



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**



**FACULTAD DE CIENCIAS**

**Grupos Cristalográficos  
en dimensión baja**

**T E S I S**  
Que para obtener el título de  
**MATEMATICO**  
p r e s e n t a

**MARIA ANTONIETA MOLINA GARZA GALINDO**

**México, D. F.**

**1988**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INTRODUCCION

En dimensión dos se tienen tres geometrías; la euclidiana, la elíptica y la hiperbólica.

En el primer capítulo estudiaremos un poco las tres geometrías y el problema que queremos resolver es «Con qué triángulos geodésicos podemos enlazar nuestros espacios modelo? La respuesta a esta pregunta la da el Teorema de Poincaré.

En el segundo capítulo damos algunas bases de grupos topológicos y de acciones de grupos en variedades, las necesarias para responder a la pregunta «Cuándo el cociente de una variedad bajo la acción de un grupo es variedad? La respuesta a esta pregunta la da el teorema 2.41.

Después estudiaremos un poco sobre estructuras geométricas y queremos saber cuándo se le puede dar a una variedad de dimensión dos una estructura geométrica completa modelada en los espacios  $P \in \{E^2, S^2, H^2\}$  estudiados en el capítulo 1, del tipo  $(Iso(P), P)$ . Es decir, nos preguntamos si dada una variedad  $M$  de dimensión dos, podemos parcharla con abiertos de  $P$  pegados mediante isometrías de  $P$ .

Probaremos que el problema de encontrar estructuras geométricas completas del tipo  $(Iso(P), P)$  es equivalente a encontrar un grupo  $G$  de isometrías de  $P$  tal que  $P/G = M$ .

Terminaremos el capítulo probando el teorema de ensambladura que nos dice que si nosotros armamos una variedad con objetos de  $P$  mediante isometrías, obtenemos una variedad con una  $(Iso(P), P)$  estructura.

En el tercer capítulo construiremos los grupos  $G$  de isometrías de  $P$  que hacen que  $P/G$  sea una  $(Iso(P), P)$ -estructura, tales grupos son llamados cristalográficos de  $P$ .

Esto es, definimos grupo cristalográfico como aquellos grupos de isometrías que actúan en  $P$  de manera propia y discontinua tal que el cociente sea compacto.

Se puede encontrar para toda  $M$  variedad diferenciable un grupo cristalográfico, en la tesis los calculamos para toda variedad diferenciable de dimensión dos excepto para el caso en que  $M$  sea no compacta y no orientable, suponemos que el procedimiento que usamos para construir las variedades compactas sirve para las no compactas, sin embargo no encontramos una forma canónica de partirlas, de algún modo con todo esto hemos clasificado los grupos cristalográficos libres de dos dimensiones.

Existen otros grupos cristalográficos no libres que hacen del cociente casi una variedad excepto que se tienen singularidades, en el apéndice A ponemos algunas definiciones sobre estos espacios y damos una clasificación de sus grupos cristalográficos en una tabla.

En el apéndice B planteamos el problema de cuántas estructuras geométricas completas se le pueden dar a una misma variedad.

En el apéndice C se plantea el problema en dimensiones superiores y por último en los siguientes apéndices se establecen algunos de los teoremas más importantes que se usaron en el desarrollo de toda la tesis.

Quiero agradecer a mis maestros y amigos Jesús Muciño y Ana Irene Ramírez la paciencia que tuvieron conmigo durante el desarrollo de esta tesis. Sus consejos y enseñanzas me han hecho crecer como estudiante y como persona.

También quiero agradecer al Instituto de Matemáticas el apoyo que me dió para la realización de este trabajo.

# INDICE

<b>Capítulo 1</b>	<b>1</b>
Geometría Euclidiana	2
Geometría Elíptica	11
Geometría Hiperbólica	17
<b>Capítulo 2</b>	<b>33</b>
Grupos Topológicos	34
Acciones de grupos en variedades	35
Estructuras geométricas	41
<b>Capítulo 3</b>	<b>58</b>
Grupos Cristalográficos Libres	59
Grupos Cristalográficos libres de $E^2$	59
Grupos Cristalográficos libres de $S^2$	63
Grupos Cristalográficos libres de $H^2$	64
<b>Apéndices</b>	<b>70</b>
Apéndice A: Orbifolds	70
Apéndice B: Espacio de Estructuras Geométricas	75
Apéndice C: Estructuras Geométricas en variedades de dimensión tres	76
Apéndice D: Topología de Superficies	77
Apéndice E: El Teorema de Gauss-Bonnet	78
Apéndice F: Coordenadas Isotermicas	79
Apéndice G: El Teorema de Uniformización	80
<b>Referencias</b>	<b>81</b>

# CAPITULO 1

En este capítulo estudiaremos las geometrías de dos dimensiones: la Euclidiana, la Elíptica y la Hiperbólica; de cada una de ellas daremos modelos, un producto interno, su grupo de isometrías con respecto a la métrica obtenida por el producto interno dado y haremos una descripción de las geodésicas como curvas que minimizan la distancia entre dos puntos. Calcularemos el área de los triángulos geodésicos. Definiremos Grupos Triangulares: Euclidianos, Elípticos e Hiperbólicos los cuales son subgrupos de isometrías generados por reflexiones particulares. El Teorema de Poincaré nos permitirá afirmar que la imagen de un triángulo bajo todos los elementos de un grupo triangular forman o constituyen un enlosado de nuestro espacio modelo.

## Geometría Euclidiana

Nos referimos a la geometría que cumple con los cinco postulados de Euclides, sin embargo, el hecho de que permitamos que el quinto postulado de Euclides referente a la existencia de paralelas falle permite la construcción de otras geometrías. La Elíptica en el caso de no existir paralelas y la Hiperbólica en caso de existir más de una, empezemos con la euclidiana.

El modelo de estudio es el plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ .

El producto interno es el producto interno usual, es decir, el dado por:

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

desarrollando se obtiene:  $\langle u, v \rangle_p = dx_1^2 + dx_2^2$  con las  $g_{ij} = \delta_{ij}$  la delta de Kronecker, donde  $u$  y  $v$  están en el espacio tangente a  $\mathbb{R}^2$  en  $p$ ,  $T_p\mathbb{R}^2$  y  $p$  está en  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.1. Definición

La longitud de  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  es

$$\int_a^b \left\langle \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt = L(\gamma).$$

y la distancia entre dos puntos  $p$  y  $q$  como sigue:

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ es una curva diferenciable que une } p \text{ y } q\}.$$

Hemos definido la distancia entre dos puntos de nuestro modelo es claro que sí es una distancia y como toda distancia induce una métrica tiene sentido que llamemos  $E^2$  al espacio métrico  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle_p)$  la métrica inducida por la distancia definida, coincide con la métrica usual de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.2. Definición

Una aplicación diferenciable  $f: E^2 \rightarrow E^2$  es una isometría de  $E^2$  si satisface que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle \quad \text{para toda } p \in \mathbb{R}^2 \text{ y } u, v \in T_p\mathbb{R}^2.$$

### 1.3. Proposición

Las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones son isometrías de  $E^2$ .

#### Demostración.

Las traslaciones por un elemento  $b$  de  $\mathbb{R}^2$  están dadas por  $T_b(x) = x + b$  calculando su diferencial se tiene

$$dT_{b_p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

con  $dT_{b_p}(u) = u$  y  $dT_{b_p}(v) = v$  entonces se tiene

$$\langle u, v \rangle = \langle dT_{b_p}(u), dT_{b_p}(v) \rangle.$$

Las rotaciones por un ángulo  $\theta$  y con centro en el origen están dadas por una transformación lineal cuya matriz es simétrica y con determinante uno, así que se puede ver como

$$R_\theta(x) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \operatorname{sen} \theta \\ x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ya que las rotaciones son lineales se tiene entonces que su diferencial es

$$dR_{\theta p} = R_\theta(p)$$

así que se se tiene

$$\langle u, v \rangle = \langle dR_{\theta p}(u), dR_{\theta p}(v) \rangle = \langle R_\theta(p)(u), R_\theta(p)(v) \rangle.$$

De la misma manera se prueba que las reflexiones a lo largo de una recta  $l$  que pasa por el origen y forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $X$  son isometrías pues también son lineales con matriz asociada del siguiente tipo:

$$R_l(x) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

□

Probamos que las rotaciones, las reflexiones y las traslaciones son isometrías, pero la pregunta que nos interesa es si son todas, es decir, si toda isometría es de alguno de estos tres tipos. La siguiente proposición nos caracteriza a las isometrías de  $E^2$ .

#### 1.4. Proposición

Una aplicación  $\alpha$  es una isometría de  $E^2$  si y sólo si es de la siguiente forma:

$$\alpha(x) = Ax + b \quad \text{con } A \in O(2) \text{ y } b \in \mathbb{R}^2.$$

Donde  $O(2)$  es el grupo de matrices ortogonales de  $2 \times 2$ .

#### Demostración.

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una isometría si  $f(0) \neq 0$  entonces consideremos  $g = T_{-f(0)} \circ f$ , es claro que  $g(0) = 0$  y como sabemos que si  $g$  es una isometría que fija al origen es lineal entonces por preservar el producto interno es ortogonal así que se tiene que  $g(x) = Ax$  para alguna  $A \in O(2)$  y entonces  $f = T_{f(0)} \circ g$  es de la forma  $f(x) = Ax + b$ . Ahora sea  $\alpha(x) = Ax + b$  si  $b \neq 0$  entonces  $\alpha$  no tiene puntos fijos, sea  $\beta$  la composición de  $\alpha$  con  $T_{-b}$ ,  $\beta = \alpha \circ T_{-b}$  entonces  $\beta = Ax$  si el determinante de la matriz  $A$  es 1 entonces sabemos que  $A$  es la matriz de rotación para algún ángulo y si el determinante es  $-1$ ,  $A$  corresponde a una matriz de reflexión, de aquí que  $\beta$  es una rotación o una reflexión, así que  $\alpha$  es una rotación compuesta



con una traslación o una reflexión compuesta con una traslación, en cualquiera de los casos es una isometría por lo tanto quedó probada la afirmación.  $\square$

### 1.5. Proposición

El conjunto de isometrías de  $\mathbb{R}^2$  es un grupo que denotaremos  $Iso(E^2)$ .

#### Demostración.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  isometrías de  $E^2$  se tiene entonces

- i) La composición  $\gamma = \beta \circ \alpha$  es una isometría si  $\alpha = Ax + a$  y  $\beta = Bx + b$  se tiene entonces que  $\gamma = Cx + c$  donde  $C = B \cdot A$  y  $c = Ba + b$
- ii) Es asociativo por la asociatividad de la composición de las funciones
- iii) El elemento neutro es la aplicación identidad.
- iv) El inverso de  $\alpha$  es la isometría que tiene como matriz, la inversa de  $A$  y la traslación es por  $-A^{-1}a$ ,  $\alpha^{-1} = A^{-1}x - A^{-1}a$ .
- v) El grupo  $Iso(E^2)$  no es abeliano.  $\square$

Veamos ciertas propiedades de las isometrías .

### 1.6. Propiedades de las Traslaciones :

- T.i Las traslaciones forman un subgrupo normal de  $Iso(E^2)$
- T.ii Las traslaciones distintas de  $T_0$  son libres de puntos fijos, es decir son tales que si  $T_b(x) = x$  se tiene que  $b = 0$ .
- T.iii Toda traslación tiene orden infinito en  $Iso(E^2)$ .
- T.iv Si  $\varphi$  es el homomorfismo dado por  $\varphi(Ax + b) = A$  se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} Iso(E^2) \xrightarrow{\varphi} O(2) \xrightarrow{1} 0$$

donde  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow Iso(E^2)$  es el homomorfismo que está dado por  $\phi(b) = T_b$ .

- T.v Toda traslación  $T_a$  es composición de dos reflexiones en rectas paralelas  $l$  y  $m$  paralelas entre sí, ortogonales a  $a$  y a distancia  $\frac{|a|}{2}$  entre sí y la construcción no depende de la elección de las rectas.

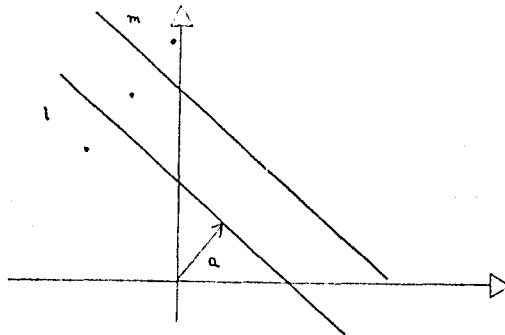


figura 1

Las rotaciones que mencionamos en el principio tenían centro en el origen de

$\mathbb{R}^2$ , sin embargo a la composición de una rotación con una traslación, también la llamaremos una rotación y las denotaremos  $R(\theta, a)$  donde  $R(\theta, a) = R_\theta \circ T_a$ .

### 1.7. Propiedades de las Rotaciones :

R.i Las rotaciones con centro en el origen forman un subgrupo de  $Isot(E^2)$  isomorfo a  $SO(2)$  el grupo de las matrices ortogonales de  $2 \times 2$  con determinante positivo.

Si tomamos el grupo de las rotaciones con centro en  $a \in \mathbb{R}^2$  se obtiene otro grupo isomorfo a  $SO(2)$  que denotaremos  $SO(2)_a$ . Si  $b$  es otro punto de  $E^2$  y consideramos el grupo de las rotaciones con centro en  $b$  se tiene que  $SO(2)_a$  es conjugado de  $SO(2)_b$  en  $Isot(E^2)$ .

R.ii El grupo de rotaciones es cerrado bajo conjugación por traslaciones esto es

$$T_b \circ R(\theta, a + b) \circ T_{-b} = R(\theta, a + b).$$

R.iii Si  $R_l$  es una reflexión entonces

$$R_l \circ R(\theta, a) \circ R_l^{-1} = R(\theta, R_l(a)).$$

R.iv Toda rotación fija un punto.

R.v Las rotaciones  $R(\theta, a)$  tienen orden infinito cuando  $\theta$  es un múltiplo irracional de  $\pi$ . Si  $\theta$  es un múltiplo racional de  $\pi$ ,  $\theta = \frac{p}{q}$  con  $\frac{p}{q}$  irreducible  $R(\theta, a)$  tiene orden finito  $q$ .

R.vi Si  $R(\theta, a)$  tiene orden infinito entonces genera un subgrupo denso de  $SO(2)$ , esto es, se le puede dar a  $SO(2)$  una topología y entonces un subgrupo es denso si como subespacio es denso. †

R.vii Si  $R(\theta, a)$  tiene orden finito entonces genera un subgrupo discreto de  $SO(2)$ .

R.viii Toda rotación  $R(\theta, a)$  es la composición de dos reflexiones sobre rectas  $l$  y  $m$  en  $\mathbb{R}^2$  tales que se cortan en  $a$  haciendo un ángulo de  $\frac{\theta}{2}$  y la construcción no depende de la elección de las rectas.

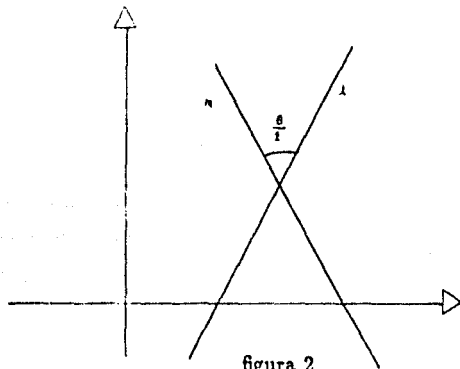


figura 2

Las reflexiones como vimos son isometrías pero no preservan ángulos orientados,

† En el siguiente capítulo veremos con detalle como dar una topología a los grupos que estamos estudiando, para mayores referencias ver [Both].

los invierten de signo. La composición de dos reflexiones puede ser como vimos una traslación o una rotación así que las reflexiones no forman un grupo por sí mismas.

### 1.8. Propiedades de las Reflexiones:

- Rf.i Una reflexión cualquiera  $R_l$  y la identidad  $Id$  forman un subgrupo de  $Iso(E^2)$  de orden dos.
- Rf.ii Si  $G_1$  es el grupo generado por  $\{R_l, Id\}$  y  $G_2$  es el grupo generado por  $\{R_m, Id\}$  entonces  $G_1$  y  $G_2$  son conjugados.
- Rf.iii Las reflexiones dejan fijos todos los puntos de la recta sobre la que reflejamos.

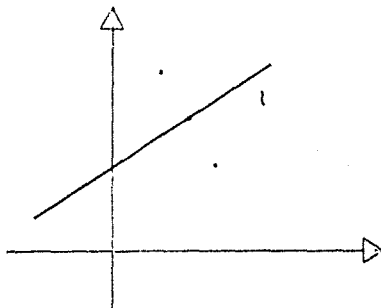


figura 3

La composición de una reflexión con una traslación no es rotación, reflexión ni traslación pero es la composición de tres reflexiones, la denotamos  $G(l, a)$ , donde  $l$  es la recta sobre la que reflejamos y  $a$  es un vector en  $\mathbb{R}^2$  con el que trasladamos. Ya vimos que si  $\alpha \in Iso(E^2)$  entonces  $\alpha(x) = Ax + b$  con  $A \in O(2)$  y  $b \in \mathbb{R}^2$ , así que toda isometría es una rotación, una reflexión, una traslación o una reflexión compuesta con una traslación. Si  $A \in SO(2)$  entonces  $A$  es la matriz de una rotación y  $\alpha = R(\theta, b)$ . Si  $A \in \frac{O(2)}{SO(2)}$  entonces  $A$  es la matriz de una reflexión; si  $b = 0$  es una reflexión y si  $b \neq 0$  entonces es la composición de una reflexión con una traslación.

Hemos analizado algunos aspectos de las isometrías de  $E^2$ , todas ellas como vimos se pueden considerar como la composición de reflexiones a lo más tres en el caso de las que llamaremos reflexiones trasladadas  $G(l, a)$ , dos en el caso de una rotación o de una traslación. Se tiene entonces la siguiente proposición:

### 1.9. Proposición

Toda isometría de  $E^2$  es composición de reflexiones. □

Sean  $x$  y  $y$  dos puntos de  $E^2$  con la misma abscisa, es decir,  $x_1 = y_1$ . Sea  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $\gamma(t) = (t_0, t)$  con  $t_0 = ct_1$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Se tiene que

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_1 - t_2.$$

### 1.10. Proposición

Se tiene además que  $L(\gamma) = d(x, y)$  con  $\gamma$  como en el párrafo anterior.

**Demostración.**

Sea  $\gamma'$  otra curva diferenciable que pasa por  $x$  y por  $y$  parametrizada por  $t$  entonces se tiene que

$$L(\gamma') = \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \frac{d\gamma'_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\gamma'_2}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

esta integral es mayor que  $L(\gamma)$  siempre que  $\frac{d\gamma'_i}{dt}$  sea distinta de cero. De la definición de  $d(x, y)$  se cumple que  $L(\gamma) \leq d(x, y)$  y como  $L(\gamma) \leq L(\gamma')$  para toda  $\gamma'$  que pase por  $x$  y por  $y$  se tiene entonces  $L(\gamma) = d(x, y)$ .  $\square$

**1.11. Definición**

Las geodésicas son las curvas que minimizan la distancia.

De la proposición anterior se deduce que *todas las rectas que son verticales son geodésicas*, además se tiene la siguiente proposición :

**1.12. Proposición**

Cualquier recta en  $\mathbb{R}^2$  es geodésica de  $E^2$ .

**Demostración.**

Como las isometrías preservan el producto interno, preservan distancias y por lo tanto mandan geodésicas en geodésicas. La imagen bajo cualquier isometría de una recta es una recta y podemos mandar siempre cualquier recta a otra dada, por lo que cualquier recta es geodésica.  $\square$

Ahora podemos hablar de triángulos geodésicos. Como en este caso coinciden con los usuales de  $\mathbb{R}^2$ , utilicemos lo que sabemos de ellos.

**1.13. Proposición**

La suma de los ángulos internos de un triángulo es  $\pi$ .

Veremos más adelante cómo este hecho caracteriza la geometría en la que estamos trabajando.

**Demostración.**

Ver figura 4.  $\square$

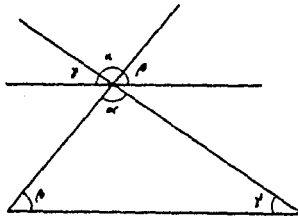


figura 4

### 1.14. Definición .

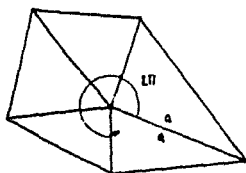
Si  $G$  es un subgrupo de isometrías de  $X$  una variedad riemanniana decimos que un conjunto cerrado  $F$  de  $G$  es una región fundamental si:

- i)  $\bigcup_{g \in G} g(F) = X$  y
- ii)  $F^0 \cap g(F^0) = \emptyset$  donde  $F^0$  es el interior de  $F$ .

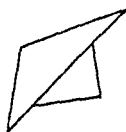
Entendemos por un enlosado de  $X$  a la descomposición asociada en i).

Un enlosado lo hacemos copiando una región fundamental por medio de isometrías y armando nuestras regiones de una buena manera, es decir de manera que se cumplan i) y ii).

Inversamente si en  $E^2$  pensamos en que la región  $F$  sea un triángulo las condiciones para que  $F$  sea una región fundamental de algún subgrupo de isometrías y se obtenga un buen pegado implican que los ángulos internos de  $F$  son de la forma  $\frac{2\pi}{n_i}$  para algunos enteros  $n_i$ , para que todas las copias de  $F$  que compartan un vértice constituyan una aureola cerrada de  $2\pi$  alrededor del vértice, además se tiene que todas las copias de  $F$  deben tener las mismas dimensiones para poder ensamblar lados de la misma longitud, esto es lo que llamamos un buen pegado.



buen pegado



no

figura 5

**Observación.** Existen otras definiciones de enlosados en las que las regiones fundamentales no son necesariamente isométricas, se puede enlosar también copiando las regiones y armando de otra manera, llamamos a estos enlosados no regulares, pero en general estos no tienen relación con subgrupos de isometrías en el sentido de la Definición 1.14. La correspondencia entre enlosados y subgrupos será estudiada más detenida en el capítulo 2.

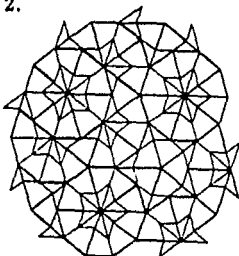


figura 6

Nos interesa estudiar los enlosados regulares hagamoslo con triángulos. Para

ello queremos encontrar triángulos con ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tales que  $\alpha = \frac{\pi}{p}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{q}$  y  $\gamma = \frac{\pi}{r}$  con  $p, q, r$  enteros, esta condición está dada para que las aureolas en los vértices de los triángulos del enlosado formen un buen pegado y como son los ángulos de un triángulo euclidiano se tiene que por la proposición 1.13 deben ser tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ .

### 1.15. Proposición

Las ternas euclidianas  $(p, q, r)$  sólo pueden ser  $(3, 3, 3), (2, 3, 6)$  y  $(2, 4, 4)$ .

#### Demostración.

Se tiene que  $p, q$  y  $r$  no pueden ser 1.

Si  $p = 2$  se tiene que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$  por lo que  $q$  y  $r$  tienen que ser mayores que 2, si  $q = 3$  se tiene que  $r = 6$ , por lo que se tiene la terna  $(2, 3, 6)$ . Si  $q = 4$  se tiene  $r = 4$  y se obtiene la terna  $(2, 4, 4)$ .

Si  $p = 3$  entonces se tiene que  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{2}{3}$  por lo que  $q = r = 3$  y nos queda la terna  $(3, 3, 3)$ .

Se tiene que  $p$  no puede ser cinco ni mayor que seis pues la expresión no tiene solución en los enteros, por lo tanto son las únicas ternas.  $\square$

Llamaremos  $\Delta(p, q, r)$  al triángulo con ángulos  $\frac{p}{\pi}, \frac{q}{\pi}$  y  $\frac{r}{\pi}$ . Sean  $A, B, C$  sus vértices  $a, b, c$  sus lados y  $L, M, N$  reflexiones sobre  $a, b, c$  respectivamente.

### 1.16. Proposición

Las reflexiones  $L, M$  y  $N$  genera un subgrupo de  $Isot(E^2)$  denotado  $\Delta^*(p, q, r)$  llamado grupo triangular.  $\square$

Llamaremos palabras a los elementos de un grupo triangular, veamos algunas copias de  $\Delta(p, q, r)$  bajo algunas palabras del grupo triangular euclidiano correspondiente;

$$\Delta^*(3, 3, 3).$$

Podemos utilizar como región fundamental un triángulo equilátero con vértices  $X, Y, Z$  hagamos un bosquejo de la imagen del triángulo bajo algunas palabras del grupo y veamos como se ensamblan las copias de la región fundamental:

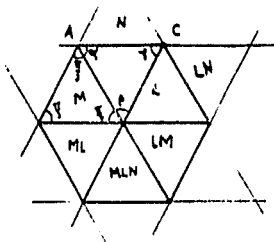


figura 7

Todo punto de  $\mathbb{R}^2$  se encuentra en alguno de los triángulos y solo en uno, si reconocemos como un mismo punto  $x$  todos aquellos que son de la forma  $g(x)$  para alguna  $g \in \Delta^*(3, 3, 3)$ , existe un representante de cada clase y uno de toda clase. Esta construcción quedará más clara con el teorema de Poincaré que veremos al final del capítulo.

Veamos como se ven ahora para  $\Delta^*(2, 4, 4)$  donde los triángulos son rectángulos e isósceles que a su vez ensamblan rectángulos y hexágonos se ven como indica la figura 8.

