

00362.
2ej. 2



SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

**TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN
FLUJO
MAGNETOHIDRODINAMICO
CON CONDICIONES A LA FRONTERA
DE TERCER TIPO**

Tesis de Maestría en Ciencias (Física).

Sergio Cuevas García

MEXICO, D. F.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FEBRERO 1988



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

INTRODUCCION	2
1 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MAGNETO- HIDRODINAMICA	3
1.1 Introducción	3
1.2 Ecuaciones del Campo Electromagnético	4
1.3 Ecuaciones de Balance de la Magnetohidrodinámica	7
1.4 Aproximación Magnetohidrodinámica	12
1.5 Procesos Disipativos y Transferencia de Calor en la Magneto- hidrodinámica	14
2 FLUJO MAGNETOHIDRODINAMICO EN CANALES	17
2.1 Introducción	17
2.2 Máquinas de Inducción : Efecto Hartmann	17
2.3 Flujo de Hartmann	21
2.4 Modelo del Generador Magnetohidrodinámico basado en el Flujo de Hartmann	25
3 TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN FLUJO MAG- NETOHIDRODINAMICO	32
3.1 Generalidades	32
3.2 Trabajos Previos	34
3.3 Formulación del Problema	40
3.4 Condiciones a la Frontera	41
3.5 Solución de la Ecuación de Transferencia de Calor	44
3.5.1 Solución de la Ecuación en las Regiones Alejadas de la Discontinuidad	46
3.5.2 Solución de la Ecuación en las Regiones Cercanas a la Discontinuidad	53
CONCLUSIONES	88
REFERENCIAS	89

INTRODUCCION

La principal motivación para el presente estudio fue la necesidad de comprender los fenómenos de transferencia de calor en los flujos magneto-hidrodinámicos (MHD) que se presentan en diversas máquinas de inducción, particularmente en los generadores MHD. El diseño de tales máquinas requiere del conocimiento de los perfiles de temperatura y los flujos de calor en los distintos modos de operación del sistema.

El objetivo fundamental del trabajo es caracterizar la influencia de un coeficiente de transferencia de calor finito en las paredes de un ducto MHD, lo que matemáticamente implica resolver la ecuación de la energía bajo condiciones a la frontera de tercer tipo. Este problema tiene relevancia debido a que los trabajos anteriores sobre la transferencia de calor en ductos MHD se habían centrado en resolver la ecuación mencionada bajo condiciones a la frontera de primer o segundo tipo, es decir, manteniendo constantes las temperaturas de las paredes (coeficiente de transferencia de calor infinito) o imponiendo un flujo de calor constante a través de las mismas, respectivamente. Sin embargo estas condiciones no siempre reproducen adecuadamente la situación real, por lo que considerar un coeficiente de transferencia de calor finito en las fronteras da la posibilidad de obtener una descripción más realista del problema.

Con el fin de estructurar, en la medida de lo posible, un documento autocontenido y ubicar al lector dentro del contexto general del problema, se incluyen dos capítulos preliminares. El primero establece las ecuaciones del campo electromagnético y su incorporación a las ecuaciones de balance de un medio continuo, lo que da lugar a las ecuaciones fundamentales de la MHD. El segundo describe los distintos modos de operación de las máquinas de inducción así como los principales fenómenos que se presentan en los flujos MHD en canales; posteriormente se establece un modelo sencillo a partir del flujo laminar de Hartmann que permite predecir el comportamiento de las máquinas mencionadas.

El último capítulo contiene una revisión bibliográfica de los diferentes autores que previamente habían tratado el problema de la transferencia de calor en ductos MHD. A continuación se formula el problema y se resuelve analíticamente la ecuación de balance de energía bajo condiciones a la frontera de tercer tipo. Finalmente, partiendo de la solución encontrada, se lleva a cabo un estudio paramétrico con el objeto de determinar la influencia de los diversos factores físicos del sistema y, en particular, del coeficiente de transferencia de calor de las fronteras, ilustrando gráficamente los perfiles de temperatura en el fluido y los flujos de calor a través de las paredes. Como casos límites se obtienen los resultados para condiciones a la frontera de primer y segundo tipo.

Capítulo 1

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA MAGNETOHIDRODINAMI- CA

1.1 Introducción

La magnetohidrodinámica (MHD) estudia el movimiento de un fluido conductor de electricidad en presencia de un campo magnético. Aquí el problema principal es que las corrientes eléctricas inducidas dentro del fluido en movimiento modifican el propio campo, y el flujo de estas corrientes dentro del mismo campo da lugar a fuerzas mecánicas que modifican el movimiento del fluido. El interés y la dificultad de la MHD se cifran precisamente en esta interacción campo-movimiento.

El estudio de la MHD abarca un amplio rango de fenómenos físicos, desde el flujo de metales líquidos en presencia de campos magnéticos hasta plasmas interestelares. Cada tópico en particular presenta condiciones específicas que determinan el tratamiento del problema. Sin embargo, para que la MHD sea estrictamente aplicable, es necesario que las distancias características y los intervalos de tiempo para el movimiento en cuestión sean mucho mayores que la trayectoria libre media y el tiempo libre medio entre colisiones de los portadores de carga. En otras palabras, la MHD trata al fluido desde un punto de vista macroscópico considerándolo como un continuo susceptible de ser descrito en términos de propiedades locales. A la aproximación del continuo o hidrodinámica se incorpora la hipótesis del equilibrio local, que permite describir el estado del fluido en cada punto mediante pocas variables, relacionadas entre sí de la misma forma que cuando el fluido se encuentra en equilibrio.

El principal efecto de un campo magnético sobre un fluido conductor

es, por una parte, el surgimiento de fuerzas de cuerpo sobre el fluido, y por otra, el intercambio de energía entre el campo y el fluido. En consecuencia las ecuaciones ordinarias de la mecánica de fluidos por sí mismas ya no son suficientes para dar una descripción adecuada del fenómeno cuando se considera la interacción electromagnética, y es necesario combinarlas con las ecuaciones del campo electromagnético a fin de obtener las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido conductor en presencia de un campo magnético.

En este capítulo se establecen las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético que se utilizan posteriormente en la obtención de las ecuaciones de balance de un fluido conductor en presencia de un campo magnético. Estas últimas se simplifican mediante una aproximación adecuada y con ayuda de las ecuaciones constitutivas se establecen las ecuaciones que gobiernan los procesos disipativos en la MHD. Debido a que el interés primordial del trabajo yace en las máquinas de inducción MHD que operan con metales líquidos, las discusiones posteriores se centrarán en este tipo de fluidos.

1.2 Ecuaciones del Campo Electromagnético

Las ecuaciones que gobiernan los fenómenos electromagnéticos son conocidas como las ecuaciones de Maxwell. Dichas ecuaciones junto con la ecuación de Lorentz para la fuerza, establecen las interacciones fundamentales del campo electromagnético, que se caracteriza por los siguientes vectores: intensidad de campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, inducción eléctrica $\vec{D}(\vec{r}, t)$, intensidad de campo magnético $\vec{H}(\vec{r}, t)$, inducción magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ y densidad de corriente de conducción $\vec{J}(\vec{r}, t)$.

En su forma diferencial las ecuaciones macroscópicas de Maxwell (en el sistema MKS) se expresan de la siguiente forma [1]¹

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

¹Los números entre corchetes [] indican las referencias al final del trabajo.

donde ρ_e es la densidad de carga eléctrica. Las características del campo electromagnético en distintos medios materiales dependen de la estructura de tales medios y su estado termodinámico. Por lo tanto las ecuaciones de campo deben complementarse con relaciones entre los vectores de campo y los parámetros característicos del medio respectivo, conocidas como ecuaciones constitutivas. En un medio homogéneo e isotrópico en reposo dichas ecuaciones en la aproximación lineal, se pueden expresar mediante un modelo simple, a saber

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.5)$$

donde ϵ y μ son escalares conocidos como la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del medio, respectivamente. En general ϵ y μ podrían depender del estado termodinámico del medio, sin embargo para la gran mayoría de los problemas tratados en MHD ϵ y μ pueden considerarse constantes. En particular, al trabajar con fluidos conductores (v.g. metales líquidos, gases y soluciones) es posible tomar como una muy buena aproximación $\mu = \mu_0$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío. En algunos gases (en particular plasmas), la permitividad eléctrica ϵ es aproximadamente igual a la del vacío; sin embargo esta condición no se satisface en general para líquidos conductores [1].

Otra ecuación constitutiva muy común es la llamada ley de Ohm que establece una relación entre la densidad de corriente \vec{J} y la intensidad de campo eléctrico \vec{E} , y en un medio en reposo se expresa como

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (1.6)$$

donde σ es la conductividad eléctrica del medio, la cual en una buena aproximación puede suponerse constante. Esta ley únicamente es válida para medios lineales homogéneos e isotrópicos, y al establecer una relación local entre la corriente y el campo se supone que la densidad de corriente en un punto del conductor depende sólo del campo en ese punto. Esto a su vez presupone que la trayectoria libre media de los electrones es pequeña comparada con las distancias sobre las cuales el campo cambia apreciablemente. La ecuación (1.6) no incluye el efecto del campo magnético sobre la distribución de corrientes, conocido como efecto Hall que puede suponerse despreciable al tratar el flujo de metales líquidos en campos magnéticos. Este efecto puede ser de importancia en algunos problemas de física de plasmas [6.35,36,37].

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante un grupo de transformaciones conocido como grupo de Lorentz, lo cual implica que dichas ecuaciones también son válidas en medios en movimiento uniforme. Para obtener una descripción adecuada de las cantidades del campo electromagnético vistas por observadores en distintos sistemas inerciales de re-

ferencia, es necesario combinar las transformaciones de Lorentz con las ecuaciones de Maxwell [1]. Las ecuaciones constitutivas (1.5) y (1.6) son válidas únicamente en el sistema en reposo (i.e. el sistema respecto al cual el fluido se encuentra en reposo), y en consecuencia es necesario utilizar las transformaciones para las cantidades de campo para obtener su expresión en el sistema de laboratorio (i.e. el sistema respecto al cual el fluido se desplaza con velocidad \vec{v}). En su forma completa tales ecuaciones resultan complicadas [2], sin embargo en la aproximación no relativista y para los problemas tratados en MHD (en medios isotrópicos lineales), pueden utilizarse en la siguiente forma simple:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.7)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.8)$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \rho_e \vec{v}, \quad (1.9)$$

donde ahora todas las cantidades están referidas al sistema de laboratorio. El término $\rho_e \vec{v}$ de la ecuación (1.9) se denomina corriente de convección.

Un medio conductor en movimiento en cuyo interior se encuentra un campo electromagnético, se ve influido por la presencia de dicho campo. Para escribir la ecuación de movimiento del medio desde un punto de vista newtoniano, se debe expresar la acción del campo mediante una densidad de fuerza. La ley de Lorentz para la fuerza electromagnética da la fuerza sobre una partícula con carga eléctrica q bajo la acción de un campo electromagnético

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}). \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) es una expresión válida en cualquier sistema, siendo \vec{u} la velocidad de la partícula con respecto a dicho sistema y \vec{E} y \vec{B} son los campos locales vistos por un observador en el mismo sistema. Para un medio continuo que contenga partículas cargadas, la densidad de carga está dada por

$$\rho_e = \frac{\sum_{\alpha} q_{\alpha}}{\Delta V}, \quad (1.11)$$

donde q_{α} son las cargas de las diversas partículas en el volumen ΔV , que es pequeño comparado con las dimensiones del problema, pero grande comparado con las distancias entre las partículas cargadas. De la misma manera se define la densidad de corriente como

$$\vec{J} = \frac{\sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}}{\Delta V}. \quad (1.12)$$

donde \vec{u}_α es la velocidad de la partícula de clase α . Entonces, para un medio continuo con densidad de carga ρ_e y densidad de corriente \vec{J} la ecuación (1.10) se transforma en la densidad de fuerza

$$\vec{f} = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (1.13)$$

En el caso no relativista se puede considerar como una buena aproximación que la densidad de fuerza electromagnética es invariante ante un cambio de sistema inercial de referencia. Formalmente, para probar la validez de la ecuación (1.13) para medios en movimiento, se debe notar que dicha ecuación representa la parte espacial de la expresión covariante

$$f_\gamma = J_\beta \mathcal{F}_{\beta\gamma}, \quad (1.14)$$

siendo J_β el cuadrivector de corriente y $\mathcal{F}_{\beta\gamma}$ el tensor de campo electromagnético [3], y donde se ha utilizado la convención de que índices repetidos indican suma. Con ayuda de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas (1.7) y (1.8), las componentes de la densidad de fuerza electromagnética se pueden expresar en la forma [2,4]

$$(\rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B})_i = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1.15)$$

donde

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \quad (1.16)$$

se define como la densidad de momento electromagnético y

$$T_{ik} = D_i E_k + B_i H_k - \delta_{ik} \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} - \vec{B} \cdot \vec{H}), \quad (1.17)$$

es el tensor de esfuerzos de Maxwell.

1.3 Ecuaciones de Balance de la Magneto-hidrodinámica

Balance de Masa

Sea $\rho \equiv \rho(\vec{r}, t)$ la densidad de masa del fluido y $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{r}, t)$ el campo de velocidades del mismo. En su forma integral la ecuación de balance de masa establece que

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.18)$$

donde dV es el elemento de volumen ocupado por el fluido. Con ayuda del teorema de transporte de Reynolds [5] la ecuación (1.18) puede expresarse en la forma

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = 0,$$

donde V es un volumen que se desplaza junto con el fluido y d/dt denota la derivada material dada por

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla. \quad (1.19)$$

Puesto que el integrando es una función continua y el volumen de integración es arbitrario, se tiene que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.20)$$

Utilizando (1.19), la ecuación (1.20) se puede reescribir en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}, \quad (1.21)$$

donde el vector

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (1.22)$$

se conoce como la densidad de flujo de masa. Su dirección es la del movimiento del fluido mientras que su magnitud es igual a la masa de fluido que atraviesa por unidad de tiempo un área unitaria perpendicular a la velocidad. Como puede observarse la ecuación de balance de masa no se ve alterada por la interacción electromagnética.

Balance de Momento Lineal

La ecuación de balance de momento en su forma integral es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_S \vec{\tau} \cdot \hat{n} da + \int_V \vec{f} dV. \quad (1.23)$$

La integral de superficie del lado derecho considera las fuerzas de superficie que se presentan en el fluido, donde $\vec{\tau}$ es el tensor de esfuerzos mecánico y \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie. La segunda integral del lado derecho toma en cuenta las fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido, siendo \vec{f} la densidad de fuerza de cuerpo. Mediante el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de balance de masa (1.20), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV, \quad (1.24)$$

mientras que, utilizando el teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S \vec{\tau} \cdot \hat{n} da = \int_V \nabla \cdot \vec{\tau} dV. \quad (1.25)$$

Sustituyendo (1.24) y (1.25) en la ecuación (1.23) se obtiene la forma diferencial de la ecuación de balance de momento lineal, es decir

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f}. \quad (1.26)$$

El efecto del campo electromagnético se incorpora a través de la fuerza de Lorentz (1.13), que se puede entender como una fuerza de cuerpo. De modo que para un fluido conductor que se desplaza en un campo magnético la ecuación de balance de momento toma la forma

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \mu_0 \vec{H}, \quad (1.27)$$

donde se ha utilizado la ecuación (1.8) haciendo $\mu = \mu_0$. Recordando que la densidad de fuerza electromagnética se puede expresar mediante la ecuación (1.15) y utilizando la ecuación de balance de masa, la ecuación (1.27) se puede reescribir en la forma

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\Pi}, \quad (1.28)$$

donde

$$\vec{G} = \rho \vec{v} + \vec{g} \quad (1.29)$$

es la densidad de momento total del sistema fluido-campo electromagnético, y el vector \vec{g} está dado por (1.16), mientras que

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \tau_{ik} - T_{ik} \quad (1.30)$$

es el tensor de densidad de flujo de momento total del sistema. Si \hat{n} es un vector unitario normal al elemento de superficie da , entonces $\Pi_{ik} n_k$ es el flujo de la i -ésima componente del momento lineal a través de dicho elemento.

Balance de Energía

Bajo la hipótesis de equilibrio local, la forma integral de la ecuación de balance de la energía es la siguiente

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) dV = - \int_S \vec{q} \cdot \hat{n} da + \int_S (\vec{\tau} \cdot \hat{n}) \cdot \vec{v} da + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV. \quad (1.31)$$

El miembro izquierdo de la ecuación (1.31) representa la tasa de cambio temporal de la energía contenida en el volumen V , donde $\rho\varepsilon$ y $\rho v^2/2$ son las densidades de energía interna y cinética respectivamente. El primer término del miembro derecho representa la transferencia de calor por conducción térmica debida a la diferencia de temperaturas en el fluido, donde

\bar{q} denota al flujo de calor. Este término indica cómo fluye el calor en la superficie del volumen V . El segundo término del lado derecho representa el flujo de energía a través de la superficie, tanto por transporte de masa como por procesos de fricción interna. El último término representa la tasa de cambio temporal a la cual el campo electromagnético hace trabajo sobre el volumen de fluido V [3]. Esta potencia representa una conversión de energía electromagnética en energía mecánica o térmica, como se verá posteriormente.

Utilizando el teorema de transporte de Reynolds y la ecuación de balance de masa se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) dV,$$

y del teorema de Gauss se sigue que

$$-\int_S \bar{q} \cdot \hat{n} da = -\int_V \nabla \cdot \bar{q} dV,$$

$$\int_S (\bar{\tau} \cdot \bar{v}) \cdot \hat{n} da = \int_V \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{v}) dV,$$

de donde la ecuación (1.31) puede expresarse en la siguiente forma diferencial

$$\rho \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = -\nabla \cdot \bar{q} - \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{v}) + \bar{J} \cdot \bar{E}. \quad (1.32)$$

Sustituyendo en esta ecuación el campo eléctrico obtenido de la ley de Ohm (1.9) al despreciar la corriente de convección² $\rho_r \bar{v}$ se obtiene una ecuación que muestra más claramente el intercambio de energía entre el fluido y el campo electromagnético, es decir

$$\rho \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) = -\nabla \cdot \bar{q} - \nabla \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{v}) - (\bar{J} \times \bar{B}) \cdot \bar{v} + \frac{J^2}{\sigma}. \quad (1.33)$$

Los dos últimos términos del lado derecho de (1.33) representan el intercambio de energía efectuado entre el campo y el fluido. El primero de ellos representa la conversión de energía electromecánica, es decir, es la tasa a la cual la fuerza electromagnética hace trabajo sobre el conductor creando energía cinética o ayudando a vencer otras fuerzas. El segundo término da la energía perdida por disipación óhmica al fluir corrientes eléctricas a través del conductor.

²Esta aproximación es válida en la mayoría de los problemas en MHD y se justifica en la siguiente sección

Con ayuda de las ecuaciones de Maxwell el término $\vec{J} \cdot \vec{E}$ se puede reescribir en la forma [3]

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad (1.34)$$

donde

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.35)$$

es la densidad de flujo de energía electromagnética, conocida como el vector de Poynting y

$$\omega = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (1.36)$$

es la densidad de energía electromagnética. La ecuación (1.34) se conoce como el teorema de Poynting y establece un balance de la energía electromagnética.

Utilizando las ecuaciones de balance de masa y momento junto con (1.34) la ecuación de balance de energía (1.32) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{K}, \quad (1.37)$$

donde

$$W = \rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (1.38)$$

es la densidad de energía total del sistema, mientras que

$$\vec{K} = \rho\vec{v}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) - \hat{r} \cdot \vec{v} \cdot \vec{q} - \vec{E} \times \vec{H}, \quad (1.39)$$

es la densidad de flujo total de energía. La interpretación de la ecuación (1.37) es más evidente cuando se expresa en la forma integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV = - \int_S \vec{K} \cdot \hat{n} da. \quad (1.40)$$

Entonces el cambio en la energía del sistema contenida en el volumen V es igual al flujo de energía a través de la superficie que encierra a dicho volumen.

En resumen, las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un fluido eléctricamente conductor en un campo magnético, están dadas por las ecuaciones de balance (1.20), (1.27) y (1.32), que en su forma compacta se expresan como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j},$$

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{\Pi},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \bar{K}.$$

Estas ecuaciones involucran derivadas de los campos \bar{E} , \bar{D} , \bar{B} y \bar{H} , de modo que deben complementarse con las ecuaciones de Maxwell que relacionan estas derivadas. Sin embargo éste aún no es un sistema completo de ecuaciones ya que es necesario incluir ecuaciones constitutivas para la densidad de corriente, el tensor de esfuerzos mecánico, el flujo de calor, etc.

1.4 Aproximación Magnetohidrodinámica

En esencia, la aproximación MHD se basa en las siguientes suposiciones: a) la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz (aproximación no relativista, $v^2 \ll c^2$); b) los flujos tienen lugar en campos magnéticos cuasi-estacionarios o a bajas frecuencias, y c) los campos eléctricos son del orden de magnitud de la f.e.m. inducida $\bar{v} \times \bar{B}$.

Con estas suposiciones se pueden incluir simplificaciones adicionales en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido conductor en un campo magnético. Primeramente, en esta aproximación, se desprecia la corriente de desplazamiento de Maxwell. Esta es una aproximación que comúnmente se hace en cualquier problema de electromagnetismo donde no intervienen oscilaciones de alta frecuencia. Físicamente lo que se está despreciando es el proceso de acumulación o redistribución de cargas eléctricas. Sin embargo esto no quiere decir que los efectos electrostáticos debidos a la acumulación de cargas no sean importantes.

En la mayoría de los problemas de flujos de metales líquidos en campos magnéticos, es común que la magnitud de los términos \bar{E} y $\bar{v} \times \bar{B}$ sea del mismo orden [1], lo que físicamente quiere decir que los campos eléctricos son del orden de magnitud de los efectos inducidos; esto equivale a suponer que el campo magnético inducido es mucho menor que el campo magnético aplicado. Realizando esta suposición se establece la invariancia del campo magnético en los distintos sistemas de referencia. Por otra parte, obteniendo el cociente de la magnitud de los términos $\rho_e \bar{E}$ y $\bar{J} \times \bar{B}$ que aparecen en la fuerza de Lorentz, y suponiendo que $|\bar{E}| \approx |\bar{v} \times \bar{B}|$ se encuentra que dicho cociente es de orden v^2/c^2 , por lo que el término eléctrico en la fuerza de Lorentz resulta despreciable. Una consideración similar se puede llevar a cabo para comparar los términos $\rho_e \bar{v}$ y \bar{J} de la

densidad de corriente, encontrándose que la corriente convectiva es despreciable en esta aproximación; por consiguiente, la corriente de conducción \vec{J} se toma como la corriente total. Lo anterior trae como consecuencia que la densidad de corriente no cambia ante una transformación de sistema de referencia. A su vez la parte eléctrica del tensor de esfuerzos de Maxwell y de la densidad de energía pueden omitirse bajo esta aproximación. Incluir estas cantidades en el tratamiento de un problema dado llevaría únicamente a considerar correcciones de orden v^2/c^2 , que en la práctica son completamente despreciables. Un análisis detallado de los órdenes de magnitud de las cantidades anteriores puede encontrarse en [1] y [7].

Con estas aproximaciones las ecuaciones del campo electromagnético en un conductor en movimiento son

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.41)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.42)$$

y

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.43)$$

donde se ha incluido la ley de Ohm en la ecuación (1.42). De esta ecuación se sigue la condición $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, que equivale a despreciar la corriente de desplazamiento. En esta aproximación es apropiado ignorar la ecuación de la conservación de la carga eléctrica (1.1), ya que el campo eléctrico está completamente determinado por las ecuaciones rotacionales y la ley de Ohm. En sí misma, la distribución de cargas no es de interés en MHD, sin embargo es importante notar que no se está afirmando que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Por otra parte, al despreciar la corriente de desplazamiento las ecuaciones (1.41)-(1.43) pierden su invariancia ante transformaciones de Lorentz, conservando únicamente la invariancia galileana. Esto no causa ningún problema ya que las ecuaciones de la mecánica de fluidos son ecuaciones no relativistas de modo que el conjunto de ecuaciones MHD mantendrá el mismo carácter.

Expresando \vec{E} en términos de \vec{H} por medio de la ecuación (1.42), sustituyendo en (1.41) y utilizando la ecuación constitutiva (1.8) con $\mu = \mu_0$ se obtienen las ecuaciones que satisface la intensidad de campo magnético

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) - \nu_m \nabla^2 \vec{H}, \quad (1.44)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0, \quad (1.45)$$

donde $\nu_m = 1/\sigma\mu_0$ se conoce como la difusividad magnética. Dependiendo del valor de la conductividad del fluido, en la ecuación (1.44), dominará el

término convectivo $\nabla \times (\bar{v} \times \bar{H})$ si la conductividad es alta o el término difusivo $\nu_m \nabla^2 \bar{H}$ si la conductividad es baja.

1.5 Procesos Disipativos y Transferencia de Calor en la Magnetohidrodinámica

En esta sección se hace una descripción general de los procesos disipativos en MHD, mencionando algunas de sus aplicaciones prácticas y los distintos enfoques de descripción: posteriormente se establecen las ecuaciones fundamentales que gobiernan tales procesos en el caso de metales líquidos.

Desde un punto de vista práctico, el interés por el estudio de los fenómenos de transferencia de calor y masa en campos magnéticos ha surgido fundamentalmente en relación a las aplicaciones en sistemas de enfriamiento con metales líquidos en reactores term nucleares [8], así como en sistemas de conversión de energía térmica en energía eléctrica tales como los generadores MHD [9]. Aunados a estas aplicaciones existen problemas en los que son necesarios campos magnéticos para el control de ciertos procesos en ingeniería química, metalurgia, magnetoquímica y otras ramas de la ciencia y la tecnología.

El análisis general de los fenómenos de transferencia de calor y masa se puede realizar en base a la termodinámica de procesos irreversibles [10]. Tal análisis deja claro que las características de los procesos de transferencia de calor y masa en presencia de campos externos en materiales isotrópicos, se manifiestan esencialmente de dos maneras. En primer lugar a través del efecto de nuevas fuerzas de cuerpo y la presencia de nuevos mecanismos para la conversión y disipación de energía, y en segundo mediante la acción de nuevas fuerzas termodinámicas. Todas las nuevas fuerzas de volumen que afectan la hidrodinámica del flujo pertenecen al primer tipo de fenómenos: la fuerza electrostática debida a la interacción de la carga espacial con el campo eléctrico, las fuerzas ocasionadas por la interacción entre las corrientes conductivas y el campo magnético y las fuerzas debidas a la interacción entre los momentos eléctricos y magnéticos internos con los campos eléctricos y magnéticos externos. Junto con estas fuerzas existen nuevos fenómenos que influyen térmicamente en el sistema, tales como los efectos electro- y magnetocalóricos, y el calentamiento del medio por efecto Joule que consiste en que parte de la energía es disipada por las corrientes inducidas que atraviesan el fluido. En el segundo tipo de fenómenos se encuentran los efectos de sedimentación eléctrica y magnética en sistemas polarizables y los fenómenos de migración eléctrica durante la difusión de componentes cargados [8].

Comúnmente en las leyes de Fourier y Fick en la aproximación isotrópica se toman en cuenta únicamente efectos directos. Sin embargo, bajo una for-

mulación rigurosa del problema, en presencia de un campo electromagnético existe una gran cantidad de efectos cruzados. En tal caso los coeficientes de transporte (conductividad térmica y eléctrica, viscosidad, difusividad térmica, etc.) que son escalares en la aproximación isotrópica, se transforman en cantidades tensoriales y son los responsables de la aparición de anisotropías en las propiedades de transporte con respecto a la dirección del campo. Aunque prácticamente no existen resultados experimentales sobre los coeficientes de transporte apropiados para tales procesos, estimaciones burdas muestran que el efecto de la mayoría de estos fenómenos es despreciable y no es necesario considerarlos en los problemas de transferencia de calor y masa por convección [8]. La única excepción es el efecto Hall que en algunos casos puede ser de importancia tanto desde el punto de vista hidrodinámico como de transferencia de calor y masa para gases ionizados afectados por interacciones MHD. Por otra parte, en un fluido incompresible eléctricamente conductor (*v.g.* metales líquidos, soluciones electrolíticas) los efectos de polarización eléctrica comúnmente tienen una influencia despreciable. El efecto del campo magnético en la transferencia de calor en tales medios se manifiesta como efectos viscosos mediante la redistribución de las velocidades de flujo ocasionada por la interacción del campo magnético y las corrientes inducidas y a través del calentamiento de Joule en el fluido. Desde el punto de vista hidrodinámico, la disipación de Joule tiene un efecto notable en la estabilidad del flujo, pues se presenta un amortiguamiento más rápido de las perturbaciones que en casos donde únicamente prevalece la disipación viscosa.

