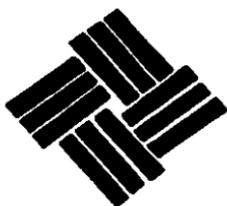


881201

2
23



UNIVERSIDAD ANAHUAC
ESCUELA DE ACTUARIA
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**ANALISIS DE LAS PERDIDAS Y GANANCIAS ACTUARIALES
EN EL FINANCIAMIENTO DE LOS PLANES DE PENSIONES**

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A
CARLOS AROCHA ROMERO



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

<u>Introducción</u>	1
<u>Capítulo I. Fundamentos.</u>	
1. Estado de pérdidas y ganancias	6
2. Balance actuarial	8
3. Valuación de pasivos contingentes	12
4. Valuación de activos tangibles	14
5. Significado de las hipótesis actuariales	18
<u>Capítulo II. Conceptos básicos de las matemáticas de pensiones.</u>	
1. Hipótesis actuariales	19
2. Funciones de supervivencia	28
3. Fórmulas de beneficios	31
4. Cuantificación de obligaciones y costos	34
5. Obligaciones y costos suplementarios	40
6. Pérdidas y ganancias actuariales	43
<u>Capítulo III. Métodos de financiamiento racional.</u>	
1. Clasificación de los métodos	47
2. Método de Crédito Unitario (Beneficio Acumulado)	49
3. Método de Edad de Ingreso (Beneficio Proyectado)	56
4. Método de Pasivo Inicial Congelado (Beneficio Proyectado)	60
<u>Capítulo IV. Derivación algebraica de las fórmulas.</u>	
1. Introducción	64
2. Postulados básicos	65
3. Desarrollo de las fórmulas	69

4. Extensión del análisis para otros métodos de financiamiento	81
--	----

Capítulo V. Sistemas de reconocimiento.

1. Introducción	92
2. Sistema de distribución	94
3. Sistema de promedios	102
4. Sistema de ajuste por servicios pasados	105

Capítulo VI. Caso práctico.

1. Bases de cálculo	111
2. Resultados de las valuaciones actuariales	115
3. Aplicación de las fórmulas de pérdidas y ganancias actuariales	121

<u>Conclusiones</u>	128
---------------------------	-----

<u>Apéndice I. Determinación de la tasa de rendimiento de un fondo</u>	131
--	-----

<u>Apéndice II. Programas de los sistemas de reconocimiento</u> ...	133
---	-----

<u>Apéndice III. Tasas y probabilidades de decrementos</u>	140
--	-----

<u>Apéndice IV. Tabla de Mortalidad GAM-1971</u>	144
--	-----

<u>Bibliografía</u>	146
---------------------------	-----

INTRODUCCION

La teoría de las pérdidas y ganancias actuariales en el contexto financiero de un plan de pensiones, es un tópico que generalmente no se contempla en el estudio de sus matemáticas relativas; este estudio suele orientarse a las características de los métodos de financiamiento racional. Esto obedece al hecho de que el análisis de la experiencia actuarial de un plan, envuelve complicados procedimientos algebraicos que se derivan en extensos cálculos numéricos.

El análisis de pérdidas y ganancias actuariales tradicionalmente era asociado con un estudio de difícil interpretación que resultaba de poco interés y para cuya elaboración era necesario el uso de la computadora. Al correr de los años, con el desarrollo e intensificación de la necesidad del establecimiento de planes de pensiones, se ha vuelto interesante la interrogante: ¿por qué cambia el nivel de aportaciones en el financiamiento de las pensiones? Esta cuestión no solo concierne a los actuarios, sino también a los contadores, auditores, abogados fiscales y líderes de empresa, entre otros. La forma más adecuada de responderla, proposición básica de la presente tesis, es mediante el análisis del estado de pérdidas y ganancias actuariales.

Por otra parte, con la evolución de la cibernética cada vez resulta más sencilla la elaboración de programas de cómpu

to auxiliares en el análisis de sensibilidad del nivel de -
aportaciones a los planes de financiamiento de pensiones. Es
to conlleva a la proposición de razones por las cuales la téc
nica de análisis de las pérdidas y ganancias actuariales debe
ser familiar al actuario dedicado a la rama de pensiones.

Estas son:

- i) proporciona una visión más genérica de las técnicas -
de valuación y por consiguiente aumenta la experien-
cia profesional del actuario,
- ii) establece el grado de veracidad de los resultados de
la valuación actuarial,
- iii) muestra de una manera intuitivamente clara el cambio
en la obligación acumulada (u obligación actuarial),
entre dos fechas consecutivas de valuación,
- iv) hace factible un chequeo periódico de las hipótesis
actuariales, siendo de gran importancia al proporcio-
nar elementos de juicio para la modificación de las
hipótesis. Esto es vital para la adecuación de apor-
taciones.

La definición conceptual de la pérdida y la ganancia ac-
tuarial no necesariamente es la fase más importante del análi-
sis. Los conceptos se transforman en técnicas y éstas, a su
vez, en resultados. Uno de los retos más interesantes en el
campo de la consultoría actuarial, es precisamente la inter--

pretación de los resultados obtenidos en una valuación actuarial.

La premisa de que "el nivel de aportaciones al financiamiento de los planes de pensiones involucra la estimación de diferentes eventos que ocurren en el largo plazo", se comenta sin desviarse mucho de la realidad; sin embargo, se está omitiendo un hecho muy importante: si las hipótesis se cumplen exactamente, el costo de las pensiones será preciso, no se darán pérdidas ni ganancias actuariales. Reconociendo año tras año las desviaciones por pérdidas y ganancias, se desarrolla la experiencia real de un año en particular y se ajustan las aportaciones para tomar en cuenta la discrepancia de esta experiencia, con su estimación respectiva.

Dado que los costos de las pensiones no se pueden conocer más que retrospectivamente, se deben estimar y ajustar con el componente de la desviación resultante.

El análisis de las pérdidas y ganancias actuariales es, pues, instructivo pero no siempre pleno de significado. El análisis bianual resulta de mayor utilidad, ya que permite tener una idea más amplia de la experiencia del plan. Si el número de años considerado para la elaboración del análisis es mayor se empieza a comprobar la veracidad de las hipótesis actuariales y a la vez, por la naturaleza de la prueba, el gra-

do de adecuación continua de éstas.

Desde el punto de vista estadístico la valuación actuarial debería efectuarse mediante la estimación de sus parámetros. Esta no es la práctica seguida, dado que el examen periódico de las hipótesis con el análisis de pérdidas y ganancias permite medir su efectividad, dando la pauta para su eventual adecuación.

Tomando en cuenta la importancia evidente que tiene el análisis de las pérdidas y ganancias actuariales en el financiamiento de los planes de pensiones, cabría esperar que hubiera un mayor interés por el estudio profundo de sus supuestos. Esta fue la consideración fundamental que me provocó la inquietud por el tema impulsándome a abordar el problema respecto al cual se elabora la investigación que estas páginas pretenden ilustrar.

Se habla primero de las definiciones conceptuales de los estados de pérdidas y ganancias, el balance actuarial y las valuaciones de pasivos contingentes y activos tangibles. Después se explican los principios de las matemáticas de pensiones. Posteriormente, se hace un análisis descriptivo de algunos métodos de financiamiento racional para entrar en la derivación algebraica detallada de las fórmulas de pérdidas y ganancias actuariales. Con esas bases se describe la fase ope-

rativa del reconocimiento de las pérdidas y ganancias a través de los sistemas de ajuste, y, finalmente, se ilustra la aplicación de la teoría expuesta con ejemplos numéricos. Se incluyen seis programas de cómputo en lenguaje FORTRAN/3000 que sirven como herramienta para el análisis.

Cabe advertir que el trabajo se dirige a los planes de pensiones por jubilación del tipo de "beneficio fijo"; es decir, los planes en donde la variable dependiente la constituyen los beneficios, y la variable independiente los costos derivados.

La práctica tiene sus fundamentos en la teoría y frecuentemente el puente entre ellas es el análisis de la pérdida y la ganancia actuarial.

C. A. R.

México, 1986

CAPITULO I

FUNDAMENTOS

1. ESTADO DE PERDIDAS Y GANANCIAS.

Un estado de pérdidas y ganancias es un documento contable que muestra detallada y ordenadamente, la manera en que se ha obtenido la utilidad o pérdida de un ejercicio determinado. Suele constituir un importante instrumento auxiliar para normar la política económica futura de una empresa.

El estado de pérdidas y ganancias -también conocido como "estado de resultados"-, se considera como una información financiera complementaria del balance general en virtud de que describe la manera en la que se ha obtenido la pérdida o la utilidad. El balance general, en cambio, tiene el inconveniente de mostrar únicamente la pérdida o la utilidad virtual del ejercicio.

Haciendo una analogía con la situación financiera de un plan de pensiones por jubilación, se tiene que el balance actuarial muestra el activo aumentado o disminuido por los resultados del año-plan. Se entiende que el incremento en el fondo o reserva está comprendido dentro de estos resultados. Adicionalmente, existe otro estado financiero: el estado de pérdi--

das y ganancias actuariales cuya finalidad consiste en el análisis de la utilidad y de la pérdida derivada por las diferencias entre la experiencia "real" y las hipótesis actuariales utilizadas en la valuación de los pasivos contingentes, que están directamente relacionados con los beneficios que concede el plan.

2. BALANCE ACTUARIAL.

La periodicidad con la que se practica la valuación actuarial de un plan de pensiones, es en la mayoría de los casos, - anual. Esto obedece al hecho de que en la valuación se emplea el principio actuarial de "grupo cerrado"; es decir, en cada - año se calcula el monto de los pasivos contingentes por concepto de costos de las pensiones correspondientes al grupo de em - pleados que se encuentren activos en la fecha del cálculo. Más aún, las técnicas de cálculo actuarial consideran probabilidad - des de permanencia de los empleados en la empresa, y las tablas que para el efecto se utilizan, solamente registran los decre - mentos de un grupo o ródix original. Los nuevos ingresantes se incluyen, por tanto, en valuaciones subsecuentes y en cada una de ellas se vuelve a considerar un grupo original.

El balance actuarial refleja los resultados de la valua - ción, pero no se considera como un instrumento de verificación de la obtención de estos resultados. En la figura 1 se mues - tran los conceptos que integran el balance actuarial, mismos - que a continuación se describen.

A. ACTIVO

- PATRIMONIO DEL PLAN O ACTIVO TANGIBLE.- Representa la re serva constituida a la fecha de cálculo mediante algún ing

trumento de financiamiento : contrato de fideicomiso, reser
va contable en libros, etc.

- **CONTRIBUCION ANUAL.**- Representa el costo o incremento al -
patrimonio del plan que corresponde al año de la valuación
y suele comprender varios conceptos : costo normal, costo
suplementario, etc .

- **VALOR PRESENTE DE FUTURAS CONTRIBUCIONES.**- Representa el -
monto total de aportaciones a la reserva, en el período com
prendido entre la fecha de cálculo y el monto previo a la -
jubilación del grupo de empleados incluidos en la valuación.

B. PASIVO

- **VALOR PRESENTE DE PENSIONES EN CURSO DE PAGO.**- Representa el
monto único actuarialmente equivalente a la serie de rentas
o pensiones mensuales, que los jubilados rentistas estén per
cibiendo en la fecha de cálculo .

- **VALOR PRESENTE DE OBLIGACIONES POR SERVICIOS PASADOS.**- Repre
senta el valor de los beneficios proyectados a favor de los
participantes del plan, a la fecha de cálculo, correspondien
tes a servicios prestados anteriormente a esta fecha .

- VALOR PRESENTE DE OBLIGACIONES POR SERVICIOS FUTUROS.- Repre
senta el valor de los beneficios proyectados a favor de los
participantes del plan, a la fecha de cálculo, correspondien
tes a servicios por generarse a partir de esta fecha .

El valor presente al que se hace referencia, debe entenderse en el contexto actuarial; es decir, los montos considerados a va
lor presente actuarial, involucran tanto la tasa de interés utilizada en la valuación, como la probabilidad de que dichos montos se hagan exigibles, atendiendo a las bases demográficas.

Los conceptos descritos anteriormente constituyen el balance en los casos de continuación del plan, sin embargo, en los casos de terminación del plan, debe formularse otro tipo de balance .

La razón es la de que el plan no otorgará ningún beneficio futuro ni se efectuarán más aportaciones al fondo; el activo está constituido por la reserva existente y el pasivo, por el va
lor presente de los beneficios adquiridos a la fecha de valua
ción .

BALANCE ACTUARIAL DEL PLAN DE FINANCIAMIENTO DE PENSIONES POR
 JUBILACION DE LA EMPRESA X BASADO EN LA VALUACION
 AL 1° DE ENERO DE 1986

ACTIVO

Patrimonio del Plan a la fecha de valuación:	55'220,860
Contribución anual:	
- Costo normal	15'271,726
- Costo suplementario	1'682,392
Valor Presente de Futuras Contribuciones:	<u>294'380,057</u>
SUMA EL ACTIVO	<u>366'555,035</u>

PASIVO

Valor presente de pensiones en curso de pago:	4'291,833
Valor presente de obligaciones por servicios pasados:	108'375,524
Valor presente de obligaciones por servicios futuros:	<u>253'887,678</u>
SUMA EL PASIVO	<u>366'555,035</u>

3. VALUACION DE PASIVOS CONTINGENTES

La obligación o el pasivo asociado con los beneficios futuros de los participantes de un plan de pensiones, se conoce como el valor presente de los beneficios proyectados. El concepto de beneficio proyectado comprende el beneficio generado o adquirido hasta la fecha de valuación y los beneficios que se espera el empleado acumule durante el resto de su permanencia en la empresa. Teóricamente si un plan de pensiones contara con un patrimonio equivalente al valor presente de los beneficios proyectados, habría fondos suficientes para cubrir todos los beneficios adquiridos y todos los beneficios que se llegaren a adquirir a favor de sus participantes, siempre que la experiencia real se ajustara a lo previsto mediante las hipótesis actuariales durante los años futuros y que no se enmendara el plan en lo referente a los beneficios por otorgar.

Lo anterior conduce a la idea de que el pasivo u obligación es de naturaleza contingente; es decir, su verificación está sujeta al cumplimiento de ciertos eventos probabilísticos, relacionados con la demografía y la economía. Estas condiciones se estiman mediante un modelo que incluye un conjunto de hipótesis actuariales.

La valuación actuarial es un proceso mediante el que se es-

tima el nivel óptimo de aportaciones a una reserva, para el financiamiento de las pensiones. Este proceso se deriva de la -
cuantificación de los pasivos contingentes. El costo de las -
pensiones no se conoce sino hasta el momento en que el pasivo -
derivado se hace exigible, es decir, al otorgamiento de los be-
neficios.

4. VALUACION DE ACTIVOS TANGIBLES.

El activo tangible o patrimonio de la reserva del plan de pensiones también es susceptible de ser valuado, pues suelen existir una gran diferencia entre el valor en libros y el de mercado de la cartera de inversión.

El exceso en la ganancia de interés del activo tangible es en épocas de economía inflacionaria el componente más consistente de la ganancia actuarial, y por consiguiente es muy importante toda vez que las ganancias actuariales operan en la adecuación del nivel de aportaciones del plan.

Si se asume un intervalo de un año y una tasa de interés - 'i', el desarrollo del activo en su valor de libros (o valor de costo) está dado por:

$$VL_0 + C + I + UN - PCP - GA = VL_t \dots(1.1)$$

donde:

- VL_t - valor en libros en el momento 't'
- C - contribución anual al fondo o reserva
- I - rendimientos o intereses
- UN - utilidad neta

- PCP - pensiones en curso de pago
 GA - gastos de administración

El valor de mercado tiene, en cambio, el siguiente desarrollo:

$$VM_0 + C + I + UN + \Delta UNI - PCP - GA = VM_1$$

donde:

- VM_t - valor de mercado en el momento 't'
 ΔUNI - incremento en la utilidad neta intangible durante el período (ganancia intangible)

La única diferencia entre el desarrollo del activo en su valor en libros y en su valor de mercado durante un año, es el incremento en la utilidad neta intangible. Este se refiere a la revaluación o realización de las acciones en un momento determinado. Sobre esta base, es posible demostrar que en la fecha de valuación la diferencia entre ambos valores equivale a la apreciación intangible en ese momento.

Cuando la apreciación del valor de mercado llega a ser substancial debe ponerse especial atención al sistema de valuación de activos. En algunos casos existe cierto riesgo de estimar el valor de mercado, pero éste disminuye en la medida en la que se utiliza algún método de distribución de las ga-

nancias.

Los sistemas de valuación de activos deben atacar dos pro
blemas básicos:

- i) cuando se toma la decisión de considerar otro valor - de la inversión distinto al valor de libros, la sobre
valuación del activo a la fecha de cálculo es general
mente sustantiva y debe utilizarse algún método para dosificar esa ganancia e introducirla a la valuación actuarial;
- ii) debe establecerse algún método para reducir las fluctuaciones en las inversiones. Esto implica la reducción en las fluctuaciones de incremento en la utilidad neta intangible. Posiblemente el método más simple sea considerar el incremento total por rendimientos bajo dos esquemas: valor en libros y valor de - mercado. Es decir,

VALOR EN LIBROS: $I + UN$

VALOR DE MERCADO: $I + UN + \Delta UNI$

La ganancia o la pérdida del activo se puede derivar de la fórmula (1.1) para quedar como sigue:

$$VL_0 (1 + i) + C^i - PCP^i - GA^i + R^i = VL_1$$

de manera que,

$$VL_0 (1 + i) + C^i - VL_1 = PCP^i + GA^i - R^i \quad \dots (1.2)$$

en donde los supersufijos se refieren a las acumulaciones de interés desde el momento en que éstas ocurren hasta el final del año, y 'R' es el rendimiento de la inversión.

Los resultados en la ecuación (1.2) se interpretan como pérdidas y ganancias y sus valores tienen signos positivos y negativos respectivamente; lo contrario a lo que se esperaría después de un razonamiento intuitivo. La causa de esto es la de que el activo reduce el importe de las obligaciones, y al ocurrir una ganancia, ésta se le resta a dicho importe.

Otro problema que a menudo se encuentra consiste en la de terminación de la tasa efectiva de rendimiento del fondo durante un periodo determinado. El apéndice I trata este problema asumiendo que tanto los ingresos como los egresos que tiene el fondo, están uniformemente distribuidos a lo largo - del periodo de cálculo.

5. SIGNIFICANCIA DE LAS HIPOTESIS ACTUARIALES

Como se verá más adelante, con las hipótesis actuariales se estima el nivel óptimo de aportaciones de los planes de pensiones. La selección entre el conjunto de hipótesis para evaluar un plan en particular, es una decisión que el actuario debe tomar conjuntamente con el director de la empresa, atendiendo a la situación particular que guarde ésta.

Es conveniente que periódicamente se pruebe la validez de las hipótesis y en el caso de que sea necesario un cambio, se efectue sobre una base razonable considerando los resultados de la prueba.

Resulta en beneficio del financiamiento del plan, asumir hipótesis que tiendan al conservatismo, es decir a la sobreestimación de los eventos que inciden en los costos de las pensiones, dado que es preferible obtener ganancias que pérdidas actuariales.

CAPITULO II

CONCEPTOS BASICOS DE LAS MATEMATICAS DE PENSIONES

1. HIPOTESIS ACTUARIALES

Se entiende como hipótesis actuarial al factor que conduce a una solución tentativa sobre la ocurrencia de un evento futuro - de naturaleza incierta o contingente, que interviene directamente en la estimación del costo de beneficios proyectados (i.e. - pensiones por jubilación).

Las hipótesis actuariales se dividen en dos grupos: bases - demográficas y bases económicas. Estos grupos a su vez se subdividen en varios subgrupos, como se ilustra en la figura 1 y que a continuación se explican brevemente.

