



38
29

UNIVERSIDAD LA SALLE

ESCUELA DE INGENIERIA
INCORPORADA A LA U. N. A. M.

ANALISIS Y ESTUDIO DE SISTEMAS CONTROLADOS EN FORMA DISCRETA POR MEDIO DE LOS OPERADORES 'B' (DE ATRASO) Y 'F' (DE ADELANTO)

T E S I S P R O F E S I O N A L
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
INGENIERO MECANICO ELECTRICO
P R E S E N T A :

CESAR RAMOS DE MIGUEL

México, D. F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1986



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ANALISIS Y ESTUDIO DE SISTEMAS CONTROLADOS EN FORMA DISCRETA
POR MEDIO DE LOS OPERADORES "B" (DE ATRASO) Y "F"
(DE ADELANTO)

INTRODUCCION

- CAPITULO I FUNDAMENTOS DEL CONTROL EN SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS
- 1.1 Introducción
 - 1.2 Control de los Sistemas en el Campo Continuo
 - 1.3 Control de los Sistemas en el Campo Discreto
- CAPITULO II MODELOS MATEMATICOS DE LOS SISTEMAS
- 2.1 Introducción
 - 2.2 Modelos de los Procesos Clásicos en el Campo Continuo
 - 2.3 Modelos de los Procesos en el Campo Discreto
- CAPITULO III ANALISIS DE LOS PROCESOS A PARTIR DE SUS MODELOS MATEMATICOS
- 3.1 Introducción
 - 3.2 Solución de las Ecuaciones Diferenciales Típicas
 - 3.3 Solución de las Ecuaciones en Diferencias Típicas
 - 3.4 Consideraciones de Estabilidad
- CAPITULO IV CONTROLADORES CONTINUOS Y DISCRETOS
- 4.1 Introducción
 - 4.2 Funciones de Transferencia
 - 4.3 Modos y Acciones de Control Convencionales
 - 4.4 Respuesta de los Sistemas Discretos

CAPITULO V

DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES
Y FORMULACION DE LOS ALGORITMOS
DE CONTROL

- 5.1 Introducción
- 5.2 Métodos para el Diseño de Controladores Digitales
- 5.3 Algoritmos de Control para una Relación Variable de Referencia-Variable Controlada Deseada
- 5.4 Algoritmos de Control para Relaciones de Señal de Error-Señales de Referencia Deseadas

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION

Tradicionalmente, las limitaciones en la capacidad de los equipos de control, demandaron que las líneas de proceso fueran divididas en secciones para permitir que los operadores humanos tuvieran tiempo suficiente para hacer los ajustes locales necesarios.

En las últimas dos décadas, algunas de las industrias más complejas tales como la petroquímica y la siderúrgica, han recibido grandes beneficios de la aplicación de controles por medio de computadoras centralizadas en sus procesos.

Dichos sistemas han permitido a éstas y otras industrias - incorporar diversas líneas de control y proveer lazos interactivos entre procesos o secciones de procesos adyacentes, así - como rapidez en el procesamiento de grandes cantidades de datos y una sustancial reducción en la intervención humana dentro de los lazos de control. Obteniendo como resultado considerables mejoras en las velocidades de las líneas, calidad del producto, bajos índices de desperdicio y flexibilidad de adaptación en la producción; aunque los costos han sido muy altos y ha tomado mucho tiempo desarrollar los sistemas.

La ingeniería de procesos actualmente enfrenta dos problemáticas diferentes al desarrollar las especificaciones de las - líneas o procesos.

Una de ellas es la necesidad de obtener mayor productivi--
dad, menor desperdicio, tolerancias más cerradas, mejor calidad
y mayor seguridad. Siendo todos estos problemas fácilmente i--
dentificables y generalmente resueltos por desarrollos lógicos--
de práctica común.

Los problemas más difíciles son los intangibles, tales co--
mo: por cuanto tiempo se fabricará el producto, que productos -
similares serán necesarios en el futuro, que nuevos cambios ha--
brá en la tecnología del proceso y que nuevas técnicas de con--
trol se adoptarán en un año o dos. Generalmente estos argumen--
tos no son respondidos con facilidad, y es por ésto que los cur--
sos de acción que debe tomar el diseñador del proceso son incor--
porar al sistema tanta flexibilidad de control como sea posible
y asegurar que la implementación sea lograda en el menor tiempo
posible.

Estas importantes características son logradas con seguri--
dad y oportunidad en los sistemas controlados por computadora--
o control digital, ya que los algoritmos de control son fácil--
mente reemplazados y la implementación es llevada a cabo única--
mente haciendo los cambios necesarios en los elementos finales--
de control.

De lo anteriormente expuesto se desprende la necesidad de--
que la persona que estudia y analiza los sistemas o procesos --
que serán controlados por computadora, tenga una concepción muy

clara de los conceptos aplicables para cada caso en particular. El presente trabajo presenta un estudio de las bases -- teóricas necesarias para el análisis de sistemas controlados en forma digital, desde la obtención del modelo matemático hasta -- la formulación del algoritmo de control. Procurando en cada ca so hacer notar la semejanza que existe entre el estudio del sig tema en el campo continuo y en el campo discreto, para de esta forma facilitar la comprensión de los conceptos que se manejan en el control de procesos por computadora.

Como se verá más adelante, el análisis de los procesos se lleva a cabo utilizando los operadores hacia adelante "F" y --- hacia atrás "B", herramientas prácticas que son una alternativa al uso de la transformada "Z". Siendo la principal característica de dichos operadores que las bases matemáticas necesarias para su aplicación son de menor complejidad que las inherentes a la transformada "Z".

CAPITULO I

FUNDAMENTOS DEL CONTROL EN SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS.

- 1.1 Introducción.
- 1.2 Control de los sistemas en el campo continuo.
- 1.3 Control de los sistemas en el campo discreto.