Incluir efectos disipativos en la mecánica de fluidos ordinaria significa fundamentalmente tomar en cuenta la viscosidad del medio y la conducción de calor. En un fluido isotrópico estos efectos están gobernados por tres cantidades, a saber dos coeficientes de viscosidad y la conductividad térmica, que en general pueden depender del estado termodinámico del sistema. Aunque en principio la pérdida de isotropía introducida por el campo magnético tiene como consecuencia que el número de parámetros necesarios para describir los procesos disipativos en MHD sea considerablemente mayor que en la mecánica de fluidos ordinaria, para el flujo de metales líquidos en tales campos se puede considerar una buena aproximación el que todos los coeficientes cinéticos son constantes a través del medio, y en particular independientes de la magnitud y dirección del campo magnético. En estas circunstancias sólo es necesario añadir la conductividad eléctrica σ , a los coeficientes de viscosidad y a la conductividad térmica.

Ya que los metales líquidos presentan un comportamiento esencialmente newtoniano e incompresible, la ecuación de balance de masa (1.20) toma la forma

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.46)$$

mientras que la ecuación de balance de momento (1.27) para procesos disipativos en MHD se convierte en [11]

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} - \mu_0 \vec{H} \times (\nabla \times \vec{H}), \quad (1.47)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad dinámica y se ha hecho uso de la ecuación (1.42) para escribir la densidad de corriente. Esta es la ecuación de Navier-Stokes en MHD.

Con ayuda de las ecuaciones de balance de masa y momento y algunas relaciones termodinámicas es posible expresar el balance de energía (1.32) (dentro de la aproximación MHD), en una ecuación con un sentido físico más claro [11], a saber

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right) = \tilde{\tau}' : \nabla \vec{v} + \kappa \nabla^2 T + \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \vec{H})^2 \quad (1.48)$$

donde s es la entropía por unidad de masa del fluido, $\tilde{\tau}'$ el tensor de esfuerzos viscoso [5] y además se ha incorporado la ecuación constitutiva más común que relaciona el flujo de calor \vec{q} con el gradiente del campo de temperatura T , conocida como la ecuación de Fourier, dada por

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T, \quad (1.49)$$

donde κ es la conductividad térmica del medio.

La ecuación (1.48) es la ecuación de transferencia de calor en MHD; el lado izquierdo de esta ecuación representa el calor generado por unidad de tiempo y volumen en un elemento de fluido en movimiento, mientras que el lado derecho representa la disipación de energía por unidad de tiempo y volumen, debido a la viscosidad, la conducción térmica y el calor de Joule, respectivamente.

Capítulo 2

FLUJO MAGNETOHIDRO- DINAMICO EN CANALES

2.1 Introducción

Este capítulo presenta los principales resultados clásicos referentes al flujo de metales líquidos en canales MHD, incorporando algunos conceptos y expresiones matemáticas que son de utilidad en el capítulo 3. Se describen los diversos modos de operación de una máquina de inducción MHD, al igual que el efecto Hartmann característico de este tipo de flujos. Posteriormente se estudia el flujo de Hartmann, en base al cual se establece un modelo sencillo que permite predecir el comportamiento de las máquinas mencionadas, endonde se encuentra la principal aplicación de este trabajo.

2.2 Máquinas de Inducción : Efecto Hartmann

En esta sección se analizan de manera cualitativa y con cierto grado de simplificación los principales fenómenos dinámicos que se presentan en los flujos MHD en canales. Considérese un canal con la estructura típica de una máquina MHD, es decir, un ducto rectangular suficientemente largo colocado en un campo magnético transversal uniforme con una inducción \vec{B}_0 , a través del cual se desplaza un metal líquido con un flujo laminar en estado permanente. Las paredes del ducto perpendiculares al campo tienen una longitud $2b$ y se suponen no conductoras de la electricidad mientras que las paredes paralelas al campo se consideran conductores ideales de anchura $2a$ haciendo un contacto eléctrico perfecto con el fluido. La suposición adicional $b \gg a$ permite considerar al flujo plano y paralelo. La figura (2.1)

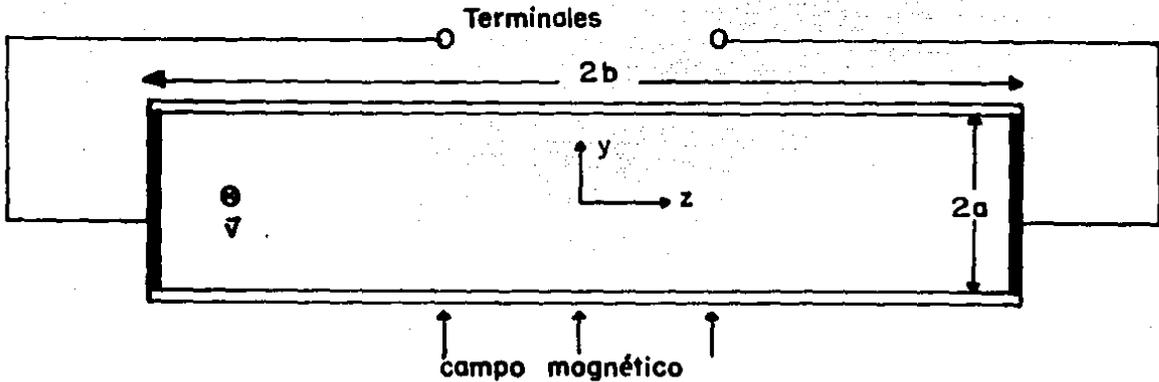


Figura 2.1: Sección transversal de una máquina MHD típica

muestra un corte transversal del canal descrito anteriormente.

La fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}_0$ actúa sobre una carga eléctrica q inmersa en el fluido en movimiento en dirección perpendicular tanto a la velocidad local \vec{v} del fluido como al campo magnético \vec{B}_0 . Esta fuerza induce una separación de cargas que establece un campo electrostático \vec{E} y en consecuencia se produce una diferencia de potencial entre las paredes $z = +b$ y $z = -b$. El campo electrostático se opone a la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida $\vec{v} \times \vec{B}_0$ y en el caso de circuito abierto, es decir, cuando no existe una trayectoria externa para la corriente, eventualmente ambos campos llegan a igualarse quedando equilibrada la tendencia a la separación de carga y evitándose un flujo de corriente posterior (fig.(2.2.a)).

La intensidad del campo electrostático \vec{E} puede reducirse conectando a los electrodos una carga externa (fig.(2.2.b)); en estas condiciones se presenta un flujo restringido de electrones desde el electrodo negativo hasta el positivo a través del fluido, regresando al electrodo negativo vía la carga externa. La fuerza de arrastre que actúa sobre los electrones es igual a la diferencia entre la f.e.m. inducida y el campo electrostático y se conoce como f.e.m. total. El valor real de la f.e.m. total depende claramente del valor de \vec{E} que a su vez depende de la resistencia óhmica total del circuito.

Si la resistencia externa se reduce a cero (fig.(2.2.c)) existirá un flujo irrestricto de electrones desde el electrodo negativo hasta el positivo y nuevamente al negativo. En este caso el campo electrostático es cero pues no se presenta ninguna distribución estática de cargas (corto circuito).

La densidad de corriente en el fluido puede calcularse a partir de la ley

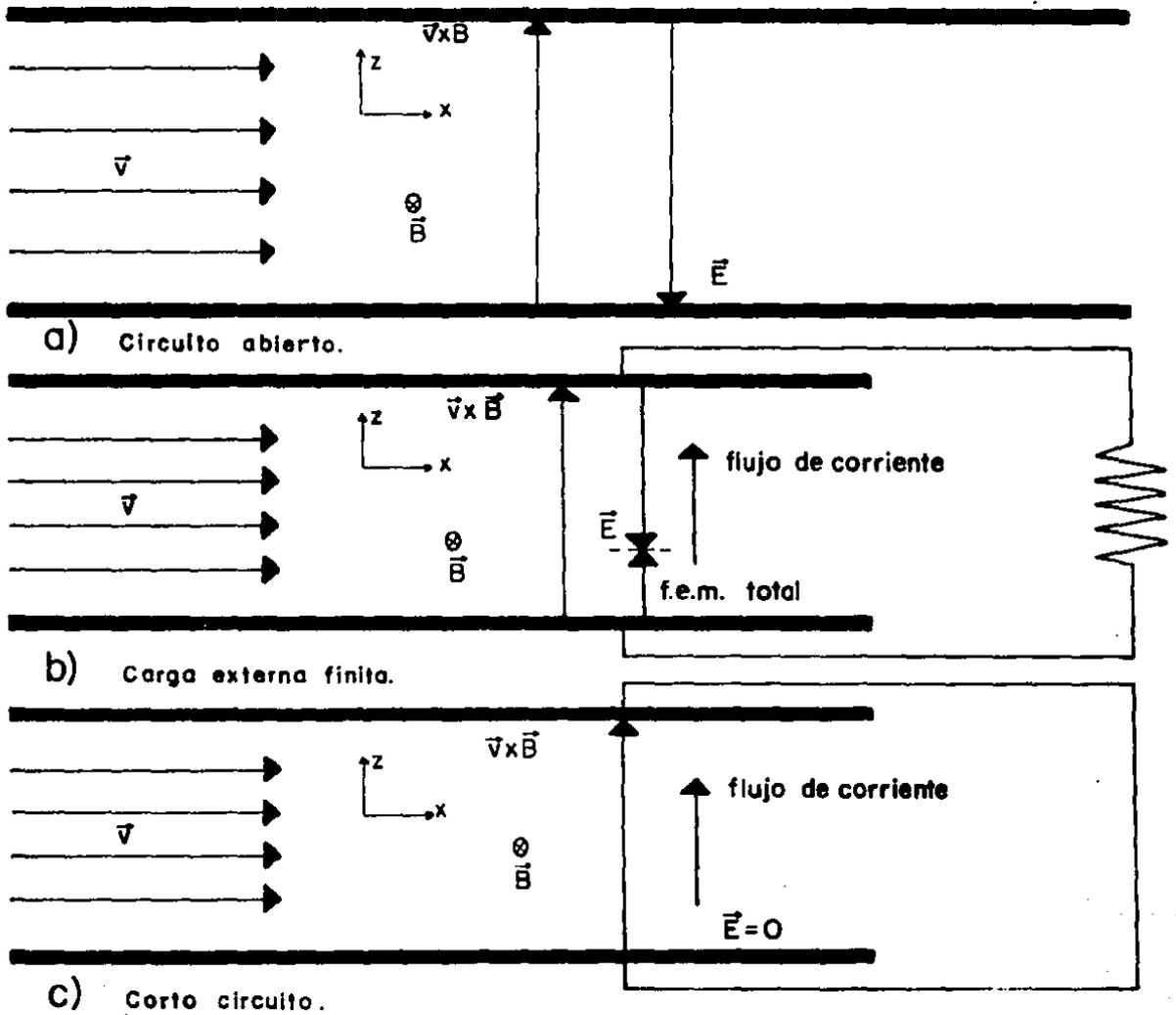


Figura 2.2: Flujo de un metal líquido en un ducto colocado en un campo magnético transversal

de Ohm (1.42)

$$J_z = \sigma(E_z + v_x B_0). \quad (2.1)$$

donde los subíndices z y x indican las componentes de la densidad de corriente, del campo electrostático y de la velocidad a lo largo de tales ejes coordenados. Cuando no existe trayectoria externa para la corriente, la integral de la ecuación (2.1) sobre la sección transversal del ducto debe ser cero, de modo que

$$\int_{-a}^a (E_z + v_x B_0) dy = 0. \quad (2.2)$$

Se puede suponer además que en la superficie de un conductor ideal el campo eléctrico tiene la misma intensidad en cada punto y puesto que el flujo es plano y paralelo, en las capas de fluido adyacentes a una cara dada el campo tendrá también la misma intensidad manteniéndose uniforme a través del fluido. De (2.2) se tiene entonces que

$$E_z = - \left(\frac{1}{2a} \int_{-a}^a v_x dy \right) B_0 = -V_m B_0, \quad (2.3)$$

donde V_m es la velocidad media del flujo. De esta forma la densidad de corriente se expresa como

$$J_z = \sigma B_0 (v_x - V_m). \quad (2.4)$$

De la expresión anterior se observa que en el centro del flujo donde $v_x > V_m$ la corriente fluye en una dirección mientras que cerca de las paredes donde $v_x < V_m$, la corriente fluye en dirección opuesta..

En el capítulo anterior se mencionó que uno de los principales efectos de la interacción del campo magnético y el fluido conductor es el surgimiento de fuerzas de cuerpo que actúan sobre el fluido. Estas fuerzas son producidas por la interacción de las corrientes inducidas con el campo magnético y se expresan en la forma (1.13). En el problema que se está analizando, la fuerza magnética predominante viene dada por

$$f_z = J_z B_0 = \sigma B_0^2 (v_x - V_m). \quad (2.5)$$

Esta fuerza se opone al movimiento del líquido en el centro del flujo ($f_z > 0$), mientras que en las capas de fluido cercanas a las paredes se presenta un efecto opuesto. Ya que sobre la pared $v_x = 0$, la existencia de una fuerza $f_z < 0$ en capas de fluido cercanas a la pared en un flujo con velocidad media constante, incrementará el gradiente de velocidades, ocasionando un aumento en la fricción en las paredes. La fuerza magnética total en cada sección del ducto es cero ya que la corriente eléctrica total es cero. Este conjunto de fenómenos se conoce como efecto Hartmann [14].

Cuando las corrientes inducidas son de gran magnitud, los campos magnéticos autoinducidos pueden distorsionar significativamente el campo aplicado. Esto ocurre en un fluido con una alta conductividad o en un flujo a grandes velocidades con dimensiones de flujo características muy grandes.

Si las caras $z = \pm b$ están interconectadas a través de un circuito eléctrico externo, se obtiene una máquina MHD típica. Si se coloca un voltímetro entre los electrodos, éste actuará como una resistencia infinita (circuito abierto, fig.(2.2.a)) y midiendo la diferencia de potencial resultante puede calcularse la velocidad media del flujo. Cuando se suministra energía eléctrica al fluido, este arreglo representa una bomba o válvula, ya que la fuerza magnética producida empuja al fluido. Por otra parte, cuando se obtiene energía eléctrica del movimiento del fluido, el sistema funciona como un generador. En este caso la integral de corriente sobre la sección transversal ya no es cero, de modo que la fuerza total de frenamiento tampoco es cero. Por consiguiente para mantener un flujo con velocidad media constante, debe incrementarse el gradiente longitudinal de presión, en primer lugar para vencer a las fuerzas de cuerpo magnéticas que desaceleran el flujo y en segundo lugar para compensar las fuerzas de fricción sobre las paredes, que son mayores que en flujos sin campo magnético.

2.3 Flujo de Hartmann

El flujo de Hartmann es el análogo en MHD del flujo de Poiseuille en la mecánica de fluidos ordinaria. El nombre hace alusión a J. Hartmann [12.13] quien en 1937 realizó los primeros trabajos serios teóricos y experimentales sobre el flujo de metales líquidos en presencia de campos magnéticos. Este problema tiene relevancia debido a que, por una parte, admite una solución analítica sencilla que permite verificar claramente los límites para campos magnéticos nulos o muy intensos, y por otra, reproduce en gran medida la estructura característica de los flujos laminares en canales MHD, dando una información hidrodinámica importante para el estudio de flujos más complicados. Asimismo el flujo de Hartmann es de gran utilidad práctica en el establecimiento de modelos para el generador MHD.

El problema consiste en el flujo laminar en estado permanente de un fluido conductor de electricidad entre dos planos paralelos virtualmente infinitos separados por una distancia $2a$. Se supone que el fluido es viscoso e incompresible y se considera la existencia de un campo magnético externo normal a los planos. El flujo está completamente desarrollado de manera que el problema es unidimensional existiendo sólo una componente de la velocidad (componente x) que depende de la coordenada normal a los planos (coordenada y). El flujo puede ser inducido por gravedad o por un gradiente

de presión, o bien, por la imposición de corrientes normales al campo que ocasionen una fuerza magnética en la dirección de flujo. La presión depende de la coordenada axial (dirección de flujo) ya que debe existir un gradiente de presión en la dirección de movimiento para mantener al flujo permanente; puesto que se supone que las dimensiones de las superficies son muy grandes, los efectos de borde son despreciables.

Si no se impone campo eléctrico alguno en la dirección de flujo o en la dirección del campo magnético aplicado, las corrientes inducidas en el medio fluyen únicamente en la dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$. Si estas corrientes en el fluido y en las paredes de retorno, se toman de modo que formen circuitos o lazos cerrados en los planos normales a la dirección de flujo, cada lazo formará parte de un solenoide infinito compuesto de lazos similares paralelos, con su eje en la dirección de flujo y por lo tanto se induce un campo magnético en esta misma dirección. El único efecto del campo magnético inducido es producir una fuerza de cuerpo irrotacional en la dirección del campo aplicado, que es balanceada por un gradiente de presión en dirección opuesta [1]. El campo magnético aplicado se distorsiona sólo ligeramente debido a las corrientes inducidas; de hecho el campo magnético inducido aparece como resultado de una ligera deformación del campo aplicado en la dirección de movimiento. Una medida de la distorsión del campo aplicado ocasionada por el campo inducido la da el número de Reynolds magnético que se define como el cociente de la inducción del campo magnético inducido entre la del campo aplicado [14], es decir

$$Re_m = \mu_0 \sigma U L, \quad (2.6)$$

donde U y L son la velocidad y longitud características del problema. En los problemas a escala de laboratorio y en particular en el flujo de metales líquidos en canales MHD, el número de Reynolds magnético es siempre mucho menor que la unidad, lo que indica que el campo magnético inducido es despreciable.

Las ecuaciones que se deben satisfacer en este problema son las ecuaciones de balance de masa (1.46) y momento (1.47), y la ecuación de transporte de campo magnético (1.44) junto con la ecuación (1.45). Suponiendo que el campo de velocidades y el campo magnético tienen la forma $\vec{v} = (v, 0, 0)$ y $\vec{H} = (H_x, H_0, 0)$ respectivamente, donde H_0 es el campo constante aplicado, de las ecuaciones (1.46) y (1.45) se sigue que $v \equiv v(y)$ y $H_x \equiv H_x(y)$. De la componente y de (1.47) se sigue que el gradiente de presión es constante [1]. De esta forma la componente x de las ecuaciones (1.44) y (1.47) queda

$$H_0 \frac{dv}{dy} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{d^2 H_x}{dy^2} = 0, \quad (2.7)$$

y

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \mu_0 H_0 \frac{dH_z}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{constante.} \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones pueden desacoplarse fácilmente obteniendo una ecuación para la velocidad independiente del campo magnético inducido. Conocida v , H_z puede encontrarse directamente. Las condiciones a la frontera sobre las superficies sólidas no conductoras son las siguientes

$$v = 0 \quad H_z = 0 \quad \text{para } y = \pm a, \quad (2.9)$$

donde $2a$ es la distancia entre los planos. Las soluciones de (2.7) y (2.8) que satisfacen estas condiciones son [11]

$$v = v_0 \frac{\cosh M - \cosh \frac{My}{a}}{\cosh M - 1}, \quad (2.10)$$

y

$$H_z = -v_0 \sqrt{\sigma \eta} \frac{(y/a) \sinh M - \sinh \frac{My}{a}}{\cosh M - 1}, \quad (2.11)$$

donde v_0 es la velocidad del fluido en el plano medio $y = 0$ y M es el número de Hartmann definido como

$$M = a \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad (2.12)$$

cuya magnitud elevada al cuadrado es el cociente de la fuerza magnética entre la fuerza viscosa.

En el límite $M \rightarrow 0$ el perfil de velocidades (2.10) recupera su forma parabólica, es decir, se recupera el flujo de Poiseuille ordinario [1]. Cuando el campo magnético se incrementa, el perfil de velocidades se aplana en la mayor parte de la sección transversal, y la velocidad media se reduce para un gradiente de presión dado. El descenso en la velocidad ocurre principalmente en capas límite de grosor δ cerca de las paredes transversales al campo magnético. Entonces, si el campo es suficientemente intenso, el flujo entre dos paredes infinitas paralelas puede dividirse en un núcleo donde la fuerza de cuerpo magnética opuesta al flujo se equilibra con el gradiente de presión, y una región con capas límite de grosor $\delta = a/M$ [7] donde la fuerza magnética aceleradora se equilibra con las fuerzas viscosas, siendo a la longitud característica del problema (fig.(2.3)). Para que se presenten capas límite bien definidas se debe tener $\delta \ll a$, es decir $M \gg 1$. A menudo estas capas pueden servir para completar las trayectorias de corriente dentro del fluido.

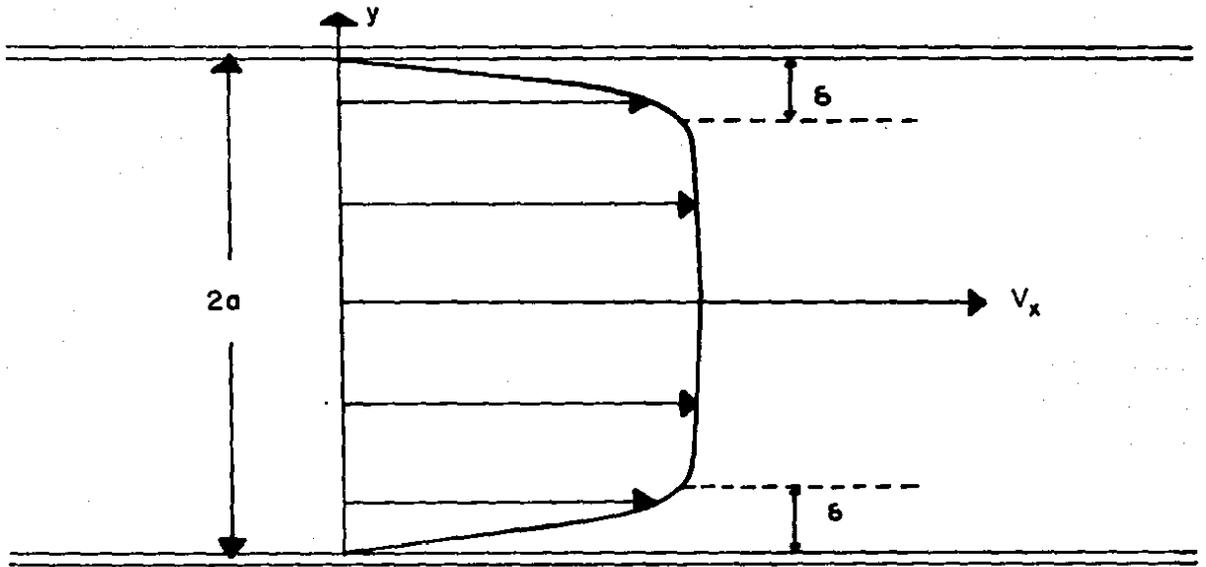


Figura 2.3: Perfil de velocidades de Hartmann

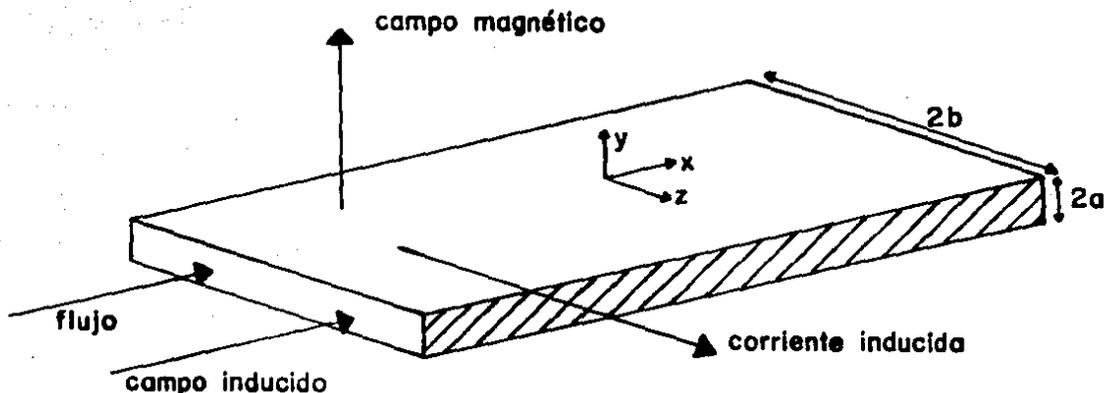


Figura 2.4: Flujo de un metal líquido en un canal MHD

2.4 Modelo del Generador Magnetohidrodinámico basado en el Flujo de Hartmann

Las consideraciones hechas para resolver el problema de Hartmann siguen siendo válidas si se hace la suposición adicional de que los planos paralelos están limitados por paredes conductoras transversales separadas por una distancia $2b$, siempre y cuando $b \gg a$. En este caso se tiene el flujo de un fluido conductor en un canal de sección transversal rectangular en presencia de un campo magnético transversal como se muestra en la figura (2.4).

A las paredes conductoras laterales se puede conectar un par de terminales y eventualmente colocar una carga externa o una fuente de poder (fig.(2.1)). En principio las paredes laterales dan lugar a un problema bidimensional pues el campo de velocidades desarrollado al igual que el campo inducido H_z dependen de las coordenadas z e y , lo que ocasiona densidades de corriente en ambas direcciones [15]. Aplicar el flujo de Hartmann en este caso es una aproximación que simplifica el problema en gran medida; sin embargo su uso se justifica al observar los resultados prácticos.

En vez de resolver el sistema de ecuaciones (1.44), (1.45), (1.46) y (1.47) conviene, para fines del modelo, resolver el sistema equivalente

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \mu_0 \vec{H}), \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.15)$$

y

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \vec{J} \times \mu_0 \vec{H}, \quad (2.16)$$

en donde aparecen explícitamente el campo eléctrico y la densidad de corriente. Ya que se supone que no existe ningún campo eléctrico impuesto en las direcciones x ó y , (i.e. $E_x = E_y = 0$), la ecuación (2.13) implica que la componente E_z es constante, de modo que la corriente inducida fluye sólo en dirección z . El campo E_z es el campo electrostático inducido por la separación de cargas en el fluido ocasionada por la fuerza de Lorentz y es paralelo a $\vec{v} \times \mu_0 \vec{H}$ pero de sentido opuesto; obviamente dicho campo depende del circuito externo. La única componente de la densidad de corriente dada por la ecuación (2.14) es

$$J_z = \sigma(E_z + v\mu_0 H_0), \quad (2.17)$$

y de (2.14) se sigue también que

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} = J_z. \quad (2.18)$$

De la ecuación (2.16) se obtiene

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} - J_z \mu_0 H_0, \quad (2.19)$$

y sustituyendo (2.17) en (2.19) queda

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \mu_0 H_0 \frac{\sigma}{\eta} v = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \mu_0 H_0 E_z \right). \quad (2.20)$$

Puesto que $(\partial p / \partial x)$ y E_z son constantes, la velocidad v se puede obtener integrando (2.20) sin necesidad de encontrar H_z . La solución de dicha ecuación que satisface las condiciones de frontera $v(\pm a) = 0$ es [1]

$$v = \frac{a^2}{M^2} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{M}{a} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} E_z \right) \left(\frac{\cosh \frac{My}{a}}{\cosh M} - 1 \right). \quad (2.21)$$

En términos de la velocidad media V_m el perfil de velocidades se expresa como

$$v = \frac{V_m}{A} (\cosh M - \cosh \frac{My}{a}), \quad (2.22)$$

donde $A = \cosh M - M^{-1} \sinh M$. La densidad de corriente, dada por la ley de Ohm, se expresa entonces como

$$J_x = \sigma E_x + \frac{MV_m}{aA} \sqrt{\sigma \eta} \left(\cosh M - \cosh \frac{My}{a} \right) \quad (2.23)$$

y la corriente total por unidad de longitud del canal en dirección x es

$$\frac{I}{L} = \int_{-a}^a J_x dy = 2(a\sigma E_x + \sqrt{\sigma \eta} MV_m), \quad (2.24)$$

donde I es la corriente total que pasa por el circuito externo y L es la longitud de los electrodos. Puesto que no existen variaciones temporales, el voltaje terminal entre los electrodos situados en $z = \pm b$ está dado por

$$\Phi_T = - \int_{-b}^b E_z dz = -2bE_x$$

y al sustituir el valor de E_x dado por (2.24) se obtiene

$$\Phi_T = - \frac{bI}{aL\sigma} + \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{2bMV_m}{a}. \quad (2.25)$$

En la modelación de generadores MHD es común la visualización del generador como un circuito equivalente [1,16,17]. Esto permite calcular con facilidad los diversos parámetros relevantes del generador. Aquí se utiliza el método propuesto por Hughes para determinar el circuito equivalente en base al teorema de Thévenin. En la teoría de circuitos este teorema establece que cualquier arreglo de resistencias y baterías que tenga dos terminales de salida puede reemplazarse por la combinación de una resistencia y una batería en serie, tal como se observa en la figura (2.5).

