tabulados por Gove y Rutledge (4), Rose (5), Ferguson y Rutledge (6), Ferguson (1), o bien pueden calcularse. Fraunfelder (8), Gove (9).

coeficiente de atenuación Q_k

Si se desarrolla la fórmula (1.1) con respecto a k y si se le asigna al factor Q_k el valor de 1 para toda k , por razones de sencillez, se tiene:

$$\begin{aligned} W(\theta) = & (16\pi^2)^{-1} \sum_{(-)}^{-c} a^{-2} \left\{ \bar{Z}(l_1 b l_1 b; a_0) \bar{Z}_1(L_2 b L_2 b; c_0) \right. \\ & \langle b || l_1 | a \rangle \langle b || l_1 | a \rangle^* \langle c || L_2 || b \rangle \langle c || L_2 || b \rangle^* P_0(\cos \theta) + \\ & \bar{Z}(l_1 b l_1 b; a_2) \bar{Z}_1(L_2 b L_2 b; c_2) \langle b || l_1 | a \rangle \langle b || l_1 | a \rangle^* \\ & \langle c || L_2 || b \rangle \langle c || L_2 || b \rangle^* P_2(\cos \theta) + \bar{Z}(l_1 b l_1 b; a_4) \\ & \bar{Z}_1(L_2 b L_2 b; c_4) \langle b || l_1 | a \rangle \langle b || l_1 | a \rangle^* \langle c || L_2 || b \rangle \\ & \left. \langle c || L_2 || b \rangle^* P_4(\cos \theta) \right\}. \end{aligned}$$

Por comparación con la fórmula (1.3) quedan determinados los coeficientes a_0 , a_2 y a_4 cuyas expresiones se pueden simplificar al introducir las restricciones naturales que

imponen las sumas vectoriales.

Por definición: Blatt y Biedenharn (10)

$$\bar{Z}(\ell, b, \ell'; b; a_k) = \hat{\ell}_1 \hat{\ell}'_1 \hat{b} \hat{b}' (\ell_0 \ell'_0 | a_k) \quad (1.8)$$

$$W(\ell, b, \ell'; b; a_k)$$

$$\bar{Z}_1(L_2 b L'_2 b'; c_k) = (-1)^{k-L_2+L'_2-1} \hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{b} \hat{b}' (L_2 1 L'_2 - 1 | k_0)$$

$$W(L_2 b L'_2 b'; c_k). \quad (1.9)$$

El coeficiente de Clebsch-Gordan $(\ell_0 \ell'_0 | a_k)$ se anula si

$\ell + \ell' - k$ es impar, pero para este caso k sólo puede ser número par; por lo tanto $\ell + \ell'$ es par, así que los valores de $\ell \neq \ell'$

k sólo puede ser número par
 $\ell' = \ell + 2$

deberán diferir en un múltiplo de dos unidades; simultáneamente debe cumplirse la condición triangular $\Delta(\ell \ell' k)$, la cual hace

que para $k=0$, $L_2 = L'_2$ pues debe satisfacerse también la condición $\Delta(L_2 L'_2 k)$.

$k=0 \Rightarrow$
 $L_2 = L'_2$

Se tienen además los valores siguientes:

$$\bar{Z}(\ell, b, \ell, b; a_0) = (-1)^{b-a} \hat{b}$$

$$\bar{Z}_1(L_2 b L_2 b; c_0) = (-1)^{b-c} \hat{b}$$

Con estos valores, el coeficiente a_0 toma la forma

$$a_0 = \sum_{a \ell_1 \ell'_1 L'_2} \hat{b}^2 (-1)^{2a-b-c} \langle b || \ell_1 a \rangle \langle b || \ell'_1 a \rangle^* \langle c || L_2 b \rangle \langle c || L'_2 b \rangle^*$$

Falta desarrollar el coeficiente a_0 respecto de $L_2, L'_2, \ell_1,$

ℓ'_1 . Efectuando este desarrollo, se tiene, haciendo $L_2 = 1 -$

$$L'_2 = 2$$

$$a_0 = \sum_{a_1, \ell_1} \hat{b}^2 (-)^{2b-a-c} [\langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{11} \ell_1 b \rangle^2 + \langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{12} \ell_1 b \rangle^2]$$

donde

$$\langle c_{12} \ell_1 b \rangle^2 = \langle c_{12} \ell_1 b \rangle \langle c_{12} \ell_1 b \rangle^*$$

Se obtiene finalmente :

$$a_0 = (-)^{2b-c} \hat{b}^2 \left\{ (-)^{a_1} [\langle b_{11} \ell_1 | a \rangle^2 \langle c_{11} \ell_1 b \rangle^2 + \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^2 \langle c_{11} \ell_1 b \rangle^2 + \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^2 \langle c_{12} \ell_1 b \rangle^2 + \langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle c_{11} \ell_1 b \rangle^2 + \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{12} \ell_1 b \rangle + \langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{12} \ell_1 b \rangle^2] \right\}$$

Para los coeficientes de $P_2(\cos \theta)$ y $P_4(\cos \theta)$, a_2 y a_4

se tienen las expresiones :

$$a_2 = \sum_{a_1, \ell_1, \ell_2, \ell_2'} \bar{Z}(\ell_1, b \ell_1' | b; a_2) \bar{Z}_1(\ell_2, b \ell_2' | b; c_2) \langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{11} \ell_2 b \rangle \langle c_{11} \ell_2' b \rangle^*$$

y

$$a_4 = \sum_{a_1, \ell_1, \ell_2, \ell_2'} \bar{Z}(\ell_1, b \ell_1' | b; a_4) \bar{Z}_1(\ell_2, b \ell_2' | b; c_4) \langle b_{11} \ell_1 | a \rangle \langle b_{11} \ell_1' | a \rangle^* \langle c_{11} \ell_2 b \rangle \langle c_{11} \ell_2' b \rangle^*$$

Si se efectúan las sumas indicadas se obtienen ecuaciones similares a la correspondiente a α_0 . Estas expresiones dependen de los elementos reducidos de matriz y su cálculo directo es muy complicado, cuando no, imposible. La función $W(\theta)$ se normaliza lo que no altera su forma gráfica. Una normalización conveniente permite encontrar cocientes de elementos reducidos de matriz que son los parámetros de mezcla δ . Por lo tanto, introduciendo el factor de normalización:

La función de correlación se normaliza y se obtiene en función de δ

$$N = (16\pi^2)^{-1} \langle b \| \ell_1 a \rangle^2 \langle c \| L_2 \| b \rangle^2$$

se tienen los nuevos valores para α_0 , α_2 y α_4 :

$$\alpha_0 = (-1)^{2b-c} [1 + \delta_1^2(a) + (1 + \delta_1^2(a')) \delta_0] (1 + \delta_2^2) \hat{b}^2 \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \{ (-1)^a [\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1 b; a_2) + 2\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b; a_2) \delta_1(a) \cos(\zeta_{\ell_1} - \zeta_{\ell_1'}) + \\ & \bar{Z}(\ell_1' b \ell_1 b; a_2) \delta_1^2(a)] + (-1)^{a'} [\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1 b; a'_2) + 2\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b; a'_2) \\ & \delta_1(a') \cos(\zeta_{\ell_1} - \zeta_{\ell_1'}) + \bar{Z}(\ell_1' b \ell_1' b; a_2) \delta_1^2(a')] \delta_0 \} \{ \bar{Z}_1(1b \| b; c_2) + \\ & 2\bar{Z}_1(1b \| 2b; c_2) \delta_2 + \bar{Z}_1(2b \| 2b; c_2) \delta_2^2 \} \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & \{ (-1)^a [\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1 b; a_4) + 2\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b; a_4) \delta_1(a) \cos(\zeta_{\ell_1} - \zeta_{\ell_1'}) + \\ & \bar{Z}(\ell_1' b \ell_1 b; a_4) \delta_1^2(a)] + (-1)^{a'} [\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1 b; a'_4) + 2\bar{Z}(\ell_1 b \ell_1' b; a'_4) \\ & \delta_1(a') \cos(\zeta_{\ell_1} - \zeta_{\ell_1'}) + \bar{Z}(\ell_1' b \ell_1' b; a'_4) \delta_1^2(a')] \delta_0 \} \bar{Z}_1(2b \| 2b; c_4) \delta_2^2 \quad (1.12) \end{aligned}$$

El factor 2 resulta de considerar los estados $l_1, l_1'; l_2, l_2'$;

L_2, L_2' y L_2', L_2 . Para casos más complicados se introduce el factor 2^n , siendo n el número de pares diferentes para los que - -

$l_1 \neq l_1'$ y $L_2 \neq L_2'$, antes de separar los coeficientes de los polinomios de Legendre.

2^n es el número de pares diferentes para $l_1 \neq l_1'$; $L_2 \neq L_2'$

Aparece también un desfaseamiento representado por el término $\cos(\sum l_i - \sum l_i')$ que no se ha introducido en forma arbitraria sino que se presenta al considerar la interacción de partículas cargadas y contiene el efecto coulombiano y el de esfera rígida.

$\cos(\sum l_i - \sum l_i')$ desfaseamiento por interacción de partículas cargadas

La justificación del factor $\cos(\sum l_i - \sum l_i')$ se hará por comparación con la fórmula de Blatt y Biedenharn (10) para el mismo problema. Blatt y Biedenharn, (ver también W.T. Sharp (11)) usando el formalismo de la dispersión, y con la técnica de Racah para los acoplamientos de momentos angulares, obtienen la expresión :

$$W(\theta) \sim \sum (-)^{a-c} \bar{Z}(l_1 b l_1' b'; a k) \bar{Z}_1(l_2 b l_2' b'; c k) P_n(\cos \theta) \langle a l_1 b | u | c l_2 b \rangle \langle a l_1' b | u | c l_2' b \rangle^* \quad (1.13)$$

En esta fórmula, se han omitido los factores constantes ya que la forma de $W(\theta)$ no es sensible a ellos. Comparando (1.13) con (1.1) se ve fácilmente que :

$$\langle a_l, b_l | U | c_l, d_l \rangle \sim \langle a_l | l, l \rangle \langle c_l | l, l \rangle \left(\frac{k}{2\pi \hbar v_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle a_l, b_l | U | c_l, d_l \rangle^* \sim \langle a_l | l, l \rangle^* \langle c_l | l, l \rangle^* \left(\frac{k}{2\pi \hbar v_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

el factor $\left(\frac{k}{2\pi \hbar v_0} \right)^{\frac{1}{2}}$ se debe a que $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{W(\theta)}{(2\pi v_0 \hbar k)}$

Ahora bien, se puede escribir, A. J. Ferguson (1), la igualdad siguiente:

$$\langle a_l, b_l | U | c_l, d_l \rangle = 2i \frac{[\Gamma(a_l) \Gamma(c_l)]^{\frac{1}{2}}}{\Gamma} \text{sen } \beta e^{i(\beta + \gamma_1 + \gamma_2)} \quad (1.14)$$

que está de acuerdo con la expresión de Wigner y Eisenbud (12) para resonancias aisladas, salvo por el término β que es el desfasamiento de la resonancia; β es tal que $\text{tg } \beta = \frac{\frac{1}{2}\Gamma}{E_0 - E}$ donde E_0 es la energía "efectiva" de la resonancia y Γ es la anchura total, tal que $\Gamma = \sum \Gamma(x, l)$. Si se tienen energías muy por abajo de la energía de resonancia, el valor de β es pequeño y positivo; para una energía igual a la energía de resonancia, toma el valor de $\frac{1}{2}\pi$, y se acerca asintóticamente al valor de π cuando la energía es mucho mayor que la energía de resonancia. Para una resonancia aislada, toma el valor máximo de $\frac{1}{2}\pi$, por ejemplo, en la captura radioactiva por núcleos ligeros de partículas cargadas de baja energía (protones o partículas alfa). La condición para considerar las resonancias como resonancias aisladas es que las anchuras parciales y la anchura total sean menores que el espaciamiento entre los niveles. El

β desfasamiento por la resonancia

E_0 energía efectiva de resonancia

en resonancias aisladas las anchuras parciales y la anchura total son menores que el espaciamiento entre los niveles

espaciamiento entre los niveles es relativamente grande para reacciones de baja energía con núcleos ligeros, y se aseguran anchuras parciales pequeñas en virtud de la débil interacción de los rayos gamma en presencia de barreras coulombianas.

Las anchuras parciales se denotan como $\Gamma(a l_1)$, $\Gamma(c L_2)$, $\Gamma(c L'_2)$ y usualmente se escriben

$$g(a l_1) = \pm \sqrt{\Gamma(a l_1)} \quad \text{y} \quad g(c L_2) = \pm \sqrt{\Gamma(c L_2)}$$

y son tales que

$$g(a l_1) \sim \langle a l_1 | l b \rangle ; \quad g(c L_2) \sim \langle b | l L_2 | c \rangle \quad (1.15)$$

$$\Gamma(c L_2) \sim \langle b | l L_2 | c \rangle \langle b | l L_2 | c \rangle^*$$

ζ_l representa el desfase asociado a la partícula entrante (índice 1) y saliente (índice 2), y contiene el desfase coulombiano para partículas cargadas y el producido por efecto de esfera rígida, su expresión es :

$$\zeta_l = - \operatorname{tg}^{-1} \frac{F_l}{G_l} + \sum_{r=1}^l \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta_r}{r}$$

El primer sumando, $-\operatorname{tg}^{-1} \frac{F_l}{G_l}$, corresponde al efecto de esfera rígida, donde F_l y G_l son las funciones regular e irregular, solución de la ecuación diferencial radial para la región externa, a saber :

$$\frac{d^2 x}{d\rho^2} + \left[1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2} \right] x = 0 .$$

ζ_l desfase coulombiano más desfase por efecto de esfera rígida

El término $\sum_{r=1}^l \text{tg}^{-1} \frac{\eta}{r}$ es el desfase producido por el efecto coulombiano, donde $\eta = \frac{Z Z' e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar^2 k}$ es el parámetro de Coulomb, cuyo valor es:

$$\eta = 0.1574 Z_0 Z_1 \left(\frac{m_1}{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Z_0 y Z_1 son los números de carga del núcleo blanco y partícula saliente respectivamente; m_1 es la masa de la partícula incidente y E su energía de laboratorio en Mev.

Si se escribe la ecuación (1.13) reemplazando la expresión (1.14) en lugar de los elementos de matriz se obtiene:

$$W(\theta) \sim \sum (-)^{a-c} (16\pi^2 \hat{a}^2)^{-1} \bar{Z}(l, l', b; a k) \frac{\bar{Z}(L_2, b, L_2', b; c k) g(a, l) g(a, l') g(c, L_2) g(c, L_2')}{\frac{1}{4} \Gamma^2 + (E - E_0)^2} \cos(\gamma_1 - \gamma_1' + \gamma_2 - \gamma_2') P_k(\cos \theta) Q_k.$$

Si en el canal de entrada hay la posibilidad de mezclas de l , digamos, l y l' , pero no hay posibilidad de mezclas en el canal de salida, entonces se tiene al substituir las (1.15)

$$W(\theta) \sim \sum (-)^{a-c} (16\pi^2 \hat{a}^2)^{-1} \langle b || l, l' || a \rangle \langle b || l', l || a \rangle^* \langle c || L_2 || b \rangle \langle c || L_2' || b \rangle^* P_k(\cos \theta) Q_k \cos(\gamma_{l'} - \gamma_{l'}). \quad (1.16)$$

Al desarrollar la ecuación anterior se ve que los términos que dependen de l y l' quedarán multiplicados por $\cos(\gamma_{l'} - \gamma_{l'})$.

Para el cálculo del valor de $\cos(\int_{\theta_1}^{\theta_2})$ en un problema particular pueden usarse las gráficas de las funciones de Coulomb de Sharp, Gove y Paul (13).

Se ha presentado explícitamente, a partir de una fórmula general (1.1) la distribución angular (1.3) como una serie de polinomios de Legendre, que aparecen naturalmente en el desarrollo del formalismo de tensores estadísticos de Fano y Racah (14) al aplicarlo al problema de las correlaciones angulares; las correcciones que se introducen al tener detectores de tamaño finito se aplican directamente a la expresión en función de los polinomios de Legendre, y se tienen además otras ventajas que favorecen expresar la función $W(\theta)$ en la forma (1.3). Sin embargo $W(\theta)$ expresada así no presenta gran facilidad para adaptar las curvas obtenidas experimentalmente al efectuar las distribuciones angulares, si las medidas no cubren un rango razonablemente grande de ángulos, lo cual implica muchas medidas. Si no se desea un alto grado de precisión, es más fácil manejar potencias de $\cos(\theta)$ de manera que se obtiene una nueva expresión para :

utilidad de expresar $W(\theta)$ en función de $\cos^2 \theta$

$$W(\theta) = b_0 + b_2 \cos^2 \theta + b_4 \cos^4 \theta + \dots \quad (1.17)$$

Una vez obtenidos los coeficientes a_k de $W(\theta)$ (1.10), (1.11) y (1.12) con todas las condiciones físicas que caracterizan al problema, es posible sin más que algunos pasos algebraicos hallar la relación entre los coeficientes a_k y b_k .

Esta relación es :

$$b_0 = a_0 - 0.5 a_2 + 0.375 a_4 \quad (1.18)$$

$$b_2 = 1.5 a_2 - 3.750 a_4 \quad (1.19)$$

$$b_4 = 4.375 a_4 \quad (1.20)$$

La ventaja de aplicar (1.17) se presenta al efectuar los ajustes de las curvas. Asimismo reduce ventajosamente el número de medidas necesarias ya que en ocasiones basta con 3, además de que se facilita la aplicación de las computadoras a la solución del problema. Por tanto, para los fines experimentales es aconsejable el uso de $W(\theta)$ en la forma (1.17). Las curvas asociadas a los ejemplos que se presentan más adelante se dan en la forma (1.17).

II. EJEMPLOS DE LA APLICACION DE LA FUNCION DE DOBLE CORRELACION

a) Reacciones partícula-gamma (con mezclas de mul tipolaridades).

Se supone en este caso, como se indicó al exponer la teoría, que tanto el haz incidente como el blanco no están polarizados, y que se estudian únicamente resonancias aisladas. Esquemáticamente la reacción se puede representar como aparece en la figura 1. Se ha elegido para su estudio la reacción $Mg^{24}(\alpha \gamma)Si^{28}$ que presenta un caso interesante a la vez que sencillo ya que tanto el núcleo blanco como la partícula incidente tienen espín cero, lo cual deja al estado resonante con paridad natural: $J^\pi = (0^-, 1^-, 2^-, \dots)$.