A. BASES DEMOGRAFICAS

Son aquellas que sirven para determinar el tiempo de perma-- nencia de un empleado en un status laboral. El conjunto de em-- pleados que constituye la empresa esta expuesto a varias fuerzas o causas de decremento por las cuales un elemento del conjunto, deja de pertenecer a éste. Los empleados en servicio activo se exponen a la mortalidad, a la invalidez y a la rotación (separa ción voluntaria o involuntaria de la empresa). Los jubilados se exponen en teoría, únicamente a la mortalidad, ya que sola--

mente la muerte sería la razón para que dejaran de percibir su renta mensual.

- i) **Mortalidad:** Esta fuerza de decremento impide que el empleado eventualmente se haga acreedor al beneficio por jubilación, y al pensionado -como ya se mencionó-, que continue percibiendo sus rentas mensuales. La edad es obviamente el factor más directamente relacionado con las tasas de mortalidad, empezando éstas aproximadamente con 0.05 % a edad 20 e incrementándose progresivamente hasta alcanzar - el 100 % en alguna edad convencional (usualmente se asume una edad entre los 100 y los 110 años: edad w). La tabla de mortalidad que se utilice deberá estar en función del grado de conservatismo que se desee tener de acuerdo al riesgo que implique el giro de actividades de la empresa.

Valuando la función ${}_{65-x}P_x^{(m)}$, es decir la probabilidad de que una persona de edad 'x' sobreviva a edad 65, con la tabla de mortalidad GAM-1971 -Group Annuity Males-, (v. apén dice IV), se obtienen los resultados obtenidos en la tabla 2.

TABLA 2

PROBABILIDADES DE MORTALIDAD

x	
20	0.8099
25	0.8121
30	0.8149
35	0.8187
40	0.8241
45	0.8326
50	0.8485
55	0.8767
60	0.9225
65	1.0000

**HIPOTESIS
ACTUARIALES**

**BASES
DEMOGRAFICAS**

MORTALIDAD

INVALIDEZ

ROTACION

**VOLUNTARIA
INVOLUNTARIA**

**BASES
ECONOMICAS**

INCREMENTO

SALARIAL

MERITO

PRODUCTIVIDAD

INFLACION

TASA DE

INTERES

TASA BRUTA

**RIESGO DE IN-
VERSION**

INFLACION

FIG. 1

- ii) Invalidez: Esta fuerza de decremento también evita que el empleado permanezca en la empresa hasta su fecha normal de jubilación. Sin embargo, existen planes en los que al invalidarse el participante, se le continúan acreditando años de servicio hasta el momento de su retiro, en el que recibe la pensión normal. En estos casos se debe hacer uso de una tabla de mortalidad para inválidos para evaluar las probabilidades de deceso. Las tasas de invalidez suelen ser difíciles de determinar dada la amplia variedad de factores que intervienen, como la edad, el sexo y la ocupación.

La tabla 3 muestra los resultados de valorar la función ${}_{65-x}p_x^{(i)}$, es decir, la probabilidad de que una persona de edad 'x' no se invalide al menos hasta cumplir 65 años.

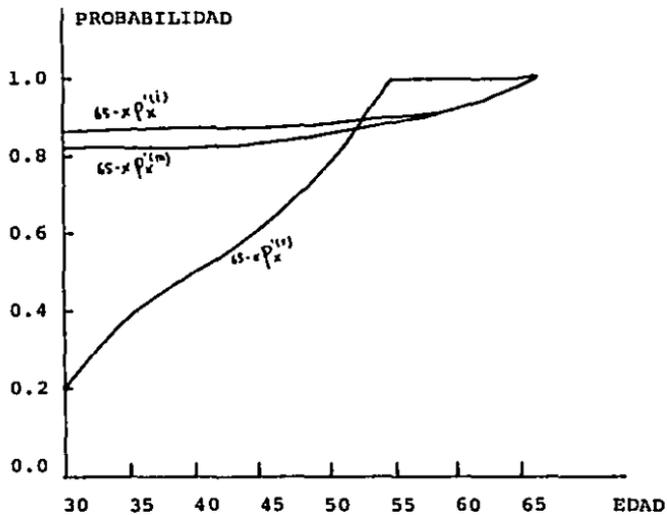
TABLA 3

PROBABILIDADES DE INVALIDEZ

x	
20	0.8498
25	0.8511
30	0.8524
35	0.8541
40	0.8567
45	0.8619
50	0.8717
55	0.8886
60	0.9168
65	1,0000

iii) Rotación: Esta fuerza de decremento en contraposición a la mortalidad y a la invalidez, es la que determina el inicio del otorgamiento del beneficio por jubilación, dada la provisión de edad anticipada de retiro que generalmente contemplan los planes de pensiones. Las tasas de rotación suelen comprender tanto la separación voluntaria como la involuntaria (despido justificado o injustificado), en una proporción 80 - 20 respectivamente. Para su determinación intervienen factores tales como el tiempo de servicio en la empresa, la salud, el nivel de los beneficios por retiro, la edad en la que las instituciones de Seguridad Social comienzan a otorgar beneficios por vejez, etc. Esta es la fuerza de decremento más significativa en los planes de pensiones.

En la figura 1 se grafican las probabilidades de alcanzar la edad 65 con las diferentes fuerzas decrementales.

PROBABILIDADES DE ALCANZAR EDAD 65

B. BASES ECONOMICAS

Son aquellas que sirven para determinar el desarrollo financiero del plan, en base al medio económico en torno a la empresa. Su efecto es notable en el costo de las pensiones debido al largo plazo envuelto en el período de capitalización de reservas para el pago de los beneficios futuros.

- i) Tasa de interés: Esta tasa generalmente es fijada a un nivel que represente el rendimiento de las reservas del plan. Se consideran varios componentes en su determinación: la tasa pura (o bruta) que es independiente de la inflación o la deflación, la tasa de rendimiento de la cartera de inversión de la reserva (o tasa de riesgo de la inversión) y la inflación esperada a largo plazo. Dado que la función de valor presente V es inversamente proporcional a la tasa de interés, el costo de las pensiones es menor cuanto mayor sea esta tasa.

- ii) Tasa de incremento salarial: Esta tasa "comprende" a la anterior en el sentido de que determina el nivel de incremento del sueldo y eleva los beneficios a otorgar. Esta es trechamente ligada al costo de las pensiones siempre que los beneficios del plan sean una función del salario del participante. El incremento en los salarios puede obedecer a los siguientes casos: el mérito del empleado, la inflación y el aumento por las utilidades de la empresa.

El factor de mérito producto incrementos salariales en la medida en la que el empleado progresa laboralmente en su carrera ya que, al menos teóricamente, alcanza niveles de mayor competencia y responsabilidad. Sin embargo, la tasa de crecimiento de salario por este concepto suele decrecer cuando la antigüedad aumenta.

El componente de inflación actúa de la misma manera que en la tasa de interés, ya que se utiliza en la proyección de los salarios. El aumento por utilidades en la empresa, es un factor que actualmente carece de importancia, por lo que usualmente se omite.

2. FUNCIONES DE SUPERVIVENCIA

De acuerdo a lo establecido en la sección precedente, las probabilidades de mortalidad, invalidez y rotación asignan un factor de permanencia del empleado en la empresa. A estas probabilidades se les designará como tasas y a partir de ellas es necesario calcular una probabilidad de permanencia o función - de supervivencia en la empresa. Es incorrecto el cálculo por medio de la suma directa de esas tasas; su "dependización" debe efectuarse elaborando una tabla de decrementos múltiples - (ver anexo III).

Los métodos analíticos tradicionalmente empleados en problemas de mortalidad (i.e cálculo actuarial básico). pueden - ser extendidos para formar una teoría más general que contemple varios decrementos. Para tal efecto, las tasas o probabilidades independientes de cada decremento, deben de hacerse dependientes, es decir, transformarse en probabilidades de decremento.

Es importante distinguir entre tasa y probabilidad de decremento. La tasa de decremento se refiere a la proporción - de participantes que abandonan un status por determinada causa, bajo la asunción de que ningún otro decremento tiene repercusión. Si esta tasa es usada en un medio de un solo de-

cremento, equivale a la probabilidad. Sin embargo, si se utiliza en un medio de decrementos múltiples, no es equivalente. En otras palabras, es un conjunto de empleados activos expuesto a varias fuerzas de decremento, la tasa de mortalidad no es igual a la probabilidad por el mismo concepto, dado que la acción de otras tasas de decremento previenen a los miembros del conjunto a exponerse a la mortalidad durante el resto del período de consideración.

Una hipótesis típica para la transformación de una tasa de decremento es una de probabilidad, es la de considerar que todas las salidas tienen efecto en forma uniforme a lo largo del año. De acuerdo a esto, a continuación se muestra una fórmula de dependización para el caso de tres decrementos, para cuya determinación fue necesario resolver un complejo sistema de ecuaciones lineales simultáneas que se omiten por desviarse de los objetivos de esta tesis.

$$q_x^{(m)} = \frac{q_x^{(k)} (4 - 2q_x^{(i)} - 2q_x^{(r)} + q_x^{(i)} \cdot q_x^{(r)})}{(4 - q_x^{(i)} \cdot q_x^{(r)})^2 - q_x^{(m)} \cdot q_x^{(i)} (q_x^{(i)} - 2)^2}$$

donde : $q_x^{(k)}$ - probabilidad de que una persona de edad 'x' abandone un status por la causa 'k' considerando la acción de otros decrementos.

$q_x^{(k)}$ - tasa (o probabilidad independiente de que una persona de edad ' x ' abandone un status por la causa ' k ' sin la acción de otros decrementos.

La fórmula anterior se derivó con los mismos supuestos utilizados por Jordan (ver bibliografía), para el caso de dos decrementos.

3. FORMULAS DE BENEFICIOS

La función "beneficio" es utilizada en la determinación - el monto de los pagos a los que un empleado se hace acreedor, cuando alcanza la edad de retiro. Al igual que las funciones de supervivencia y de interés, su consideración es fundamental en la formulación del costo de las pensiones.

Es prudente aclarar que, dado que se expondrán tres tipos básicos de fórmulas de beneficios, se asume que los planes de pensiones a los que en adelante se hará referencia, son de la clasificación de "beneficio fijo". Tales planes tienen un - costo variable y son los más comunes en México. Por el contrario, aquellos planes en los que se fija el costo, resultan en un beneficio variable y su empleo es menos frecuente.

El beneficio al que un empleado se hace acreedor del año 'x' al año 'x + 1' se denotará como 'bx'. El beneficio acumulado, es la suma de los beneficios adquiridos por un empleado desde su edad de ingreso 'y' hasta la edad 'x - 1' y se denotará con 'Bx' de tal suerte que

$$B_x = \sum_{t=y}^{x-1} b_t$$

La clasificación básica de las fórmulas de beneficios es:

- i) Beneficio Fijo
- ii) Promedio de la Carrera
- iii) Promedio Final

Bajo la fórmula de Beneficio Fijo, b_x equivale al beneficio - anual por pagar por cada año de servicio acreditado del empleado. El beneficio acumulado a su edad ' x ' esta dado por:

$$B_x = (x-y) \cdot b_x$$

Nótese que en este caso, la edad de ingreso es un factor independiente.

Bajo la fórmula de Promedio de la Carrera, ' b_x ' es una proporción del salario del empleado a la edad alcanzada; entendido como beneficio anual adquirido. Su fórmula y la del beneficio acumulado son, respectivamente:

$$b_x = K \cdot s_x$$

$$B_x = K \cdot S_x$$

donde ' k ' es la proporción mencionada y ' s_x ', ' S_x ' son las fun -

ciones de salario correspondientes al salario ganado a edad 'x' y al salario acumulado hasta la edad 'x-1' y desde la edad de ingreso del empleado.

Bajo la fórmula de Promedio Final se considera un número fijo 'n' de años previos al retiro, con el objeto de calcular el salario promedio sobre éstos; así como una proporción 'k' de dicho promedio por cada año de servicio. El beneficio proyectado a la fecha de jubilación toma la forma

$$B_r = k(r-y) \frac{1}{n} \sum_{t=r-n}^{r-1} s_t$$

Similarmemente a edad 'x' se tiene

$$B_x = k(x-y) \frac{1}{n} \sum_{t=x-n}^{x-1} s_t$$

El beneficio correspondiente a un año en particular, puede ser obtenido mediante la diferencia del beneficio acumulado de dos años consecutivos:

$$\begin{aligned} b_x &= B_{x+1} - B_x \\ &= k(x-y+1) \frac{1}{n} \sum_{t=x-n+1}^x s_t - k(x-y) \frac{1}{n} \sum_{t=x-n}^{x-1} s_t \end{aligned}$$

4. CUANTIFICACION DE OBLIGACIONES Y COSTOS

La obligación asociada con los beneficios futuros a favor de los participantes de un plan de pensiones, como ya se habrá mencionado, se le conoce como el valor presente de los beneficios proyectados. Esta función se define de la siguiente manera:

$$(VPBP)_x = \begin{cases} Br \cdot r - x p_x^{(r)} \cdot v^{r-x} \cdot \ddot{a}_r & , x < r \\ Br \cdot \ddot{a}_x & , x \geq r \end{cases}$$

donde:

- Br - beneficio al retiro para un empleado que ingresa a la empresa a la edad 'y'
- $r-x p_x^{(r)}$ - probabilidad de que el empleado permanezca en la empresa hasta la edad 'r'
- v^{r-x} - interés descontado de la edad 'x' a la edad 'r'
- \ddot{a}_r - valor presente de una serie de pagos unitarios; el primero de ellos a edad 'r'.

La función $(VPBP)_x$ para empleados activos, crece a medida que 'x' se aproxima a 'r', ya que tanto $r-x p_x^{(r)}$ como v^{r-x} se acercan a la unidad. A partir de la edad de retiro, la función es decreciente, dado que \ddot{a}_x es menor conforme 'x' es mayor.

Esta función es tabulada para cada participante del plan,

y la suma constituye el valor presente total de los beneficios proyectados, o simplemente, la obligación total.

La obligación total es precisamente el pasivo que hay que amortizar y de ahí se deriva el costo anual del plan. El programa de amortización de ese pasivo está dado por el método de financiamiento utilizado, el cual debe cumplir ciertas condiciones. En el capítulo III se describen los métodos de financiamiento más comunes.

Existen otras obligaciones cuya principal finalidad es la de medir el grado de financiamiento del plan, estas son la obligación por terminación del plan y la obligación por continuación del plan.

La obligación por terminación del plan es el valor presente de los beneficios acumulados. Su diferencia con el valor presente de los beneficios proyectados estriba en el cambio de dos factores. El primero de ellos, es el beneficio acumulado a la fecha en lugar del beneficio al retiro; la razón es intuitivamente clara ya que esta obligación presupone la terminación del plan. El segundo, consiste en utilizar un solo decremento: la mortalidad. Esto obedece al hecho de que solamente por esta contingencia, el empleado no recibiría el beneficio, suponiendo la terminación del plan en un año en partí-

cular. La función se define de la siguiente manera:

$$(OTP)_x = B_x \cdot {}_{r-x}P_x^{(m)} v^{r-x} \ddot{a}_r^{(1)}$$

donde:

- B_x - beneficio adquirido hasta la edad 'x' para un empleado que ingresó a la empresa a la edad 'y'.
- ${}_{r-x}P_x^{(m)}$ - probabilidad de que una persona sobreviva a la edad 'r' (en un medio de un decremento).

Si las hipótesis actuariales se verifican con exactitud, un plan de pensiones con un activo tangible equivalente a su obligación por terminación, es capaz de proveer los beneficios adquiridos a todos sus participantes.

La obligación por continuación del plan es el valor presente de los beneficios adquiridos, en donde la acumulación se define como un prorateo de los beneficios a la jubilación. Esta obligación se calcula a partir de los beneficios adquiridos con un elemento por el incremento futuro de los salarios. Así mismo, se hace uso de todas las fuerzas de decremento. La función se define de la siguiente manera:

$$(OCP)_x = B_x \frac{x-y}{r-y} \cdot {}_{r-x}P_x^{(r)} v^{r-x} \ddot{a}_r^{(1)}$$

o haciendo referencia a la fórmula dada para $(VPBP)_x$, lo anterior puede escribirse como

$$(OCP)_x = \frac{x-y}{r-y} \cdot (VPBP)_x$$

Debe resultar claro que en la fórmula anterior se está haciendo un prorrateo del valor presente de los beneficios proyectados, atendiendo al criterio lineal: de acuerdo al servicio ya prestado (o a la antigüedad) por los participantes del plan.

Es fácil demostrar que la siguiente relación se cumple:

$$(VPBP)_x > (OCP)_x > (OTP)_x$$

para toda $x \leq r$.

En el aspecto de los costos el concepto más importante es el costo normal. El costo normal está diseñado para la amortización del valor presente (referido a la edad de ingreso 'y') de los beneficios proyectados (i.e. $(VPBP)_y$), sobre la vida activa del empleado. Su definición depende del método de financiamiento en consideración (v. capítulo III).

Prospectivamente el valor presente de los costos normales a la edad 'y' (de ingreso), equivale al valor presente de los beneficios proyectados, referido a esa edad. Retrospectivamente, los costos normales se acumulan hasta equivaler al valor presente de los beneficios proyectados a la edad de retiro 'r'. Consecuentemente la acumulación de los importes de los costos

normales hasta la edad 'x' (actual) más el valor presente de - futuros costos normales, será igual al valor presente de los beneficios proyectados. Siempre que prevalezcan estas condiciones, es posible definir un patrón de costo normal, por lo que es posible la existencia de un número infinito de métodos de - financiamiento.

El concepto de obligación actuarial se refiere a la propor ción del valor presente (a edad de ingreso) de los beneficios proyectados, que en teoría ha sido amortizada hasta la edad ac tual 'x'. A la edad de ingreso de los empleados, la obligación actuarial amortizada es, por definición, igual a cero, da do que la obligación o pasivo respectivo también lo es. Pros- pectivamente la obligación actuarial a edad 'x' ($y < x < r$) - equivale al valor presente de los beneficios futuros a esta - edad menos el valor presente de futuros costos normales pen- dientes de aplicación. Es decir,

$$(OA)_x = (VPBP)_x - (VPCNF)_x$$

El valor presente de costos normales futuros (VPCNF) , se define de la siguiente manera:

$$(VPCNF)_x = \sum_{t=x}^{r-1} (CN)_t \cdot {}_{t-x}P_x^{(n)} v^{t-x}$$

Retrospectivamente, la obligación actuarial se puede defi- nir como la acumulación de los importes de los costos normales

anteriores a la fecha de valuación y la fórmula correspondiente es

$$(OA)_x = \sum_{t=y}^{x-1} (CN)_t \cdot (1+i)^{x-t} \frac{1}{x-t P_x^{(i)}}$$

siendo el miembro derecho de la ecuación, el valor presente - o valor acumulado de los costos normales desde la edad de ingreso hasta la edad actual (sin incluirla).

5. OBLIGACIONES Y COSTOS SUPLEMENTARIOS

De acuerdo a la sección anterior, existen dos definiciones -prospectiva y retrospectiva-, de la obligación actuarial. Sin embargo al cuantificar la obligación bajo las dos fórmulas, generalmente habrá discrepancia a no ser que se verifiquen ciertas condiciones muy específicas que no suelen presentarse en la práctica. Esta discrepancia se le conoce como obligación -suplementaria.

La principal fuente de obligación suplementaria consiste - en el acreditamiento de servicios prestados por los empleados anteriores a la fecha del establecimiento del plan; esto es, - para edades en las que el costo normal, por lógica, no estaba determinado. En este caso en la definición prospectiva, la - obligación actuarial toma algún valor positivo en tanto que la cuantificación retrospectiva es claramente cero. La diferencia es la obligación suplementaria a la fecha de establecimiento del plan.