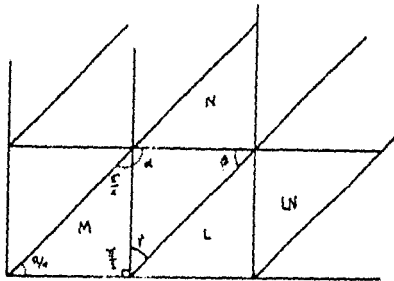


figura 8

$\Delta^*(2, 3, 6)$  es un triángulo rectángulo con el que sólo podemos construir rectángulos y se ven como siguen:

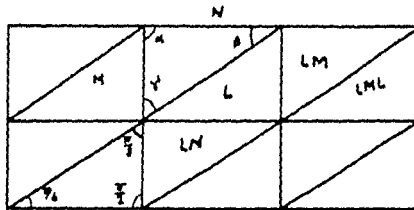


figura 9

Si consideramos el grupo de isometrías  $\Delta(\frac{2\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r})$  Existe un cuarto triángulo con el que podemos enlazar  $E^2$ . Este se obtiene de la siguiente forma:  $\Delta^*(p, q, r)$  contiene rotaciones en cada vértice de ángulos  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ , el único triángulo que podemos construir además de los cuatro que tenemos es  $\Delta(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ . Sin embargo, este triángulo no tiene sus ángulos con la forma de los tres anteriores.

Ahora sí son todos los triángulos con los que podemos enlazar a  $E^2$ , así que sólo existen cuatro triángulos.

## Geometría Elíptica

Sea la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

En coordenadas esféricas se tiene que

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) | x = \cos \theta \cos \varphi, y = \sin \theta \cos \varphi, z = \sin \varphi,$$

$$\text{con } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ y } 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

La métrica canónica de  $\mathbb{R}^3$  induce una métrica de Riemann en  $\mathbb{S}^2$  por su encaje.

La métrica canónica de  $\mathbb{R}^3$  desarrollando se ve como  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  donde  $ds = \langle x, y \rangle_p^{\frac{1}{2}}$  que en coordenadas esféricas se transforma en

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

como en la esfera se tiene que  $\rho = \text{constante} = 1$ , la métrica restringida a  $\mathbb{S}^2$  se ve  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ .

### 1.17. Definición

La longitud del segmento de la curva diferenciable  $\gamma$  que une a  $x$  y a  $y$  dos puntos de  $\mathbb{S}^2$  está dada por la siguiente expresión

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

y definimos la distancia entre dos puntos  $x$  y  $y$  como sigue:

$$d(p, q) = \inf\{L(\beta) | \beta \text{ es un segmento de curva diferenciable en } \mathbb{S}^2 \text{ que une a } p \text{ y } q\}.$$

$\mathbb{S}^2$  no es un buen modelo de geometría pues como veremos por dos puntos distintos pueden pasar más de una geodésica es decir, más de una recta, en el tercer capítulo daremos la construcción de otro espacio, el proyectivo que nos servirá para quitar este problema, sin embargo, este espacio no se puede encajar en  $\mathbb{R}^3$  ver [DoCar2]. Pensemos en el espacio métrico  $(\mathbb{S}^2, d)$ , calculemos las isometrías de este espacio y calculemos las geodésicas.

### 1.18. Proposición

El grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$   $Iso(\mathbb{S}^2)$ , es el grupo de las isometrías de  $\mathbb{R}^3$  que dejan invariante a  $\mathbb{S}^2$ . El cual es el grupo ortogonal lineal  $O(3)$ .  $\square$

Son las isometrías que dejan fijo al origen de  $\mathbb{R}^3$ .  $O(3)$  tiene dos componentes conexas dependiendo del signo que tenga una matriz, estará en  $SO(3)$  o en la otra clase.  $SO(3)$  es el subgrupo de  $Iso(\mathbb{S}^2)$  que contiene a las rotaciones, isometrías que fijan a dos puntos diametralmente opuestos y rotan a  $\mathbb{S}^2$  con eje de rotación la recta en  $\mathbb{R}^3$  que une a los dos puntos.



### 1.19. Proposición

Los elementos de  $SO(3)$  tienen orden finito si son rotaciones con un ángulo múltiplo racional de  $\pi$  e infinito en otro caso.  $\square$

Si  $A$  tiene determinante positivo es claro que  $A$  preserva orientación así que los elementos de  $SO(3)$  preservan orientación.

Fijemonos en los elementos de  $O(3)$  con determinante negativo; estos son de dos tipos dependiendo de que tengan o no al 1 como valor característico.

Si  $A \in O(3)$  e invierte orientación entonces  $-1$  es valor característico de  $A$  y entonces debe existir una recta por el origen en  $\mathbb{R}^3$  la cual queda invariante bajo la isometría recorrida en sentido opuesto.

El plano  $\pi$  ortogonal a la recta  $l$  invariante por la isometría  $\alpha$  con matriz asociada  $A$ , queda también invariante y la restricción de  $\alpha$  al plano debe ser una rotación.

Si esta rotación es la trivial, es decir, al ángulo de rotación es cero, entonces  $\alpha$  es una reflexión sobre el plano  $\pi$ . Si no es trivial  $\alpha$  solo fija al origen y en  $\mathbb{S}^2$  no tiene puntos fijos.

Con lo anterior hemos probado el siguiente resultado.

### 1.20. Proposición

Hay dos tipos de isometrías que invierten orientación; reflexiones, las cuales fijan un círculo máximo de  $\mathbb{S}^2$  y las isometrías sin puntos fijos.  $\square$

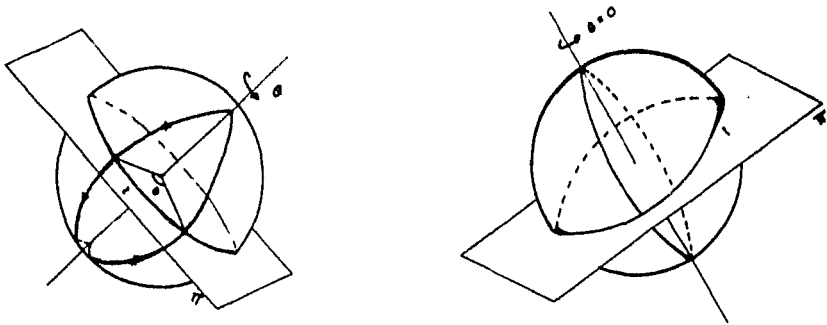


figura 10

Un ejemplo de una isometría sin puntos fijos es la función o aplicación antípoda  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  con  $f(x) = -x$ . Solo falta ver que las isometrías sin puntos fijos están generadas por reflexiones.

Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una isometría sin puntos fijos, si componemos una reflexión con una rotación con eje normal al plano del círculo máximo que queda fijo con un ángulo de  $\pi$  obtenemos una de estas isometrías y todas son de esta forma.

### 1.21. Proposición

El grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2$ ,  $IsO(\mathbb{S}^2)$  está generado por reflexiones.  $\square$

Ahora estudiaremos cuales son las geodésicas de  $\mathbb{S}^2$ , es decir, cuales son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos.

### 1.22. Proposición

Los círculos máximos son geodésicas.

**Demostración.**

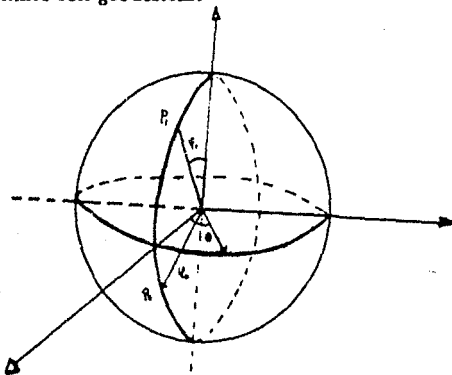


figura 11

Sean  $P_0$  y  $P_1$  dos puntos con misma colatitud, es decir con la misma  $\theta$  supongamos además que  $\theta = 0$  se tiene entonces que  $P_0 = (\cos \varphi_1, 0, \sin \varphi_1)$  y  $P_1 = (\cos \varphi_2, 0, \sin \varphi_2)$  Sea  $\gamma = \{P \in \mathbb{S}^2 \mid P = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi) \text{ para alguna } \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$  el segmento de semicírculo máximo que pasa por  $P_0$  y  $P_1$  se tiene entonces

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = L(\gamma).$$

Si  $\gamma'$  es otra curva que pasa por  $P_0$  y por  $P_1$  se tiene que,  $L(\gamma') \geq L(\gamma)$  siempre que la coordenada de  $\theta$  sea distinta de cero. Por lo tanto de la definición de distancia se tiene que  $d(P_0, P_1) = \varphi_2 - \varphi_1$ . Y entonces se tiene que  $\gamma$  es una geodésica.

Como el grupo de isometrías es transitivo sobre círculos máximos, es decir, podemos mandar con una isometría un círculo máximo a otro dado, por lo que se tiene que todos los círculos máximos son geodésicas y no hay más que esas.  $\square$

Los círculos máximos tienen el mismo papel que las rectas en  $\mathbb{R}^2$ . La demostración de que son geodésicas es casi una copia de la demostración que dimos para las rectas en la sección anterior, analicemos ahora el problema de unicidad de geodésicas, para ello tenemos el siguiente resultado.

### 1.23. Proposición

Por dos puntos distintos no diametralmente opuestos pasa una y sólo una geodésica.

**Demostración.**

Ver figura 12.  $\square$

Sin embargo, para dos puntos diametralmente opuestos pasan una infinidad de geodésicas, esto aclara un poco más lo que declamos sobre el modelo que tomamos.

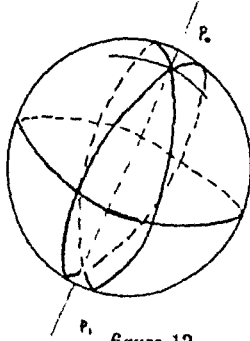


figura 12

Los triángulos geodésicos son los que están formados por segmentos de geodésicas, a diferencia de que en  $E^2$  los ángulos no determinan el área de un triángulo en  $S^2$  si queda determinada el área por sus ángulos internos.

**1.24. Proposición**

Sea  $T$  el triángulo esférico con ángulos:  $\alpha, \beta, \gamma$ . Su área es  $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ .

**Demostración.**

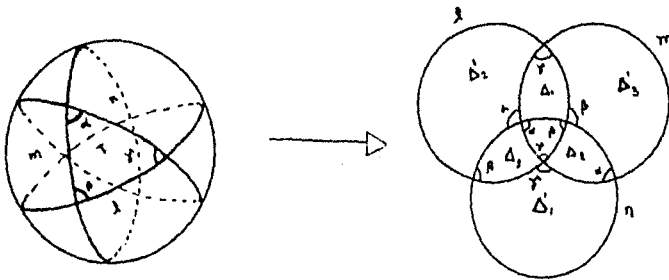


figura 13

El área de la luna entre  $m$  y  $n$  es  $2\alpha$ . Calculando obtenemos :

$$\Delta + \Delta_2 = 2\alpha$$

$$\Delta + \Delta_1 = 2\gamma$$

$$\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 2\pi$$

Así que

$$2\Delta + 2\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$$

de aquí que

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Si queremos enlazar  $S^2$  con triángulos, necesitamos encontrar los grupos triangulares esféricos es decir, tenemos que encontrar ternas  $(p, q, r)$  tales que  $\alpha =$

$\frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}, \gamma = \frac{\pi}{r}$  sean racionales con  $\pi$  y se tenga que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$  entonces se podría construir un triángulo con ángulos internos  $\alpha, \beta, \gamma$  que nos serviría para enlazar a  $\mathbb{S}^2$ .

### 1.25. Proposición

Las ternas  $(p, q, r)$  en  $\mathbb{S}^2$  sólo pueden ser  $(2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4)$  ó  $(2, 4, 5)$ .

#### Demostración.

Es claro que si  $p = 2$  y  $q = 2$ ,  $r$  puede ser cualquier entero. Si  $p = 2$  y  $q = 3$   $r$  solo puede ser 3, 4 ó 5, pues de otro modo si  $r$  fuera mayor que 5 la suma sería menor que uno.  $\square$

Los grupos triangulares esféricos  $\Delta^*(p, q, r)$  se construyen de manera análoga a los euclidianos.

Veamos como se ven los enlosados de  $\mathbb{S}^2$  por los grupos triangulares esféricos.  $\Delta^*(2, 2, n)$  Está constituido por triángulos isóceles en los que en cada vértice de los ángulos de  $\frac{\pi}{2}$  están pegados cuatro triángulos y en el vértice de ángulo  $\frac{\pi}{n}$  están pegados  $2n$  triángulos. Este grupo es llamado el grupo diédrico de orden  $2n$ . Y además es isomorfo al grupo diédrico de orden  $2n$  conocido en álgebra. El enlosado se ve como en la figura 14.

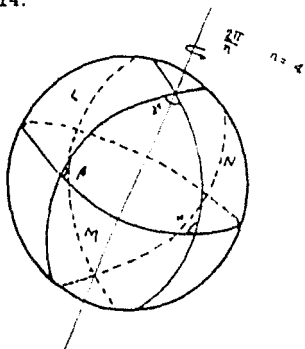


figura 14

$\Delta^*(2, 3, 3)$  es isomorfo al grupo de simetrías del tetraedro  $T$  con vértices sobre  $\mathbb{S}^2$ . Si proyectamos desde el origen de  $\mathbb{R}^3$  obtenemos claramente un enlosado de  $\mathbb{S}^2$  por cuatro triángulos congruentes y equiláteros. Un tetraedro esférico. Los vértices en los ángulos son de  $\frac{\pi}{3}$  y el otro es recto, si tomamos el centroide del triángulo y consideramos también las aristas que unen los vértices del triángulo con el centroide obtenemos nuevos triángulos, se llama subdivisión baricéntrica a este proceso, esto nos da un enlosado de  $\mathbb{S}^2$  por 24 triángulos congruentes con ángulos  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{3}$ , identificando un elemento del grupo de simetrías con uno de los triángulos, que equivale a elegir uno de los elementos del grupo triangular nos da el isomorfismo buscado entre los elementos del grupo de simetrías de  $T$  y el grupo triangular.

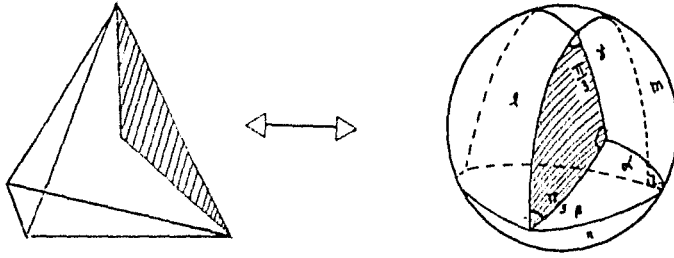


figura 15

De la misma manera como se hizo para el tetraedro se puede probar que existe un isomorfismo entre los elementos de  $\Delta^*(2,3,4)$  y el grupo de simetrías del cubo o del octaedro que son el mismo. El enlosado se vería mas o menos como en la figura 16.

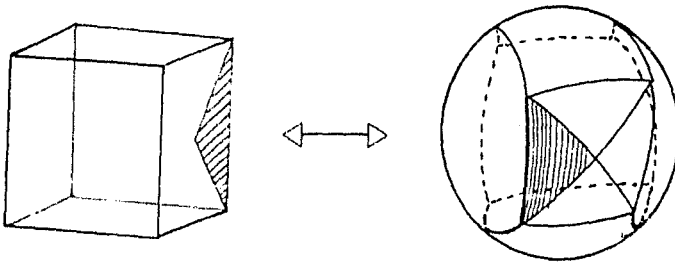


figura 16

En el caso del grupo  $\Delta^*(2,3,5)$  el isomorfismo es con el grupo de simetrías del dodecaédro o del icosaédro pues ellos a su vez son isomorfos, el isomorfismo se construye de la misma manera que los isomorfismos anteriores y se ve como en la siguiente figura.

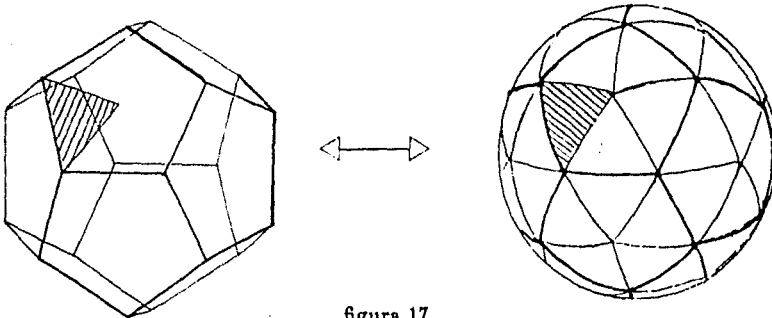


figura 17

## Geometría Hiperbólica

En el caso de la geometría hiperbólica existen más de un buen modelo. Empezaremos dando el modelo del semiplano superior.

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\} \cup \{\infty\}$$

donde  $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ .

Demos el producto interno dado por la siguiente expresión

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{j,i=1}^2 g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

con  $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$  y  $g_{21} = g_{12} = 0$ ,  $p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$  y  $u, v \in T_p \mathbb{H}^2$ .

### 1.26. Definición

La longitud de una curva diferenciable en  $\mathbb{H}^2$  está dada por

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

donde  $ds = \langle u, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ .

La distancia entre dos puntos la definimos como sigue:

$$d(p, q) = \inf \{L(\gamma) | \gamma \text{ es un segmento de curva diferenciable en } \mathbb{H}^2 \text{ que une a } p \text{ y } q\}.$$

Por abuso de notación llamaremos a  $\mathbb{H}^2 = (\mathbb{H}^2, d)$  el espacio hiperbólico de dimensión dos.

Por la definición de longitud de curva  $\gamma$  se tiene que si la curva toca al eje  $X$  tiene longitud infinita, llamaremos puntos al infinito de  $\mathbb{H}^2$  al conjunto de puntos del eje  $X$  junto con el punto al infinito de  $\hat{\mathbb{C}}$ , la esfera de Riemann. Estos puntos forman de manera natural la frontera de  $\mathbb{H}^2$  como subconjunto de  $\hat{\mathbb{C}}$  y pueden ser visualizados como una circunferencia, un  $\mathbb{S}^1$ .

Si hacemos una aplicación entre  $\mathbb{H}^2$  y  $\hat{\mathbb{C}}$  dada por  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  con regla  $f(x, y) = x + iy$  con  $y \geq 0$ ,  $ds^2$  se convierte en

$$ds^2 = \frac{dz \otimes d\bar{z}}{y}$$

donde  $z = x + iy$  y  $\bar{z}$  es el conjugado de  $z$ .

Queremos encontrar  $\text{Iso}(\mathbb{H}^2)$  el grupo de todas las isometrías de  $\mathbb{H}^2$ . Sea  $SL(2, \mathbb{R})$  el grupo de todas las matrices de  $2 \times 2$  con determinante uno.

Sea  $\alpha$  la transformación que manda  $x + iy$  en  $-x + iy$  de  $\mathbb{H}^2$  en sí mismo.

Dada  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  y si  $A_f$  denota la transformación lineal  $z \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ . Entonces afirmamos que  $A \mapsto A_f$  es un homomorfismo de  $SL(2, \mathbb{R})$  en  $Iso(\mathbb{H}^2)$  con núcleo  $\{\pm I\}$ . Si  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) \cong SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$  entonces se tiene el siguiente resultado.

### 1.27. Proposición

$$Iso(\mathbb{H}^2) \cong \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) \cup \alpha \cdot \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}),$$

donde  $\alpha \cdot \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$  son las composiciones  $\beta \cdot \alpha$  para  $\beta \in \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ .

**Demostración.**

Sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$  y  $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ . Escribiremos  $z^* = x^* + iy^*$  para  $A_f(z)$ . Entonces  $A_f(z) = z^* \in \mathbb{H}^2$  ya que  $y^* = \frac{(ad-bc)y}{|cx+d|^2} = \frac{y}{|cx+d|^2} \geq 0$ .

$A_f$  es una isometría ya que tiene inversa  $(A^{-1})_f$  y preserva la métrica.  $dz^* = \frac{dx^*}{(cx^*+d)^2}$ ; así que se tiene que  $\frac{dx^* \otimes d\bar{x}^*}{(y^*)^2} = \frac{dx \otimes d\bar{x}}{y^2}$ .

El núcleo de  $A \mapsto A_f$  es  $\{\pm I\}$ , además  $\alpha$  está en  $Iso(\mathbb{H}^2)$  y el subgrupo de  $Iso(\mathbb{H}^2)$  que deja fijo a  $i \in \mathbb{H}^2$  debe actuar como  $O(2)$  sobre el tangente a  $\mathbb{H}^2$ , por lo que se tiene que  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) \cup \alpha \cdot \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$  es todo el grupo de isometrías.  $\square$

### 1.28. Proposición

$\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$  es el subgrupo de  $Iso(\mathbb{H}^2)$  que tiene todos los elementos que preservan orientación, es decir,  $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R}) \cong Iso^+(\mathbb{H}^2)$ .  $\square$

Veamos los tipos de isometrías que hay:

- Si  $l$  es una recta vertical en  $\mathbb{H}^2$  la reflexión euclidiana sobre  $l$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$ .
- Si componemos dos reflexiones sobre  $l$  y  $m$  sobre rectas verticales de  $\mathbb{H}^2$  obtenemos una traslación horizontal que también es una isometría.
- Las inversiones de  $\mathbb{H}^2$  sobre semicírculos de radio  $r$  centrados en un punto  $a$  del eje  $x$  son isometrías.

**Demostración.**

La inversión puede escribirse como:

$$f(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - a} + a$$

queremos probar que

$$\frac{dz d\bar{z}}{(\bar{z} - z)^2} = \frac{df(z) d\bar{f}(z)}{(f(z) - f(z))^2}$$

usando el cambio de  $\frac{1}{y^2(dx^2+dy^2)}$  por  $\frac{dx d\bar{x}}{(\bar{x}-x)^2}$  se tiene el resultado.  $\square$

Sabemos que las inversiones mandan círculos y rectas en círculos y rectas. Además se tiene que las inversiones preservan ángulos en magnitud, invierten sentido

e intercambian el interior del círculo sobre el que invertimos con el exterior. Las llamaremos reflexiones.

Queremos probar como en los dos casos anteriores que el grupo de isometrías está generado por reflexiones, para esto es necesario saber cuáles son las geodésicas.

Sea  $\gamma$  la semirrecta vertical que une a  $P_0$  y  $P_1$  dos puntos de  $\mathbb{H}^2$  que tienen por coordenadas  $(x_0, y_0)$  y  $(x_0, y_1)$  respectivamente se tiene entonces que:

$$\int_{\gamma} ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{y} dy = \log \left| \frac{y_1}{y_0} \right| = L(\gamma).$$

### 1.29. Proposición

Las semirrectas verticales en  $\mathbb{H}^2$  son geodésicas de  $\mathbb{H}^2$ .

**Demostración.**

Si  $\gamma'$  es otra trayectoria de  $P_0$  a  $P_1$ , la longitud de  $\gamma'$  está parametrizada por  $t$ , entonces

$$L(\gamma') = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y} \left( \left( \frac{d\gamma_1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\gamma_2}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt \geq L(\gamma)$$

de aquí que las semirrectas verticales son geodésicas. □

Como las isometrías que hemos estudiado mandan rectas verticales en semicírculos con centro en el eje  $x$ , se deduce que todos los semicírculos con centro en el eje  $x$  u ortogonales al eje  $x$  son geodésicas.

### 1.30. Proposición

Las únicas geodésicas son las semirrectas verticales y los semicírculos con centro en el eje  $x$ .

**Demostración.**

Sea  $l$  una geodésica; podemos encontrar puntos  $P$  y  $Q$  sobre la recta  $l$  tales que el segmento de  $l$  entre  $P$  y  $Q$  sea el más pequeño de las curvas que los unen. Es decir un segmento de recta o un segmento de semicírculo. Como entre dos puntos existe una y sólo una geodésica que los une,  $l$  misma tiene que ser la recta o el semicírculo. □

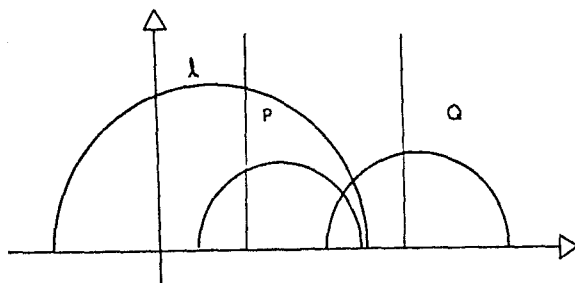


figura 18



Utilizando las geodésicas probemos la siguiente proposición:

**1.31. Proposición**

El grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  está generado por reflexiones.

**Demostración.**

Sea  $\mu$  una isometría de  $\mathbb{H}^2$ , fijemos un punto  $P \in \mathbb{H}^2$ .

Si  $\mu$  no fija a  $P$  componemos a  $\mu$  con una reflexión  $\sigma$  que mande  $\mu(P)$  a  $P$ .

Sea  $\beta = \sigma \circ \mu$ , se tiene entonces que  $\beta$  fija a  $P$ .

Sea  $l$  una geodésica por  $P$ , si  $\beta$  deja invariante a  $l$  como conjunto y fija los extremos de  $l$ , entonces  $\beta$  debe fijar a  $l$  puntualmente, ya que los puntos de  $l$  están determinados por su distancia orientada a  $P$ .

Si no es así, componemos  $\beta$  con una reflexión  $\tau$  sobre una geodésica por  $P$ , para obtener  $\gamma = \tau \circ \beta$ , tal que  $\gamma$  fija a  $l$  puntualmente.

Si  $\gamma$  intercambia los lados de  $l$ , componemos con una reflexión sobre  $l$ .

Para terminar tenemos que probar que si  $\gamma$  es una isometría de  $\mathbb{H}^2$  que fija puntualmente a  $l$  y no cambia los lados de  $l$  entonces  $\gamma$  es la identidad. Para ver esto, sea  $m$  cualquier geodésica por  $P$ , se cumple el resultado. Por lo que una isometría de  $\mathbb{H}^2$  es composición de a lo más tres reflexiones.  $\square$

Observemos que toda geodésica determina de manera única dos puntos en  $\mathbb{S}^1$ , el conjunto de los puntos al infinito de  $\mathbb{H}^2$ .