La forma del circuito de Thévenin muestra inmediatamente cómo determinar los valores de la batería y de la resistencia equivalentes sin tener que conocer la configuración real del arreglo mismo. La fuente de voltaje equivalente es justamente el potencial en las terminales de salida cuando la corriente de carga es cero, es decir, el voltaje de circuito abierto. La resistencia equivalente (o interna) es entonces el cociente del voltaje equivalente entre la corriente de carga cuando la resistencia de carga es cero, es decir, la corriente de corto circuito.

De esta forma el fluido, que se mueve a través del campo magnético aplicado, puede representarse como una fuente de circuito abierto en serie con una impedancia interna. Puesto que la caída a través del circuito externo puede ser positiva en el caso de una resistencia externa o negativa

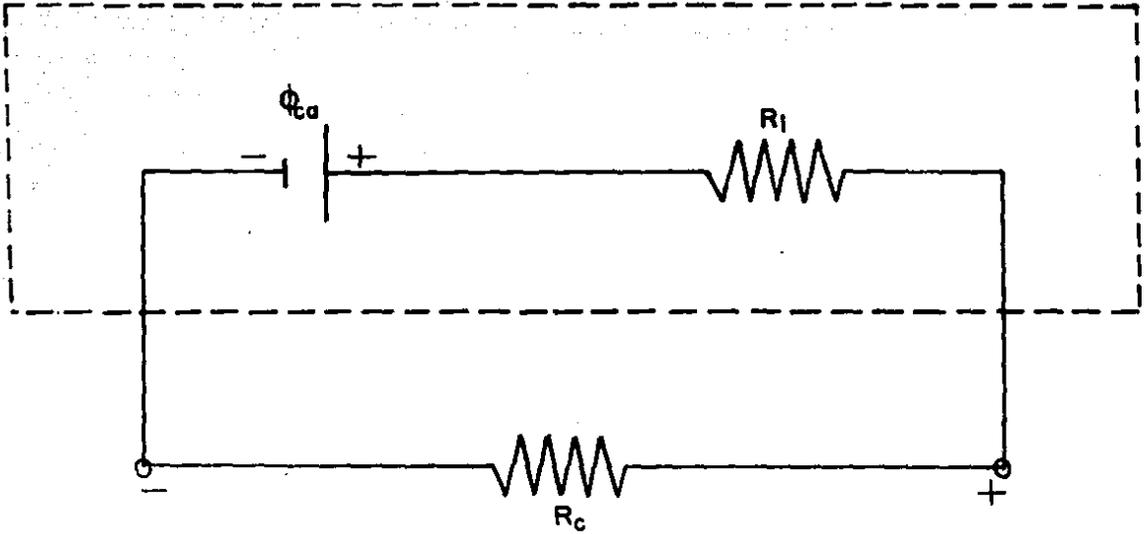


Figura 2.5: Circuito equivalente de un generador MHD

para un generador externo, la energía eléctrica puede extraerse del o introducirse en el fluido. Entonces se puede analizar una bomba o un generador dependiendo de la magnitud y polaridad del voltaje terminal.

El voltaje de circuito abierto puede obtenerse de (2.25) haciendo $I = 0$, de modo que

$$\Phi_{ca} = \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{2bMV_m}{a}. \quad (2.26)$$

Aunque la corriente total I sea cero, J_z no es nula; de hecho, bajo condiciones de circuito abierto, existen corrientes recirculantes completando sus trayectorias en los electrodos o, en el caso de paredes aislantes, a través de las capas de fluido cercanas a las paredes. La corriente de corto circuito se obtiene de (2.25) cuando el voltaje terminal es cero, entonces

$$I_{cc} = \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} 2L\sigma MV_m \quad (2.27)$$

y la resistencia interna cuando la velocidad media se mantiene constante (i.e. gasto constante) está dada por

$$R_i = \frac{\Phi_{ca}}{I_{cc}} = \frac{b}{aL\sigma}. \quad (2.28)$$

Aplicando la ley de los voltajes de Kirchhoff al circuito mostrado en la fig.(2.5), se obtiene

$$\Phi_{ca} - I(R_i + R_c) = 0, \quad (2.29)$$

de modo que al sustituir (2.26) y (2.28) en (2.29), la corriente total resulta

$$I = \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{2bMV_m}{a} \frac{1/R_c}{1 + (R_i/R_c)} \quad (2.30)$$

y utilizando esta expresión en (2.24) el campo eléctrico toma la forma

$$E_z = -\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}} \frac{MV_m}{a} \frac{1}{1 + (R_i/R_c)}. \quad (2.31)$$

Es conveniente definir un nuevo parámetro llamado factor de carga dado por

$$K \equiv -\frac{E_z}{V_m \mu_0 H_0} \quad (2.32)$$

que toma valores entre 0 y 1 cuando el canal opera como generador. El signo menos se introduce para definir a K positivo. Ya que el valor de E_z depende de la resistencia óhmica total del circuito, el factor de carga da una medida de la importancia relativa del campo electrostático ocasionado

por la carga externa R_c y la f.e.m. inducida por el movimiento del fluido en el campo magnético. Sustituyendo (2.31) en (2.32) se obtiene

$$K = \frac{1}{1 + (R_i/R_c)}, \quad (2.33)$$

de modo que en términos de K , la densidad de corriente se expresa como

$$J_z = \sqrt{\sigma\eta} \frac{MV_m}{aA} (\cosh M - \cosh \frac{My}{a} - KA), \quad (2.34)$$

que es la expresión que se utilizará en el capítulo 3 para expresar el término de calor de Joule en la ecuación de transferencia de calor.

La potencia de salida total del generador está dada por

$$P_{salida} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{2bMV_m}{a} \right)^2 \frac{1/R_c}{1 + (R_i/R_c)^2}, \quad (2.35)$$

donde el volumen de integración comprende a todo el generador. Obviamente este resultado puede obtenerse directamente mediante el producto del voltaje terminal por la corriente total. Maximizando la ecuación (2.35) respecto a la carga externa, se encuentra que la condición para obtener una potencia de salida máxima es

$$R_c = R_i, \quad (2.36)$$

es decir, la resistencia de carga debe ser igual a la resistencia interna del generador, lo que se conoce como condición de igualdad de impedancias; en términos del factor de carga, esta condición se expresa como $K = 0.5$. Por otra parte, la potencia total del fluido, al impulsarse a través del campo venciendo la fuerza magnética (potencia de flujo), está dada por

$$P_{flujo} = \int_V (\vec{J} \times \mu_0 \vec{H}) \cdot \vec{v} dV,$$

e integrando

$$P_{flujo} = 2abL\eta \left(\frac{MV_m}{a} \right)^2 \left(2K - \frac{2 + (1/\cosh M) - 3M^{-1}\tanh M}{(1 - M^{-1}\tanh M)^2} \right). \quad (2.37)$$

Por consiguiente, definiendo la eficiencia eléctrica local del generador como el cociente de la potencia de salida entre la potencia de flujo, se obtiene en el caso en que $M \gg 1$

$$\eta_e = \frac{2R_i/R_c}{\frac{2}{K} - \frac{M(2M-3)}{K^2(1-M)^2}}. \quad (2.38)$$

Maximizando esta ecuación respecto a R_c se encuentra que la condición para obtener una eficiencia eléctrica máxima es

$$R_c = \frac{R_i}{\sqrt{1 - 2/\gamma}}, \quad (2.39)$$

donde

$$\gamma = \frac{M(2M - 3)}{(1 - M)^2}$$

Capítulo 3

TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN FLUJO MAGNETOHIDRODINAMICO

3.1 Generalidades

El estudio del proceso de transferencia de calor en medios eléctricamente conductores en canales MHD es de gran importancia debido a sus aplicaciones en bombas y medidores de flujo electromagnéticos así como en generadores MHD. El diseño de tales dispositivos requiere del conocimiento de los perfiles de temperatura en el canal así como de los flujos de calor en el mismo, y de cómo éstos son afectados por los diversos parámetros y condiciones físicas del sistema, tales como el campo magnético, la carga externa y los materiales que constituyen las paredes del ducto, al igual que las propiedades físicas del fluido. Un estudio de este tipo puede utilizarse para determinar las condiciones óptimas de operación del sistema y poder evaluar la conveniencia de incorporar sistemas de enfriamiento adicionales.

Un análisis exhaustivo de este problema debería incorporar el estudio de flujos turbulentos y su influencia en la transferencia de calor. Sin embargo es evidente que tal enfoque es extremadamente complicado y resulta prácticamente imposible en este momento obtener resultados concluyentes en tal dirección. Por otra parte, como se mencionó anteriormente, la teoría laminar tiene un rango de aplicación más amplio en MHD que en la mecánica de fluidos ordinaria debido a los efectos estabilizadores del campo magnético sobre el fluido. Es por ello que el análisis de la transferencia de calor en canales MHD no resulta demasiado artificial cuando se utilizan estructuras de flujo laminares.

Una de las características esenciales de los flujos MHD es la existencia

de un mecanismo de generación de calor interno en el fluido, además de la viscosidad, que ocasiona que la distribución de temperaturas presente un patrón fundamentalmente distinto al de los flujos ordinarios endonde no existen fuentes internas de calor. El campo magnético tiende a aplanar el perfil de velocidades parabólico característico de flujos en ausencia de campo (fig.(2.3)), lo que trae como consecuencia que la velocidad del fluido en regiones cercanas a las paredes sea mayor en los flujos MHD que en los flujos ordinarios. Debido a la dependencia de los efectos disipativos óhmico y viscoso en el perfil de velocidades, el calentamiento del medio no será uniforme y se alterará la diferencia de temperaturas entre la pared y el fluido. Adicionalmente, la disipación óhmica está gobernada en gran medida por el modo de operación del sistema, es decir, por la carga externa que modula las corrientes eléctricas que circulan por el fluido.

Matemáticamente el problema se reduce a resolver la ecuación de balance de la energía en un canal MHD bajo ciertas condiciones a la frontera. En un flujo incompresible las ecuaciones de balance de momento y masa están desacopladas de la ecuación de la energía [5] y pueden resolverse independientemente para determinar el perfil de velocidades. Una vez conocido, éste puede incorporarse en la ecuación de la energía y buscar una solución para la distribución de temperaturas que satisfaga las condiciones de frontera establecidas.

El proceso de transferencia de calor en un flujo laminar forzado en canales MHD ha sido investigado por diversos autores desde finales de los años 50. En su gran mayoría los trabajos centran su atención en resolver la ecuación de la energía de la MHD para esta geometría bajo condiciones a la frontera de primer tipo caracterizadas por temperaturas prescritas en las paredes o bien condiciones de frontera de segundo tipo endonde se fija el flujo de calor a través de las paredes. Con excepción de Javeri [18] que resuelve la ecuación mencionada bajo condiciones de frontera de tercer tipo para un caso muy particular, al parecer no existe un estudio completo de este problema utilizando dichas condiciones. Físicamente las condiciones de tercer tipo implican que el flujo de calor local en la pared es una función lineal de la temperatura local de la misma. Esta situación se presenta en procesos donde la transferencia de calor por convección se puede describir en términos de la ley de enfriamiento de Newton. Como se mencionó en la introducción, la importancia de este tipo de condiciones yace en que el mecanismo de transferencia de calor hacia el exterior descrito anteriormente, implica la existencia de un coeficiente de transferencia de calor finito en las fronteras y en consecuencia se acerca más a la realidad que suponer que las temperaturas de las fronteras permanecen constantes o que el flujo de calor a través de las mismas es fijo.

El objetivo central del presente estudio es investigar la influencia de las condiciones de frontera de tercer tipo en la transferencia de calor y

determinar la influencia de un coeficiente de transferencia de calor finito en la pared en este tipo de flujos.

3.2 Trabajos Previos

El análisis del proceso de transferencia de calor en un canal MHD de sección transversal rectangular puede llevarse a cabo mediante distintas aproximaciones y diversos grados de complejidad. La primera aproximación para un flujo laminar estacionario utilizada prácticamente por todos los autores es la suposición de que el ducto tiene una relación geométrica suficientemente grande, es decir, que el cociente de la longitud de las paredes normales al campo magnético entre la longitud de las paredes paralelas al mismo es mucho mayor que la unidad. Esto implica que los efectos de los flujos ocasionados por las paredes laterales son despreciables. En consecuencia, al no considerar el flujo a lo largo de tales paredes, no se trata en este análisis la transferencia de calor a través de las mismas. Entonces bajo esta aproximación el problema se reduce a considerar la transferencia de calor en un flujo laminar forzado entre dos planos paralelos infinitos bajo la acción de un campo magnético externo normal a los planos. De esta forma es posible utilizar un perfil de velocidades completamente desarrollado cuya única componente en la dirección de flujo depende sólo de la coordenada transversal (perfil de Hartmann), eliminando cualquier dependencia en la dirección normal a las paredes laterales.

Otra aproximación bastante común es suponer la existencia de isotropía, de modo que las propiedades físicas del fluido sean constantes y en particular independientes de la temperatura y del campo magnético. Cabe mencionar que la mayoría de los estudios en esta área se han realizado para fluidos newtonianos, aunque existen algunos intentos interesantes que analizan la transferencia de calor en campos magnéticos con fluidos no newtonianos [19,20]. Sin embargo este tópico está fuera del interés del presente trabajo ya que los metales líquidos presentan esencialmente un comportamiento newtoniano.

Dentro de estas aproximaciones el caso más simple que se puede resolver es el de un flujo completamente desarrollado tanto hidrodinámica como térmicamente, de modo que se trata de un problema unidimensional endonde no existe ninguna dependencia en la coordenada axial (*i.e.* en la dirección de flujo). Esto equivale a considerar el flujo en regiones muy alejadas de la entrada del canal o de cualquier discontinuidad en las temperaturas de las paredes o del medio ambiente externo a ellas. La ecuación de la energía en este caso toma en cuenta únicamente la conducción de calor en la dirección del campo magnético y las fuentes de disipación de calor internas en el fluido, es decir la viscosidad y el efecto Joule, despre-

ciendo la conducción de calor axial y los efectos convectivos. Este problema ha sido tratado por Sutton y Shermann [21] y por Cramer y Pai [22] utilizando el perfil de velocidades de Hartmann y con condiciones a la frontera de primer tipo, es decir con temperaturas constantes en las paredes que se suponen no conductoras de la electricidad. Dichos autores obtienen el perfil de temperaturas integrando directamente la ecuación de la energía y posteriormente analizan el comportamiento de tal perfil para diversos números de Hartmann y distintos factores de carga.

El siguiente grado de complejidad en el problema consiste en considerar el flujo hidrodinámico- y térmicamente desarrollado pero sin eliminar completamente la dependencia en la coordenada axial. Se supone que existe un flujo de calor uniforme a través de las paredes independiente de la posición axial mientras que la conducción de calor en la dirección de flujo se considera despreciable. El problema en sí básicamente sigue siendo unidimensional pero ahora se propone que el perfil de temperaturas esté compuesto de dos partes, una que dependa linealmente de la coordenada axial y otra que sea una función de la coordenada transversal. Introduciendo esta forma funcional en la ecuación de la energía no es necesario eliminar el término convectivo, obteniéndose una ecuación que puede integrarse directamente para encontrar la dependencia del perfil de temperaturas respecto a la coordenada transversal. Este problema fue resuelto por Siegel [23] con un perfil de velocidades de Hartmann despreciando los efectos viscosos y en el caso en que el flujo neto de corriente es cero (circuito abierto, $K = 1$) y los planos son eléctricamente aislantes. Alpher [24] considera exactamente el mismo problema pero permitiendo que los planos tengan una conductividad eléctrica finita, sin embargo no obtiene resultados numéricos. Posteriormente Snyder [25] resolvió el problema incluyendo disipación viscosa y efecto Joule, bajo condiciones de carga externa arbitraria (K variable). Analiza también el efecto de la conductividad eléctrica finita de las paredes resolviendo simultáneamente el problema en las paredes y el fluido mediante condiciones de acoplamiento adecuadas en la interfaz fluido-pared. Desafortunadamente sus resultados numéricos son muy pobres y el análisis contiene algunos errores.

El siguiente grado de dificultad en el problema consiste en considerar el flujo hidrodinámicamente desarrollado (perfil de Hartmann) y simultáneamente permitir que se desarrolle térmicamente a partir de un cierto punto, dando lugar a una región de entrada térmica. Adicionalmente en una primera aproximación se desprecia la conducción de calor en dirección axial. Generalmente en los problemas donde se trata el desarrollo térmico, la estrategia de solución involucra la división del flujo en dos regiones, a saber, una región de entrada térmica y una región térmicamente desarrollada, y posteriormente la superposición de las soluciones encontradas para cada región obteniendo finalmente el perfil completo de tempe-

raturas. Michiyoshi y Matsumoto [26] trataron este problema imponiendo condiciones de frontera tanto de primer como de segundo tipo pero sin incluir efectos viscosos y en condiciones de circuito abierto. En su análisis, en algunos de los casos estudiados el problema en la región de entrada se reduce a la obtención de los eigenvalores y eigenfunciones de una ecuación de tipo Sturm-Liouville. Sin embargo, para obtener una precisión adecuada en la región de entrada es necesario calcular demasiados eigenvalores y eigenfunciones. Por otra parte el estudio paramétrico presentado resulta muy poco extenso. Por su parte Hwang *et al.* [27] consideran este problema bajo condiciones de frontera de segundo tipo incluyendo viscosidad y permitiendo que el factor de carga tome distintos valores. La ecuación de la energía se resuelve mediante el método de diferencias finitas considerando únicamente la región de entrada térmica. Este trabajo ofrece una discusión detallada de la influencia de los efectos viscosos en las zonas cercanas a las paredes. Un análisis similar al anterior basado también en el método de diferencias finitas pero utilizando condiciones de primer tipo fue llevado a cabo por Erickson *et al.* [28], donde se reporta que la temperatura media del flujo depende fuertemente de la disipación viscosa y el número de Hartmann; a su vez se menciona que el número de Nusselt se incrementa apreciablemente al aumentar M , mientras que su incremento es menor al aumentar el factor de carga. Tanto en este trabajo como en los anteriores se supone que la temperatura del fluido en la entrada es uniforme. Fan *et al.* [29] consideró un enfoque distinto a los anteriores permitiendo que los perfiles de temperatura y velocidad se desarrollen simultáneamente en la región de entrada partiendo de perfiles uniformes en un inicio. Las ecuaciones acopladas de momento y energía se resolvieron por el método de diferencias finitas imponiendo condiciones de no deslizamiento en las paredes en la ecuación de momento y de flujo de calor uniforme en la ecuación de energía. Un análisis similar pero menos extenso fue llevado a cabo por Shohet [30]. Por otra parte Viskanta [31] analizó el efecto del campo magnético en la región desarrollada con condiciones de primer tipo, con un fluido conductor que además es capaz de absorber o emitir radiación térmica. Sin embargo la solución numérica muestra que la influencia de la radiación en la distribución de temperaturas es pequeña.

Una complejidad adicional consiste en tomar en cuenta la conducción o difusión de calor en la dirección axial, cuyos efectos se manifiestan primordialmente en la región en desarrollo térmico. El desprejar este efecto es una aproximación válida únicamente para flujos con números de Péclet suficientemente grandes. Puesto que el número de Péclet es igual al producto del número de Reynolds por el número de Prandtl¹ (el cual es una

¹El número de Prandtl se define como $Pr = \rho \nu c_p / \kappa$, donde ρ es la densidad, ν la viscosidad cinemática, c_p el calor específico a presión constante y κ la conductividad térmica del fluido.

constante del material y no depende de las propiedades del flujo), se espera que la conducción de calor en la dirección de flujo sea importante en metales líquidos, donde el número de Prandtl es pequeño, y en un rango de números de Reynolds que comprenda flujos sustancialmente laminares. Back [32] llevó a cabo un estudio endonde toma en cuenta este efecto, manteniendo constante la temperatura de las paredes. Sin embargo su análisis contiene demasiadas simplificaciones. La más grande de ellas es suponer un perfil de velocidades uniforme a lo largo del canal y despreciar entonces los efectos disipativos viscosos. Esta suposición es válida únicamente para números de Hartmann suficientemente grandes de manera que el perfil de velocidades sea esencialmente plano. Las soluciones análticas a este problema involucran las regiones de entrada y en completo desarrollo. Un resultado interesante de este análisis es que la conducción de calor longitudinal es importante cuando la región de entrada térmica es del orden de la altura del canal. Otro trabajo en esta dirección fue llevado a cabo por Le Croy y Eraslan [33]. Su análisis es más completo y extenso que el de Back ya que utiliza un perfil de Hartmann e incluye efectos disipativos óhmicos y viscosos y diversos factores de carga. El problema asociado de eigenvalores se resuelve por el método de Galerkin bajo condiciones de frontera de primer y segundo tipo. Estos autores subrayan la importancia que puede tener el efecto de conducción de calor axial en la región de entrada térmica. Wu y Cheng [34] efectuaron un análisis del problema en el caso en que los planos se mantienen a temperaturas constantes pero diferentes incluyendo disipación óhmica y viscosa. Para la solución del problema se utilizó un método de expansión de eigenfunciones, determinadas por el método de Runge Kutta de cuarto orden. Eraslan *et al.* [35] analizan este problema mediante el método de Galerkin con condiciones de primer tipo pero incluyendo el efecto Hall que tiene relevancia cuando se utilizan gases parcialmente ionizados en vez de metales líquidos. Análisis similares fueron llevados a cabo más tarde por Bhat y Mittal [36,37] endonde además del efecto Hall se considera el deslizamiento de iones.

Dentro de este contexto es posible considerar una variante adicional al tipo de problemas discutidos anteriormente. Se trata de un flujo hidrodinamicamente desarrollado (perfil de Hartmann) endonde pueden identificarse dos regiones térmicamente distintas, cada una caracterizada por temperaturas constantes en las paredes o en el medio ambiente externo a las mismas o bien por un flujo de calor constante a través de dichas fronteras. Las dos regiones se unen en una cierta sección transversal ortogonal a la dirección de flujo determinando entonces una discontinuidad en las condiciones de frontera del problema. Físicamente la discontinuidad introduce una perturbación en la distribución de temperaturas en la región de flujo la cual tiende a cero a grandes distancias de la discontinuidad. Suponiendo que la discontinuidad se localiza en el punto $x = 0$ (siendo x la coordenada en la

dirección de flujo), el flujo en su totalidad puede visualizarse en regiones térmicamente desarrolladas (localizadas en $x = \pm\infty$) donde el efecto de la discontinuidad es despreciable y en regiones en desarrollo térmico donde el flujo es perturbado por la presencia de la discontinuidad. Este problema es interesante porque se puede visualizar como una generalización de los problemas de desarrollo térmico discutidos con anterioridad. De hecho estos últimos pueden considerarse aproximadamente como el análisis de la región $x > 0$ del presente problema. Además, el considerar las dos regiones conectadas por la discontinuidad permite que el efecto de la conducción de calor axial se manifieste más claramente. Desde el punto de vista práctico este problema ayuda a entender los fenómenos que se presentan en flujos MHD en condiciones de temperatura ambiente no uniforme, como podría ser el caso de una máquina de inducción MHD real.

Nigam y Singh [38] fueron los primeros en proponer y resolver este problema utilizando el perfil de velocidades de Hartmann con paredes eléctricamente aislantes y condiciones a la frontera de primer tipo. Su análisis incluye los efectos de disipación óhmica y viscosa en el caso de circuito abierto. Desafortunadamente en la ecuación de la energía, el término de calor de Joule fue escrito erróneamente, lo cual invalida sus resultados. Esto ha sido mencionado por otros autores [28,31]. Posteriormente Jain y Srinivasan [39] resolvieron el mismo problema pero considerando paredes de conductividad eléctrica finita haciendo uso del perfil de velocidades y de campo magnético inducido obtenidos por Chang y Yen [40]. El método de solución fue el mismo desarrollado por Nigam y Singh. A su vez Singh y Lal [41] utilizaron el mismo método para resolver un problema muy similar, a saber, un flujo entre cilindros coaxiales con discontinuidad en las temperaturas de las paredes en presencia de un campo magnético radial. Por último Singh y Lal [42] resolvieron otro problema parecido bajo condiciones de primer tipo considerando el flujo en un ducto rectangular cuyas paredes no son conductoras de la electricidad, utilizando las expresiones obtenidas por Shercliff [43] para el perfil de velocidades y el campo magnético inducido. Para la solución de este problema tridimensional se utilizó un método numérico implícito llegando a la conclusión de que en presencia de un campo magnético la temperatura muestra una tendencia decreciente en la región cercana a la discontinuidad mientras que lejos de ella la temperatura tiende a incrementarse con el número de Hartmann.

Resta por mencionar el trabajo de Javeri [18] endonde se utilizan condiciones de frontera de tercer tipo en un flujo en desarrollo térmico pero hidrodinámicamente desarrollado con el perfil de Hartmann. Partiendo de una temperatura uniforme en el punto de entrada, se desprecia todo tipo de disipación (óhmica y viscosa) al igual que la conducción de calor axial. La ecuación de la energía simplificada por todas estas aproximaciones se resuelve por el método de Galerkin-Kantorovich. Los resultados indican

que el proceso de transferencia de calor se puede ver afectado de manera sustancial por un coeficiente de transferencia de calor finito en las paredes de un canal MHD. Sin embargo este estudio resulta muy limitado desde el punto de vista práctico debido a las excesivas aproximaciones introducidas en el modelo.

El problema a investigar en el presente estudio es una generalización del planteado por Nigam y Singh [38]. Se trata de considerar el problema de la manera más completa posible sin despreciar ninguno de los efectos disipativos y permitiendo un flujo neto de corriente a través de una carga externa, utilizando condiciones a la frontera de tercer tipo. Asimismo se considera la transferencia de calor tanto por convección como por difusión. La solución del problema elíptico bajo estas condiciones permite estudiar regiones en desarrollo térmico así como regiones totalmente desarrolladas térmicamente y analizar la influencia de un coeficiente de transferencia de calor finito en las paredes de ambas regiones. La solución general permite, por una parte, recuperar en los límites adecuados resultados de trabajos anteriores y, por otra, efectuar un estudio paramétrico bastante amplio que da lugar a la detección de nuevos efectos térmicos.

El método de solución utilizado en este trabajo fue esbozado primeramente por Dennis y Poofs [44] y por Dennis [45] en problemas de transferencia de calor en flujos laminares en ausencia de campos magnéticos. Posteriormente Singh [46] utilizó un método similar para tratar este mismo tipo de problemas. Finalmente Nigam y Singh [38] fueron los primeros en aplicar el método a un flujo laminar expuesto a un campo magnético transversal. La solución matemática consiste en encontrar la distribución de temperaturas a distancias muy alejadas de la discontinuidad y separadamente obtener las perturbaciones a tal distribución en regiones cercanas a dicho punto. Por último ambas soluciones se superponen obteniendo la distribución de temperaturas en toda la región de flujo. En la región cercana a la discontinuidad la ecuación se resuelve utilizando una expansión en series de Fourier reduciéndose entonces a un problema de eigenvalores, los cuales se determinan obteniendo las raíces de un polinomio infinito. Se tiene entonces un conjunto infinito de eigenvalores para cada región ($x < 0$ y $x > 0$). Asociado a cada eigenvalor existe un conjunto infinito de coeficientes o eigenvector cuya determinación completa se efectúa imponiendo condiciones de continuidad sobre la temperatura y sus primeras derivadas en el punto de unión de las regiones. La imposibilidad de tratar en la práctica con un sistema infinito lleva a la necesidad de considerar un polinomio de grado finito, aproximando entonces la solución. No obstante se encuentra que ésta converge rápidamente por lo que los resultados numéricos permiten obtener perfiles de temperatura bidimensionales bastante aceptables dentro de un amplio rango de variación de los parámetros físicos del

sistema.