Se observa desde luego que no existirán mezclas en el espín del canal (espín del blanco más el espín de la partícula incidente); éste será siempre cero. Tampoco se presentarán mezclas de momentos orbitales de la partícula incidente l .

Para dar los valores a la función de correlación se utilizarán básicamente las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12) las cuales se transformarán más tarde en las (1.18), (1.19) y

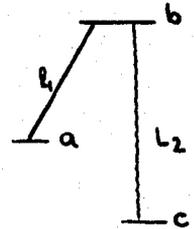


Figura 1

núcleo blanco y
partícula incidente
sin espín

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ \delta_0 &= 0 \\ \delta_1 &= 0 \end{aligned}$$

(1.20).

También se sabe que el sistema compuesto decae por gamma al estado base, 0^+ , o bien al primer nivel excitado 2^+ .

El primer caso carece de interés para ilustrar problemas de mezclas y ya fué tratado por Alvarez (15). El segundo presenta mezclas de multipolaridades de rayos gamma. Luego en la función

$W(\theta) = \sum a_k (\delta_0 \delta_1 \delta_2) P_k(\cos\theta)$, los coeficientes a_k serán únicamente funciones de δ_2 :

$$a_k = a_k(\delta_2)$$

$$a_0 = (-)^{2b-a-c} b^2 (1 + \delta_2^2) \quad (2.1)$$

$$a_2 = (-)^a \bar{Z}(l b l b; a 2) [\bar{Z}_1(l b l b; c 2) + 2\bar{Z}_1(l b 2 b; c 2) \delta_2 + \bar{Z}_1(2 b 2 b; c 2) \delta_2^2] \quad (2.2)$$

$$a_4 = (-)^a \bar{Z}(l b l b; a 4) \bar{Z}_1(2 b 2 b; c 4) \delta_2^2 \quad (2.3)$$

Se procederá a asignar diferentes valores al estado intermedio b y se escribirán los números cuánticos compatibles con este valor de b y los demás que involucra la reacción.

Simbólicamente la reacción se escribe como

reacciones del tipo

$$a(l) b \left(\frac{l}{l} \right) c$$

$$a(l) b \left(\frac{l}{l} \right) c$$

Los valores conocidos son $a = 0^+$ y $c = 2^+$ y como se dijo antes se probarán las diferentes combinaciones de l y L compatibles con una b propuesta.

Para $b=0$ se tiene $\sigma^+(0)\sigma^+(2)2^+$ en esta situación no aparecen mezclas y el caso ya fué tratado.

Para $b=L^-$ se tiene $0(L)1^-(\frac{1}{2})2^+$; en este caso se observa que L puede tomar los valores 1 ó 2. Los valores de L están restringidos por la condición del triángulo implícita en las ecuaciones (1.10) o (1.12), $\Delta(cLb)$, o sea que debe cumplirse la relación $|c-L| \leq b \leq |c+L|$. Se tendrán entonces mezclas de radiaciones gamma caracterizadas por diferente valor de L con valores:

$$a(1)1^-(\frac{1}{2})2^+$$

Gráfica 1

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 2$$

$$a_0 = (-)^{2-2} 1^2 (1 + \delta_2^2)$$

$$= 3(1 + \delta_2^2)$$

$$a_2 = \bar{z}(1111; 02) \{ \bar{z}_1(1111; 22) + 2\delta_2$$

$$z_1(1121; 22) + \delta_2^2 \bar{z}_1(2121; 22)$$

$$= 2.4495 \{ -0.1225 + 2\delta_2(0.8216) + \delta_2^2$$

$$(-0.6124) \}$$

$$a_4 = \bar{z}(1111; 04) \bar{z}_1(2121; 24) \delta_2^2 = 0$$

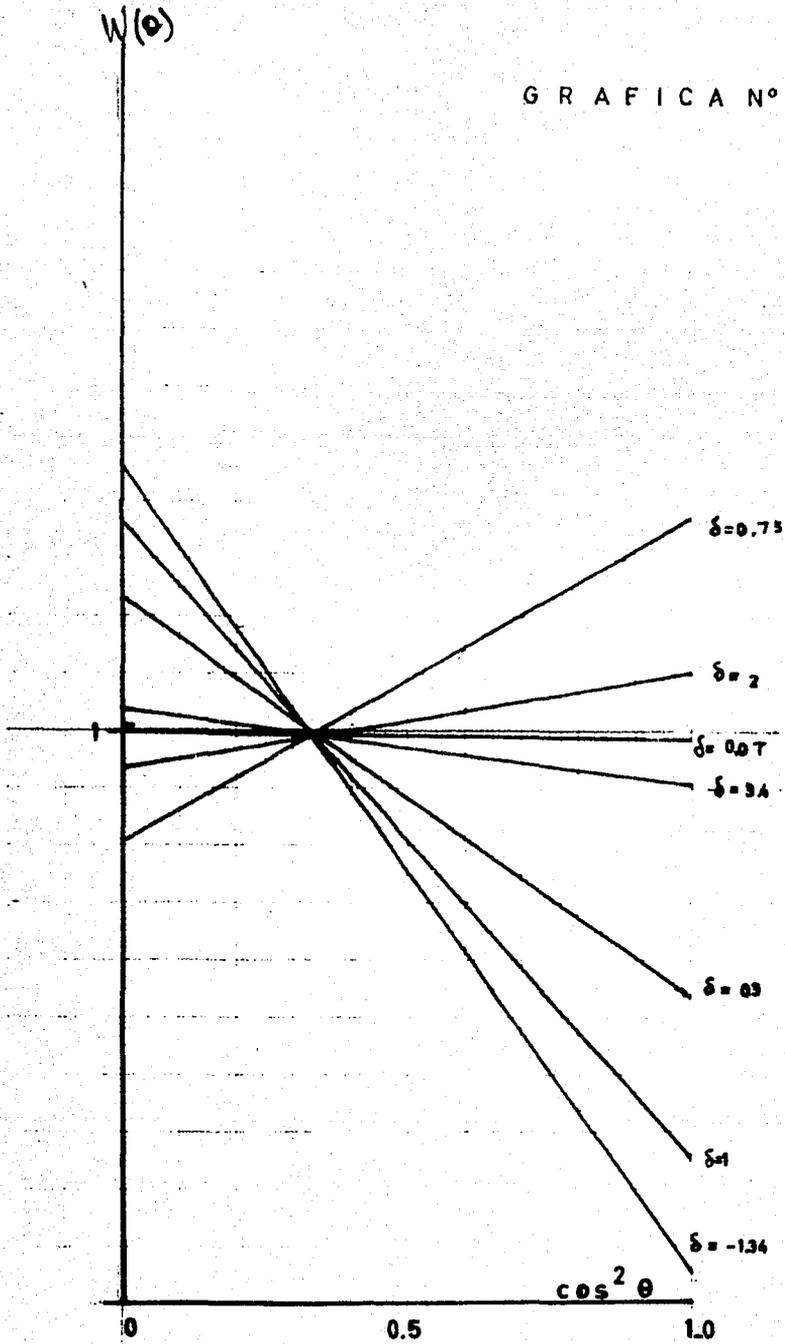
Normalizando:

$$\frac{a_0}{a_0} = A_0 = 1$$

$$\frac{a_2}{a_0} = A_2 = \frac{(-0.1 + 1.34\delta_2 - 0.5\delta_2^2)}{1 + \delta_2^2} Q_2$$

$$\frac{a_4}{a_0} = A_4 = 0$$

G R A F I C A N°1



$$0 + (1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^+$$

por lo que :

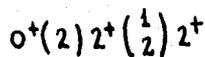
$$W(\theta) = 1 + \left[\frac{-0.1 + 1.34\delta_2 - 0.5\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right] Q_2 P_2(\cos\theta)$$

y en términos de potencias de $\cos^2\theta$

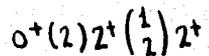
$$W(\theta) = \frac{1.0465 - 0.6231\delta_2 + 1.2325\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} + \frac{[-0.1395 + 1.8693\delta_2 - 0.6975\delta_2^2]}{1 + \delta_2^2} \cos^2\theta$$

La gráfica 1 muestra el comportamiento de las funciones $W(\theta)$ para diferentes valores de δ_2 en un rango de valores de 0 a 1 para $\cos^2\theta$. Se ha tomado un coeficiente de atenuación $Q_2 = 0.93$ con objeto de comparar posteriormente este valor con el de Smulders (16).

Si $b = 2^+$ la configuración de la reacción será



$b = 2^+$



Nuevamente se tienen mezclas de multipolaridades de rayos gamma. Introduciendo los nuevos valores para los diferentes espines en las ecuaciones (2.1), (2.2) y (2.3) se tiene

Gráfica 2

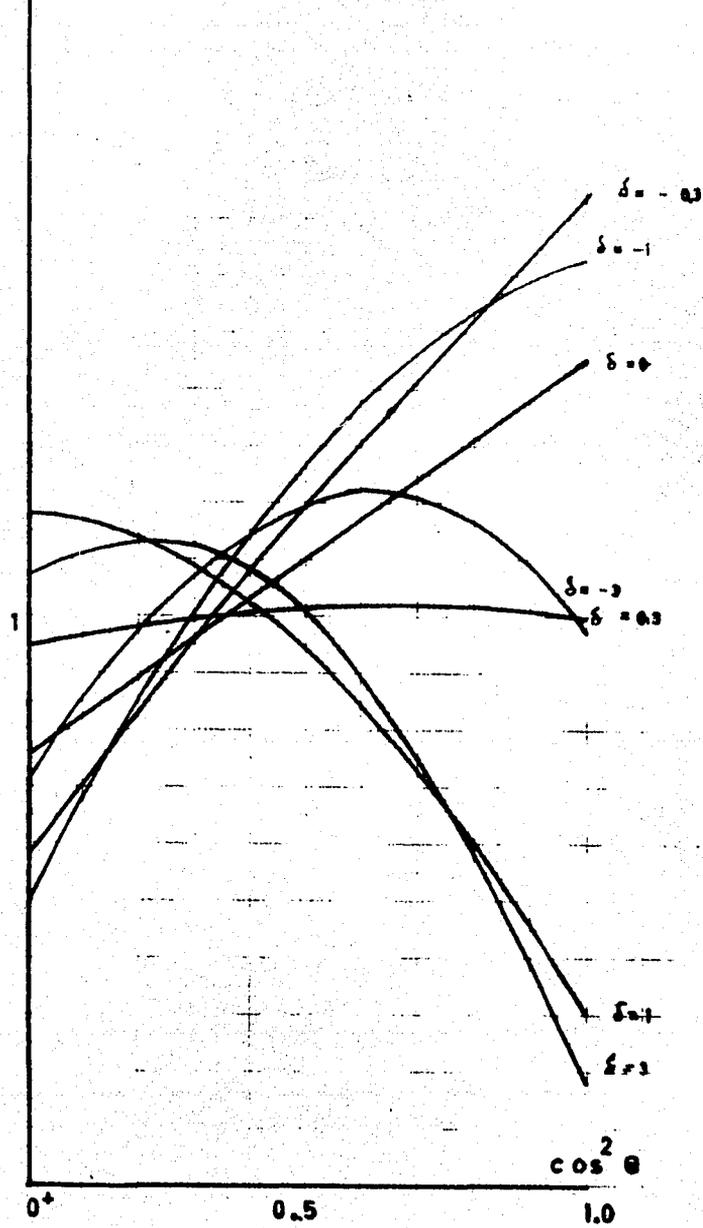
$$A_0 = 1$$

$$A_2 = \left(\frac{0.5 - 1.463\delta_2 - 0.153\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right) Q_2$$

$$A_4 = \left(\frac{0.4898\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right) Q_4$$

$W(\theta)$

GRAFICA N°2



$0^+ (2) 2^{(1)} 2^+$

$$W(\theta) = 1 + \left(\frac{0.5 - 1.463\delta_2 - 0.153\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right) P_2(\cos\theta) Q_2$$

$$- \frac{0.4898 \delta_2^2}{1 + \delta_2^2} P_4(\cos\theta) Q_4$$

o bien, en función de $\cos^2\theta$

$$W(\theta) = \frac{0.7675 + 0.6802\delta_2 + 1.2107\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} +$$

$$\frac{(0.6975 - 2.0408\delta_2 - 1.5093\delta_2^2)}{1 + \delta_2^2} \cos^2\theta +$$

$$\frac{1.6285 \delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \cos^4\theta.$$

La gráfica correspondiente es la número 2, con $Q_2 = 0.93$ y

$$Q_4 = .76.$$

Si $b = 3^-$ la configuración es $0^+(3)3^-\left(\frac{1}{2}\right)2^+$

y los coeficientes obtenidos son :

$$A_0 = 1$$

$$A_2 = \left(\frac{-0.4 - 0.96\delta_2 + 0.14\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right) Q_2$$

$$A_4 = \frac{-0.481\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} Q_4$$

$$W(\theta) = 1 + \left(\frac{-0.4 - 0.96\delta_2 + 0.14\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \right) Q_2 - \frac{0.481\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} Q_4$$

o bien :

$$W(\theta) = \frac{1.186 + 0.446\delta_2 + 0.7978\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} -$$

$$\frac{(0.558 - 1.3392\delta_2 + 1.5661\delta_2^2)}{1 + \delta_2^2} \cos^2\theta$$

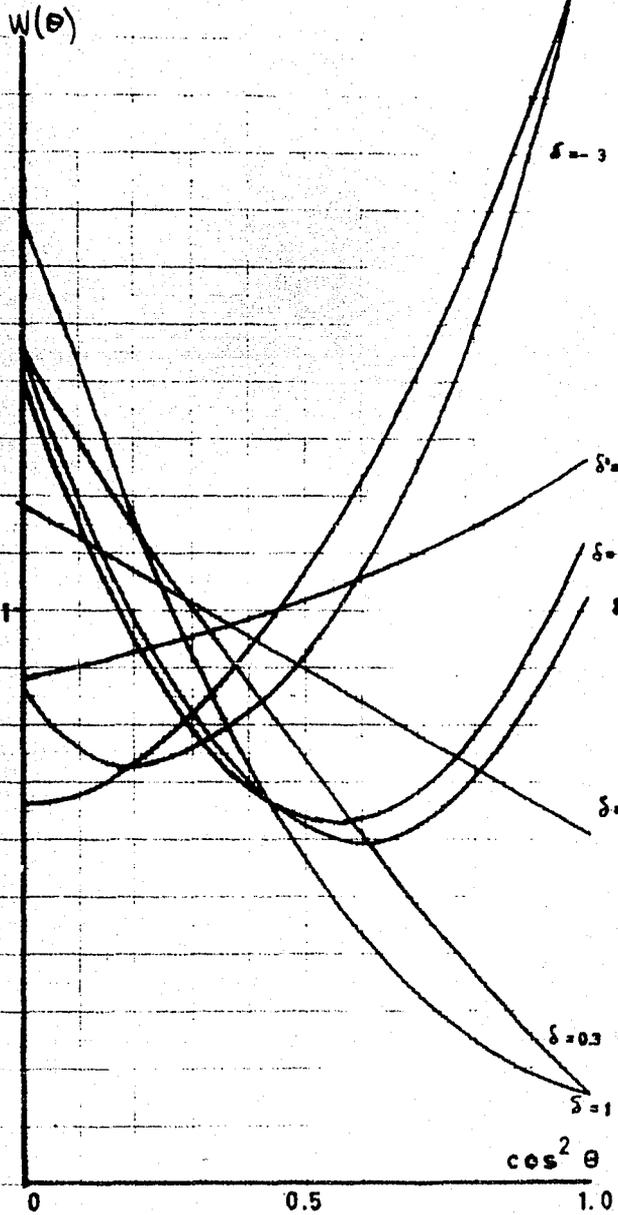
$$- \frac{1.5993\delta_2^2}{1 + \delta_2^2} \cos^4\theta$$

$b = 3^-$

$$0^+(3)3^-\left(\frac{1}{2}\right)2^+$$

Gráfica 3

GRAFICA N° 3



$0^+(3)3^{-\frac{1}{2}}2^+$

La gráfica correspondiente es la número 3 con $Q_2 = .93$ y $Q_4 = 0.76$. Con las expresiones obtenidas para $W(\theta)$ en función de δ , es posible asignarle a este parámetro diferentes valores (siete u ocho) para tener un juego de curvas para $W(\theta)$, gráficas 1, 2 y 3, que permitan determinar con las restricciones del caso el espín de la resonancia por cualquiera de los métodos numéricos o gráficos, comparando las curvas experimentales y teóricas. Los valores para dichas curvas fueron calculados en una computadora I.B.M. 1130 por Flores - Bravo (17).

Las gráficas 4, 5, 6 y 7 presentan algunas medidas obtenidas experimentalmente que corresponden a las resonancias: 13, 2, 3 y 12 observadas por Smulders (16).

Lo primero que se ocurre es comparar estos resultados con las gráficas obtenidas teóricamente y suponiendo que no hay mezclas de multipolaridades de rayos gamma. Alvarez (15).

A simple vista se observa que a las distribuciones angulares de las resonancias 13 y 2 gráficas 4 y 5 les corresponde una $J^\pi = 4$ sin mezclas, pero también se ajustan a las curvas correspondientes a $J^\pi = 2$ con δ entre -1 y -3. (Más tarde se calcularon valores más exactos para δ , Smulders (16)).