**1.32. Definición**

Si  $l$  y  $m$  son geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  se dice que  $l$  y  $m$  son paralelas si se cortan al infinito. Puede ser que se corten en el punto al infinito de  $\hat{\mathbb{C}}$  o que se corten en un punto del eje  $X$ .

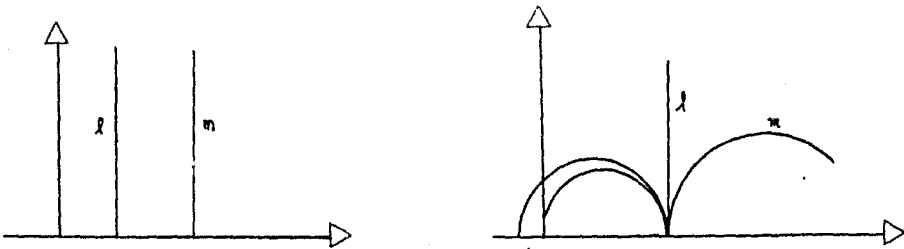


figura 19

**1.33. Definición**

Si  $l$  y  $m$  son geodésicas se dice que son ultraparalelas si no se cortan ni en  $\mathbb{H}^2$  ni en el  $\mathbb{S}^1$ , ver figura 20.

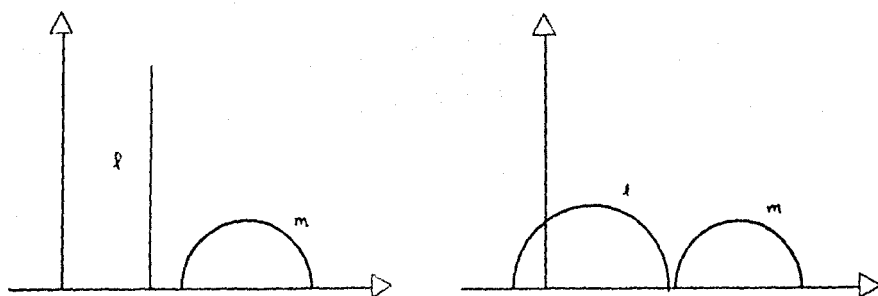


figura 20

### 1.34. Definición

Un polígono se llama ideal si está constituido por segmentos de geodésicas hiperbólicas y tiene algún vértice o algunos vértices en el conjunto de puntos infinitos.

Esta construcción es particular de la geometría hiperbólica. En las geometrías euclidianas y elíptica no tiene sentido definir polígonos ideales.

### 1.35. Proposición

Dos geodésicas que no se cortan tienen una perpendicular común.

#### Demostración.

Para construirla en el caso de dos circunferencias que no se cortan  $l$  y  $m$  se considera a  $P$  el punto medio del segmento que une los centros de los círculos y trazamos desde  $P$  una tangente a alguno de los círculos; el punto medio medido con la métrica usual de  $\mathbb{R}$ , se puede trazar al menos una tangente a uno de los círculos por la condición de que los círculos no se intersectan. construimos el círculo con centro en  $P$  y de radio la longitud de la tangente como las dos circunferencias son coaxiales y  $P$  está en el eje radical se tiene que la circunferencia construida es ortogonal a los dos círculos  $l$  y  $m$ . Para construirla en el caso de que una de las geodésicas sea una semirrecta se construye la circunferencia con centro en el punto del eje  $X$  que corta la semirrecta y con radio la longitud de la tangente a la circunferencia ver figura 21.  $\square$

Como las reflexiones invierten orientación cualquier isometría  $\alpha$  que preserva orientación es composición de dos reflexions sobre geodésicas  $l$  y  $m$ .

### 1.36. Definición

Si las rectas  $l$  y  $m$  se cortan en  $P \in \mathbb{H}^2$ , la composición de la reflexión sobre  $l$  compuesta con la reflexión sobre  $m$  es una isometría  $\alpha$  tal que  $\alpha(P) = P$  llamada una rotación.

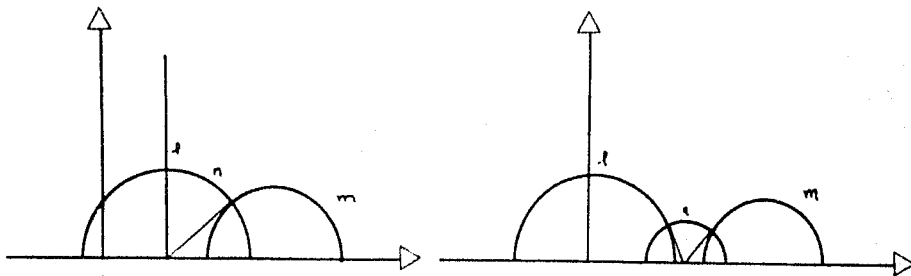


figura 21

La manera de medir el ángulo entre dos geodésicas es tomar el menor de los ángulos entre ellas.

Una isometría  $\alpha$  actúa en  $\hat{C}$  que contiene a  $H^2$ . El ángulo de rotación es dos veces el ángulo entre  $l$  y  $m$ . Y una rotación no fija puntos al infinito.

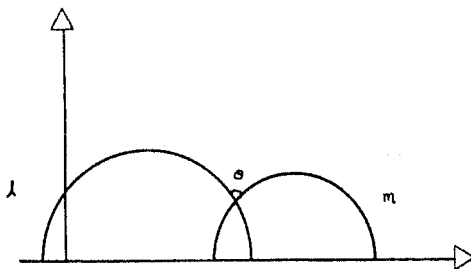


figura 22

### 1.37. Definición

Si  $l$  y  $m$  se cortan al infinito entonces  $\alpha$ , la composición de la reflexión sobre  $l$  y la reflexión sobre  $m$ , es una traslación llamada parabólica. La isometría  $\alpha$  fija un solo punto al infinito.

En el caso de tener dos semirrectas verticales la traslación actúa como una traslación euclidiana (figura 23 (i)). Si son semicírculos se ve como en la figura 23 (ii).

### 1.38. Definición

Si  $l$  y  $m$  son ultraparalelas  $\alpha$  deja invariante la única perpendicular común  $n$ , que esta a una distancia de  $2d$  donde  $d$  es la distancia perpendicular de  $l$  a  $m$ . La isometría  $\alpha$  es llamada hiperbólica o traslación a lo largo de  $n$ . Esta isometría fija exactamente dos puntos al infinito.

Daremos otro espacio como modelo de la geometría hiperbólica el modelo del disco hiperbólico.

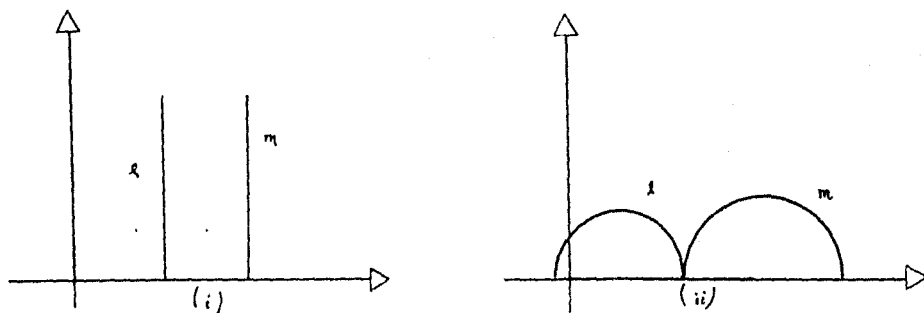


figura 23

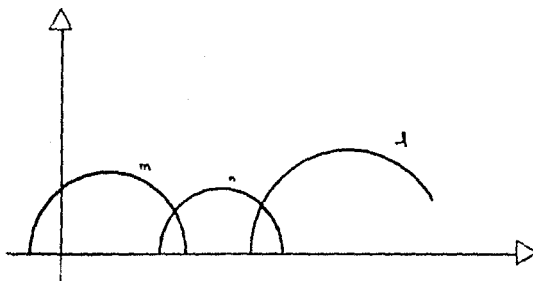


figura 24

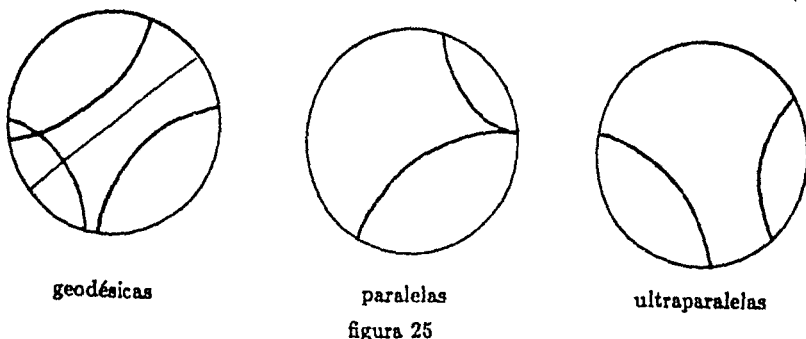
Sea  $T$  la transformación de Möbius dada por  $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$  que manda  $\mathbb{H}^2$  conformemente al interior del disco unitario de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Delta$ .

La métrica de  $\mathbb{H}^2$  se transforma en :

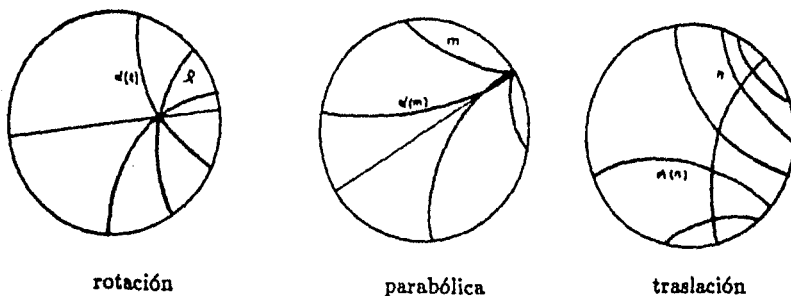
$$ds^2 = \frac{4(x^2 + y^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

La pareja  $(\Delta, d) = \Delta$  es el modelo del disco, donde  $d$  es la distancia inducida por la métrica dada, como en el caso del modelo del semiplano. El grupo de isometrías se obtiene del anterior conjugando con  $T$ , todos los elementos del grupo de isometrías del otro modelo. Las geodésicas son las imágenes de las otras por  $T$ , que resultan ser todos los segmentos de círculos ortogonales a la frontera de  $\Delta$ . La imagen de rectas verticales son círculos ortogonales a la frontera y la imagen de los semicírculos con centro en el eje  $x$  también se convierten en círculos ortogonales por ser  $T$  conforme.

Con esto tenemos la siguiente figura las geodésicas en  $\Delta$ .



En la figura 26 se ve cómo las isometrías mandan una geodésica en otra dependiendo del tipo de isometrías.



Hay algunos resultados que se prueban más fácilmente en un modelo que en otro ésta es la razón de no quedarnos con un sólo modelo.

Si  $\alpha$  es una isometría que invierte orientación induce un homeomorfismo de  $S^1$  el círculo al infinito que invierte orientación de  $H^2$ . Como  $\alpha$  fija al menos dos puntos de  $S^1$  debe dejar invariante una geodésica  $l$ .

Si componemos con  $\sigma$  una reflexión sobre  $l$  obtenemos  $\beta = \sigma \circ \alpha$  que preserva orientación y deja  $l$  invariante, por lo que vimos en la prueba de que las isometrías es composición de reflexiones, se concluye que  $\beta$  es la identidad o una traslación sobre  $l$ . Entonces  $\alpha$  es una reflexión sobre  $l$  o una reflexión traslada, es decir una reflexión compuesta con una traslación. Sea el conjunto de puntos fijos de  $\alpha$ ,  $fix(\alpha) = \{x \in H^2 \cup S^1 | \alpha(x) = x\}$  Se tiene entonces el siguiente resultado.

### 1.39. Proposición

- i) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son isometrías que preservan orientación de  $H^2$ , entonces  $\alpha$  y  $\beta$  conmutan si y sólo si  $fix(\alpha) = fix(\beta)$ .

- ii) Si  $\alpha$  es una isometría no trivial, es decir distinta de la identidad, que preserva orientación de  $\mathbf{H}^2$  entonces el conmutador  $C(\alpha) = \{\beta \in Iso(\mathbf{H}^2) | \beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta\}$  es abeliano e isomorfo a  $\mathbb{S}^1$  si  $\alpha$  es una rotación e isomorfo a  $\mathbb{R}$  en otro caso.

**Demostración.**

Primero observamos que  $fix(\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}) = fix(\beta(fix(\alpha)))$  Si  $\alpha$  y  $\beta$  conmutan  $\beta$  deja  $fix(\alpha)$  invariante, si  $fix(\alpha) = \{P\}$  con  $P \in \mathbf{H}^2$ . Si  $\beta$  conmuta con  $\alpha$ ,  $\beta$  debe fijar a  $P$ , entonces  $\beta$  es una es una rotación por  $P$  y  $fix(\alpha) = fix(\beta)$ . Es más,  $C(\alpha)$  consiste de todas las rotaciones con centro en  $P$  y es isomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Si  $\alpha$  es hiperbólica,  $fix(\alpha) = \{x, y\}$  con  $x, y$  en  $\mathbb{S}^1$ . Si  $\beta$  conmuta con  $\alpha$ ,  $\beta$  fija a  $x$  y a  $y$  o los intercambia Pero la única isometría que preserva orientación de  $\mathbf{H}^2$  que puede intercambiar a dos puntos de  $\mathbb{S}^1$  es una rotación por  $\pi$ ,  $\beta$  no puede ser una rotación por lo anterior, entonces se tiene que  $fix(\alpha) = fix(\beta)$ . Es mas  $C(\alpha)$  consiste de todas las isometrías de  $\mathbf{H}^2$  que fijan a  $x$  y a  $y$  de donde  $C(\alpha)$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha$  es parabólica  $fix(\alpha) = \{x\}$  con  $x \in \mathbb{S}^1$ , como antes si  $\beta$  conmuta con  $\alpha$ ,  $\beta(x) = x$ . Si  $\beta$  fuera hiperbólica,  $\alpha$  sería hiperbólica, entonces  $\beta$  debe ser parabólica y  $fix(\alpha) = fix(\beta)$ .  $C(\alpha)$  consiste de las isometrías parabólicas de  $\mathbf{H}^2$  que dejan fijo a  $x$  y entonces es isomorfo a  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Calcularemos el área de un polígono ideal en  $\mathbf{H}^2$ . El elemento de área es  $\frac{dx dy}{y^2}$ , para ello definimos el área hiperbólica del polígono  $F$  en  $\mathbf{H}^2$  como

$$A(F) = \int_F \frac{dx dy}{y^2}$$

donde la integral está calculada en todo el interior de  $F$ .

Por el Teorema de Green sabemos que

$$\int_F \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial F} u dx + v dy.$$

si hacemos  $u = \frac{1}{y}$  y  $v = 0$  entonces  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$  entonces se tiene

$$\int_F \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial F} \frac{dx}{y}$$

Supongamos que  $l$  es el segmento de geodésica comprendido entre dos puntos. Por lo que

$$L(l) = \int_l \frac{dx}{y} = \int_\beta^\gamma \frac{d(r \cos \theta)}{r \sin \theta} = - \int_\beta^\gamma d\theta = \beta - \gamma.$$

Observemos que la integral no depende del radio del círculo que determina la geodésica si no solamente del ángulo que subtiende. (ver figura 27)

Como en la geometría elíptica los ángulos de un polígono determinan su área.

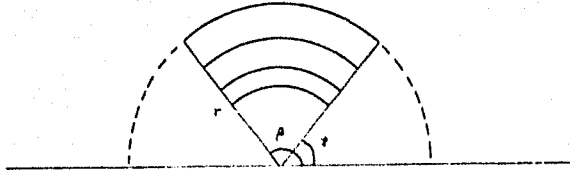


figura 27

Si  $F$  es un triángulo geodésico con lados  $a, b$  y  $c$ , se tiene que

$$\begin{aligned} A(F) &= \int_F \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial F} \frac{dx}{y} = \\ &= \int_a \frac{dx}{y} + \int_b \frac{dx}{y} + \int_c \frac{dx}{y} = \\ &= \beta_a - \gamma_a + \beta_b - \gamma_b + \beta_c + \gamma_c \end{aligned}$$

como  $\partial F$  es una curva cerrada simple por lo que se tiene que  $A(F) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$  donde  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los ángulos internos de  $F$ . †

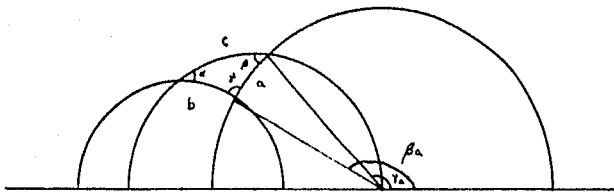


figura 28

En el caso de que  $F$  sea un polígono cerrado hiperbólico con  $m$  lados se tiene que

$$A(F) = \pi(m - 2) - \sum_{i=1}^m \gamma_i.$$

† Para más detalle esto ver [Verj].

### 1.40 Corolario

El área máxima de un triángulo hiperbólico es  $\pi$ .

El área de un triángulo está acotado, veremos al final del capítulo una tabla que nos permitirá decir más sobre este hecho.

En la geometría hiperbólica suceden cosas interesantes como lo que dice la siguiente proposición ya que podremos construir un  $n$ -ágono con suma de sus ángulos internos igual a cualquier número entre las cotas que marca la proposición, en particular nos interesarán aquellos que la suma de sus ángulos internos sea  $2\pi$ .

#### 1.41. Proposición

Para todo  $n \geq 3$  existe un  $n$ -ágono regular con ángulo interno  $\alpha$  para cualquier  $\alpha$  que satisfice  $0 \leq \alpha \leq (n-2)\frac{\pi}{n}$ .

#### Demostración.

Tomemos  $n$  rayos desde el centro del disco unitario con ángulos iguales entre ellos. Sean  $P_1, P_2, \dots, P_n$  puntos sobre los rayos a la misma distancia  $d$  del centro. Entonces  $P_1, P_2, \dots, P_n$  es un  $n$ -ágono regular. Cuando  $d$  es muy pequeña  $\alpha$  está muy cerca de  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  y si  $d$  es muy grande  $\alpha$  se acerca a 0. Por continuidad, cualquier valor entre 0 y  $\frac{(n-2)\pi}{n}$  es tomado para alguna  $d$ .  $\square$

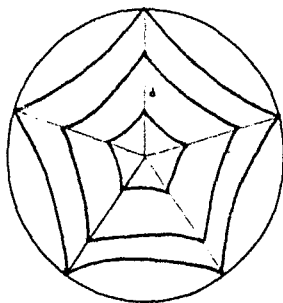


figura 29

Como en los casos anteriores queremos encontrar triángulos para enlosar nuestro espacio modelo  $\mathbb{H}^2$ , queremos encontrar los grupos triangulares hiperbólicos, buscamos entonces ternas  $(p, q, r)$  de enteros que satisfagan que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$

#### 1.42. Proposición

Las ternas  $(p, q, r)$  en  $\mathbb{H}^2$  pueden ser  $(2, n, m)$  con  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n, m \geq 5$ ,  $(3, 3, m)$  con  $m \geq 4$  y  $(n, m, l)$  con  $n, m, l \geq 3$ .

#### Demostración.

Si  $p = 2$  entonces  $q$  y  $r$  pueden ser cualquier número entero mayor que cuatro. Si  $p = q = 3$ ,  $r$  puede ser cualquier entero mayor que 3. Se tienen entonces todas las ternas  $(2, n, m)$  con  $n, m \geq 5$ ,  $(3, 3, m)$  con  $m \geq 4$ .

Hay demasiadas ternas para construir todos los grupos triangulares, recuerde-



mos que está generado por las reflexiones sobre los lados de nuestros triángulos geodésicos, para ver algunos ejemplos de grupos triangulares y como enlosan a  $\mathbb{H}^2$  es necesario que demos nuevas definiciones.

Supongamos que  $p, q, r$  son enteros todos mayores que 3.

**1.43. Definición**

Sea  $\Delta(p, q, r) = T$  el triángulo con ángulos dados, podemos suponer que el vértice con ángulo  $\alpha = \frac{\pi}{p}$  está en el centro de  $\Delta$ . Y resulta que dos de los lados son diámetros de  $\Delta$ . Por reflexiones sucesivas de  $T$  obtenemos un conjunto de  $2p$  triángulos isométricos, a  $T$  con un vértice común y cuya unión es un polígono cerrado convexo  $F$  ver figura 30. Llamamos triángulos de primer orden a los triángulos construidos.

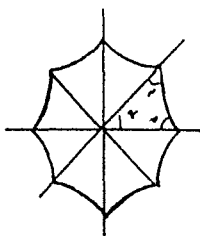


figura 30

**1.44. Definición**

Llamaremos abanico del vértice  $\beta$  a la colección de los  $2q - 2$  triángulos que se obtienen por reflexiones sucesivas sobre los lados opuestos a  $\alpha$ .

Los triángulos de los abanicos en los vértices de  $F$  se llaman triángulos de segundo orden. La unión de  $F$  con todos los triángulos de segundo orden constituyen el polígono convexo  $F_1$ .

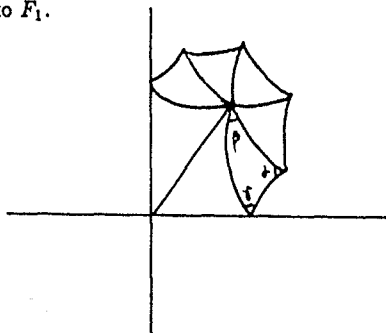
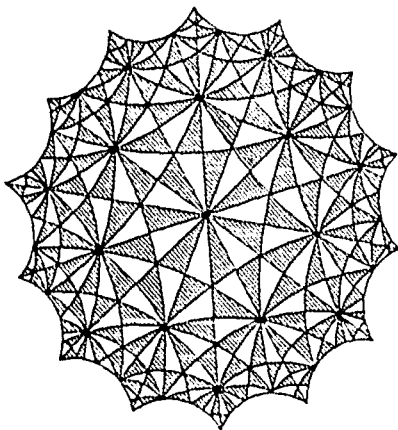


figura 31

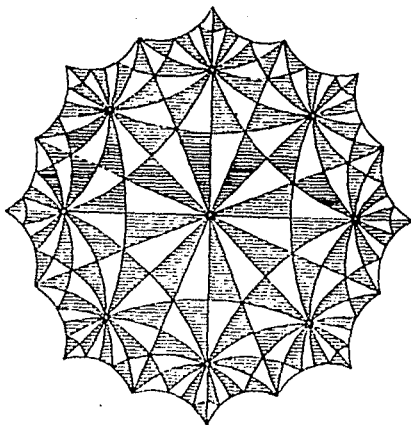
Repitiendo el proceso anterior se construye una sucesión  $F_1, F_2, \dots$ , de polígonos convexos tales que  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = \Delta$  el disco unitario.

Si uno de los ángulos del triángulo es  $\frac{\pi}{7}$  nuestra construcción es diferente pues el polígono no nos queda convexo, si en un vértice concurren más de tres ángulos iguales, añadimos un triángulo más por ese vértice lo hacemos en cada vértice y obtenemos una región convexa que llamamos  $F_k$ . Dado un triángulo contenido en el disco unitario nos dá un enlazado del disco unitario, esto quedará más claro con la demostración del teorema de Poincaré, veamos en las siguientes figuras algunos ejemplos de grupos triangulares.



$$\left( \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\left( \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right)$$



Ahora probaremos el resultado principal de este capítulo y con el cual resumimos los casos de grupos triangulares estudiados en las tres geometrías. Las referencias principales son: [Verj], [Miln], [Scot] y [Sull].

#### 1.45. Teorema de Poincaré

Dado el triángulo  $T = \Delta(p, q, r)$ , el es una región fundamental para la acción correspondiente  $\Delta^*(p, q, r)$  para cualquiera de los tres casos  $P = \{E^2, H^2, S^2\}$ .

En otras palabras las imágenes de  $T$  bajo todas las  $g \in \Delta^*(p, q, r)$  son mutuamente disjuntos excepto para los puntos frontera de  $T$ , y forman una cubierta de  $P$ .

$\Delta^*(p, q, r)$  tiene una representación con generadores  $L, M, N$  que corresponden a reflexiones sobre  $a, b, c$  las aristas de  $T$  y relaciones  $L^2 = N^2 = M^2 = 1$  y  $(LM)^p = (MN)^q = (NL)^r = 1$ .

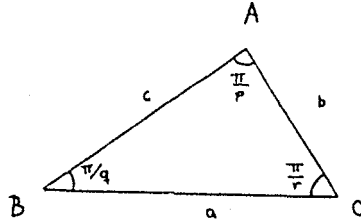


figura 32

De alguna manera podemos decir que  $T$  determina la geometría ya que determinará el espacio modelo en el que vive dependiendo de que la suma de sus ángulos internos sea  $\pi$ , mayor que  $\pi$  o menor que  $\pi$ . Es decir, si tenemos que  $T = \Delta(2, 2, \theta)$  entonces por ser  $T$  un triángulo formado por geodésicas (rectas), se tiene que sólo puede estar en  $S^2$  así que quisieramos demostrar que  $T$  es una región fundamental para la acción de  $\Delta^*(p, q, r)$  sobre  $S^2$ .

#### Demostración.

Primero probaremos que  $LM$  es una rotación por un ángulo de  $\frac{2\pi}{p}$  alrededor del vértice  $C$  de  $T$  así la relación  $(LM)^p = 1$  se satisface en  $\Delta^*(p, q, r)$ . De la misma forma se prueban las otras dos igualdades.  $L^2 = 1$  ya que  $L$  es una reflexión sobre la arista  $a$  y lo análogo para  $N$  y  $M$ .