Otra fuente de obligación suplementaria es la modificación a alguna hipótesis actuarial. Esta modificación afecta solamente la determinación prospectiva de la obligación actuarial, dejando la acumulación de costos normales pasados sin alteración. También las desviaciones que año con año va teniendo la

experiencia real del plan con las hipótesis actuariales, generan una discrepancia positiva o negativa entre la valuación - prospectiva de la obligación actuarial y la acumulación de - costos normales pasados. A estas discrepancias se les conoce mejor como pérdidas y ganancias actuariales.

Atendiendo al concepto dado, es posible definir a la obligación suplementaria de la siguiente manera:

$$(OS)_x = [(VPBP)_x - (VPCNF)_x] - (AVPCNP)_x$$

donde:

$(AVPCNP)_x$ - Acumulación de valores presentes de cos
tos normales pasados a edad x .

El incremento en la obligación suplementaria durante la - edad x (valor que se determina al principio de la edad $x+1$), - puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$\Delta (OS)_x = (OA)_{x+1} - \frac{(OS)_x (1+i)}{P_x^{(i)}} - (AVPCNP)_{x+1}$$

es decir, la obligación actuarial a edad $x+1$ menos la acumulación de cualquier obligación suplementaria previa a esa - edad, debe precisamente anularse con la acumulación de costos normales pasados a edad $x+1$; de lo contrario, se tiene un incremento en la obligación suplementaria que puede ser positi-

vo o negativo y que fue generado durante la edad x .

El costo que genera la obligación suplementaria es determinado a partir de la amortización de ésta en un número convenido de años y se llama costo suplementario.

La obligación no financiada o pendiente de financiar es la diferencia entre algún tipo de obligación y el activo tangible del plan. La obligación no financiada acumulada se refiere a la diferencia entre la obligación por terminación del plan u obligación por continuación del plan, y el activo tangible. De manera que

$${}^{OTF}(ONF)_t = (OTP)_t - F_t$$

y

$${}^{OCP}(ONF)_t = (OCP)_t - F_t$$

en donde cada definición depende de la obligación considerada. El activo tangible F_t , se considera en su valor de mercado en la primera expresión, y en su valor de libros en la segunda.

La obligación actuarial no financiada tiene una definición similar

$${}^{OA}(ONF)_t = (OA)_t - F_t$$

y aquí también debe usarse el valor de libros de F_t .

6. PERDIDAS Y GANANCIAS ACTUARIALES

Las causas que año con año afectan en el incremento de la obligación suplementaria, son las pérdidas y ganancias actuariales. La obligación suplementaria originada en el año t por desviaciones actuariales, equivale a la obligación no financiada real en el año $t + 1$ menos la obligación no financiada esperada. Simbólicamente:

$$\Delta (OS)_t = {}^{OA}(ONF)_{t+1} - E [{}^{OA}(ONF)_{t+1}] \quad \dots (2.1)$$

donde:

- $\Delta (OS)_t$ - incremento en la obligación suplementaria - al tiempo t (positivo o negativo)
- ${}^{OA}(ONF)_{t+1}$ - obligación actuarial no financiada al tiempo $t+1$
- $E [{}^{OA}(ONF)_{t+1}]$ - obligación actuarial no financiada esperada al tiempo $t + 1$

El último término de la fórmula anterior debe expresarse - en términos de la obligación actuarial esperada en $t + 1$ y el activo tangible esperado en el mismo punto (de acuerdo a las definiciones de la sección anterior).

La obligación actuarial esperada en $t + 1$ esta dada por

$$E [(OA)_{t+1}] = [(OA)_t + (CN)_t - B_t] (1+i) \quad \dots (2.2)$$

donde:

- $(CN)_t$ - costo normal del plan en el tiempo 't'.
 B_t - beneficios pagados en el tiempo 't'.

Si la obligación actuarial real en 't+1' no fuera equivalente a la obligación actuarial esperada en el mismo punto, existiría una desviación actuarial basada en la cuantificación de obligaciones.

El valor esperado del activo tangible en t + 1 esta dado por:

$$E [F_{t+1}] = [F_0 + (Cont)_t - B_t] (1 + i) \dots (2.3)$$

donde:

- $(Cont)_t$ - suma de costo normal y costo suplementario (i.e. contribución total), en el tiempo 't'.

Si el activo tangible real en 't + 1' no fuera equivalente al activo tangible esperado en el mismo punto, existiría una desviación actuarial basada en la cuantificación de activos.

Con las dos definiciones anteriores se puede formular la obligación actuarial no financiada esperada en 't + 1':

$$E [{}^{OA} (ONF)_{t+1}] = E [(OA)_{t+1}] - E [F_{t+1}]$$

y sustituyendo (2.2) y (2.3) se llega a

$$E [{}^{OA}(ONF)_{t+1}] = [(OA)_t + (CN)_t - F_t - (cont)_t] (1+i)$$

Finalmente sustituyendo la fórmula anterior en la (2.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta (OS)_t &= {}^{OA}(ONF)_{t+1} - [(OA)_t + (CN)_t - F_t - (cont)_t] (1+i) \\ &= {}^{OA}(ONF)_{t+1} - [{}^{OA}(ONF) + (CN)_t - (cont)_t] (1+i) \dots (2.4) \end{aligned}$$

La expresión anterior muestra que a menos que la obligación actuarial no financiada en t más el cambio en la obligación actuarial no financiada; es decir el exceso de costo normal sobre la contribución total, con el factor de interés correspondiente; sea igual a la obligación actuarial no financiada al final del año, existirá un incremento a decremento en la obligación suplementaria.

La fórmula (2.4) representa la definición conceptual de - las pérdidas y ganancias actuariales.

Es notable que si el costo normal es igual a la contribución total (es decir, si el costo suplementario es cero), y si el incremento en la obligación suplementaria es igual a cero durante el año, entonces la obligación actuarial no financiada en $t + 1$ será equivalente a la misma obligación en t multiplicada por el factor de interés. En este caso, las contribuciones iguales al costo normal en t ; más el valor presente del interés de la obligación actuarial no financiada en el mismo punto, mantendrán esta obligación constante año con año.

Esto es:

$$\begin{aligned}(\text{cont})_t &= (\text{CN})_t + vi \cdot {}^{oa}(\text{ONF})_t \\ &= (\text{CN})_t + d \cdot {}^{oa}(\text{ONF})_t\end{aligned}$$

donde:

d - tasa de descuento.

CAPITULO III

METODO DE FINANCIAMIENTO RACIONAL

1. CLASIFICACION DE LOS METODOS.

La clasificación de los métodos de financiamiento está en función de la característica particular que de ellos se quiera enfatizar en la clasificación. Desde el punto de vista conceptual y operacional, la base fundamental para la clasificación consiste en dividir los métodos en los que se asignan los beneficios del plan a un período determinado de años y luego se determina el valor presente actuarial de los mismos; y por otra parte, los métodos en los que se asigna el valor presente actuarial de los beneficios proyectados a un período determinado de años, sin asignar los propios beneficios. Aquellos métodos en los que se asignan los beneficios, a su vez se dividen en los que directamente acumulan el beneficio tal y como las provisiones del plan lo definen, y aquellos que proyectan el beneficio a la edad de retiro y posteriormente lo asignan a ciertos años del plan. Asimismo aquellos métodos que asignan el costo, se subdividen en función a la forma en la que el costo proyectado total en valor presente actuarial, se distribuye en los años de servicio de los participantes del plan.

Una clasificación alterna consiste en atender a la forma en la que los diversos métodos de financiamiento consideran -

las pérdidas y ganancias actuariales. Bajo algunos métodos, - estas pérdidas y ganancias se calculan directamente mediante - la diferencia entre la obligación no financiada real y la obligación no financiada esperada de haberse cumplido las hipóte - sis actuariales. Una ganancia o pérdida determinada de esta - forma, se amortiza en un número específico de años¹. En este sentido existe una determinación directa de las pérdidas o de las ganancias actuariales, en contraparte con los métodos agregados o colectivos en los que las pérdidas y ganancias no se - computan separadamente, ya que automáticamente se distribuyen en años futuros como componentes de los costos normales.

Para los objetivos de la presente tesis, se analizaran brevemente las formas más generales de los métodos de beneficio - acumulado (crédito unitario) y de beneficio proyectado (edad - de ingreso y pasivo inicial congelado).

1 Referirse al capítulo V.

2. METODO DE CREDITO UNITARIO (BENEFICIO ACUMULADO)¹

Este método de financiamiento tiene la particularidad de - distinguir de manera explícita, los beneficios adquiridos por un empleado en el año en curso y los beneficios acumulados a - la fecha de valuación del plan.

El beneficio al que tiene derecho un empleado durante un año específico, se calcula mediante la aplicación directa de la fórmula de la pensión del plan. De esta manera, dicho beneficio se define como el incremento esperado en el beneficio - acumulado a la fecha, durante el período. Tal incremento consta del beneficio anual y del ajuste de todos los beneficios adquiridos, en el entendido de que el salario es una función creciente del tiempo. Por ejemplo si la pensión está relacionada con el salario promedio de los 'n' años previos a la fecha normal de retiro, en cada año debe recalcularse el monto de los beneficios acumulados a favor del empleado, en términos de la base salarial vigente.

De lo anterior se induce que el monto de pensión "ganado" en un año, representa el exceso de la pensión a la que el empleado tiene derecho si completa ese año de servicio de la empresa, sobre aquella a la que tuvo derecho hasta que se inició

1 Método de Costo de Beneficio Acumulado con Obligación Suplementaria según terminología del 'Pension Research Council'.

el año en cuestión.

El siguiente ejemplo resulta ilustrativo:

Supóngase que el Plan otorga una pensión mensual del 1% - del sueldo promedio de los últimos cinco años, por cada año de servicio. Si dicho promedio es de \$ 100,000 para un empleado en particular, éste tendrá derecho al cabo de 10 años al 10% - es decir \$ 10,000. Si el cálculo se efectúa un año antes, tiene derecho al 9% de \$ 90,000 (por ejemplo); es decir a \$ 8,100. El monto de pensión "ganado" durante el año es pues \$ 10,000 - \$ 8,100 = \$ 1,900; cantidad compuesta por la suma del 1% de \$ 90,000 y el 10% de \$ 10,000.

Nótese que el incremento en el monto de la pensión ----- (23.46%), es considerablemente mayor que el de los sueldos promedio (11.11%)¹.

El costo normal con este método de financiamiento, también llamado "costo del año", es el valor presente de todos los beneficios "ganados" durante el año de la valuación actuarial. Puede ser calculado mediante la aplicación de

¹ Esta diferencia en las tasas de crecimiento es una característica de los planes en los que la fórmula de beneficio considera el sueldo promedio - de los últimos años previos al retiro.

la siguiente fórmula:

$$(CN)_x = b_x \cdot {}_{r-x}P_x^{(r)} \cdot v^{r-x} \ddot{Q}_r^{(12)}$$

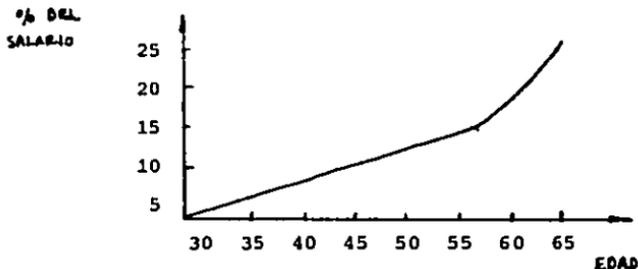
en donde:

- b_x - beneficio correspondiente a la edad x
- ${}_{r-x}P_x^{(r)}$ - probabilidad de permanencia en servicio desde la edad x (actual), hasta la edad r (retiro).
- v^{r-x} - descuento de interés de edad x a edad r
- $\ddot{Q}_r^{(12)}$ - anualidad anticipada vitalicia a edad r pagadera en forma mensual

La suma de los costos normales individuales resulta en el costo normal global, el cual siempre tenderá a elevarse en relación a la nómina a medida que el tiempo transcurre.

El incremento del costo normal en el tiempo, es extraordinario. Ello obedece a que el beneficio asignado a cada año crece por el incremento salarial; la probabilidad de permanecer en servicio hasta la edad de retiro es mayor a edades avanzadas, y a que el período en el que el interés es descontado se va disminuyendo.

Una apreciación más realista es la comparación del costo normal a través de los años, expresado como un porcentaje de la nómina. Atendiendo a las bases de cálculo descritas en el capítulo VI, puede graficarse la función del costo normal en relación al salario, asumiendo una edad de ingreso de 30 años:



COSTO NORMAL COMO PORCENTAJE DEL SALARIO

La obligación actuarial a favor de un participante del plan

es igual al valor presente de los beneficios acumulados a la fecha de la valuación, excluyendo los correspondientes a la edad actual. Es decir,

$$(OA)_x = B_x \cdot r-x P_x^{(r)} \cdot V^{r-x} \ddot{O}_r^{(12)}$$

en donde:

B_x	- beneficios acumulados hasta la edad 'x'
$r-x P_x^{(r)}$	- probabilidad de permanencia en la empresa desde la edad 'x' hasta la edad 'r'.
V^{r-x}	- descuento de interés de edad 'x' a edad 'r'
$\ddot{O}_r^{(12)}$	- anualidad anticipada vitalicia a edad 'r' pagadera mensualmente.

Bajo condiciones normales, la obligación actuarial se incrementa a través de los años dado el acumento en el monto del beneficio y a que las funciones P_x y V^{x-t} se aproximan a la unidad a medida que 'x' se acerca a 'r'.

Este método de financiamiento tiene la característica -a- diferencia de otros métodos- de que la obligación actuarial global es, en todo momento, equivalente al valor presente de los beneficios acumulados.

La definición del concepto de obligación suplementaria bajo este método de financiamiento , no necesariamente se ade -

cua a los sistemas de financiamiento en los que esta obligación no se amortiza. El procedimiento usual consiste en "prevenir" el incremento en la porción no financiada de la obligación suplementaria mediante el reconocimiento del interés que generó, a la tasa de interés de la valuación actuarial. En tal situación, el interés acreditado por la obligación suplementaria puede entenderse como un costo suplementario¹.

Para este método existen tres técnicas de ajuste de las pérdidas y ganancias actuariales². La técnica más usual es la del reconocimiento inmediato; en donde las ganancias son sumadas -o las pérdidas restadas-, a la contribución anual.

Sin embargo es común que año con año se mantenga una obligación actuarial no financiada. En este caso, el ajuste por pérdidas y ganancias se lleva a cabo mediante una acumulación de las mismas a defecto de abreviar o extender el período en el que la obligación actuarial no financiada se hace igual a cero, dependiendo del predominio de la ganancia o de la pérdida. Cuando tal condición se cumple, los ajustes por ganancias deben de registrarse de acuerdo a otro sistema. -

1 Este procedimiento no es exclusivo del método de beneficio acumulado; puede utilizarse en cualquier método de financiamiento.

2 Aún cuando en el capítulo V se exponen los sistemas de ajuste, se incluye en esta sección una breve explicación.

Una variante de esta técnica es la de reconocer la ganancia o pérdida resultante y amortizarla en el mismo período en el que la obligación actuarial inicial (o simplemente pasivo inicial), se amortiza.

El ajuste por distribución es probablemente, cuando menos en este método, la mejor técnica de reconocimiento de las - pérdidas y ganancias, ya que se evita una fluctuación significativa en la tasa de aportación sin perder efectividad en la financiación de acuerdo a la experiencia actual.

3. METODO DE EDAD DE INGRESO (BENEFICIO PROYECTADO)¹

En la forma tradicional de este método de financiamiento - el costo normal es la prima nivelada necesaria para pagar el - beneficio al retiro, desde la edad de ingreso (o edad de elegi- bilidad del plan) hasta la fecha normal de retiro. Esta pri- ma puede ser un porcentaje de la nómina o un monto fijo, y en el supuesto de que no hubiera enmiendas al plan y que las hi- pótesis actuariales se cumplieran, el costo permanecería cons- tante.

En el caso de que el costo normal se defina como un monto fijo, para la derivación de este costo se iguala el valor pre- sente de costos normales futuros con el valor presente del be- neficio proyectado. La ecuación resultante es la siguiente:

$${}^{MF}(\text{CN})_x \cdot \ddot{a}_{\overline{y}|}^{(r)} = (\text{VPBP})_y$$

de donde

$${}^{MF}(\text{CN})_x = \frac{(\text{VPBP})_y}{\ddot{a}_{\overline{y}|}^{(r)}}$$

donde

- ${}^{MF}(\text{CN})_x$ - costo normal a edad 'x' en la modalidad - de monto fijo
- $(\text{VPBP})_y$ - valor presente de los beneficios proyec- tados a edad 'y'
- $\ddot{a}_{\overline{y}|}^{(r)}$ - valor presente de una anualidad a edad- de ingreso temporal 'r-y' años

¹ Método de Costo de Beneficio Proyectado con Obligación Suplementaria se- gún terminología del Pension Research Council.

Nótese que en esta definición, el costo normal esta claramente diseñado para la amortización del valor presente de los beneficios proyectados.

En la variante en la que el costo normal se define como un porcentaje de la nómina, para derivar el costo normal hay que igualar el valor presente del sueldo futuro (en cierta proporción 'k') al valor presente del beneficio proyectado de un participante. Es decir

$$k \cdot s_y \cdot \ddot{a}_{y:\overline{r-\gamma}|}^{(r)} = (VPBP)_y$$

donde:

- s_y - salario a edad de ingreso
 $\ddot{a}_{y:\overline{r-\gamma}|}^{(r)}$ - valor presente de una anualidad anticipada a edad de ingreso temporal 'r-γ' años basada en el salario.

Resolviendo para 'k' se tiene que

$$k = \frac{(VPBP)_y}{s_y \cdot \ddot{a}_{y:\overline{r-\gamma}|}^{(r)}}$$

y el costo normal es entonces

$${}^{\mu}(CN)_x = k \cdot s_x$$

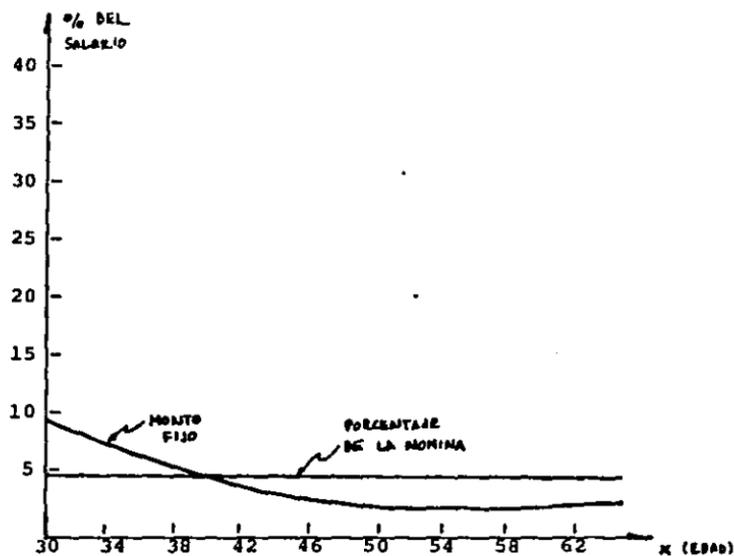
donde:

- ${}^{\mu}(CN)_x$ - costo normal a edad 'x' en la modalidad de porcentaje de la nómina.

Como el salario es una función creciente de la edad, el más normal en esta modalidad representa siempre una cantidad -

mayor de dinero, pero se mantiene nivelado en relación a la nómina.

Atendiendo a las bases de cálculo descritas en el apéndice puede graficarse la función del costo normal en relación al salario, asumiendo una edad de ingreso de 30 años:



COSTO NORMAL COMO PORCENTAJE DEL SALARIO.