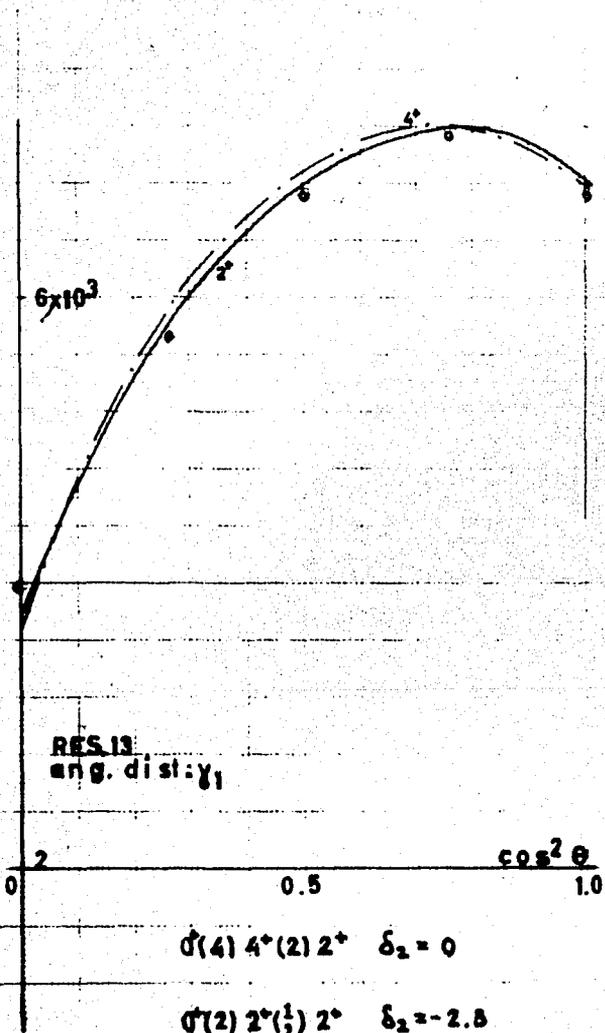
$$b = 4^+; \delta_2 = 0$$

$$b = 2^+; \delta_2 = -3$$

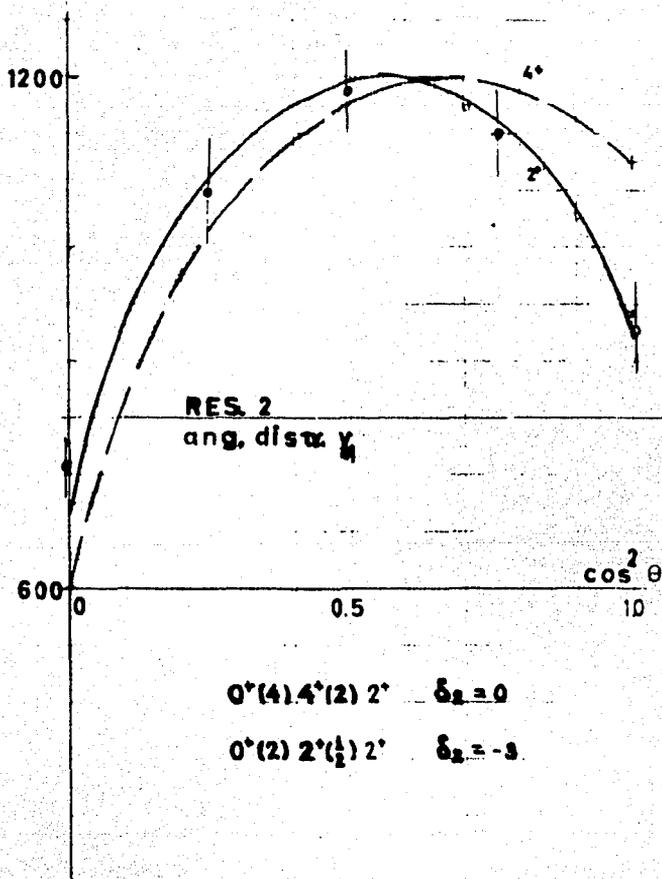
Gráficas 4 y 5

Respecto a las distribuciones angulares de las resonancias 3 y 12, gráficas 6 y 7 se observa que éstas no se ajustan

GRAFICA N°4



GRAFICA N° 5



a ninguna curva sin mezclas, sin embargo, al compararlas con las gráficas 1, 2 y 3 parecen corresponderles tres de los valores de J^π propuestos: $J^\pi = 3^-$ con $\delta = 0^+$; $J^\pi = 1^-$ con $\delta = -0.3$ y $J^\pi = 2^+$ con $\delta = 1$.

$b = 3^- ; \delta_2 = 0$
 $b = 1^- ; \delta_2 = -0.3$
 $b = 2^+ ; \delta_2 = 1$
 Gráficas 6 y 7

La ambigüedad en la asignación de los espines y paridades del estado compuesto sugiere buscar algún método que evite dicha confusión y una manera de hacerlo es empleando la correlación triple, que consiste en relacionar las distribuciones angulares de dos rayos gamma en cascada para obtener información adicional.

correlación triple

b) Reacciones partícula-gamma. (Con mezclas de espín del canal y mezclas de momento angular).

Este caso se ilustrará con una reacción (p, γ), en la que el núcleo blanco tiene espín semientero y el núcleo residual, espín cero.

So semientero
 $c = 0$

Se observarán por tanto mezclas de momentos orbitales de la partícula incidente y mezclas en el espín del canal.

Sea por ejemplo la reacción ${}^{31}\text{P}(p, \gamma){}^{32}\text{S}$
 E.B. Paul (25). El estado base de ${}^{31}\text{P}$ es $\frac{1}{2}$ asimismo el espín del protón es $\frac{1}{2}$, por tanto el espín del canal a , puede tener los valores 0 ó 1. Se sabe también que $c = 0^+$.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Supóngase $b = 1^+$. Ya que se ha considerado a b con paridad positiva, esto obliga a que ℓ sea número par, de manera que $\ell = 0, 2, 4, \dots$. También elimina la posibilidad

$$b = 1^+$$

$$\ell = 0, 2, 4, \dots$$

GRAFICA N° 6

6×10^3

5

4

3

2

1

RES. 3
ang. distr. γ_1

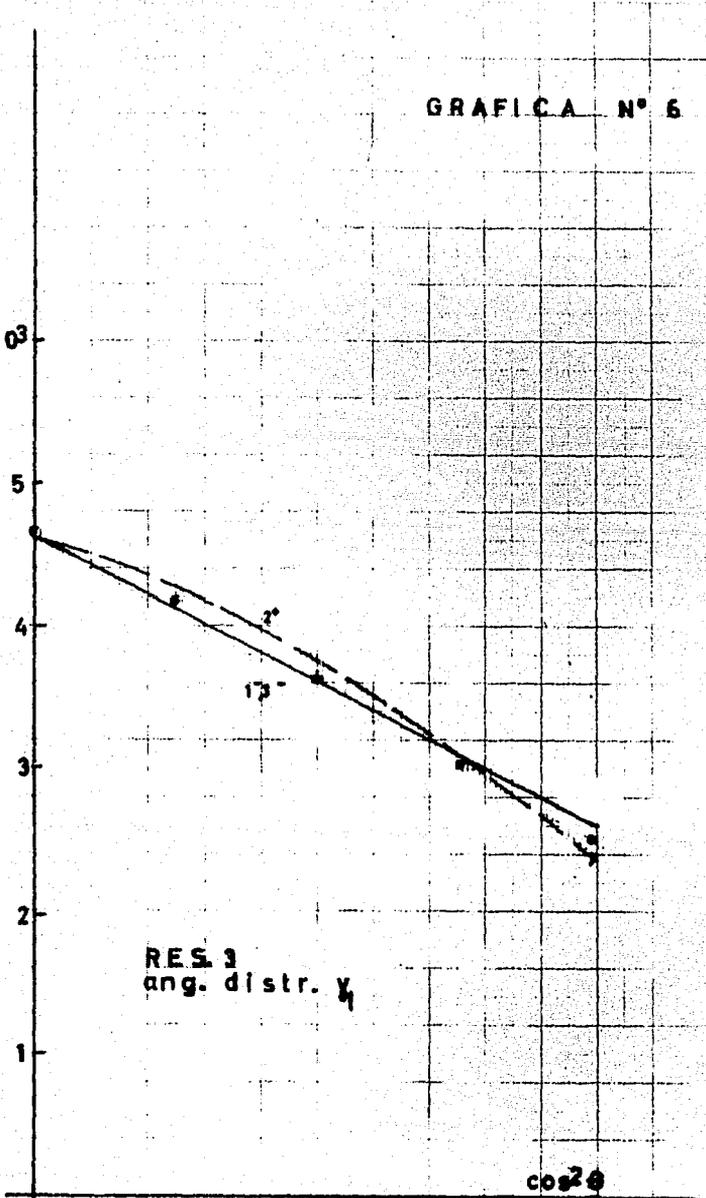
$\cos^2 \theta$

0

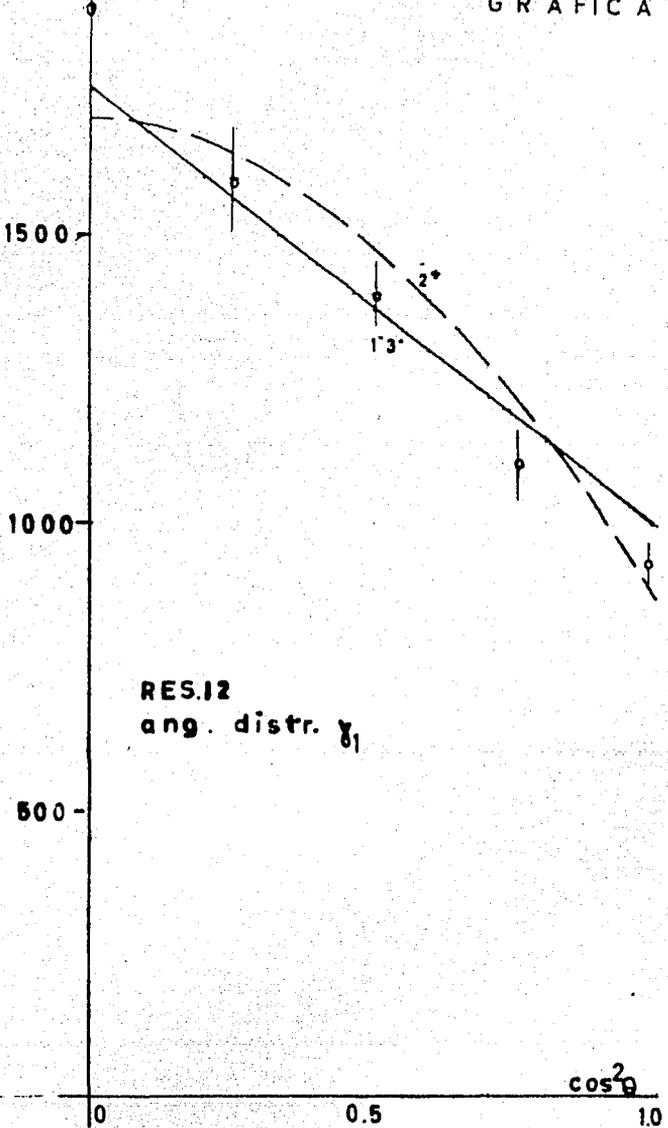
0.5

1.0

$0^\circ(3) 5^\circ(2) 2^\circ$	$\delta_1 = 0$
$0^\circ(2) 2^\circ(\frac{1}{2}) 2^\circ$	$\delta_2 = -0.7$
$0^\circ(1) 1^\circ(\frac{1}{2}) 2^\circ$	$\delta_3 = -0.22$



GRAFICA N°7



RES.12
ang. distr. γ_1

$0^\circ(3) 3^\circ(2) 2^\circ$	$\delta_1 = 0$
$0^\circ(2) 2^\circ(\frac{1}{2}) 2^\circ$	$\delta_1 = 0.7$
$0^\circ(1) 1^\circ(\frac{1}{2}) 2^\circ$	$\delta_1 = -0.22$

$a = 0$ por la condición $\Delta(alb) = 0$, por lo tanto se tiene una configuración: $1^+(0)1^+(1)0^+$

$$1^+(0)1^+(1)0^+$$

Sólo se considerarán los valores más bajos del momento orbital ℓ . En este caso no aparecerán mezclas en el canal de entrada.

Gráfica 8

Los coeficientes de la función $W(\theta)$ para este caso son:

$$a_0 = (-)^{2b-a-c} \frac{1}{b^2} (1 + \delta_1^2) \quad (2.4)$$

$$a_2 = \bar{Z}_1(LbLb; c2) \{ \bar{Z}(\ell b \ell b; a2) + 2 \bar{Z}(\ell b \ell' b; a2) \}$$

$$\delta_1 \cos(\xi_\ell - \xi_{\ell'}) + \bar{Z}(\ell' b \ell' b; a2) \delta_1^2 \quad (2.5)$$

$$a_4 = \bar{Z}_1(LbLb; c4) \{ \bar{Z}(\ell b \ell b; a4) + 2 \bar{Z}(\ell b \ell' b; a4) \}$$

$$\delta_1 \cos(\xi_\ell - \xi_{\ell'}) + \bar{Z}(\ell' b \ell' b; a4) \delta_1^2 \quad (2.6)$$

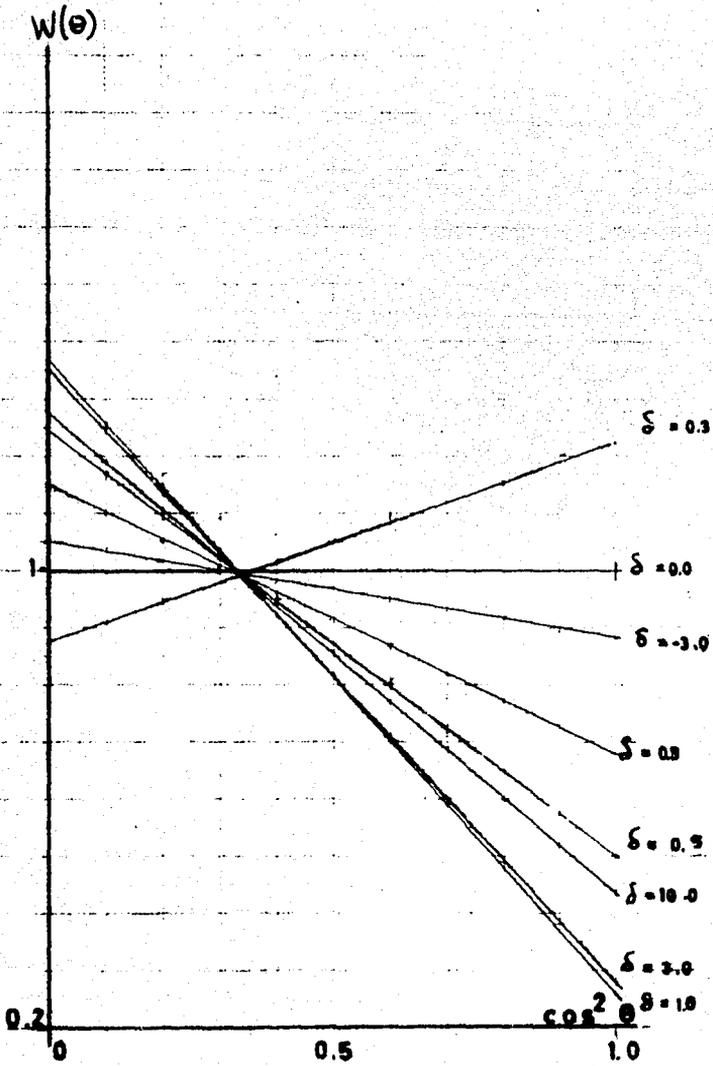
con $L = 0$ y A_0, A_2 y A_4 definidas nuevamente como

a_i/a_0 con $i = 0, 2, 4$.

Sustituyendo los valores en los coeficientes a_i ,

ecuaciones: (2.4) y (2.5)

GRAFICA N°8



$$1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} 1^{*} (1) 0^{*}$$

$$Q_2 = \bar{Z}_1(1111; 02) \left\{ \bar{Z}(0101; 12) + 2\bar{Z}(0121; 12)\delta_1 \right. \\ \left. \cos(\int_0 - \int_1) + \bar{Z}(2121; 12)\delta_1^2 \right\} Q_2 \\ = (3.21\delta_1 + 1.49\delta_1^2) Q_2$$

$$Q_4 = 0$$

$$W(\theta) = 1 + \frac{(-1.07\delta_1 - 0.49\delta_1^2) Q_2 P_2(\cos\theta)}{1 + \delta_1^2}$$

o bien

$$W(\theta) = \left(\frac{1 + .49\delta_1 + .22\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} \right) + \left(\frac{-1.48\delta_1 - .68\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} \right) \cos^2\theta$$

Gráfica Núm. 8, con $\cos(\int_1 - \int_1) = -0.7573$. Sharp, Gove and Paul (13), tomando la energía del laboratorio para el protón incidente igual a 1.5 Mev. y los valores de Q_2 y Q_4 como 0.93 y 0.76 respectivamente.

Sea $b = 1^-$, para este valor, se presentan dos casos, uno en el que no aparecen mezclas $0(1)1^-(1)0$ (Alvarez (15)). En el otro caso es posible tener mezclas en el espín del canal, presentándose entonces la situación:

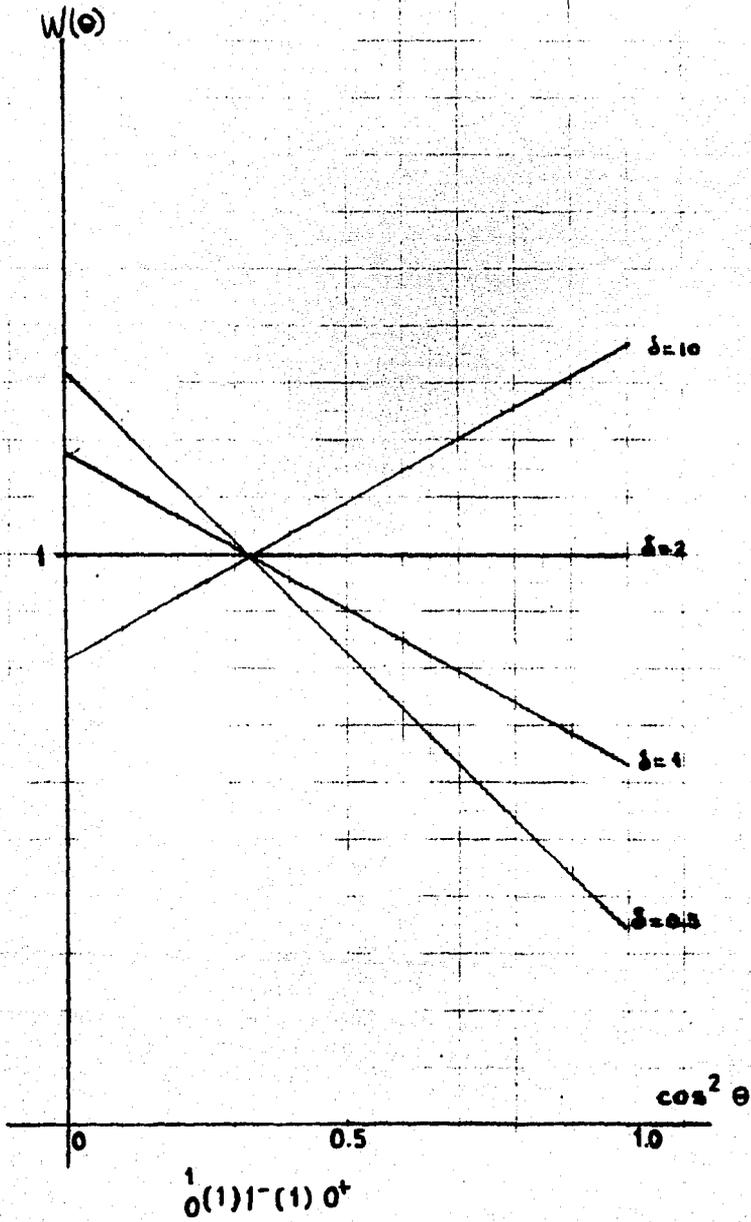
$$\frac{1}{2}(1)1^-(1)0^+$$

Las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12) se reducen a :

$$\frac{1}{2}(1)1^-(1)0^+$$

Gráfica 9

GRAFICA N° 9



$$a_0 = (-)^{2b+c} b^2 (1+\delta_0) \quad (2.7)$$

$$a_2 = \bar{Z}_1(LbLb; c2) [(-)^{a'} \bar{Z}(elbb; a'2) + (-)^a \bar{Z}(elbb; a2)\delta_0] Q_2 \quad (2.8)$$

$$a_4 = \bar{Z}_1(LbLb; c4) [(-)^{a'} \bar{Z}(elbb; a'4) + (-)^a \bar{Z}(elbb; a4)\delta_0] Q_4 \quad (2.9)$$