Sea  $\hat{\Delta}(p, q, r)$  el grupo definido por una representación de  $\hat{L}, \hat{M}, \hat{N}$  con relaciones  $\hat{L}^2 = 1, \hat{M}^2 = 1, \hat{N}^2 = 1$  y  $(\hat{L})^p = (\hat{M})^q = (\hat{N})^r = 1$ . Entonces existe un homomorfismo natural de  $\hat{g} \mapsto g$  de  $\hat{\Delta}(p, q, r)$  a  $\Delta^*(p, q, r)$  dada por una correspondencia entre los generadores de  $\hat{\Delta}(p, q, r)$  a los de  $\Delta^*(p, q, r)$ .

Queremos probar que este homomorfismo en realidad es un isomorfismo.

Tomemos  $\hat{\Delta}(p, q, r) \times T$ , el conjunto que consiste de la unión disjunta de los triángulos  $(\hat{g}, T)$ , un triángulo para cada  $\hat{g}$  elemento del grupo. Para cada  $\hat{g}$  pegamos el lado  $a_{\hat{g}}$  de  $(\hat{g}, T)$  con el lado  $a_{\hat{g} \circ L}$  de  $(\hat{g} \circ L, T)$ , lo mismo para  $b_{\hat{g}}$  con  $b_{\hat{g} \circ M}$  y para  $c_{\hat{g}}$  con  $c_{\hat{g} \circ N}$ .

Sea  $K$  el espacio de identificación que se obtiene de  $\hat{\Delta}(p, q, r) \times T$  donde  $(\hat{g}, x)$  está identificado con  $(\hat{g}, x)$  está identificado con  $(\hat{g}\hat{R}, x)$  para cada  $\hat{g}$  en  $\hat{\Delta}(p, q, r)$  y  $R = \{L, M, N\}$ , y para cada  $x \in l \subset T$  donde  $l$  es un lado de  $T$ ,  $l = \{a, b, c\}$ .

Usando las relaciones  $\hat{L}^2 = \hat{M}^2 = \hat{N}^2 = 1$  se ve que existen exactamente dos triángulos pegados en cada lado de  $K$ .

Consideremos la función  $\varphi : \hat{\Delta}(p, q, r) \times T \rightarrow P$  dada por  $(\hat{g}, x) \mapsto g(x)$  donde  $g$  corresponde a  $\hat{g}$  del homomorfismo entre  $\hat{\Delta}(p, q, r)$  y  $\Delta^*(p, q, r)$

Esta  $\varphi$  es compatible con la identificación es decir si  $(\hat{g}, x) \equiv (\hat{g}\hat{R}, x)$  donde  $\hat{R} \in \{\hat{L}, \hat{M}, \hat{N}\}$  para cada  $x$  en el lado  $l$ , como  $R$  es una reflexión deja fijo a  $l$ . Entonces existe una función inducida por  $\varphi$ ,  $f$  de  $K$  en  $P$ .

$$f : K \rightarrow P$$

Queremos probar que  $f$  es un homomorfismo. Consideremos la situación alrededor de un vértice

$$(\hat{g}, C) \equiv (\hat{g}\hat{L}, C) \equiv (\hat{g}\hat{L}\hat{M}, C) \equiv (\hat{g}\hat{L}\hat{M}\hat{L}, C) \equiv \dots,$$

si usamos que  $(\hat{L}\hat{M})^p = 1$  vemos que precisamente  $2p$  triángulos de  $K$  están pegados al rededor del vértice  $(\hat{g}, C)$  Los  $2p$  triángulos son distintos ya que los  $2p$  elementos  $\hat{L}, \hat{L}\hat{M}, \hat{L}\hat{M}\hat{L}, \dots, (\hat{L}\hat{M})^p$  de  $\hat{\Delta}$  son mandados a distintos elementos de  $\Delta^*$ .

Con esto probamos que la vecindad estrellada que consiste de  $2p$  triángulos pegados alrededor de un vértice de  $K$  bajo  $f$  es un homeomorfa a una vecindad de  $g(v)$  en  $P$ .

La vecindad imagen es la unión de  $2p$  triángulos en  $P$ , que tienen un ángulo interior  $\frac{\pi}{p}$  en el vértice común  $g(v)$ ,  $f : K \rightarrow P$  es un homeomorfismo local, podemos levantar  $P$  a  $K$ , cualquier trayectoria en  $P$ , de donde la función  $f$  es cubriente.

Como  $P$  es simplemente conexa entonces  $f$  es un homeomorfismo. Entonces es claro que el homomorfismo natural es isomorfismo y

$$\bigcup_{g \in \Delta^*} g(T)$$

cubre a  $P$  y los triángulos sólo tienen en común los puntos de  $T$ . □

Finalizamos el capítulo con algunos comentarios.

Las tres geometrías que hemos estudiado son las únicas geometrías que podemos construir en dos dimensiones en el sentido clásico.

Esto es, sólo hay tres maneras de considerar el quinto postulado de Euclídes ó bien sus negaciones:

- Existe una y sólo una paralela a una recta dada por un punto dado.
- No existe una paralela a una recta dada por un punto dado.
- Existen una infinidad de rectas paralelas a una dada por un punto dado.

Cada una de ellas dá lugar a una de las geometrías ya estudiadas, en las que se cumplen los cuatro postulados de la geometría de Euclídes naturalmente, para ello pensamos que las geodésicas que tenemos en  $E^2$ ,  $S^2$  ó  $H^2$  corresponden a las rectas en el sentido axiomático de Euclídes. Una discusión detallada de esto puede encontrarse en [Port] y en [Sull]. La forma de considerar el quinto postulado implica que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea  $\pi$ , mayor que  $\pi$  o menor que  $\pi$ . Podríamos decir que esto caracteriza la geometría de dos dimensiones en la que estamos trabajando.

Es posible mostrar que  $f : P \rightarrow P$  es una isometría si y sólo si preserva distancias ver [Helg]. Es por esto que podemos afirmar que la forma que dimos de medir en los espacios modelo es acorde con el concepto intuitivo de medir.

Otro resultado sorprendente es el Teorema de Uniformización de Koebe-Poincaré dice que si  $M$  es superficie de Riemann, se tiene que su cubriente universal es conformemente equivalente a uno de los siguientes espacios:  $H^2$ ,  $C = R^2$  o  $\hat{C}$  ver [Alfh2] [Abik]. Los tres espacios modelo que tomamos para construir las tres geometrías.

Por otro lado para la geometría diferencial, cada uno de estos espacios resulta ser una variedad riemanniana de curvatura constante, 0, 1 ó -1, geodésicamente completa ver [Koba] ó [DoCar2], para  $P = E^2, S^2$  ó  $H^2$ .

Esto es, desde el punto de vista de la geometría clásica, la teoría de superficies de Riemann (1-variedades complejas), o de la geometría diferencial, los objetos principales de estudio corresponden a  $E^2, S^2$  y  $H^2$ . Todo ello podemos agruparlo en la siguiente tabla.

Espacio	Tipo de Geometría	Existencia de Paralelas	Area de Triángulos	Equivalencia Conforme	K curvatura
$R^2$	Euclidiana	Sí y es única	$2\pi$	$C$	0
$S^2$	Elíptica	No	$\alpha + \beta + \gamma - 2\pi$	$\hat{C}$	$> 0$
$H^2$	Hiperbólica	Sí y muchas	$2\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$	$H^2$	$< 0$

tabla 1

En los demás capítulos seguiremos explorando las consecuencias de esta tricotomía.

## CAPITULO 2

Estudiaremos la noción de grupos de Lie para llegar a probar que si  $G$  es un subgrupo discreto del grupo de isometrías de  $P \in \{S^2, E^2, H^2\}$ , entonces el cociente  $G/P$  es una variedad.

Después estudiaremos estructuras geométricas en variedades y la parte más importante de este capítulo será probar la equivalencia entre la existencia de un grupo  $G$  de isometrías de  $P$  actuando en  $P$  de manera libre y propia y discontinuamente tal que  $P/G = N$  sea una variedad diferenciable completa, con una  $(G, P)$ -estructura completa sobre  $N$ .

## Grupos Topológicos

### 2.1. Definición

Un grupo de Lie es una variedad  $G$  con una estructura de grupo tal que las funciones:

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

y

$$G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

son diferenciables. Es decir, la estructura de grupo es compatible con la de variedad diferenciable.

De la definición de grupo de Lie es claro que las funciones:

$$L_x : G \rightarrow G$$

$$L_x(y) = xy$$

y

$$R_x : G \rightarrow G$$

$$R_x(y) = yx$$

resultan ser difeomorfismos.  $L_x$  y  $R_x$  son llamados traslación izquierda y traslación derecha respectivamente.  $L_x$  y  $R_x$  pueden ser definidas si  $G$  sólo es grupo topológico y en ese caso resultan ser homeomorfismos.

Ejemplos:

- i)  $\mathbb{R}^n$  con la operación de suma es un grupo de Lie. Las traslaciones  $L_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $R_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  están dadas de la siguiente forma:

$$L_x(y) = x + y \quad \text{y} \quad R_x(y) = y + x.$$

- ii)  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^3$  son grupos de Lie.

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

con la operación del producto de complejos.

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 / \|x\| = 1\}$$

con la operación producto de los cuaternios.

- iii)  $O(n) = \{A \in GL(\mathbb{R}, n) / AA^t = I\}$ , es un subgrupo de  $GL(\mathbb{R}, n)$  que es un grupo de Lie por ser un abierto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , donde la operación que lo hace grupo es el

producto de matrices,  $O(n)$  resulta ser subgrupo de Lie que a su vez es grupo de Lie.

$O(n)$  es compacto y tiene dos componentes conexas, una de ellas es  $SO(n)$  la cual resulta ser conexa y compacta.

- iv) Los grupos de isometrías que preservan orientación de  $P$  con  $P \in \{\mathbb{S}^2, E^2, \mathbb{H}^2\}$  son grupos de Lie.

$Iso^+(E^2)$  es isomorfo a  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ , la operación está dada por la composición de una rotación con una traslación, resulta ser grupo de Lie con esta estructura.

$Iso^+(\mathbb{S}^2)$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm I\}$  que resulta ser de Lie.

Por último  $Iso^+(\mathbb{H}^2) \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^2$  es de Lie.

- v) Los grupos topológicos son grupos en los que la acción no necesariamente es diferenciable. Daremos un ejemplo de un grupo topológico que no es de Lie:

$$Dif(M) = \{f : M \rightarrow M / f \text{ es un difeomorfismo}\}$$

Los ejemplos en iv) son subgrupos de  $Dif(M)$ .

## Acciones de grupos en variedades

### 2.2 Definición

Un grupo de transformaciones diferenciables consiste de una variedad diferenciable  $M$ , un grupo  $G$  de Lie y una acción  $\alpha$ , que es una aplicación  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  diferenciable.

Ejemplos:

- i) Si  $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por traslaciones, es decir  $\alpha(n, x) = (n + x_1, n + x_2)$  se tiene que la acción es continua y diferenciable.
- ii) Si  $\alpha : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  está dada por  $\alpha(f, x) = f(x)$  donde  $f$  es la función antípoda,  $f(x) = -x$  es también continua y diferenciable.
- iii) Tenemos que  $Dif(M)$  actúa sobre  $M$  una variedad diferenciable de la siguiente forma:

$$\alpha : Dif(M) \times M \rightarrow M$$

$$\alpha(f, x) \mapsto f(x)$$

Llamaremos a esta la acción evaluación. Se tiene que  $Iso(P)$  actúa en  $P$  por evaluación de manera diferenciable, es decir es un grupo de transformaciones diferenciable.

- iv) Ahora demos un ejemplo de un mismo grupo  $G$  actuando de distinta manera en una variedad  $M$ .

Si  $M = \mathbb{C}$  y  $G = \mathbb{R}$

$\alpha_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\alpha_1(t, z) = e^t z$

y  $\alpha_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\alpha_2(t, z) = e^{it} z$ .



De aquí en adelante supondremos que se tiene una acción fija  $\alpha$ . Denotaremos a  $\alpha(g, x) = g \cdot x = g(x)$ .

### 2.3 Proposición

La aplicación  $g : X \rightarrow X$  es difeomorfismo para toda  $g \in G$ .

**Demostración.**

$$\begin{aligned} X &\rightarrow G \times X \rightarrow X \\ x &\mapsto (g, x) \mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

resulta ser composición de diferenciables, es diferenciable y se tiene que

$$g^{-1}(x) = g^{-1}$$

es diferenciable. □

### 2.4 Definición

Sean  $\alpha$  una acción y  $M$  una variedad se tiene :

- 1)  $\alpha$  es *efectiva*, si para toda  $g \in G$ ,  $g \neq 1$  existe  $x \in M$  tal que  $g(x) \neq x$ .
- 2)  $\alpha$  es *libre*, si  $g(x) = x$  implica que  $g = 1$ .
- 3)  $\alpha$  es *transitiva* si dados  $x_1, x_2 \in M$  existe  $g \in G$  tal que  $g(x_1) = x_2$ .
- 4)  $\alpha$  es *propia y discontinua*, si:
  - i) Si  $x \in M$  tiene una vecindad  $U$ , tal que para toda  $h \in G$  se tiene que  $hU \cap U \neq \emptyset$  es finito.
  - ii) Si  $x, y \in M$  con  $x \neq g(y)$  para toda  $g \in G$ , entonces existen vecindades  $U, V$  de  $x, y$  respectivamente tal que  $U \cap G(V) = \emptyset$ .

**Ejemplos:**

- i) La acción  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por traslaciones es efectiva, libre y propia y discontinua.
- ii) La acción  $ISO(P) \times P \rightarrow P$  dada por evaluación resulta ser transitiva.
- iii) Una acción no libre y efectiva sería una acción constante,  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  con  $\alpha(g, p) \mapsto p$ .
- iv) Un ejemplo de una no efectiva sería la acción identica:  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  con  $\alpha(g, x) = g(x) = x$ .
- v) La acción generada por una rotación en  $\mathbb{R}^2$  con un ángulo racional con  $2\pi$ , actuando por evaluación no es efectiva, ni libre pues fija al origen.  $\alpha : \langle R_\theta \rangle \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g \cdot x = g(x)$  donde  $\theta = \frac{2\pi}{p}$  y  $g \in \langle R_\theta \rangle$  es propia y discontinua sobre  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\theta$  no es racional con  $\pi$ , vimos que formaba un grupo denso que además no actúa de manera propia y discontinua.

### 2.5. Definición

Se dice que un subgrupo  $G \subset ISO(P)$  es discreto si como subespacio de  $ISO(P)$  tiene la topología discreta.

Estudiaremos los cocientes que se obtienen al identificar los puntos de una variedad por la acción de un grupo, veremos cuales son las condiciones para que el cociente sea una variedad y en caso de serlo que dimensión tiene. Para todo esto es necesario dar otras definiciones.

### 2.6. Definición

El conjunto  $G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  es un subgrupo de  $G$ , llamado *grupo de isotropía de  $x$* .

Sea la relación de equivalencia  $\sim$  en  $M$  definida de la siguiente manera:

Sean los puntos  $x, y \in M$  entonces  $x \sim y$  si y sólo si existe  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ . Denotaremos indistintamente  $g \cdot x$  ó  $g(x)$ , aunque la acción no sea siempre por evaluación, esperemos que no exista confusión al respecto.

### 2.7. Proposición

La relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.

#### Demostración.

La relación  $\sim$  es reflexiva, ya que  $1 \cdot x$  implica que  $x \sim x$ .  $\sim$  es simétrica: Si  $x \sim y$  entonces existe  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ , entonces  $g^{-1} \in G$  es tal que  $x = g^{-1} \cdot g(x) = g^{-1}(y)$  de donde se tiene que  $y \sim x$ . Probemos por último que  $\sim$  es transitiva: Si  $x \sim y$  y  $y \sim z$  entonces existen  $g_1, g_2 \in G$  tales que  $g_1(x) = y$  y  $g_2(y) = z$ , como  $g_2(g_1(x)) = g_2(y) = z$  entonces  $(g_2g_1)(x) = z$  por lo tanto  $x \sim z$ .  $\square$

### 2.8. Definición

La *órbita* de  $x$ , que denotamos  $O(x)$ , es la clase de equivalencia de  $x$ .

Ejemplos:

- i) Si  $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  está dada por  $\alpha(t, x) = tv + x$  para algún  $v \in \mathbb{R}^n$  entonces, se tiene que la órbita de cualquier punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es la recta que; pasa por  $x$  con vector director  $v$ .
- ii) Si  $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por  $\alpha(n, t) = n + t$  se tiene que la órbita de cualquier punto de  $\mathbb{R}$  es discreta.

### 2.9. Proposición

Existe una biyección continua entre el espacio cociente  $G/G(x)$  y la órbita de  $x$ . Es por eso que llamaremos a este cociente el espacio de órbitas de  $x$ .

#### Demostración.

Sea  $\theta : G/G(x) \rightarrow O(x)$  dada por la siguiente relación:

$$\theta(gG(x)) = g \cdot x$$

donde  $G(x)$  es el grupo de isotropía de  $x$ . Se tiene entonces:

$$gG(x) = hG(x) \iff g^{-1}h \in G(x) \iff (g^{-1}h) \cdot x = x \iff h \cdot x = g \cdot x$$

por lo que  $\theta$  está bien definida, es inyectiva y por el regreso de de las equivalencias anteriores se tiene que  $\theta$  es una biyección.

Nos falta demostrar que  $\theta$  es continua, sea  $\phi_x : G \rightarrow O(x)$  definida como  $\phi_x(g) = g \cdot x$  que es continua. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_x} & O(x) \\ \downarrow p & \nearrow \theta & \\ G/G(x) & & \end{array}$$

donde  $p$  está dada por  $p(g) = [g]$ , resulta ser de identificación por lo que  $\theta$  es continua. □

### 2.10. Proposición

$G(x)$  es un conjunto cerrado en  $G$  para toda  $x \in M$ .

**Demostración.**

Sean  $x$  un punto de  $M$  y  $i : G \rightarrow G \times M$  es tal que  $x \mapsto (g, x)$  entonces la composición

$$G \xrightarrow{i} G \times M \xrightarrow{\alpha} M$$

resulta ser continua, como  $M$  es una variedad  $\{x\}$  es un cerrado en  $G$  pero si  $g \in (\alpha \circ i)^{-1}(\{x\})$  entonces  $(\alpha \circ i)(g) = x$  por lo que  $g \in G(x)$  y de aquí que  $G(x)$  es cerrado. □

### 2.11. Definición

Llamamos a  $M/G$  el espacio de órbitas.

El primer problema que queremos resolver es reconocer  $M/G$  topológicamente, el segundo será tratar de caracterizar aquellos grupos  $G$  tales que  $M/G$  es una variedad diferenciable y además calcular de qué dimensión es. En el ejemplo i) de 2.8 se tiene que el cociente es una variedad de dimensión uno, nos interesan aquellos espacios de órbitas  $M/G$  que resultan variedades de la misma dimensión que  $M$ . Como lo es  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  donde el cociente es el toro de dimensión dos. Para esto es necesario estudiar más sobre los espacios cocientes.

### 2.12. Proposición

La función proyección  $p : M \rightarrow M/G$  es abierta.

**Demostración.**

Sea  $V$  un conjunto tal que  $V \subset M$  y que sea abierto. Por demostrar que  $P(V)$  es abierto, como  $p$  es identificación basta ver que  $p^{-1}(p(V))$  es abierto. Consideremos:

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(V)) &= \{x \in V \mid p(x) = p(v) \text{ para alguna } v \in V\} = \\ &= \{x \in V \mid x = g(v) \text{ para alguna } v \in V \text{ y alguna } g \in G\} = \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot V \end{aligned}$$

como  $g \cdot V$  es abierto para toda  $g \in G$  se tiene que  $p^{-1}(p(V))$  es abierto.  $\square$

Si  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  es transitiva se tiene que  $O(x)$  y  $M$  son homeomorfos.

### 2.13. Proposición

Si  $G(x)$  es cerrado en  $G$ ,  $G/G(x)$  es de Hausdorff.

#### Demostración.

Sean  $g_1G(x), g_2G(x)$  dos elementos del espacio cociente tales que  $g_1G(x) \neq g_2G(x)$  entonces  $g_1g_2 \in G(x)$  como  $G \times G \rightarrow G$  con regla  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  es continua,  $G$  es grupo topológico y como  $G(x)$  es cerrado, podemos tomar una vecindad  $W$  de  $g_1g_2^{-1}$  tal que  $W \cap G(x) = \emptyset$ .

De la continuidad se sigue que existen vecindades  $U$  de  $g_1$  y  $V$  de  $g_2$  tales que  $UV^{-1} \subset W$ .

Sabemos que  $p : G \rightarrow G(x)$  es abierta por lo tanto  $p(U)$  y  $p(V)$  son vecindades de  $g_1G(x)$  y de  $g_2G(x)$  respectivamente. Por demostrar que  $p(U) \cap p(V) = \emptyset$ . Supongamos  $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$  entonces existen  $u \in U, v \in V$  tales que  $uG(x) = vG(x)$  entonces  $uv^{-1} \in G(x)$  con lo cual llegamos a una contradicción pues  $g_1G(x) \neq g_2G(x)$ . Por lo que queda probado que  $p(U) \cap p(V) = \emptyset$  y entonces  $G/G(x)$  es de Hausdorff.  $\square$

### 2.14. Teorema

Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  es una acción libre y propia y discontinua de  $G$  en  $M$ .  $M/G$  tiene una estructura de variedad diferenciable que hace de la proyección  $p : M \rightarrow M/G$  un difeomorfismo local.

#### Demostración.

Para cada  $p \in M$  tomemos una parametrización en  $p$ ,  $\varphi : V \rightarrow M$  tal que  $\varphi(V) \subset U$  donde  $U$  es una vecindad de  $p$  en  $M$  tal que  $U \cap g(U) \neq \emptyset$  con  $g \neq 1$ .

La aplicación  $p|_U$  es inyectiva claramente, de donde  $\phi = p \circ \varphi : V \rightarrow M/G$  también es inyectiva.

La familia  $\{V, \phi\}$  cubre a  $M/G$  sólo basta probar que las aplicaciones de cambio de coordenadas:

$$\phi_1 = p \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow M/G \text{ y } \phi_2 = p \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow M/G$$

con  $\phi(V_1) \cap \phi(V_2) \neq \emptyset$ , son  $\phi_1^{-1} \circ \phi_2$  diferenciables.

Sea  $p_i$  la restricción de  $p$  a  $\varphi_i(V_i)$  con  $i = 1, 2$ . Sea  $x \in \phi_1(V_1) \cap \phi_2(V_2)$  y  $z = \varphi_2^{-1} \circ p_2^{-1}(x)$ . Sea  $W \subset V_2$ , entonces restringida a  $W$

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_2|_W = \varphi_1^{-1} \circ p_1^{-1} p_2 \circ \varphi_2$$

basta probar que  $p_1^{-1} \circ p_2$  es diferenciable; sean  $y_2 = p_2^{-1}(x), y_1 = p_1^{-1} \circ p_2^{-1}$  entonces  $y_1, y_2$  son equivalentes en  $M$ , por lo que existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot y_2 = y_1$ , si ahora,  $y' \in p(W)$  entonces  $p_1^{-1} \circ p_2(y') = y''$  donde  $y''$  es el único punto de  $\varphi_1(x_1)$  tal

que  $p(y'') = p(y')$ , por otro lado,  $gy' \in \varphi_1(V_1)$  y  $p(gy') = p(y')$  luego  $gy' = y'' = p_1^{-1} \circ p_2(y')$  esto es la restricción de  $p_1^{-1}p_2|_{\varphi(W)}$  coincide con un difeomorfismo  $\phi_g|_{\varphi_2(W)}$  lo que prueba que sí es diferenciable y es un difeomorfismo local.  $\square$

Queremos probar que si  $M/G = N$  es una variedad diferenciable entonces  $G \cong \Pi_1(N)$ , para esto definamos la monodromía de un espacio cubriente de la siguiente manera:

### 2.15. Definición

Sea  $f : M \rightarrow N$  una función cubriente entre variedades diferenciables, sea  $y_0$  un punto de  $N$ , la fibra de  $y_0$ ,  $f^{-1}(y_0)$  tiene un número numerable de puntos  $x_1, x_2, \dots$ , definimos  $\sigma : \Pi_1(N, y_0) \rightarrow f^{-1}(y_0)$  dada por  $\sigma(\gamma)(x_i) = x_j$ , donde  $\gamma$  es un lazo que empieza y termina en  $y_0$  que al levantar  $\gamma$  a  $M$  con punto inicial  $x_i$  se obtiene una única trayectoria que termina en  $x_j$ . De hecho se tiene que  $\sigma(\gamma)$  es una transformación de cubierta, la única transformación de cubierta que manda  $x_i$  a  $x_j$ . **2.16. Proposición**

La monodromía es un homeomorfismo de grupos entre  $\Pi_1(N, y_0)$  y el grupo de transformaciones de cubierta.  $\square$

### 2.17. Teorema

Si  $G$  actúa libre y propia y discontinuamente sobre  $M$  simplemente conexa tal que  $N = M/G$  entonces se tiene que  $G \cong \Pi_1(N)$ .

#### Demostración.

Quisieramos demostrar que el morfismo anterior es un isomorfismo. Sean  $p : M \rightarrow N$  la proyección de  $M$  a  $N$  y  $\sigma$  la monodromía de  $p$ . Tomemos  $y_0$  cualquier punto de  $N$  y fijemos un punto  $x_0 \in M$  de la fibra de  $y_0$ . Debemos establecer un isomorfismo entre la fibra de  $y_0$  y el  $\Pi_1(N, y_0)$ . Sea  $\gamma_1 \in \Pi_1(N, y_0)$  un lazo y consideremos su levantamiento a  $M$  que cubre a  $\gamma_1$  y que empieza en  $x_0$ ; el cual termina en un punto  $x_1 = \sigma(\gamma_1)(x_0)$ .