3.3 Formulación del Problema

Considérese un fluido viscoso e incompresible fluyendo de izquierda a derecha en estado estacionario entre dos planos paralelos infinitos. El fluido es conductor de electricidad y se supone la existencia de un campo magnético externo de intensidad constante orientado de manera perpendicular a los planos y a la dirección de flujo. Los planos tienen una conductividad eléctrica nula y se considera que la temperatura ambiente en el exterior de ellos se mantiene en un valor constante T_0 hasta una cierta sección transversal localizada en el punto $x' = 0$ endonde la temperatura del exterior cambia a otro valor constante T_1 , como se muestra en la fig.(3.1). El flujo se divide entonces en dos regiones, cada una con su propia temperatura ambiente, conectadas por una discontinuidad.

El proceso de transferencia de calor en este sistema está gobernado por la ecuación (1.48). Para determinar las derivadas de las cantidades termodinámicas en un fluido incompresible, se puede suponer que la presión es constante [47], de modo que

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \nabla T,$$

y, ya que $T(\partial s/\partial T)_p$ es el calor específico a presión constante c_p , se obtiene $T(\partial s/\partial t) = c_p(\partial T/\partial t)$, $T\nabla s = c_p\nabla T$. Entonces, para un fluido newtoniano incompresible la ecuación (1.48) se transforma en

$$\rho c_p v \frac{\partial T}{\partial x'} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y'^2} \right) + \eta \left(\frac{dv}{dy'} \right)^2 + \frac{J^2}{\sigma}, \quad (3.1)$$

donde se supone que tanto el calor específico a presión constante c_p como los coeficientes κ y η se mantienen constantes, además de considerar que el perfil de velocidades tiene la forma $\vec{v} = v(y')\hat{i}$.

El miembro izquierdo de la ecuación (3.1) representa el calor transferido por convección en dirección axial debido al movimiento del fluido. El primer término del miembro derecho representa el calor transportado por difusión en el fluido tanto en dirección axial como en dirección transversal, mientras que los términos segundo y tercero son las fuentes de disipación de calor dentro del fluido ocasionadas por las fuerzas de fricción viscosas y por la circulación de corrientes eléctricas en el medio, respectivamente.

Suponiendo que el fluido presenta un perfil de velocidades de Hartmann dado por (2.22), la ecuación (3.1) toma la forma

$$\rho c_p \frac{V_m}{A} \left(\cosh M - \cosh \frac{My'}{a} \right) \frac{\partial T_j}{\partial x'} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial y'^2} \right) + \eta \left(\frac{MV_m}{aA} \right)^2 \left(\sinh^2 \frac{My'}{a} + \left(\cosh M - \cosh \frac{My'}{a} - KA \right)^2 \right) \quad (3.2)$$

Para escribir el término de disipación óhmica se ha utilizado la expresión para la densidad de corriente (2.34) surgida del modelo de circuito equivalente para el generador MHD. En la ecuación (3.2) se ha introducido el subíndice j para indicar las dos regiones del problema, es decir la región 1 para $x' < 0$ y la región 2 para $x' > 0$.

La ecuación (3.2) es una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico por lo que se presenta difusión de calor en ambas direcciones, lo que trae como consecuencia que, en principio, el flujo en la región 1 se ve afectado por la región 2.

3.4 Condiciones a la Frontera

Las condiciones a la frontera consideradas en este problema son las llamadas condiciones de tercer tipo cuya expresión matemática general es

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} + hT = f(\vec{r}, t), \quad (3.3)$$

evaluada en la frontera de la superficie, donde $\partial/\partial n$ indica la derivada normal y positiva hacia afuera de la superficie, h es el coeficiente de transferencia de calor de las paredes, κ es la conductividad térmica del fluido y f es una función que en general puede depender de la posición y del tiempo. Las condiciones de frontera de primer y segundo tipo (*i.e.* temperatura constante en las paredes y flujo de calor constante en la pared) se pueden obtener de la ecuación (3.3) haciendo κ y h igual a cero, respectivamente. El significado físico de la ecuación (3.3) es que la frontera de la superficie bajo consideración disipa calor por convección de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton (*i.e.* el flujo de calor es proporcional a la diferencia de temperaturas) hacia un medio ambiente cuya temperatura varía con la posición y el tiempo a lo largo de la frontera. Esto se puede mostrar haciendo un balance de energía en la frontera de la superficie S

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial n} = h(T|_S - T_a),$$

o bien

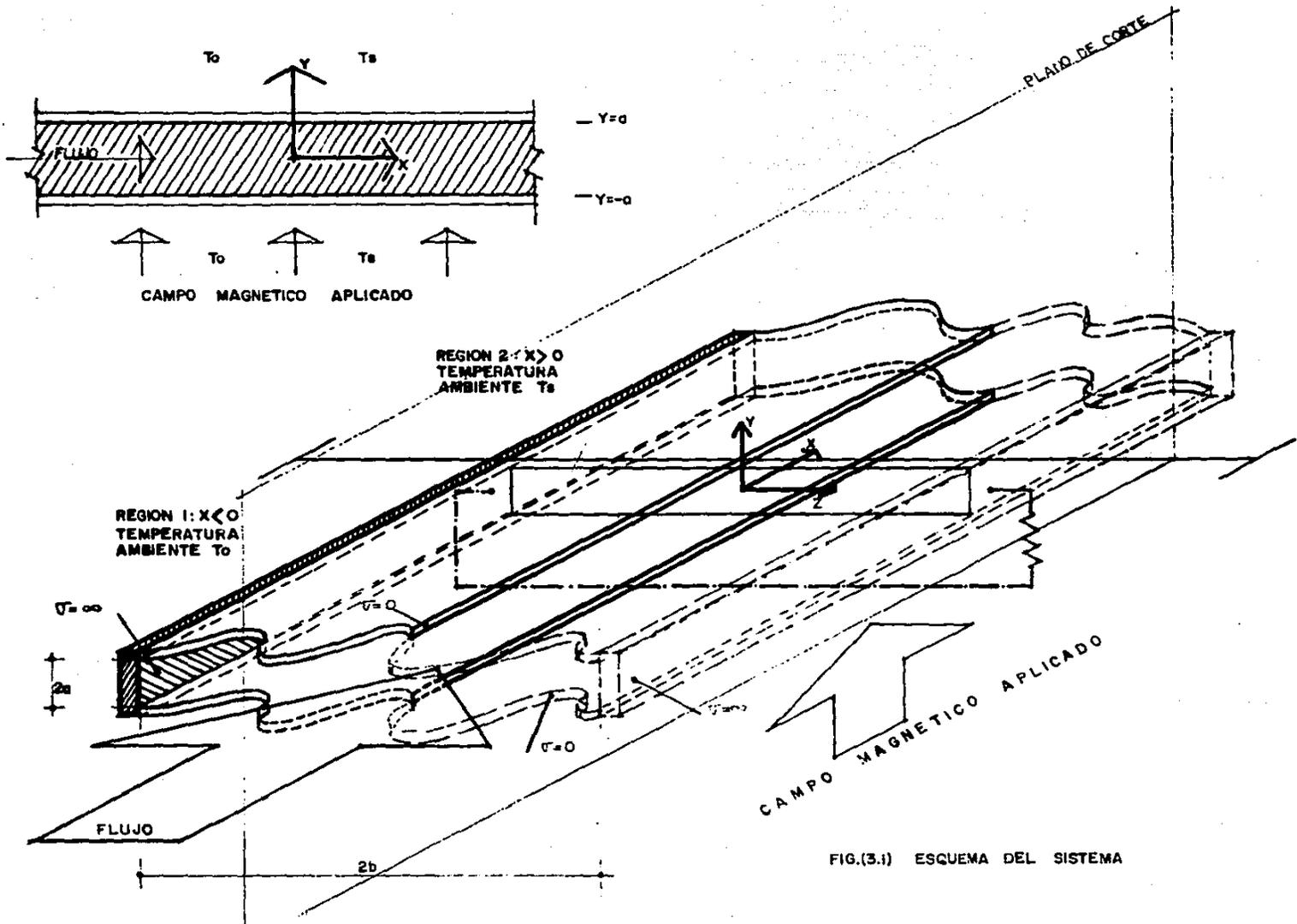


FIG.(3.1) ESQUEMA DEL SISTEMA

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_a \equiv f(\bar{r}, t) \quad \text{en } S$$

que tiene la misma forma que la ecuación (3.3), siendo T_a la temperatura ambiente. Es importante notar que en el problema a resolver esta condición se utilizará bajo la suposición de que el grosor de las paredes es despreciable de modo que no es necesario resolver simultáneamente la ecuación de conducción de calor en la pared. Asimismo debe tenerse presente que el coeficiente de transferencia de calor h puede depender de ciertas variables tales como el espacio, tiempo, geometría, condiciones de flujo y propiedades físicas, y de hecho la solución del problema depende fuertemente de él.

Entonces las condiciones a la frontera del problema son

Región 1

$$-\kappa \frac{\partial T_1}{\partial y'} + h(T_1 - T_0) = 0 \quad \text{en } y' = -a, \quad (3.4)$$

$$\kappa \frac{\partial T_1}{\partial y'} + h(T_1 - T_0) = 0 \quad \text{en } y' = a, \quad (3.5)$$

Región 2

$$-\kappa \frac{\partial T_2}{\partial y'} + h(T_2 - T_0) = 0 \quad \text{en } y' = -a \quad (3.6)$$

y

$$\kappa \frac{\partial T_2}{\partial y'} + h(T_2 - T_0) = 0 \quad \text{en } y' = a. \quad (3.7)$$

Los signos opuestos que anteceden a las derivadas de la temperatura respecto a la coordenada y' evaluadas en las diferentes fronteras (ecs.(3.4)-(3.5) y (3.6)-(3.7)) se deben a que las normales a los planos tienen sentidos opuestos. Físicamente se está indicando que en una x' dada el calor fluye hacia el interior en ambos planos o bien es expulsado hacia el ambiente exterior a través de ambas fronteras, imponiendo entonces simetría respecto al plano medio $y' = 0$. El considerar signos iguales en las derivadas respecto a la coordenada transversal en ambos planos implica absorber calor por una frontera mientras se expulsa por la otra. Esta condición es más difícil de realizar experimentalmente que la anterior, aunque matemáticamente ambos problemas presentan soluciones similares.

En las condiciones a la frontera (3.4)-(3.7) se ha considerado el mismo coeficiente de transferencia de calor en ambas regiones. El introducir coeficientes distintos únicamente implica considerar propiedades físicas diferentes para cada región. Posteriormente se analizarán los casos límites en

los que $h = 0$ y $h = \infty$, correspondientes a paredes térmicamente aislantes y paredes mantenidas a temperatura constante, respectivamente.

Las condiciones de continuidad del problema son

$$T_1 = T_2, \quad \frac{\partial T_1}{\partial x'} = \frac{\partial T_2}{\partial x'} \quad \text{en } x' = 0, \quad -a < y' < a. \quad (3.8)$$

Estas condiciones dan la posibilidad de unir suavemente la solución en la región 1 con la solución en la región 2. La interpretación física de la primera de estas condiciones es que la temperatura es una función continua univaluada de la posición, mientras que la segunda implica la imposibilidad de que existan fuentes o sumideros de calor singulares en el punto de unión de las regiones.

3.5 Solución de la Ecuación de Transferencia de Calor

Introduciendo las variables adimensionales Θ_j , x e y definidas por

$$\Theta_j = \frac{T_j - T_S}{T_0 - T_S}, \quad x' = \frac{3}{2} x Pe, \quad y' = a \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right) \quad (3.9)$$

la ecuación (3.2) se transforma en

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta_j}{\partial y^2} &= \frac{8}{3.4 \pi^2} (\cosh M - \cosh M \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right)) \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} \\ &\quad - \frac{QM^2}{A^2} (\cosh 2M \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right)) \\ &\quad - 2(\cosh M - KA) \cosh M \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right) \\ &\quad + (\cosh M - KA)^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde

$$Pe = \frac{V_m a \rho c_p}{\kappa}, \quad Q = \frac{4\eta V_m}{\pi^2 \kappa (T_0 - T_S)} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{4}{3\pi Pe}. \quad (3.11)$$

En la ecuación (3.10) se observa que el término difusivo en la dirección axial está gobernado por el factor α que va como el inverso del número de Péclet Pe . Asimismo la disipación por efecto Joule está modulada por el factor de carga K , que para un generador MHD toma valores entre 0 y 1.

Expresando las condiciones de frontera y continuidad en forma adimensional se obtiene

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} - \frac{2Bi}{\pi}(\Theta_1 - 1) = 0 \quad x < 0, y = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + \frac{2Bi}{\pi}(\Theta_1 - 1) = 0 \quad x < 0, y = \pi, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial y} - \frac{2Bi}{\pi}\Theta_2 = 0 \quad x > 0, y = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial y} + \frac{2Bi}{\pi}\Theta_2 = 0 \quad x > 0, y = \pi, \quad (3.15)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad x = 0, 0 < y < \pi \quad (3.16)$$

y

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} \quad x = 0, 0 < y < \pi \quad (3.17)$$

endonde se ha introducido el número de Biot definido como

$$Bi = \frac{ah}{\kappa} \quad (3.18)$$

que permite investigar simultáneamente el efecto de h y κ en la frontera. Reescrito en la forma $Bi = (a/\kappa)/(1/h)$, el número de Biot puede interpretarse físicamente como el cociente de las resistencias térmicas interna y externa del sistema en la dirección normal a la superficie.

La temperatura Θ_j en cualquier punto de la región de flujo puede suponerse compuesta de dos partes. La primera, Ω_j representa la perturbación creada en el flujo por la discontinuidad localizada en $x = 0$. Esta será una función de x e y que tenderá a cero conforme $|x| \rightarrow \infty$. La otra parte Ψ_j será una función de y únicamente y representará la distribución de temperaturas para grandes valores de x .

Entonces se propone la solución de (3.10) en la forma

$$\Theta_j = \Omega_j(x, y) + \Psi_j(y), \quad (3.19)$$

donde

$$\Omega_j(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

3.5.1 Solución de la Ecuación en las Regiones Alejadas de la Discontinuidad

Sustituyendo la solución (3.19) en la ecuación (3.10) y tomando el límite cuando $|x| \rightarrow \infty$ se obtiene la ecuación que debe satisfacer la función Ψ_j , a saber

$$\frac{d^2\Psi_j}{dy^2} = \frac{Q}{A^2}\Phi(y), \quad (3.21)$$

donde se ha definido la función disipación como

$$\begin{aligned} \Phi(y) = & -M^2\left\{\cosh 2M\left(\frac{2y}{\pi} - 1\right) - 2(\cosh M - KA)\cosh M\left(\frac{2y}{\pi} - 1\right) \right. \\ & \left. - (\cosh M - KA)^2\right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Las condiciones a la frontera para Ψ , son

$$\frac{d\Psi_1}{dy} - \frac{2Bi}{\pi}(\Psi_1 - 1) = 0 \quad x < 0, y = 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{2Bi}{\pi}(\Psi_1 - 1) = 0 \quad x < 0, y = \pi, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\Psi_2}{dy} - \frac{2Bi}{\pi}\Psi_2 = 0 \quad x > 0, y = 0 \quad (3.25)$$

y

$$\frac{d\Psi_2}{dy} + \frac{2Bi}{\pi}\Psi_2 = 0 \quad x > 0, y = \pi. \quad (3.26)$$

La solución de (3.21) sujeta a las condiciones (3.23)-(3.26) es de la forma

$$\Psi_1(y) = \frac{Q}{A^2}F(y, M, Bi, K) + 1 \quad \text{para } x < 0, \quad (3.27)$$

$$\Psi_2(y) = \frac{Q}{A^2}F(y, M, Bi, K) \quad \text{para } x > 0, \quad (3.28)$$

donde

$$\begin{aligned} F(y, M, Bi, K) = & -\frac{\pi^2}{16}\left\{\cosh 2M\left(\frac{2y}{\pi} - 1\right) \right. \\ & \left. - 8(\cosh M - KA)\cosh M\left(\frac{2y}{\pi} - 1\right) \right. \\ & \left. + \frac{8M^2}{\pi^2}(\cosh M - KA)^2y(y - \pi) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{M}{Bi} (2\sinh 2M - 8(\cosh M - KA)\sinh M \\
& + 4M(\cosh M - KA)^2) \\
& - \cosh 2M + 8(\cosh M - KA) \cosh M \} . \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Nótese que se satisface $\Psi_1(0) = \Psi_1(\pi)$, lo cual muestra la simetría de la solución respecto al plano medio $y = \pi/2$. Cuando $Bi \rightarrow \infty$ las expresiones (3.27) y (3.28) se reducen a la solución del problema con condiciones a la frontera de primer tipo en las regiones térmicamente desarrolladas. Es importante mencionar que en este límite las soluciones (3.27) y (3.28) difieren de las obtenidas por Nigam y Singh [38] debido al error cometido por estos autores al escribir el término de disipación de Joule. Por otra parte las soluciones mencionadas pueden considerarse en sí mismas como la solución del problema parabólico (i.e. difusión de calor sólo en dirección transversal) tratado por Sutton [21] y Cramer [22] con condiciones de primer tipo.

La fig.(3.2) muestra el perfil adimensional de temperaturas en la región 2 como función de la coordenada transversal (y) en puntos muy alejados de la discontinuidad (solución (3.28)). El perfil correspondiente para la región 1 es exactamente el mismo pero desplazado una unidad hacia arriba. La figura mencionada muestra el comportamiento del perfil de temperaturas para diversos números de Hartmann, en condiciones de circuito abierto ($K = 1$) y con un número de Biot infinito (> 100) que implica temperatura constante en las paredes.

En este caso el flujo neto de corriente eléctrica hacia el exterior es nulo presentándose sólo corrientes recirculantes muy pequeñas dentro del fluido que ocasionan que el calor disipado por efecto Joule sea pequeño comparado con el que se genera por disipación viscosa. Es la disipación viscosa la que domina la distribución de temperaturas, mientras que el número de Hartmann tiene un efecto relativamente pequeño. De hecho la temperatura en el plano medio excede la temperatura de la pared sólo por una cantidad muy pequeña.

La figura (3.3) muestra una gráfica similar a la anterior pero en condiciones de corto circuito ($K = 0$). En tal caso el flujo de corriente es máximo y ya que el calor de Joule es proporcional al cuadrado de la densidad de corriente, un pequeño incremento en el número de Hartmann lleva a un aumento muy grande de la temperatura en el centro del canal.

Asimismo, al elevar M , también se incrementa el flujo de calor hacia las paredes del ducto. De hecho cuando $Bi \rightarrow \infty$ existe un efecto competitivo entre la generación interna de calor y la rápida pérdida de calor hacia el exterior. En este caso el principal efecto disipativo es el efecto Joule mientras que la disipación viscosa comparativamente es despreciable.

El efecto de las condiciones de frontera de tercer tipo es analizado en la fig.(3.4), que muestra el mismo perfil de temperaturas que la fig.(3.3) pero

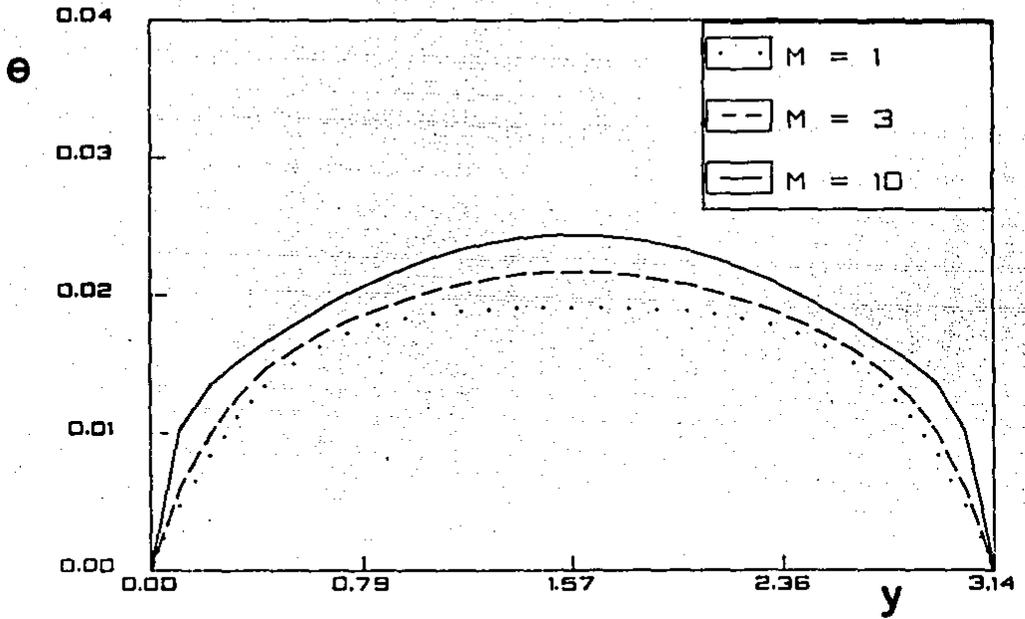


Figura 3.2: Perfil de temperatura en $x = \infty$ para diversos números de Hartmann. $Bi = \infty$, $K = 1$

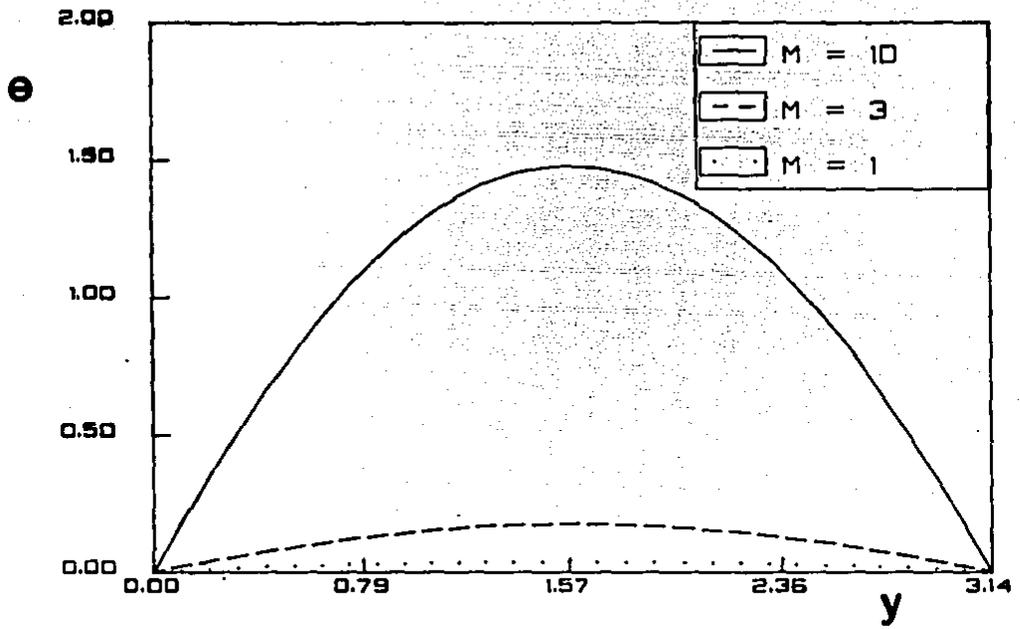


Figura 3.3: Perfil de temperatura en $x = \infty$ para diversos números de Hartmann. $Bi = \infty$, $K = 0$

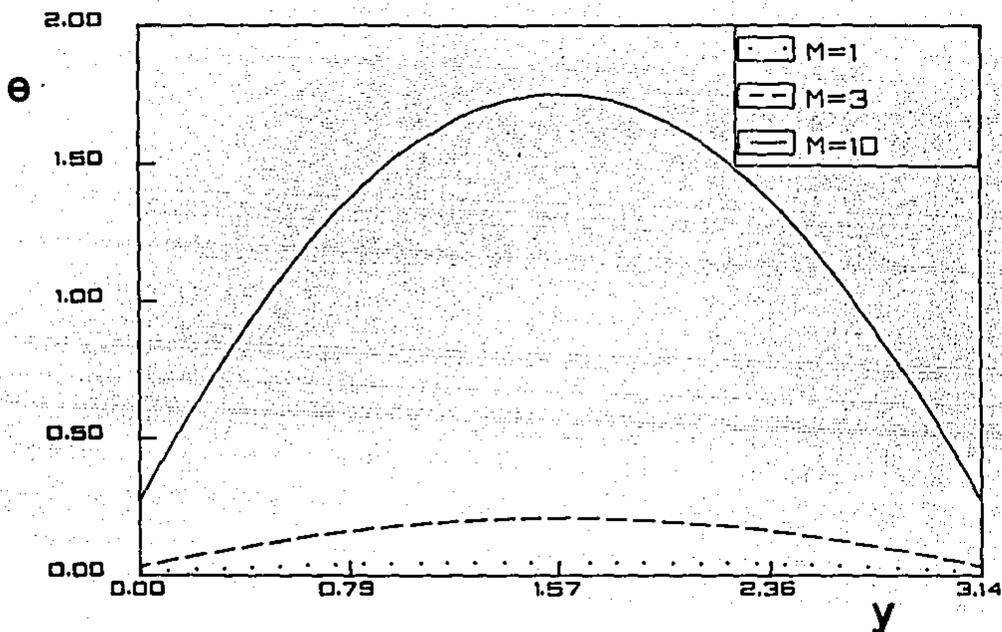


Figura 3.4: Perfil de temperatura en $x = \infty$ para diversos números de Hartmann. $Bi = 10$, $K = 0$.

ahora con un número de Biot finito ($Bi = 10$).

Mientras que en los casos anteriores ($Bi \rightarrow \infty$) se tiene que $\Theta_2(0) = \Theta_2(\pi) = 0$, que es obvio por el hecho de pedir como condiciones a la frontera que las temperaturas en las paredes sean fijas, en la fig.(3.4) se observa que $\Theta_2(0) = \Theta_2(\pi) > 0$. Esta es una consecuencia directa de las condiciones a la frontera de tercer tipo, ya que el considerar un número de Biot finito equivale a considerar un coeficiente de transferencia de calor finito en la frontera (i.e. una pared con un mejor aislamiento térmico); por consiguiente el mecanismo de transferencia de calor a través de las fronteras se ve modificado, ya que se permite que la frontera de la superficie disipe calor por convección, de acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton, hacia un medio ambiente cuya temperatura es fija. De esta forma, mientras que un número de Biot infinito ocasiona que el flujo de calor a través de las fronteras sea tal que mantenga las temperaturas de las paredes fijas, para un número de Biot finito el flujo de calor a través de la frontera es proporcional a la temperatura local de la misma siendo dicho número la constante de proporcionalidad, es decir

$$\bar{q} \propto Bi(T_j - T_a) \equiv Bi\Delta T.$$

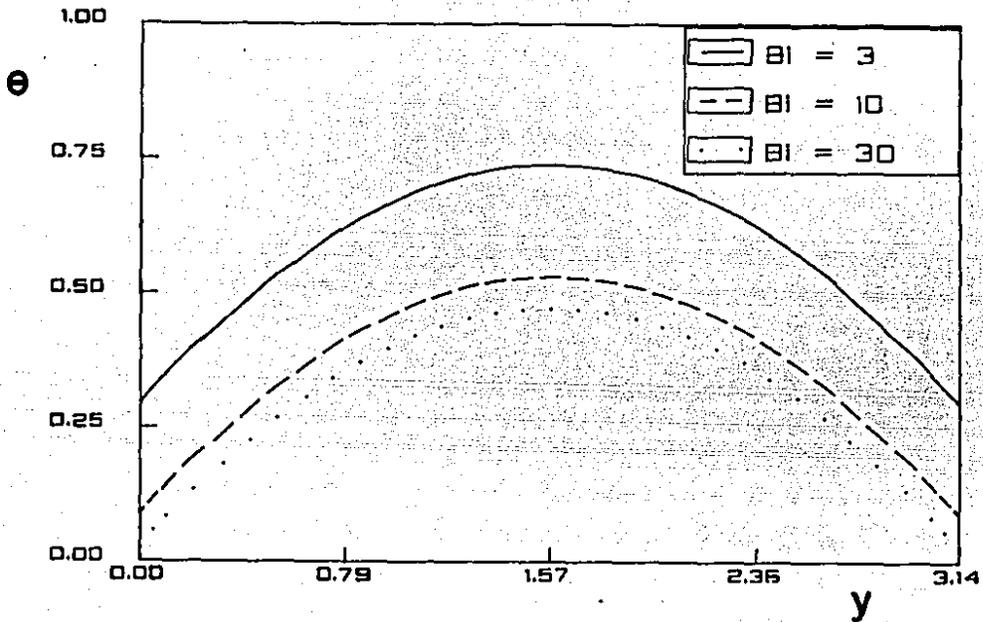


Figura 3.5: Perfil de temperatura en $x = \infty$ para diversos números de Biot. $M = 10$, $K = 0.5$

Entonces la temperatura del fluido en las fronteras se acomoda de forma tal que para un número de Biot dado se permite esta clase de intercambio de calor con el exterior.