FUNDAMENTOS DEL CONTROL EN SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

1.1 INTRODUCCION

En este capítulo se estudian los dos tipos básicos de sistemas de control (lazo abierto y lazo cerrado) en los cuales se implementan tanto los controladores discretos como los controladores continuos, y se plantean en forma general las bases matemáticas aplicables en cada caso.

Para describir un sistema de control es necesario definir algunos conceptos y componentes que forman parte de dichos sistemas:

Planta: es un equipo o juego de piezas de una máquina funcionando juntas, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. Comúnmente se designa como planta a cualquier objeto físico que ha de ser controlado (como un horno de calentamiento o un reactor químico, etc...).

Proceso: se define como proceso a una operación o desarrollo natural, progresivamente continuo, caracterizado por una serie de cambios graduales que llevan de un estado a otro de un modo relativamente fijo y que tiende a un determinado resultado o fin; o bien, una operación artificial voluntaria, progresivamente continua que consiste en una serie de acciones controladas o movimientos dirigidos sistemáticamente hacia un determinado resultado o fin.

Sistema: es una combinación de elementos o componentes que-

actúan conjuntamente y cumplen un determinado objetivo.

Perturbación: es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de salida de un sistema.

Control realimentado es una operación que en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada de referencia de un sistema (o un estado arbitrariamente elegido) y que lo hace sobre la base de dicha diferencia.

Sistema de control realimentado: es aquel que tiende a -- mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como parámetro de control.

Servomecanismo: un servomecanismo es un sistema de control realimentado en el cual la salida es alguna posición, velocidad o aceleración mecánica.

Sistema de regulación automática: son sistemas de control realimentados en los cuales la entrada de referencia o la salida deseada son, o bien constantes, o varían lentamente en el -- tiempo, y donde la tarea fundamental consiste en mantener la salida en el valor deseado a pesar de las perturbaciones presentes.

1.2 CONTROL DE LOS SISTEMAS EN EL CAMPO CONTINUO

La operación de los sistemas es generalmente en forma continua e ininterrumpida, para el control de los procesos en esta --

forma se utilizan los controles automáticos (capítulo IV) y la computadora analógica.

Un control automático compara el valor efectivo de la salida de un proceso con el valor deseado, determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor muy pequeño. La forma en que el control automático produce la señal de control recibe el nombre de acción de control.

En el estudio de los sistemas y controladores dentro del campo continuo, la base matemática requerida son las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace (capítulo III), herramientas que permiten investigar el comportamiento del sistema completo o de cada una de sus partes por separado en el dominio del tiempo.

Como se mencionó anteriormente, los sistemas de control se dividen en dos tipos: sistemas de control de lazo cerrado y sistemas de control de lazo abierto.

Sistemas de control de lazo cerrado.

Son sistemas en los que la señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control.

Por lo tanto, los sistemas de control de lazo cerrado son sistemas de control realimentado. La señal de error, que es la diferencia entre la señal de entrada y la de realimentación --

entra al detector o controlador de una manera que tiende a reducir el error y llevar la salida del sistema al valor deseado. En otras palabras, el término "lazo cerrado" implica el uso de una acción de realimentación para reducir el error del sistema. La figura 1.1 muestra el esquema de un sistema de control de lazo cerrado en diagrama de bloques.

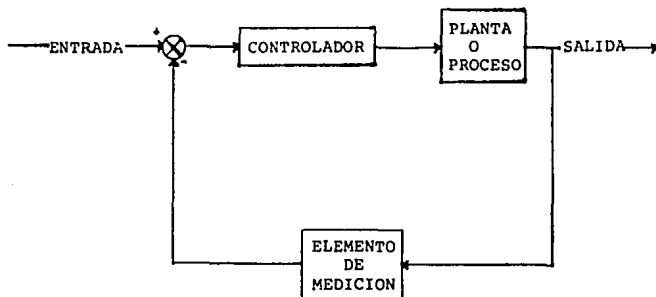


Figura 1.1 Sistema de control de lazo cerrado.

Como ejemplo de un sistema de lazo cerrado, en la figura 1.2 se muestra un diagrama de bloques del sistema de control de la dirección de un automóvil, en el cual se puede observar que existen dos lazos de realimentación para lograr una salida ---

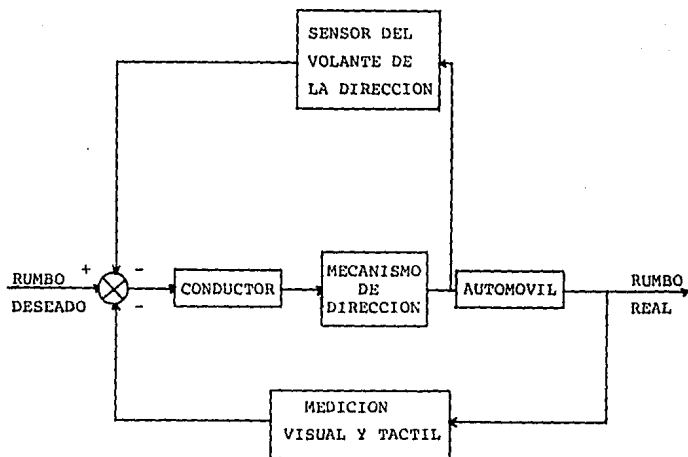


Figura 1.2 Sistema de control de la dirección de un automóvil.

(rumbo real) de acuerdo a lo esperado. El rumbo deseado es comparado con una medición del error, dicha medición se obtiene por medio de una realimentación visual y táctil (movimiento del cuerpo), y existe una realimentación adicional -- por medio de la sensación percibida en las manos (sensores) colocadas sobre el volante de la dirección.

Otros sistemas de control muy conocidos tienen los elementos básicos del sistema mostrado en la figura 1.1. Un refrige-

rador tiene un ajuste de temperatura o temperatura deseada, un termostato para medir la temperatura real y producir la señal de error, así como un motor compresor para bajar la temperatura. En la industria hay una gran variedad de controles de velocidad, presión, temperatura, posición, espesores, composición y calidad, entre muchos otros.