Sea  $g_1$  tal que  $g_1(x_0) = x_1$  entonces si hacemos la correspondencia  $\gamma_1 \leftrightarrow g_1$ , se tiene el isomorfismo buscado:

Esta función está bien definida:

Supongamos que  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi_1(N, y_0)$  tales que ambos corresponden a  $g_1$ ; entonces  $\gamma_1^{-1}\gamma_2$  tiene la propiedad de que  $\sigma(\gamma_1^{-1}\gamma_2)(x_0) = x_0$ . Como  $M$  es simplemente conexa se tiene que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son homotópicas en  $M$ .

La inyectividad se da por que la acción de  $G$  es libre. Resulta ser sobre por la conexidad de  $M$ , pues todo  $g \in G$  corresponde a algún  $\gamma_1 \in \Pi_1(N, y_0)$ .

La función resulta ser isomorfismo, ya que la monodromía es un homomorfismo del  $\Pi_1(N, y_0)$  a la fibra y de que la acción de  $\sigma$  sobre la fibra y la acción del  $g_1 \in G$  correspondiente coinciden.  $\square$

## Estructuras geométricas.

Nos interesa dar estructuras geométricas a las dos variedades que se pueden modelar en  $P \in \{E^2, S^2, H^2\}$ , bajo la acción de un subgrupo de  $Iso(P)$ , la teoría de estructuras geométricas es general por eso daremos las definiciones generales y tendremos cuidado de que con los ejemplos quede mas claro en el caso que nos interesa.

### 2.18. Definición

Un espacio geométrico  $(G, X)$  es una pareja donde  $G$  es un grupo de Lie que actúa sobre  $X$  una variedad diferenciable, continuamente y de manera única localmente, esto es si  $U \subseteq X$  es abierto,  $g \in G$  y  $g|_U = id.$  entonces  $g = id.$

Ejemplos:

- i) Se tiene que  $(Iso(P), P)$  es un espacio geométrico para toda  $P$ .
- ii)  $(Gl(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$  es un espacio geométrico.
- iii) Para toda  $n$  se tiene que  $(O(n), S^n)$  es un espacio geométrico.
- iv) Sea  $Dif_{loc}(M)$  que denota al conjunto de los difeomorfismos locales de  $M$ .  $(Dif_{loc}(M), M)$  no es un espacio geométrico por que aunque la acción es única localmente,  $Dif_{loc}$  no es grupo ya que la composición no está bien definida.

### 2.19. Definición

Dada  $M$  una variedad diferenciable, un  $(G, X)$ -atlas sobre  $M$  es una cubierta coordinada  $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  donde  $U_\alpha \subseteq M$  son abiertos para toda  $\alpha$ ,  $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow z_\alpha(U_\alpha) \subseteq X$  es un homeomorfismo y  $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$  es la restricción de alguna  $g_{\alpha\beta} \in G$  a  $z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$ .

Una  $(G, X)$ -estructura es un  $(G, X)$ -atlas maximal sobre  $M$ . A la pareja  $M$  con un  $(G, X)$  atlas maximal la llamaremos una  $(G, X)$ -variedad.

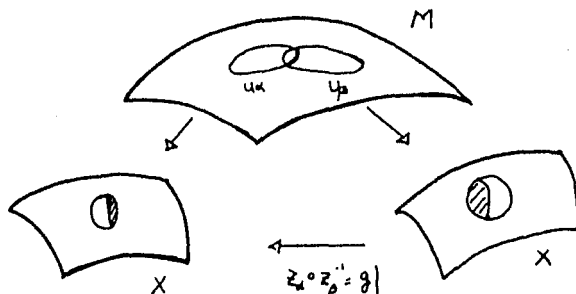


figura 33

Para obtener un  $(G, X)$  atlas en  $M$  podríamos recortar abiertos  $\{z_\alpha(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  y pegarlos con elementos de  $G$  dados por la acción sobre  $X$ .

### 2.20. Definición

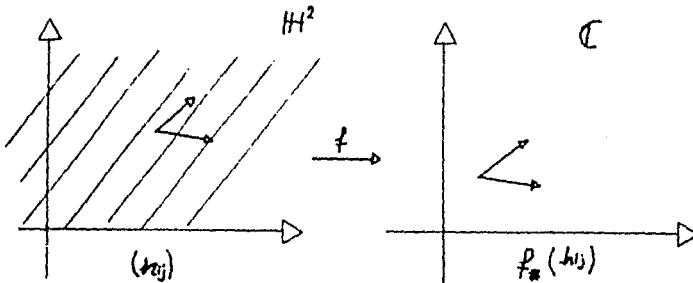
Una  $(G, X)$ -función es una aplicación,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  de  $(G, X)$ -variedades es tal que  $x_\alpha \circ f \circ x_\beta^{-1}$  es la restricción de algún elemento de  $G$  donde este esté definido.  $M_1$  y  $M_2$  son  $(G, X)$ -variedades equivalentes si existe una  $(G, X)$ -función invertible.

Las definiciones anteriores generalizan los conceptos de variedad diferenciable y difeomorfismo. Los problemas principales que nos interesan son:

1°-Dada una variedad diferenciable  $M$  caracterizar bajo que condiciones admite una  $(G, X)$ -estructura.

2°-Y si  $M$  admite una  $(G, X)$ -estructura, contar cuántas no equivalentes existen. Empecemos con algunos ejemplos:

- i) Si  $G_0 \subseteq G$  es un subgrupo de  $G$  entonces  $(G_0, X)$  es un espacio geométrico. Cualquier  $(G_0, X)$ -estructura sobre  $M$  se extiende a una  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$ .
- ii) Sobre el toro  $T$ , tenemos una  $(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$ -estructura.
- iii) A  $\mathbb{S}^2$  le podemos dar una  $(O(3), \mathbb{S}^2)$  trivialmente y una misma estructura a  $\mathbb{P}^2$ .
- iv) A  $\mathbb{R}^2$  como variedad diferenciable podemos darle una estructura  $(Iso(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$  trivialmente y una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura de la siguiente manera:



Si damos a  $\mathbb{H}^2$  la métrica hiperbólica  $h_{ij}$  y  $f$  es un difeomorfismo entre  $\mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{C}$ , entonces se tiene que a  $\mathbb{C}$  le podemos dar la métrica  $f_*(h_{ij})$ , donde  $f_*$  es la diferencial de  $f$  tal que  $\mathbb{C}$  con esta métrica es isométrico a  $\mathbb{H}^2$ . Esto nos da un ejemplo de una misma variedad que admite dos estructuras geométricas de tipo distinto.

El problema de equivalencia de dos estructuras en el caso que a nosotros nos interesa queda resuelto por el siguiente resultado.

### 2.21. Proposición

Sean  $p : L \rightarrow M$  y  $q : L \rightarrow N$  cubrientes de variedades riemannianas con  $G$  y  $G'$  los grupos de transformaciones de cubierta. Entonces  $M$  y  $N$  son isométricas si y sólo si  $G$  y  $G'$  son subgrupos conjugados en el grupo de isometrías de  $L$ .

**Demostración.**

Como  $M = L/G$  y  $N = L/G'$ , sea  $f$  es una isometría de  $L$  con  $fGf^{-1} = G'$ , entonces  $\bar{f} : M \rightarrow N$  definida por  $\bar{f}(G(x)) = G'(f(x))$  es una isometría por ser transformación de cubierta.

Inversamente, sea  $h : M \rightarrow N$  una isometría  $hp : L \rightarrow N$  tiene un levantamiento  $\bar{h}$  relativo a la cubriente  $q$  y  $\bar{h}$  es una isometría de  $L$  por ser cubriente de  $h$ .

Se tiene que  $\bar{h}(G(x)) = \bar{h}(p^{-1}x') = q^{-1}(hx') = G'(\bar{h}x')$ , así que  $\bar{h}$  conjugua a  $G$  y a  $G'$ .  $\square$

Con esto, el teorema 2.17 y 2.14 se tiene una primera respuesta al problema de la existencia de una  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$  que es, que exista un monomorfismo del  $\Pi_1(M)$  en  $G$  tal que la acción evaluación asociada, sea libre, propia y discontinua.

Con respecto al problema de  $(G, X)$ -equivalencias de estructuras en el caso de que  $X$  sea una variedad riemanniana y  $G$  un subgrupo de su grupo de isometrías. Entonces por el resultado anterior dos estructuras en  $M$  serán equivalentes si las imágenes de  $\Pi_1(M)$  en  $G$  bajo los monomorfismos asociados son conjugados en  $G$ . En lo que sigue exploraremos estas relaciones con mas detalle para el caso general. Es decir, donde  $X$  no tiene una estructura de variedad riemanniana determinada.

Queremos saber como levantar la estructura de una variedad a un espacio cubriente. Mediante la función que llamaremos holonomía de una  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$  de algún modo estableceremos que relación existe entre el grupo fundamental de  $M$  y  $G$ . Esto nos ayudará a resolver el problema en general de las estructuras equivalentes.

### 2.22 Proposición

Sea  $\tilde{M}$ , un espacio cubriente de  $M$  y  $p$  la proyección  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  asociada.

Si  $M$  es una  $(G, X)$  - variedad,  $\tilde{M}$  es una  $(G, X)$  - variedad con funciones coordenadas  $z_{\alpha op}$ .

### Demostración.

El  $(G, X)$  - atlas para  $M$  está dado por el atlas  $\{(U_\alpha, z_{\alpha op})\}$  donde  $U_\alpha$  es un abierto de  $\tilde{M}$  y  $z_{\alpha op}$  es un homeomorfismo, además se tiene que  $(z_\alpha \circ p) \circ (p^{-1} \circ z_\beta^{-1}) = z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$  que es la restricción de algún elemento de  $G$ . Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .  $\square$

Sean  $M$  una  $(G, X)$  - variedad,  $m_0$  un punto fijo en  $M$  como punto base del grupo fundamental  $\Pi_1(M, m_0)$ . Fijemos una carta  $z_0 : U_0 \rightarrow z_0(U_0) \subseteq X$  donde  $m_0 \in U_0$ .

### 2.23. Definición

La holonomía de  $M$  es una función  $\chi : \Pi_1(M, m_0) \rightarrow G$  cuya regla de correspondencia es  $\chi(\alpha) = g_{n_0}$ , donde  $\alpha$  es una trayectoria cerrada basada en  $m_0$  y  $g_{n_0}$  se construye de la siguiente manera:

Como  $\alpha$  es compacta la cubrimos con una cadena finita de cartas coordenadas  $U_0, U_1, \dots, U_n$  (ver figura 34).

Sea  $\hat{z}_0 = z_0$ ,  $\hat{z}_0 \circ z_1^{-1}$  es la restricción de algún  $g_{01} \in G$ , el cuál está definido par todo elemento de  $X$ .



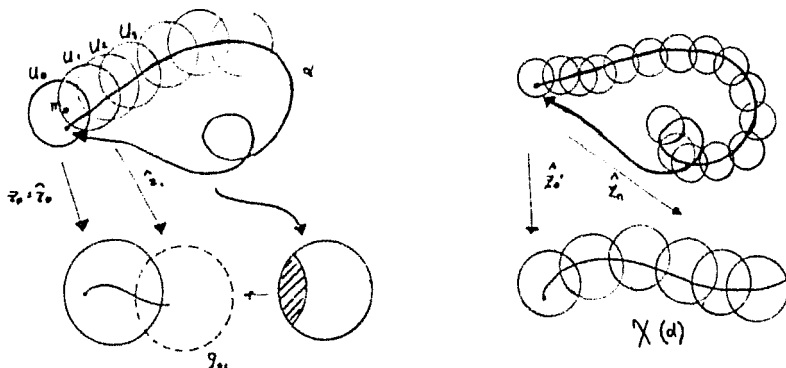


figura 34

Sea  $\hat{z}_1 = g_{01} \circ z_1$  inductivamente obtenemos que  $\hat{z}_j = g_{j-1,j} \in G$ .

$\hat{z}_n, \hat{z}_0$  son dos funciones coordenadas de la  $(G, X)$ -estructura definida en una vecindad de  $m_0$  con lo que queda claro quien es  $g_{n0}$ .

#### 2.24. Definición

Llamamos proceso de continuación analítica de una  $(G, X)$ -estructura a lo largo de una curva  $\alpha$ , al proceso de ir definiendo una función a lo largo de las intersecciones de vecindades como se hizo en la definición de holonomía.

Cabe señalar que esta definición generaliza el concepto de continuación analítica de una función holomorfa.

#### 2.25. Proposición

Si  $\alpha_0$  es homotópica a  $\alpha_1$  con respecto a  $m_0$ , entonces se tiene que  $\chi(\alpha_0) = \chi(\alpha_1)$ .

**Demostración.**

Sea la aplicación  $H : I \times I \rightarrow M$  una homotopía entre la curva  $\alpha_0$  dada por  $H(0, t)$  y  $\alpha_1$  dada por  $H(1, t)$ , dadas dos curvas  $H(\epsilon, t)$  y  $H(\delta, t)$ , si  $\epsilon - \delta$  es suficientemente pequeño una misma colección de discos cubre la imagen de ambas curvas de donde la holonomía asociada a ambas curvas es igual. Como la imagen de  $I \times I$  bajo  $H$  es compacta en  $M$ , el proceso puede repetirse transitivamente una infinidad de veces, para mostrar que la holonomía de  $H(0, t)$  y la de  $H(1, t)$  son iguales.  $\square$

La proposición anterior nos prueba que la holonomía está bien definida.

La holonomía depende de la carta coordenada  $z_0$  elegida en  $m_0$ , sin embargo, cualquier otra carta es esencialmente  $g \circ z_0$  para alguna  $g \in G$ . Obteniendo  $g\chi(\alpha)g^{-1}$  en lugar de  $\chi(\alpha)$ .

Si escribimos  $In G = \{\varphi : G \rightarrow G | \varphi(h) = ghg^{-1}\}$  y consideramos la acción de  $In G$  sobre el conjunto de homomorfismos de  $G'$  en  $G$  donde  $G'$  es cualquier grupo,  $Hom(G', G)$ . Dados por  $\chi \mapsto \varphi \circ \chi$ ,

$$\varphi \circ \chi : G' \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\varphi} G$$

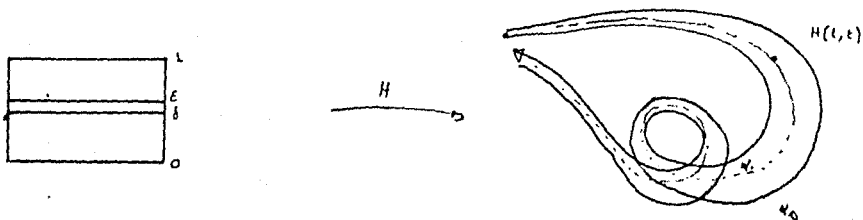


figura 35

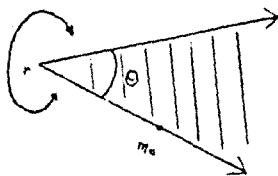


figura 36

se tiene entonces que la holonomía puede verse como un elemento de la forma:

$$\chi \in \frac{\text{Hom}(\Pi_1(M, m_0), G)}{\text{In } G}.$$

Ver [Port2].

Ejemplos:

i) Si identificamos los rayos de un sector de ángulo  $\theta$  en  $E^2$  o en  $\mathbb{H}^2$

$M$  el espacio cociente quitando el vértice tiene una  $(\text{Iso}^+(E^2), E^2)$ -estructura ó una  $(\text{Iso}^+(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura. En este caso  $\Pi_1(M^2) \cong \mathbb{Z}$ .

Si  $\alpha$  es un generador de  $\Pi_1(M)$  y calculamos la holonomía obtenemos que  $\chi(\alpha) = R_\theta$  una rotación por  $\theta$  con centro en  $p$  (en  $E^2$  o en  $\mathbb{H}^2$ ). En particular  $M$  es una  $(O(2), \mathbb{R}^2 - \{p\})$ -variedad o una  $(O(2), \mathbb{H}^2 - \{p\})$ -variedad donde  $p$  es el vértice del cono, ver figura 36.

Ejemplo:

Sean  $G$  y  $G'$  los grupos generados por la identidad y las traslaciones en  $E^2$   $T_{v_1}$ ,  $T_{v_2}$  y por  $T_{v'_1}$ ,  $T_{v'_2}$  respectivamente con  $v_1 = (1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  y  $v'_1 = (1, 0)$  y  $v'_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Se tiene que  $G$  y  $G'$  actúan sobre  $\mathbb{R}^2$  de manera libre, propia y

discontinua, el cociente bajo la acción de estos grupos es homeomorfa al toro plano de dimensión dos, calculemos la holonomía para uno de los generadores del  $\Pi_1(T^2)$ . Se tiene:

$$\chi : \Pi_1(T^2) \rightarrow G \text{ está dado por } \chi(\alpha) = T_{v_1}$$

y

$$\chi' : \Pi_1(T^2) \rightarrow G' \text{ dada por } \chi'(\alpha) = T_{v'_1}.$$

Por lo tanto las dos estructuras planas que le hemos dado al toro son distintas ya que  $G$  y  $G'$  no son conjugados en  $Iso(E^2)$ .

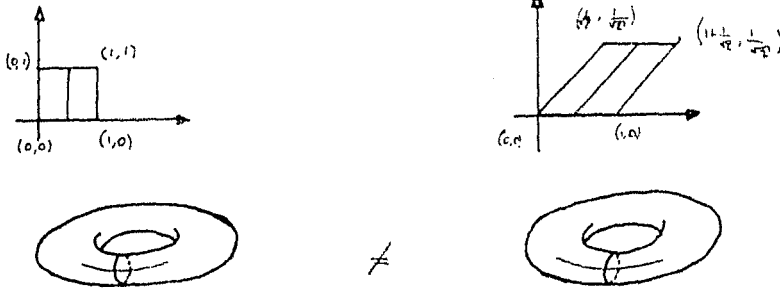


figura 37

### 2.26. Proposición

Sea  $M$  una  $(G, X)$ -variedad. Si  $\tilde{M} \xrightarrow{p} M$  es la aplicación cubriente y levantamos la  $G$ -estructura de  $M$  a  $\tilde{M}$  con  $p(\tilde{m}_0) = m_0$ . Entonces cualquier lazo  $\tilde{\alpha} \subseteq \tilde{M}$  en  $\tilde{m}_0$  se proyecta a un lazo  $\alpha = p(\tilde{\alpha})$  en  $m_0$  y  $\tilde{\chi} = \chi \circ p$ , donde  $p_* : \Pi_1(\tilde{M}) \rightarrow \Pi_1(M)$ .

#### Demostración.

El proceso de continuación analítica a lo largo de  $\tilde{\alpha}$  está dado por las mismas cartas coordenadas que para  $\alpha$ , entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\tilde{M}) & & \\ \downarrow p_* & \searrow \tilde{\chi} & \\ \Pi_1(M) & \xrightarrow{\chi} & G \end{array}$$

Y el resultado es cierto. □

Si la holonomía de una  $(G, X)$ -variedad  $M$  es trivial, esto es  $\chi(\Pi_1(M, m_0)) = \{id\}$ , entonces tenemos una  $(id, X)$ -estructura sobre  $M$ .

Fijemos una función coordenada  $z_0$  en  $m_0$ . Sea  $m \in M$  y  $\alpha \subseteq M$  una curva que une a  $m_0$  y a  $m$ . Apliquemos el mismo proceso de continuación analítica de la definición de la holonomía y definamos  $f(m) = z_n(m) \in X$  donde  $z_n$  es la última función coordenada del proceso de continuación analítica sobre el lazo  $\alpha$ .

### 2.27. Proposición

La aplicación  $f$  está bien definida si la holonomía de  $M$  es trivial.

### Demostración.

Sea  $\alpha' \subseteq M$  otra curva que une a  $m_0$  y a  $m$ ,  $\alpha^{-1} \circ \alpha'$  es un lazo en  $m_0$  y  $\chi(\alpha^{-1} \circ \alpha) = \{id\}$ , así que  $z'_n(m) = z_n(m)$  y  $f$  está bien definida.  $\square$

La aplicación  $f$  resulta ser una inmersión ya que localmente es como una  $(G, X)$ -carta coordenada. Y se tiene que  $f|_{U_0} = z_0$ ,  $f$  es un homeomorfismo local.

Observemos que si hubieramos empezado con  $g \circ z_0$  en lugar de con  $z_0$  lo que obtendríamos a  $g \circ f$  en lugar de  $f$ .

### 2.28. Proposición

La holonomía de una  $(G, X)$  - estructura sobre  $M$  es trivial si y sólo si existe una inmersión  $f : M \rightarrow X$ .

### Demostración.

Solo nos falta ver como una inmersión determina una  $(id, X)$  - estructura sobre  $M$ , que equivale a decir que la holonomía es trivial.

Restringiendo la inmersión  $f$  a los abiertos donde es homeomorfismo local obtenemos el  $(id, X)$  - atlas para  $M$ .  $\square$

Estudiemos ahora la función desarrolladora de una estructura geométrica.

### 2.29. Definición

Sea  $M$  una  $(G, X)$  - variedad, sea  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  la cubriente universal de  $M$ , levantemos la estructura a  $\tilde{M}$ . Como  $\Pi_1(\tilde{M})$  es trivial, la holonomía  $\tilde{\chi}$  es trivial y entonces una carta coordenada sobre  $\tilde{M}$  se extiende por la proposición anterior a una inmersión.

$$D : \tilde{M} \rightarrow X.$$

$D$  es llamada la función desarrolladora para  $M$  con respecto a la carta elegida. Si elegimos otra carta coordenada, obtenemos  $g \circ D$  para alguna  $g \in G$ .

### Ejemplos:

Tomemos a  $M$  como el sector de ángulo irracional con  $\pi$ , la aplicación desarrolladora nos dá como cubriente  $\tilde{M}$  una espiral infinita ver figura 38 (i).

En el caso de que el ángulo sea de la forma  $\frac{2\pi}{n}$  nos queda un disco partido en  $n$  partes iguales ver figura 38 (ii).

Y por último si el ángulo es de la forma  $\frac{p2\pi}{q}$  se ve como en la figura 38 (iii).

### 2.30. Proposición

La función desarrolladora es equivariante. Es decir,  $D \circ T_\alpha = \chi(\alpha) \circ D$  donde  $T_\alpha$  es una transformación de cubierta y  $\alpha \in \Pi_1(M, m_0)$ .

### Demostración.

Si  $T$  una transformación de cubierta es decir, si  $p \circ T = p$ . Existe una correspondencia 1 - 1 entre los elementos del  $\Pi_1(M, m_0)$  y las transformaciones de cubierta, dada como sigue:

$$\alpha \leftrightarrow T_\alpha.$$

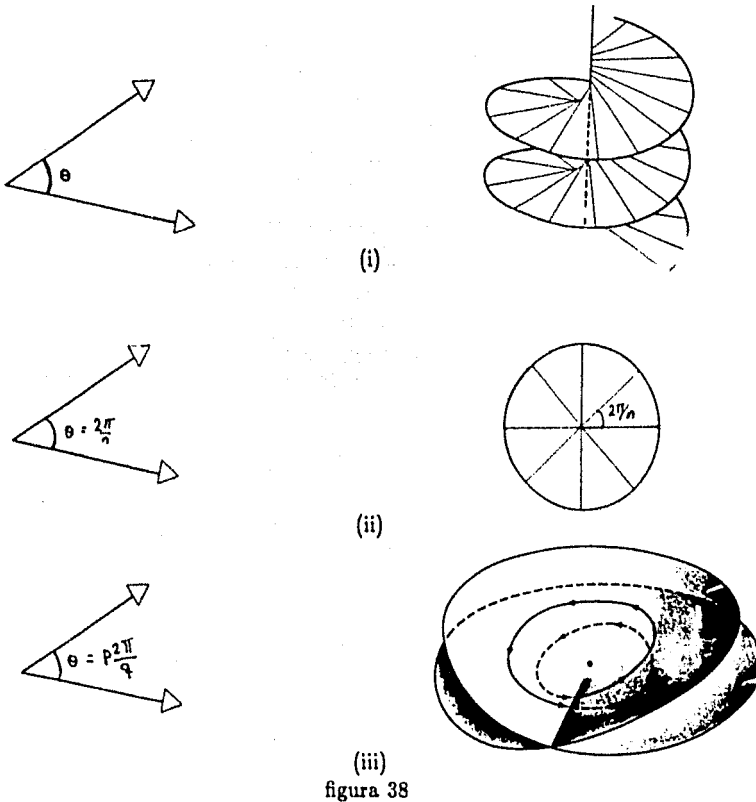


figura 38

El punto final de  $\tilde{\alpha}$  es  $T_\alpha(\tilde{m}_0)$  y  $D(T_\alpha(\tilde{m}_0)) = \chi(\alpha)(D(\tilde{m}_0))$  por las definiciones de  $D$  y  $\chi(\alpha) \circ \tilde{z}_0$ . Donde continuamos  $\chi(\alpha) \circ \tilde{z}_0$  a lo largo de  $\tilde{\beta}^{-1}$  entonces  $D(T_\alpha(\tilde{m})) = \chi(\alpha)(D(\tilde{m}))$  por lo que la proposición es cierta. Si en lugar de  $D$  usamos  $g \circ D$  obtenemos que  $(g \circ D) \circ T_\alpha = (g \circ \chi(\alpha) \circ g^{-1}) \circ (g \circ D)$ .  $\square$

Sea  $\alpha$  un lazo basado en  $m_0 \in M$ , sea  $\tilde{m} \in \tilde{M}$  levantemos  $\alpha$  a  $\tilde{\alpha}$  de forma que empiece en  $\tilde{m}_0$ . Sea  $\tilde{\beta}$  una curva que una a  $\tilde{m}_0$  y a  $\tilde{m}$ . Si  $\beta = p(\tilde{\beta})$ , que termina en  $m = p(\tilde{m})$ . Levantemos  $\beta^{-1}\alpha\beta$  a  $\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1} \subseteq \tilde{M}$  que empieza en  $\tilde{m}$  y llamaremos  $T_\alpha(\tilde{m})$  a su punto final.