FIG. 2

La obligación actuarial (como se estableció en el capítulo II), es igual al valor presente de los beneficios proyectados a edad 'x' menos el valor presente de costos normales futuros. - Es decir para las dos variantes analizadas:

$${}^{NF}(\text{OA})_x = (\text{VPBP})_x - {}^{NF}(\text{CN})_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}^{(i)}$$

y

$${}^{PN}(\text{OA})_x = (\text{VPBP})_x - K \cdot S_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}^{(i)}$$

Puede demostrarse algebraicamente mediante la sustitución de ${}^{NF}(\text{CN})_x$ y $k \cdot S_x$ que la obligación actuarial puede expresarse como una proporción del valor presente de los beneficios proyectados, sin embargo la demostración se omite por desviarse de los objetivos de la tesis.

La obligación suplementaria en este método de financiamiento se calcula mediante la aplicación directa de las fórmulas que se describen en la sección 5 del capítulo II, y el costo suplementario puede determinarse mediante la amortización de esta obligación en un número fijo de años.

En cuanto al reconocimiento de las pérdidas y ganancias, pueden emplearse las mismas técnicas de ajuste que para el método descrito en la sección precedente.

4. METODO DE PASIVO INICIAL CONGELADO (BENEFICIO PROYECTADO)¹

Este método es en esencia, igual al descrito en la sección precedente, sin embargo utiliza las técnicas de ajuste de las pérdidas y ganancias actuariales desde el punto de vista de los métodos agregados o colectivos. En la primera valuación actuarial de un plan de pensiones, los conceptos matemáticos aplicados en los métodos anteriores son perfectamente válidos; pero a medida que transcurre el tiempo, dichos ajustes se tratan de manera diferente.

Más específicamente, la obligación inicial u obligación suplementaria se financia de forma independiente; es decir se establece un pasivo inicial congelado.

Así como en el método de edad de ingreso se contemplan dos posibilidades para la definición de costos, en este método también existen las variantes de monto fijo y porcentaje de la nómina.

Bajo la primera variante, el costo normal adopta la siguiente forma:

$${}^{MF}(\text{CN})_t = \sum l_{y,x} \frac{\sum l_{y,x} (\text{VPBF})_y}{\sum l_{y,x} \ddot{a}_{y:\overline{t-y}}^{(i)}}$$

¹ Método de Costo Agregado de Beneficio Proyectado con Obligación Suplementaria según terminología del Pension Research Council.

donde:

- ${}^{NF}(\text{CN})_x$ - costo normal en el año 't' en la modalidad de monto fijo
- $l_{y,x}$ - número de empleados a edad 'x' que ingresaron al plan a edad 'y'.
- $(\text{VPBP})_y$ - valor presente de los beneficios proyectados a edad 'y'.
- $\ddot{a}_{y:\overline{r-y}}^{(r)}$ - valor presente de una anualidad anticipada de ingreso temporal 'r-y' años

La formulación anterior no implica otra cosa que un coeficiente de promedios ponderados: el del valor presente de los beneficios proyectados a favor de todos los participantes del plan, y el de sus anualidades correspondientes, con temporalidad igual al período de vida activa en la empresa. El resultado se multiplica por el número de participantes.

Obsérvese que de existir un solo empleado en la empresa, el costo normal tendría una definición idéntica a la del método de edad de ingreso. Es decir

$${}^{NF}(\text{CN})_x = \frac{(\text{VPBP})_y}{\ddot{a}_{y:\overline{r-y}}^{(r)}} \quad \dots (4.1)$$

de donde

$$(\text{VPBP})_y = (\text{VPBP})_x - (\text{OA})_x \quad \dots (4.2)$$

La obligación actuarial a edad 'x', $(\text{OA})_x$, equivale a la suma de el valor presente de costos normales pasados, el valor presente de costos suplementarios pasados y la obligación su -

plementaria no amortizada. También puede ser igual al valor - del activo tangible más la obligación suplementaria no amortizada, si se considera que la acumulación de costos debe equivaler al activo tangible. Es decir,

$$MF(OA)_x = F_x + (ONF)_x$$

donde:

- F_x - valor actual del activo tangible
 $(ONF)_x$ - obligación suplementaria no financiada

Sustituyendo la ecuación anterior y la (4.2) en la (4.1) - se tiene que

$$MF(CN)_x = \frac{(VPBP)_x - F_x - (ONF)_x}{\ddot{O}_x^{(n)} : \overline{r-x}}$$

Y posteriormente extendiendo la aplicación a la forma - agregada se llega a

$$MF(CN)_t = \sum_x i_{x,t} \left(\frac{\sum_y i_{y,x} (VPBP)_y - F_x - (ONF)_t}{\sum_{y,x} i_{y,x} \ddot{O}_x^{(n)} : \overline{r-x}} \right)$$

La definición del costo normal correspondiente a la variante de porcentaje de la nómina es el siguiente:

$$(CN) = \sum_x l_{y,x} S_{y,x} \left(\frac{\sum_x l_{y,x} (VPBP)_x - F_y - (ONP)_x}{\sum_x l_{y,x} S_{y,x} \cdot \frac{1}{(1+r)^{x-y}}} \right)$$

donde:

$S_{y,x}$ - salario a edad 'x' de una persona que ingresó al plan a edad 'y'.

CAPITULO IV

DERIVACION ALGEBRAICA DE LAS FORMULAS

1. INTRODUCCION.

La fase más importante del análisis de las pérdidas y ganancias actuariales, consiste en el planteamiento de las fórmulas mediante las cuales se va a medir el efecto de cada hipótesis actuarial y la desviación que pudiera existir con respecto a la experiencia real del plan.

El objetivo del presente capítulo es el de deducir la fórmula fundamental a partir de los postulados de la siguiente sección, y posteriormente desglosarla en componentes más elementales a fin de facilitar su aplicación.

En el capítulo VI se procederá a aplicar la teoría expuesta en este capítulo, mediante un caso práctico.

2. POSTULADOS BASICOS.

Las relaciones que a continuación se muestran son esenciales en la derivación algebraica de las fórmulas de pérdidas y ganancias actuariales.

En términos generales, si un empleado permanece en el mismo status laboral con un salario en el año $t = 1$ equivalente al salario esperado (o el que se había proyectado en $t = 0$), se verifica la siguiente relación:

$$\begin{aligned} (VPBP)_1^* &= (VPBP)_0 \frac{D_n^{(1)}}{D_{n+1}^{(1)}} \\ &= (VPBP)_0 \frac{v^n l_n^{(1)}}{v^{n+1} l_{n+1}^{(1)}} \\ &= (VPBP)_0 \frac{(1+i)}{p_n^{(1)}} \end{aligned}$$

o bien,

$$(VPBP)_0 (1+i) = (VPBP)_1^* p_n^{(1)} \quad \dots (4.1)$$

donde:

$(VPBP)_1^*$ - valor presente de los beneficios proyectados al tiempo $t = 1$, derivado del valor al tiempo $t = 0$ y asumiendo que no hay alteración alguna con excepción del incremento salarial.

(VPBP)_t - valor presente de los beneficios proyectados en el momento t.

En el caso de un jubilado rentista la relación correspondiente es análoga a la anterior, con la salvedad de que en su segundo miembro constará de un elemento por el valor esperado de los pagos a efectuar por concepto de pensiones. El desarrollo es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_m^{(12)}(1+i) &= \left[\frac{N_x^{(1)} - \frac{11}{24} D_x^{(1)}}{D_x^{(1)}} \right] (1+i) \\
 &= \left[\frac{N_{x+1}^{(1)} + D_x^{(1)} - \frac{11}{24} D_x^{(1)} + \frac{11}{24} D_{x+1}^{(1)} - \frac{11}{24} D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \right] (1+i) \\
 &= \left[\frac{D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \cdot \frac{N_{x+1}^{(1)} - \frac{11}{24} D_{x+1}^{(1)}}{D_{x+1}^{(1)}} + \frac{\frac{13}{24} D_x^{(1)} + \frac{11}{24} D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \right] (1+i) \\
 &= \left[\frac{D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \ddot{a}_{x+1}^{(12)} + \frac{\frac{13}{24} D_x^{(1)}}{D_x^{(1)}} + \frac{\frac{11}{24} D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \right] (1+i) \\
 &= \left[\frac{D_{x+1}^{(1)}}{D_x^{(1)}} \ddot{a}_{x+1}^{(12)} + \frac{13}{24} + \frac{\frac{11}{24} v^{x+1} |x^{(1)}}{v^x |x^{(1)}} \right] (1+i) \\
 &= \left[v P_x^{(1)} \cdot \ddot{a}_{x+1}^{(12)} + \frac{13}{24} + \frac{11}{24} v P_x^{(1)} \right] (1+i) \\
 &= P_x^{(1)} \ddot{a}_{x+1}^{(12)} + \frac{13}{24} (1+i) + \frac{11}{24} P_x^{(1)}
 \end{aligned}$$

o bien,

$$(VPBP)_0(1+i) = (VPBP)_1 P_x^{(1)} + E[P^1] \quad \dots (4.2)$$

donde:

$$(VPBP)_0 = \ddot{O}_x^{(n)}$$

$$E[P^1] = \frac{13}{24} (1+i) + \frac{11}{24} P_x^{(n)}$$

$$E[P^1] - \text{valor esperado de los pagos por efectuar del momento } t = 0 \text{ al momento } t = 1, \text{ incrementado a la tasa de interés } i.$$

Otra relación que servirá ulteriormente es la del salario de un participante. Asumiendo que en el año $t = 0$ un empleado gana un sueldo S_0 y tiene un sueldo proyectado $S_1 = S_0(1 + s_x)$ se verifica que:

$$(VPS)_1^0 = S_1 [1 + (1 + s_{x+1}) v P_{x+1}^{(n)} + (1 + s_{x+2}) v^2 P_{x+2}^{(n)} + \dots]$$

$$= S_0 (1 + s_x) [1 + (1 + s_{x+1}) v P_{x+1}^{(n)} + (1 + s_{x+2}) v^2 P_{x+2}^{(n)} + \dots]$$

$$v P_x^{(n)} (VPS)_1^0 = S_0 [(1 + s_x) v P_x^{(n)} + (1 + s_x)(1 + s_{x+1}) v^2 P_{x+1}^{(n)} + \dots]$$

$$v P_x^{(n)} (VPS)_1^0 + S_0 = S_0 [1 + (1 + s_x) v P_x^{(n)} + (1 + s_x)(1 + s_{x+1}) v^2 P_{x+1}^{(n)} + \dots]$$

$$= (VPS)_0$$

o bien,

$$P_x^{(n)} (VPS)_1^0 = [(VPS)_0 - S_0] (1+i) \quad \dots (4.3)$$

donde:

$(VPS)_1^0$ - valor presente del salario proyectado, al tiempo $t = 1$, derivado del valor al tiempo $t = 0$ y asumiendo que no hay alteración alguna con excepción del incremento salarial.

$(VPS)_t$ - valor presente del salario proyectado, al tiempo t .

3. DESARROLLO DE LAS FORMULAS.

Con el material introductorio de la sección precedente, se cuentan con las bases necesarias para el desarrollo de las fórmulas de pérdidas y ganancias actuariales, tema de la presente sección.

El desarrollo involucra una generalización del proceso considerando un método colectivo de financiamiento.

La tasa de costo normal es aquel factor que aplicado a la nómina anual produce el costo normal. En el año $t = 0$ se tiene la siguiente fórmula para esta tasa:

$$(TCN)_0 = \frac{(VPBP)_0 - F_0}{(VPS)_0}$$

donde:

- $(TCN)_t$ - tasa de costo normal en el momento 't'.
 F_t - fondo o reserva en el momento 't'.

Resulta de utilidad expresar la relación anterior en términos del fondo o reserva. Mediante el despeje correspondiente se obtiene:

$$F_0 = (VPBP)_0 - (TCN)_0 \cdot (VPS)_0 \quad \dots(4.4)$$

En este contexto, el costo normal (CN) se representa por:

$$(CN)_0 = (TCN)_0 \cdot S_0$$

Un período después, es decir en $t = 1$, se tiene que:

$$(TCN)_1 = \frac{(VPBP)_1 - F_1}{(VPS)_1}$$

o equivalentemente,

$$(TCN)_1 \cdot (VPS)_1 = (VPBP)_1 - F_1 \quad \dots(4.6)$$

Restando $(TCN)_0 \cdot (VPS)_1$ en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} (TCN)_1 \cdot (VPS)_1 - (TCN)_0 \cdot (VPS)_1 &= (VPBP)_1 - F_1 - (TCN)_0 \cdot (VPS)_1 \\ (VPS)_1 [(TCN)_1 - (TCN)_0] &= - (TCN)_0 \cdot (VPS)_1 + (VPS)_1 - F_1 \\ (VPS)_1 [(TCN)_0 - (TCN)_1] &= (TCN)_0 \cdot (VPS)_1 - (VPBP)_1 + F_1 \end{aligned} \quad \dots(4.7)$$

En la ecuación anterior, es intuitivamente claro que si la tasa de costo normal en $t = 0$ es mayor que aquella en $t = 1$, el

primer miembro de la igualdad es positivo y por consiguiente - existe una ganancia actuarial. Si en cambio ocurre lo contrario, se tiene una pérdida actuarial. Esta fórmula constituye el punto de partida para el desarrollo de la técnica de las - pérdidas y ganancias actuariales, y será transformada en térmi- nos más elementales para su aplicación.

Por otra parte, el fondo (o reserva) en $t = 1$ es equivalen- te al fondo en $t = 0$ incrementado por el costo normal y los in- tereses por él mismo ganado, y decrementado por los pagos efec- tuados por concepto de pensiones. Es decir,

$$F_1 = [F_0 + (CN)_1] (1+i) - P^{i'} \quad \dots (4.8)$$

donde:

$P^{i'}$ - monto de los pagos por pensiones efectuados desde el momento $t = 0$ hasta el momento $t = 1$, acumulado a la tasa de interés i' al momento $t = 1$.

Es obvio que la tasa de interés i es hipotética dado que - es la misma que se emplea en la valuación actuarial. Alconsi- derar la tasa de interés real¹ representada por i' , la fórmula ción es la que a continuación se muestra:

1 Consúltese el Apéndice I para la nota técnica del cálculo - de la tasa de interés real (o tasa de interés efectiva) ga- nada por un fondo.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= [F_0 + (CN)_0] (1+i) - P^1 + [F_0 + (CN)_0] (i'-1) - (P^1 - P^0) \\
 &= [F_0 + (CN)_0] [(1+i) + (i'-1)] - P^1 - P^1 + P^0 \\
 &= [F_0 + (CN)_0] (1+i') - P^1
 \end{aligned}$$

La ganancia en la productividad del fondo (G_2) será entonces:

$$G_2 = [F_0 + (CN)_0] (i'-1) - (P^1 - P^0)$$

Si $i' > i$ (como generalmente ocurre), existe una ganancia en rendimiento pero una pérdida en las pensiones en curso de pago. Se tiene pues que:

$$F_1 = [F_0 + (CN)_0] (1+i) - P^1 + G_2 \quad \dots(4.9)$$

Substituyendo las ecuaciones (4.4) y (4.5) en (4.9) se llega a:

$$F_1 = [(VPBP)_0 - (TCN)_0 (VPS)_0 + (TCN)_0 S_0] (1+i) - P^1 + G_2$$

y factorizando $(TCN)_0$ se obtiene

$$F_1 = [(VPBP)_0 - (TCN)_0 ((VPS)_0 - S_0)] [(1+i)] - P^1 + G_2 \quad \dots(4.10)$$

A continuación se sustituirán las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3) en la (4.10):

$$F_t = P_t^{(1)} [(VPBP)_t^0 - (TCN)_0 (VPS)_t^0] + E[F^1] - P^1 + G_1 \dots (4.11)$$

Esta ecuación a su vez se substituye en la ecuación (4.7) para llegar a una etapa más en la simplificación de esa fórmula:

$$\begin{aligned} [(TCN)_0 - (TCN)_t] (VPS)_t &= (TCN)_0 (VPS)_t - (VPBP)_t + \\ &+ P_t^{(1)} [(VPBP)_t^0 - (TCN)_0 (VPS)_t^0] + \\ &+ E[F^1] - P^1 + G_1 \dots (4.12) \end{aligned}$$

En este punto es necesario hacer una pequeña digresión a fin de hacer algunas asunciones relativas a la composición del personal de una empresa, atendiendo al status laboral en el que se puede clasificar.

Sean:

- A_t - número de empleados activos en el momento t .
- J_t - número de jubilados rentistas en el momento t .

Los eventos o contingencias por ocurrir durante un intervalo anual, entran en alguno de los conjuntos siguientes:

- M_{A_t} - número de muertes en A_t .

- M_{J_t} - número de muertes en J_t .
 S - número de separaciones voluntarias.
 I - número de separaciones por invalidez total y permanente.
 R - número de retiros o jubilaciones.
 N - número de nuevos ingresantes.

Al finalizar el primer año, la población activa de la empresa estará constituida por:

$$A_1 = A_0 - M_{A_0} - S - I - R + N$$

y el conjunto de jubilados rentistas quedará de la siguiente forma:

$$J_1 = J_0 - M_{J_0} + R$$

Relacionando recursivamente los subconjuntos de personas en los tiempos $t = 0$ y $t = 1$ se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 A_1 + J_1 &= A_0 - M_{A_0} - S - I - R + N + J_0 - M_{J_0} + R \\
 &= A_0 - M_{A_0} - S - I + N + J_0 - M_{J_0}
 \end{aligned}$$

Atendiendo a lo anterior, es posible desglosar el valor presente de los beneficios proyectados a favor de la población de

la empresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 (VPBP)_1 &= \sum_{A_0} (VPBP)_0^* - \sum_{H_{A_0}} (VPBP)_0^* - \sum_S (VPBP)_0^* + \\
 &- \sum_I (VPBP)_1^* + \sum_N (VPBP)_1^* + \sum_{I_0} (VPBP)_1^* + \\
 &- \sum_{H_1} (VPBP)_1^* + \sum_{A_0 \Delta A_1} \Delta(VPBP) \quad \dots (4.13)
 \end{aligned}$$

La ecuación (4.13) indica que el valor presente de los beneficios proyectados en el tiempo $t = 1$ equivale al valor presente de dichos beneficios de los empleados activos al tiempo $t = 0$, asumiendo que éstos permanecen en el mismo status laboral y reciben su incremento salarial esperado (o proyectado); menos la liberación de obligaciones por muertes, retiros y separaciones por invalidez; más la obligación en la que se incurre al considerar nuevos ingresantes al plan (suponiendo que la participación en el plan coincide con la fecha de ingreso a la empresa). A esto se le adiciona la obligación por pensiones en curso de pago a favor de los jubilados rentistas que permanecen con vida al tiempo $t = 1$, y se le deduce la liberación por el mismo concepto a consecuencia de los jubilados que fallecen en el intervalo. El último término de la ecuación es el cambio en la obligación debido a la experiencia salarial y sólo es significativo para aquellos empleados que estuvieron activos tanto en $t = 0$ como en $t = 1$ (es decir, $A_0 \cap A_1$).