Sistemas de control de lazo abierto.

Son sistemas de control en los que la salida no tiene ningún efecto sobre la acción de control, en un sistema de control de lazo abierto la salida no es realimentada para ser comparada con la entrada. En un sistema de este tipo, para cada entrada de referencia corresponde una condición de operación fijada de antemano de acuerdo con las condiciones limitantes o recomendadas de operación. La figura 1.3 muestra un esquema de dicho sistema.

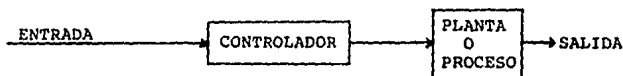


Figura 1.3 Sistema de control de lazo abierto.

Un ejemplo práctico es la máquina de lavar ropa.

El remojo, lavado y enjuagado en la máquina se cumple sobre una base de tiempo preestablecida. La máquina no mide la señal de salida en los pasos intermedios ni al final del proceso. De esta forma, la exactitud del sistema depende de la calibración de sus componentes. Una clara desventaja del sistema de lazo abierto es que en presencia de perturbaciones la función asignada no se cumple, por lo que este tipo de sistema sólo es utilizado en la práctica si la relación entre la entrada y la salida es conocida y si no hay perturbaciones ni internas ni externas.

Cualquier sistema de control que funcione exclusivamente sobre una base de tiempos es de lazo abierto, como la lavadora del ejemplo.

Una vez definido el tipo de sistema de control, lazo abierto o lazo cerrado, que será implementado el análisis del sistema se realiza siguiendo los pasos que a continuación se mencionan:

Reducir el sistema a un diagrama de bloques.

Obtener los modelos matemáticos de todos y cada uno de los componentes del sistema.

Manipular y resolver las ecuaciones resultantes que describen matemáticamente al sistema.

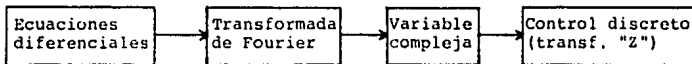
Diseñar o elegir un controlador que satisfaga las necesidades de control del sistema.

Evaluar los resultados por medio de simulación analítica y en su caso diseñar o elegir un controlador diferente.

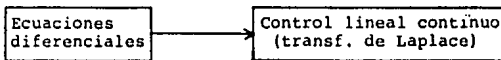
1.3 CONTROL DE LOS SISTEMAS EN EL CAMPO DISCRETO

Aunque de hecho los procesos son continuos en el tiempo, - la computadora de control existe en el campo discreto ya que - tiene conocimiento de las variables de salida del proceso sólo en puntos discretos del tiempo, es decir, cuando se obtienen - valores muestreados.

En el análisis de los sistemas discretos o muestreados, - la base matemática es la transformada "Z", que es una herra--- mienta más compleja que la transformada de Laplace ya que los fundamentos necesarios para su comprensión y aplicación son en general más extensos, tal y como se puede observar a continua--- ción:



Análisis del sistema en el campo discreto

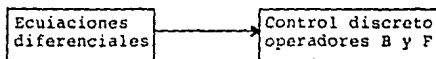


Análisis del sistema en el campo continuo

Figura 1.4

Debido a la complejidad que representa el analizar un sis--- tema por medio de la transformada "Z", recientemente se ha lle--- gado a utilizar los operadores "B" (backward shifting opera--- tor) y "F" (forward shifting operator) como herramientas en el

manejo de sistemas discretos de control. Los operadores "B", conocido también como operador "hacia atrás" o de retraso y "F", también conocido como operador "hacia adelante, o de adelanto, serán estudiados con mayor detenimiento en el capítulo III.



Análisis del sistema en el campo discreto con la ayuda de los operadores B y F.

Figura 1.5

La aplicación de la computadora digital para efectos de control puede ser de diversas maneras. El concepto más simple de todos es el de usar a la computadora como una gran recolectora de datos y como calculadora, de la forma en que se ilustra en la figura 1.6, y se conoce como control Monitor o control "Off-line".

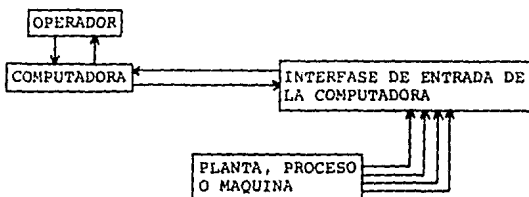


Figura 1.6 Control Monitor.

En los sistemas de monitoreo por computadora, el operador manipula directamente los controladores del proceso en la plan--

ta. Las decisiones y acciones para controlar el proceso son hechas por el operador basandose en los análisis que la computadora pueda hacer en función de la programación realizada en ella.

Por lo tanto, el control Monitor por computadora es del tipo de lazo cerrado, en el cual el operador es el encargado de realizar la realimentación.

Las computadoras son también utilizadas en sistemas de lazo abierto (figura 1.7) como un procesador de datos y programas dentro de la línea de control, generando comandos específicos para la manipulación de máquinas o actuadores de proceso.

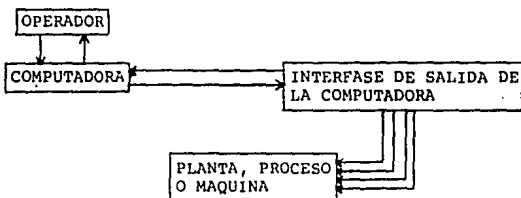


Figura 1.7 Control por computadora en lazo abierto.

Para lograr la automatización completa de un proceso, es necesario desarrollar sistemas por computadora que tengan la capacidad de comparar el conjunto de resultados reales, y poder tomar las acciones correctivas necesarias para lograr los resultados esperados, es decir, control digital realimentado -

o de lazo cerrado.

Un sistema de control digital realimentado, como el que se muestra en la figura 1.8, acepta información operativa del proceso a través de transductores adecuados, acepta también valores de referencia deseados (set points) que le envía un operador, y la computadora cierra el lazo de control estableciendo o entregando comandos de manipulación que producen cambios en las "salidas" del proceso.