Substituyendo valores:

$$a_0 = 3(1+\delta_0)$$

$$a_2 = \bar{Z}_1(1111; 02) [\bar{Z}(1111; 02) - \bar{Z}(1111; 12)\delta_0] Q_2 \\ = [1.5\delta_0 - 3] Q_2$$

$$a_4 = 0$$

$$W(\theta) = 1 + \left(\frac{0.5\delta_0 - 1}{\delta_0 + 1} \right) P_2(\cos\theta) Q_2$$

o sea

$$W(\theta) = \frac{1.465 + 0.768\delta_0}{1 + \delta_0} + \frac{(-1.395 + 0.697\delta_0)\cos^2\theta}{1 + \delta_0}$$

Gráfica Núm. 9

De manera semejante, para $b = 2^+$ se tienen tres configuraciones posibles, dos sin mezclas: $0^+(2)2^+ (2)0^+$ y

$1^+(2)2^+ (2)0^+$, y otra que presenta mezclas en el espín del canal:

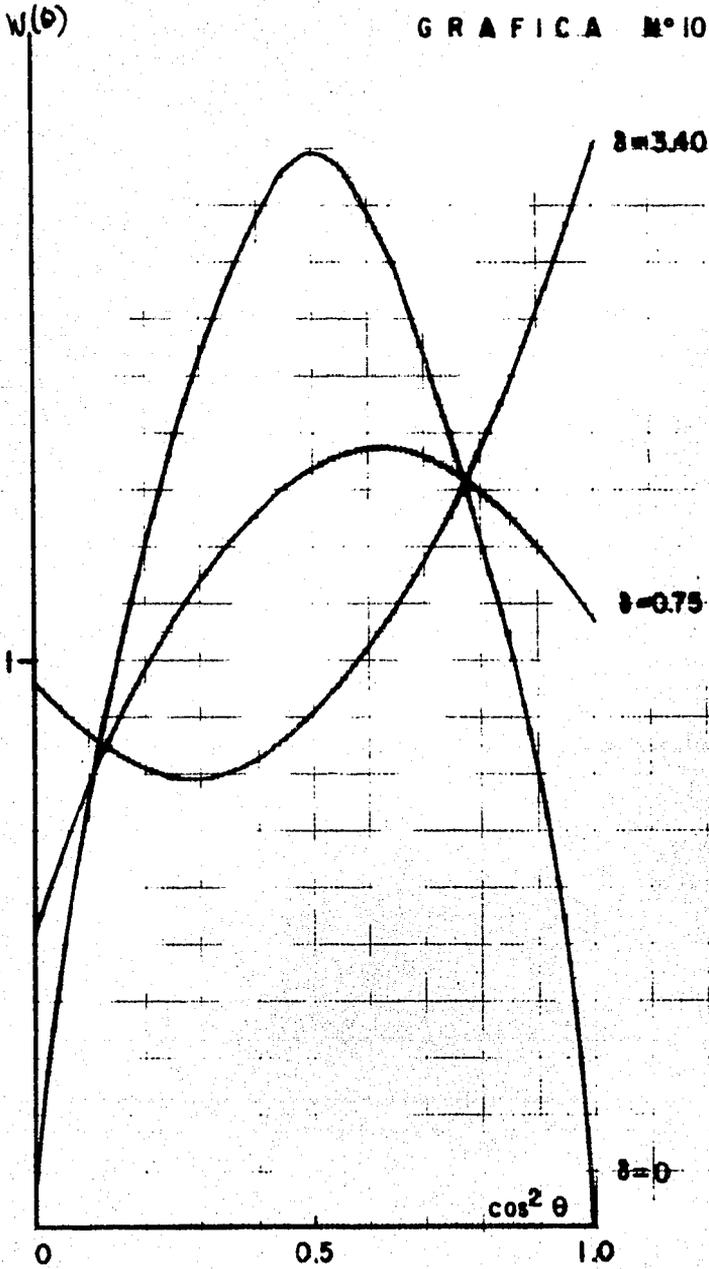
$0^+(2)2^+ (2)0^+$, de la que se obtiene, usando las ecuaciones:

(2.7), (2.8) y (2.9).

$$0^+(2)2^+ (2)0^+$$

Gráfica 10

GRAFICA N° 10



$0 (2) 2+(2) 0+$

$$a_0 = 5(1 + \delta_0)$$

$$a_2 = 3.57 + 1.786\delta_0$$

$$a_4 = 3.71\delta_0 - 8.571$$

$$W(\theta) = 1 + \left[\frac{3.57 - 1.786\delta_0}{5(1 + \delta_0)} \right] P_2(\cos\theta) + \left[\frac{-8.571 + 3.71\delta_0}{5(1 + \delta_0)} \right] P_4(\cos\theta)$$

o bien

$$W(\theta) = \frac{0.18 + 1.97\delta_0}{1 + \delta_0} + \left[\frac{5.88 - 3.74\delta_0}{1 + \delta_0} \right] \cos^2\theta + \left[\frac{-5.69 + 3.79\delta_0}{1 + \delta_0} \right] \cos^4\theta$$

Gráfica Núm. 10

Por último se considerará el caso en el que se supone

$b = 2^-$; este valor da para la reacción el siguiente esque-

ma:

$$1^+ \left(\frac{1}{3} \right) 2^- (2) 0^+$$

$$1^+ \left(\frac{1}{3} \right) 2^- (2) 0^+$$

no es posible tener el valor $Q = 0^+$ ya que no da lugar a un estado intermedio $b = 2^-$.

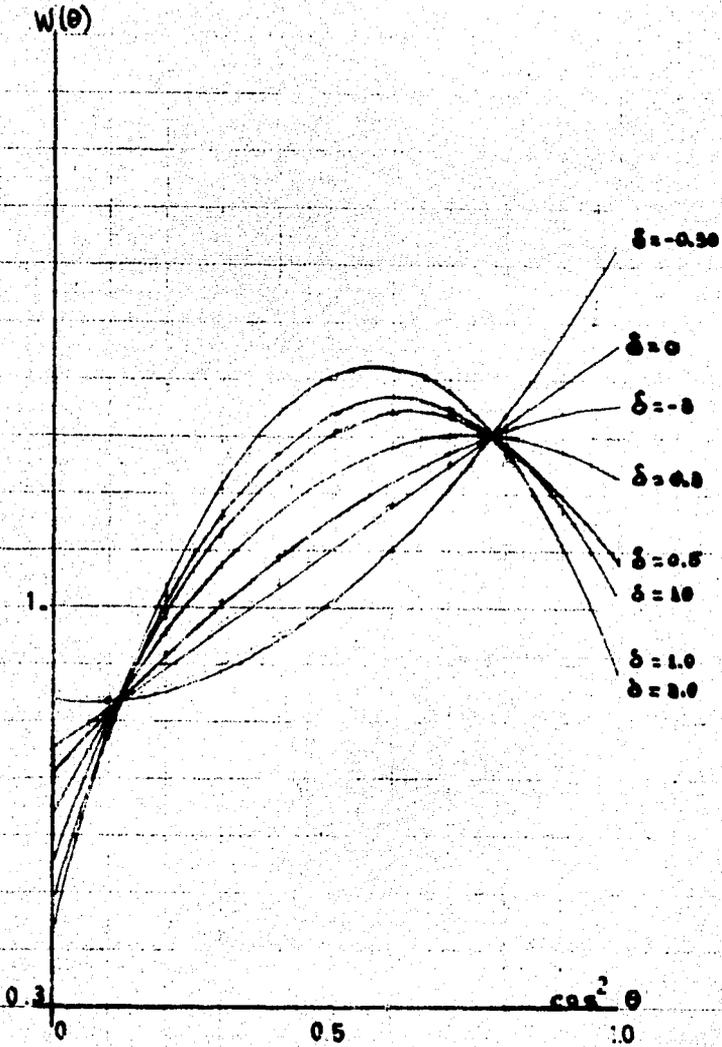
Gráfica 11

Usando las ecuaciones (2.4) a (2.6) se obtienen:

$$Q_0 = -5(1 + \delta_0^2)$$

$$Q_2 = \bar{Z}_1(2222; 02) [\bar{Z}(1212; 12) + 2\bar{Z}(1232; 12)\delta_1 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) + \bar{Z}(3232; 12)\delta_1^2]$$

GRAFICA N°11



$$i^* \left(\frac{1}{2} \right)^2 = (2) 0^*$$

$$a_4 = Z_1(2222; 04) [Z(1212; 14) + 2\bar{Z}(1232; 14)] \delta_1 \cos(\zeta_1 - \zeta_3) + \bar{Z}(3232; 14) \delta_1^2$$

de donde

$$A_0 = 1$$

$$A_2 = \frac{0.5 - 0.35\delta_1 \cos(\zeta_1 - \zeta_3) + 0.571\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} Q_2$$

$$A_4 = \frac{-[0.571\delta_1^2 - 2.857\delta_1 \cos(\zeta_1 - \zeta_3)]}{1 + \delta_1^2} Q_4$$

$$W(\theta) = 1 + \frac{[0.5 - 0.35\delta_1 \cos(\zeta_1 - \zeta_3) + 0.571\delta_1^2]}{1 + \delta_1^2} P_2(\cos\theta) Q_2 +$$

$$\frac{[2.857\delta_1 \cos(\zeta_1 - \zeta_3) - 0.571\delta_1^2]}{1 + \delta_1^2} P_4(\cos\theta) Q_4$$

o bien

$$W(\theta) = \left(\frac{-0.76 - 0.40\delta_1 + 0.52\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} \right) + \left(\frac{-0.69 + 3.59\delta_1 + 2.42\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} \right) \cos^2\theta$$

$$+ \left(\frac{-3.95\delta_1 - 1.89\delta_1^2}{1 + \delta_1^2} \right) \cos^4\theta$$

usando $Q_2 = .93$; $Q_4 = 0.76$ y $\cos(\zeta_1 - \zeta_3) = -0.4252$

Gráfica Núm. 11

Otros ejemplos muy interesantes son los que ofrecen las reacciones (pp) , $(p\alpha)$, etc. en las que el núcleo blanco tiene espín diferente de cero y en donde también se pueden encontrar muy diferentes tipos de mezclas.

III. ANALISIS DE LA FUNCION DE CORRELACION PARTICULA-GAMMA-GAMMA

El propósito de esta sección es aplicar la teoría general a casos de correlación triple del tipo $(p\gamma\gamma)$. El esquema de esta reacción se muestra en la figura 2.

Se supone que una partícula de espín S_1 y momento angular l_1 incide sobre un blanco de espín S_0 para formar un estado compuesto b , el cual pasa a estados caracterizados por c y d mediante la emisión de rayos gamma de multipolaridad L_2 y L_3 . Las relaciones entre esos números cuánticos son:

$$\begin{aligned} \underline{S}_0 + \underline{S}_1 &= \underline{a} & \underline{a} + \underline{l}_1 &= \underline{b} \\ \underline{c} + \underline{L}_2 &= \underline{b} & \underline{d} + \underline{l}_3 &= \underline{c} \end{aligned}$$

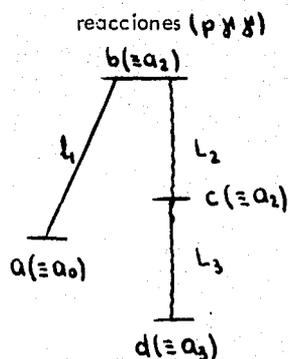


Figura 2

Con los tensores estadísticos definidos por Fano y Racah (14) a través de las matrices de densidad y eficiencia, Von Newman (19), Roman (20), Ferguson (1) obtuvo la siguiente fórmula general para las correlaciones angulares:

$$W(\Omega) = \sum_{k_0 k_1} \rho_{k_0 k_1} (a_0 a_1) \epsilon_{k_2 k_3}^* (a_2 a_3) \prod_{i=1}^n A_i \quad (3.1)$$

$$A_i = E_{m_i, \mu_i} (L_i, L'_i) (k_i, \kappa_i, m_i, \mu_i | k_{i-1}, \kappa_i) a_{i-1} a'_{i-1} \hat{k}_i$$

$$\hat{m}_i \left\{ \begin{matrix} a_i & L_i & a_{i-1} \\ a'_i & L'_i & a'_{i-1} \\ k_i & m_i & k_{i-1} \end{matrix} \right\} \langle a_i | L_i | a_{i-1} \rangle \langle a'_i | L'_i | a'_{i-1} \rangle^* \quad (3.2)$$

la suma es sobre

$a, a', b, b', c, c', L_1, L'_1, L_2, L'_2, k, \kappa, k_c, \kappa_c, k_1, \kappa_1, k_2, \kappa_2$.

Esta fórmula es totalmente general y se aplica a un número cualquiera de pasos en la reacción; por lo tanto, la primera simplificación es fijar para el problema propuesto el valor de n a 3 y se obtiene una expresión para cualquier caso de triple correlación:

En la fórmula general, $n=3$.

$$W(\Omega, \Omega_2, \Omega_3) = \sum_{k_b, \kappa_b} \rho_{k_b, \kappa_b} (a_0, a'_0) E_{k_d, \kappa_d}^* (d, d') E_{k_1, \kappa_1}^* (l, l')$$

$$(k_b, \kappa_b, k_1, \kappa_1 | k, \kappa) \hat{a} \hat{a}' \hat{k}_b \hat{k}_1 \left\{ \begin{matrix} b & l, a \\ b' & l', a' \\ k_b & k_1, k \end{matrix} \right\}$$

$$\langle b | l, a \rangle \langle b' | l', a' \rangle^* E_{k_2, \kappa_2}^* (L_2, L'_2) \hat{b} \hat{b}' \hat{k}_c$$

$$\hat{k}_2 \left\{ \begin{matrix} c & L_2 & b \\ c' & L'_2 & b' \\ k_c & k_2 & k_b \end{matrix} \right\} (k_c, \kappa_c, k_2, \kappa_2 | k_b, \kappa_b)$$

$$\langle c | L_2 | b \rangle \langle c' | L'_2 | b' \rangle^* E_{k_3, \kappa_3}^* (L_3, L'_3) \hat{c} \hat{c}' \hat{k}_d$$

$$k_3 \left\{ \begin{matrix} d & L_3 & c \\ d' & L'_3 & c' \\ k_d & k_3 & k_c \end{matrix} \right\} (k_d, \kappa_d, k_3, \kappa_3 | k_c, \kappa_c)$$

$$\langle d | L_3 | c \rangle \langle d' | L'_3 | c' \rangle^* \quad (3.3)$$

Se imponen ahora a la ecuación anterior las características del problema cuyas restricciones de carácter físico y geométrico hacen posible la simplificación y aplicabilidad de la ecuación (3.1). Cada uno de los elementos de la fórmula (3.1) están descritos por Alvarez (15), de modo que sólo se presentan los resultados al aplicarlos a este caso particular. Se supone el eje **z** como la dirección del haz incidente y además que este haz es no polarizado. Esta condición reduce a

el eje **z** coincide con la dirección del haz

$\rho(a_0, a'_0)$ al valor:

$$\rho_{kk}(a_0, a'_0) = \frac{1}{\hat{a}} \delta_{k_0} \delta_{k_0} \delta_{a_0 a'_0}$$

La partícula residual no se detecta; entonces, el tensor de eficiencia tiene el valor:

tensores de eficiencia

$$\epsilon_{k_d k_d}(d, d') = \hat{a} \delta_{k_d 0} \delta_{k_d 0} \delta_{d d'}$$

El tensor de eficiencia para la partícula incidente es:

$$\epsilon_{k_i k_i}(l_i, l'_i) = \frac{\hat{l}_i \hat{l}'_i}{\sqrt{4\pi} \hat{a}} (-1)^{l_i} (l_i, 0, l'_i, 0 | k_i, 0) Y_{k_i}^{l_i}(\theta_i, \phi_i)$$

Para las radiaciones L_2 y L_3 , los tensores de eficiencia son:

$$\epsilon_{k_i k_i}(L_i, L'_i) = \frac{\hat{L}_i \hat{L}'_i}{\sqrt{4\pi} k_i} (-1)^{L_i - L'_i} (L_i + L, L'_i - L | k_i, 0) Y_{k_i}^{L_i}(\theta_i, \phi_i) Q_{k_i}$$

con $l = 1 \text{ ó } 2$, según se trate de L_2 o L_3 donde Q_k son los factores de atenuación para los detectores que se suponen con simetría axial y cuyo valor depende de su composición, de sus dimensiones (diámetro y espesor) y de su distancia al blanco. Se encuentran tabulados por A. J. Ferguson (1) para algunos casos usuales.

Q_k : factores de atenuación

Con las restricciones impuestas por $\rho(a_0, a'_0)$

y los coeficientes de adición vectorial se obtiene:

$$W(\Omega, \Omega_2, \Omega_3) = \sum f (l, l', l_1, l_2, l_3) W(b, l, b', l_1; a, k, b_1) \\ (L_2 + 1, L'_2 - 1 | k_2, 0) (k_3, k_3, k_2, k_2 | k_1, k_1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c, L_2, b \\ c', L'_2, b' \\ k_3, k_2, k_1 \end{array} \right\} (L_3 + 1, L'_3 - 1 | k_3, 0)$$

$$W(c, L_3, c', L'_3; d, k_c) \langle b | l, l_1 | a \rangle \langle b' | l', l'_1 | a' \rangle^*$$

$$\langle c | l, l_2 | b \rangle \langle c' | l', l'_2 | b' \rangle^* \langle d | l_3 | c \rangle \langle d' | l'_3 | c' \rangle^*$$

$$Y_{k_1}^{k_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{k_2}^{k_2}(\theta_2, \phi_2) Y_{k_3}^{k_3}(\theta_3, \phi_3) Q_{k_2} Q_{k_3}$$

f es un factor dado por:

$$f = (-1)^{a+d+a'+c-L_2+1 + \frac{1}{2}(k_2+k_3-k_1)} \hat{b} \hat{b}' \hat{l}_2 \hat{l}'_2 \hat{k}_1 \hat{k}_2 \\ \hat{k}_3 \hat{a}^{-2}$$

La suma es sobre

$$a, l, l', b, b', L_2, L'_2, L_3, L'_3, k_1, k_2, k_3.$$

Es conveniente ahora introducir ciertas funciones y coeficientes que permiten que la expresión anterior tome una forma más compacta.