Un desglose análogo al anterior es aplicable al valor presente de los sueldos:

$$\begin{aligned} (VPS)_t = & \sum_{A_0} (VPS)_t^0 - \sum_{H_{A_0}} (VPS)_t^0 - \sum_S (VPS)_t^0 + \\ & - \sum_I (VPS)_t^0 + \sum_N (VPS)_t^0 + \sum_{A_0 \cap A_1} \Delta(VPS)^0 \quad \dots (4.14) \end{aligned}$$

Después de la digresión anterior en donde el objetivo fué el de distribuir tanto el valor presente de los beneficios proyectados como el valor presente de los sueldos en los distintos subgrupos de la colectividad de la empresa, se hace referencia a la ecuación (4.12) en la que las expresiones (4.13) y (4.14) se substituyen. El resultado es :

$$\begin{aligned} [(TCN)_0 - (TCN)_1] (VPS)_t = & (TCN)_0 \left[\sum_{A_0} (VPS)_t^0 - \sum_{H_{A_0}} (VPS)_t^0 + \right. \\ & \left. - \sum_I (VPS)_t^0 + \sum_{\mu} (VPS)_t^0 + \sum_{A_0 \cap A_1} \Delta(VPS) \right] + \\ & - \left[\sum_{A_0} (VPBP)_t^0 - \sum_{H_{A_0}} (VPBP)_t^0 + \right. \\ & \left. - \sum_S (VPBP)_t^0 - \sum_I (VPBP)_t^0 + \right. \\ & \left. + \sum_N (VPBP)_t^0 + \sum_{J_0} (VPBP)_t^0 + \right. \\ & \left. - \sum_{H_{J_0}} (VPBP)_t^0 + \sum_{A_0 \cap A_1} \Delta(VPBP)^0 + \right. \\ & \left. + P_x^{(T)} \left[\sum_{A_0} (VPBP)_t^0 + \sum_{J_0} (VPBP)_t^0 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (TCN)_0 \sum_{A_0} (VPS)_i^0 \Big] + E [P^i] + \\
 & - P^i + G_x
 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando los sumandos de la ecuación anterior, se tiene que :

$$\begin{aligned}
 [(TCN)_0 - (TCN)_1] (VPS)_1 &= \sum_{M_{A_0}} (VPBP)_1^0 - (TCN)_0 \sum_{M_{A_0}} (VPS)_1^0 + \\
 & - q_x^{(1)} \left(\sum_{A_0} (VPBP)_1^0 - (TCN)_0 \sum_{A_0} (VPS)_1^0 \right) + \\
 & + \sum_S (VPBP)_1^0 - (TCN)_0 \sum_S (VPS)_1^0 + \\
 & + \sum_I (VPBP)_1^0 - (TCN)_0 \sum_I (VPS)_1^0 + \\
 & - \left(\sum_M (VPBP)_1^0 - (TCN)_0 \sum_M (VPS)_1^0 \right) + \\
 & + \sum_{M_A} (VPBP)_1^0 - q_x^{(m)} \sum_A (VPBP)_1^0 + \\
 & + E [P^i] - P^i + \\
 & - \left(\sum_{M \cap A_1} \Delta (VPBP) - (TCN)_0 \sum_{M \cap A_1} \Delta (VPS) \right) + \\
 & + G_x \qquad \dots (4.15)
 \end{aligned}$$

Esta es la fórmula fundamental para el análisis de las pérdidas y ganancias actuariales y la última parte del desarrollo iniciado con la fórmula (4.12). En otras palabras dicha fórmula ha sido descompuesta con la finalidad de expresarla en función de cada fuente de pérdida o ganancia.

Nótese la inclusión de las funciones $q_x^{(1)}$ y $q_x^{(m)}$. La primera de ellas fué substituida por $1 - p$ y es igual a la suma de las tasas decrementales por mortalidad, invalidez y rotación:

$$q_x^{(1)} = q_x^{(m)} + q_x^{(i)} + q_x^{(r)}$$

La $q_x^{(m)}$ es la probabilidad de muerte a la que se expone el grupo de jubilados. La razón de usar tasa y probabilidad de mortalidad estriba en el hecho de que el grupo de empleados -- activos está expuesto a una tasa --entendida como "probabilidad dependizada"--, por cada causa o decremento; en tanto que -- el grupo de jubilados rentistas solamente está afectado por la probabilidad de muerte, misma que se entiende como "independiente".

Dada la función $q_x^{(1)}$ como la adición de tres tasas, a continuación se sigue la separación de la fórmula (4.15) por cada -- causa de decremento, y más generalmente, por las causas que -- ocasionan una pérdida o una ganancia actuarial. En los incisos siguientes se muestra de una manera intuitiva, como la ganancia (o pérdida) equivale al exceso (o defecto) de la liberación --

real sobre la liberación esperada de la obligación actuarial:

a) Mortalidad:

$$\left(\sum_{H_{A_0}} (VPBP)_i^* - (TCN)_{A_0} \sum_{H_{A_0}} (VPS)_i^* \right) - q_x^{(m)} \sum_{A_0} (VPBP)_i^* - (TCN)_{A_0} \sum_{A_0} (VPS)_i^*$$

b) Invalidez:

$$\left(\sum_I (VPBP)_i^* - (TCN)_A \sum_I (VPS)_i^* \right) - q_x^{(i)} \left(\sum_{A_0} (VPBP)_i^* - (TCN)_{A_0} \sum_{A_0} (VPS)_i^* \right)$$

c) Rotación:

$$\left(\sum_S (VPBP)_i^* - (TCN)_S \sum_S (VPS)_i^* \right) - q_x^{(r)} \left(\sum_S (VPBP)_i^* - (TCN)_S \sum_S (VPS)_i^* \right)$$

d) Nuevos ingresantes:

$$-\left(\sum_N (VPBP)_i^* - (TCN)_N \sum_N (VPS)_i^* \right)$$

e) Mortalidad de jubilados:

$$\left(\sum_{H_{J_0}} (VPBP)_i^* - q_x^{(m)} \sum_J (VPBP)_i^* \right) + E[P^i] - P^i$$

f) Cambio en los salarios:

$$-\left(\sum_{A_0 \cap \Delta} \Delta(VPBP) - (TCN)_{A_0} \sum_{A_0 \cap \Delta} \Delta(VPS) \right)$$

ESTE TESIS NO DEBE
 SER PRESTADA A
 LA BIBLIOTECA
 DE LA UNAM

g) Ganancias en la productividad del fondo:

G_I

4. EXTENSION DEL ANALISIS PARA OTROS METODOS DE FINANCIAMIENTO.

Como quedó de manifiesto en la sección anterior, en el análisis presentado se considera un método agregado de costos en virtud de que se pretende darle un enfoque general al proceso ahí descrito. En esta sección se incluyen las modificaciones al esquema, para los siguientes métodos de financiamiento: Beneficio Acumulado (Crédito Unitario), Edad de Ingreso y Pasivo -- Inicial Congelado.

En referencia a lo anterior cabe señalar que algunos autores tienden a hacer una distinción explícita entre los métodos individuales de costo y los colectivos o agregados, para el análisis de las pérdidas y ganancias actuariales. Esto obedece al hecho de que la noción de pérdida o ganancia resulta más fácil entenderla como la diferencia de obligaciones no financiadas : la esperada menos la real; que como la diferencia entre dos tasas de costo normal.

El desarrollo de fórmulas es, pese a lo anterior, análogo al de la sección precedente.

A. Beneficio Acumulado (Crédito Unitario)

En la sección 2 del Capítulo III, se expresa el costo normal bajo este método de financiamiento. La representación algebrai-

ca que se necesita aquí, difiere de dicha formulación, de la cual se parte para obtener otra expresión:

$$\begin{aligned}
 (CN)_x &= b_x \cdot r \cdot x p_x^{(1)} v^{r-x} \ddot{O}_r^{(12)} \\
 &= b_x \frac{D_r}{D_x} \frac{N_r^{(12)}}{D_r} \\
 &= b_x \frac{N_r^{(12)}}{D_x}
 \end{aligned}$$

Nótase que lo anterior puede escribirse como

$$(CN)_x = b_x \cdot \frac{\ddot{O}_{x:r-x}^{(12)}}{\ddot{O}_{x:r-x}^{(12)}}$$

de donde se concluye que el beneficio asignado a la edad x (de acuerdo a la fórmula que para el efecto establezca el plan) -- multiplicado por el valor presente de una serie de pagos mensuales anticipados desde la edad x hasta la edad r (o con temporalidad $r - x$); constituye el costo normal.

Para el conjunto A_0 (empleados activos en $t = 0$), el costo-normal se expresa con

$$(CN)_0 = \sum_{A_0} b_x \cdot \frac{N_x^{(12)}}{D_x}$$

Procediendo a transformar en forma análoga la fórmula de -

obligación actuarial de este método, se tiene que esta obligación para el conjunto A_0 y el conjunto J_0 (jubilados rentistas en $t = 0$), toma respectivamente, la siguiente forma:

$$(OA)_0 = \sum_{A_0} B_0 \frac{N_r^{(12)}}{D_x}$$

y

$$(ON)_0 = \sum B_0 \frac{N_x^{(12)}}{D_x}$$

Como ya se había establecido, b significa el beneficio adquirido o el crédito "ganado" durante el año t ; en tanto que B es la suma de los beneficios adquiridos desde la edad de ingreso "y" hasta $t - 1$. Es decir

$$B_t = \sum_{i=y}^{t-1} b_i$$

Relacionando las fórmulas para el costo normal y para la obligación actuarial, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} [(OA)_0 + (CN)_0] (1+i) &= \left(\sum_{A_0} B_0 \frac{N_r^{(12)}}{D_x} + \sum_{J_0} B_0 \frac{N_x^{(12)}}{D_x} + \sum_{A_0} b_0 \frac{N_r^{(12)}}{D_x} \right) (1+i) \\ &= \left(\sum_{A_0} (B_0 + b_0) \frac{N_r^{(12)}}{D_x} + \sum_{J_0} B_0 \frac{N_x^{(12)}}{D_x} \right) (1+i) \end{aligned}$$

Nótese que $B_0 + b_0 = B_1$, por lo tanto:

$$[(OA)_0 + (CN)_0] (1+i) = \left(\sum_{A_0} B_0 \frac{N_r^{(12)}}{D_x} + \sum_{J_0} B_0 \frac{N_x^{(12)}}{D_x} \right) (1+i)$$

y con (4.1) y (4.2):

$$\left[(OA)_0 + (CN)_0 \right] (1+i) = P_x^{(n)} (OA)_1^0 + E [P^1] \quad \dots(4.16)$$

donde:

$(OA)_1^0$ - obligación actuarial al tiempo $t = 1$, derivada de la obligación actuarial al tiempo $t = 0$ y asumiendo que no hay alteración alguna, con excepción del incremento salarial.

El desarrollo de la fórmula (4.16) se efectuó con el objeto de aplicarla a la definición conceptual de la pérdida o ganancia, de la que se trata en el capítulo II (fórmula (2.4)). En este contexto, la obligación no financiada derivada de la obligación actuarial, se substituye simplemente por la obligación actuarial. La ganancia se representa entonces por la siguiente fórmula:

$$\text{GANANCIA} = P_x^{(n)} (OA)_1^0 - (OA)_1 + E [P^1] - P^1 + G_1$$

Obviamente si el resultado anterior fuera negativo, se tendría entonces una pérdida actuarial.

De acuerdo al desglose que se efectuó en la sección anterior, la obligación actuarial, $(OA)_1$, se puede expresar en función a la clasificación dada. Es decir,

$$\text{GANANCIA} = \sum_{M_{k_0}} (OA)_1^0 - q_x^{(m)} \sum_{K_x} (OA)_1^0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_1 (OA)_i^0 - q_x^{(0)} \sum_{10} (OA)_i^0 + \\
& + \sum_1 (OA)_i^1 - q_x^{(1)} \sum_{10} (OA)_i^1 + \\
& - \sum_N (OA)_i^0 + \\
& + \sum_{N_1} (OA)_i^1 - q_x^{(1)} \sum_{N_1} (OA)_i^1 + \\
& + E[P^1] - P^1 - \sum_{N_1 \cap A_1} \Delta(OA) + G \quad \dots(4.17)
\end{aligned}$$

El desarrollo de la fórmula anterior es análogo al de la fórmula (4.15), sin embargo tiene la diferencia de considerar la obligación actuarial en lugar del valor presente de los beneficios proyectados (VBPB).

B. Edad de Ingreso (Beneficio proyectado).

La ganancia actuarial en este método de financiamiento es expresable, al igual que en el método tratado anteriormente, - como el exceso de la obligación no financiada esperada sobre - la obligación no financiada real. Algebraicamente, esto significa lo siguiente:

$$G = E[(OA)_i] - (OA)_i$$

Tal como se procedió en la sección 2, la ecuación anterior puede transformarse para obtener una de la forma

$$G = [(OA)_0 + (CN)_0] (1+i) - (OA)_1 - P^1 + G_1$$

Por definición del método, la obligación actuarial equivalente a la diferencia entre el valor presente de los beneficios proyectados y el producto de la tasa de costo normal y el valor presente de los salarios. Es decir,

$$(OA)_0 = (VPBP)_0 - (TCN)_0 \cdot (VPS)_0$$

Asimismo es oportuno mencionar que el costo normal resulta de la aplicación de la tasa de costo normal a los salarios actuales. Esto es:

$$(CN)_0 = (TCN)_0 \cdot S_0$$

A su vez, en $t = 1$, la obligación actuarial es

$$(OA)_1 = (VPBP)_1 - (TCN)_1 \cdot (VPS)_1$$

Nótese que a la fórmula anterior se le ha omitido el subíndice a la tasa de costo normal. La razón de la omisión es la de que la tasa de costo normal se calcula individualmente y una vez hecho esto, debe permanecer constante, siempre que no

se den cambios en las provisiones del plan. A efectos de simplificación puede asumirse una edad promedio de ingreso de los participantes con el objeto de obtener una tasa de costo normal aplicable a todos ellos. Sin embargo, la técnica adecuada es la de calcular el costo normal individual de cada año. El procedimiento produce una tasa de costo normal $(TCN)_t$ que difiere a la obtenida en el año previo (o sea $(TCN)_{t-1}$). Por consiguiente, dado que dicha tasa se calcula anualmente, una parte de la experiencia actuarial es absorbida en el valor presente de los costos normales futuros. Para una mayor comprensión de lo anterior, pueden substituirse las fórmulas $(OA)_0$, $(CN)_0$ y $(OA)_1$ en la ecuación (2.4) obteniéndose lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{GANANCIA} &= \left[(VPBP)_0 - (TCN)_0 \cdot ((VPS)_0 - S_0) \right] (1+i) + \\
 &\quad - \left[(VPBP)_1 - (TCN)_1 \cdot (VPS)_1 \right] - P^1 + G_1 \\
 &= \left[(VPBP)_0 - (TCN)_0 \cdot ((VPS)_0 - S_0) \right] (1+i) + \\
 &\quad - \left[(VPBP)_1 - (TCN)_1 \cdot (VPS)_1 \right] - P^1 + \\
 &\quad + G_1 - \left[(TCN)_0 - (TCN)_1 \right] (VPS)_1 \\
 &\quad \dots (4.18)
 \end{aligned}$$

Claramente se nota que si $(TCN)_0 > (TCN)_1$, las ganancias actuariales serán menores bajo este planteamiento; dado que la experiencia del año no recae íntegramente de la obligación no financiada. Repercute, en cambio, en las contribuciones futuras, las cuales se verán disminuidas. Por el contrario, si -

$(TCN)_0 < (TCN)_1$, entonces las ganancias actuariales serán mayores en virtud de que serán compensadas por contribuciones futuras mayores.

En la práctica, el último término de la ecuación (4.18) es absorbido por la experiencia salarial, dado que solamente es relevante para aquellos empleados pertenecientes al conjunto $A_0 \cap A_1$; es decir, los empleados activos en $t = 0$ y $t = 1$.

Para llegar a las fórmulas de pérdidas y ganancias actuariales partiendo de la ecuación (4.18), se procede de manera similar que en el desarrollo de la fórmula (4.15). Primeramente se escribe:

$$\begin{aligned} & \left\{ (VPBP)_0 - (TCN)_0 [(VPS)_0 - S] \right\} (1+i) \\ & = P_x^{(n)} \left[(VPBP)_1^* - (TCN)_0 (VPS)_1^* \right] \\ & = P_x^{(n)} (OA)_1^* \end{aligned}$$

Posteriormente $(VPBP)_1$ y $(VPS)_1$ se expresan en sus componentes, de la misma manera como se procedió para obtener la fórmula (4.15) (ó (4.17)).

c. Pasivo Inicial Congelado.

Atendiendo a lo establecido en el capítulo III en lo refe--

rente a este método de financiamiento, la tasa de costo normal se expresa mediante la siguiente relación:

$$(TCN)_0 = \frac{(VPBP)_0 - F_0 - (ONF)_0}{(VPS)_0}$$

en donde $(ONF)_t$ es la obligación no financiada en el momento t .

De lo anterior se tiene que:

$$F_0 = (VPBP)_0 - (ONF)_0 - (TCN)_0 (VPS)_0$$

y obviamente,

$$(TCN)_1 = \frac{(VPBP)_1 - F_1 - (ONF)_1}{(VPS)_1}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} [(TCN)_0 - (TCN)_1] (VPS)_1 &= (TCN)_0 (VPS)_1 - (VPBP)_1 + F_1 + (ONF)_1 \\ &\dots (4.20) \end{aligned}$$

Pero dado que la obligación no financiada en $t = 1$ y el fondo en el mismo momento, se pueden expresar de la siguiente manera:

$$(ONF)_1 = [(ONF)_0 + (CN)_0] (1+i) - C^1$$

y

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 (1+i)^1 + C^1 - P^1 \\ &= [F_0 (1+i) + C^1 - P^1] + G_1 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} F_1 + (ONF)_1 &= [(ONF)_0 + (CN)_0] (1+i) - C^1 + F_0 (1+i) + \\ &\quad + C^1 - P^1 + G_1 \\ &= [(ONF)_0 + (CN)_0 + F_0] (1+i) - P^1 + G_1 \end{aligned}$$

Después de substituir la ecuación (4.19) en la precedente y considerando la relación (4.5), se llega a

$$F_1 + (ONF)_1 = \{ (VPBP)_0 - (TCN)_0 [(VPS)_0 - S_0] \} (1+i) - P^1 + G_1$$

Finalmente, si ésta última expresión se substituye en la ecuación (4.20), el resultado obtenido será:

$$\begin{aligned} [(TCN)_1 - (TCN)_0] (VPS)_1 &= (TCN)_0 (VPS)_1 - (VPBP)_1 + \\ &\quad + \{ (VPBP)_0 - (TCN)_0 [(VPS)_0 - S_0] \} \times \\ &\quad \times (1+i) - P^1 + G_1 \end{aligned}$$

A continuación se procede a un desarrollo similar al de la derivación de la fórmula (4.15). Primeramente se substituyen las fórmulas de la sección de Postulados Básicos (4.1), (4.2) y

(4.3) en la fórmula (4.21):

$$\begin{aligned}
 [(\text{TCN})_0 - (\text{TCN})_1] (\text{VPS})_1 &= (\text{TCN})_0 (\text{VPS})_1 - (\text{VPBP})_1 + \\
 &+ (\text{VPBP})_0 (1+i) + \\
 &- (\text{TCN})_0 (1+i) [(\text{VPS})_0 - S_0] - P^i + G_1 \\
 &= (\text{TCN})_0 (\text{VPS})_1 - (\text{VPBP})_1 + \\
 &+ p_x^{(n)} (\text{VPBP})_1^0 + E [P^i] + \\
 &- (\text{TCN})_0 p_x^{(n)} (\text{VPS})_1^0 - P_i + G_1 \\
 &= (\text{TCN})_0 (\text{VPS})_1 - (\text{VPBP})_1 + \\
 &+ p_x^{(n)} [(\text{VPBP})_1^0 - (\text{TCN})_0 (\text{VPS})_1^0] + \\
 &+ E [P^i] - P^i + G_1
 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, se ha llegado a la fórmula (4.12).
 Resta únicamente desarrollar los términos $(\text{VPBP})_1$ y $(\text{VPS})_1$, de acuerdo a la técnica seguida con anterioridad, a fin de obtener la derivación correspondiente al método en cuestión.