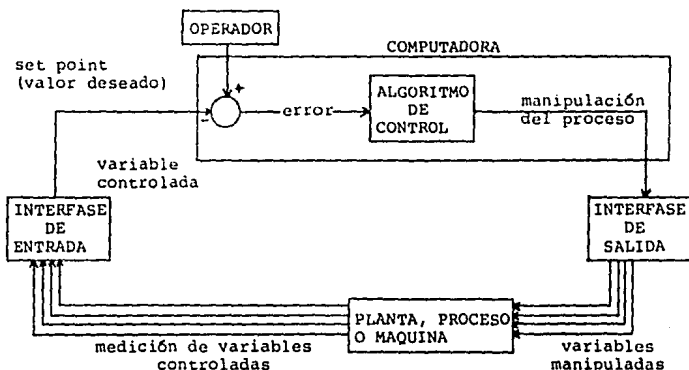


Figura 1.8 Control digital retroalimentado o de lazo cerrado.

Dentro de la computadora se desarrollan dos operaciones - distintas, la primera consiste en determinar el error entre la variable real y la variable deseada (set point):

Error = entrada - salida

Y segundo, con este error y mediante los algoritmos de -- control (ecuación o conjunto de ecuaciones programadas para -- controlar el sistema) activar sobre el proceso.

En el control digital realimentado, si la computadora se utiliza para ajustar las variables manipuladas del proceso, se denomina control digital directo, si por otro lado la computadora se utiliza para ajustar los set points de los controladores del proceso, entonces se llama control supervisorio.

CAPITULO II

MODELOS MATEMATICOS DE LOS SISTEMAS.

- 2.1 Introducción.
- 2.2 Modelos de los procesos clásicos en el campo continuo.
- 2.3 Modelos de los procesos en el campo discreto.

MODELOS MATEMATICOS DE LOS SISTEMAS

2.1 INTRODUCCION

Dentro del estudio y análisis de los sistemas, es necesario establecer las relaciones que existen entre las variables del sistema y obtener un modelo matemático que represente su comportamiento, dicho de otra manera, un modelo matemático es la descripción matemática de las características dinámicas de un sistema.

Muchos sistemas dinámicos, mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, económicos o biológicos, pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales o en diferencias (modelo matemático). La respuesta de un sistema dinámico a una entrada (o función de excitación) puede ser determinada por medio de la resolución de dichas ecuaciones, y si éstas son lineales o pueden linealizarse, un método de solución es la transformada de Laplace.

Para la obtención de las ecuaciones descriptivas del sistema o modelo matemático se utilizan las leyes físicas que gobiernan un sistema en particular, por ejemplo: las leyes de Newton para sistemas mecánicos o las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos.

Es necesario puntualizar que obtener un modelo matemático es la parte más importante de todo el análisis, ya que de la exactitud con la que el modelo represente al fenómeno

físico dependerá la exactitud de los resultados que se obtengan.

Como se mencionó anteriormente, para poder utilizar el método de solución de ecuaciones diferenciales de la transformada de Laplace, el sistema en cuestión debe ser lineal. Un sistema es lineal si las ecuaciones diferenciales que lo representan son lineales, y una ecuación diferencial es lineal si los coeficientes son constantes o son funciones únicamente de la variable independiente. La propiedad más importante de los sistemas lineales es que se les puede aplicar el principio de superposición, el cual establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de excitación distintas, es la suma de las dos respuestas individuales. Por lo tanto, para sistemas lineales se puede calcular la respuesta a diversas entradas tratándose una entrada a la vez y añadiendo o sumando los resultados obtenidos.

Aunque muchas relaciones físicas son frecuentemente representadas por ecuaciones lineales, en la mayoría de los casos las relaciones no son realmente lineales. De hecho, un estudio cuidadoso de los sistemas físicos indica que aún los denominados "sistemas lineales" son realmente lineales rangos de operación restringidos.

Debido a la dificultad matemática inherente para la solución de los sistemas no lineales, generalmente se recurre a --

introducir sistemas lineales "equivalentes" en reemplazo de los no lineales, cuidando siempre de trabajar con dichos -- sistemas equivalentes en el rango de operación adecuado.

Por otra parte, la naturaleza de la computadora digital -- es de tal forma que es necesario pensar en sistemas discretos -- en los que la modelación analítica es hecha con ecuaciones en -- diferencias. Y ya que el control por computadora es aplicado -- siempre a procesos y no a sistemas aislados, la modelación en -- el campo discreto se analizará para procesos tales como el in -- tegrador, de integración doble, tiempo muerto y otros.

2.2 MODELOS DE LOS PROCESOS CLASICOS, EN EL CAMPO CONTINUO Y DISCRETO

2.2.1 Modelos en el campo continuo.

Como ya se mencionó, las ecuaciones diferenciales describen el funcionamiento de un sistema utilizando las leyes físicas que lo gobiernan. Este camino se aplica de la misma manera a sistemas mecánicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos, etc.