Para una ΔT fija, una disminución en el número de Biot trae como consecuencia una disminución en el flujo de calor a través de la frontera lo cual se manifiesta mediante un aumento general en la temperatura del fluido. Comparando la fig.(3.4) con la (3.3) se observa que el efecto de la reducción del número de Biot es más notorio para números de Hartmann grandes ($M = 10$) en donde el aumento general en la temperatura al disminuir Biot de infinito a 10 fue aproximadamente del 16 %, mientras que para números de Hartmann pequeños ($M = 1, 3$) tal aumento fue menor al 5 %.

La fig.(3.5) muestra los perfiles de temperatura (Θ_2 vs. y) para diversos números de Biot (3,10,30) conservando el número de Hartmann $M = 10$, en condiciones de máxima potencia. Esta gráfica muestra claramente el efecto del número de Biot en el perfil de temperaturas, observándose una tendencia de aumento de la temperatura conforme el número de Biot disminuye. En este caso la disipación óhmica predomina frente a la viscosa, aunque no es tan considerable como en el caso de corto circuito.

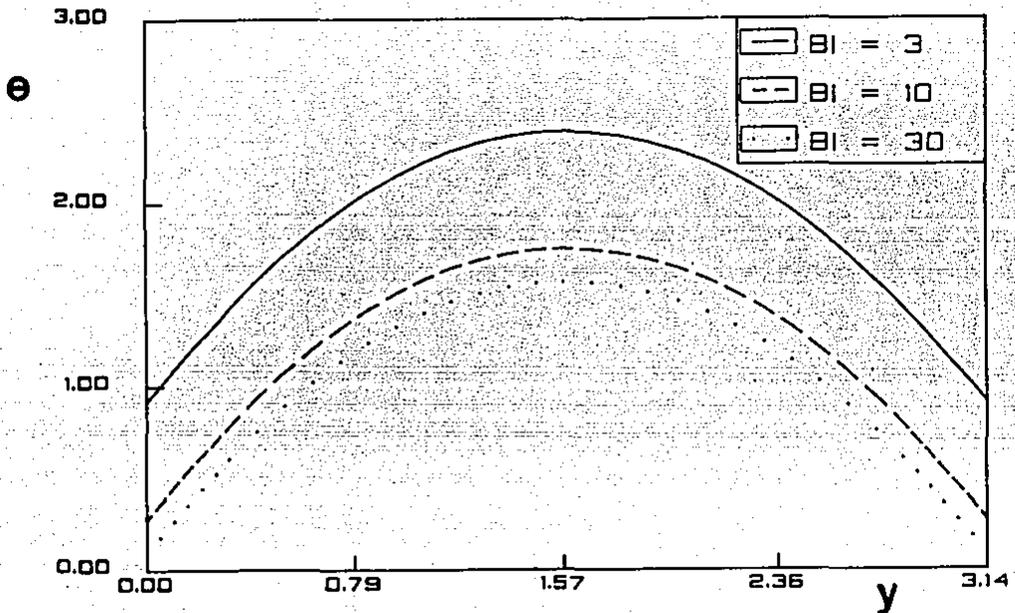


Figura 3.6: Perfil de temperatura en $x = \infty$ para diversos números de Biot. $M = 10$, $K = 0$

Esto puede observarse cuantitativamente comparando la fig.(3.5) con la (3.6) endonde se observan los mismos perfiles que en la anterior pero en condiciones de corto circuito (corriente máxima). En tal caso la disipación por efecto Joule es máxima observándose un aumento en la temperatura del fluido de cerca del 200 % respecto al caso de potencia máxima. Entonces el efecto combinado de máxima disipación con un número de Biot pequeño, que en la práctica se traduce en una frontera con un aislamiento térmico más eficiente, trae consigo un aumento considerable en la temperatura del fluido. La disminución del número de Biot ocasiona que disminuya la razón de disipación de calor hacia el exterior, mientras que en general se observa que un incremento en el factor de carga es equivalente a una disminución del flujo de corriente eléctrica a través del ducto y en consecuencia es proporcional al descenso en el calentamiento de Joule en el fluido. Para un M y un Bi dados, la razón de incremento en la temperatura se reduce al aumentar K .

3.5.2 Solución de la Ecuación en las Regiones Cercanas a la Discontinuidad

Sustituyendo la solución (3.19) en (3.10) y haciendo uso de (3.21) se encuentra la ecuación que debe satisfacer Ω_j , esto es

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial y^2} = g(y) \frac{\partial \Omega_j}{\partial x}, \quad (3.30)$$

donde

$$g(y) = \frac{8}{3A\pi^2} \left\{ \cosh M - \cosh M \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right) \right\} \quad (3.31)$$

y cuyas condiciones a la frontera son

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial y} - \frac{2Bi}{\pi} \Omega_j = 0 \quad |x| > 0, y = 0, j = 1, 2, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \Omega_j}{\partial y} + \frac{2Bi}{\pi} \Omega_j = 0 \quad |x| > 0, y = \pi, j = 1, 2, \quad (3.33)$$

$$\Omega_1(-\infty, y) = \Omega_2(\infty, y) = 0 \quad 0 < y < \pi, \quad (3.34)$$

$$1 + \Omega_1(0, y) = \Omega_2(0, y) = 0 \quad 0 < y < \pi \quad (3.35)$$

y

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \quad x = 0, 0 < y < \pi. \quad (3.36)$$

La estrategia de solución de la ecuación (3.30) sujeta a las condiciones (3.32)-(3.36) se diseñó siguiendo las líneas propuestas por Nigam [38] y es a grandes rasgos la siguiente: a) se propone la solución Ω_j como una serie de Fourier cuyos términos son el producto de una función $U_{k,j}(x)$ (a determinar) y una combinación lineal $W_k(y)$ de funciones seno y coseno con amplitudes distintas. El argumento de tales funciones es el producto de la coordenada transversal por ciertas raíces λ_k que se determinan resolviendo una ecuación trascendental obtenida a partir de las condiciones (3.32) y (3.33); b) sustituyendo la solución propuesta Ω_j en (3.30) se obtiene una ecuación diferencial para las funciones $U_{k,j}(x)$, después de haber eliminado la dependencia en la coordenada transversal multiplicando la ecuación por la función $W_k(y)$ e integrando respecto a y de 0 a π . La solución a esta ecuación diferencial se encuentra como el producto de una función exponencial $\exp(\xi_j x)$ por ciertos coeficientes $a_{k,j}$, donde ξ_j y $a_{k,j}$ son constantes a determinar; c) introduciendo esta solución en la ecuación correspondiente se obtiene un sistema infinito de ecuaciones lineales para los coeficientes

a_{kj} . La existencia de una solución no trivial del sistema de ecuaciones implica que el determinante de la matriz de coeficientes asociada al sistema debe anularse, obteniendo entonces un polinomio característico de grado infinito cuyas raíces determinan los eigenvalores² ξ_j permitidos; d) asociado a cada eigenvalor existirá un eigenvector infinito formado por los coeficientes a_{kj} cuya determinación completa se efectúa aplicando las condiciones de continuidad (3.35) y (3.36).

De acuerdo a la estrategia mencionada la solución de la ecuación (3.30) sujeta a las condiciones (3.32)-(3.36) se propone en la forma

$$\Omega_j(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} U_{kj}(x)W_k(y) \quad j = 1, 2 \quad (3.37)$$

donde U_{kj} es una función a determinar y

$$W_k(y) = \text{sen } \lambda_k y + p_k \text{ cos } \lambda_k y. \quad (3.38)$$

Las raíces λ_k deben determinarse a partir de las condiciones de frontera, de modo que al sustituir (3.37) y (3.38) en (3.32) y (3.33) se obtiene

$$p_k = \frac{\lambda_k}{b_1} \quad (3.39)$$

y

$$\tan \lambda_k \pi = \frac{1 - b_2/b_1}{\frac{\lambda_k}{b_1} + \frac{b_2}{\lambda_k}} \quad (3.40)$$

donde se ha definido

$$b_1 = \frac{2Bi}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{2Bi}{\pi}.$$

Entonces los valores permitidos de λ_k , que satisfacen las condiciones de frontera, se obtienen de las raíces de la ecuación trascendental (3.40). La fig.(3.7) muestra gráficamente la solución de la ecuación (3.40) para un número de Biot igual a 3.

Nótese que si el número de Biot tiende a cero (paredes térmicamente aislantes) o a infinito (paredes a temperatura constante) la ecuación (3.40) se reduce a

$$\tan \lambda_k \pi = 0 \quad (3.41)$$

que determina raíces enteras para tales problemas. En particular para paredes a temperatura constante ($Bi \rightarrow \infty$) la función W_k se reduce a

²En este trabajo los términos eigenvalor y eigenvector se utilizan en un sentido más general que en el álgebra lineal.

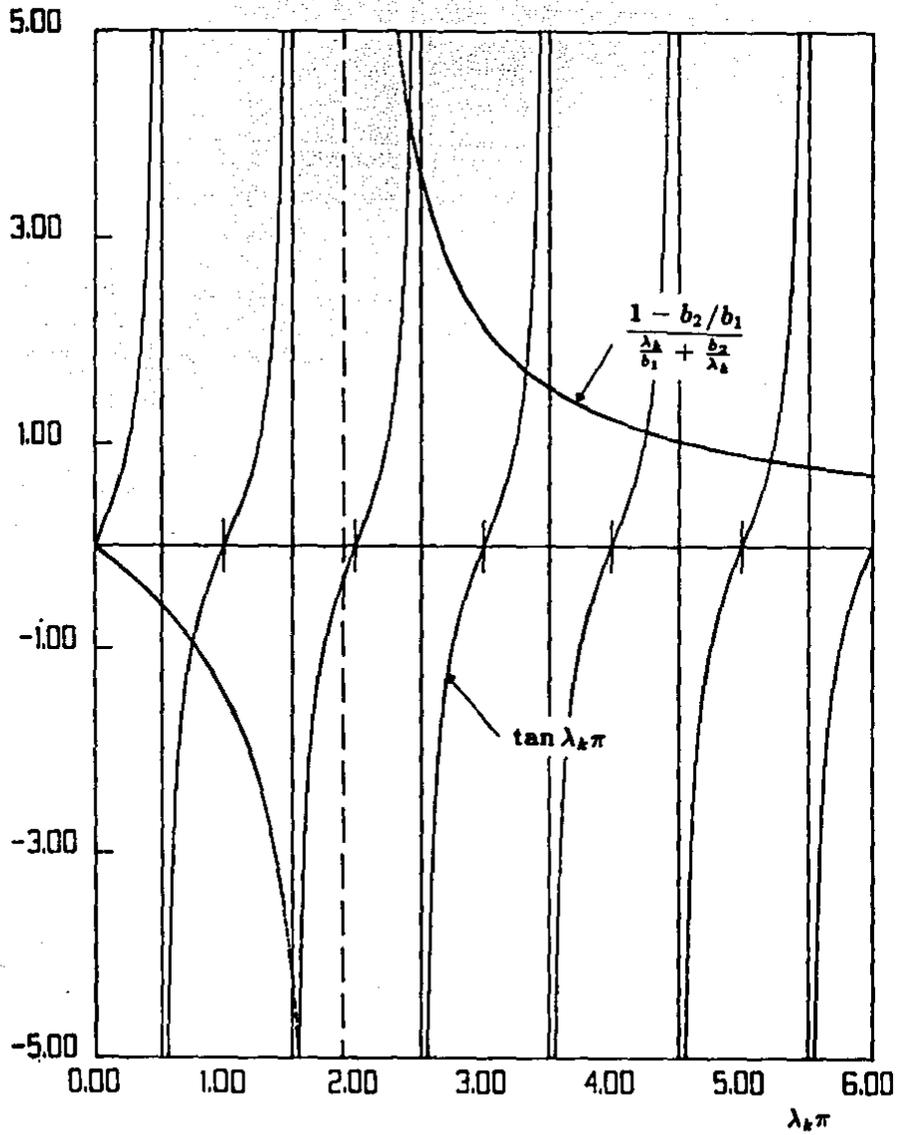


Figura 3.7: Solución gráfica de la ecuación trascendental para $Bi = 3$

$$W_k(y) = \text{sen}ky \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.42)$$

que es la función utilizada por Nigam [38] y por Jain [39] en la solución del problema con condiciones a la frontera de primer tipo.

Cabe mencionar aquí que en el caso en que $b_1 = b_2$, es decir, cuando se absorbe calor por una de las fronteras mientras se expulsa por la otra, las raíces λ_k también son enteras y en este caso la función W_k es de la forma

$$W_k(y) = \text{sen}(ky - \beta_k), \quad (3.43)$$

donde

$$\beta_k = \arctan\left(\frac{k\pi}{2Bi}\right) \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (3.44)$$

La solución a este problema no es simétrica respecto al plano medio $y = \pi/2$; en el límite $Bi \rightarrow \infty$ esta solución se reduce correctamente a la solución para el caso de temperaturas constantes en la pared.

Sustituyendo la solución (3.37) en la ecuación (3.30) se obtiene

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^2 \frac{d^2 U_{kj}}{dx^2} - \frac{dU_{kj}}{dx} g(y) - \lambda_k^2 U_{kj} \right) W_k(y) = 0, \quad (3.45)$$

donde la condición (3.34) implica que

$$U_{kj}(-\infty) = U_{kj}(\infty) = 0. \quad (3.46)$$

Multiplicando (3.45) por $W_n(y)$ dada por (3.38), en donde n no necesariamente es igual a k , e integrando respecto a y de 0 a π se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha^2 B_{nk} \frac{d^2 U_{kj}}{dx^2} - G_{nk} \frac{dU_{kj}}{dx} g(y) - \lambda_k^2 B_{nk} U_{kj} \right) = 0, \quad (3.47)$$

donde

$$B_{nk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} W_n W_k dy \quad (3.48)$$

y

$$G_{nk} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g W_n W_k dy. \quad (3.49)$$

El cálculo de la integral B_{nk} puede efectuarse directamente dando como resultado, cuando $n = k$

$$B_{nn} = 1 + (p_n^2 - 1) \frac{\text{sen}2\lambda_n\pi}{2\lambda_n\pi} + p_n \left(p_n + \frac{\text{sen}^2\lambda_n\pi}{\lambda_n\pi} \right). \quad (3.50)$$

Cuando $n \neq k$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 B_{nk} = & (1 + p_n p_k) \frac{\text{sen}(\lambda_n - \lambda_k)\pi}{(\lambda_n - \lambda_k)\pi} - (1 - p_n p_k) \frac{\text{sen}(\lambda_n + \lambda_k)\pi}{(\lambda_n + \lambda_k)\pi} \\
 & - (p_n - p_k) \frac{1 - \cos(\lambda_n - \lambda_k)\pi}{(\lambda_n - \lambda_k)\pi} \\
 & + (p_n - p_k) \frac{1 - \cos(\lambda_n + \lambda_k)\pi}{(\lambda_n + \lambda_k)\pi}. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Nótese que cuando el número de Biot tiende a infinito (λ_n entero) la integral (3.50) da como resultado la unidad, lo cual concuerda con el hecho de que en tal caso las funciones $W_n(y)$ estarían dadas por (3.42) y evidentemente serían ortogonales en el intervalo $(0, \pi)$. Sin embargo en el caso general (ec.(3.38)) para un número de Biot arbitrario, las funciones $W_n(y)$ no son ortogonales como lo muestra la ecuación (3.51), aunque numéricamente se encontró que los valores de B_{nk} son pequeños en comparación a los valores de B_{nn} .

Para evaluar la integral (3.49) es conveniente primero expandir la función $g(y)$ en una serie coseno de Fourier en el intervalo $(0, \pi)$. La expansión está dada por

$$g(y) = \cosh M - \cosh M \left(\frac{2y}{\pi} - 1 \right) = \frac{b_0}{2} + \sum_{r=2,4,\dots}^{\infty} b_r \cos ry, \quad (3.52)$$

donde

$$b_0 = 2A \quad \text{y} \quad b_r = -\frac{8M \text{senh} M}{4M^2 + \pi^2 r^2}$$

Sustituyendo la expansión (3.52) en (3.49) y efectuando la integral se obtiene para $n = k$ y $r = 2n$

$$\begin{aligned}
 G_{nn} = & \frac{b_0}{2} B_{nn} + b_r \frac{\lambda_n^2}{n^2 - \lambda_n^2} \\
 & \left[(1 - p_n) \frac{\text{sen} 2\lambda_n \pi}{2\lambda_n \pi} - 2p_n \frac{1 - \cos 2\lambda_n \pi}{2\lambda_n \pi} \right] \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

y para $n \neq k$

$$G_{nk} = \sum_{r=2,4,\dots}^{\infty} b_r \left\{ \frac{(\lambda_n + \lambda_k)^2}{r^2 - (\lambda_n + \lambda_k)^2} \left[(1 - p_n p_k) \frac{\text{sen}(\lambda_n + \lambda_k)\pi}{(\lambda_n + \lambda_k)\pi} \right. \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & - (p_n + p_k) \frac{1 - \cos(\lambda_n + \lambda_k)\pi}{(\lambda_n + \lambda_k)\pi} \\ & \frac{(\lambda_n - \lambda_k)^2}{r^2 - (\lambda_n - \lambda_k)^2} \left[(1 + p_n p_k) \frac{\text{sen}(\lambda_n - \lambda_k)\pi}{(\lambda_n - \lambda_k)\pi} \right. \\ & \left. - (p_n - p_k) \frac{1 - \cos(\lambda_n - \lambda_k)\pi}{(\lambda_n - \lambda_k)\pi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

La solución de la ecuación (3.47) sujeta a la condición (3.46) se propone en la forma

$$U_{kj} = a_{kj} \exp(\xi_j x) \quad j = 1, 2 \quad (3.55)$$

donde ξ_1 es positivo y ξ_2 es negativo. Sustituyendo (3.55) en (3.47) se obtiene

$$f_{nj} a_{nj} + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} h_{nk} a_{kj} = 0 \quad j = 1, 2 \quad k \neq n, \quad (3.56)$$

donde

$$f_{nj} = \alpha^2 B_{nn} \xi_j^2 - G_{nn} \xi_j - B_{nn} \lambda_n^2 \quad j = 1, 2 \quad n = k \quad (3.57)$$

y

$$h_{nk} = \alpha^2 B_{nk} \xi_j^2 - G_{nk} \xi_j - B_{nk} \lambda_k^2 \quad j = 1, 2 \quad n \neq k. \quad (3.58)$$

El sistema de ecuaciones (3.56) puede expresarse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} f_{1j} & h_{13} & h_{15} & \dots \\ h_{31} & f_{3j} & h_{35} & \dots \\ h_{51} & h_{53} & f_{5j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{3j} \\ a_{5j} \\ \vdots \end{pmatrix} = 0. \quad (3.59)$$

Para que este conjunto infinito de ecuaciones lineales homogéneas en a_{nj} tenga una solución distinta de la trivial es necesario que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, es decir

$$\Delta(\xi_j) \equiv ||A_{r_s}|| = 0, \quad (3.60)$$

donde A_{r_s} son los elementos de la matriz de coeficientes. Las raíces de la ecuación (3.60) definen un número infinito de eigenvalores ξ_j . La existencia de tales raíces está asegurada ya que el determinante es absolutamente convergente [46]. En general un determinante infinito converge si el producto infinito de sus elementos diagonales principales y la suma infinita

de sus elementos no diagonales son absolutamente convergentes [48]. Entonces dividiendo cada renglón de $\Delta(\xi_j)$ entre su elemento diagonal principal correspondiente se puede probar que $\Delta(\xi_j)$ converge siempre y cuando $\sum \sum |A_{rs}|$, ($r \neq s$) converja y ξ_j no tome ningún valor que anule a algún elemento de la diagonal principal.

Ya que todos los elementos de la diagonal principal son cuadráticos en ξ_j , la condición (3.60) arrojará un número infinito de raíces positivas y negativas. Las raíces positivas se denotarán por

$$\xi_1^{(q)} \quad q = 1, 3, 5, \dots$$

y se admiten en la región $x < 0$, mientras que las raíces negativas

$$\xi_2^{(q)} \quad q = 1, 3, 5, \dots$$

son aplicables en la región $x < 0$. Conociendo estas raíces es posible encontrar relaciones de proporcionalidad entre los coeficientes a_n , a partir de (3.56). Es decir, para cada raíz (o eigenvalor) $\xi_j^{(q)}$ existirá un conjunto infinito de coeficientes $a_n^{(q)}$ (o eigenvector) los cuales pueden relacionarse en la forma

$$a_n^{(q)} = O_n(\xi_j^{(q)}) a_q^{(q)} \quad j = 1, 2 \quad n, q = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.61)$$

donde $O_n(\xi_j^{(q)})$ es una cantidad conocida. Entonces la solución de la ecuación (3.30) que satisface las condiciones (3.32)-(3.34) es

$$\Omega_j = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k,j}^{(q)} \exp(\xi_j^{(q)} x) (\sin \lambda_k y + p_k \cos \lambda_k y). \quad (3.62)$$

Hasta este punto los coeficientes $a_k^{(q)}$ no están completamente determinados. Para lograr su determinación es necesario utilizar las condiciones de continuidad en $x = 0$. De esta forma al sustituir (3.62) en (3.35) y (3.36) se tiene

$$1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k,1}^{(q)} W_k(y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{q=1} a_{k,2}^{(q)} W_k(y) \quad (3.63)$$

y

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \xi_1^{(q)} a_{k,1}^{(q)} W_k(y) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \xi_2^{(q)} a_{k,2}^{(q)} W_k(y), \quad (3.64)$$

donde se ha utilizado la identidad (3.38). Multiplicando (3.63) y (3.64) por $W_n(y)$ e integrando respecto a y de 0 a π se obtiene

$$\frac{1}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n \pi + p_n \operatorname{sen} \lambda_n \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k1}^{(q)} B_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k2}^{(q)} B_{nk} \quad (3.65)$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \xi_1^{(q)} a_{k1}^{(q)} B_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \xi_2^{(q)} a_{k2}^{(q)} B_{nk}. \quad (3.66)$$

Estos sistemas de ecuaciones junto con (3.59) determinan completamente a los coeficientes $a_{nj}^{(q)}$. Sin embargo el primer término del miembro izquierdo de (3.65) converge lentamente por lo que conviene utilizar un principio variacional que permita encontrar una expresión equivalente pero cuya convergencia sea más rápida [49]. Entonces, partiendo de la ecuación (3.63), se requieren encontrar los coeficientes $a_{k2}^{(q)}$ tales que minimicen la integral

$$J \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k2}^{(q)} \right) = \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k1}^{(q)} W_k(y) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k2}^{(q)} W_k(y) + \frac{\pi}{2} \right)^2 dy. \quad (3.67)$$

Definiendo

$$\Lambda_j^{(q)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}^{(q)} W_k(y) \quad (3.68)$$

se tiene

$$J(\Lambda_2^{(q)}) = \int_0^{\pi} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_1^{(q)} - \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_2^{(q)} + \frac{\pi}{2} \right)^2 dy. \quad (3.69)$$

Entonces minimizando (3.69) se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial \Lambda_2^{(n)}} = 2 \int_0^{\pi} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_1^{(q)} - \sum_{q=1}^{\infty} \Lambda_2^{(q)} + \frac{\pi}{2} \right) \Lambda_2^{(n)} dy = 0,$$

o bien

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k1}^{(q)} W_k(y) \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_{s2}^{(n)} W_s(y) \right) \right. \\ \left. - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k2}^{(q)} W_k(y) \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_{s2}^{(n)} W_s(y) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{2} \sum_{s=1}^{\infty} a_{s2}^{(n)} W_s(y) \right) \right] dy = 0 \quad n, q, k, s = 1, 3, \dots \quad (3.70) \end{aligned}$$

Efectuando la integral (3.70) término a término, se obtiene la condición equivalente a (3.65) que deben satisfacer los coeficientes $a_{k_j}^{(q)}$ y cuya forma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_{k,s} (a_{k_1}^{(q)} - a_{k_2}^{(q)}) a_{s,2}^{(n)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_{s,2}^{(n)}}{\lambda_s} (1 - \cos \lambda_s \pi + p_s \operatorname{sen} \lambda_s \pi) = 0 \quad (3.71)$$

En resumen el procedimiento para el cálculo de los coeficientes $a_{n_k}^{(q)}$ es el siguiente: a) Una vez determinados los eigenvalores $\xi_j^{(q)}$ a partir de la solución del polinomio surgido de la condición (3.60), el conjunto infinito de coeficientes $a_{n_j}^{(q)}$ asociado a cada eigenvalor, queda completamente determinado mediante la solución simultánea de los sistemas de ecuaciones lineales (3.59), (3.66) y (3.71). b) Obviamente en la práctica no es posible resolver este sistema infinito de ecuaciones. Lo que debe hacerse entonces es tomar sistema (3.59) de un cierto orden finito, por ejemplo N . De esta forma se tendrá un polinomio característico de grado $2N$ que arrojará a su vez $2N$ raíces, N positivas (región $x < 0$) y N negativas (región $x > 0$), de modo que en los sistemas de ecuaciones (3.66) y (3.71) las sumas se extenderán de $q = 1$ a N , siendo el rango de k y s también de 1 a N . c) Se establece entonces un sistema de $4N$ ecuaciones con $4N$ incógnitas $a_{n_j}^{(q)}$, que al resolverse arrojará $2N$ coeficientes para cada región y finalmente la solución (aproximada) para $\Omega_j(x, y)$ se obtiene a partir de (3.62). d) Sumando las funciones Ω_j y Ψ_j , el perfil adimensional de temperaturas para toda la región de flujo queda expresado en la forma (3.19).

Las figuras (3.8) y (3.9) muestran los perfiles de temperatura adimensionales como función de la coordenada transversal (y) en las regiones cercanas a la discontinuidad. Las distintas curvas son los perfiles correspondientes a diversas posiciones axiales (coordenada x) tanto en la región 1 como en la región 2. Ambas gráficas fueron obtenidas considerando un número de Biot infinito y números de Hartmann y Péclet iguales a 3, en condiciones de máxima potencia ($K = 0.5$). La diferencia entre las dos estriba en el hecho de que la fig.(3.8) fue calculada tomando $N = 3$, es decir, considerando los tres primeros términos de la serie de Fourier, mientras que la fig.(3.9) se obtuvo utilizando únicamente dos términos del desarrollo de Fourier. En ambas gráficas las líneas discontinuas muestran los perfiles correspondientes al punto $x = 0$ calculados por la izquierda y por la derecha. La discrepancia observada en estos dos límites se debe a que se está considerando únicamente un número finito de términos de la serie de Fourier; entonces la temperatura en el punto $x = 0$ se tomó como la interpolación de estas dos curvas mediante el promedio aritmético (i.e. la línea - · - representa el perfil promedio aritmético de $\Theta(0^+)$ y $\Theta(0^-)$). Aunque obviamente esta extrapolación no es un resultado arrojado de la teoría, parece

bastante razonable suponer que esta curva se acerca a la temperatura real en la discontinuidad.