Los coeficientes \bar{z} y \bar{z}_1 definidos por Huby (2) y tabulados por Ferguson y Rutledge (6) son:

$$\bar{z}(l, b, l'; a, k_1) = \hat{l}_1 \hat{l}'_1 \hat{b} \hat{b}' (l_0 l' 0 | k_0) W(l, b, l'; a, k_1)$$

$$\bar{z}_1(L_3 c L'_3 c'; d, k_3) = (-1)^{k_3 - L_3 + L'_3 - 1} \hat{L}_3 \hat{L}'_3 \hat{c} \hat{c}' (L_3 + L'_3 - 1; k_3 0) W(L_3 c L'_3 c'; d, k_3)$$

El coeficiente G_Y de Ferguson se define como:

coeficiente G_Y

$$G_Y = \begin{Bmatrix} c & L_2 & b \\ c' & L'_2 & b' \\ k_3 & k_2 & k_1 \end{Bmatrix} = (-1)^{b-c-L_2+L'_2} \hat{k}_2 \hat{k}_3 \hat{L}_2 \hat{L}'_2 \hat{L}_1 \hat{L}'_1 \hat{b} \hat{b}' \hat{L}_1 \hat{L}'_1 \hat{k}_1 \hat{k}_2$$

$$\hat{k}_3 (L_2 + L'_2 - 1 | k_2 0) \begin{Bmatrix} c & L_2 & b \\ c' & L'_2 & b' \\ k_3 & k_2 & k_1 \end{Bmatrix}$$

Las funciones angulares para triple correlación introducidas por Biedenharn (3), análogas a las funciones de Legendre para la doble correlación se definen como:

$P_{k_1, k_2, k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$
funciones angulares para triple correlación

$$P_{k_1, k_2, k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (4\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_1 \hat{k}_2 \hat{k}_3} \sum_{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3} (-1)^{\kappa_3}$$

$$(k_1, \kappa_1, k_2, \kappa_2 | k_3, \kappa_3) Y_{k_1}^{\kappa_1}(\Omega_1) Y_{k_2}^{\kappa_2}(\Omega_2)$$

$$Y_{k_3}^{\kappa_3}(\Omega_3)$$

(3.5)

Al sustituir los coeficientes y funciones anteriores

en la ecuación (3.3) se obtiene:

$$W(\Omega, \Omega_2, \Omega_3) = (4\pi)^{-3} \sum (-1)^{a+d} a^{-2} \bar{Z}(\ell, b, \ell', b'; a, k_1)$$

$$G_Y \left\{ \begin{array}{l} c, L_2, b \\ c', L'_2, b' \\ k_3, k_2, k_1 \end{array} \right\} \bar{Z}_1(L_3, c, L'_3, c'; d, k_3)$$

$$\langle b \| \ell, | a \rangle \langle b' \| \ell', | a \rangle^* \langle c \| L_2 \| b \rangle \langle c' \| L'_2 \| b' \rangle^*$$

$$\langle d \| L_3 \| c \rangle \langle d' \| L'_3 \| c' \rangle^* Q_{k_2} Q_{k_3}$$

$$P_{k_1, k_2, k_3}(\Omega, \Omega_2, \Omega_3). \quad (3.6)$$

La suma es sobre $a, \ell, \ell', b, b', k_2, L'_2, L_3, L'_3, k_1, k_2, k_3$.

Al tratar la doble correlación se dividió la función

$W(\theta)$ entre un factor tal que permitiera obtener los parámetros de mezcla δ_i , sin perder la forma de la función; es conveniente hacer ahora otro tanto.

El factor indicado para dividir la función

$W(\Omega, \Omega_2, \Omega_3)$ es:

$$N = \frac{1}{(4\pi)^3} |\langle b \| \ell, | a \rangle \langle c \| L_2 \| b \rangle \langle d \| L_3 \| c \rangle|^2 \quad (3.7)$$

con lo cual se obtienen los parámetros de mezcla:

$$\delta_2(a) = \frac{\langle b \| \ell, | a \rangle}{\langle b \| \ell, | a \rangle} = \left[\frac{\Gamma(a, \ell')}{\Gamma(a, \ell)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

que depende en general del espín del canal y de la razón de mezcla de las partículas incidentes caracterizadas por diferentes momentos angulares;

$$\delta_2 = \frac{\langle c | L_2 + 1 | b \rangle}{\langle c | L_2 | b \rangle} = \left[\frac{\Gamma(L_2 + 1)}{\Gamma(L_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

don las mezclas de fotones con diferentes multipolaridades, y

$$\delta_0 = \frac{\langle b | l_1 | a' \rangle}{\langle b | l_1 | a \rangle} = \left[\frac{\Gamma(a' l_1)}{\Gamma(a l_1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

que indica las mezclas en el espín del canal (a, a') . Puede suceder sin embargo que existan más de dos mezclas posibles en el espín del canal, lo que introduce varios parámetros δ_0 y hace el análisis en ocasiones impracticable. En general basta con considerar sólo dos valores de a, E . Cove (9).

sólo se consideran dos valores para el espín del canal: a, a'

Puesto que están involucradas partículas que pueden ser cargadas o no, para mayor generalidad en la fórmula se introduce también el factor $\cos(\gamma_l - \gamma_{l'})$ que contiene el efecto de interacción coulombiana y cuya discusión se hizo en la sección precedente.

se puede tratar de partículas cargadas o no

El hecho de que aparezcan mezclas de momentos angulares o de multipolaridades del tipo: l_1, l_1' y l_1, l_1' , L_2, L_2' y L_2, L_2' ... implica la aparición de muchos términos dentro de la suma; es posible simplificar la expresión mediante el "factor de duplicación", 2^n , donde n es el número

2^n indica el número de pares diferentes

de pares $l_1 \neq l'_1$; $L_2 \neq L'_2$; $L_3 \neq L'_3$ que intervienen, ya que los términos de la forma l_1, l'_1 y l'_1, l_1 ... son iguales. Además de la suma \sum se incluirá la suma \sum' que se lleva a cabo sobre: a , l_1 , l'_1 , L_2 , L'_2 , L_3 , L'_3 , y con las restricciones: $l_1 \leq l'_1$, $L_2 \leq L'_2$, $L_3 \leq L'_3$.

Con las observaciones anotadas la función de correlación queda como:

$$W(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = N \sum_{k_1, k_2, k_3} \sum' z^{n(a+d)} a^{-2} Z(l_1, l'_1, l_2, l'_2, l_3, l'_3) \delta_0^{r_0} \left\{ \begin{matrix} c L_2 b \\ c L'_2 b \\ k_3 k_2 k_1 \end{matrix} \right\} \bar{Z}_1(L_3, L'_3, c, d, k_3) \delta_0^{r_0} \delta_1^{r_1}(a) \cos(\int_{l_1} - \int_{l'_1}) \delta_2^{r_2} \delta_3^{r_3} P_{k_1, k_2, k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \quad (3.8)$$

El superíndice r_0 puede tomar los valores 0 ó 1 para espín del canal a o a' respectivamente. Los superíndices r_1 , r_2 , y r_3 pueden ser 0, 1 ó 2 según haya interferencias del tipo l_1, l_1, l_1, l'_1 , l'_1, l_1 ó l'_1, l'_1 con lo que (3.8) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, 1 \\ r_1 &= 0, 1, 2 \\ r_2 &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$W(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3} a_{k_1, k_2, k_3} P_{k_1, k_2, k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \quad (3.9)$$

con

$$a_{k_1 k_2 k_3} = N \sum' 2^n (-)^{a+d} \hat{a}^{-2} \bar{Z}(l, b, l'; b; a, k)$$

$$G_{\mathcal{N}} \left\{ \begin{matrix} c, L_2, b \\ c, L'_2, b \\ k_3, k_2, k_1 \end{matrix} \right\} \bar{Z}_1(L_3, c, L'_3, c; d, k_3) \delta_0^{r_0}$$

$$\delta_1^{r_1} (a) \cos(\xi_{l_1} - \xi_{l'_1}) \delta_2^{r_2} \delta_3^{r_3}$$

Siendo este último coeficiente, función de tres parámetros conocidos y tabulados, \bar{Z} , \bar{Z}_1 , y $G_{\mathcal{N}}$, y de ciertos parámetros desconocidos representados por los cocientes de elementos reducidos de matriz. La comparación entre la teoría y el experimento es básicamente semejante al caso de las distribuciones angulares.

Se investigará ahora cuántos coeficientes $a_{k_1 k_2 k_3}$ hay disponibles para el análisis de la correlación triple. Dicha investigación se hará imponiendo restricciones a cada una de las k 's; los valores de k_2 y k_3 están condicionados por los valores de las multipolaridades, Alvarez (15): $L_2, L'_2, L_3, L'_3 \leq 2$ lo cual limita los valores de k_2 y k_3 por la condición: $k_2, k_3 \leq 2L_{\text{máx}}$ a 4; queda sólo por discutir el valor máximo de k_1 . Este está dado por el coeficiente $g_{\mathcal{J}}$, ecuación (3.8) el cual entre sus condiciones de triángulo contiene a $\Delta(k_1, k_2, k_3)$ es decir que $k_1 = k_2 + k_3$ lo cual da un valor de $k_{\text{máx}} = 8$. Desde luego el valor mínimo para las k 's es cero.

$$L_2, L'_2, L_3, L'_3 \leq 2$$

$$k_2, k_3 \leq 2L_{\text{máx}}$$

Con estas consideraciones es posible obtener todos

los términos con que contará la ecuación (3.9) para las diferentes combinaciones de (k_1, k_2, k_3) , estas son: (0 0 0), (0 2 2), (0 4 4), (2 0 2), (2 2 0), (2 2 2), (2 2 4), (2 4 2), (2 4 4), (4 0 4), (4 4 0), (4 2 2), (4 2 4), (4 4 2), (4 4 4), (6 2 4), (6 4 2), (6 4 4), (8 4 4).

Todos pueden ser obtenidos bajo ciertas condiciones que se deducen de los coeficientes involucrados en la expresión para las $a_{k_1 k_2 k_3}$, a saber: k_1 aparece en el coeficiente de Clebsch-Gordan $(l, 0 l' 0 | k, 0)$, de donde se observa que para obtener $k_1 = 8$ es necesario que l_1 y $l'_1 \geq 4$; ahora bien, esto obliga a b , según lo muestra el coeficiente de Racah $W(b l b l'; d k_1)$ a través de la condición $\Delta(l l' b)$ a tomar el valor para b de $b \geq 4$.

Asimismo, $W(c L_3 c L'_3; d k_3)$ exige, para tener $k_3 = 4$, L_3 y $L'_3 = 2$: esto implica que $c \geq 2$ y también $d \geq 2$.

Se tienen pues 19 coeficientes mediante los cuales se encontrarán, ajustando la teoría con el experimento, cinco parámetros desconocidos: N , factor de normalización y $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ definidos anteriormente. Como ya se dijo antes, N no posee significado físico y puede ser eliminado, al obtener coeficientes de la forma $\frac{a_{k_1 k_2 k_3}}{a_{000}}$ lo cual lleva a nuevos coeficientes en función de $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$.

En resumen, se han obtenido dos expresiones para la función de correlación triple, (3.8) y (3.9), pero estas expresiones son aún complicadas y difíciles de manejar aunque están tabulados ciertos coeficientes. Litherland y Ferguson (22) exponen la forma de simplificar la función mediante el uso de ciertas configuraciones geométricas de los detectores, "geometrías" que se describirán posteriormente.

Antes de hablar de las "geometrías" mencionadas, se presentarán desarrollos más específicos de los coeficientes - -

$a_{k_1 k_2 k_3}$ llevados a cabo por Ferguson y Rutledge (6).

Se considerará al haz entrante sobre el eje z , se tiene que $\Omega_1(\theta_1 \phi_1) = \Omega(00)$ lo que hace que en

(3.5)

$$Y_{k_1}^{k_1}(\Omega_1) = Y_{k_1}^{k_1}(00) = \frac{\hat{k} \delta_{k_1 0}}{\sqrt{4\pi}}$$

Por lo tanto

$$P_{k_1 k_2 k_3}(0 \Omega_2 \Omega_3) = 4\pi i^{k_1+k_2-k_3} (\hat{k}_2 \hat{k}_3)^{-1} \sum_{\kappa} (-1)^{\kappa} (k_1 0 k_2 \kappa | k_3 \kappa) Y_{k_2}^{\kappa}(\Omega_2) Y_{k_3}^{-\kappa}(\Omega_3) \quad (3.10)$$

Conviene escribir los armónicos esféricos en función de los polinomios de Legendre :

$$Y_k^{\chi}(\theta, \phi) = (-)^{\frac{1}{2}(k+|\chi|)} \frac{\hat{k}_2}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{(k-|\chi|)!}{(k+|\chi|)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_k^{|\chi|}(\cos \theta) e^{i\chi\phi}$$

y definir nuevas funciones angulares $\chi_{k_2 k_3}^{\chi}$ que dependen solo de tres ángulos, en función de los polinomios de Legendre

$$\chi_{k_2 k_3}^{\chi}(\theta_2, \theta_3, \phi)$$

$$\chi_{k_2 k_3}^{\chi}(\theta_2, \theta_3, \phi) = \hat{k}_2 \hat{k}_3 \left[\frac{(k_2 - \chi)!}{(k_2 + \chi)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{k_2}^{\chi}(\cos \theta_2)$$

$$\left[\frac{(k_3 - \chi)!}{(k_3 + \chi)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{k_3}^{\chi}(\cos \theta_3) \cos \chi \phi \quad (3.11)$$

Para como en (3.10) la suma está tomada sobre todos los valores de χ , es posible agrupar los términos que contienen χ con valor positivo y negativo, Litherland y Ferguson (22), de manera que se obtiene

$$P_{k_1, k_2, k_3}(0, \Omega_2, \Omega_3) = 4\pi i^{k_1 + k_2 - k_3} (\hat{k}_2 \hat{k}_3)^2 \sum_{\chi} (-)^{\chi} (k, 0, k_2, \chi, k_3, \chi) \operatorname{Re}(Y_{k_2}^{\chi} Y_{k_3}^{-\chi})$$

utilizando la ecuación para $Y_k^{\chi}(\Omega)$.

$$\operatorname{Re}[Y_{k_2}^{\chi} Y_{k_3}^{-\chi}] = \frac{(-)^{\chi}}{4\pi} 2^{(1-\delta_{\chi 0})} \hat{k}_2 \hat{k}_3 \left[\frac{(k_2 - |\chi|)!}{(k_2 + |\chi|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(k_3 - |\chi|)!}{(k_3 + |\chi|)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{k_2}^{|\chi|}(\cos \theta_2) P_{k_3}^{|\chi|}(\cos \theta_3) \cos \chi \phi = \frac{(-)^{\chi}}{4\pi} 2^{(1-\delta_{\chi 0})} \chi_{k_2 k_3}^{\chi}(\theta_2, \theta_3, \phi).$$

según la definición que se hizo de $\chi_{k_2 k_3}^{\kappa}(\theta_2 \theta_3 \phi)$

de donde para $\kappa \geq 0$

$$P_{k_1 k_2 k_3}(0 \Omega_2 \Omega_3) = \frac{i^{k_1 + k_2 - k_3}}{\hat{k}_2 \hat{k}_3} \sum_{\kappa \geq 0} (2 - \delta_{\kappa 0}) (k_1 0 k_2 \kappa | k_3 \kappa)$$

$$\chi_{k_2 k_3}^{\kappa}(\theta_2 \theta_3 \phi). \quad (3.12)$$

Ahora ha quedado $W(\theta)$ como

$$W(\theta_2 \theta_3 \phi) = \frac{N}{4\pi} 2^n \sum_{k_1 k_2 k_3} \sum_{\hat{k}_2 \hat{k}_3} (-1)^{a+d} \hat{a}^{-2} Z(\ell, b \ell; b; a k)$$

$$G_Y \left\{ \begin{matrix} c & L_2 & b \\ c & L'_2 & b \\ k_3 & k'_2 & k_1 \end{matrix} \right\} \bar{Z}_1(L_3 c L'_3 c; d k_3) \delta_0^{\nu_0} \delta_1^{\nu_1}$$

$$\cos(\int_{\ell} \int_{\ell'}) \delta_2^{\nu_2} \delta_3^{\nu_3} (k_1 0 k_2 \kappa | k_3 \kappa)$$

$$\chi_{k_2 k_3}^{\kappa}(\theta_2 \theta_3 \phi) \quad (3.13)$$

Es posible agrupar nuevamente todos los coeficientes tabulados en uno solo, y de hecho Ferguson y Ruthledge lo llevaron a cabo definiendo y tabulando

$$D_{k_2 k_3}^{\kappa}(a d b c \ell \ell'; L_2 L'_2 L_3 L'_3) = \frac{2^n}{\hat{k}_2 \hat{k}_3} \sum_{k_1} (-1)^{f_1} (k_1 0 k_2 \kappa | k_3 \kappa)$$

$$\bar{Z}(\ell, b \ell; b; a k_1) G_Y \left\{ \begin{matrix} c & L_2 & b \\ c & L'_2 & b \\ k_3 & k_2 & k_1 \end{matrix} \right\}$$

$$\bar{Z}_1(L_3 c L'_3 c; d k_3) \quad (3.14)$$

con $f_1 = a + d - L_3 + L'_3 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3)$, en términos de la cual

$$\begin{aligned}
 W(\theta_1, \theta_2, \phi) &= \frac{1}{4\pi^3} \sum' (-)^{L_3 - L'_3} \hat{a}^{-2} \langle b \| \ell_1 | a \rangle \langle b \| \ell'_1 | a \rangle^* \\
 &\quad D_{k_2 k_3}^k (a d b c \ell_1 \ell'_1 L_2 L'_2 L_3 L'_3) \langle c \| L_2 \| b \rangle \\
 &\quad \langle c \| L'_2 \| b \rangle^* \langle d \| L_3 \| c \rangle \langle d \| L'_3 \| c \rangle^* Q_{k_2} Q_{k_3} \\
 &\quad \chi_{k_2 k_3}^k (\theta_2, \theta_3, \phi) \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

con la suma sobre $a, \ell_1, \ell'_1, L_2, L'_2, L_3, L'_3, k_2, k_3, k$ con $k \geq 0$ y las restricciones sobre \sum' mencionadas anteriormente.