Para facilitar la obtención de los modelos, la tabla de la figura 2.1 muestra un resumen de las variables de los sistemas dinámicos, y la tabla de la figura 2.2 un resumen de las ecuaciones descriptivas para elementos lineales agrupados, se hace notar que las ecuaciones contenidas en la tabla de la figura --

SISTEMA	VARIABLE QUE INFLUYE POR ELEMENTO	INTEGRADO POR LA VARIABLE	VARIABLE A LO LARGO DEL ELEMENTO	INTEGRANDO A LO LARGO DE LA VARIABLE
ELECTRICO	corriente, i	carga, q	diferencia de potencial o voltaje V_{21}	enlace de flujo, λ_{21}
MECANICO TRASLACIONAL.	fuerza, F	momentum de traslación, P	diferencia de velocidad V_{21}	diferencia de desplazamiento Y_{21}
MECANICO ROTACIONAL	Par T	momentum angular, h	diferencia de velocidad angular W_{21}	diferencia de desplazamiento angular Θ_{21}
HIDRAULICO	Tasa volumétrica del caudal, Q	volumen, V	diferencia de presión P_{21}	momentum de presión, T_{21}
TERMICO	tasa de flujo de energía calorífica q	energía calorífica, H	diferencia de temperatura T_{21}	

Figura 2.1

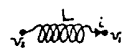
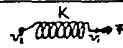
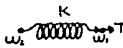
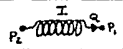
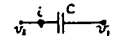
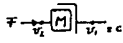
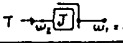
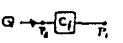
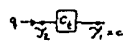
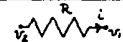
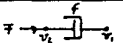
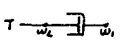
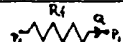

TIPO DE ELEMENTO	ELEMENTO FISICO	ECUACION DESCRIPTIVA	ENERGIA E O POTENCIA P	SIMBOLO
inductivo	inductancia eléctrica	$V_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
	resorte traslacional	$V_{21} = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K}$	
	resorte rotacional	$W_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{K}$	
	inercia del fluido	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	
capacitivo	capacitancia eléctrica	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} CV_{21}^2$	
	masa	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} MV_2^2$	
	inercia	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J\omega_2^2$	
	capacitancia del fluido	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_2^2$	
	capacitancia térmica	$q = C_t \frac{d\gamma_2}{dt}$	$E = C_t \gamma_2^2$	
resistivo	resistencia eléctrica	$i = \frac{1}{R} V_{21}$	$P = \frac{1}{R} V_{21}^2$	
	amortiguación de traslación	$F = fV_{21}$	$P = fV_{21}^2$	
	amortiguación rotacional	$T = f\omega_{21}$	$P = f\omega_{21}^2$	
	resistencia del fluido	$Q = \frac{1}{Rf} P_{21}$	$P = \frac{1}{Rf} P_{21}^2$	
	resistencia térmica	$q = \frac{1}{Rf} \gamma_{21}$	$P = \frac{1}{Rf} \gamma_{21}^2$	

Figura 2.2

2.2 son descripciones idealizadas y sólo se aproximan a las condiciones reales.

Como ejemplo de lo anteriormente expuesto se tiene el sistema amortiguador-resorte-masa mostrado en la figura 2.3.

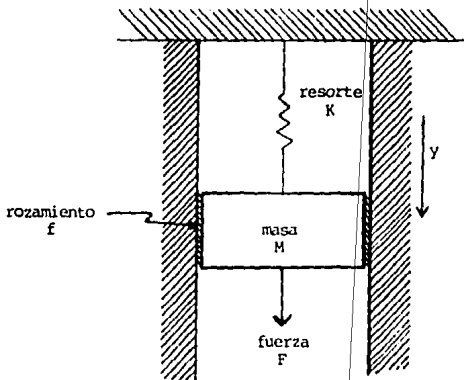


Figura 2.3 Sistema amortiguador-resorte-masa.

La ley que gobierna a este tipo de sistemas mecánicos es la segunda ley de Newton, que para sistemas traslacionales establece que:

$$F = m \cdot a$$

donde: F es la fuerza, m la masa y a la aceleración.

Por lo que para el sistema se obtiene:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = F \quad (2.1)$$

Donde k es la constante de un resorte ideal, f la constante de rozamiento y M la masa. La ecuación 2.1 es el modelo matemático del sistema y es una ecuación diferencial lineal, de segundo orden y de coeficientes constantes.

De la misma manera se puede obtener el modelo matemático del circuito eléctrico RLC mostrado en la figura 2.4.

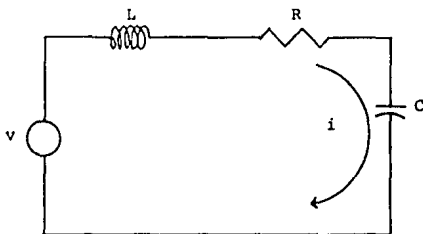


Figura 2.4 Circuito RLC.

Utilizando la ley de corrientes de Kirchoff se obtiene la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = v \quad (2.2)$$

que es el modelo matemático del circuito RLC.

La solución de las ecuaciones diferenciales que describen a los procesos puede obtenerse por varios métodos, algunos de ellos, los aplicados con mayor frecuencia, serán estudiados en el capítulo III.

Con la finalidad de observar la estrecha semejanza que -- existe entre las ecuaciones diferenciales de los sistemas eléctricos y mecánicos, la ecuación 2.2 puede escribirse en términos de la carga eléctrica q , por lo que se convierte en:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = v \quad (2.3)$$

Inmediatamente se nota la semejanza que hay entre las ecuaciones 2.1 y 2.3. Comparando dichas ecuaciones se vé que - para ambos sistemas las ecuaciones son idénticas.

A este tipo de sistemas se les denomina sistemas análogos y los términos que ocupan las posiciones correspondientes en - las ecuaciones diferenciales se denominan variables análogas.

La analogía mostrada es la llamada fuerza-voltaje, y la - tabla de la figura 2.5 muestra una colección de magnitudes a - nálogas fuerza-tensión.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza F (par T)	voltaje V
masa m (movimiento de inercia J)	inductancia L
coeficiente de fricción viscosa f	resistencia R
constante de resorte K	recíproco de la capacitancia $1/C$
desplazamiento y (desplazamiento angular θ)	carga q
velocidad \dot{y} (vel. angular $\dot{\theta}$)	corriente i

Figura 2.5

Otra analogía útil entre sistemas eléctricos y mecánicos es la basada en la analogía entre fuerza y corriente. Para este caso se considera el sistema mecánico de la figura 2.3 cuya ecuación diferencial es:

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = F \quad (2.1)$$

Y el sistema eléctrico mostrado en la figura 2.6:

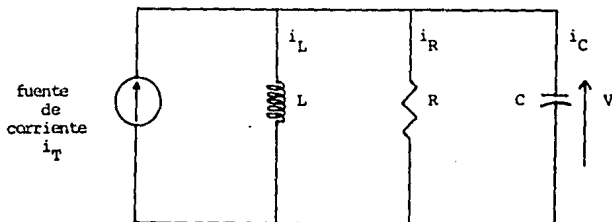


Figura 2.6 Circuito RLC.