Comparando las figuras (3.8) y (3.9) se observa que la correspondencia entre las dos aproximaciones es bastante buena, de forma tal que los perfiles en puntos $x \neq 0$ prácticamente se sobreponen y aún los promedios de las curvas $x = \pm 0$ coinciden aceptablemente. Obviamente es de esperarse que mientras más términos sean considerados en la serie la aproximación será mejor; sin embargo los resultados numéricos muestran que la convergencia de la solución es muy rápida en toda la región de flujo, a excepción de las vecindades del punto $x = \pm 0$; de modo que el considerar $N = 3$ en vez de $N = 2$ no mejora sustancialmente los resultados, observándose sólo una ligera mejoría en la vecindad inmediata de la discontinuidad. Por otra parte cuando $N = 3$ necesariamente se complica el álgebra involucrada, pues se deben encontrar las raíces de un polinomio de sexto grado para determinar los eigenvalores y resolver un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas para obtener todos los conjuntos de coeficientes o eigenvectores, mientras que cuando $N = 2$ el polinomio es de cuarto orden y el sistema de ecuaciones lineales es de 8 por 8. Por las razones anteriores se juzgó conveniente incluir únicamente dos términos del desarrollo en serie de Fourier de la solución (3.62), aunque un estudio detallado de la vecindad inmediata a la discontinuidad requeriría de un mayor número de términos.

El cálculo de las raíces de los polinomios surgidos de la condición (3.60) y la solución de los sistemas de ecuaciones lineales para los coeficientes $a_n^{(q)}$ se realizaron utilizando las subrutinas C02AEF y F04ATF respectivamente, de la biblioteca NAG del sistema FORTRAN VAX [50].

Para lograr la apreciación más clara posible de la influencia de los diversos factores físicos en el perfil de temperatura en la región cercana a la discontinuidad, se efectuó un estudio paramétrico tomando como referencia el punto ($M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$) en el espacio de parámetros. La variación de los parámetros se realizó de la siguiente forma: el número de Hartmann tomó los valores 1, 3, 10 y 30, ya que en este rango se comprenden desde perfiles esencialmente parabólicos ($M = 1$) hasta perfiles en donde el aplanamiento producido por el campo magnético es bastante notorio ($M \geq 10$); al número de Péclet se le asignaron los valores 0.3, 1, 3, 10, 30 y 100 que comprenden flujos en donde la transferencia de calor por difusión es dominante ($Pe = 0.3, 1$) y flujos en los que el mecanismo de convección es el que predomina ($Pe \geq 10$); el número de Biot tomó los valores 1, 3, 10 y 100, incluyéndose en este rango fronteras con un aislamiento térmico muy alto $Bi = 1$ y fronteras en donde se mantiene la temperatura prácticamente constante, lo que corresponde a un coeficiente de transferencia de calor infinito ($Bi \geq 100$); por último, para el factor de carga se consideraron los valores correspondientes a los modos de operación típicos de un generador MHD, es decir, corto circuito ($K = 0$), potencia máxima

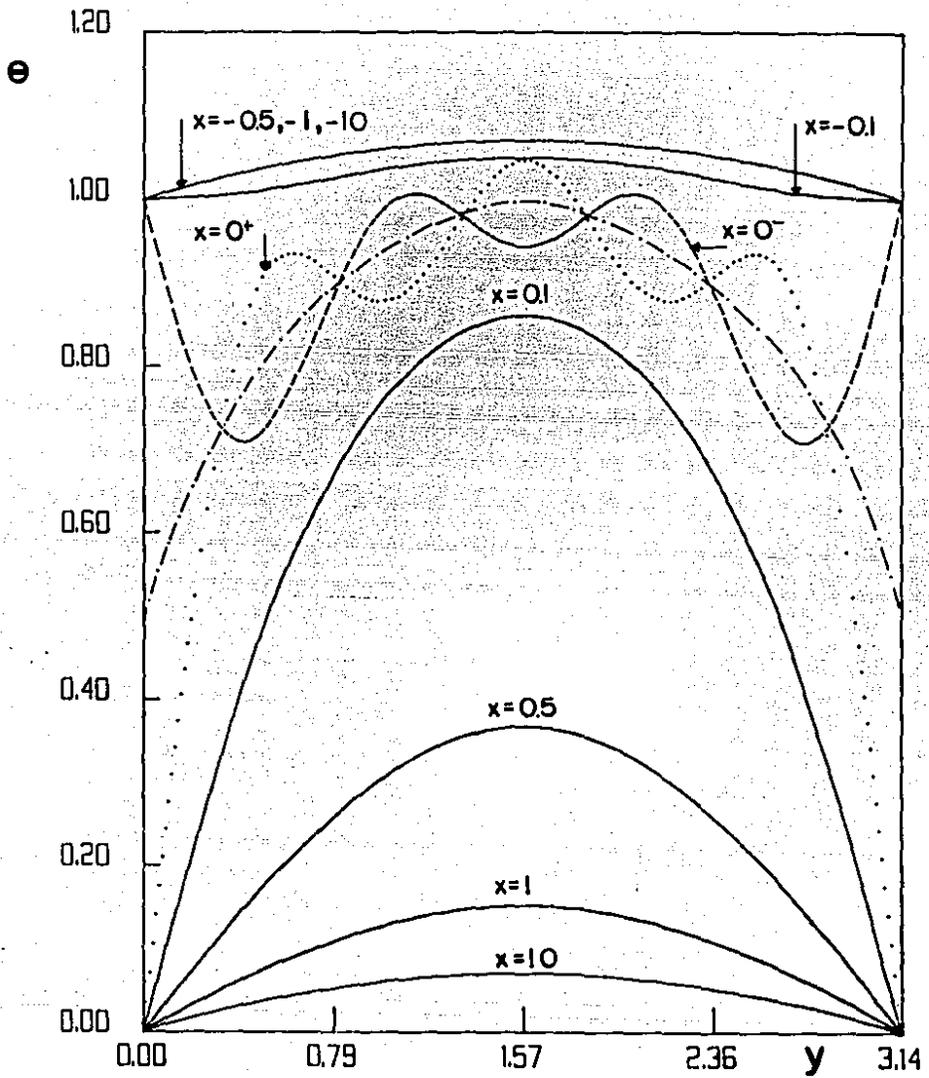


Figura 3.8: Perfil de temperatura con tres términos del desarrollo de Fourier. $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = \infty$, $K = 0.5$.

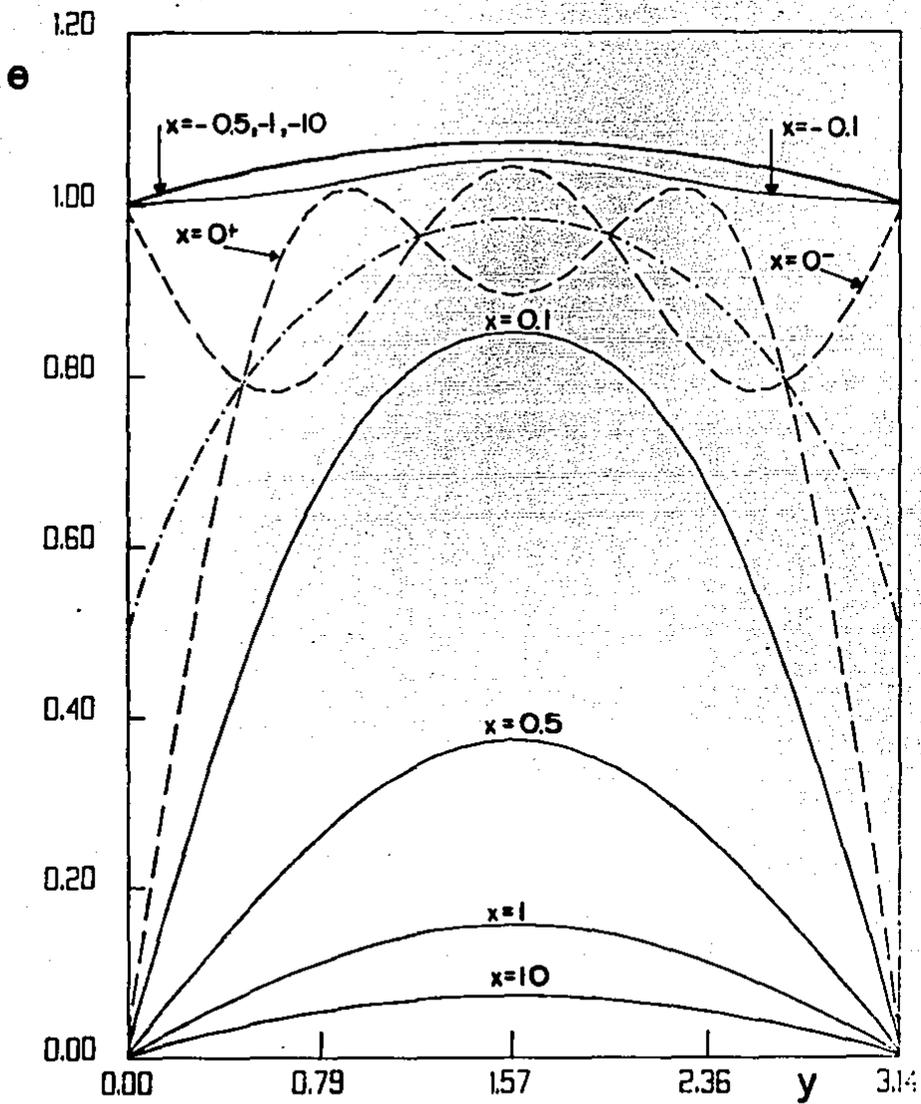


Figura 3.9: Perfil de temperatura con dos términos del desarrollo de Fourier.
 $M = 3, Pe = 3, Bi = \infty, K = 0.5$

($K = 0.5$) y circuito abierto ($K = 1$).

El primer grupo de gráficas lo constituyen las figuras (3.10), (3.11) y (3.12) endonde los números de Hartmann, Péclet y Biot se mantienen iguales a 3 mientras se explora la influencia del factor de carga, que toma valores de 0.5, 0 y 1 respectivamente. En este análisis se ha supuesto que la temperatura ambiente en la región 1 es mayor que la de la región 2 siendo esta elección arbitraria.

El efecto concreto de la disminución del factor de carga es aumentar la disipación interna y en consecuencia elevar la temperatura del fluido. Este aumento es mucho mayor en $x = \pm\infty$, donde al pasar de $K = 0.5$ a $K = 0$ hubo un incremento hasta del 200 % en la temperatura del fluido, mientras que en las regiones cercanas al punto $x = 0$ el mismo cambio de condiciones dio lugar a un aumento máximo en la temperatura cercano al 10 %. En las figuras (3.10-3.12) la concavidad de los perfiles de temperatura es la misma en ambas regiones; esto indica que el calor generado por disipación interna fluye hacia el exterior a través de las fronteras. Debe notarse sin embargo que otra parte del calor generado es utilizada para elevar la temperatura del fluido en el centro del canal. Los gradientes de temperatura en la pared son mayores en el caso de la fig. (3.11) donde $K = 0$, que en las figs. (3.10) y (3.12) donde el factor de carga toma valores de 0.5 y 1 respectivamente. Esto indica que al aumentar la disipación interna se incrementa también la tasa de disipación de calor por las paredes para un número de Biot dado.

Al igual que en las regiones muy alejadas de la discontinuidad (Sección 3.5.1), el efecto de un número de Biot finito se manifiesta primordialmente en un aumento generalizado de la temperatura del fluido tanto en las paredes como en el núcleo del flujo. Esto se observa claramente al comparar las figs. (3.10-3.12) con la fig. (3.9). Lo anterior es consecuencia de la disminución del flujo de calor a través de las fronteras respecto al caso $Bi = \infty$.

En las tres figuras mencionadas los perfiles correspondientes a $x = -10, -1, -.05$ se sobreponen, lo que indica que en esa región la temperatura del fluido no se modifica debido al cambio abrupto en la temperatura ambiente en la región $x > 0$ y cede calor hacia el exterior a una tasa constante. En el punto $x = -0.1$ el fluido disminuye su temperatura al ceder calor hacia el exterior a una tasa mayor que la anterior, o bien cediendo calor hacia la región más fría por el centro del flujo dependiendo del número de Péclet. Este fenómeno muestra el carácter elíptico de la ecuación de transferencia de calor, que se manifiesta físicamente en el hecho de que la temperatura en la región 1 se ve afectada por las condiciones en la región 2 a pesar de que el fluido se desplaza de la región 1 a la 2. Esto se debe a que el calor se difunde axialmente en la dirección positiva y negativa.

Cuando $Pe = \infty$ el problema se vuelve parabólico y los elementos diagonales del determinante (3.60) en vez de ser cuadráticos son lineales en ξ_j de modo que el polinomio característico tendrá únicamente un número infinito

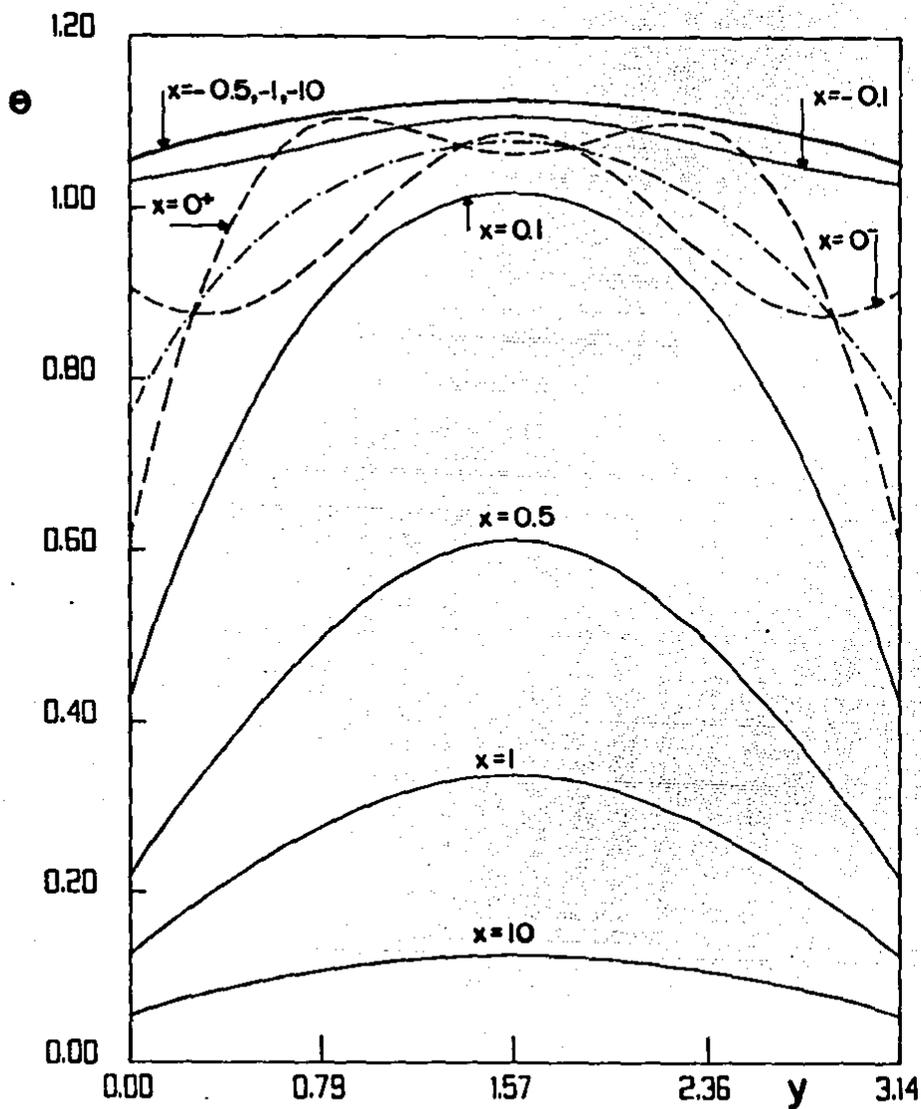


Figura 3.10: Perfil de temperatura para diversos puntos de la coordenada axial. $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

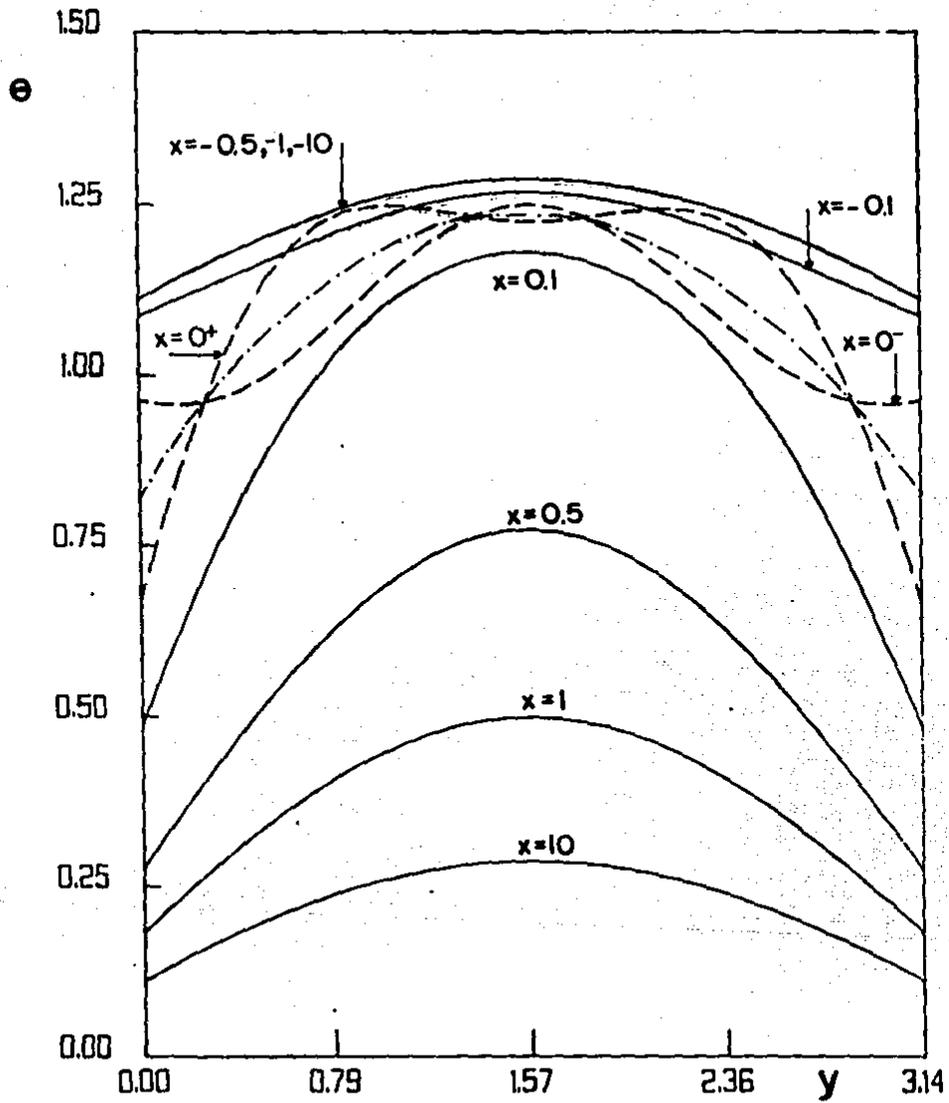


Figura 3.11: Perfil de temperatura para diversos puntos de la coordenada axial. $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0$

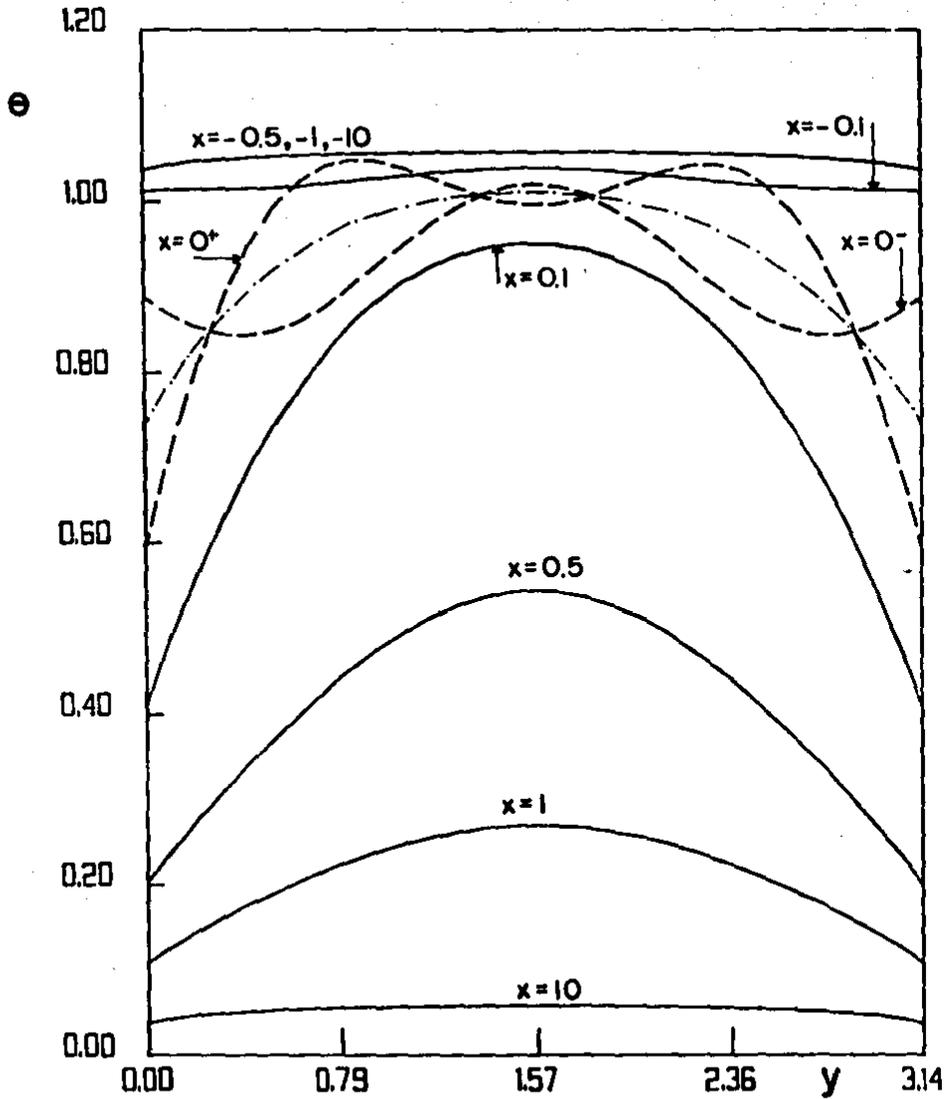


Figura 3.12: Perfil de temperatura para diversos puntos de la coordenada axial. $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 1$

de raíces negativas válidas para la región $x > 0$. En la práctica cuando se considera el determinante de un cierto grado N las raíces positivas toman valores muy grandes tendientes a infinito. Esto excluye la posibilidad de tener difusión de calor axial en la región $x < 0$. De hecho la distribución de temperaturas en la región $x < 0$ es independiente de x en tal región. Es importante notar que hacer $Pe = \infty$ podría convertir el problema en un problema singular, ya que el factor $1/Pe$ multiplica al término que contiene la derivada de orden mayor en la ecuación (3.47); sin embargo en los resultados se encontró un comportamiento uniforme en la solución conforme el número de Péclet aumenta. Recordando que el número de Péclet está dado por

$$Pe = RePr \quad (3.72)$$

donde Re es el número de Reynolds y Pr es el número de Prandtl, el despreciar la difusión axial será una buena aproximación para fluidos con un número de Prandtl grande o bien, flujos con números de Reynolds suficientemente grandes. En esta aproximación la distribución de temperaturas en la región $x < 0$ es

$$\Theta_1 = \frac{Q}{A^2} F(y, M, Bi, K) + 1, \quad (3.73)$$

mientras que para la región $x > 0$ se tiene

$$\Theta_2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{k_2}^{(q)} \exp(\xi_2^{(q)} x) W_k(y) + \frac{Q}{A^2} F(y, M, Bi, K). \quad (3.74)$$

Gráficamente este límite se muestra en la fig.(3.13) endonde se observa el perfil de temperaturas como función de la coordenada transversal para un número de Péclet igual a 10. manteniendo los valores $M = 3$, $Bi = 3$ y $K = 0.5$.

Aquí los perfiles correspondientes a las posiciones axiales $x = -10, -1, -0.5$ y -0.1 se sobreponen indicando que la temperatura del fluido se modifica hasta que pasa por la discontinuidad; su temperatura entonces empieza a disminuir conforme se aleja de la misma. Este efecto se observa claramente en la fig.(3.14) donde se muestra el perfil de temperatura en el centro del canal como función de la coordenada axial para diversos números de Péclet. Conforme Péclet disminuye, el efecto difusivo se hace más notorio al descender la temperatura del fluido mucho antes de llegar a la discontinuidad.

La conducción de calor axial se vuelve despreciable para grandes valores del número de Péclet y por ende las soluciones que se obtienen excluyendo dicho efecto pueden considerarse válidas para $Pe > 10$. Sin embargo el despreciar la conducción de calor axial puede introducir un error considerable

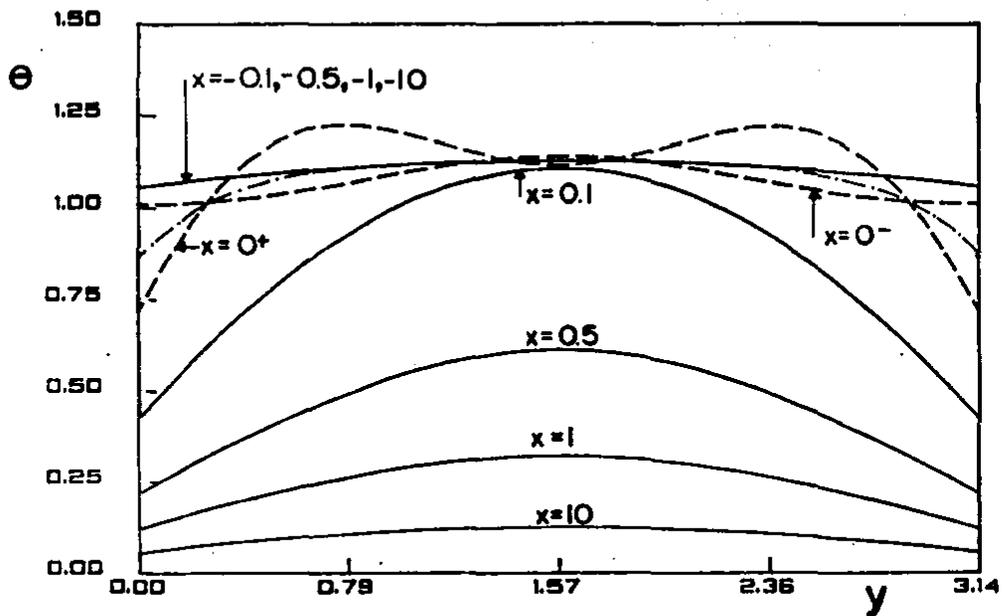


Figura 3.13: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 3$, $Pe = 10$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

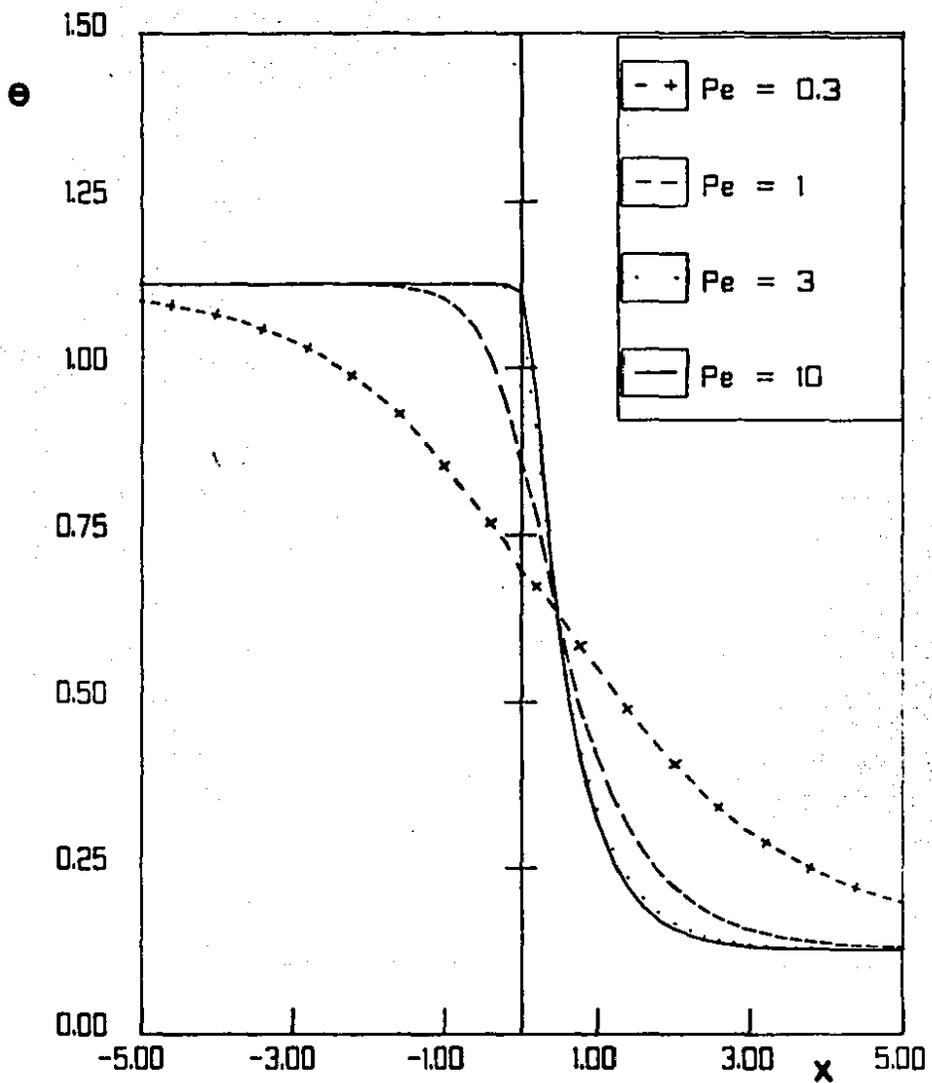


Figura 3.14: Perfil de temperatura en el centro del canal para diversos números de Péclet. $M = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

en la solución para números de Péclet pequeños en regiones cercanas a la discontinuidad que pueden considerarse como regiones de entrada térmica.