Siguiendo la misma secuela que en casos anteriores se expresará la función de correlación como una serie de funciones angulares, en este caso $\chi_{k_2 k_3}^k (\theta_2, \theta_3, \phi)$, agrupando en uno solo a todos los coeficientes que la multiplican, de manera que:

$$W(\theta_2, \theta_3, \phi) = \sum_{k_2 k_3 k} b_{k_2 k_3}^k \chi_{k_2 k_3}^k (\theta_2, \theta_3, \phi) \quad (3.16)$$

con

$$b_{k_2 k_3}^k = N \sum' \frac{(-)^{L_3 - L'_3}}{\hat{a}^2} D_{k_2 k_3}^k (a d b c \ell_1 \ell'_1 L_2 L'_2 L_3 L'_3)$$

$$\delta_0^{r_0} \delta_1^{r_1}(a) \cos(\tau_{\ell_1} - \tau_{\ell'_1}) \delta_2^{r_2} \delta_3^{r_3} Q_{k_2} Q_{k_3}$$

con la suma hecha sobre $a, l_1, l_1', l_2, l_2', l_3,$

l_3' . Esta expresión consta de 19 términos para $k_2, k_3 \geq 4$

y $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

IV. GEOMETRIAS

Se observó en la sección anterior la complicada forma de la triple correlación; ahora bien, el arreglo geométrico de los detectores para obtener los datos experimentales, con la restricción única de fijar la dirección del eje Z con la dirección del haz entrante puede ser la que se muestra en la figura 3.

El ángulo θ_i es el ángulo formado por la dirección del haz y el eje del detector, de tal manera que el lugar geométrico de $\theta = \text{cte.}$ es una circunferencia sobre la superficie de la esfera que tiene por centro un punto en el eje Z . θ_i puede variar de 0° a 180° . ϕ_i es el ángulo azimutal y varía de 0° a 360° . Φ definido como $\phi_2 - \phi_3$ es el ángulo azimutal relativo.

Esta situación en que los detectores se mueven arbitrariamente sobre una esfera resulta difícil de manejar experimentalmente por el gran número de medidas requeridas para fijar los parámetros que exige la fórmula.

Se esbozó, sin embargo, la posibilidad de simplificar el análisis introduciendo ciertas restricciones sobre la posición

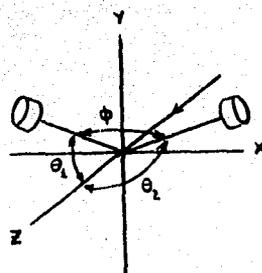


Figura 3

θ ángulo entre la dirección del haz y el eje del detector

ϕ_i ángulo azimutal
 $\Phi = \phi_i - \phi_j$

de los detectores, además de la mencionada anteriormente.

Al establecer restricciones sobre la posición de los detectores, la parte angular representada por las funciones $P_{k_1 k_2 k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ es la única afectada, y se verá más adelante que situando a los detectores en posiciones adecuadas, dichas funciones toman la forma de series de polinomios de Legendre, lo que permite que se siga el mismo tipo de análisis que para la doble correlación, y se puedan usar los programas de ajuste por mínimos cuadrados de los datos experimentales con la teoría, utilizados para la doble correlación.

simplificación de las funciones angulares:

$$P_{k_1 k_2 k_3}(0, \Omega_2, \Omega_3)$$

Considérese primero la expresión:

$$\chi_{k_2 k_3}^k(\theta_2, \theta_3, \phi) = \hat{k}_2 \hat{k}_3 \left[\frac{(k_2 - k)! (k_3 - k)!}{(k_2 + k)! (k_3 + k)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{k_2}^k(\cos \theta_2) P_{k_3}^k(\cos \theta_3) \cos k \phi \quad (4.1)$$

que para valores de θ_2 , θ_3 ó $\phi = 90^\circ$ se anula, para k impar; también si θ_2 ó θ_3 son iguales a 0° ó 180° se anula para k impar ya que:

$$P_{k_i}^k(\cos \theta_i) = (1 - \cos^2 \theta_i)^{k/2} \frac{d^k}{d(\cos \theta_i)^k} P_{k_i}(\cos \theta_i)$$

Luego con sólo esta consideración (4.1) toma formas muy simples si θ_2 , θ_3 ó ϕ tienen valores del conjunto: $0^\circ, 90^\circ$ ó 180° siempre y cuando la función no se anule. Así

$$\left. \begin{matrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \phi \end{matrix} \right\} = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$$

fué posible formar las "geometrías", fijando uno de los detectores a 0° , 90° ó 180° de la dirección del haz y permitiendo al otro moverse libremente.

Para poder dar expresiones útiles es necesario introducir algunas relaciones. Primeramente se usará la relación:

$$P_k^x(\cos \theta) = \sum_{k'} f_{kk'}^x P_{k'}(\cos \theta)$$

con k' par, y además $k' \leq k$. Los coeficientes $f_{kk'}^x$ están tabulados hasta valores de $k = 4, 4$ y $k' = 4$. A. J. Ferguson (1). Con esto, la expresión para $P_{k_1 k_2 k_3}(0 \Omega_2 \Omega_3)$ fórmula (3.12) queda como:

$$k, \mu = 4, 4 \\ k' = 4$$

$$P_{k_1 k_2 k_3}(0 \Omega_2 \Omega_3) = \frac{\hat{k}_2 \hat{k}_3}{\hat{k}_2 \hat{k}_3} \sum_{\kappa \geq 0} \sum_{k', k''} (2 - \delta_{\kappa 0}) \\ (k_1 0 k_2 \kappa | k_3 \kappa) \hat{k}_2 \hat{k}_3 \left[\frac{(k_2 - \kappa)!}{(k_2 + \kappa)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \left[\frac{(k_3 - \kappa)!}{(k_3 + \kappa)!} \right]^{\frac{1}{2}} f_{k_2 k_2}^x f_{k_3 k_3}^x P_{k_2}(\cos \theta_2) \\ P_{k_3}(\cos \theta_3) \cos \kappa \phi \quad (4.2)$$

Al fijar las posiciones de los detectores en la forma indicada y al ángulo ϕ como se dijo, se obtiene a

$P_{k_1 k_2 k_3}(0 \Omega_2 \Omega_3)$ como una serie de polinomios de Legendre cuyos coeficientes son característicos de cada "geometría", de manera que se puede escribir

$$P_{k_1 k_2 k_3}(\theta_2 \theta_3 \phi) = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k \alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^i P_k(\cos \theta)$$

donde $\alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^i$ es diferente para cada uno de los arreglo geométricos.

$\alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^i$
característico de cada geometría

Dependiendo de cuál sea el detector fijo y cuál el móvil, se pueden formar 5 grupos que dan lugar a 7 "geometrías" diferentes. Se usará la misma notación de A.J. Ferguson (1) llamando a los diferentes grupos por las letras A, B, C, D y E según el ángulo ϕ sea igual a 180° , 0° , 90° o variable, usándose los números 1 y 2 para distinguir las dos posibilidades que hay al fijar a uno u otro detector.

GEOMETRIAS A1 y A2.

Para ambas $\phi = 180^\circ$ y corresponde para la geometría A1: θ_2 variable, θ_3 fijo a 90° y para la geometría A2: θ_2 fijo a 90° y θ_3 variable. Figura (4). Las funciones angulares toman las expresiones siguientes:

$$P_{k_1 k_2 k_3}(\theta_2 \theta_3 \phi) = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k \alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^{A1} P_k(\cos \theta_2)$$

donde

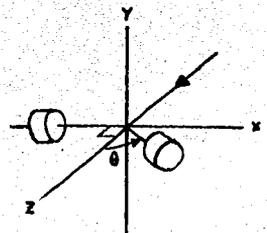


Figura 4

$$\alpha_{k_1 k_2 k_3}^{A_1} = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k (2-\delta_{k0}) (k_1 0 k_2 \times |k_3 \times)$$

$$\left[\frac{(k_2-k)! (k_3-k)!}{(k_2+k)! (k_3+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{k_2 k}^x \int_{k_3 0}^x \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int_{k_3 2}^x + \frac{3}{8} \int_{k_3 4}^x \right)$$

El superíndice A1 se refiere a la geometría. Para obtener la expresión matemática de las funciones angulares correspondientes a la geometría A2 se cambia k_2 por k_3 en los coeficientes

$$\int_{k_2 k}^x \text{ y } \int_{k_3 k}^x .$$

GEOMETRIAS B1 y B2.

Corresponde a ambas $\phi = 0$ y además para B1; θ_2 variable y $\theta_3 = 0^\circ$ y para B2; $\theta_2 = 0^\circ$ y θ_3 variable.

Figura (5).

Se tienen los valores

$$P_{k_1 k_2 k_3 k}(\theta_2 \theta_3 \phi) = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k \alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^{B1,2}$$

$$P_k(\cos \theta)$$

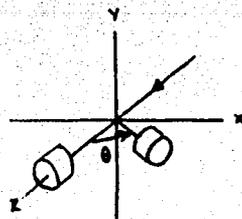


Figura 5

con

$$\alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^{B1} = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k (2-\delta_{k0}) (k_1 0 k_2 \times |k_3 \times)$$

$$\left[\frac{(k_2-k)! (k_3-k)!}{(k_2+k)! (k_3+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{k_3 k}^x \int_{k_2 0}^x + \right.$$

$$\left. \int_{k_2 2}^x + \int_{k_2 4}^x \right)$$

análogamente al caso anterior, $\alpha_{k_1 k_2 k_3}^{\theta_2}$ se obtiene cambiando k_2 por k_3 en los coeficientes $\beta_{k_2 k}^x$ y $\beta_{k_3 k}^x$

GEOMETRIAS C1 y C2.

Les corresponde $\phi = 90^\circ$ y para la geometría C1, θ_2 variable y $\theta_3 = 90^\circ$; para la geometría C2, $\theta_2 = 90^\circ$ y θ_3 variable (Figura 6). Se tiene

$$\alpha_{k_1 k_2 k_3}^{C1} = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{\hat{k}_3} \sum_k (-1)^k (2-\delta_{k0}) (k_1 0 k_2 \times | k_3 k)$$

$$\left[\frac{(k_2-k)! (k_3-k)!}{(k_2+k)! (k_3+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \beta_{k_2 k}^x \left(\beta_{k_3 0}^x - \frac{1}{2} \beta_{k_2 2}^x + \frac{3}{8} \beta_{k_2 4}^x \right)$$

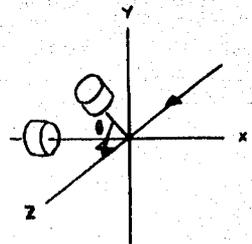


Figura 6

GEOMETRIA D.

Le corresponde ϕ variable, con θ_1 y $\theta_2 = 90^\circ$, por tanto presenta un solo caso. (Figura 7). La expresión para

$P_{k_1 k_2 k_3}(\theta_2 \theta_3 \phi)$ difiere de las obtenidas para las otras geometrías ya que ésta queda reducida a una serie de $\cos k \phi$; se tiene

$$P_{k_1 k_2 k_3}(\theta_2 \theta_3 \phi) = \sum_k \alpha_{k_1 k_2 k_3}^D \cos k \phi$$

con

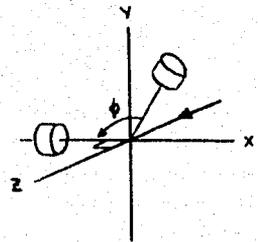


Figura 7

$$\alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^D = \frac{i^{k_1+k_2-k_3}}{k_3} (2-\delta_{k0}) (k_1 0 k_2 k | k_3 k)$$

$$\left[\frac{(k_2-k)!(k_3-k)!}{(k_2+k)!(k_3+k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\rho_{k_2 0}^k - \frac{1}{2} \rho_{k_2 2}^k + \right.$$

$$\left. \frac{3}{8} \rho_{k_2 4}^k \right) \left(\rho_{k_3 0}^k - \frac{1}{2} \rho_{k_3 2}^k + \frac{3}{8} \rho_{k_3 4}^k \right)$$

Quedan por analizar las geometrías E1 y E2 de las que se puede decir que involucran a las A, C y D ya que están formadas por las posiciones de los detectores al recorrer éstos un octante de esfera (Figura 8) cuyos arcos tienen los valores siguientes: para E1 ($0 \leq \theta_2 \leq 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$), ($\theta_2 = 90^\circ$, $0 \leq \phi \leq 90^\circ$) y ($0 \leq \theta_2 \leq 90^\circ$, $\phi = 90^\circ$) y θ_3 fijo a 90° . Para la geometría E2 se tiene θ_2 fijo con θ_3 variable. Las restricciones sobre k_1 , k_2 , k_3 y k son las mismas que para las geometrías anteriores. Se observa que esta geometría comprende a las señaladas como A, C y D y que debe por lo tanto proporcionar tanta información como las tres juntas, como se verá a continuación.

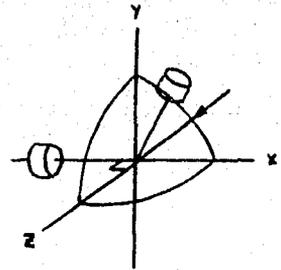


Figura 8

Las funciones angulares toman la forma:

$$P_{k_1 k_2 k_3} (0 \Omega_2 \Omega_3) = \sum_{k, \phi} \alpha_{k_1 k_2 k_3 k}^{E1.2} P_k^k(\cos \theta)$$

$\cos \theta = \phi$

donde

$$\alpha_{k_1 k_2 k_3}^{E1.2} = \frac{i^{k_1+k_2-k_3} (k_1, 0, k_2, \kappa | k_3, \kappa)}{\left[\frac{(k_2-\kappa)! (k_3-\kappa)!}{(k_2+\kappa)! (k_3+\kappa)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_{k_3, 0}^{\kappa} + \frac{1}{2} \int_{k_3, 2}^{\kappa} + \frac{3}{8} \int_{k_3, 4}^{\kappa} \right)}$$

Braude y Gove (23).

Se han presentado las diferentes expresiones de las funciones angulares, de acuerdo con arreglos geométricos determinados de los detectores y al introducirlas en la función $W(\theta)$, se obtiene para las geometrías A, B, C

$$W^i(\theta) = \sum_k a_k \alpha_{k_1 k_2 k_3}^i P_k(\cos \theta) \quad (4.3)$$

con $i = A1, A2, B1, B2, C1, C2$, que indica la geometría que se ha utilizado. a_k tiene el valor:

$$a_k = \frac{1}{(4\pi)^3} \sum (-1)^{a+d} a^{-2} \bar{Z}(l_1, b, l_1', b; a, k_1) \bar{Z}_1(l_3, c, l_3', c; d, k_3)$$

$$Q_{\gamma} \left\{ \begin{matrix} c, L_2, b \\ c, L_2', b \\ k_3, k_2, k_1 \end{matrix} \right\} \langle b || l_1, a \rangle \langle b || l_1', a \rangle^* \langle c || l_2, b \rangle \langle c || l_2', b \rangle^*$$

$$\langle d || l_3, c \rangle \langle d || l_3', c \rangle^* Q_{k_2} Q_{k_3}$$

es conveniente como en los casos anteriores normalizar este coeficiente con un factor N^i que generalmente depende de la geometría utilizada, y a su vez se trata como una nueva incógnita, de manera que:

$$a_k = N^i \sum (-1)^{a+d} \hat{a}^{-2} \bar{z}(l, b, l', b', a, k_1) \bar{z}_1(L_3, c, L_3', c', d, k_3)$$

$$G_{\mathcal{Y}} \left\{ \begin{matrix} c & L_2 & b \\ c & L'_2 & b \\ c & k_2 & k_1 \end{matrix} \right\} \delta_0^{r_0} \delta_1^{r_1} \cos(\tau_l - \tau_{l'}) \delta_2^{r_2} \delta_3^{r_3}$$

$$Q_{k_2} Q_{k_3}.$$

Para la geometría D:

$$W^D(\Phi) = \sum_k a_k \cos k\Phi \alpha_{k_1 k_2 k_3}^D \quad (4.4)$$

Por último, para las geometrías E1 y E2 (geometrías de octante), se tiene:

$$W(\Theta\Phi) = \sum_{k_k} a_k P_k^X(\cos\Theta) \cos k\Phi \alpha_{k_1 k_2 k_3}^{E_{1,2}} \quad (4.5)$$

con a_k de la misma forma que para las geometrías anteriores.

Se presenta a continuación un análisis de los datos que pueden obtenerse de cada geometría y la forma de tratarlas dada su naturaleza.

Aparentemente el conjunto de geometrías descrito proporciona mucha información, sin embargo, dichas geometrías además de complementarse no resultan absolutamente independientes unas de otras ya que para un valor dado de Θ_2 , Θ_3 y Φ de cualesquiera dos geometrías las funciones de correlación son idénticas. Si a esto se agrega el hecho ya mencionado de que las geometrías E contienen a las A, C y D, los dieciocho coeficien

Las geometrías no son independientes

tes con los que éstas contribuyen están representados por los 12 que describen a la correlación en las geometrías E, pero a su vez estos 12 coeficientes no son independientes dado que las geometrías E1 y E2 también presentan la particularidad de dar formas idénticas de la función de correlación a un cierto ángulo: $\theta = 90^\circ$.

Se observa que:

$$\sum_{kk} a_k^i h_{1k} h_{2k} h_{3k} h_{4k} P_k^N(\cos 90^\circ) \cos k\phi = \sum_{kk} a_k^j h_{1k} h_{2k} h_{3k} h_{4k} P_k^N(\cos 90^\circ) \cos k\phi$$

para cualquier valor de ϕ .

Si por simplicidad se hace: $a_{kk}^i = a_k^i h_{1k} h_{2k} h_{3k} h_{4k}$

entonces:

$$a_{00}^i - \frac{1}{2} a_{20}^i + \frac{3}{8} a_{40}^i = a_{00}^j - \frac{1}{2} a_{20}^j + \frac{3}{8} a_{40}^j$$

$$3a_{20}^i - \frac{15}{2} a_{42}^i = 3a_{22}^j - \frac{15}{2} a_{42}^j$$

$$a_{44}^i = a_{44}^j$$

donde los superíndices i, j representan a las geometrías E1 y E2 respectivamente. Lo que reduce a 9 los 12 coeficientes realmente independientes.