Aplicando la ley de las corrientes de Kirchoff al circuito de la figura 2.6 se tiene que:

$$i_L + i_R + i_C = i_T \quad (2.4)$$

donde:

$$i_L = \frac{1}{L} \int v dt$$

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

por lo que el modelo matemático del sistema se obtiene --

sustituyendo los valores de las corrientes en la ecuación 2.4:

$$\frac{1}{L} \int v dt + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = i_T \quad (2.5)$$

La ecuación 2.1 puede ser escrita en términos de la velocidad de la siguiente manera:

$$v = \frac{dy}{dt}$$

sustituyendo en 2.1 se tiene:

$$M \frac{dv}{dt} + fv + K \int v dt = F \quad (2.6)$$

Comparando las ecuaciones 2.5 y 2.6 se ve que los dos sistemas son análogos. Las magnitudes análogas mostradas en la figura 2.7 constituyen la llamada analogía fuerza corriente.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
fuerza F (par T)	corriente i
masa m (inercia J)	capacitancia C
coeficiente de fricción viscosa f	recíproco de la resistencia 1/R
constante del resorte K	recíproco de la inductancia 1/L
desplazamiento y (desplazamiento angular θ)	enlace de flujo magnético
velocidad \dot{y} (velocidad angular $\dot{\theta}$)	voltaje V

Figura 2.7

El concepto de sistemas análogos es sumamente útil en el-

modelado matemático de los sistemas, ya que para los sistemas eléctricos, mecánicos, térmicos e hidráulicos existen sistemas análogos con soluciones semejantes. La existencia de sistemas y soluciones análogas permiten al analista hacer extensiva la solución de un sistema a todos aquellos análogos con las mismas ecuaciones diferenciales descriptivas.

Una herramienta muy útil para obtener el modelo matemático de un sistema mecánico y aprovechar las analogías con los sistemas eléctricos es la red mecánica intermedia, obviamente el modelo puede ser obtenido también directamente del sistema.

El objetivo es convertir un sistema mecánico en una red eléctrica análoga (red mecánica intermedia) y por las leyes de Kirchhoff obtener su modelo matemático, lo anterior se realiza ya que en algunos sistemas mecánicos es más complicado obtener dicho modelo. Cabe hacer la aclaración de que las magnitudes no son convertidas a su equivalente eléctrico, sino que solamente es una forma diferente de arreglar el sistema para obtener con mayor facilidad su modelo.

Para lograr lo anterior, se siguen dos reglas básicas: a) todos los elementos o componentes del sistema que están conectados a un punto fijo de referencia en el sistema mecánico, se conectarán a la línea de base (-) de la red mecánica intermedia y b) los elementos cuyo comportamiento se desea estudiar o describir se conectarán también a la línea de base (-) de la red ---

mecánica intermedia aún cuando en el sistema mecánico no estén fijos a puntos de referencia.

Para una mejor comprensión de la conversión de un sistema mecánico a una red mecánica intermedia, a continuación se analizan algunos ejemplos.

Se desea obtener el modelo matemático del sistema mostrado en la figura 2.8:

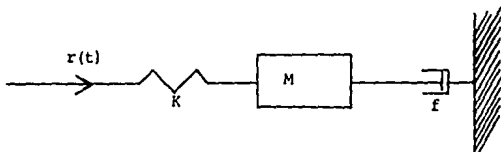


Figura 2.8

El amortiguador f se encuentra conectado a un punto fijo de referencia, por lo que en la red mecánica intermedia es conectado a la línea de base (-), la masa m no está físicamente conectada a un punto fijo, pero como se desea conocer la expresión que define su movimiento, también se fija a la línea de base. Los elementos restantes se colocan en la red en el orden en que aparecen en el sistema, por lo que la red mecánica intermedia resulta ser:

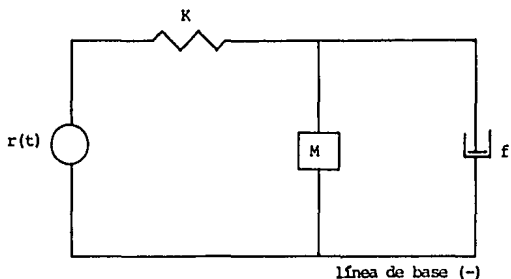


Figura 2.9

Por lo tanto, utilizando la ley de corrientes de Kirchhoff la ecuación que representa a este arreglo es:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + Ky = r$$

Como segundo ejemplo, se desea obtener el modelo matemático del sistema de la figura 2.10:

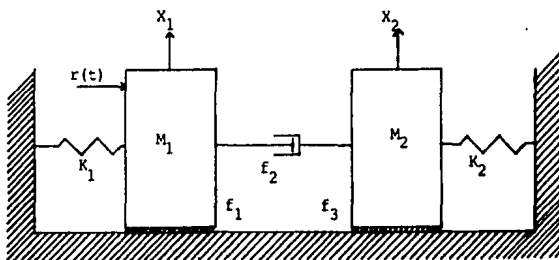


Figura 2.10

Los elementos conectados físicamente a puntos de referen-

cia son: K_1 , K_2 , f_1 y f_3 , y ya que se desea describir el movimiento en los puntos X_1 y X_2 las masas también se conectan a la línea de base:

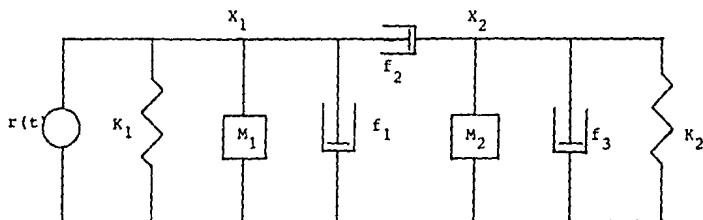


Figura 2.11

Aplicando el método de nodos al circuito de la figura 2.11 se obtiene el modelo matemático del sistema mecánico:

$$r = \left(M_1 \frac{d^2 X_1}{dt^2} + f_1 \frac{dX_1}{dt} + K_1 X_1 + f_3 \frac{dX_1}{dt} \right) - f_3 \frac{dX_2}{dt}$$

$$0 = \left(M_2 \frac{d^2 X_2}{dt^2} + f_2 \frac{dX_2}{dt} + K_2 X_2 + f_3 \frac{dX_2}{dt} \right) - f_3 \frac{dX_1}{dt}$$

En este caso, el modelo matemático del sistema es un sistema de ecuaciones diferenciales, que para su resolución requieren ser resueltas en forma simultánea.

Tercer ejemplo, obtener el modelo matemático del sistema de la figura 2.12:

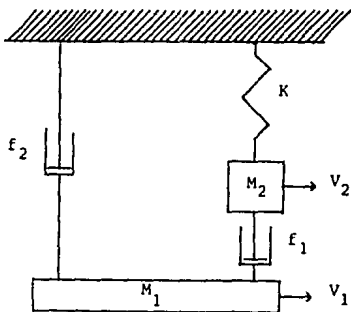


Figura 2.12.

Donde V_1 y V_2 son las velocidades de las masas y se quiere describir el comportamiento de las masas M_1 y M_2 .

f_2 y K están fijos a puntos de referencia y M_1 y M_2 son -- los elementos a estudiar, por lo que la red mecánica intermedia es:

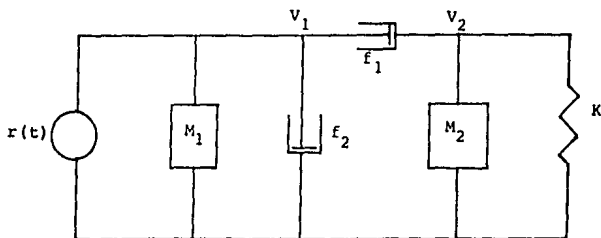


Figura 2.13.

Aplicando el método de nodos al circuito de la figura 2.13 se obtiene el modelo matemático del sistema:

$$r = \left(M1 \frac{dv1}{dt} + f2 V1 + f1 V1 \right) - f1 V2$$

$$0 = \left(M2 \frac{dv2}{dt} + K V2dt + f1 V2 \right) - f1 V1$$

2.3 MODELOS DE LOS SISTEMAS EN EL CAMPO DISCRETO

En la modelación discreta lo primero que se considera es el proceso que se va a controlar, trabajando con una sola variable controlada ya que es ésta la forma en que la computadora maneja el problema de control, sin embargo, los resultados obtenidos así serán aplicables a procesos con muchas variables controladas.

El objetivo inmediato es desarrollar un modelo matemático entre una variable de salida y la correspondiente variable de entrada, en el supuesto de que la dinámica del proceso es conocida.

Para la mayoría de aplicaciones de computadoras de proceso, la entrada puede ser considerada como una serie de escalones dado que la computadora de control establece un nivel de entrada y lo mantiene fijo hasta el siguiente periodo de muestreo en el que puede generarse un nuevo nivel. En la figura 2.14 se muestra la salida de un proceso que es "conocida" por-

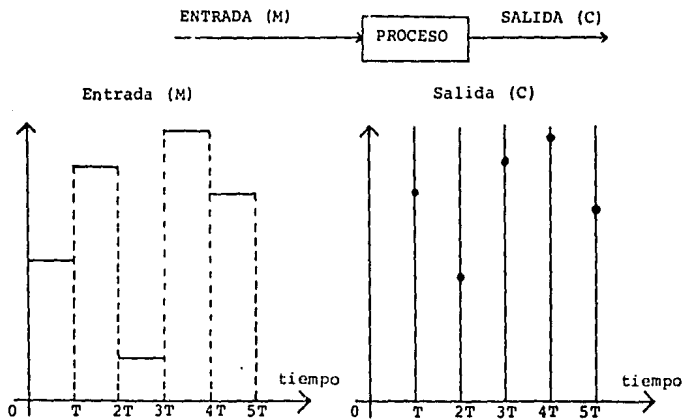


Figura 2.14.

la computadora únicamente en los tiempos de muestreo.

Se debe partir del supuesto de que el tiempo necesario para muestrear la salida y producir un nuevo nivel de entrada es considerablemente menor que el tiempo de muestreo T .

El problema puede ser planteado de la siguiente forma: -- dada la ecuación que define al proceso, junto con los valores de la entrada y la salida en un tiempo arbitrario $t=0$ (junto con cualquier valor anterior que sea necesario); conocer el valor de la salida un periodo de muestreo después, es decir cuando $t=T$.

El procedimiento para obtener los modelos matemáticos discretos se analizará en base a ejemplos, que pueden ser pensados como los que definen a determinados procesos o bien como aproximaciones del comportamiento de procesos más complicados.

Proceso Integrador.

Un proceso integrador, en su forma continua, está definido por la ecuación:

$$\frac{dC}{dt} = KM \quad (2.7)$$

donde M es la entrada, C la salida y K una constante.

En $t=0$, C es igual a C_0 y un escalón de magnitud M_0 se introduce al proceso.

La solución correspondiente a la ecuación 2.7 es:

$$C(t) = \int KM_0 dt + C_0$$

$$C(t) = C_0 + KM_0 t$$

Haciendo $t=T$

$$C(T) = C_0 + KM_0 T \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 es válida para cualquier otro intervalo de muestreo con la sustitución correspondiente de C_0 y M_0 , por lo que puede aplicarse recursivamente en cualquier otro intervalo de muestreo para llegar finalmente al modelo discreto del proceso integrador:

$$C_{n+1} = C_n + KTM_n$$

o bien:

$$C_{n+1} - C_n = KTM_n \quad (2.9)$$

Proceso de primer orden.