$D(\tilde{m})$  está definida por continuación de  $\tilde{z}_0$  a lo largo de  $\tilde{\beta}$ , mientras que  $D(T_\alpha(\tilde{m}))$  está definida por continuación analítica de  $\tilde{z}_0$  a lo largo de  $\tilde{\beta}'\tilde{\alpha}$ .

**2.31. Proposición**

$D : \tilde{M} \rightarrow X$  es un homeomorfismo para toda  $\alpha \in \Pi_1(M, m_0)$  y alguna  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$ . Si tenemos dos estructuras equivalentes sobre  $M$ ; un homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  el cual es una  $(G, X)$ -función entonces tenemos



### 2.32. Proposición

La topología  $\tau$  es independiente del subatlas  $\mathcal{A}$  elegido para representar cada  $(G, X)$  - estructura con  $\mathcal{A}_{\max}$  como atlas máximo ver [Port2].  $\square$

En los siguientes ejemplos la construcción de las estructuras depende de ciertos parámetros, la variación de ellos produce estructuras distintas y  $\epsilon$  cercanas.

- i) Si tenemos la banda infinita en  $\mathbb{R}^2$  comprendida entre las rectas  $x=0$  y  $x=2$  si tomamos el cociente que se obtiene al identificar los puntos de la forma  $(0, y)$  con los de la forma  $(2, y)$  obtenemos un cilindro recto. Sin embargo si identificamos  $(0, y)$  con  $(0, y + \epsilon)$  también obtenemos un cilindro pero las estructuras que nos quedan son distintas. Si  $\epsilon$  es pequeño es posible mostrar que las estructuras asociadas están cercanas.

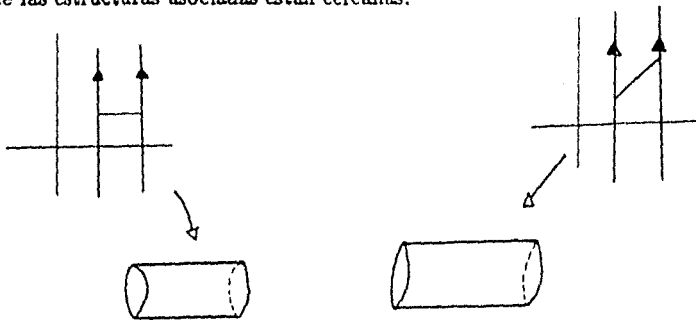


figura 40

- ii) Damos a  $\mathbb{S}^2 - \{m_1, m_2, m_3\}$  una estructura hiperbólica identificando los lados de dos triángulos ideales mediante isometrías como muestra la figura 41. Sin embargo, si cambiamos la identificación podemos obtener otra  $(Iso^+ \mathbb{H}^2, \mathbb{H}^2)$  - estructura que no necesariamente es equivalente ver [Verj].

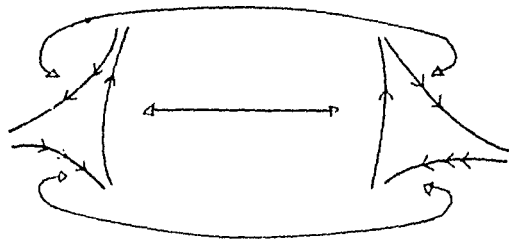


figura 41

### 2.33. Definición

Si  $X$  es un espacio métrico completo decimos que una  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$  es completa si la función desarrolladora  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  es una función cubriente.

Ejemplo:

Sea  $M^2$  un pantalón (ver figura 42), le podemos dar dos estructuras hiperbólicas distintas. Primero construyamos la cubriente universal del pantalón de la siguiente manera:

Cortemos a lo largo de  $l$  y a lo largo de  $m$ , dos geodésicas, en el disco unitario dibujemos una región fundamental  $F$  isométrica al pantalón después del corte,  $F$  se puede ver como dos hexágonos hiperbólicos unidos por uno de sus lados, por los lados que no forman la frontera de  $M^2$  repetamos la configuración, resulta que lo que obtenemos después de reflejar de todas las maneras posibles es simplemente conexo, sin embargo no es todo el disco ya que los puntos de los lados que corresponden a frontera de  $M^2$  no son parte de  $M^2$ , la estructura que acabamos de dar al pantalón no es completa.

Sin embargo, si pensamos a  $M^2$  como una superficie de Riemann tiene una  $(PSL(2, \hat{\mathbb{C}}), \hat{\mathbb{C}})$ -estructura completa ya que por el teorema de uniformización su cubriente universal es todo  $\Delta$  que es completo.

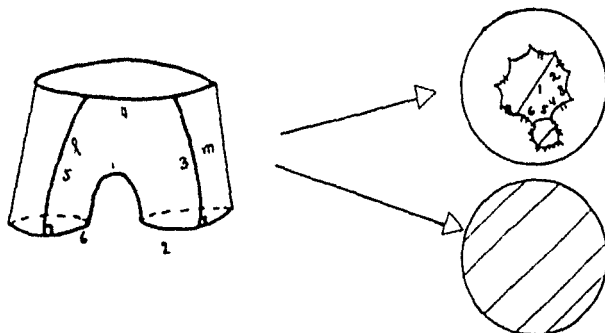


figura 42

Cuando  $X$  es simplemente conexo,  $D$  es un homeomorfismo y podemos hablar de  $X$  como de  $\tilde{M}$ .

### 2.34. Definición

Una métrica de Riemann sobre  $X$  es  $G$ -invariante si la acción la acción asociada  $\alpha : G \times X \rightarrow X$  es por isometrías.

En nuestro caso  $P \in \{S^2, E^2, H^2\}$  sabemos que tal métrica existe.

Un problema general que no analizaremos con detalle es determinar dado el espacio geométrico  $(G, X)$  bajo qué condiciones existe una métrica en  $X$   $G$ -invariante. Al respecto se tiene la siguiente proposición:

### 2.35. Proposición

Supongamos que la acción de  $G$  sobre  $X$  es transitiva y que el grupo de isotropía



de cualquier punto es compacto. Todo espacio geométrico  $(G, X)$  tiene una métrica de Riemann  $G$ -invariante.

La demostración utiliza la existencia de la medida de Haar, para esto ver [Port2].  $\square$

La métrica es compatible con la topología original de  $X$  ver [Spiv]. El problema de encontrar métricas  $G$ -invariantes con  $G$  un grupo de Lie no es trivial, veremos un caso en que no existen.

Ejemplo: Es posible mostrar que si  $X = \mathbb{C}$  y  $G$  son las transformaciones afines  $f(z) = az + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$  y  $a \neq 0$  entonces  $(G, X)$  no tiene una métrica  $G$ -invariante. Podemos observar que en este caso los grupos de isotropía no son compactos.

### 2.36. Proposición

El espacio métrico determinado por una métrica  $G$ -invariante sobre  $(G, X)$  donde  $G$  es transitivo sobre  $X$  y tiene grupo de isotropía compacto es completo.

**Demostración.**

Por la proposición anterior y como  $X$  es una variedad se tiene que es localmente compacta. Entonces la métrica es localmente completa. Si  $x \in X$  fijo y elegimos un abierto coordinado con cerradura completa, podemos suponer que es una bola de radio  $\delta$  homeomorfa a una bola de  $\mathbb{R}^n$ . Decimos que la vecindad es una  $\delta$ -vecindad en  $x$  encajada. Por la invariancia de la métrica bajo  $G$  y por la transitividad de la acción se ve que cada punto tiene una  $\delta$ -vecindad encajada.

Consideramos una sucesión  $\{x_j\}$  en  $X$ , sea  $j_0$  tal que si  $j \geq j_0$  entonces  $d(x_j, x_{j_0}) \leq \frac{\delta}{2}$  entonces si  $j \geq j_0$  entonces  $x_j \in \delta$ -vecindad encajada de  $x_{j_0}$ , la cual es completa, por lo tanto  $\{x_j\}$  converge.  $\square$

### 2.37. Proposición

Sea  $M$  una  $(G, X)$ -variedad. Si  $X$  tiene una métrica de Riemann  $G$ -invariante, entonces  $M$  también la tiene.

Decimos entonces que  $M$  tiene una  $(G, X)$ -métrica de Riemann.

**Demostración.**

Si  $x \in T_m M$  se tiene entonces que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_m = (z_\alpha)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{z_\alpha(x)}$$

donde  $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  es una carta coordinada y  $z_\alpha^* : T U_\alpha \rightarrow T X$  está dado por la inversa de la diferencial de  $z_\alpha$ .

En general si  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  es un espacio cubriente de  $M$ , podemos darle a  $\tilde{M}$  una métrica riemanniana de la siguiente forma:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{m}} = p^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{p(\tilde{m})}$$

De aquí que  $p$  es una isometría local y la función desarrolladora  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  lo es también.  $\square$

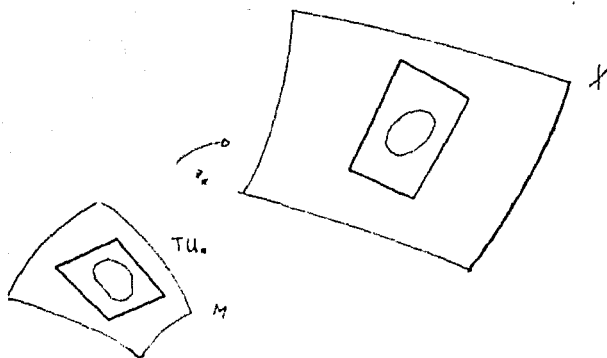


figura 43

### 2.38. Proposición

Si  $M$  es un espacio métrico completo, entonces  $\tilde{M}$  también lo es.

#### Demostración.

Sea  $\tilde{m}_j \subseteq \tilde{M}$  una sucesión de Cauchy, como  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  es localmente una isometría podemos encontrar una curva que une a  $\tilde{m}_j$  y  $\tilde{m}'_j$  esta curva se proyecta en una curva sobre  $M$  que une a  $m = p(\tilde{m}_j)$  y a  $m' = p(\tilde{m}'_j)$  de la misma longitud, entonces  $d(m, m') \leq d(\tilde{m}_j, \tilde{m}'_j)$  entonces  $\{m_j\}$  es una sucesión de Cauchy donde  $m_j = p(\tilde{m}_j)$ . Como  $M$  es completa entonces  $\{m_j\}$  converge a  $m \in M$ , levantamos una curva que va de  $m_1$  a  $m_2$  y de  $m_2$  a  $m_3, \dots$ , y que termina en  $m$  la podemos levantar a una curva en  $\tilde{M}$  y su punto final  $\tilde{m}$  es el límite de las  $\tilde{m}_j$ .  $\square$

Observemos sin embargo que a una misma variedad topológica se le pueden poner estructuras completas o incompletas como en el ejemplo después de la definición 2.33.

Como en el capítulo anterior definimos la longitud de una curva  $C$ , que une a  $p$  y a  $q$  con respecto a la métrica  $G$ -invariante como  $L(C) = \int_C ds$  y definimos la distancia entre dos puntos como:

$$d(p, q) = \inf\{L(C) / \text{donde } C \text{ es una curva que une a } p \text{ y } q\}$$

### 2.39. Teorema

Sea  $M$  una  $(G, X)$ -variedad, supongamos que tenemos una métrica riemanniana  $G$ -invariante sobre  $X$  entonces  $M$  es un espacio métrico completo si y sólo si  $M$  es completa como  $(G, X)$ -variedad.

#### Demostración.

Sea un espacio métrico completo. para probar que la estructura sobre  $M$  es completa, levantemos una trayectoria  $C \subseteq X$  por la función desarrolladora  $D: \tilde{M} \rightarrow X$  a una trayectoria  $\tilde{C} \subseteq \tilde{M}$ . Como  $D$  es un homeomorfismo local podemos hacer lo que queremos cerca de  $C(0)$  al menos si  $C(0) \in D(\tilde{M})$

supongamos que así es y que no podemos levantar toda  $C$ ; entonces sea  $t_0 = \sup\{t/ \text{podemos levantar a } C \text{ sobre } [0, t]\}$  con  $t_0 \leq 1$  y  $c(t_0)$ .

Supongamos que  $C$  es suave y de longitud finita.  $\tilde{C}$  el levantamiento de  $[0, t]$  tiene también longitud finita y como  $D$  es una isometría local se tiene que  $\tilde{C}(t_0) \in M$ .

Sea  $\tilde{U}$  una vecindad de  $\tilde{m}$  donde  $D$  es un homeomorfismo,  $D^{-1}$  está definida sobre  $D(\tilde{U})$  y podemos entonces levantar a toda  $C$  por lo que se tiene que  $D$  es cubriente y entonces la  $(G, X)$ -estructura es completa.

Probemos el regreso, supongamos que la  $(G, X)$ -estructura sobre  $M$  es completa. Si  $\{m_j\}$  es una sucesión de Cauchy en  $M$ , tomemos una subsucesión  $\{n_j\}$  tal que  $d(m_j, m_{j+1}) \leq \frac{1}{2^j}$ , entonces podemos unir los puntos de la subsucesión por una trayectoria  $C$  de longitud finita. Levantemos  $C$  a  $\tilde{C} \subseteq \tilde{M}$  vía  $D$ . Sea  $z_0$  una función coordinada en  $C(0)$ , podemos extenderla a una trayectoria en  $X$  de la misma longitud. Como  $X$  es un espacio métrico completo, la trayectoria que levantamos tiene un punto final. Sea  $m = o(\tilde{C}(1))$  entonces  $m$  es un punto final de  $C = p(\tilde{C})$ ,  $m = \lim m_j$ , entonces es el límite de la sucesión original y entonces  $M$  es un espacio métrico completo.  $\square$

Se tiene el siguiente teorema que nos dice como podemos darle una estructura a la variedad que se obtiene armando triángulos geodésicos mediante isometrías.

#### 2.40. Teorema de Ensambladura

Tomemos una colección de triángulos geodésicos  $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$  en  $P$  con lados  $\{T_\alpha^k\}$  donde  $k = 1, 2, 3$ .

Si los triángulos  $T_\alpha$  tienen identificados los lados por aplicaciones  $f_{\alpha\beta}^{kr} : T_\alpha^k \rightarrow T_\beta^r$  entre los lados de los triángulos tales que forman una triangulación de una variedad topológica  $M$  y se cumplen que:

- (i) Las aplicaciones  $f_{\alpha\beta}^{kr}$  son isometrías.
- (ii) La suma de los ángulos en la aureola asociada a cada vértice de los triángulos  $T_\alpha$  es  $2\pi$ .

Entonces se tiene que  $M$  tiene una  $(Iso(P), P)$ -estructura.

#### Demostración.

Sea  $\theta_\alpha : T_\alpha \rightarrow M$  el homeomorfismo sobre su imagen dado por la construcción de  $M$ . Por hipótesis  $M$  tiene una topología, queremos darle un atlas del tipo  $(Iso(P), P)$ . Construyamos primero los abiertos del atlas en  $M$  como sigue:

Si  $x \in M$  existe  $\alpha \in I$  tal que  $x \in \theta(T_\alpha)$ ;

#### 1er. caso

Si  $x \in (\theta_\alpha(T_\alpha))^\circ$ , "el interior", entonces definimos  $U_\alpha = (\theta_\alpha(T_\alpha))^\circ$  y la función coordinada  $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow P$  como la restricción de  $\theta_\alpha^{-1}$  a  $U_\alpha$ .

#### 2do. caso

Si se tiene que  $x \in \partial(\theta_\alpha(T_\alpha))$  entonces  $x$  es o no vértice de  $T_\alpha$ .

Caso a) Si  $x$  no es vértice de  $T_\alpha$  entonces se tiene que  $x \in \theta_\alpha(T_\alpha^k)$  y  $x \in \theta_\beta(T_\beta^l)$

para alguna  $\beta \in I$ .

Definimos  $V_\alpha = B_\epsilon(x) \cup B'_\epsilon(x)$  donde  $B_\epsilon$  y  $B'_\epsilon(x)$  son las  $P$ -bolas de radio  $\epsilon$  con la distancia dada en el capítulo uno, elegimos el epsilon de manera que  $B_\epsilon(x) \subset T_\alpha$  y  $B'_\epsilon(x) \subset T_\beta$  en este caso construimos como función coordinada a  $\gamma_\alpha : V_\alpha \rightarrow P$  dada por  $\gamma_\alpha(V_\alpha) = B(0)$ , esto se puede hacer por la condición (i) del teorema, la elección no es única pero existe siempre una y no importa cual eligamos, ver figura 45.

Caso b) Si  $x$  es un vértice de  $T_\alpha$  existen  $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_n}$  una subcolección de triángulos tales que  $x$  es vértice de  $\theta_\alpha(T_\alpha), \theta_\alpha(T_{\alpha_1}), \dots, \theta_\alpha(T_{\alpha_n})$ , definimos las cartas coordinadas de la siguiente forma:  $W_\alpha = B'_\epsilon(x) \cup B^{\alpha_1}_\epsilon(x) \cup \dots \cup B^{\alpha_n}_\epsilon(x)$  con un  $\epsilon$  adecuada para que se cumpla que  $B^\beta_\epsilon \subset T_\beta$ , donde  $\beta = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Por la condición (ii) de las hipótesis del teorema tenemos que existe una aplicación  $\gamma_\alpha : W_\alpha \rightarrow P$  que manda  $W_\alpha$  a una bola con centro en el origen como en el caso a), ver figura 45.

Con estas cartas coordinadas queremos darle un  $(Iso(P), P)$ -átlas a  $M$ .

Tenemos que probar que en caso de intersectarse dos abiertos debe existir una isometría de  $P$  tal que sea el cambio de coordenadas entre las dos cartas.

Sea  $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$  con  $A_\alpha$  y  $A_\beta$  de tipo  $U_\alpha, V_\alpha, W_\alpha$ , se tienen varios casos dependiendo de los tipos de  $A_\alpha$  y  $A_\beta$ , como juegan el mismo papel analicemos los casos con  $A_\alpha$ :

Si  $A_\alpha = U_\alpha$  y  $x \in U_\alpha \cap A_\beta$  entonces se tiene una  $(U_\alpha, z_\alpha)$  carta para  $x$ , veamos como puede ser  $(A_\beta, l_\beta)$  con  $l = z, y, x$ , se tiene que si  $A_\beta = U_\beta$ , como la carta de  $x$  es única por estar en el interior de  $\theta_\alpha^{-1}(T_\alpha)$  y la composición es la identidad, ver figura 46.

Si  $A_\beta = V_\beta$  entonces se tiene una carta coordinada  $(V_\beta, \gamma_\beta)$  y queremos probar que  $z_\alpha \circ \gamma_\beta^{-1}$  restringida a  $U_\alpha \cap V_\beta$  es una isometría.

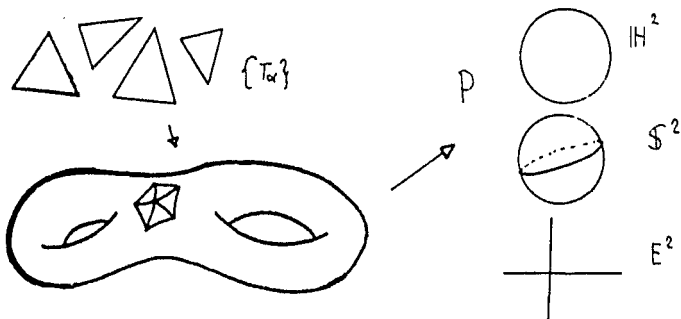


figura 44

Si  $A_\beta = W_\beta$  entonces tenemos que probar que  $z_\alpha \circ x_\beta^{-1}$  restringida a  $U_\alpha \cap W_\beta$  es una isometría.

Si se tiene que  $A_\alpha = V_\beta$  entonces  $A_\beta$  sólo puede ser  $V_\beta$  o una  $W_\beta$ . Si  $A_\beta = V_\beta$

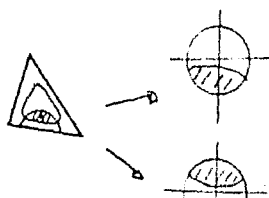
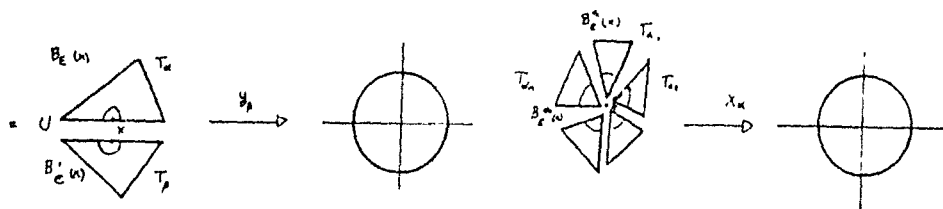


figura 45

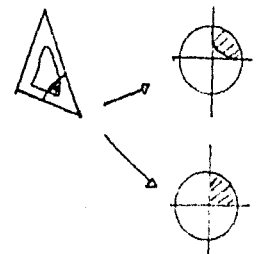
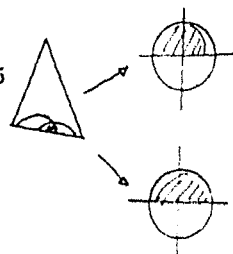
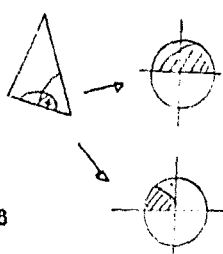


figura 46



entonces es claro que  $y_\alpha \circ y_\beta^{-1}$  es una isometría.

Si  $A_\alpha = W_\alpha$  entonces  $A_\beta$  sólo puede ser del tipo  $W_\beta$  y la composición  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$  es la identidad que resulta isometría. De aquí que  $M$  tiene una  $(Iso(P), P)$ -estructura.  $\square$

El teorema de ensambladura es cierto en dimensiones superiores planteandolo adecuadamente, por ejemplo para dimensión tres. pedir que se ensamblen tetraedros sólidas con caras totalmente geodésicas, que caras con caras de tetraédros esten identificadas mediante isometrías, que se cumpla que en cada arista exista una aureola de ángulo  $2\pi$  alrededor de él y en cada vértice los ángulos sólidos de los tetraedros en la aureola formen un ángulo sólido de  $4\pi$ .

Observemos que en la demostración  $M$  puede ser cualquier dos variedad abierta sin frontera. Sin embargo, si  $M$  es compacta con frontera se tiene que el teorema de ensambladura es cierto si pedimos que la frontera de  $M$  sea geodésica y que la aureola de los vértices que esten en la frontera de  $M$  formen un ángulo de  $\pi$  alrededor de ellos.

Existen otras formas distintas de armar variedades como en el caso de pegarle a un cilindro finito dos casquetes esféricos por la frontera, sin embargo el objeto que se obtiene de este pegado no es de las variedades que nos interesan pues tiene en los extremos estructura elíptica y en el cilindro estructura plana.

Es por esto, que tenemos que pedir que todos los triángulos sean del mismo

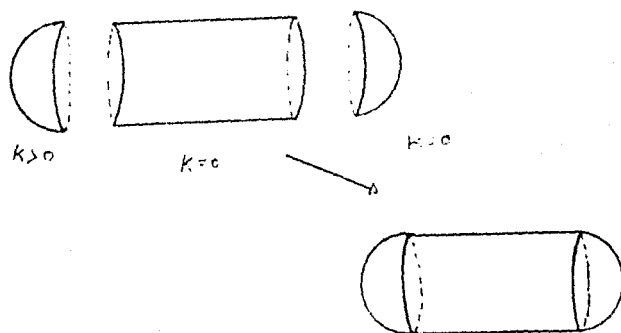


figura 47

tipo, o sea que los pedazos tengan la misma estructura.

Se tiene el siguiente resultado que nos ayuda a resolver el problema de dar estructuras geométricas a las variedades y será el camino que seguiremos en el capítulo 3 para dar a toda 2-variedad una estructura geométrica.

#### 2.41. Teorema

Un subgrupo  $G$  de  $Iso(P)$  actúa en  $P$ , donde  $P \in \{E^2, \mathbb{H}^2, S^2\}$ , por evaluación es tal que el cociente  $N = P/G$  es una variedad diferenciable de dos dimensiones si y sólo si existe una  $(G, P)$ -estructura completa sobre  $N$ , de hecho la estructura es del tipo  $(Iso(P), P)$ .

#### Demostración.

Sea  $F$  es una región fundamental de  $P$  para la acción de  $G$ , Sea  $F^0$  su interior y  $U_0 = F^0$ , para cada  $x \in \partial F$  sea  $U_x$  una vecindad abierta de  $x$  tal que  $U_x \cap gU_x = \emptyset$  para toda  $g \in G$  distinta de  $e$ .

Esto se puede hacer por la discontinuidad de la acción de  $G$  sobre  $P$ .

Sea  $U_0 \cup \{U_x\}_{x \in \partial F} = A$ . Es claro que  $A$  es una cubierta de  $N$ , se tiene que  $z_0 : p^{-1}(U_0) \subset N \rightarrow U_x \subset M$ , como además se tiene que si  $U_x \cap U_{x'} \neq \emptyset$  entonces  $z_x \circ z_{x'}^{-1} = id$ . por la construcción de los  $U_x$  lo mismo si  $U_0 \cap U_x \neq \emptyset$ , así que  $N$  tiene una  $(G, P)$ -estructura, que resulta ser completa por ser  $P$  completa.

Inversamente si  $N$  tiene una  $(G, P)$ -estructura completa se tiene que  $D : \tilde{N} \rightarrow P$  es una función cubriente y es una isometría como además se tiene que  $P$  es simplemente conexa entonces se puede considerar a  $\tilde{N}$  como  $P$ , por el comentario anterior a la definición 2.34., así que se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N} & \xrightarrow{x} & M \\ \downarrow p & \nearrow & \\ N & & \end{array}$$

por lo que se deduce que  $P/G$  debe ser  $N$ . □

## CAPITULO 3

Estamos interesados en estudiar subgrupos  $G$  de  $Iso(P)$  con  $P \in \{E^2, S^2, M^2\}$  que actúen sobre  $P$  de manera propia y discontinua tales que  $P/G$  sea compacto. A tales  $G$  los llamamos *Grupos cristalográficos* de  $P$ .