De manera semejante se puede mostrar la relación de

dependencia para los coeficientes de las diferentes geometrías.

La ventaja del uso de las geometrías es grande desde el punto de vista experimental ya que teóricamente las 19 funciones de (3.9) y (3.16) se pueden obtener; las funciones $P_{k_1 k_2 k_3}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ son linealmente independientes así como bajo ciertas condiciones A. J. Ferguson (1) las $\chi_{k_1 k_2}^{\alpha}(\Omega_1, \Omega_2)$ también lo son, sin embargo el diseño y el experimento y su análisis resultan demasiado complicados ya que requieren de menos 45 diferentes posiciones de los detectores. Al utilizar las geometrías es posible obtener solamente 14 de esos coeficientes, con 14 medidas: 9 que provienen de las geometrías de octante y 5 de las B1 y B2.

En principio la cantidad de información independiente es igual al número de parámetros desconocidos, luego son de esperarse resultados más exactos de experimentos diseñados de tal manera que proporcionen la mayor información independiente posible.

A continuación se da un ejemplo que ilustra la gran utilidad de la aplicación de las geometrías a problemas experimentales, ya que el uso de éstas fue decisivo para la asignación de los números cuánticos.

V. EJEMPLOS DE TRIPLE CORRELACION.

Las gráficas 4, 5, 6 y 7 de las medidas de distribuciones angulares para las resonancias (13), (2), (3), (12) muestran la ambigüedad a que dan lugar al querer asignar espín y paridad al estado intermedio en la reacción $Mg^{24}(\alpha, \gamma)Si^{28}$ Smulders (16).

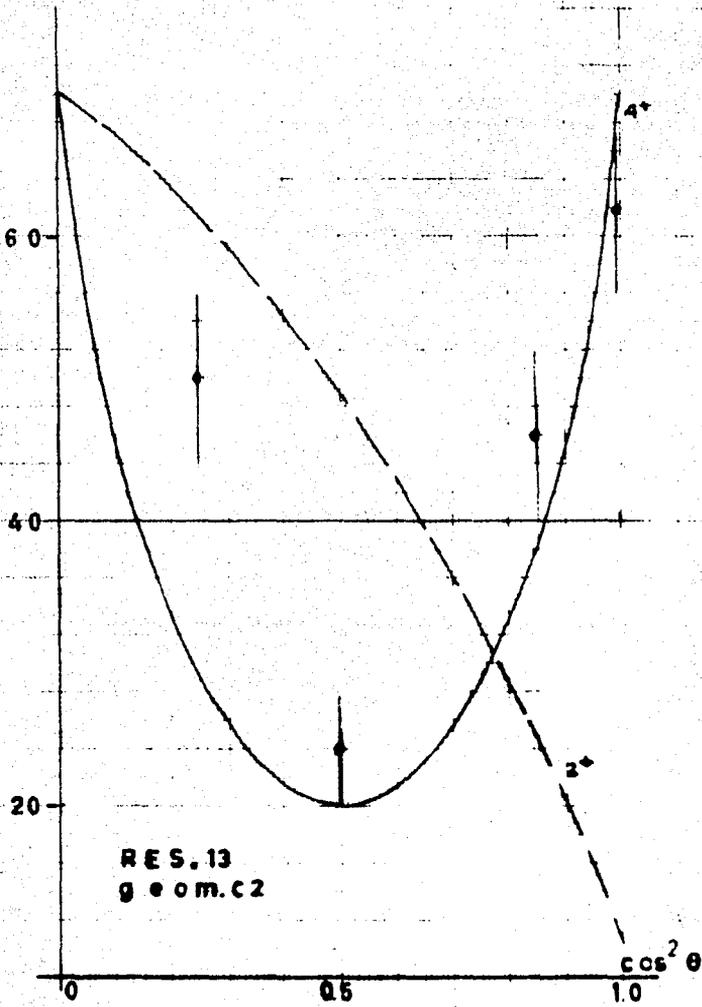
Las gráficas 12, 13, 14 y 15 presentan las correlaciones angulares de la cascada de rayos gamma a través de Si (1) usando geometrías diferentes.

La gráfica número 12 corresponde a la misma resonancia que la gráfica 4 y se hizo notar la confusión para asignar un espín y paridad determinados al nivel correspondiente. Se tienen los siguientes esquemas: $0^+(2) 2^+(\frac{1}{2}) 2^+(2) 0^+$; $0^+(4) 4^+(2) 2^+(2) 0^+$

Utilizando la geometría C2 descrita en la sección anterior se obtienen los resultados presentados en la gráfica. La línea continua corresponde a $J^\pi = 4^+$ con $\delta = 0$ y la punteada a $J^\pi = 2^+$ con $\delta = -3$.

Se observa que el uso de la triple correlación, a través de una geometría adecuada excluye por completo el valor

GRAFICA Nº12



$$0^*(1) 4^*(2) 2^* \quad \delta_2 = 0$$

$$0^*(2) 2^*(\frac{1}{2}) 2^* \quad \delta_2 = 2.3$$

de $J^{\pi} = 4^{+}$ que aparecía igualmente probable al hacer el ajuste de las curvas de distribución angular. Gráfica 4.

Para analizar el caso que corresponde a la distribución angular mostrada por la gráfica 6 se usó la geometría C2 con lo cual se excluyeron los valores $J^{\pi} = 1^{-}$, $J^{\pi} = 2^{+}$ quedando solamente el valor $J^{\pi} = 3^{-}$ con $\delta = 0$. Gráfica 14 (Res. 3).

Las gráficas 13 y 15 muestran correlaciones angulares de las resonancias 2 y 12, cuyas distribuciones angulares simples se mostraron en las gráficas 5 y 7 respectivamente. Se observa que nuevamente el uso de alguna de las geometrías remueve la ambigüedad presente al tratar de asignar espines y paridades a los estados intermedios mediante una sola distribución angular.

En el caso de la resonancia número 6 de Smulders, gráfica 16, fué necesario el uso de dos diferentes geometrías ya que al usar la primera, los resultados fueron nuevamente ambiguos. Gráfica 17.

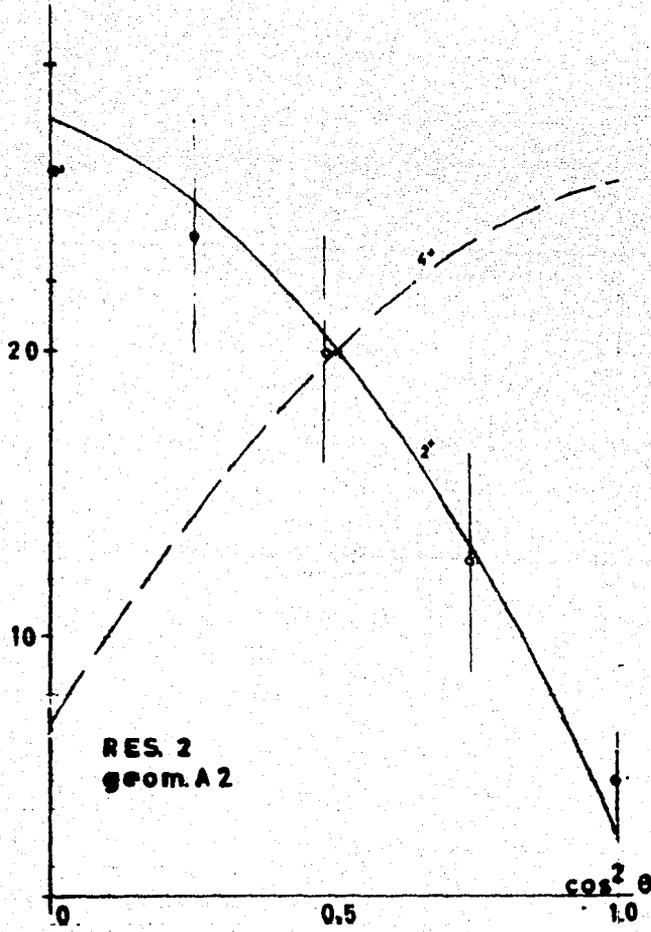
La línea punteada corresponde a $J^{\pi} = 1^{-}$, la línea continua corresponde a $J^{\pi} = 2^{+}$ y la segmentada a $J^{\pi} = 3^{-}$. La geometría que se usó para este caso fué la A1.

Utilizando la geometría A2, el ajuste obtenido fué el que se muestra en la gráfica 18.

Aquí se excluyen los valores $J^{\pi} = 3^{-}$ y $J^{\pi} = 1^{-}$.

La correlación angular de la cascada en la geometría A2 se decide en favor de $J^{\pi} = 2$ con $\delta = 0.10$.

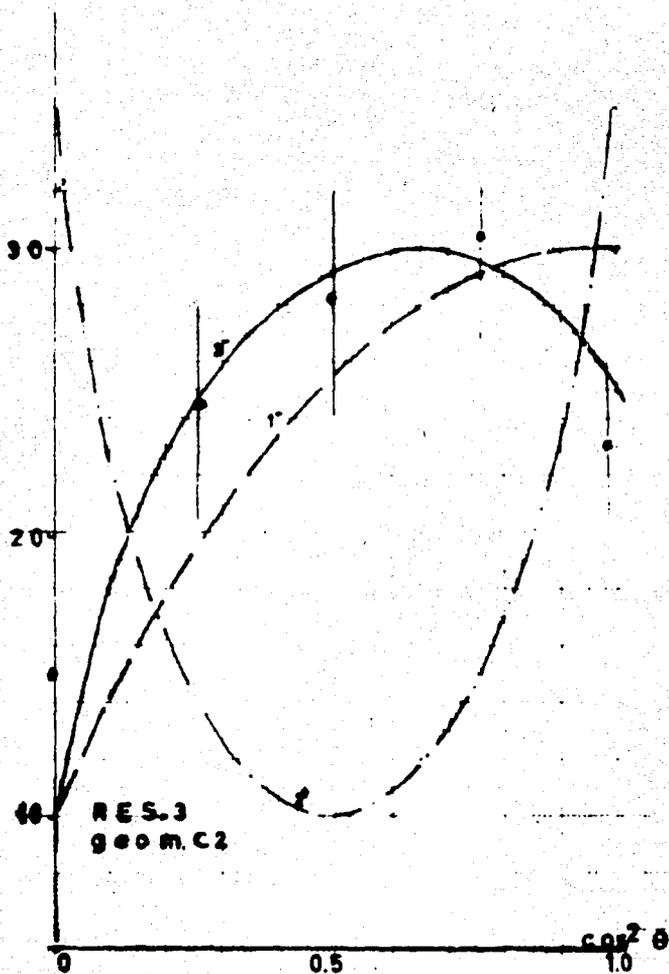
GRAFICA Nº13



$$0^*(4) 4^*(2) 2^* \quad \delta_2 = 0$$

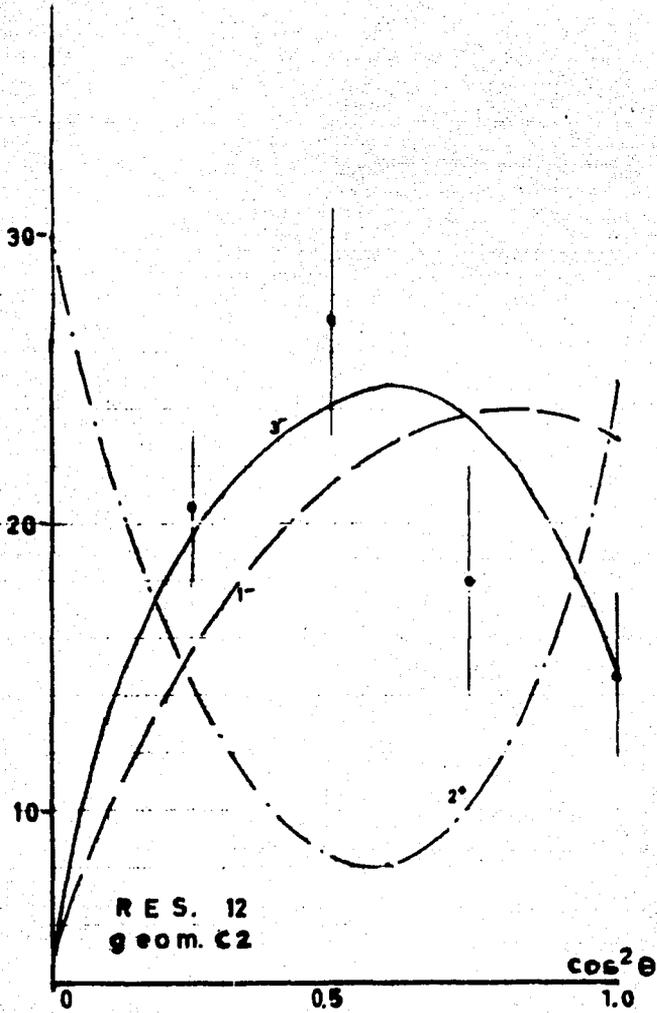
$$0^*(2) 2^*(\frac{1}{2}) 2^* \quad \delta_2 = -8$$