En la fig.(3.13) se observa que la concavidad de todas las curvas es la misma; entonces al igual que en las figuras (3.10-3.12) parte del calor se expulsa a través de las fronteras. En ningún punto de las fronteras se absorbe calor del exterior. En la fig.(3.15) se grafica el flujo de calor en la pared como función de la coordenada axial para diversos números de Biot y un número de Péclet igual a 100.

En la región $x < 0$ el fluido cede calor al exterior a una tasa constante hasta llegar a la discontinuidad donde la tasa de expulsión de calor aumenta abruptamente para después disminuir suavemente conforme el fluido se aleja del punto $x = 0$. En las regiones aledañas a este punto las tasas de expulsión mayores corresponden a números de Biot grandes (10 y 100) que se acercan más a las regiones de frontera de primer tipo en tanto que para casos con números de Biot pequeños dichas tasas de expulsión son menores, manifestándose un aislamiento térmico más eficiente. Al igual que la temperatura, el flujo de calor es simétrico respecto al plano medio del canal.

Para casos donde el número de Péclet es pequeño, la difusión de calor axial se vuelve más importante y se presenta un fenómeno interesante en la transferencia de calor en el fluido y a través de las fronteras. En la fig.(3.16) se ilustra el perfil de temperatura como función de la coordenada transversal para un número de Péclet igual a 1 y $M = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$.

En este caso los perfiles correspondientes a las distintas posiciones axiales en la región $x < 0$ no se sobreponen indicando la influencia de la región 2 sobre la 1 debida a la conducción axial; por otra parte la concavidad de la temperatura va cambiando al acercarse a la discontinuidad y por tanto el signo del gradiente de temperatura también cambia. Esto se observa un poco más claramente en la fig.(3.17) en donde el Péclet se mantiene igual a 1 mientras que los otros parámetros toman los valores $M = 10$, $Bi = 10$ y $K = 1$.

En estas dos últimas gráficas el perfil correspondiente a la posición $x = -0.1$ muestra que la convergencia de la solución para estos valores de los parámetros ya no es lo suficientemente buena en regiones muy cercanas a la discontinuidad. Cualitativamente lo que parece estar sucediendo es lo siguiente: Al aproximarse a la discontinuidad, el fluido cede calor por difusión por el centro del flujo, en un principio sin dejar de ceder calor por las paredes. Es decir, la presencia de la discontinuidad se hace patente primero en el centro que en las paredes dando lugar a que para una cierta posición axial el calor fluye por el centro y hacia afuera del sistema a través de las paredes. Posteriormente el gradiente de temperatura cambia de signo en una región cercana a la discontinuidad, donde el fluido absorbe calor del

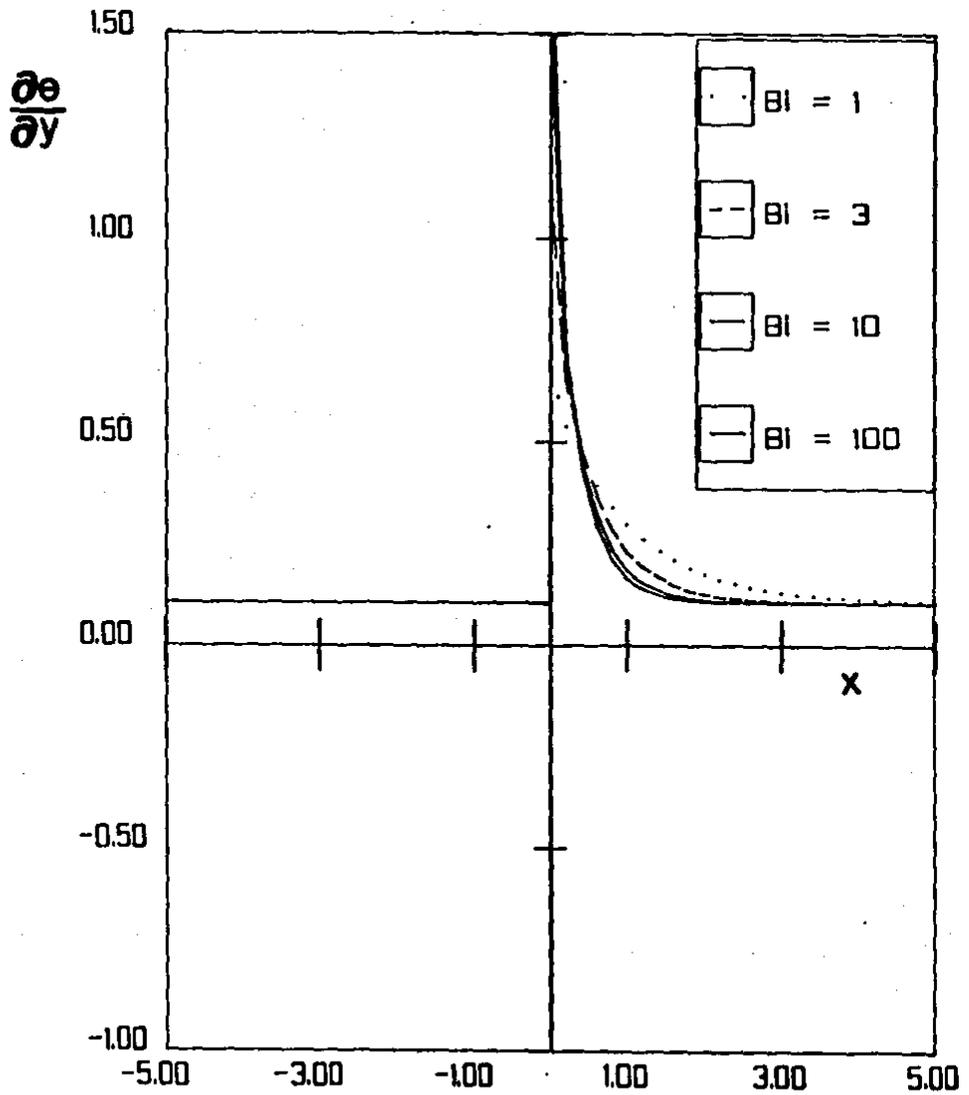


Figura 3.15: Flujo de calor en la pared para diversos números de Biot.
 $M = 3$, $Pe = 100$, $K = 0.5$

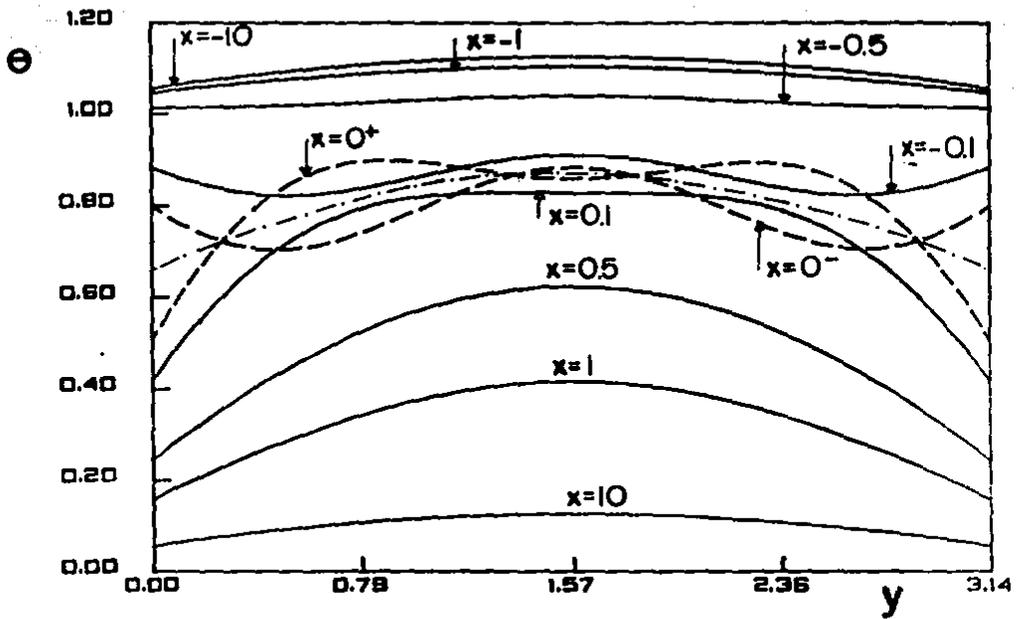


Figura 3.16: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 3$, $Pe = 1$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

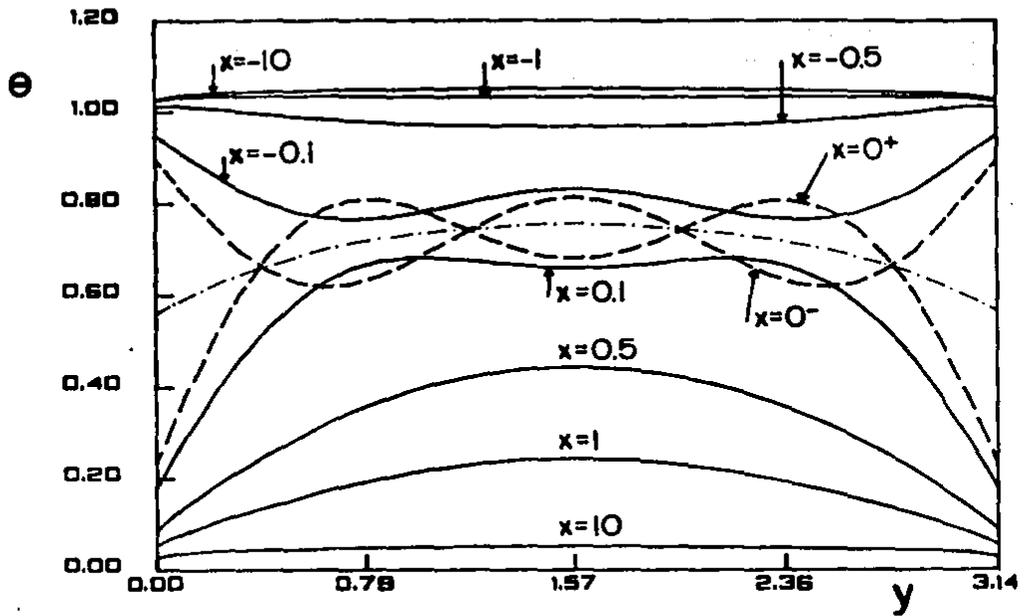


Figura 3.17: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 10$, $Pe = 1$, $Bi = 10$, $K = 1$

exterior para compensar el calor que está fluyendo por el centro hacia la región más fría. Al llegar a la discontinuidad el fluido deja de absorber calor del exterior y abruptamente lo expulsa a una tasa muy grande que, después del punto $x = 0$ va disminuyendo hasta tomar su valor asintótico en $x = \pm\infty$. Este fenómeno se observa claramente en las figuras (3.18), (3.19) y (3.20) donde se muestra el flujo de calor en la pared como función de la coordenada axial para diversos números de Biot y números de Péclet iguales a 30, 10 y 1 respectivamente. Obviamente la intensidad de los flujos de calor depende del número de Biot. Las asimetrías de las regiones $x < 0$ y $x > 0$ se deben a la dirección preferencial de la velocidad.

Las figuras (3.21-3.23) muestran el efecto del número de Hartmann en el perfil de temperatura para un número de Biot finito. La fig.(3.21) fue obtenida utilizando un Hartmann igual a 1 ($Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$) por lo que los resultados se acercan al problema meramente hidrodinámico. Al comparar este resultado con el obtenido cuando se eleva el número de Hartmann a 10 (fig.(3.22)) se observa que el efecto neto de este aumento en M es incrementar la temperatura general del fluido en cerca del 70 %. Los gradientes de temperatura, sin cambiar de signo, aumentan de magnitud. De hecho, la influencia del aplanamiento del perfil de velocidades en la transferencia de calor continúa al elevar M ya que los gradientes de velocidad se hacen más pronunciados aumentando entonces la disipación viscosa. Asimismo, como se explicó en la discusión de los resultados obtenidos para la región $x = \infty$, la disipación óhmica también aumenta con el número de Hartmann. Esto se corrobora en la fig.(3.23) donde se muestra el perfil de temperatura como función de la coordenada axial para diversos números de Hartmann.

Las figuras (3.24-3.27) junto con la fig.(3.10) ilustran el comportamiento de los perfiles de temperatura para diversos números de Biot finitos, manteniendo los números de Hartmann y Péclet iguales a 3 y un factor de carga de 0.5. Una comparación directa de las figuras (3.24), (3.10) y (3.25), endonde se ilustra en forma gráfica la temperatura del fluido como función de la coordenada transversal (y) para números de Biot 10, 3 y 1 respectivamente, muestra que el aumento generalizado de la temperatura del fluido ocasionado por la disminución de tal número se manifiesta más intensamente en las regiones cercanas a las fronteras que en el centro del flujo. Existe una tendencia al aplanamiento del perfil de temperaturas conforme disminuye Biot, lo que a su vez indica que se reducen los gradientes de temperatura y en consecuencia son menores los flujos de calor hacia el exterior. En el límite $Bi \rightarrow 0$ el flujo de calor es nulo y los perfiles de temperatura tienden a unirse en uno solo, independientemente de la posición axial y de los valores de los otros parámetros; la temperatura tenderá entonces a infinito debido a la presencia continua de la fuente de calor interna en el fluido.

La fig.(3.26) muestra el perfil de temperaturas en el centro del canal

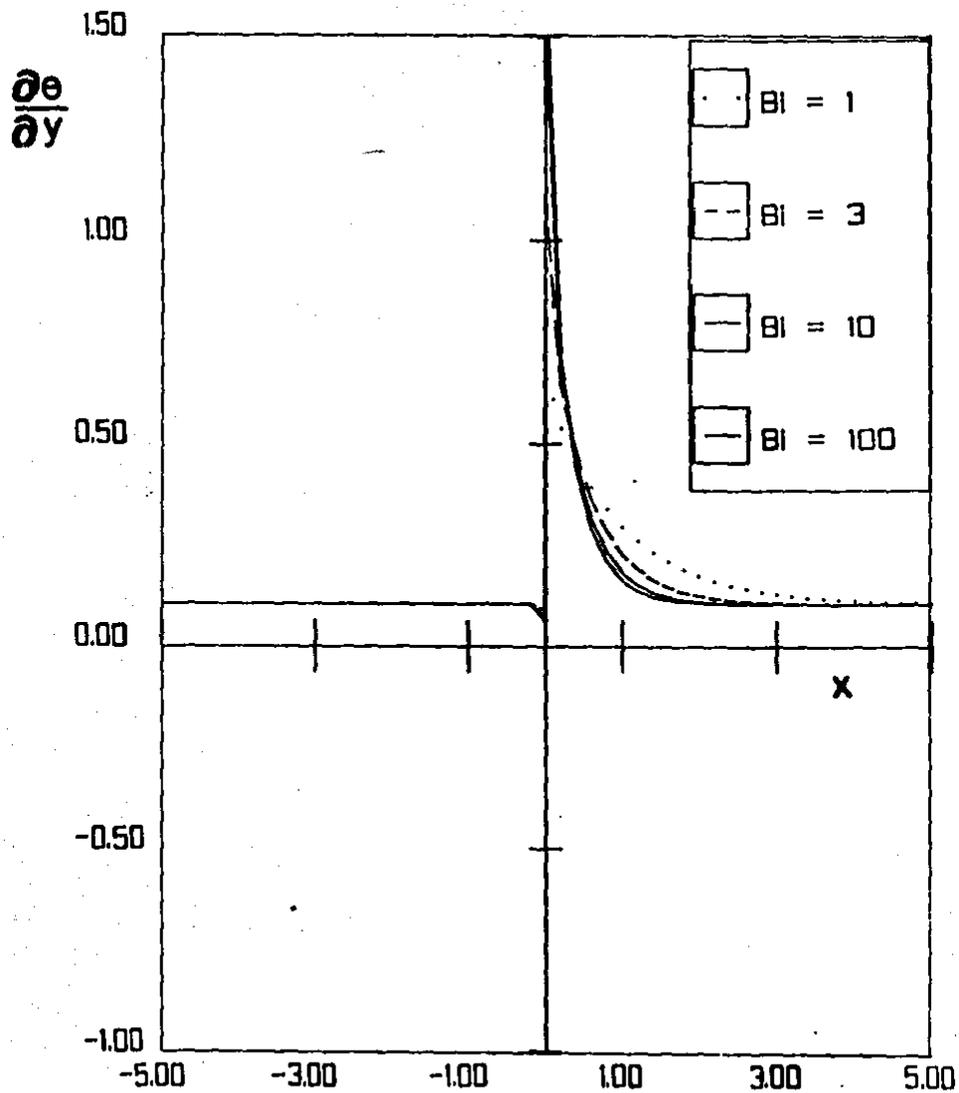


Figura 3.18: Flujo de calor en la pared para diversos números de Biot.
 $M = 3$, $Pe = 30$, $K = 0.5$

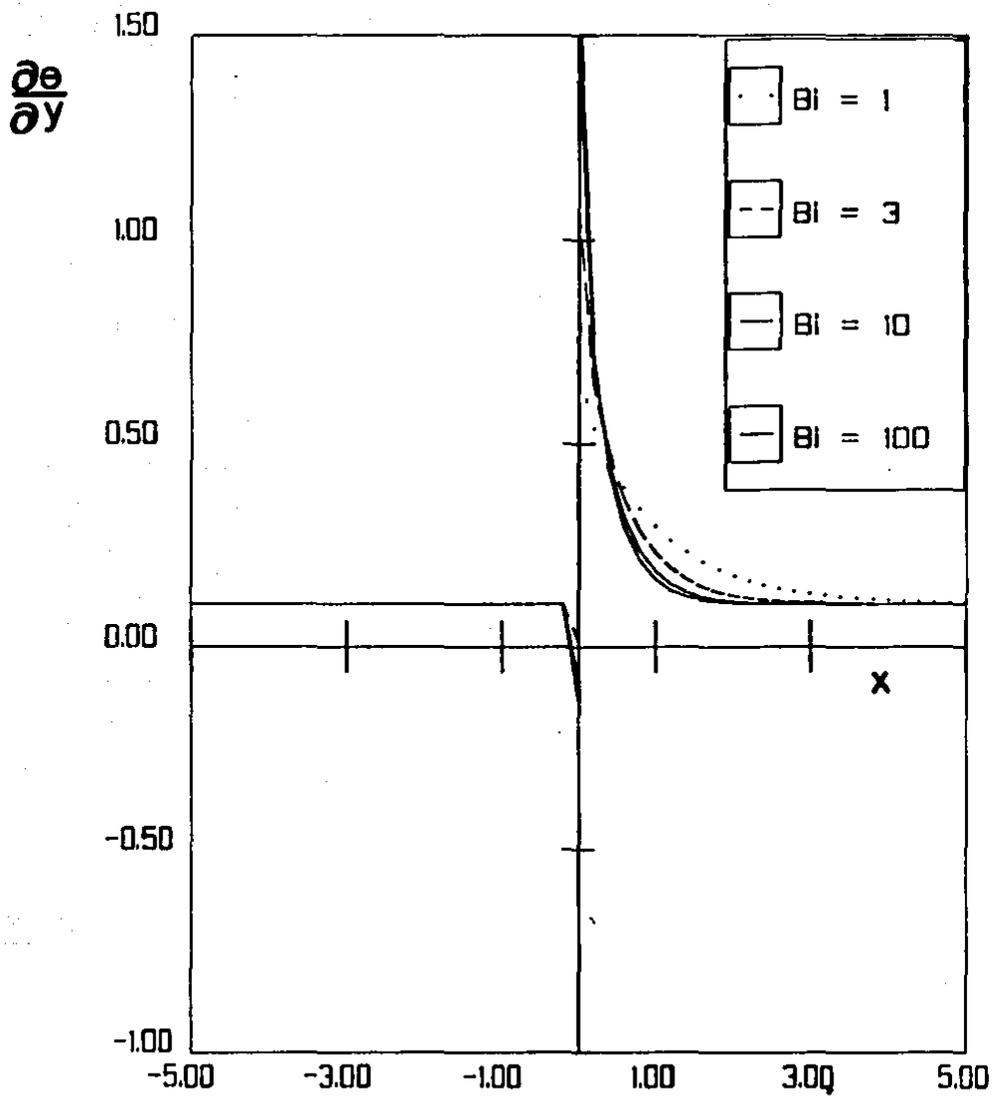


Figura 3.19: Flujo de calor en la pared para diversos números de Biot.
 $M = 3$, $Pe = 10$, $K = 0.5$

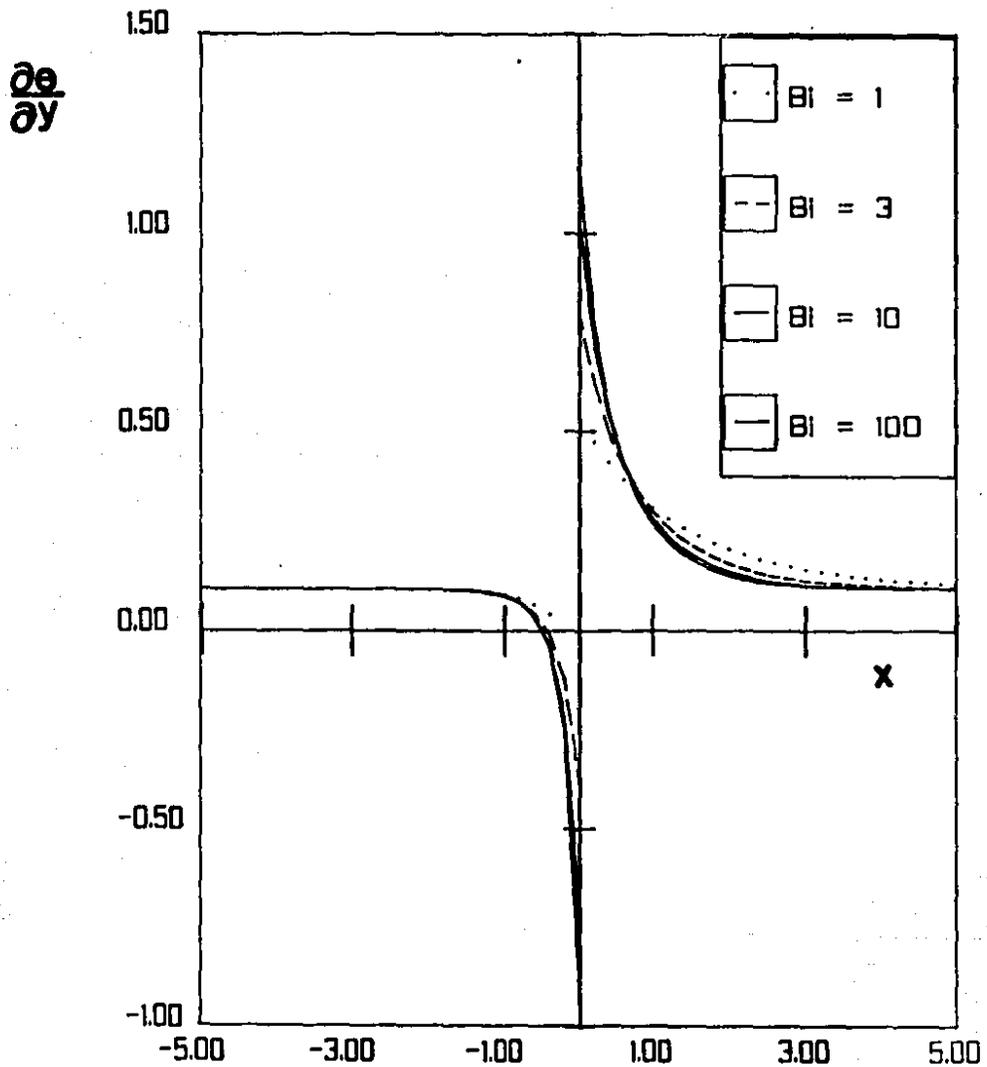


Figura 3.20: Flujo de calor en la pared para diversos números de Biot.
 $M = 3, Pe = 1, K = 0.5$

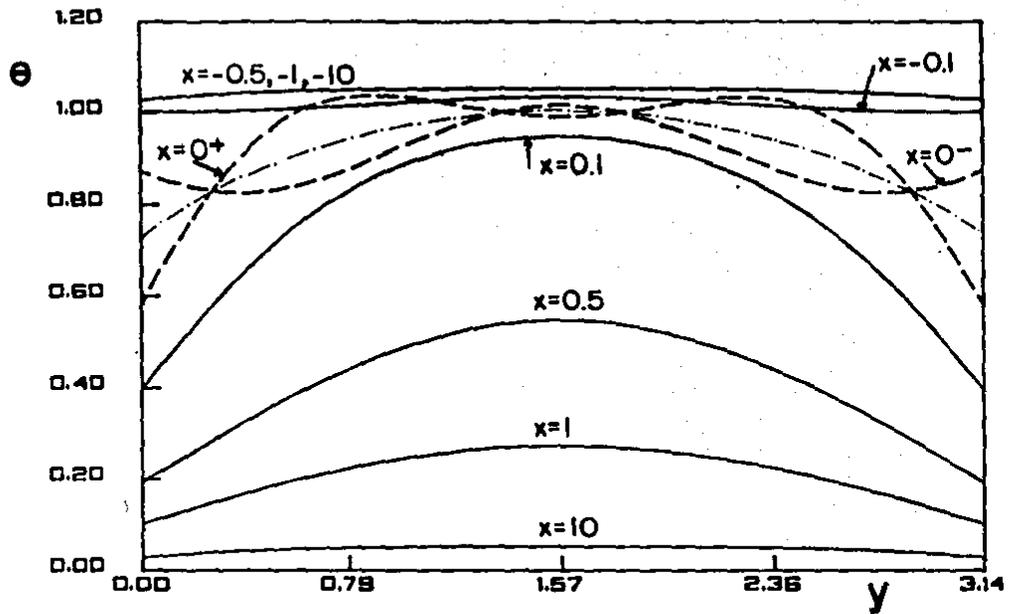


Figura 3.21: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 1$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