Como sabemos si  $G$  también actuara libremente tendríamos una variedad como cociente y sabemos que entonces la variedad resultante tiene una  $(Iso(P), P)$ -estructura que resulta completa.

Con todo lo que se estudió en los capítulos anteriores probaremos que toda dos variedad tiene una  $(Iso(P), P)$ -estructura.

## Grupos Cristalográficos libres.

Haremos una descripción y clasificación de los grupos cristalográficos para  $P \in \{E^2, S^2, H^2\}$ .

### Grupos Cristalográficos libres de $E^2$ .

Por la definición de grupo cristalográfico, estamos buscando grupos  $G$ , de isometrías de  $E^2$  que actúen de manera propia y discontinua, si además actúa libremente sabemos que el cociente es una variedad.

El siguiente resultado nos dá una caracterización de los grupos libres de  $E^2$ .

#### 3.1. Proposición

Sea  $G$  un grupo de isometrías que actúa libremente sobre  $E^2$  y sea  $G_1$  el subgrupo que consiste de todas las traslaciones en  $G$ . Entonces se tiene que  $G = G_1$  o que  $G = G_1 \cup \beta G_1$  donde  $\beta = Bx + b$  que es una isometría de  $E^2$  con  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B(b) = b \neq 0, b \in \mathbb{R}^2$ . Inversamente cualquier grupo de traslaciones actúa libremente sobre  $E^2$ , y un grupo  $G = G_1 \cup \beta G_1$  actúa libremente si y sólo si  $2b \neq (B + I)a$  donde  $T_a \in G_1$ .

#### Demostración.

Sea la isometría  $\alpha$  con  $1 \neq \alpha(x) = A(x) + a \in G$  con el determinante de  $A$  igual a uno.

Si  $A \neq I$  entonces  $(A - I)E^2 = E^2$ , así  $a = (I - A)v$  para alguna  $v \in \mathbb{R}^2$ . Ahora  $\alpha(v) = A(v) + a = v$  la cual es imposible. Entonces  $A = I$  y  $\alpha$  es una traslación.

Ahora  $G = G_1$  o  $G = G_1 \cup \beta G_1$  donde  $\beta(x) = B(x) + b$ , con determinante de  $B$  igual a  $-1$ ,  $\beta^2 = B^2 + (B(b) + b)$  queremos probar que  $B^2 = I$ .

Sea  $\{v_1, v_2\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  en la cual  $B$  tiene matriz asociada  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Como antes  $b \notin (B - I)E^2$ , así  $b = b^1 v_1 + b^2 v_2$  con  $b^1 \neq 0$  si trasladamos el origen a  $a = \frac{-1}{2} b^2 e_2$ ,  $\beta$  toma la forma

$$T_a \circ \beta \circ T_a^{-1} = B + (a + b) \circ T_{-b} = B + (b + (B - I)(a))$$

así  $b$  se convierte en  $b^1 e_1$  y entonces  $\beta$  es como dice la proposición.

Ninguna traslación tiene puntos fijos, así que cualquier grupo de traslaciones actúa libremente. Sea  $G = G_1 \cup \beta G_1$  un subgrupo de  $Iso(E^2)$  donde  $G_1$  es un grupo de traslaciones y  $\beta$  está dado por  $\beta = B + b$  como en el enunciado de la proposición. Si  $x \in E^2$  y  $g_1 \in G_1$  con  $(\beta g_1)(x) = x$  entonces:

$$g_1 = T_a, a = a^1 v_1 + a^2 v_2, x = x^1 v_1 + x^2 v_2, b = b^1 v_1$$

y calculando se tiene:

$$\sum_i^2 x^i v_i = B(x) + b(a) + b = (a^1 + b^1 + x^1) v_1 - (a^2 + x^2) v_2.$$



Entonces se tiene que  $2b = 2b^1 e_1 = -2a^1 e_1 = (B + I)(-a)$ , mientras tenemos que  $T_{-a} = g_1^{-1} \in G_1$ .

Inversamente si  $2b = (B + I)(c)$  donde  $T_c \in G_1$ , entonces  $c = c^1 v_1 + c^2 v_2$ ,  $y = y^1 v_1 + y^2 v_2$ ,  $y^2 = \frac{1}{2} c^2$  y tenemos  $\beta \circ T_c^{-1}(y) = B(y) - B(c) + b = y$  entonces  $G$  no actúa libremente.  $\square$

Con la siguiente proposición obtenemos una clasificación de los grupos cristalográficos libres de  $E^2$ .

Sea  $G = G_1 \cup \beta G_1$  la descomposición anterior.

### 3.2. Proposición

Un grupo  $G_1$  de traslaciones de  $E^n$  actúa propia y discontinuamente si y sólo si existen  $m$  vectores linealmente independientes  $v_i \in E^n$   $0 \leq m \leq n$ , tal que  $G_1$  consiste de todas las traslaciones  $T_{\Sigma n^i v_i}$  con  $n^i$  enteros.

Y  $G_1$  es un grupo abeliano libre con  $m$  generadores.

#### Demostración.

Sea  $V$  un subespacio de  $E^n$  generado por todos los  $a \in E^n$  para los cuales  $T_a \in G_1$ . Tenemos una base  $\{v_i\}$  de  $V$  con  $T_{v_i} \in G_1$ . Si  $T_v \in G_1$ , aproximamos  $v$  por una combinación lineal racional de los  $v_i$ ; esto dá enteros  $n_j^i$  tales que  $n_j^0 \neq 0$  y

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 n_j^i - n_j^0 v = 0.$$

Por discontinuidad de  $G_1$ ,  $\sum n_j^i v_i = n_j^0 v$  para  $j$  suficientemente grande, quitando denominadores  $\{I, T_{v_i}\}$  genera un subgrupo de índice finito en  $G_1$ . Ahora  $G_1$  esta finitamente generado, es abeliano y no tiene elementos de orden finito. Cambiando notación tenemos  $\{T_{v_1}, \dots, T_{v_m}\}$  como un conjunto mínimo de generadores y por nuestra argumentación  $v_1, \dots, v_m$  son linealmente independientes y  $G_1$  consiste de todas las  $T_{v_1}^{n_1} \circ \dots \circ T_{v_m}^{n_m} = T_{\Sigma n_i v_i}$  con  $n_i$  enteros.  $\square$

Si el grupo  $G$  actúa libre y propia y discontinuamente se tiene entonces:

1. Si  $G_1 = \{1\}$  entonces  $g^2 \neq 1$  implica  $G = 1$ . En este caso se tiene que  $E^2/G = E^2$
2. Sea  $G_1$  un grupo cíclico infinito y  $G = G_1$ . Entonces  $G$  consiste de todas las  $T_{na}$  con  $n$  entero, para algún vector fijo  $a \neq 0$  y  $a \in E^2$ . En este caso  $E^2/G$  es un cilindro.
3. Si  $G_1$  es cíclico infinito y  $G \neq G_1$  entonces  $G_1$  consiste de todas las  $T_{na}$  con  $n$  entero y se tiene que  $G = G_1 \cup \beta G_1$  con  $\beta = B + b$  como en la proposición anterior  $\beta^2 = T_{2b} \in G_1$  así  $2b = na$  para algún  $n$  impar  $n = -2m + 1$  Podemos reemplazar  $\beta$  por  $\beta \circ T_{ma} = B + b + ma = B + \frac{a}{2}$ , para  $B(\frac{a}{2}) = \frac{a}{2}$  ya que  $B(b) = b$  y  $a$  es múltiplo de  $b$ ,  $G$  es cíclico infinito generado por  $\beta = B + b$  donde  $\beta^2 = T_{2b}$  genera a  $G - 1$ ;  $B^2 = I \neq B$  y  $B(b) = b \neq 0$ . Entonces  $\mathbb{R}^2/G$  es una banda de Moebius.
4. Sea  $G_1$  abeliano libre con dos generadores y  $G = G_1$  entonces  $G$  consiste de todas las  $T_{n^1 a_1 + n^2 a_2}$ , con  $n^i$  enteros, para alguna base  $\{a_1, a_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces

$\mathbb{R}^2/G$  es un toro.

5. Sea  $G_1$  un grupo abeliano libre con dos generadores y  $G \neq G_1$ . Entonces  $G = G_1 \cup \beta G_1$  con  $\beta = B + b$  con  $\beta^2 = T_{2b}$  como en la proposición 3.1. y pedimos además que la norma de  $b$  sea la más chica es decir con  $\|b\|$  minimal.

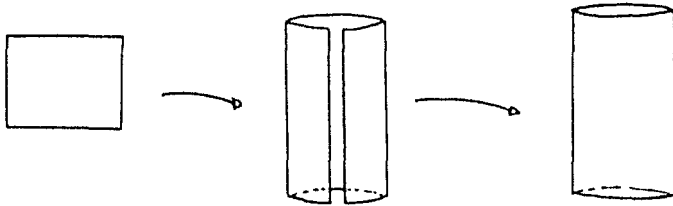
$G_1$  consiste de todas las  $T_{n^1 a_1 + n^2 a_2}$ ,  $n^i$  enteros, para alguna base  $\{a_1, a_2\}$  de  $E^2$  con  $2b = a_1$ . Sea  $c = a_2 - B(a_2)$  entonces  $B(c) = -c \neq 0$ .

Así:

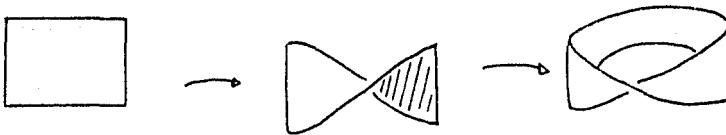
(i)  $c$  es ortogonal a  $a_1$

(ii) El conjunto de todos los  $n^1 a_1 + n^2 c$  es un subgrupo de índice dos en el grupo abeliano  $\mathbb{Z}_2 = \{n^1 a_1 + n^2 a_2 \mid n^i \text{ son enteros}\}$ . Existen dos posibilidades que  $\frac{c}{2} \in \mathbb{Z}_2$  o que  $\frac{c}{2} \notin \mathbb{Z}_2$ . En el primer caso podemos suponer que  $a_2 = \frac{c}{2} = -B(a_2)$ . En el segundo caso podemos suponer que  $a_2 = \frac{c+a_1}{2}$ ; entonces  $\beta \circ T_{a_2}^{-1} = B + \frac{a_1}{2} - a_2 = B + \frac{-c}{2} \in G$ .  $\frac{-c}{4}$  es un punto fijo de  $\beta \circ T_{a_2}^{-1}$  lo cual es imposible. Entonces podemos suponer que  $B(a_2) = -a_2$ . Ahora  $G$  consiste de todas las  $\beta^n, T_a^m$  donde  $B^2 = I \neq B$ ,  $B(b) = b \neq 0$  y  $B(a) = -a$ .  $\mathbb{R}^2/G$  es una botella de Klein, viene de un toro cortando y pegando en el sentido opuesto por donde cortamos.

En las figuras que estan a continuación veremos como son cada una de estas superficies y daremos una región fundamental de cada uno de los grupos para que veamos como se van pegando.



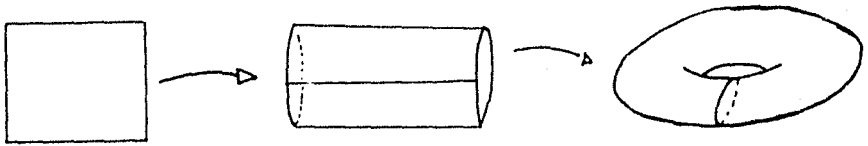
Cilindro  
figura 48



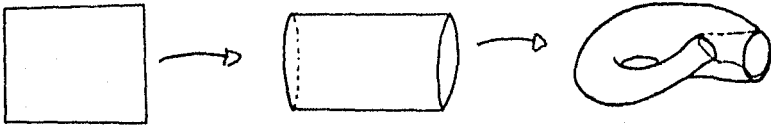
Banda de Möbius  
figura 49

### 3.3 Teorema

Los grupos cristalográficos libres de  $E^2$  son por la descripción anterior: Iso-



Toro  
figura 50



Botella de Klein  
figura 51

morfos a los grupos fundamentales del toro y el de la botella.

Se tiene que el cilindro y la banda infinita no son compactos, así llamaremos por abuso de nomenclatura, Grupos cristalográficos libres con cociente no compacto, a sus grupos asociados.

### Grupos Cristalográficos libres de $\mathbb{S}^2$ .

Se tiene el siguiente teorema que nos permite clasificar los grupos que actúan libremente sobre la esfera.

#### 3.4. Teorema

Los grupos cristalográficos en  $\mathbb{S}^2$  son el trivial y  $\mathbb{Z}_2$  y las únicas superficies completas conexas con una  $(Iso(\mathbb{S}^2), \mathbb{S}^2)$ -estructura son salvo isometrías la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el plano proyectivo  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm I\}$  que son las superficies asociadas a los grupos cristalográficos.

#### Demostración.

Sea  $G$  el grupo de transformaciones de cubierta de  $p: \mathbb{S}^2 \rightarrow M^2$  donde  $M^2$  es una superficie completa conexas con una  $(G, \mathbb{S}^2)$ -estructura,  $G \subset O(3)$ . Si  $g \in G$  tiene determinante 1 entonces  $g$  tiene un valor característico igual a 1; el vector característico es un punto  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $g(x) = x$  entonces  $g = I$ , si  $g \in G$  tiene determinante  $-1$ , entonces  $g^2 = I$  por lo anterior entonces  $g$  tiene solo a  $\pm 1$  como valores característicos pero como no puede ser 1 se cumple que  $g = -I$ . Ahora  $G = \{\pm I\}$ , y de aquí se concluye que  $M^2$  es isométrico a  $\mathbb{S}^2$  o  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

Si  $G = I$  entonces  $M^2$  es isométrico a la esfera.

Si  $G = -I$  se tiene que  $M^2$  es el espacio proyectivo de dimensión dos. Veamos como se construye el espacio proyectivo.

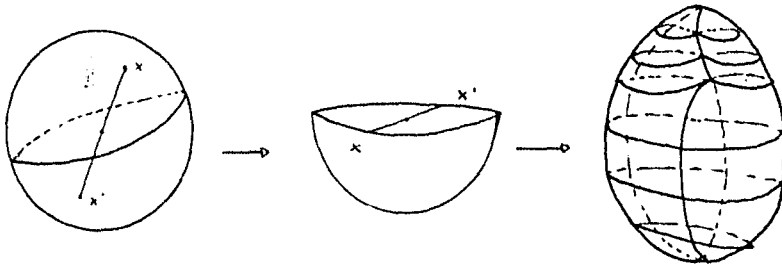


figura 52

## Grupos Cristalográficos libres de $\mathbb{H}^2$ .

Con la siguiente proposición resolvemos una gran parte del problema de encontrar estructuras sobre variedades de dimensión dos, por el teorema 2.41 esto equivale a encontrar grupos que actúen libre, propiamente y discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^2$  así que tendremos una buena lista de grupos cristalográficos libres de  $\mathbb{H}^2$ .

### 3.5. Proposición

Toda variedad diferenciable orientable de dimensión 2 compacta de género  $g \geq 2$  tiene una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura.

#### Demostración.

La estructura la damos de la siguiente manera:

Sea un polígono  $F$  regular hiperbólico de  $n$  lados con  $n$  múltiplo de cuatro, con la suma de sus ángulos internos  $2\pi$ .

Tal  $F$  existe gracias a la proposición 1.41.

Si  $G$  es el grupo generado por las traslaciones sobre los lados de  $F$ , dos a dos como en la figura 53, el grupo de traslaciones hiperbólicas es transitivo en las geodésicas por lo que existe siempre una traslación hiperbólica que manda una geodésica a otra dada, se tiene que  $G \subset Iso(\mathbb{H}^2)$ . Resulta que  $G$  actúa propia y discontinuamente sobre  $\mathbb{H}^2$ : Podemos establecer una correspondencia uno a uno con los elementos del grupo  $G$  y los elementos del enlosado que induce la acción de  $G$ , como lo hicimos en el caso de los grupos triangulares, se tiene que todo punto de  $\mathbb{H}^2$  está en uno solo de los elementos del enlosado por lo que la acción resulta propia y discontinua resulta ser libre por que todo grupo de traslaciones es libre.  $F$  resulta ser una región fundamental.

El cociente puede ser obtenido de  $F$  identificando las parejas de lados identificadas por las traslaciones. Lo que nos queda al identificar es una superficie de género  $\frac{n}{4}$  compacta orientable.

Todos los vértices del polígono se identifican en un sólo punto, se forma una aureola de  $2\pi$  al rededor del vértice. Por el teorema de Ensambladura se tiene que es una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura.  $\square$

### 3.6 Teorema

Los grupos construidos en el teorema anterior son todos los grupos cristalográficos  $G$  tales que  $\mathbb{H}^2/G$  es variedad compacta orientable.

La demostración se basa en el hecho de que con este método obtenemos todas las variedades compactas orientable de género mayor que uno.  $\square$

Ejemplo: El doble toro  $\mathbb{T}^2$  tiene una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura. Sea  $F$  un octágono regular hiperbólico con suma de sus ángulos internos  $2\pi$ , sean  $a, b, a^{-1}, b^{-1}, c, d, c^{-1}$  y  $d^{-1}$  sus lados tomemos el grupo cíclico generado por las traslaciones que identifican los lados  $m$  y  $m^{-1}$  con  $m = a, b, c, d$  lo que se obtiene al hacer la identificación es el doble toro y se ve como muestra la figura 53.

Con todo lo anterior hemos terminado el caso de dar estructuras hiperbólicas a las superficies compactas orientables de género  $g \geq 1$ .

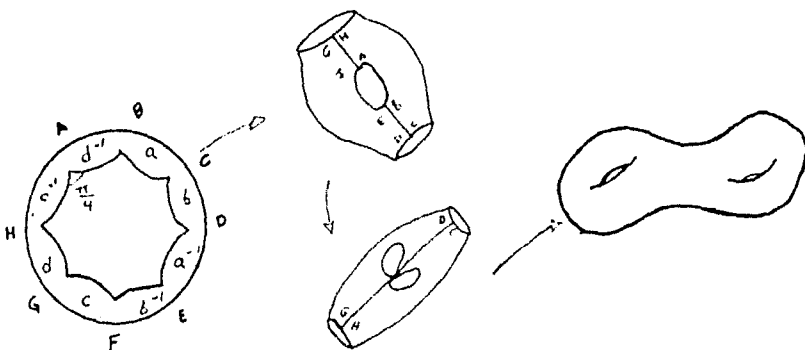


figura 53

Estudiemos las superficies no compactas. Que corresponden a grupos cristalográficos hiperbólicos libres y con cociente no compacto. Se tiene el siguiente resultado.

### 3.7. Teorema

Toda 2-variedad diferenciable, orientable  $M^2$ , conexa y no compacta tiene una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura completa.

#### Demostración.

Caso 1. Si la variedad  $M^2$  es simplemente conexa.

**3.8 Lema** Toda  $M^2$  como en el teorema es diferomorfa a  $\bar{\mathbb{W}}^2$ .

#### Demostración (del Lema)

Por el teorema de Uniformización se tiene que  $M^2$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  o a  $\Delta$ . En cualquiera de los casos se tiene que es difeomorfa a  $\mathbb{C}$ .  $\square$

Si  $M^2$  es  $\mathbb{C}$  entonces vimos en la parte (iv) del ejemplo de 2.20, como darle una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura.

Caso 2. Si  $\Pi_1(M^2) \neq Id$ , podemos dar a  $M^2$  una  $(Bihol(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -estructura por el teorema de uniformización se tiene que  $M^2$  puede ser  $\mathbb{C}$  o  $\Delta$ .

Si la cubierta es  $\Delta$ , la estructura es una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura ya que las transformaciones de cubierta de  $\Delta$  son isometrías de  $\mathbb{H}^2$  y es automáticamente completa.

Pero si es  $\mathbb{C}$  se tiene que  $M^2$  puede ser  $\mathbb{C}$  o un cilindro diferenciable por la clasificación de grupos cristalográficos en  $E^2$  y el hecho de que en el grupo de transformaciones de cubierta que están en  $Bihol(\mathbb{C})$  no hay rotaciones ni homotecias por que este es subgrupo de  $Iso(E^2)$ .

Por lo tanto el teorema queda demostrado.  $\square$

Observemos el siguiente resultado.

### 3.9. Lema

El cilindro diferenciable tiene estructura hiperbólica completa.

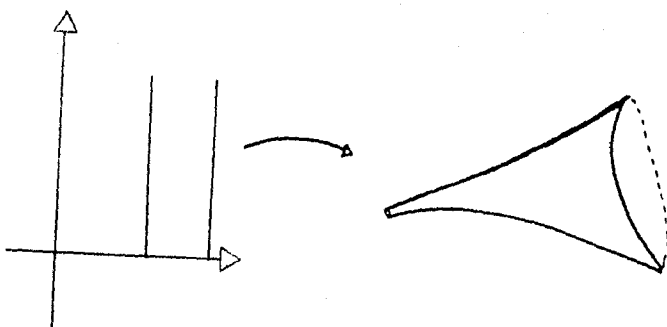


figura 54

### Demostración (Lema).

Pensemos en el grupo  $G$  generado por una traslación hiperbólica que manda una geodésica a otra que no la corta, si hacemos el espacio cociente de la acción sobre  $\mathbb{H}^2$  obtenemos que el cilindro tiene una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura.  $\square$

### 3.10 Corolario

Las únicas 2-variedades diferenciables orientables y no compactas que admiten una estructura plana completa, es decir una  $(Iso(E^2), E^2)$ -estructura y una estructura hiperbólica completa son  $\mathbb{R}^2$ , el cilindro.

En el caso de las variedades no orientables se tiene que la banda de Möbius infinita admite una estructura hiperbólica que se puede obtener como el caso del cilindro, solo que al identificar se invierte la orientación.

Encontraremos otra lista de grupos cristalográficos de  $\mathbb{H}^2$  con el siguiente teorema.

### 3.11. Teorema

Las variedades diferenciables de dimensión dos no orientables compactas, tienen una  $(Iso(\mathbb{H}^2), (\mathbb{H}^2))$ -estructura.

#### Demostración.

Sea  $M$  una variedad no orientable y compacta,

Por el Teorema de Clasificación de superficies, se tiene que  $M$  es suma conexa de espacios proyectivos, es decir, se obtiene de una esfera menos discos que tapamos con gorros cruzados. Una variedad no orientable está doblemente cubierta por una orientable. Queremos darle una  $(Iso(P), P)$ -estructura a  $M$ . Se tiene que si la variedad es suma conexa de  $n$  espacios proyectivos,  $M = \# \mathbb{P}^2$  entonces  $\chi(M) = 2 - n$  y  $\chi(M_{2-1}) = 4 - 2n = 2 - 2(n - 1)$ , donde  $M_{2-1}$  es la variedad orientable que la cubre doblemente.

Queremos dar a  $M$  una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura, sabemos que si  $M_{2-1}$  tiene género mayor que uno entonces tiene una  $(Iso(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ -estructura, la proyección de

$M_{2-1}$  a  $M$  es un difeomorfismo que podemos levantar a  $H^2$ .

$$\begin{array}{c} H^2 \\ \downarrow f \\ M_{2-1} \\ \downarrow p \\ M \end{array}$$

Quisieramos que  $p \circ f$  fuera una transformación de cubierta de  $H^2$ . Afirmamos que existe una transformación de cubierta de  $M_{2-1}$  tal que sucede que  $p \circ f$  es transformación de cubierta de  $H^2$ , con lo que  $M$  tiene una  $(Iso(H^2), H^2)$ -estructura.

Si  $M_{2-1}$  tiene  $n$  hoyos, es decir tiene género  $n$  es posible poner en  $M$  una estructura hiperbólica que cumple con que "cortando a  $M$  por un plano transversal" de tal forma que las dos partes nos queden simétricas e isométricas. Nos queda que en cada una de las partes tiene un número  $n + 1$  de componentes en la frontera de cada uno de las partes, en cada una de ellas nos falta identificar los puntos diametralmente opuestos, esto es como en  $S^1$ , lo que se obtiene en cada una de las componentes es una variedad isométrica a  $M$ .

Todo el proceso anterior es una transformación de cubierta que hace de  $M$  una variedad con  $(Iso(H^2), H^2)$ -estructura. □

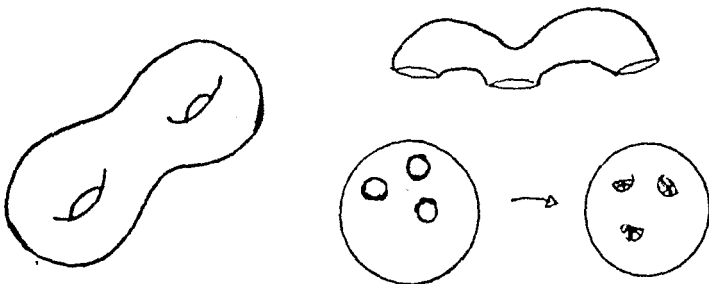


figura 55

El método anterior puede usarse para dar estructura geométrica hiperbólica a algunas variedades no compactas y no orientable, sin embargo no pudimos generalizar este método para todas estas variedades.

**Observación** Las estructuras no completas no provienen de acciones en  $P$ .

En la siguiente tabla se presentan algunos resultados que resumen los resultados de las secciones anteriores de este capítulo.



	Elípticas		Planas		Hiperbólicas	
	orientable	no orientable	orientable	no orientable	Orientable	no orientable
	$S^2$	$P^2$	Toro	Botella	n-Toro	$\#P^2$
Compactas						
No Compactas			Cilindro $\mathbb{R}^2$	Banda	Toda superficie no compacta orientable o no.	

tabla 2

Finalmente se tiene un resultado muy interesante acerca del número de variedades hiperbólicas completas de dimensión dos que tienen la misma área.