CAPITULO V

SISTEMAS DE RECONOCIMIENTO

1. INTRODUCCION.

Una vez que se ha calculado la pérdida o la ganancia actuarial aplicando para el efecto las fórmulas que se explican en el capítulo anterior, se tienen tres sistemas o técnicas para su reconocimiento. La forma de reflejar la pérdida o la ganancia obtenida, en el costo anual, es independiente del cálculo de ésta.

Los sistemas básicos son:

- i) Sistema de distribución,
- ii) Sistema de promedios,
- iii) Sistema de ajuste por servicios pasados.

La selección entre el sistema de reconocimiento es una decisión significativa en el contexto contable del plan de pensiones, dado que la alteración en el costo anual puede repercutir de un año al siguiente y, en situaciones extremas, el efecto de las pérdidas y de las ganancias puede estar diferido indefinidamente. Atendiendo a lo anterior, debe hacerse una revisión minuciosa del financiamiento del plan, para que el sistema elegi-

do se adecue a sus circunstancias particulares.

En las secciones subsecuentes se hará una explicación de estos sistemas de reconocimiento, incluyendo sus variantes, y al final del capítulo se presentará una comparación entre ellos.

2. SISTEMA DE DISTRIBUCION.

Este sistema suele ser el de más frecuente aplicación¹. Es una característica integral del método de financiamiento de Pasivo Inicial Congelado y una modificación de la versión agregada del método de Edad de Ingreso. Esto no quiere decir que no sea factible su aplicación bajo otros métodos de financiamiento

Existen tres variantes al sistema de distribución. La primera de ellas y la más común, consiste en distribuir todas las pérdidas y ganancias no financiadas sobre la vida activa futura de los empleados (o bien, sobre el valor presente de los sueldos). Cuando se utiliza el método de financiamiento de Pasivo Inicial Congelado, el ajuste se incorpora en el cálculo del costo normal de cada año. Si la pérdida o la ganancia se calcula independientemente (como en el caso del método de Crédito Unitario), el procedimiento matemático para su cálculo es el que a continuación se describe:

1. En el año inicial no existen pérdidas ni ganancias, luego, no hay ajuste al costo normal.

1 El sistema de distribución de la utilidad o pérdida actuarial en ejercicios futuros, es el único que la Ley del Impuesto Sobre la Renta permite aplicar en México.

2 El "Accounting Principles Board" (ref. bibliografía) recomienda que no se aplique con el método de Crédito Unitario.

2. En el segundo año se determina la pérdida o ganancia en base a la experiencia del año previo y se divide entre una anualidad contingente referida al promedio de la vida activa futura de los empleados. El costo normal del segundo año se ajusta con el resultado anterior.
3. En el tercer año, el exceso de la pérdida o de la ganancia del primer año sobre el ajuste del costo normal del segundo año, se incrementa a la tasa de interés de la -valuación actuarial y se le suma la ganancia o la pérdida obtenida de la experiencia del segundo año. El monto anterior se divide entre la anualidad descrita en el paso 2 y el resultado se aplica al costo normal del año
4. El proceso iterativo continúa en años subsecuentes.

Es importante notar que el factor o anualidad contingente - citada en el paso 2, será siempre variable en virtud de la fluctuación del promedio de la vida activa futura del personal de - la empresa. La anualidad es inversamente proporcional a la - edad; es decir, cuanto mayor sea la edad promedio, tanto menor será la anualidad y por consiguiente el cociente de dividir la pérdida o la ganancia -bajo el supuesto de que ésta se mantuvie se constante-, será cada vez mayor.

El hecho de que el ajuste se efectue de manera independien-

te o de que su cálculo se incorpore implícitamente al del costo normal, no altera el resultado, ya que éste será equivalente.

Dada la característica de esta variante, se le distinguirá como "distribución sobre la vida activa futura de los empleados". La tabla 1 muestra el caso de un plan hipotético en el que se ejemplifica tanto el ajuste anual (o ajuste actual) como la porción de pérdidas y ganancias que se difieren a ejercicios futuros (columna "no amortizado").

La segunda variación del sistema de distribución consiste en tratar la pérdida o la ganancia de cada año, como unidad independiente y amortizarla en un período determinado (y constante) de años. El ajuste anual a los costos normales en años futuros se determina mediante el proceso descrito para la primera variante. El ajuste total al costo normal de un año en particular será pues la suma algebraica de los ajustes individuales - provenientes de todas las pérdidas y ganancias previas que hasta ese momento no hayan sido amortizadas.

Para calcular el ajuste mencionado, se divide la pérdida o la ganancia entre una anualidad cierta por el número requerido de años. Este factor incorpora la misma tasa de interés de la valuación actuarial. A efectos ilustrativos, con un período de amortización de 10 años a la tasa de interés del 9 % anual compuesto, la anualidad (anticipada) es 6.995, y su recíproco es 0.143. Esto significa que el 14.3 % de la ganancia o de la pér

TABLA 1

Sistema de Distribución:

Distribución sobre la vida activa de los Empleados

AÑO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	.00	120,000.00
2	198,000.00	12,012.01	315,706.88
3	36,000.00	31,602.29	345,673.94
4	50,000.00	74,662.00	389,068.38
5	26,000.00	38,945.78	407,633.63
6	54,000.00	40,804.16	453,844.06
7	224,000.00	45,429.84	669,171.50
8	285,000.00	66,984.14	941,394.13
9	208,000.00	94,232.64	1,131,395.00
10	33,000.00	113,252.75	1,142,775.00
11	221,000.00	114,391.89	1,341,937.50
12	35,000.00	134,328.09	1,351,294.25
13	324,000.00	135,264.69	1,649,472.00
14	171,000.00	165,112.31	1,788,952.00
15	214,500.00	179,074.28	1,969,266.50
16	380,000.00	197,123.78	2,311,635.50
17	61,500.00	231,394.94	2,328,962.00
18	42,000.00	233,129.34	2,326,457.50
19	193,500.00	232,878.63	2,475,501.00
20	242,000.00	247,797.91	2,670,196.00
21	-180,000.00	267,286.88	2,439,170.50
22	69,000.00	244,161.22	2,461,560.00
23	352,500.00	246,402.41	2,767,021.50
24	360,000.00	276,979.13	3,074,146.00
25	250,000.00	307,722.31	3,265,401.50

dida de un año en particular es sumada o restada -según el caso al costo normal de cada uno de los siguientes diez años. En este ejemplo el ajuste total al costo normal de cada año está dado por la suma algebraica de los importes anuales derivados de las pérdidas y de las ganancias actuariales ocurridas durante un período de diez años.

Los ajustes al costo normal pueden ser expresados en unidades monetarias; sin embargo en algunas circunstancias suele ser ventajoso expresarlos como un porcentaje de los sueldos futuros que los empleados devenguen durante el período de amortización.

La tabla 2 muestra el caso de un plan hipotético bajo esta variante del sistema de distribución, la cual se denominará por "amortización a n-años con interés descontado".

El formato de la tabla 2 es similar al de la tabla 1.

La tercera variación al sistema de distribución es parecida a la segunda, excepto por que la pérdida o la ganancia obtenida se divide entre un número determinado de años en vez de una anualidad cierta. Dado que el importe de la pérdida o ganancia se descuenta, bajo este criterio, a la tasa de interés de la valuación actuarial, se precisa un ajuste para los años subsecuentes. Por ello la ganancia o la pérdida actuarial total de cada año es la suma de los siguientes conceptos:

TABLA 2

Sistema de distribución:
Amortización a 20 años con interés descontado

AÑO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	.00	120,000.00
2	198,000.00	13,145.56	332,291.31
3	36,000.00	36,018.89	362,176.94
4	50,000.00	43,204.26	402,190.19
5	26,000.00	52,569.97	409,415.13
6	54,000.00	60,149.47	439,559.56
7	224,000.00	71,478.44	645,368.39
8	265,000.00	102,449.91	902,431.12
9	208,000.00	142,891.16	1,054,618.50
10	33,000.00	178,537.03	990,998.75
11	221,000.00	198,220.38	1,104,909.25
12	35,000.00	240,269.97	980,606.75
13	324,000.00	265,728.38	1,132,377.25
14	171,000.00	325,136.94	1,066,282.00
15	214,500.00	373,131.69	969,338.88
16	380,000.00	430,211.25	1,023,649.00
17	61,500.00	510,557.94	626,304.25
18	42,000.00	563,245.25	114,514.30
19	193,500.00	618,538.25	-338,471.06
20	242,000.00	695,403.88	-862,143.63
21	-180,000.00	784,500.38	-1,992,131.75
22	69,000.00	835,387.00	-3,006,795.50
23	352,500.00	918,130.50	-3,693,933.00
24	330,000.00	1,039,377.25	-4,984,908.00
25	250,000.00	1,172,357.75	-6,438,913.00

1. La ganancia o la pérdida referida en el año en cuestión.
2. El interés ganado de las pérdidas o de las ganancias de años anteriores que no hayan sido amortizadas hasta el momento del cálculo.

Como puede deducirse, el interés se difiere a ejercicios futuros, motivo por el que para distinguir esta modalidad del sistema de distribución se le designará como "amortización a n años con interés diferido". El ejemplo correspondiente de esta variante se muestra en la tabla 3.

TABLA 3

Sistema de distribución:
Amortización a 20 años con interés diferido

AÑO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	.00	120,000.00
2	158,000.00	6,000.00	340,080.00
3	36,000.00	16,440.00	392,007.56
4	50,000.00	19,719.60	460,293.61
5	26,000.00	23,994.36	503,906.38
6	54,000.00	27,453.85	570,193.13
7	224,000.00	32,624.70	838,829.50
8	285,000.00	46,760.31	1,174,004.75
9	208,000.00	65,219.39	1,435,295.75
10	33,000.00	81,489.13	1,511,619.25
11	221,000.00	90,473.14	1,789,939.00
12	35,000.00	109,665.72	1,869,647.75
13	324,000.00	121,285.63	2,258,874.50
14	171,000.00	146,401.31	2,486,805.50
15	214,500.00	170,307.41	2,758,787.50
16	390,000.00	196,360.06	3,207,245.50
17	61,500.00	233,032.44	3,306,927.00
18	42,000.00	257,080.34	3,372,292.50
19	193,500.00	282,317.56	3,578,987.50
20	242,000.00	317,401.13	3,818,909.00
21	-180,000.00	358,067.13	3,576,117.50
22	69,000.00	381,293.19	3,557,569.50
23	352,500.00	419,059.56	3,805,199.50
24	360,000.00	474,399.88	4,022,971.00
25	250,000.00	535,095.88	4,074,283.50

3. SISTEMA DE PROMEDIOS

Este sistema se deriva de técnicas de ajuste de algunos procesos contables y financieros. Una razón práctica para su empleo, es la de que los ajustes por pérdidas y ganancias actuariales tienen su efecto de manera inmediata en el costo de las pensiones. Sin embargo puede suceder que en años en que se verifiquen ganancias extraordinarias, el monto de la aportación exceda los límites legales establecidos a efecto de la deducibilidad de impuestos¹. Asimismo si la empresa busca que la prebenda fiscal se efectue de manera inmediata, es decir, que el reconocimiento corresponda virtualmente al periodo en que se está generando el costo, este sistema no es el adecuado

El promedio de las pérdidas y ganancias actuariales no necesariamente tiene que expresarse como un monto; puede expresarse como un porcentaje del costo normal o bien, como un porcentaje de la nómina.

1 Normalmente existe legislación sobre la aportación anual máxima al fondo de un plan de pensiones. En México la Ley del Impuesto Sobre la Renta establece que cuando se haga la distinción entre servicios ya prestados y servicios futuros deberá aportarse al fondo el costo normal de los servicios futuros y por los servicios ya prestados la aportación será una cantidad que no exceda del 10 % anual del valor del pasivo correspondiente a la fecha del establecimiento del plan más los intereses que generaría el saldo no deducido a la tasa que al efecto establezca para financiar el plan. (art. 35 del Reglamento de la Ley del Impuesto Sobre la Renta).

El número de años en el cual se calcula el promedio, debe ser fijo para que haya consistencia, y en la medida en la que el plan vaya ganando antigüedad, se puede ir incrementando ese número, obteniendo así una mejor estimación.

En los primeros años del establecimiento del plan, es obvio que no existen elementos suficientes para el cálculo del ajuste anual. Es decir, dado que el promedio se calcula sobre n años, no es sino hasta el n -ésimo año del plan en el que se puede empezar a promediar. Las pérdidas y ganancias de los $n-1$ años anteriores pueden ser reconocidas en el año de su determinación, o bien, pueden hacerse proyecciones para estimar las desviaciones futuras y de esta manera, obtener el promedio requerido para el cálculo.

La tabla 4 muestra un caso en el que el promedio se calcula sobre un período de veinte años.

TABLA 4

Sistema de Promedios:
Promedio sobre 20 años

ARO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	100,000.00	20,000.00
2	198,000.00	164,400.00	113,100.00
3	38,000.00	100,700.00	48,400.00
4	50,000.00	99,200.00	-800.00
5	26,000.00	93,000.00	-67,800.00
6	54,000.00	91,950.00	-105,750.00
7	224,000.00	100,650.00	17,600.00
8	285,000.00	115,400.00	187,200.00
9	208,000.00	126,550.00	268,650.00
10	33,000.00	127,950.00	173,700.00
11	221,000.00	137,750.00	256,950.00
12	35,000.00	133,250.00	158,700.00
13	324,000.00	140,700.00	342,000.00
14	171,000.00	140,750.00	372,250.00
15	214,500.00	142,475.00	444,275.00
16	380,000.00	153,475.00	670,800.00
17	61,500.00	149,050.00	587,250.00
18	42,000.00	144,900.00	480,350.00
19	193,500.00	148,825.00	525,025.00
20	242,000.00	155,925.00	611,100.00
21	-180,000.00	140,925.00	290,175.00
22	69,000.00	134,475.00	324,700.00
23	352,500.00	150,300.00	426,900.00
24	360,000.00	165,800.00	621,100.00
25	250,000.00	177,000.00	694,100.00

4. SISTEMA DE AJUSTE POR SERVICIOS PASADOS.

Este sistema de reconocimiento de las pérdidas y ganancias actuariales precisa un ajuste en relación directa al costo de las pensiones por servicios pasados. Si en el plan se amortiza el valor presente de obligaciones por servicios pasados en forma paralela a los servicios futuros, el ajuste anual por pérdidas y ganancias equivale a la pérdida o ganancia neta acumulada de todos los años anteriores, multiplicada por la tasa de interés utilizada en la valuación actuarial. Si en cambio, el valor presente de obligaciones por servicios pasados se amortiza en un número fijo de años, la ganancia o pérdida de cada año representa un costo para ser cubierto en el período de la amortización. El ajuste total para un año en particular es la suma neta de las cantidades derivadas de pérdidas o ganancias, de todos los años previos al cálculo.

Este sistema de reconocimiento tiene dos variantes:

La primera variante considera solamente el interés de la porción no financiada y lo aplica al año en curso. Este monto se resta de la porción no financiada y el resultado se incrementa con la tasa de interés respectiva. La segunda variante no es más que una amortización de la pérdida o ganancia de cada año, en un período determinado que se va reduciendo a través -

del tiempo. Por ejemplo, si el período de amortización se fija en diez años, el monto del primer año se amortiza en este período; el del segundo año en nueve años y así sucesivamente.

Para distinguir las variantes anteriores, a la primera de ellas se le llamará "ajuste por interés" , en tanto que a la segunda "ajuste por amortización". Los ejemplos respectivos se muestran en las tablas 5 y 6.

TABLA 5
Sistema de Ajuste por Servicios
Pasados:
Ajuste por interés

ANO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	.00	120,000.00
2	198,000.00	10,300.00	317,028.00
3	36,000.00	28,520.00	350,361.89
4	50,000.00	31,060.00	397,170.06
5	26,000.00	36,360.00	419,282.94
6	54,000.00	38,700.00	468,035.38
7	224,000.00	43,560.00	687,550.13
8	285,000.00	63,720.00	964,974.75
9	208,000.00	89,370.00	1,162,409.25
10	33,000.00	109,090.00	1,182,208.00
11	221,000.00	111,060.00	1,390,551.25
12	35,000.00	130,950.00	1,405,785.25
13	324,000.00	134,100.00	1,710,136.75
14	171,000.00	163,260.00	1,357,035.50
15	214,500.00	178,650.00	2,044,005.50
16	300,000.00	197,955.00	2,332,195.00
17	61,500.00	232,155.00	2,415,943.50
18	42,000.00	237,690.00	2,416,296.00
19	193,500.00	241,470.00	2,564,060.00
20	242,000.00	252,895.00	2,734,640.50
21	-160,000.00	200,655.00	2,516,633.00
22	59,000.00	264,465.00	2,523,863.00
23	352,500.00	270,675.00	2,800,474.50
24	360,000.00	302,400.00	3,091,621.00
25	250,000.00	334,300.00	3,254,934.50

TABLA 6

Sistema de Ajuste por Servicios
Pasados:

Ajuste por Amortización a
20 años

AÑO	PERDIDA O GANANCIA	AJUSTE ACTUAL	NO AMORTIZADO
1	120,000.00	.00	120,000.00
2	198,000.00	13,145.58	314,471.31
3	36,000.00	35,136.02	340,475.44
4	50,000.00	36,886.49	378,731.94
5	26,000.00	44,329.16	390,493.00
6	54,000.00	46,977.01	428,438.94
7	224,000.00	53,151.67	633,063.13
8	285,000.00	81,306.33	886,414.75
9	208,000.00	118,395.39	1,045,141.00
10	33,000.00	145,954.69	1,013,113.13
11	221,000.00	148,873.63	1,163,021.00
12	35,000.00	131,222.09	1,105,160.75
13	324,000.00	184,339.56	1,327,695.25
14	171,000.00	239,880.63	1,356,718.00
15	214,500.00	269,567.19	1,399,494.25
16	380,000.00	311,975.19	1,565,395.50
17	61,500.00	402,451.56	1,329,108.75
18	42,000.00	410,254.50	1,043,551.00
19	193,500.00	412,260.13	681,607.00
20	242,000.00	501,166.38	656,680.25

CAPITULO VI

CASO PRACTICO

1. BASES DE CALCULO.

Con el objeto de llevar a la práctica la teoría que se ha sostenido hasta este capítulo, se ha tomado un caso típico de las valuaciones de una empresa de la industria de la transformación. A efectos ilustrativos se han considerado decrementos del status de empleados activos por las diferentes causas de ocurrencia: mortalidad, invalidez y rotación.

A continuación se describen las bases del plan y posteriormente se estipularán las hipótesis actuariales.

A. Bases del Plan de Pensiones por Jubilación.

- Fecha de valuación: 1° de enero de cada año.
- Grupo elegible: Todo el personal de planta y tiempo completo.
- Requisitos de participación: El personal participante será aquel que haya cumplido un mínimo de tres años de servicio, cuente al menos con una edad de 25 años y esté en posibilidad diez años al llegar a la fecha normal de jubilación.

- Edad normal de retiro: Será a los 65 años.

- Edad anticipada de retiro: Se permitirá la jubilación anticipada a partir de los 55 años previa autorización de la empresa, o desde los 60 a solicitud del participante. En ambos casos se requerirán 10 años de antigüedad y el beneficio se reducirá actuarialmente.

- Servicio pensionable: Serán los años de servicio que el empleado preste a la empresa, desde su fecha de ingreso, hasta su fecha de jubilación normal.

- Sueldo mensual: Es el salario mensual nominal que la empresa esté pagando al empleado a cambio de su labor ordinaria, incrementado en un doceavo por concepto de la gratificación anual.

- Sueldo pensionable: Es el sueldo base para la determinación de la pensión y será equivalente al sueldo promedio devengado por el participante durante los 12 meses previos a la fecha de jubilación.