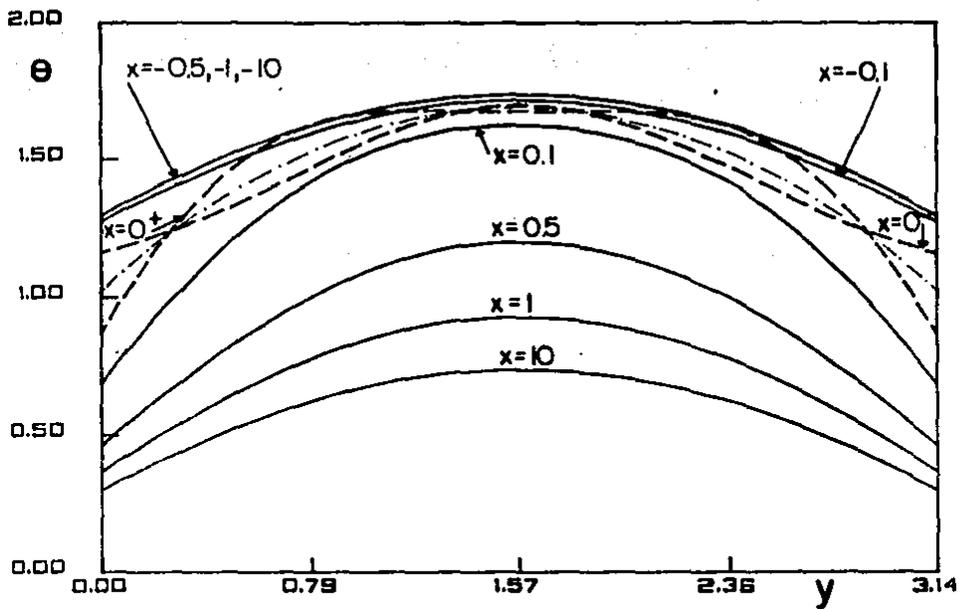


Figura 3.22: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 10$, $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

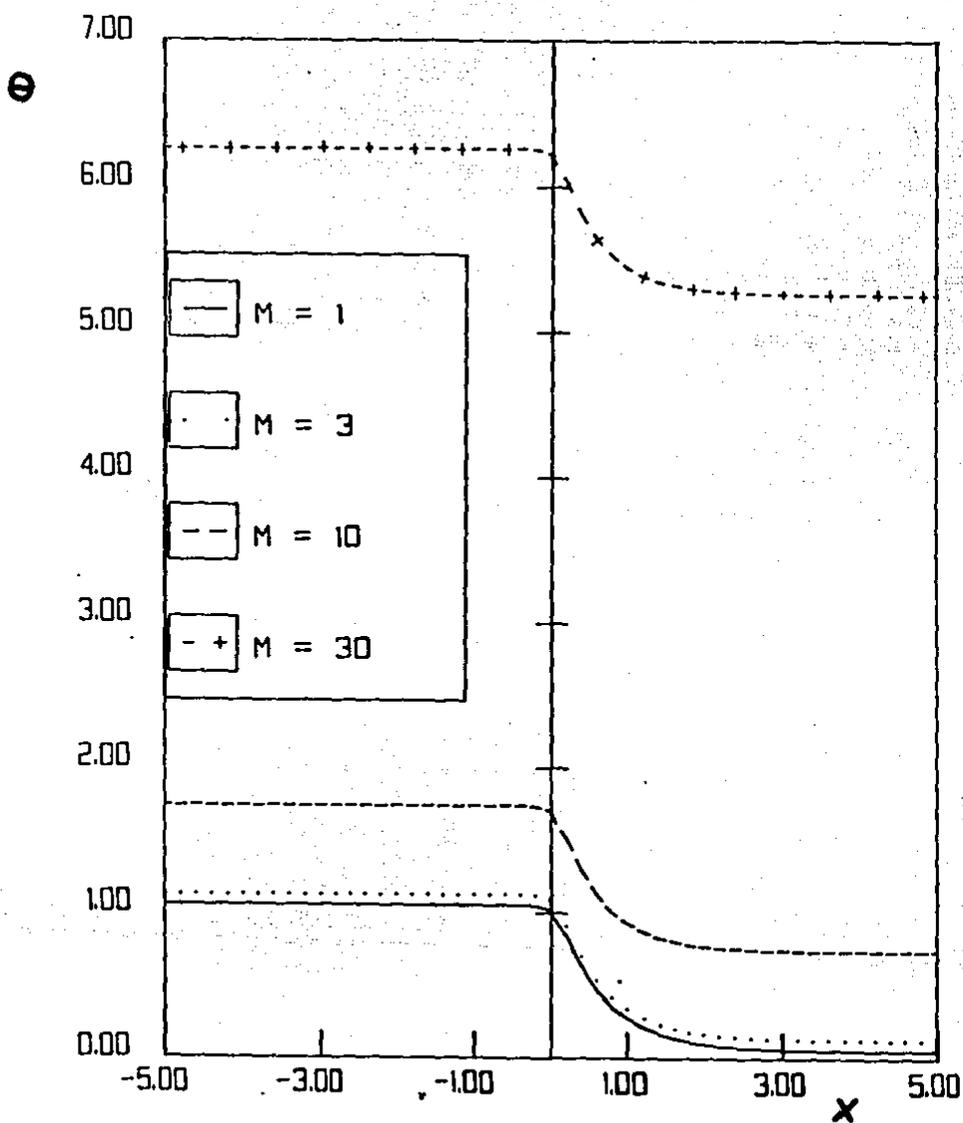


Figura 3.23: Perfil de temperatura para diversos números de Hartmann.
 $Pe = 3$, $Bi = 3$, $K = 0.5$

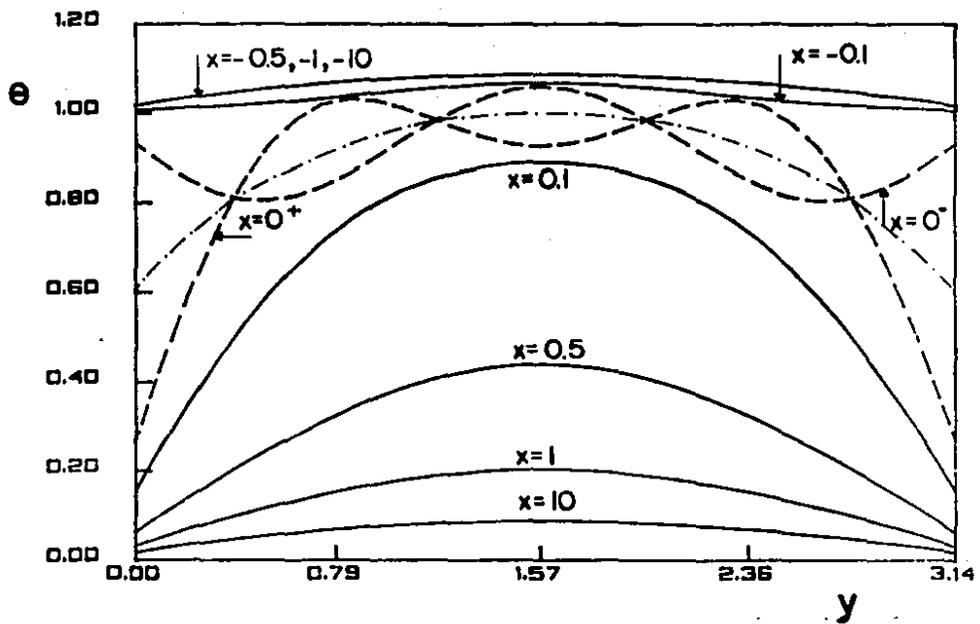


Figura 3.24: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x). $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 10$, $K = 0.5$

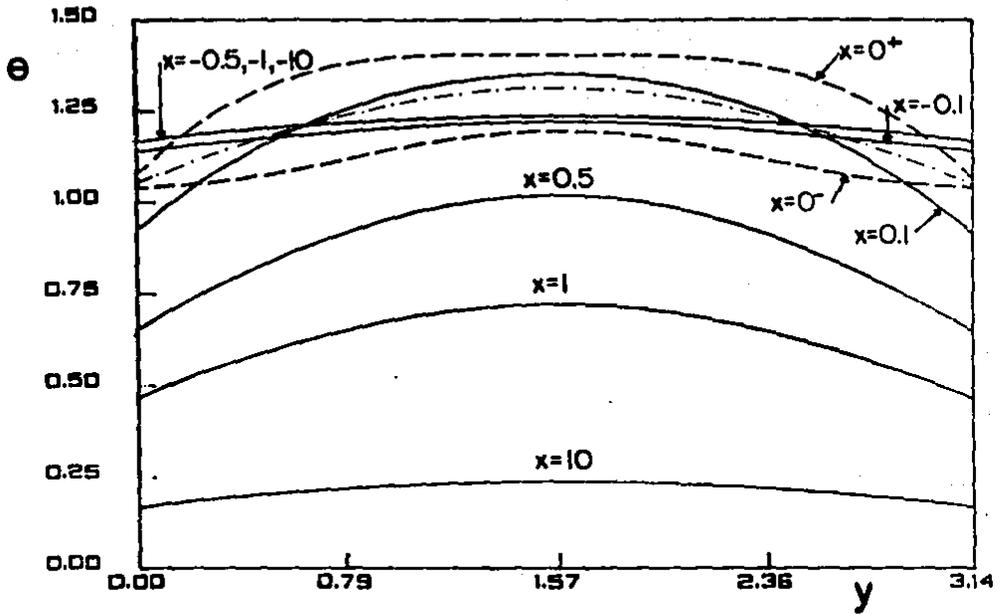


Figura 3.25: Perfil de temperatura para diferentes puntos de la coordenada axial (x), $M = 3$, $Pe = 3$, $Bi = 1$, $K = 0.5$

como función de la coordenada axial para diversos números de Biot, notándose nuevamente la tendencia al incremento de temperatura conforme disminuye Biot. Se observa también que la unión entre las regiones 1 y 2 no es suave, reflejándose el carácter aproximado de la solución obtenida con dos términos del desarrollo de Fourier que se manifiesta más intensamente en las vecindades del punto $x = 0$. La fig.(3.27) contiene los perfiles de temperatura en la pared como función de la coordenada axial. La curva correspondiente a $Bi = 100$ prácticamente coincide con el límite $Bi = \infty$ que caracteriza las condiciones de frontera de primer tipo. Con tales condiciones las temperaturas de las fronteras están fijas y en consecuencia el cambio de una región a otra se manifiesta como un escalón. Al disminuir Biot la temperatura de la pared aumenta en ambas regiones pero la transición de una región a otra se suaviza, ya que el mejor aislamiento térmico atenúa la influencia de la discontinuidad.

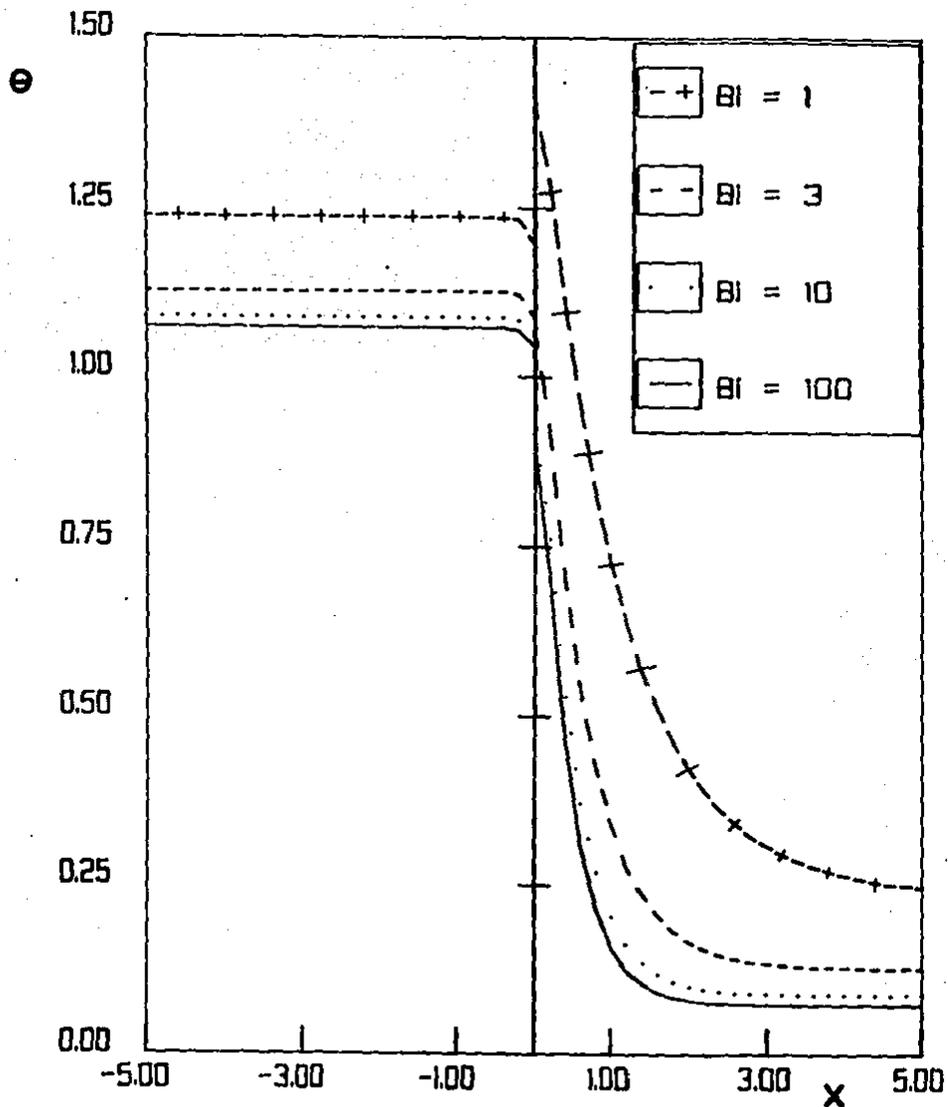


Figura 3.26: Perfil de temperatura en el centro del canal para diversos números de Biot. $M = 3$, $Pe = 3$, $K = 0.5$

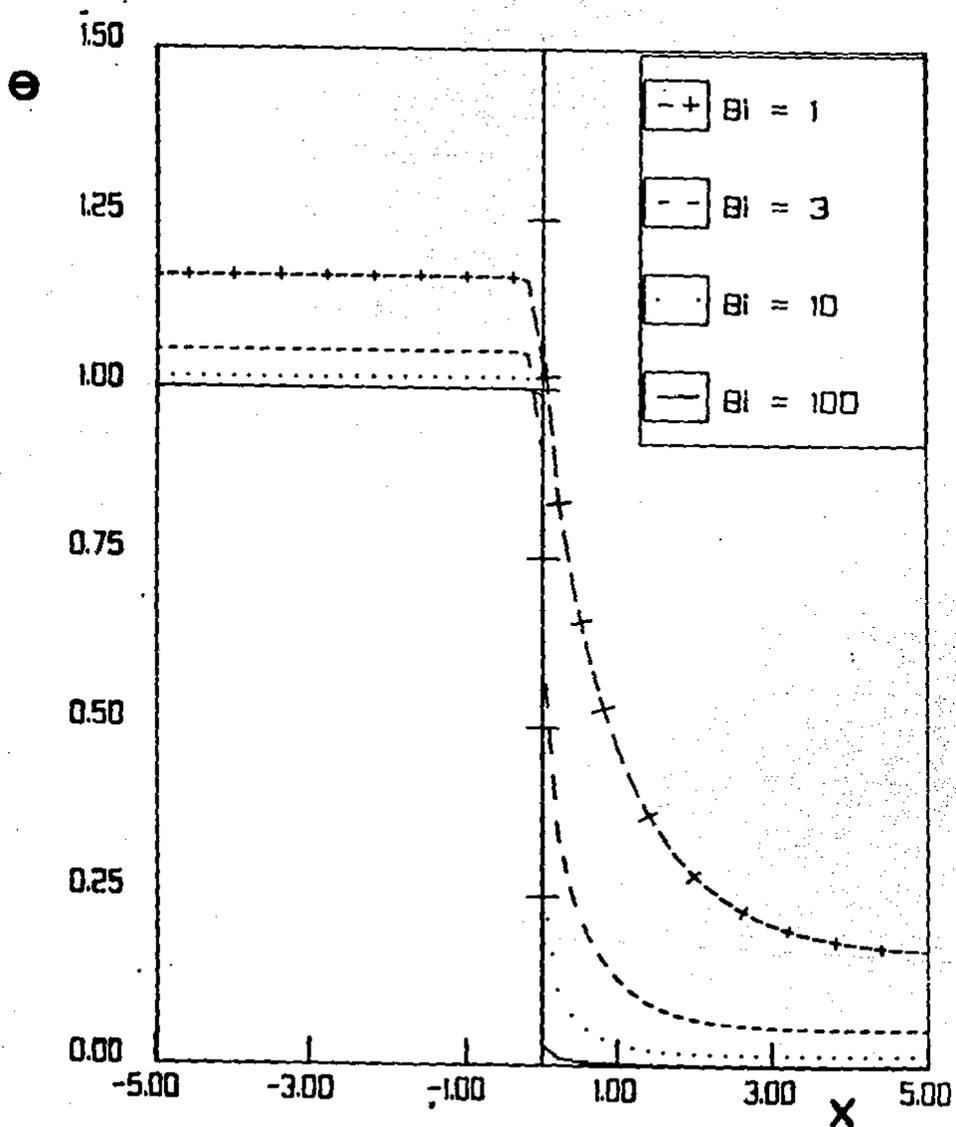


Figura 3.27: Perfil de temperatura en la pared para diversos números de Biot. $Pe = 3$, $M = 3$, $K = 0.5$

CONCLUSIONES

La aportación central de este trabajo es el análisis del proceso de transferencia de calor en un flujo laminar MHD considerando un coeficiente de transferencia de calor finito en las fronteras. A diferencia de las soluciones obtenidas con condiciones a la frontera de primer y segundo tipo, la solución que aquí se obtuvo permite una comprensión más realista de la transferencia de calor en las regiones cercanas a las fronteras ya que no se exige que las temperaturas de las paredes se mantengan fijas o que el flujo de calor a través de las mismas sea constante sino que el intercambio de calor con el ambiente se dé de acuerdo a una relación empírica del tipo de la ley de enfriamiento de Newton.

La solución encontrada es fuertemente dependiente del coeficiente de transferencia de calor y permite recuperar como casos límite las soluciones para temperaturas constantes en la pared ($h = \infty$) o bien para fronteras térmicamente aislantes ($h = 0$). La convergencia de la solución es muy rápida, lo que permite truncar el desarrollo en serie a un orden muy bajo. Sin embargo en regiones muy cercanas a la discontinuidad, la convergencia deja de ser aceptable por lo que un análisis detallado de tal región requiere considerar un mayor número de términos del desarrollo en serie.

El efecto combinado de un número de Biot finito con la difusión de calor en la dirección axial llevó a la conclusión de que el efecto difusivo es despreciable para números de Péclet grandes, que en la práctica es el caso más común; sin embargo despreciar este efecto para números de Péclet pequeños en regiones cercanas a la discontinuidad puede conducir a errores considerables.

Los efectos disipativos ocasionados por la interacción directa del campo magnético con el fluido en movimiento, que se manifiestan en el incremento de los gradientes de velocidad en las regiones cercanas a las paredes y por el calentamiento de Joule producido por las corrientes inducidas en el medio, fueron caracterizados observando la influencia del número de Hartmann y el factor de carga en el perfil de temperaturas.

Ya que el trabajo ofrece una descripción detallada de la física del proceso de transferencia de calor en canales MHD, los resultados globales tienen su aplicación más inmediata en el diseño de máquinas de inducción y en particular en los sistemas de conversión de energía térmica en energía eléctrica (generadores MHD).

REFERENCIAS

1. Hughes, W.F. y Young, F.J. "The Electromagnetodynamics of Fluids." John Wiley (1966)
2. Dragos, L. "Magnetofluid Dynamics" Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, England (1975)
3. Jackson, J.D. "Classical Electrodynamics" 2nd. Ed., John Wiley (1975)
4. Barberán, J. "Continuum Electromagnetic Fluid Dynamics" Apuntes no publicados.
5. Currie, I.G. "Fundamental Mechanics of Fluids" McGraw-Hill (1974)
6. Schmidt, G. "Physics of High Temperature Plasmas" 2nd. Ed. Academic Press (1979)
7. Shercliff, J.A. "A Textbook of Magnetohydrodynamics" Pergamon Press (1965)
8. Blum, E.Ya. "Heat and Mass Transfer in a Magnetic Field" Magnetohydrodynamics. vol.11, No.1, p.27 (1975)
9. Branover, H. "Magnetohydrodynamic Systems for Converting Solar Energy into Electricity" Chemica Scripta. vol.19, No.5 (1982)
10. De Groot, S.R. y Mazur, P. "Non-Equilibrium Thermodynamics" North-Holland Publishing Co.(1969)
11. Landau, L.D., Lifshitz, E.M. y Pitaevskii, M. "Electrodynamics of Continuous Media" 2nd Ed., Pergamon Press (1984)
12. Hartmann, J. "Hg-Dynamics I" Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Medd., vol.15, No.6 (1937)
13. Hartmann, J. y Lazarus, F. "Part II-Experimental Investigations on the Flow of Mercury in a Homogeneous Magnetic Field" Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-Fys. Medd., vol.15, No.7 (1937)
14. Branover, H. "Magnetohydrodynamic Flow in Ducts" John Wiley (1978)
15. Hunt, J.R.C. y Stewartson, K. "Magnetohydrodynamic Flow in Rectangular Ducts, I" J.Fluid Mech.. vol.23, p.563 (1965)
16. Petrick, M. y Lee, K.Y. "Performance Characteristics of a Liquid-Metal MHD Generator" Proc. of Symp. on MHD Electrical Power Generation, vol.2 (1964)

17. Apukhovskii, A.I. "Equivalent Circuit of an MHD Generator" *Magneto-hydrodynamics*, vol.12, No.2. p.239 (1976)
18. Javeri, V. "Magnetohydrodynamic Channel Flow Heat Transfer for Temperature Boundary Condition of the Third Kind" *Int.J.Heat Mass Transfer*, vol.20, p.543 (1977)
19. Yang, W. y Ou, J. "Magnetohydrodynamic Channel Flow of Suspension" *Japanese J. of Appl. Phys.*, vol.9, No.8, p.992 (1970)
20. Sundaram, K.M. y Nath, G. "Flow and Heat Transfer for a Power-Law Electrically Conducting Fluid Flowing between Parallel Plates under Transverse Magnetic Field with Viscous Dissipation" *Proc. Indian Acad. Sci.*, vol.83A, No.5, p.188 (1976)
21. Sutton, G.W. y Sherman, A. "Engineering Magnetohydrodynamics" Mc Graw-Hill (1965)
22. Cramer, K.R. y Pai, S. "Magneto-fluid Dynamics for Engineers and Applied Physicists" Mc Graw-Hill (1966)
23. Siegel, R. "Effect of Magnetic Field on Forced Convection Heat Transfer in a Parallel Plate Channel" *J. Appl. Mech.*, vol.25, p.415 (1958)
24. Alpher, R.A. "Heat Transfer in MHD Flow between Parallel Plates" *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.3, p.108 (1961)
25. Snyder, W.T. "The Influence of Wall Conductance on MHD Channel-Flow Heat Transfer" *ASME Series C, J.Heat Transfer*, vol.86. p.552 (1964)
26. Michiyoshi, I. y Matsumoto, R. "Heat Transfer by Hartmann's Flow in Thermal Entrance Region" *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.7, p.101 (1964)
27. Hwang, Ch., Knieper, P.J. y Fan, L.T. "Heat Transfer to MHD Flow in the Thermal Entrance Region of a Flat Duct" *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.9, p.773 (1966)
28. Erickson, L.E., Wang, C.L. et al. "Heat Transfer to Magnetohydrodynamic Flow in a Flat Duct" *Z. Angew. Math. Phys.*, vol.15, p.408 (1964)
29. Fan, L.T., Hwang, C.L. et al. "Heat Transfer on Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Flat Duct" *Z. Angew. Math. Phys.*, vol.18, p.826 (1967)

30. Shohet, J.L., Osterle, J.F. y Young, F.J. "Velocity and Temperature Profiles for Magnetohydrodynamic Flow in the Entrance Region of a Plane Channel" *Phys. Fluids*, vol.5, No.5, p.545 (1962)
31. Viskanta, R. "Effect of Transverse Magnetic Field on Heat Transfer to an Electrically Conducting and Thermal Radiating Fluid Flowing in a Parallel Plate Channel" *Z. Angew. Math. Phys.*, vol.14, p.353 (1963)
32. Back, L.H. "Laminar Heat Transfer in Electrically Conducting Fluids Flowing in Parallel Plate Channels" *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.11, p.1621 (1968)
33. Le Croy, R.C. y Eraslan, A.H. "The Solution of Temperature Development in the Entrance Region of an MHD Channel by the B.G. Galerkin Method" *ASME J. Heat Transfer*, vol.91, p.212 (1969)
34. Wu, R.S. y Cheng, K.C. "Thermal Entrance Region Heat Transfer for MHD Laminar Flow in Parallel-Plate Channels with Unequal Wall Temperatures" *Wärme und Stoffübertragung*, vol.9, p.273 (1976)
35. Eraslan, A.H. y Eraslan, N.F. "Heat Transfer in Magnetohydrodynamic Channel Flow" *Phys. Fluids*, vol.12, No.1 (1969)
36. Bath, A.N. y Mittal, M.L. "Forced Convective Heat Transfer in a MHD Channel with Hall and Ion Slip Currents" *Appl. Sci. Res.*, vol.35, p.251 (1979)
37. Bath, A.N. y Mittal, M.L. "Heat Transfer in a MHD Channel with Uniform Wall Heat flux-Effects of Hall and Ion Slip Currents" *Int.J. Heat Mass Transfer*, vol.23, p.919 (1980)
38. Nigam, S.D. y Singh, S.N. "Heat Transfer by Laminar Flow between Parallel Plates under Action of Transverse Magnetic Field" *Quart.J. Mech. Appl. Math.*, vol.13, p.85 (1960)
39. Jain, M.K. y Srinivasan, J. "Hydromagnetic Heat Transfer in the Thermal Entrance Region of a Channel with Electrically Conducting Walls" *AIAA Journal*, vol.2, No.11, p.1886 (1964)
40. Chang, Ch. y Yen, J. "Magnetohydrodynamic Channel Flow as Influenced by Wall Conductance" *Z. Angew. Math. Phys.*, vol.13, p.266 (1962)
41. Singh, B. y Lal, J. "Temperature Distribution for MHD Flow between Coaxial Cylinders with Discontinuity in Wall Temperatures" *Appl. Sci. Res.*, vol.35, p.67 (1979)

42. Singh, B. y Lal, J. "Heat Transfer for MHD Flow through a Rectangular Pipe with Discontinuity in Wall Temperatures" Int.J. Heat Mass Transfer, vol.25, p.1523 (1982)
43. Shercliff, J.A. "Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields" Proc. Cambridge Phil. Soc., vol.49, p.136 (1953)
44. Dennis, S.C.R. y Poots, G. "A Solution of the Heat Transfer Equation for Laminar Flow between Parallel Plates" Quart. Appl. Math., vol.14, No.3, p.231 (1956)
45. Dennis, S.C.R. "The Determination of Eigenfunctions of the Sturm-Liouville Equation" Quart.J. Mech. and Appl. Math., vol.9, p.371 (1956)
46. Singh, S.N. "The Determination of Eigenfunctions of a Certain Sturm-Liouville Equation and its Application to Problems of Heat Transfer" Appl. Sci. Res., vol.7, Section A, p.237 (1958)
47. Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. "Fluid Mechanics" Pergamon Press (1959)
48. Whittaker, E.T. y Watson, G.N. "Modern Analysis" Cambridge (1927)
49. Sparrow, E.M. y Siegel, R. "Application of Variational Methods to the Thermal Entrance Region of Ducts" Int.J. Heat Mass Transfer, vol.1, p.161 (1960)
50. Nag Fortran Library, Mark 10 (1983)