GRAFICA N°14



- 0°(9)3°(2)2° δ₀ = 0
- 0°(2)2°(½)2° δ₁ = 0.7
- 0°(1)1°(½)2° δ₂ = -0.22

GRAFICA Nº 15

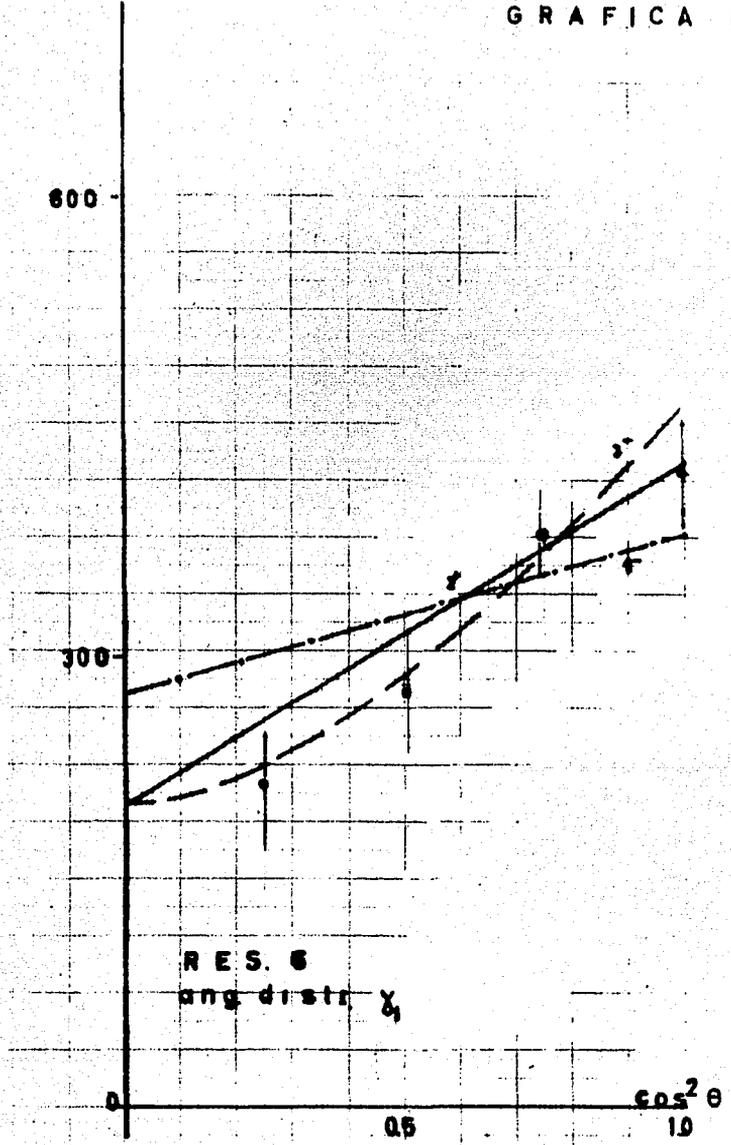


$$0^+(3) 3^-(2) 2^+ \quad \delta_2 = 0$$

$$0^+(2) 2^+(\frac{1}{2}) 2^+ \quad \delta_2 = 0.1$$

$$0^+(1) 1^-(\frac{1}{2}) 2^+ \quad \delta_2 = -0.22$$

GRAFICA Nº 16

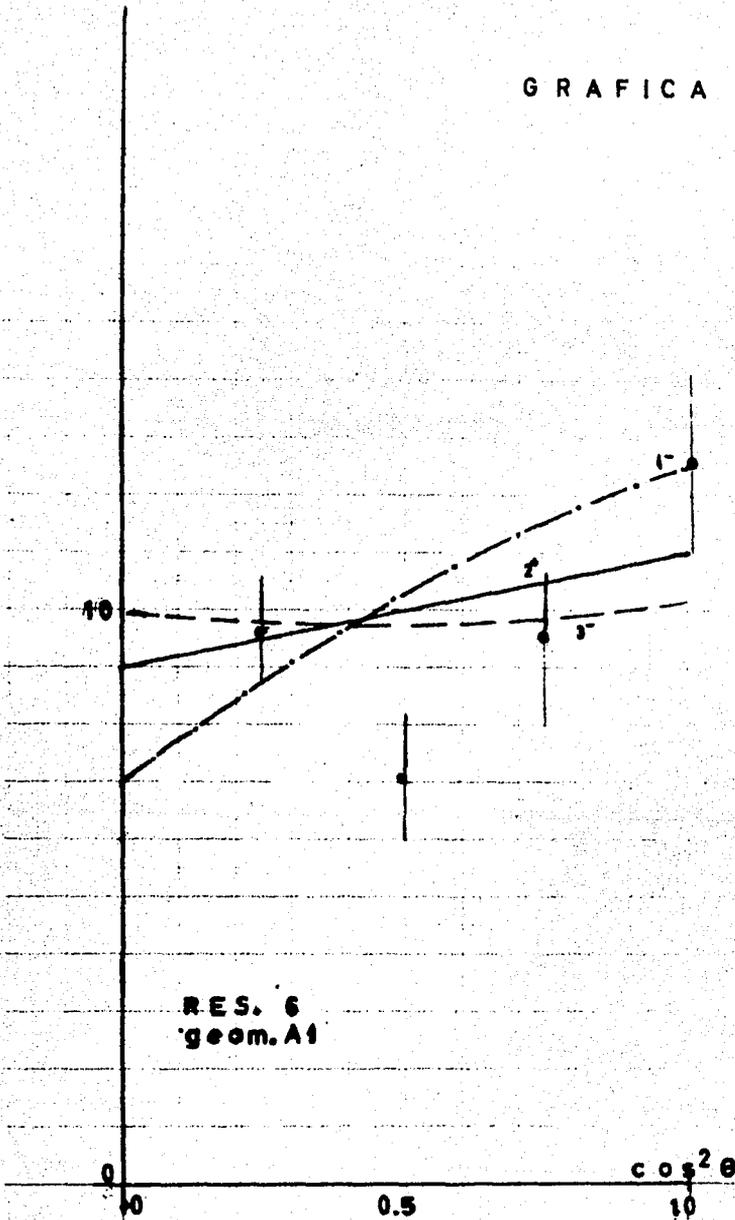


$0^\circ(2)2^\circ(\frac{1}{2})2^\circ \quad \delta_2 = -0.10$

$0^\circ(3)5^\circ(\frac{1}{2})2^\circ \quad \delta_2 = -0.30$

$0^\circ(1)1^\circ(\frac{1}{2})2^\circ \quad \delta_2 = 0.75$

GRAFICA N° 17



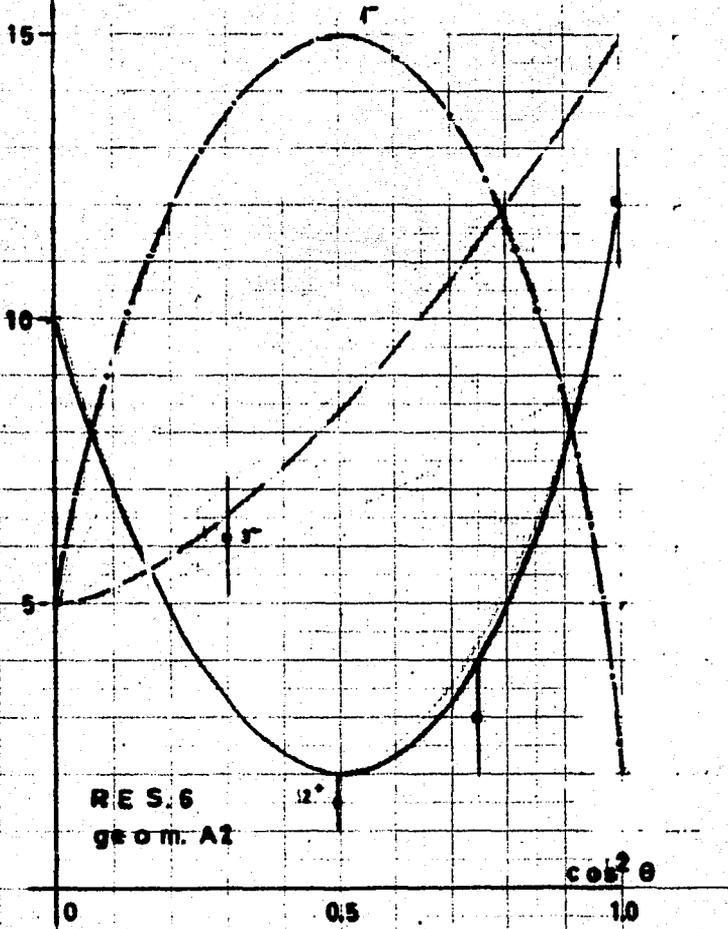
RES. 6
geom. A1

$$0^+(2) 2^+(\frac{1}{2}) 2^+ \quad \delta_2 = -0.10$$

$$0^+(3) 3^-(\frac{1}{2}) 2^+ \quad \delta_2 = -0.60$$

$$0^+(1) 1^-(\frac{1}{2}) 2^+ \quad \delta_2 = +0.75$$

GRAFICA N°18



$$0^*(2) 2^*(\frac{1}{2}) 2^* \quad \delta_1 = -0.10$$

$$0^*(3) 3^*(\frac{1}{2}) 2^* \quad \delta_2 = -0.50$$

$$0^*(1) 1^*(\frac{1}{2}) 2^* \quad \delta_3 = 0.75$$

CONCLUSIONES

Se ha presentado brevemente la teoría de la doble y triple correlación, para casos en que están presentes mezclas de estados caracterizados por diferentes números cuánticos, valiosa herramienta en la espectroscopía nuclear, y varios ejemplos que permiten observar la manera de aplicar este formalismo a casos particulares.

Se han introducido desde luego algunas suposiciones sobre la teoría tal como se ofrece en las fórmulas generales (1.1) para doble correlación y (3.1) para triple correlación. La más importante es la que da lugar a las llamadas "geometrías" que tanto ayudan a resolver el problema de la triple correlación. Desde el punto de vista teórico, permiten simplificar de tal manera las expresiones que de suyo dependen de tres direcciones (3.6) hasta lograr expresiones muy semejantes a las de la doble correlación que sólo dependen de un ángulo; eventualmente la triple correlación dependerá de dos ángulos como en el caso de las geometrías E1,1. Experimentalmente resulta mucho menos complicado llevar a cabo experimentos con las simplificaciones

introducidas por las geometrías que aquellos donde se pretende realizar un análisis tal y como lo sugiere la ecuación (3.6), ya que en este caso el aparato que mueva adecuadamente los detectores encierra muchas dificultades, mientras que el uso de las "geometrías" permite adaptaciones relativamente simples. A.J. Ferguson (1).

El problema se ha reducido a obtener un conjunto de curvas teóricas a partir de las ecuaciones (1.17), (3.8), (4.3), (4.4) o bien (4.5), variando los valores de los parámetros δ_i para una secuencia de números cuánticos: $a(l_1)b(l_2)c$ ó $a(l_1)b(l_2)c(l_3)d$ fija a priori, con los datos que se conocen de la reacción, por ejemplo a y c , a y d , etc.; con esto se procede a un ajuste de las curvas experimental y teórica por cualquiera de los métodos numéricos desarrollados por Batchelor et al. (18), Litherland et al. (22), Fletcher y Powell (24), Flores Bravo (17), etc.

Sin embargo hay una cantidad considerable de cálculos numéricos asociados con el análisis, que hacen indispensable el uso de una computadora para calcular las curvas teóricas, ya que esto involucra una serie de tediosas operaciones con los coeficientes ya tabulados: Z , Z_1 , $W(abcd;ef)$, G_{ij} , etc. que describen la correlación. Por otra parte es necesaria una serie de operaciones para llevar a cabo el ajuste de las curvas obtenidas experimentalmente, a fin de obtener resultados numéricos cuya complicación varía en

razón directa al número de parámetros a fijar y al número de medidas realizadas. A. J. Ferguson (1) propone que éstas estén en una razón de 3 a 1 o más.

Finalmente, el presente trabajo es el segundo de una serie que consta de tres:

1.- La aplicación de la teoría de las correlaciones angulares a reacciones alfa-gamma. (Alvarez 15) en el que se describen los elementos matemáticos que integran la función $W(\theta)$, según la formulación de A.J. Ferguson y su aplicación a casos sencillos en los que no se presentan mezclas de momentos, multipolos o en el espín del canal.

2.- Aplicación de la teoría de doble y triple correlación angular a reacciones que presentan mezclas.

3.- Métodos para el análisis de experimentos de correlaciones angulares haciendo uso de las computadoras, Flores Bravo (17).

El propósito es colaborar con el grupo de Reacciones Nucleares del Laboratorio Dinamitron, Instituto de Física, U.N. A.M., a desarrollar el plan de trabajo referente a Correlaciones Angulares, que se ha trazado dicho grupo.

REFERENCIAS

- 1.- A.J. Ferguson, "Angular Correlation Methods in Gamma-Ray Spectroscopy North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1965).
- 2.- S. Devos and L.B.J. Goldfarb "Handbuch der Physik" Vol. 42 Springer Berlin (1957).
- 3.- L.C. Biedenharn "Nuclear Spectroscopy" Part B F. Aizenberg-Selove Editor Academic-Press, New York (1950).
- 4.- H.E. Gove and A.R. Rutledge "Finite Geometry Corrections to Gamma-Ray Angular Correlations Measured with 5 in Diameter by 4 in Long NaI(TL) Crystals" (AECL, 755) Chalk River Ontario (1958).
- 5.- M.E. Rose. Phys. Rev. 91 610 (1953).
- 6.- A.J. Ferguson and A.R. Rutledge "Coefficients for Triple Angular Correlation Analysis in Nuclear Bombardment Experiments (AECL, 420) Chalk River Ontario (1957).
- 7.- H. Van Rinsvelt and P.B. Smith, Physica 30, 59 (1964).
- 8.- H. Frauenfelder "Beta and Gamma Ray Spectroscopy" Kay Siegbahn Editor North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1955).
- 9.- H.E. Gove "Nuclear Reactions", Vol. 1, P.M. Endt and M. Demeur Editores North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1959).
- 10.- J.M. Blatt and L.C. Biedenharn. Rev. Mod. Phys., 24, 258 (1952).
- 11.- W.T. Sharp, J.M. Kennedy, B.J. Sears and M.G. Hayle (AECL-97) Chalk River Ontario (1953).
- 12.- E.P. Wigner. Phys. Rev. 72, 29 (1947); Phys. Rev. 73, 1002 (1948).
- 13.- W.T. Sharp, H.E. Gove and E.B. Paul, "Graphs of Coulomb Functions" (AECL-268),

Chalk River Ontario (1958).

- 14.- U. Fano and G. Racah, "Irreducible Tensorial Sets". Academic Press, New York (1959).
- 15.- I. Alvarez Torres, Tesis. "Aplicación de la Teoría de Correlaciones Angulares a Reacciones (Alfa-Gamma)", México, D.F. (1968).
- 16.- P.J.M. Smulders, Tesis Doctoral. "Alpha-Capture Reactions in ^{20}Ne , ^{24}Mg and ^{28}Si " Knoninklinjke Drukkerij Van de Garde N.V. Zaltbommel. (1965).
- 17.- M. Flores Bravo, Tesis en preparación.
- 18.- I. Batchelor, A.J. Ferguson, H.E. Gove and A.E. Litherland. Nucl. Phys. 16, 38 (1960).
- 19.- J. Von Neumann "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics Princeton University Press (1955).
- 20.- P. Roman. "Advanced Quantum Theory". Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1964).
- 21.- R. Huby, Proc. Phys. Soc. (London) 67 A. 1103 (1954).
- 22.- A.E. Litherland and A.J. Ferguson. Can. Jour. of Phys. 39, 788 (1961).
- 23.- C. Broude and H.E. Gove. Ann. Phys. N.Y. 23, 71 (1963).
- 24.- R. Fletcher and M.J.D. Powell Computer Journal, 6, 163, (1963).
- 25.- E.B. Paul, H.E. Gove, A.E. Litherland and G.A. Bartolomew. Phys. Rev. 99, 1339, (1955).

APENDICE

El estudio de un núcleo que decae a través de dos radiaciones gamma consecutivas ofrece un buen ejemplo de doble correlación angular. Devons y Goldfarb (2), de acuerdo con Hamilton muestran que

$$W(\theta) = S \sum_{\alpha} \sum_{\beta \beta'} \langle C | H_2 | B \rangle \langle B | H_1 | A \rangle^2$$

Donde H_1 y H_2 representan las interacciones responsables de las radiaciones gamma y S es un factor que depende de las propiedades de la radiación no medidas, por ejemplo la polarización, si el experimento no incluye la medida de ésta.

Los elementos de matriz de la ecuación anterior pueden ser rearrreglados de manera que $W(\theta)$ sea el producto de dos matrices

$$W(\theta) = \sum_{\beta \beta'} E^{(1)}(\beta \beta') E^{(2)}(\beta \beta')$$

donde

$$E^{(1)}(\beta \beta') = S_1 \sum_{\alpha} \langle B | H_2 | A \rangle \langle B' | H_1 | A \rangle^*$$

$$E^{(2)}(\beta \beta') = S_2 \sum_{\gamma} \langle C | H_2 | B \rangle \langle B' | H_2 | C \rangle^*$$

La función de correlación está ahora representada por el producto de dos factores referidos separadamente a cada transición.

Por el momento sólo se ilustrará el caso de una cascada gamma-gamma, sin embargo para el estudio de una doble correlación que implique, por ejemplo, la captura de una partícula, solamente será necesario modificar la matriz $E^{(1)}(\beta\beta')$.

A fin de obtener una expresión para $W(\theta)$ en una forma mas explícita se siguen tres pasos:

- a) Discutir aisladamente el elemento de matriz

$$\langle \beta | H_1 | \alpha \rangle$$

- b) Utilizar los resultados para hallar una expresión para

$$E^{(1)}(\beta\beta')$$

- c) Introducir los resultados obtenidos en los incisos anteriores para presentar a $W(\theta)$ en una forma compacta y adecuada para su evaluación explícita.

Los elementos de matriz

$$\langle \beta | H_1 | \alpha \rangle \equiv \langle b \beta \Omega_1 \sigma_1 | H_1 | a \alpha \rangle$$

están representados en términos de los espines nucleares a y b para los estados inicial y resultante respectivamente, por la dirección de la radiación emitida y por la componente del espín en esa dirección. Esta descripción es la natural para describir las propiedades de las radiaciones observadas, sin embargo lo que interesa

investigar son los momentos angulares y la paridad, luego es necesario efectuar una transformación de $\Omega_1 \sigma_1$ a $L_1 \Lambda_1$.

Entonces

$$\begin{aligned} \langle b \beta \Omega_1 \sigma_1 | H_2 | a \alpha \rangle &= \sum_{L_1 \Lambda_1} \langle \Omega_1 \sigma_1 | L_1 \Lambda_1 \rangle \langle b \beta L_1 \Lambda_1 | H_2 | a \alpha \rangle \\ &= \sum_{L_1 \Lambda_1 \mu_1} \langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1 \rangle D_{\Lambda_1 \mu_1}^{L_1*} \langle b \beta L_1 \Lambda_1 | H_2 | a \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Ya que $\langle \Omega_1 \sigma_1 | L_1 \Lambda_1 \rangle$ representa una eigenfunción de la radiación referida a un eje de coordenadas arbitrario, es conveniente expresarla en términos de eigenfunciones cuantizadas a lo largo de la dirección de la radiación, luego:

$$\langle \Omega_1 \sigma_1 | L_1 \Lambda_1 \rangle = \sum_{\mu} \langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu \rangle D_{\Lambda_1 \mu}^{L_1*}.$$

Como la energía de interacción para cada radiación es invariante

$$H_2 = \sum_{L_1 \Lambda_1} (-1)^{\Lambda_1} A_{-\Lambda_1}^{L_1} T_{\Lambda_1}^{L_1}$$

y los elementos de matriz de H_2 entre dos estados de momento angular dado son:

$$\langle b \beta | T_{\Lambda_1}^{L_1} | a \alpha \rangle$$

Aplicando el teorema de Wigner-Eckart

$$\langle b \beta | T_{\Lambda_1}^{L_1} | a \alpha \rangle = \langle b \beta L \Lambda_1 | a \alpha \rangle \langle b || T^{L_1} || a \rangle$$

de donde:

$$\langle b | H_2 | a \rangle = \sum_{L_1 \Lambda_1 \mu_1} \langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1 \rangle D_{\Lambda_1 \mu_1}^{L_1*} \langle b \beta L_1 \Lambda_1 | a \alpha \rangle \langle b || T^{L_1} || a \rangle$$

Se procede de manera similar para obtener una expresión para $\langle b' | H_1 | a \rangle$ y mediante algebra de Racah:

$$E^{(1)}(\beta\beta') = \sum_{L, L', k, \kappa} C_{k\kappa}(L, L') (b\beta b - \beta' | R, \kappa_1)$$

$$(-)^{b-\beta-k} W(LbL'b; ak) D_{\kappa_1, 0}^{k_1} \langle b || T^{L'} || a \rangle \langle b || T^{L'} || a \rangle^*$$

$$\text{con } C_{k\kappa}(L, L') = S_1 \sum_{\mu, \mu'} (-)^{L_1 - \mu'} \langle L_1 \mu_1 L_1 - \mu_1 | k, \kappa \rangle \langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1 \rangle \langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1 \rangle^*$$

que son los llamados parámetros de radiación introducidos por Racah y característicos de cada radiación emitida, a través de las eigenfunciones $\langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1 \rangle$, $\langle 0 \sigma_1 | L_1 \mu_1' \rangle$, y de los arreglos experimentales representados por S_1 . Formalmente $C_{k\kappa}(L, L')$ son eigenfunciones de momento angular total con eigenvalores $k\kappa$.

De manera semejante se obtiene una expresión, análoga a $E^{(1)}(\beta\beta')$, para $E^{(2)}(\beta\beta')$ hasta llegar finalmente a

$$W(\theta) = b^4 \sum_{L_1, L_2} \sum_{L_1', L_2'} \sum_k (-)^{L_2 - L_2'} C_{k0}(L_1, L_1') C_{k0}(L_2, L_2') W(L_1 b L_1' b; ak) W(L_2 b L_2' b; ck) \langle b || T^{L_1'} || a \rangle \langle b || T^{L_1'} || a \rangle^* \langle c || T^{L_2'} || b \rangle \langle c || T^{L_2'} || b \rangle^* P_k(\cos \theta)$$

la cual puede escribirse como:

$$W(\theta) = \sum_k A_k P_k(\cos \theta)$$

Donde las A_k son productos de coeficientes tabulados y de elementos reducidos de matriz:

$$A_k = B_k \langle b || T^{L_1'} || a \rangle \langle b || T^{L_1'} || a \rangle^* \langle c || T^{L_2'} || b \rangle \langle c || T^{L_2'} || b \rangle^*$$

con

$$B_k = \sum_{a, l_1, l_2, l_1', l_2'} (-)^{a-c} \frac{1}{16\pi^2 \hat{a}^2} \bar{Z}_1(l_1, b, l_1', b; a, k) \bar{Z}_1(l_2, b, l_2', b; c, k)$$

y

$$\langle b || T^{L_1} || a \rangle \equiv \langle b | L_1 | a \rangle ; \langle c || T^{L_2} || b \rangle \equiv \langle c | L_2 | b \rangle$$

Estos elementos reducidos representan la emisión de rayos gamma e indican que un estado de espín \underline{a} emite una radiación de multipolaridad \underline{L} , y queda en un estado caracterizado por \underline{b} , es decir,

$$\underline{a} = \underline{b} + \underline{L}_1$$

Los elementos reducidos de absorción y emisión están relacionados por:

$$\hat{b} \langle b || L_1 | a \rangle = (-)^{a+L-b} \hat{a} \langle b | L_1 | a \rangle$$

El elemento $\langle b || L_1 | a \rangle$ representa un proceso en el que un estado de espín inicial \underline{a} absorbe una radiación de multipolaridad \underline{L}_1 , que da lugar a un estado de espín \underline{b} :

$$\underline{b} = \underline{a} + \underline{L}_1$$