- Cuantía de la pensión: La pensión mensual se calculará de acuerdo a la siguiente regla:
 - a) Pensión básica: Es igual al 0.7 % del sueldo pensionable del participante, multiplicado por -

el número de años de servicio pensionable aumentado - en 4.5

- b) Pensión adicional: Es igual al 0.7 % del sueldo pensionable en exceso (si existiese), al promedio de 10 veces el salario mínimo vigente del D.F. de los 5 - años previos a la fecha de jubilación, multiplicado - por el número de años de servicio pensionable aumenta do en 4.5

- Beneficio a la jubilación: El plan concederá a la edad normal de jubilación, un beneficio consistente de una renta mensual vitalicia con 120 pagos garantizados.
- Costo: El costo del plan es absorbido en su totalidad por la empresa.

En cuanto a hipótesis actuariales concierne, las siguientes fueron las utilizadas en las valuaciones actuariales presentadas:

- Tabla de mortalidad de activos: Experiencia Mexicana - 62-67 (qx básica).
- Tabla de mortalidad de jubilados: Group Annuity Table (GA-1951).
- Tabla de invalidez: Experiencia Norteamericana (propa-

rada por George B. Buck).

- Tabla de rotación: Experiencia de rotación GAM-1971 (Group Annuity Males).
- Tasa de interés: 9 % anual compuesto antes y después de la jubilación.
- Tasa de incremento salarial: De acuerdo a los siguientes - porcentajes anuales compuestos:

<u>edad</u>	<u>%</u>
hasta 35 años	8.8
de 36 a 45	8.1
de 46 a 55	7.4
de 56 en adelante	6.7

- Tasa de incremento del salario mínimo del D.F. : 7 %.

El método de financiamiento utilizado en la valuación actuarial fue la versión agregada o colectiva del método de Edad de Ingreso.

3. RESULTADOS DE LAS VALUACIONES ACTUARIALES.

En esta sección se concluirá con la información que se va a necesitar para el desarrollo de los ejemplos numéricos, objetivo del presente capítulo. Se efectuaron dos valuaciones actuariales de años consecutivos, cuyos resúmenes de resultados, se presentan a continuación. Asimismo, se da una serie de datos relativos a los eventos que ocurrieron en el período comprendido entre las dos valuaciones.

El ejemplo tomado, es de un caso auténtico de una empresa de la industria de la transformación, sin embargo, algunos hechos han sido simulados, con la finalidad de ilustrar todas las desviaciones de un plan actual con la experiencia esperada

RESUMEN DE RESULTADOS
AL 1° DE ENERO DE 1985

Número de empleados:	707
Número de participantes:	454
Número de jubilados:	4
Tasa de participación:	64.21 %
Nómina anual:	513'869,890
V.P. de la nómina de participantes:	11,504'409,960
Valor presente de los beneficios proyectados:	
- por pensiones en curso de pago:	7'291,833
- por servicios pasados:	108'375,524
- por servicios futuros:	253'887,678
- total:	369'555,035
Obligación actuarial:	47'085,633
Fondo en fideicomiso:	36'813,907
Costo normal:	10'271,726
Tasa de costo normal:	1:999 %
Edad promedio:	31.5 años
Antigüedad promedio:	4.0 años
Sueldo promedio:	60,569

RESUMEN DE RESULTADOS
AL 1° DE ENERO DE 1986

Número de empleados:	738
Número de participantes:	495
Número de jubilados:	7
Tasa de participación:	67.07 %
Nómina anual:	729'695,244
V.P. de la nómina de participantes:	14,802'687,230
Valor presente de los beneficios proyectados:	
- por pensiones en curso de pago:	13'125,299
- por servicios pasados:	150'641,978
- por servicios futuros:	342'748,803
- total:	506'516,080
Obligación actuarial:	72'878,205
Fondo en fideicomiso:	57'380,165
Costo normal:	15'498,040
Tasa de costo normal:	2.124 %
Edad promedio:	32.4 años
Antigüedad promedio:	5.0 años
Sueldo promedio:	82,396

Del 1° de enero al 31 de diciembre de 1985, tuvieron lugar los siguientes eventos:

<u>EDAD</u>	<u>FALLECIMIENTOS</u>	<u>INVALIDADOS</u>	<u>SEPARACIONES</u>	<u>N. INGRESOS</u>
19	-	-	4	11
20	-	-	3	16
21	-	-	5	10
24	-	-	2	8
27	-	1	-	3
30	1	-	-	1
34	-	-	1	2
36	-	-	-	2
37	-	1	-	-
42	1	-	-	1
50	1	-	1	1
51	-	1	-	-
59	1	1	-	1
65	1	-	3	-
	—	—	—	—
	5	4	19	56

Adicionalmente se proporciona la siguiente información -
auxiliar:

- Tres personas alcanzaron el derecho a la jubilación.
- El valor presente de los beneficios proyectados a favor de los nuevos ingresantes, fue \$ 38'139,870; y el valor presente de sus sueldos, \$ 309'832,243 (nuevos in

santes al plan, o los que alcanzaron el status de participantes).

- El valor presente de los beneficios proyectados a favor de las personas que se separaron de la empresa, fue - \$ 15'674,750; y el valor presente de sus sueldos ascendió a \$ 201'775,388
- El valor presente de los beneficios proyectados a favor de las personas que fallecieron antes de la edad 65, fue \$ 4'862,101; y el valor presente de sus sueldos - \$ 65'777,686
- El valor presente de los beneficios proyectados a favor de las personas que fallecieron después de la edad 65 fue nulo, dado que no hubo fallecimientos posteriores a esa edad; obviamente, el valor presente de los sueldos también es igual a cero.
- El valor presente de los beneficios proyectados a favor de las personas que estuvieron activas durante los dos periodos fue \$ 23'148,934 mayor, que el valor en el - primer periodo; y el valor presente de sus sueldos futuros se incrementó en \$ 140'507,951
- El monto de los pagos efectuados a los jubilados rentistas en forma de rentas mensuales vitalicias con 120 períodos de garantía, fue \$ 368,274 durante el año transcurrido.

- La tasa de rendimiento del fondo en fideicomiso, calculada de acuerdo a la fórmula descrita en el Apéndice I, fue 51.192 %

3. APLICACION DE LAS FORMULAS DE PERDIDAS Y GANANCIAS ACTUARIALES.

En base a la información proporcionada en las dos secciones precedentes, se efectua en esta sección, la aplicación de las fórmulas que se desarrollaron en el capítulo IV.

El análisis de las pérdidas y ganancias de las dos valuaciones actuariales presentadas, se desglosa en las siguientes fuentes de desviación:

a) Interés:

$$G_I = [F_0 + (CN)_0] (i^t - i) - (P^t - P^i)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} G_I &= (36'813,907 + 10'271,726) (0.51192 - 0.09) + \\ &\quad - 368,274 (1.51192) - 368,274 (1.09) \\ &= 19'710,988 \end{aligned}$$

b) Nuevos ingresantes al plan:

$$- \left(\sum_N (VPBP)_t - (TCN)_0 \sum_M (VPS)_t \right)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & - [38'139,870 - (0.01999) (309'832,243)] \\
 & = - 31'946,323
 \end{aligned}$$

c) Separaciones:

$$\left(\sum_x (VPBP)_i^o - (TCN)_o \sum_x (VPS)_i^o \right)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & [15'674,570 - (0.01999) (201'775,388)] \\
 & = 11'641,080
 \end{aligned}$$

d) Muertes (antes de la jubilación):

-experiencia real:

$$\left(\sum_{n_{k_2}} (VPBP)_i^o - (TCN)_o \sum_{n_{k_2}} (VPS)_i^o \right)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 & [4'862,101 - (0.01999) (65'777,686)] \\
 & = 3'547,205
 \end{aligned}$$

-experiencia esperada:

(El cálculo fue obtenido por computadora).

$$= 683,393$$

por lo tanto, la diferencia entre experiencia real y experiencia esperada es $3'547,205 - 683,393 = 2'863,812$

e) Muertes (después de la jubilación):

$$\left(\sum_y \sum_{t_k} (VPBP) - q_x^{(m)} \sum_x (VPBP)_i^* \right) + E[P^i] - P^i$$

$$E[P^i] = \frac{13}{24} (1 + i) + \frac{11}{24} P_x^{(m)}$$

por lo tanto,

$$\left[0 - 0.02126(4)(368,274) \right] + \frac{13}{24} (0.09) + \frac{11}{24} (0.95728) +$$

$$- 368,274 (1.09)$$

$$= - 432,736$$

f) Cambio en los salarios:

$$- \left(\sum_{\text{ANA}} \Delta(VPBP) - (TCN) \sum_{\text{AND}} \Delta(VPS) \right)$$

por lo tanto,

$$- [23'148,934 - (0.01999) (140'507,951)]$$

$$= -20'340,180$$

Después de haber obtenido los resultados anteriores, se sigue la elaboración del sumario de los mismos, que a continuación se muestra.

SUMARIO DE RESULTADOS

FUENTE	GANANCIA	PUNTOS
Interés	19'710,988	0.001332
Nuevos ingresantes	- 31'946,323	- 0.002158
Separaciones	11'641,080	0.000786
Muertes (x < 65)	2'863,812	0.000193
Muertes (x > 65)	- 432,736	- 0.000029
Cambio en los salarios	- 20'340,180	- 0.001374
	=====	=====
	- 18'503,359	- 0.001250

La comprobación del resultado anterior puede efectuarse mediante la división de la diferencia entre las tasas de costo normal de los dos años, entre el valor presente de los sueldos al 1° de enero de 1986. Es decir,

$$\text{GANANCIA(PERDIDA)} = [(\text{TCN})_0 - (\text{TCN})_1] (\text{VPS}),$$

o sea,

$$\begin{aligned} \text{GANANCIA(PERDIDA)} &= [0.01999 - 0.02124] 14,802'687,230 \\ &= - 18'503,359 \end{aligned}$$

El sumario de resultados de la página precedente, constituye el estado de pérdidas y ganancias actuariales para el período bianual en el que se desarrolló el plan presentado. Nótese que el signo negativo en la ganancia implica una pérdida, la que fácilmente fue comprobada dada la diferencia negativa en las tasas de costo normal de los dos años.

Se registran ganancias actuariales por las siguientes causas:

- a) Interés .- La ganancia obedece al gran diferencial existente entre la tasa hipotética empleada en la valuación actuarial (9 %) y la tasa efectiva de interés ganada por el fondo (51.192 %).

- b) Separaciones .- La ganancia en este caso está dada por el hecho de que hubo un mayor número de salidas del grupo, que el esperado.
- c) Muertes anteriores a la jubilación .- La ganancia está dada por la misma razón que en el inciso anterior: hubo un mayor número de muertes, que el esperado.

Se registran pérdidas actuariales por las siguientes causas:

- a) Nuevos ingresantes al plan .- La pérdida está dada por el hecho de que el pasivo generado por los empleados - desde su fecha de ingreso a la empresa, no se había reconocido hasta el 1° de enero de 1986.
- b) Muertes posteriores a la jubilación .- La pérdida es evidente dado que no se registraron muertes en el conjunto de jubilados rentistas; sin embargo, no es significativa, siendo la desviación por esta causa, la más pequeña entre las analizadas.
- c) Cambio en los salarios .- La pérdida es ocasionada por la diferencia entre las tasas de incremento salarial - asumidas en la valuación actuarial y el incremento real en los salarios de la empresa. Las primeras dependen - de los intervalos de edad de los empleados y van decre-

ciendo de 8.8 % a 6.7 % anual compuesto. El incremento real en los salarios fue variable dependiendo del empleado, sin embargo la tasa de crecimiento del salario promedio fue el 36.037 %.

El resultado obtenido, - 18'503,359, representa el análisis de dos periodos de valuación consecutivos. Con él, solamente fue factible la elaboración del estado de pérdidas y ganancias actuariales. Sin embargo, desde el punto de vista financiero, se necesita un periodo más extenso para el reconocimiento de las desviaciones. Una vez que éstas han sido determinadas, es factible utilizar cualquiera de los sistemas de re conocimiento descritos en el capítulo V.

Debe de considerarse la posibilidad de tomar el resultado en su valor absoluto (o monetario) o relativo (como porcentaje de la nómina); en ambos casos se obtienen conclusiones semejantes.

CONCLUSIONES

Dentro de la gama de actividades del actuario consultor en planes de beneficios para empleados, está la de la estimación de eventos futuros de incierta naturaleza para la cuantificación de pasivos contingentes. Esta tarea involucra un conjunto de pronósticos plausibles, y una de las pocas instancias si tuacionales de las que se tiene certeza cuasi apodíctica, consiste en el dato fáctico de que se va a incurrir en el error. Las variaciones entre las aportaciones asumidas a un plan de pensiones y el resultado de la experiencia real virtualmente percibida, dan la pauta nodal para el reconocimiento del mismo.

Si la técnica de ajuste de pérdidas y ganancias actuariales funcionará correctamente el cambio o adecuación de las hipótesis rara vez sería requerido. Aun cuando la experiencia actual se estuviese desviando considerablemente de lo esperado bajo la mediación de las hipótesis, si éstas prueban ser conservadoras a largo plazo, y si además las ganancias resultantes son bien aplicadas, nuestras hipótesis originales serán sa tisfactorias durante ese largo tiempo en el que hay lugar al funcionamiento del plan.

Por otra parte, existen situaciones en las que las modificaciones a las hipótesis actuariales son inminentes. Por ejemplo, si se presenta una tendencia pronunciada hacia la pérdida actuarial, resulta obvio el cambio de la hipótesis que la está

generando.

En cualquier caso, el tiempo o el grado de alteración de una hipótesis, es cuestión del criterio del actuario. Todo cambio resulta confuso dado que envuelve la visualización -- prognóstica de la experiencia futura del plan y no está directamente vinculado con la experiencia pasada¹. En otros términos, una modificación a una hipótesis actuarial es análoga a la anticipación de una pérdida o ganancia. Siempre debe haber un distingo entre la experiencia de pérdida o ganancia y el efecto del cambio de una hipótesis actuarial.

El estado de pérdidas y ganancias actuariales debe entenderse como un instrumento auxiliar en la valuación; complementario del balance. Debe ser de utilidad en la elaboración de análisis de sensibilidad referidos al aspecto financiero - del plan, permitiendo el reconocimiento gradual de las desviaciones en los supuestos.

El modelo de valuación de pérdidas y ganancias descrito - en el capítulo IV, considera únicamente planes que otorgan beneficios por jubilación, empero la teoría puede extenderse de manera que se tome en cuenta el otorgamiento de beneficios - por fallecimiento, invalidez y otros (i.e. teoría de decremen

1 El desfase en la determinación experiencial es inherente a la naturaleza temporal de los saltos teórico-prácticos del conocer humano.

tos múltiples). Asimismo, es factible contemplar el hecho de que los beneficios se concedan sobre una base mancomunada. Si este es el caso, en el cálculo actuarial se debe introducir la teoría de vidas conjuntas.

Aún cuando la extensión del modelo induce algunas complicaciones inexorables y por demás efables, sus fundamentos han sido propuestos por mor de un esclarecimiento atractivo al universo de discurso que liga a los artífices del ejercicio actuarial. Así, el trabajo ha pretendido exhibir los principios de valuación demandados en el cumplimiento de tareas verdaderamente profesionales dentro de la polisémica variedad de actividades a las que se aboca el actuario.

APENDICE I

DETERMINACION DE LA TASA DE RENDIMIENTO DE UN FONDO

El método de la obtención de la tasa efectiva de interés ganado por un fondo, desarrollado por Kellison (v. bibliografía) considera un modelo con las siguientes variables:

- A - saldo del fondo al principio del período.
- B - saldo del fondo al final del período.
- I - importe de los intereses ganados durante el período
- n_t - importe del capital invertido en 't', donde $0 \leq t \leq 1$
- N - importe de las inversiones durante el año, o sea

$$N = \sum_t n_t$$

- r_t - importe de los retiros en 't', donde $0 \leq t \leq 1$
- R - importe acumulado de los retiros, o sea

$$R = \sum_t r_t$$

- a, b - importe de los intereses ganados por una unidad invertida en el momento 'b' durante 'a' años, en donde $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a + b \leq 1$.

El fondo al final del período debe tener un monto equivalente

te al monto al principio del período, más el capital agregado, menos los retiros, más el interés generado. Es decir,

$$B = A + n - r + I$$

Se asume que el interés ganado se obtiene al final del período de inversión. La ecuación exacta para encontrar el interés generado durante el año ($0 \leq t \leq 1$), es:

$$I = i A + \sum_t n_{t-1} i_t - \sum_t r_{t-1} i_t \quad \dots (A.1)$$

El valor ${}_{t-1} i_t$ asumiendo interés compuesto, es:

$${}_{t-1} i_t = (1+i)^{t-1} - 1$$

Dado que la ecuación (A.1) no resulta fácil expresarla en términos de i ; lo más común es resolverla por medio de aproximaciones sucesivas o iteraciones por computadora.