### 3.12. Teorema

Sea  $M$  una dos variedad riemanniana, conexa, orientable y completa con estructura hiperbólica. Se tiene por el Teorema de Gauss-Bonnet que si el  $Area(M) \leq \infty$  entonces  $Area(M) = -2\pi\chi(M)$ , donde  $\chi(M)$  denota la característica de de Euler.

Sólo hay un número finito topológicamente hablando de variedades con ese volúmen.

Si  $Vol(M) = 2\pi k$  y  $k$  es impar entonces existen  $\frac{k+3}{2}$  posibilidades. Si  $k$  es par existen  $\frac{k}{2} + 2$  posibilidades de variedades  $M$  con volúmen  $2\pi k$ .

#### Demostración

Como la característica de Euler de una variedad es siempre un entero se tien que los volúmenes solo pueden ser  $2\pi, 4\pi, 6\pi$ , etc.

Si  $k = 1$  queremos calcular las variedades con las hipótesis del problema que tengan área  $2\pi$ . La variedad  $M$  puede ser la esfera con tres ponchaduras o el toro con una ponchadura.

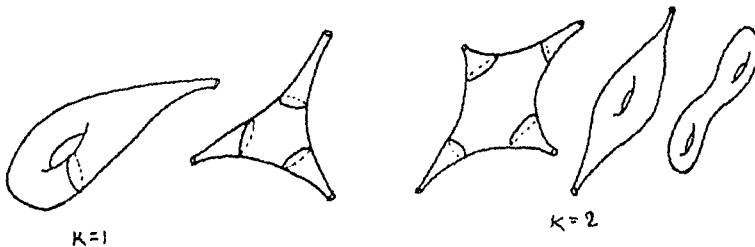


figura 56

Ya que la característica Euler de una superficie de género  $g$  es  $2 - 2g$  y cada vez que hacemos una ponchadura topológicamente es como si quitáramos un disco y la característica se disminuye en 1 así, si a una variedad con característica  $m$  le hacemos  $n$  ponchaduras su característica es  $m - n$ .

Si  $k = 2$ , contamos de cuántas maneras puede ser  $M$  para tener característica menos dos. Si a  $S^2$  le quitamos cuatro puntos la característica se disminuye uno por cada punto, así que  $\chi(S^2 - 4 \text{ pts.}) = -2$ , lo mismo si al toro le quitamos dos puntos y lo mismo para el doble toro, así que tenemos que hay tres para  $k = -2$ .

Se tiene que si  $k$  es par la variedad de género  $-k$  es una de nuestras variedades  $M$ , y entonces de todas las variedades de género par menor que  $k$  podemos obtener una de las variedades buscadas con área  $2\pi k$  haciéndole las ponchaduras necesarias, por esto obtenemos que si  $k$  es par existen  $\frac{k+4}{2} = \frac{k}{2} + 2$  variedades con área  $2\pi k$ .

Si  $k$  es impar se tiene que  $M$  una variedad con género  $g = \frac{-k+1}{2}$  tiene característica  $-k$  y su área es precisamente  $2\pi k$  si a la variedad con género  $g = \frac{-k-1}{2}$  le quitamos un punto se tiene que tiene el área buscada así que tenemos de  $k$  es impar que existen  $\frac{k+3}{2}$  variedades con volúmen  $2\pi k$ , ver [Grom].  $\square$

# APENDICES

## APENDICE A

### Orbifolds

#### Definición

Una orbifold  $O$  es un espacio localmente modelado sobre  $\mathbb{R}^n$ , módulo la acción de un grupo finito. Esto es,  $O$  consiste de un espacio de Hausdorff  $X_O$ , con una estructura adicional.

El espacio  $X_O$  tiene una cubierta dada por una colección de conjuntos abiertos  $\{U_i\}$  cerrada bajo intersecciones finitas. A cada  $U_i$  se le asocia un grupo finito  $\Gamma_i$ , una acción de  $\Gamma_i$  sobre un conjunto abierto  $\tilde{U}_i$  de  $\mathbb{R}^n$  y un homeomorfismo  $\varphi_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_i/\Gamma_i$ .

Siempre que  $U_i \subset U_j$ , existe un homomorfismo inyectivo  $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$  y un encaje  $\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_j \hookrightarrow \tilde{U}_i$  equivariante con respecto a  $f_{ij}$ .

(Si  $\gamma \in \Gamma_i$ ,  $\tilde{\varphi}_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\tilde{\varphi}_{ij}(x)$ .)

De tal forma que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U}_i & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{ij}} & \tilde{U}_j \\
 \downarrow & \tilde{\varphi}_{ij} = \tilde{\varphi}_{ij}/\Gamma_i & \downarrow \\
 \tilde{U}_i/\Gamma_i & & \tilde{U}_j/f_{ij}(\Gamma_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U_i & \hookrightarrow & U_j \\
 & & \uparrow \\
 & & \tilde{U}_j/\Gamma_j
 \end{array}$$

Consideremos  $\tilde{\varphi}_{ij}$  definida salvo composición con elementos de  $\Gamma_j$  y  $f_{ij}$  salvo conjugación por elementos de  $\Gamma_j$ . No siempre se cumple que  $\tilde{\varphi}_{ik} = \tilde{\varphi}_{jk} \circ \tilde{\varphi}_{ij}$  cuando  $U_i \subset U_j \subset U_k$ , pero debe existir  $\gamma \in \Gamma_k$  tal que  $\gamma \tilde{\varphi}_{ik} = \tilde{\varphi}_{jk} \circ \tilde{\varphi}_{ij}$  y  $\gamma \circ f_{ik}(g) \circ \gamma^{-1} = f_{jk} \circ f_{ij}(g)$ .

Ejemplo:

Una variedad cerrada es una orbifold donde cada grupo  $\Gamma_i$  es el grupo trivial así que  $\tilde{U} = U$ .

Ejemplo:

A una variedad  $M$  con frontera se le puede dar una estructura de orbifold  $mM$

en la cual su frontera se convierte en un espejo esto es, cualquier punto sobre la frontera tiene una vecindad modelada en  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}_2$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa por reflexiones en un hiperplano. La siguiente proposición generaliza el teorema 2.21.

**Proposición**

Si  $M$  es una variedad y  $G$  es un grupo que actúa propia y discontinuamente sobre  $M$ , entonces  $M/G$  tiene una estructura de orbifold.

Definamos lo que significa orbifold cubriente.

**Definición**

Una orbifold cubriente  $\tilde{O}$  de una orbifold  $O$ , es una orbifold, con una proyección  $p : X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$  entre los espacios adyacentes, tal que si  $x \in X_O$  existe una vecindad  $U = \tilde{U}/\Gamma$  para cada componente  $v_i$  de  $p^{-1}(U)$  isomorfa a  $\tilde{U}/\Gamma_i$ , donde  $\Gamma_i \subset \Gamma$  es algún subgrupo.

El isomorfismo debe respetar las proyecciones.

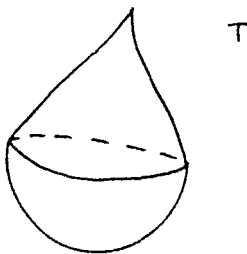
**Definición**

Una orbifold es buena si tiene a una variedad como orbifold cubriente.

**Ejemplo:**

Si consideramos el Teardrop  $T$ , una esfera con un punto cono que tiene como espacio subjacente a  $X_T = S^2$  y se obtiene como  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n = T$  donde  $\mathbb{Z}_n$  actúa por rotaciones  $T$  no tiene cubiertas no triviales conexas y se tiene que es una orbifold mala.

Cada  $x$  en  $O$  tiene asociado un grupo  $\Gamma_x$ , bien definido salvo isomorfismos: En un sistema de coordenadas locales  $U = \tilde{U}/\Gamma$ ,  $\Gamma_x$  es el grupo de isotropía de cualquier punto en  $\tilde{U}$  que corresponden a  $x$ .



figura

**Definición**

El conjunto

$$\Sigma_O = \{x/\Gamma_x \neq \{1\}\}$$

es el lugar singular de  $O$ .

Cuando  $O$  es una variedad se tiene que  $\Sigma_O = \emptyset$ .

Se tiene la siguiente proposición que no daremos su demostración.

**Proposición**

Una orbifold  $O$  tiene una cubriente universal  $\tilde{O}$ .

Resulta que la cubriente universal de  $O$ ,  $\tilde{O}$ , es una cubriente regular esto es, para cualquier preimagen  $\tilde{x}$  del punto base  $x'$  existe una transformación de cubierta que manda  $\tilde{x}'$  a  $\tilde{x}$ .

**Definición**

El grupo fundamental  $\Pi_1(O)$  de una orbifold  $O$  es el grupo de todas las transformaciones de cubierta de la cubriente universal  $\tilde{O}$ .

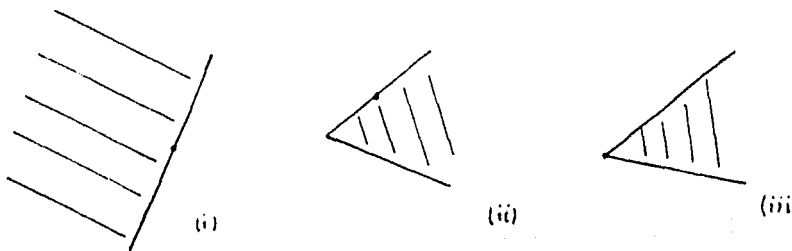
Necesitaríamos probar que deberas es grupo y las propiedades del grupo fundamental sin embargo, supondremos sin más comentario que así es.

De aquí en adelante supondremos que  $O$  es una orbifold buena.

**Proposición**

El lugar singular de una orbifold de dos dimensiones tiene alguno de los siguientes tipos de modelos locales.

- (i) Espejo:  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_2$  donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa por reflexiones en el eje  $Y$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii) Puntos elípticos de orden  $n$ :  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_n$ , con  $\mathbb{Z}_n$  actuando por rotaciones.
- (iii) Esquinas reflectoras de orden  $n$ :  $\mathbb{R}^2/D_n$ , donde  $D_n$  es el grupo diédrico de orden  $2n$ , con presentación  $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ . Donde  $a$  y  $b$  denotan reflexiones en rectas que se cortan haciendo un ángulo de  $\frac{\pi}{n}$ .



figura

En dimensión dos todas las orbifolds  $O$  tienen un espacio adyacente  $X_O$  topológicamente una superficie y posiblemente con frontera.

Hagamos una clasificación de las orbifolds de dos dimensiones.

Como antes podemos definir  $(G, X)$ -estructura sobre orbifolds y la aplicación desarrolladora definida para una  $(G, X)$ -orbifold  $O$ .

**Proposición**

Cuando  $G$  es un grupo de difeomorfismos de una variedad  $X$  entonces toda  $(G, X)$ -orbifold es buena.

La función desarrolladora  $D: \tilde{O} \rightarrow X$  está definida.

Si  $G$  es un grupo de isometrías actuando transitivamente sobre  $X$ , entonces si  $O$  es cerrada o completa, es completa.

Si  $X$  es simplemente conexa entonces  $\tilde{O} = X$  y  $\Pi_1(O)$  es un subgrupo discreto de  $G$ .

Se tiene que a una orbifold se le puede definir una característica de Euler, se obtiene también que con hipótesis adecuadas se tiene un teorema de Gauss-Bonnet para orbifolds.

Se tiene entonces el siguiente resultado que no probaremos ya que varios de los resultados ya han sido probados y otros requieren de un estudio más profundo, para mayor referencia de los resultados de este apéndice vease [Thur1].

#### **Teorema**

Una orbifold de dos dimensiones tiene una estructura plana, elíptica o hiperbólica si y sólo si es buena.

Se tiene que  $O$  una orbifold tiene una estructura hiperbólica si y sólo si  $\chi(O) \leq 0$  y una estructura plana si y sólo si  $\chi(O) = 0$ .

Una orbifold es elíptica ó es mala si y sólo si  $\chi(O) \geq 0$ .

En la siguiente tabla se muestran todas las orbifolds malas, planas y elípticas donde  $(n_1, \dots, n_k; m_1, \dots, m_l)$  denota una orbifold con puntos elípticos de ordenes  $n_1, \dots, n_k$  y esquinas reflectoras de ordenes  $m_1, \dots, m_l$ .

Todas las orbifolds que no aparecen en la tabla resultan hiperbólicas.

Esto es, el teorema nos dice que toda orbifold buena tiene una estructura del tipo  $(Iso(P), P)$ -estructura y se prueba que todas las orbifolds buenas de dimensión dos que no aparecen en la lista tienen estructura del tipo  $(Iso(\mathbf{H}^2), \mathbf{H}^2)$ .

$X_0$	Malas	Elípticas	Planas
La esfera	(n)	( )	(2,3,6)
$S^2$	$(n_1, n_2)$	$(n, n)$	(2,4,4)
	$n_1 < n_2$	$(2, 2, n)$	(3,3,3)
		$(2,3,3)$	$(2,2,2,2)$
		$(2,3,4)$	
		$(2,3,5)$	
El disco	$( ; n)$	$( ; )$	
$\Delta$	$( ; n_1, n_2)$	$( ; n, n)$	$( ; 2,3,6)$
	$n_1 < n_2$	$( ; 2, 2, n)$	$( ; 2,4,4)$
		$( ; 2,3,3)$	$( ; 3,3,3)$
		$( ; 2,3,4)$	$( ; 2,2,2,2)$
		$( ; 2,3,5)$	$(2;2,2)$
		$(n ; )$	$(3;3)$
		$(2; m)$	$(4;2)$
		$(3;2)$	$(2;2; )$
El plano Proyectivo $P^2$		$( )$ $(n)$	$(2,2)$
El toro $T^2$			$( )$
La Botella de Klein $K$			$( )$
El Anillo $A$			$( ; )$
La Banda de Möbius $M$			$( ; )$

tabla

## APENDICE B

### Espacios de Estructuras Geométricas

Hemos dado a una variedad de dimensión dos una estructura geométrica, en el capítulo tres, la pregunta que nos hacemos ahora es: ¿Cuántas estructuras no equivalente le podemos dar a una variedad de dimensión dos?

Este problema es estudiado desde el siglo pasado, en el contexto de superficies de Riemann, ya que en el caso particular de estructura hiperbólica en una superficie compacta y orientable el determinar el número de estructuras hiperbólicas es equivalente a determinar las estructuras holomorfas. El problema es conocido como el espacio de moduli o el espacio de Teichmüller. En general la colección de estructuras geométricas en una variedad dada tienen estructura de espacio topológico e incluso de variedad diferenciable u holomorfa.

Veamos algunos ejemplos: Por el teorema 2.21, podemos decir en algunos casos cuál es.

En el caso del cilindro con estructura plana completa su moduli o espacio de estructuras planas está parametrizado por la distancia entre las rectas que tomamos para hacer la identificación, o en otras palabras la norma del vector por el que trasladamos y generamos su grupo de traslaciones.

En el caso del toro se tiene que el espacio de estructuras planas se obtiene como sigue:

Primero observemos que una estructura plana induce una estructura holomorfa. El determinar las estructuras holomorfas en el toro es un cálculo clásico: Para ello debemos hallar todas las parejas de números complejos  $z, w$  tales que el grupo generado por las traslaciones asociadas  $T_z$  y  $T_w$  produzca toros no biholomorfos entre sí, sin pérdida de generalidad puede hacerse  $z = (1, 0)$  y  $w \in \mathbb{H}^2$ . Dos parejas  $(z, w)$  y  $(z, w')$  producen toros equivalente si y solo si

$$w = \frac{aw' + b}{cw' + d} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = 1.$$

Si  $SL(2, \mathbb{Z})$  es el grupo de transformaciones de Möbius con coeficientes enteros y determinante uno, entonces las estructuras holomorfas del toro están parametrizadas por  $\mathbb{H}^2/SL(2, \mathbb{Z})$ , este cociente tiene estructura de variedad compleja, es biholomorfa a  $\mathbb{C}$ , de donde las estructuras holomorfas en el toro forman de manera natural  $\mathbb{C}$ .

Finalmente dada, una estructura plana en el toro generada por  $(z, w)$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ,  $(\lambda z, \lambda w)$  generan la misma estructura holomorfa pero no la misma estructura plana. Con lo que tenemos que el espacio de estructuras planas del toro es  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ .

El problema en general no es nada sencillo y podemos dar como referencia a las personas interesadas por el tema a [Bers2].



## APENDICE C

### Estructuras Geométricas en variedades de dimensión tres

En el caso de tres dimensiones el problema de encontrar los grupos cristalográficos y por lo tanto estructuras geométricas modeladas en  $E^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$  las geometrías euclidiana, elíptica e hiperbólica en dimensión tres se complica demasiado. Uno de los problemas es que no se conoce la clasificación topológica de las tres variedades y otro es que no tenemos un teorema análogo al de uniformización. Por lo que hemos visto a lo largo del trabajo, todos los problemas antes mencionados guardan relaciones entre sí. Actualmente se conocen todos los grupos cristalográficos de  $E^3$  y  $\mathbb{S}^3$  pero no los de  $\mathbb{H}^3$ .

Se sabe que no toda tres variedad topológica admite una estructura geométrica modelada en  $E^3, \mathbb{S}^3$  o  $\mathbb{H}^3$ . Por ejemplo;  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  no puede tenerla ya que aplicando la teoría que hemos visto, el que tuviera estructura geométrica de los tipos anteriores implicaría que su cubriente universal fuese  $E^3, \mathbb{S}^3$  o  $\mathbb{H}^3$ , lo cual es una contradicción ya que su cubriente universal es  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .

Recientemente William Thurston ha conjeturado la existencia de estructuras geométricas para toda tres variedad compacta utilizando técnicas de cirugía (cortando la variedad a lo largo de superficies) y ampliando la lista de posibles estructuras a ocho tipos, los cuales incluyen a  $E^3, \mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{H}^3$ . W. Thurston y otros matemáticos han probado que la conjetura es válida para tipos muy amplios de tres variedades. Sin embargo, no hay todavía una prueba completa de la conjetura.

Las referencias principales que proponemos en este tema son [Thur1], [Thur2] y [Scot].

## APENDICE D

### Topología de Superficies

Resumimos algunos resultados que se utilizan implícitamente en el capítulo tres. El primero de ellos es:

#### *Teorema de clasificación de superficies compactas.*

Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.

La demostración de este teorema se encuentra en [Mass].

La característica de Euler de una superficie compacta orientable de género  $g$  es  $2 - 2g = \chi(M)$ .

#### **Proposición.**

Se tiene que si  $M$  es una variedad conexa no orientable, compacta y es suma conexa de  $n$  espacios proyectivos, su característica es  $2 - n$ .

#### **Proposición.**

Toda variedad no orientable está doblemente cubierta por una orientable.

Un resultado muy interesante acerca de la característica de un espacio cubriente con respecto a la variedad que cubre, es el siguiente.

#### **Proposición.**

Si  $M'$  es una cubriente de orden  $p$  de  $M$ , entonces se tiene que  $\chi(M') = p\chi(M)$ .

## APENDICE E

### El Teorema de Gauss-Bonnet

Este teorema fué usado en diversas versiones, empezando por caracterizar la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico. Enunciamos aquí una de sus versiones más generales.

#### Teorema de Gauss-Bonnet.

Sea  $R \subset S$  una región de una variedad diferenciable riemanniana orientable de dimensión dos y sean  $C_1, C_2, \dots, C_n$  curvas cerradas  $C^\infty$  por pedazos que describen la frontera de  $R$ ,  $\partial R$ . Supongase que cada  $C_i$  está positivamente orientada y sean  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ , todos los ángulos externos de las curvas  $C_i$ .

Entonces

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi\chi(R)$$

donde  $s$  denota la longitud de arco de  $C_i$  y la integral sobre  $C_i$  denota la suma de las integrales sobre todos los arcos regulares de  $C_i$ ,  $k_g$  la curvatura geodésica y  $K$  la curvatura Gaussiana.

Se tiene el siguiente corolario, que en ocasiones es llamado el teorema de Gauss-Bonnet. Cuando hacemos mención en la tesis a este teorema es en esta versión.

#### Corolario.

Sea  $S$  una variedad diferenciable Riemanniana, orientable de dimensión dos, entonces

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Como referencias principales se puede ver [DoCar1] o [Spiv2].

## APENDICE F

### Coordenadas Isotermicas

Para la existencia de estructuras hiperbólicas usamos fuertemente el hecho de que toda superficie orientable tiene estructura holomorfa, para ello primero ponemos en ella una métrica de Riemann y luego se utiliza la existencia de coordenadas isotérmicas.

Supongamos que en una vecindad del plano tenemos una métrica de Riemann  $ds = g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + 2g_{12}dxdy$ .

Decimos que las funciones de cambio de coordenadas dadas por  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  con  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \geq 0$  introducen coordenadas isotermas para la vecindad si son tales que;

$$du^2 + dv^2 = \lambda(x, y)[ds^2] = \lambda(x, y)[g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2]$$

donde  $\lambda$  es continua.

#### Teorema

Existen coordenadas isotermas para toda variedad orientable.

Por lo anterior es posible obtener cambios de coordenadas conformes, con lo que se tiene el siguiente resultado

#### Teorema.

Una variedad de dimensión dos orientable  $M$  diferenciable, puede hacerse o se le puede dar una estructura de superficie de Riemann.

Una referencia de la demostración de estos teoremas se encuentra en [Bers1].

## APENDICE G

### El Teorema Uniformización

El teorema de Uniformización fué utilizado para dar estructura geométrica a las superficies, ya que intruduciendo en ellas una estructura holomorfa y levantandola a la cubriente universal es posible hacer que las transformaciones de cubierta y por lo tanto los cambios de coordenadas sean transformaciones de Möbius y por ello isometrías.

El antecedente del teorema de Uniformización es el;

#### *Teorema de la aplicación de Riemann.*

Dada cualquier región simplemente conexa  $\Omega$  del plano que no es todo el plano y un punto  $z_0 \in \Omega$ , existe una única función analítica  $f(z)$  en  $\Omega$  con las propiedades de que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) \geq 0$  tal que  $f(z)$  define una función uno a uno de  $\Omega$  al disco unitario  $\Delta$ .

Para generalizar el teorema anterior, por el apéndice 3, sabemos que toda dos variedad orientable es de hecho una superficie de Riemann. Se tiene un teorema de uniformización que nos permite clasificar superficies de Riemann simplemente conexas.

#### *Teorema de Uniformización.*

Toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa o conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ ,  $\hat{\mathbb{C}}$  o al disco unitario  $\Delta$ .

Como referencia para una demostración del teorema de la aplicación de Riemann damos el [Alfh1]. Y para una demostración del teorema de uniformización ver [Abik] y [Alfh2].

# REFERENCIAS

- [Abik] William Abikoff, "The Uniformization Theorem", American Mathematical Monthly, 88(1981).
- [Ahlf1] Lars V. Ahlfors, "Complex Analysis", Mc.Graw-Hill, (1979).
- [Ahlf2] Lars V. Ahlfors, "Conformal Invariants", Mc.Graw-Hill, (1973).
- [Bear] Alan F. Beardon, "The Geometry of Discrete Groups", Springer-Verlag, (1983).
- [Bers1] Lipman Bers, "Riemann Surfaces", Courant Institute, Lecture Notes, New York, (1954).
- [Bers2] Lipman Bers, "Uniformization, Moduli and Kleinian Groups", Bull. London Math. Soc., 4(1972).
- [Both] William M. Boothby, "An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemann Geometry", Academic Press, (1975).
- [DoCar1] Manfredo Do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, (1976).
- [DoCar2] Manfredo Do Carmo, "Geometria Riemanniana", IMPA, (1979).
- [Grom] Michaël Gromov, "Hyperbolic manifolds according to Thurston an Jørgensen", Lecture Notes in Mathematics, Séminaire Bourbaki, Vol. 1979/80 Exposé 543-560, Springer-Verlag.
- [Helg] Sigurdur Helgason, "Differential Geometry and Symmetric Spaces", Academic Press, (1962).
- [Koba] Shoshichi Kobayashi - Katsumi Nomizu, "Foundations of Differential Geometry", Volume I, Interscience-Publishers, (1963).
- [Mass] William S. Massey. "Introducción a la topología algebraica", Editorial Reverté (1967).
- [Maur] Magdalena M.B. Maurer S, "Mosaicos", Tesis Profesional, UNAM, (1983).
- [Miln] John Milnor, "On the 3-Dimensional Brieskorn Manifolds  $M(p, q, r)$ ", Knots, Groups and 3-Manifolds, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Study 84.
- [Port1] Michael Porter, "Superficies de Riemann", 3<sup>er</sup> Coloquio Departamento de Matemáticas CINVESTAV, IPN, (1983).
- [Port2] Michael Porter, "Seminar on the notes of W. Thurston", Instituto de Matemáticas, UNAM., 1985.
- [Rees] Elmer Rees, "Notes on Geometry", Springer-Verlag, (1977).
- [Scot] Peter Scott, "The Geometries of 3-Manifolds", Bull. London Math. Soc., 15(1983).

- [Spiv] Michael Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Volume One, Publish or Perish, Inc., (1979).
- [Spiv2] Michael Spivak, "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Volume Three, Publish or Perish, Inc., (1979).
- [Sull] D. P. Sullivan, "Seminar on Conformal and Hyperbolic Geometry", Notas escritas por José A. Seade. IHES, (1982).
- [Thur1] William P. Thurston, "The Geometry and topology of 3-manifolds", Notes, Princeton N.J., (1978).
- [Thur2] William P. Thurston, "Three Dimensional Manifold, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry", Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 6, Number 3, May 1982.
- [Verj] Alberto Verjovsky, "Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas", Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas, CINVESTAV, IPN, (1982).
- [Wolf] Joseph A. Wolf, "Space of Constant Curvature", Mac.Graw-Hill, (1967).