Sin embargo, una fórmula que se deriva de la anterior pero en la que se suponen los incrementos y decrementos de capital uniformemente distribuidos durante el período, es la siguiente:

$$i = \frac{2 I}{A + B - I}$$

APENDICE II

PROGRAMAS DE LOS SISTEMAS DE RECONOCIMIENTO

```

1 CONTROL INIT, NOLIST
2 C
3 C**** SISTEMA DE DISTRIBUCION:
4 C
5 C      Distribucion sobre la vida activa de los empleados.
6 C
7 C      El factor de la anualidad esta en funcion de las hipotesis
8 C      actuariales y se modifica año con año dado que se
9 C      calcula en base a la edad promedio de los participantes.
10 C      A efectos de simplificacion se asume un factor de anualidad
11 C      constante de 10.100 correspondiente a la edad 33.
12 C
13 REAL NOFINAN
14 DIMENSION PG(25)
15 DATA PG / 1200., 1400., 360., 500., 220., 540.,
16 &          2240., 2850., 2090., 330., 2210., 350.,
17 &          3240., 1710., 2145., 3990., 515., 420.,
18 &          1335., 2420., -1900., 690., 3525.,
19 &          3600., 2500. /
20 DO 10 I=1, 25
21   10 PG(I)=PG(I)+100.
22   NOFINAN=PG(I)
23   WRITE(6,90)
24   WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
25   DO 20 I=2, 25
26     AJUSTE=NOFINAN/9.99
27     NOFINAN=(NOFINAN-AJUSTE)*1.09+PG(I)
28     WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
29     IF (I/5*5 .EQ. I) WRITE(6,*)
30 CONTINUE
31   30 FORMAT(8X, I2, 10X, 3N18.2)
32   90  FORMAT(10, 8X, "ARO", 17X, "PERDIDA O", 11X, "AJUSTE", 8X,
33 &        "NO AMORTIZADO", /, T30, "GANANCIA", 11X, "ACTUAL", 2/)
34 STOP
35 END

```

```

1 CONTROL INIT. HOLIDT
2 C
3 C+*** SISTEMA DE DISTRIBUCION
4 C
5 C      AMORTIZACION a n-años con interés descontado.
6 C
7 C      ( i = 0.09 , n = 20 )
8 C
9      REAL NOFINAN
10     DIMENSION PG(25)
11     DATA PG/1200., 1980., 368., 500., 269., 540.,
12     &      2240., 2550., 2390., 333., 3210., 350.,
13     &      3240., 1710., 2145., 3800., 315., 420.,
14     &      1935., 2420., -1800., 590., 3525., 3600.,
15     &      2500./
16     DO 10 I=1, 25
17     10 PG(I)=PG(I)+100.
18     ANUALIDAD=(1.-1.09**(-20))/0.09
19     NOFINAN=PG(1)
20     WRITE(6,30)
21     WRITE(6,30) 1, PG(1), AJUSTE, NOFINAN
22     DO 20 I=2, 25
23     AJUSTE=PG(I-1)*ANUALIDAD+AJUSTE*1.09
24     NOFINAN=(NOFINAN-AJUSTE-PG(I))*1.09
25     WRITE(6,30) 1, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
26     IF (1/5*S.EQ. 1) WRITE(6,*)
27     20 CONTINUE
28     30 FORMAT(8X, I2, 10X, 3H18.2)
29     40 FORMAT(10X, 8X, "AÑO", 17X, "PERDIDA 0", 11X, "AJUSTE", 8X,
30     &      "NO AMORTIZADO", /, T30, "GARANCIA", 11X, "ACTUAL", 2/)
31     STOP
32     END

```

```

1  #CONTROL INIT, HOLIST
2  C
3  C**** SISTEMA DE DISTRIBUCION:
4  C
5      Amortizacion a n-años con interes diferido.
6  C
7      ( i = 0.09 ; n = 20 )
8  C
9  REAL NOFINAN
10 DIMENSION PG(25)
11 DATA PG/1200., 1980., 360., 500., 260., 540.,
12 $      2240., 2950., 2080., 330., 3210., 350.,
13 $      3240., 1710., 2145., 3600., 615., 420.,
14 $      1935., 2420., -1800., 690., 3525., 3600..
15 $
16 DO 10 I=1, 25
17 10 PG(I)=PG(I)+100.
18   NOFINAN=PG(I)
19   WRITE(6,90)
20   WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
21   DO 20 I=2, 25
22     AJUSTE=PG(I-1)/20.+AJUSTE*1.09
23     NOFINAN=(NOFINAN-AJUSTE+PG(I))*1.09
24     WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
25     IF (I/5*5 .EQ. 1) WRITE(6,*)
26 20 CONTINUE
27 30 FORMAT(6X, I2, 10X, JN18.2)
28 90  FORMAT(10/, 8X, "H0", 17X, "PERDIDA 0", 11X, "AJUSTE", 8X,
29 $    "NO AMORTIZADO", /, T30, "GARANCIA", 11X, "ACTUAL", 2/)
30 STOP
31 END

```

```

1 #CONTROL INIT, NOLIST
2 C
3 C*** SISTEMA DE PROMEDIOS:
4 C
5 C           Promedio sobre n-años.
6 C
7 C           ( i = 0.09 ; n = 20 )
8 C
9 REAL NOFINAN
10 DIMENSION PG(44)
11 DATA PG/1000., 1200., 800., 1500., 750., 500.,
12 & -100., -150., 50., 250., 1250., 1750.,
13 & 1700., 1800., 1600., 1500., 1250., 1150.,
14 & 1000., 1200., 1990., 360., 500., 260.,
15 & 540., 2240., 2850., 2060., 330., 2210.,
16 & 350., 3240., 1710., 2145., 3800., 615.,
17 & 420., 1935., 2420., -1900., 690., 3525.,
18 & 3600., 2500./
19 DO 5 I=1, 44
20 5 PG(I)=PG(I)*100.
21 DO 10 I=2,25
22 IF (I .LE. 21) S=S+PG(I-1)
23 10 CONTINUE
24 AJUSTE=S/20.
25 NOFINAN=PG(20)-AJUSTE
26 WRITE(6,90)
27 WRITE(6,30) I, PG(20), AJUSTE, NOFINAN
28 DO 20 I=2, 25
29 S=S-PG(I-1)+PG(I+19)
30 AJUSTE=S/20.
31 NOFINAN=NOFINAN+PG(I+19)-AJUSTE
32 WRITE(6,30) I, PG(I+19), AJUSTE, NOFINAN
33 IF (I/5*5 .EQ. I) WRITE(6,*)
34 20 CONTINUE
35 30 FORMAT(8X,I2,10X,3H10.2)
36 90 FORMAT(10/,8X,"AGO",17X,"PERDIDA O",11X,"AJUSTE",8X,
37 & "NO AMORTIZADO",/,T30,"GANANCIA",11X,"ACTUAL",2/)
38 STOP
39 END

```

```

1  $CONTROL INIT. NOLIST
2  C
3  C**** SISTEMA DE AJUSTE POR SERVICIOS PASADOS:
4  C
5  C      Ajuste por interes.
6  C
7  C      ( i = 0.09 )
8  C
9  C      REAL NOFINAN
10 C      DIMENSION PG(25)
11 C      DATA PG/1200., 1980., 360., 560., 260., 540.,
12 C      &      2240., 2850., 2080., 330., 2210., 350.,
13 C      &      3240., 1710., 2145., 3800., 615., 420.,
14 C      *      1935., 2420., -1900., 690., 3525., 3600.,
15 C      &      2500./
16 C      DO 10 I=1, 25
17 C      PG(I)=PG(I)+100.
18 C      NOFINAN=PG(I)
19 C      WRITE(6,90)
20 C      WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
21 C      DO 20 I=2, 25
22 C      AJUSTE=PG(I-1)*0.09+AJUSTE
23 C      NOFINAN=(NOFINAN-ABS(AJUSTE))+1.09+PG(I)
24 C      WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
25 C      IF (I/5*.EQ. 1) WRITE(6,*)
26 C      CONTINUE
27 C      FORMAT(8X, I2, 10X, 3H18.2)
28 C      FORMAT(10/, 8X, "AÑO", 17X, "PERDIDA O", 11X, "AJUSTE", 8X,
29 C      *      "NO AMORTIZADO", /, T30, "GANANCIA", 11X, "ACTUAL", 2/)
30 C      STOP
31 C      END

```

```

1  *CONTROL INIT, NOLIST
2  C
3  C-*** SISTEMA DE AJUSTE POR SERVICIOS PASADOS:
4  C
5  C           Ajuste por amortizacion a n-años.
6  C
7  C           ( i = 0.09 ; n = 20 )
8  C
9  C
10 REAL NOFINAN
11 DIMENSION PG(20)
12 DATA PG/1200., 1960., 360., 500., 260., 540.,
13      2240., 2850., 2090., 330., 2210., 350.,
14      3240., 1710., 2145., 3800., 615., 420.,
15      1935., 2420./
16 DO 10 I=1, 20
17   PG(I)=PG(I)+100.
18   NOFINAN=PG(I)
19   WRITE(6,90)
20   WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
21   DO 20 J=2, 20
22    AJUSTE=NOFINAN/((1.-1.09**(-22+J))/0.09)
23    NOFINAN=(NOFINAN-AJUSTE)*1.09+PG(I)
24    WRITE(6,30) I, PG(I), AJUSTE, NOFINAN
25    IF (I/5*.EQ. 1) WRITE(6,*)
26 20 CONTINUE
27 30 FORMAT(9X, I2, 10X, 3H16.2)
28 90 FORMAT(10/, 8X, "AÑO", 17X, "PERDIDA 0", 11X, "AJUSTE", 8X,
29      & "NO AMORTIZADO", /, T30, "GANANCIA", 11X, "ACTUAL", 2/)
30 STOP
31 END

```

APENDICE III

TASAS Y PROBABILIDADES DE DECREMENTO

TABLA DE DECREMENTOS MULTIPLES

n	q _{nm}	q _{ni}	q _{nr}	q _{nt}	q _{nm'}	q _{ni'}	q _{nr'}	q _{nt'}
15	0.00088	0.00100	0.17000	0.17188	0.00080	0.00091	0.16985	0.17157
16	0.00089	0.00100	0.16500	0.16689	0.00082	0.00092	0.16485	0.16658
17	0.00090	0.00100	0.16000	0.16190	0.00083	0.00092	0.15985	0.16160
18	0.00091	0.00100	0.15500	0.15691	0.00084	0.00092	0.15486	0.15662
19	0.00093	0.00100	0.15000	0.15193	0.00086	0.00092	0.14986	0.15165
20	0.00094	0.00100	0.14500	0.14694	0.00087	0.00093	0.14486	0.14666
21	0.00094	0.00100	0.13750	0.13944	0.00088	0.00093	0.13737	0.13918
22	0.00099	0.00100	0.13250	0.13449	0.00092	0.00093	0.13237	0.13423
23	0.00101	0.00100	0.12750	0.12951	0.00095	0.00094	0.12738	0.12926
24	0.00104	0.00100	0.12250	0.12454	0.00098	0.00094	0.12238	0.12429
25	0.00108	0.00100	0.11750	0.11958	0.00102	0.00094	0.11738	0.11934
26	0.00112	0.00100	0.11250	0.11462	0.00106	0.00094	0.11238	0.11438
27	0.00117	0.00100	0.10750	0.10967	0.00111	0.00095	0.10739	0.10944
28	0.00122	0.00100	0.10250	0.10472	0.00116	0.00095	0.10239	0.10449
29	0.00128	0.00100	0.09750	0.09978	0.00122	0.00095	0.09739	0.09956
30	0.00135	0.00101	0.09250	0.09485	0.00129	0.00096	0.09239	0.09464
31	0.00142	0.00102	0.08750	0.08994	0.00136	0.00097	0.08740	0.08973
32	0.00150	0.00103	0.08250	0.08503	0.00144	0.00099	0.08240	0.08482
33	0.00160	0.00105	0.08000	0.08265	0.00154	0.00101	0.07990	0.08244
34	0.00170	0.00107	0.07500	0.07777	0.00164	0.00103	0.07490	0.07756
35	0.00182	0.00109	0.07000	0.07291	0.00176	0.00105	0.06990	0.07271
36	0.00196	0.00111	0.06750	0.07057	0.00189	0.00107	0.06740	0.07036
37	0.00210	0.00114	0.06250	0.06574	0.00203	0.00110	0.06240	0.06554
38	0.00227	0.00117	0.06000	0.06344	0.00220	0.00113	0.05990	0.06323
39	0.00244	0.00121	0.05750	0.06115	0.00237	0.00117	0.05740	0.06094
40	0.00264	0.00126	0.05500	0.05890	0.00257	0.00122	0.05489	0.05868
41	0.00286	0.00132	0.05250	0.05668	0.00278	0.00128	0.05239	0.05646
42	0.00309	0.00139	0.05250	0.05698	0.00301	0.00135	0.05238	0.05674
43	0.00336	0.00146	0.05000	0.05482	0.00327	0.00142	0.04988	0.05458
44	0.00364	0.00156	0.04750	0.05270	0.00355	0.00152	0.04738	0.05245

TABLA DE DETERMINANTES MULTIPLES

x	q ₀₀	q ₀₁	q ₀₂	q ₀₃	q ₀₄	q ₀₅	q ₀₆	q ₀₇
45	0.00398	0.00181	0.04500	0.05979	0.00589	0.00177	0.04487	0.05052
46	0.00433	0.00214	0.04250	0.04897	0.00423	0.00209	0.04236	0.04869
47	0.00472	0.00253	0.04000	0.03725	0.00462	0.00247	0.03966	0.04695
48	0.00515	0.00300	0.03750	0.04565	0.00505	0.00294	0.03735	0.04533
49	0.00564	0.00357	0.03500	0.04421	0.00553	0.00350	0.03484	0.04387
50	0.00618	0.00424	0.03250	0.04292	0.00607	0.00416	0.03233	0.04256
51	0.00677	0.00504	0.03000	0.04181	0.00665	0.00495	0.02982	0.04143
52	0.00743	0.00600	0.02750	0.04093	0.00731	0.00590	0.02732	0.04052
53	0.00817	0.00714	0.02500	0.04031	0.00804	0.00702	0.02481	0.03907
54	0.00898	0.00847	0.02250	0.03995	0.00884	0.00834	0.02231	0.03849
55	0.00988	0.01002	0.02000	0.03990	0.00973	0.00987	0.01980	0.03941
56	0.01089	0.01180	0.01750	0.04019	0.01073	0.01163	0.01730	0.03967
57	0.01200	0.01383	0.01500	0.04083	0.01183	0.01365	0.01481	0.04028
58	0.01324	0.01611	0.01250	0.04185	0.01305	0.01591	0.01232	0.04128
59	0.01461	0.01863	0.01250	0.04574	0.01439	0.01838	0.01230	0.04506
60	0.01614	0.01865	0.01250	0.04729	0.01589	0.01839	0.01229	0.04657
61	0.01807	0.01865	0.01250	0.04922	0.01779	0.01837	0.01227	0.04844
62	0.01987	0.01865	0.01250	0.05102	0.01957	0.01835	0.01226	0.05018
63	0.02187	0.01865	0.01250	0.05302	0.02153	0.01834	0.01225	0.05212
64	0.02407	0.01865	0.01250	0.05522	0.02370	0.01832	0.01224	0.05425
65	0.02652	0.01865	0.01250	0.05767	0.02611	0.01829	0.01222	0.05663
66	0.02921	0.01865	0.01250	0.06036	0.02876	0.01827	0.01221	0.05924
67	0.03219	0.01865	0.01250	0.06334	0.03170	0.01824	0.01219	0.06213
68	0.03549	0.01865	0.01250	0.06714	0.03544	0.01821	0.01217	0.06581
69	0.03913	0.01865	0.01250	0.07028	0.03853	0.01818	0.01215	0.06886
70	0.04315	0.01865	0.01250	0.07430	0.04249	0.01814	0.01212	0.07275
71	0.04758	0.01865	0.01250	0.07873	0.04685	0.01810	0.01207	0.07705
72	0.05247	0.01865	0.01250	0.08362	0.05167	0.01806	0.01207	0.08179
73	0.05787	0.01865	0.01250	0.08902	0.05699	0.01801	0.01203	0.08707
74	0.06381	0.01865	0.01250	0.09496	0.06284	0.01795	0.01200	0.09279

TABLA DE DECREMENTOS MÚLTIPLES

n	q _{0:n}	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅	q ₆	q ₇	q ₈
75	0.07034	0.01865	0.01250	0.10149	0.06727	0.01790	0.01176	0.09912	
76	0.07753	0.01865	0.01250	0.10868	0.07635	0.01783	0.01191	0.10610	
77	0.08543	0.01865	0.01250	0.11658	0.08414	0.01774	0.01186	0.11376	
78	0.09410	0.01865	0.01250	0.12525	0.09268	0.01768	0.01191	0.12217	
79	0.10361	0.01865	0.01250	0.13476	0.10205	0.01759	0.01175	0.13139	
80	0.11402	0.01865	0.01250	0.14517	0.11230	0.01750	0.01169	0.14149	
81	0.12539	0.01865	0.01250	0.15654	0.12351	0.01740	0.01162	0.15252	
82	0.13781	0.01865	0.01250	0.16896	0.13574	0.01728	0.01155	0.16457	
83	0.15135	0.01865	0.01250	0.18250	0.14909	0.01716	0.01146	0.17771	
84	0.16607	0.01865	0.01250	0.19722	0.16360	0.01703	0.01137	0.19199	
85	0.18204	0.01865	0.01250	0.21319	0.17934	0.01688	0.01128	0.20749	
86	0.19934	0.01865	0.01250	0.23049	0.19639	0.01672	0.01117	0.22428	
87	0.21802	0.01865	0.01250	0.24917	0.21481	0.01655	0.01106	0.24241	
88	0.23812	0.01865	0.01250	0.26927	0.23462	0.01637	0.01093	0.26193	
89	0.25970	0.01865	0.01250	0.29085	0.25590	0.01617	0.01080	0.28288	
90	0.28277	0.01865	0.01250	0.31392	0.27866	0.01596	0.01066	0.30528	
91	0.30834	0.01865	0.01250	0.33841	0.30339	0.01532	0.01023	0.37394	
92	0.33642	0.01865	0.01250	0.41457	0.37796	0.01504	0.01005	0.40305	
93	0.41504	0.01865	0.01250	0.44619	0.40917	0.01475	0.00985	0.43377	
94	0.44821	0.01865	0.01250	0.47956	0.44191	0.01445	0.00965	0.46601	
95	0.48282	0.01865	0.01250	0.51397	0.47609	0.01413	0.00944	0.49766	
96	0.51867	0.01865	0.01250	0.54982	0.51150	0.01380	0.00922	0.53452	
97	0.55554	0.01865	0.01250	0.58669	0.54792	0.01347	0.00899	0.57037	
98	0.59314	0.01865	0.01250	0.62429	0.58507	0.01312	0.00876	0.60695	
99	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	1.00000	0.00000	0.00000	1.00000	

APENDICE IV

TABLA DE MORTALIDAD GAM-1971

TABLA DE MORTALIDAD BSM-1971

x	qx	x	qx
20	0.00050	66	0.02364
21	0.00052	67	0.02632
22	0.00054	68	0.02919
23	0.00057	69	0.03244
24	0.00059	70	0.03611
25	0.00062	71	0.04001
26	0.00065	72	0.04383
27	0.00068	73	0.04749
28	0.00072	74	0.05122
29	0.00076	75	0.55290
30	0.00081	76	0.06007
31	0.00086	77	0.06592
32	0.00092	78	0.07260
33	0.00098	79	0.07969
34	0.00105	80	0.08743
35	0.00112	81	0.09545
36	0.00120	82	0.10369
37	0.00129	83	0.11230
38	0.00140	84	0.12112
39	0.00151	85	0.13010
40	0.00163	86	0.13921
41	0.00179	87	0.14871
42	0.00200	88	0.15849
43	0.00226	89	0.16871
44	0.00257	90	0.17945
45	0.00292	91	0.19049
46	0.00332	92	0.20168
47	0.00375	93	0.21299
48	0.00423	94	0.22453
49	0.00474	95	0.24116
50	0.00528	96	0.25620
51	0.00587	97	0.27248
52	0.00648	98	0.29016
53	0.00713	99	0.30913
54	0.00781	100	0.32983
55	0.00852	101	0.35245
56	0.00926	102	0.37722
57	0.01004	103	0.40621
58	0.01089	104	0.44150
59	0.01192	105	0.48518
60	0.01312	106	0.53934
61	0.01444	107	0.60609
62	0.01586	108	0.68747
63	0.01741	109	0.78543
64	0.01919	110	1.00000
65	0.02126		

BIBLIOGRAFIA

- Anderson, A.W. (1971): A NEW LOOK AT GAIN AND LOSS ANALYSIS, Transactions of the Society of Actuaries XXIII
- Berin, B.N. (1972): INTRODUCTION TO PENSION MATHEMATICS, The Society of Actuaries
- Bronson, D.G. (1957): CONCEPTS OF ACTUARIAL SOUNDNESS IN PENSION PLANS, Richard D. Irwin
- Donald, D.W.A. (1956): COMPOUND INTEREST AND ANNUITIES-- CERTAIN, Cambridge Press University
- Dreher, W.A. (1959): GAIN AND LOSS ANALYSIS FOR PENSION FUND VALUATIONS, Transactions of The Society of Actuaries, XI
- Dreher, W.A. (1968): AVAILABLE ALTERNATIVES -AN ACTUARY'S VIEW, Accounting for the costs of pension plans, AICPA
- Gurza de Con, I. (1974): TEORIA Y PRACTICA DE LOS PLANES DE PENSIONES EN MEXICO, Tesis profesional
- Hicks, E.L. (1968): PENSION COST AND THE AUDITOR, Accounting for the costs of pension plans, AICPA
- Jordan, C.W. (1967): LIFE CONTINGENCIES, The Society of Actuaries
- Kellison, S.G. (1969): THE THEORY OF INTEREST, Richard D. Irwin
- McGill, D.M. (1979): FUNDAMENTALS OF PRIVATE PENSIONS, Richard D. Irwin

Sloat, F.P. (1968): ACTUARIAL CONSIDERATIONS INVOLVED IN PENSION COSTS, Accounting for the costs of pension plans AICPA

Street, C.C. (1977): . ANOTHER LOOK AT GROUP PENSION PLAN GAIN AND LOSS, Transactions of The Society of Actuaries, XXIX

Trowbridge, C.L. (1976): THE THEORY AND PRACTICE OF PENSION FUNDING, Richard D. Irwin

Winklevoss, H. (1974): PENSION MATHEMATICS, Richard D. - Irwin