En forma continua un proceso de primer orden está definido por la ecuación:

$$\tau \frac{dC}{dt} + C = KM \quad (2.10)$$

donde τ es la constante de tiempo del sistema.

Con condiciones iniciales de $C(0)=C_0$ y $M(0)=M_0$ (entrada - escalón) la solución que se obtiene es:

$$C(t) = C_1 e^{-t/\tau} + KM_0$$

La constante C_1 se determina a partir de las condiciones iniciales ($t=0$):

$$C_0 = C_1 + KM_0$$

y entonces:

$$C_1 = C_0 - KM_0$$

por lo tanto:

$$C(t) = C_0 e^{-t/\tau} + KM_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

El modelo matemático (ecuación de diferencias) se obtiene en forma recursiva, resultando ser:

$$C_{n+1} - e^{-T/\tau} C_n = K(1 - e^{-T/\tau}) M_n \quad (2.11)$$

En este punto es conveniente ilustrar mediante un ejemplo que se obtienen los mismos resultados utilizando la ecuación de diferencias 2.11 o la solución general dada por la ecuación 2.10, tomando en cuenta exclusivamente los tiempos de muestreo.

Si en la ecuación 2.10 se supone que $\tau=1$, $M_0=1$ y que $C_0=0$, la ecuación diferencial queda de la siguiente manera:

$$\frac{dC}{dt} + C = 2$$

y la solución a ésta es:

$$C(t) = 2(1 - e^{-t}) \quad (2.12)$$

De esta solución se pueden obtener los siguientes valores:

$$\begin{aligned} C(0) &= 0 \\ C(1) &= 1.264 \\ C(2) &= 1.729 \\ C(3) &= 1.900 \\ C(4) &= 1.963 \end{aligned}$$

Por otra parte, si en la ecuación 2.11, se toma un tiempo de muestreo $T=1$, las constantes quedan como sigue:

$$e^{-T/\tau} = e^{-1} = 0.368$$

$$K(1 - e^{-T/\tau}) = 2(0.632) = 1.264$$

Y sustituyendo estos valores en la ecuación 2.11 se tiene que:

$$C_{n+1} = 0.368 C_n + 1.264 M_n \quad (2.13)$$

Con la condición inicial $C_0=0$ y $M_n=1$ para $n \geq 0$, los valores de muestreo pueden ser calculados recursivamente como:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 + 1.264 = 1.264 \\ C_2 &= 0.368(1.264) + 1.264 = 1.729 \end{aligned}$$

$$C_3 = 0.368(1.729) + 1.264 = 1.900$$

$$C_4 = 0.368(1.900) + 1.264 = 1.963$$

Se puede observar que estos valores corresponden a los -- que se calcularon a partir de la solución de la ecuación diferencial dada en la ecuación 2.12.

Proceso de integración doble.

Para mostrar un ejemplo de segundo orden se considera el proceso definido por:

$$\frac{d^2 C}{dt^2} = KM \quad (2.14)$$

Cuando $t=0$, un escalón $M=M_0$ se introduce al sistema, e -- integrando dos veces se tiene:

$$\frac{d^2 C}{dt^2} = KM_0$$

$$\frac{dC}{dt} = \dot{C}(t) = KM_0 t + \dot{C}_0$$

$$C(t) = \frac{KM_0}{2} t^2 + \dot{C}_0 t + C_0$$

Donde C_0 y \dot{C}_0 son condiciones iniciales, haciendo $t=T$ se tiene:

$$\dot{C}(T) = KM_0 T + \dot{C}_0$$

$$C(T) = \frac{KM_0}{2} T^2 + \dot{C}_0 T + C_0$$

Las ecuaciones de diferencias resultantes son:

$$\dot{C}_{n+1} = \dot{C}_n + KTM_n \quad (2.15)$$

$$C_{n+1} = C_n + T \dot{C}_n + \frac{KT^2}{2} M_n \quad (2.16)$$

En este caso, la ecuación 2.16 no es adecuada ya que en general la derivada \dot{C}_n no se conoce y no se puede medir directamente, por lo que será necesario hacer un arreglo con las ecuaciones:

de la ecuación 2.16 se despeja el valor \dot{C}_n :

$$\dot{C}_n = \frac{C_{n+1} - C_n - \frac{KM_n T^2}{2}}{T} \quad (2.17)$$

este valor se sustituye en la ecuación 2.15:

$$\dot{C}_{n+1} = \frac{KM_n T^2 + C_{n+1} - C_n - \frac{KM_n T^2}{2}}{T} \quad (2.18)$$

La ecuación 2.17 puede desplazarse un lugar hacia adelante:

$$\dot{C}_{n+1} = \frac{C_{n+2} - C_{n+1} - \frac{KM_{n+1} T^2}{2}}{T} \quad (2.19)$$

Sustituyendo la ecuación 2.19 en la 2.18 se tiene:

$$C_{n+2} - C_{n+1} - \frac{KM_{n+1} T^2}{2} = \frac{KM_n T^2 + C_{n+1} - C_n - \frac{KM_n T^2}{2}}{T}$$

simplificando:

$$C_{n+2} = 2C_{n+1} + \frac{KM_n T^2}{2} - C_n + \frac{KM_{n+1} T^2}{2}$$

y desplazando un lugar hacia atrás:

$$C_{n+1} = 2C_n + \frac{KM_{n-1} T^2}{2} - C_{n-1} + \frac{KM_n T^2}{2} \quad (2.20)$$

La ecuación 2.20 muestra finalmente el modelo discreto -- del proceso de integración doble en el que solamente se requieren los valores presentes y pasados tanto de la entrada como -

de la salida.

Proceso con tiempo muerto.

En muchos procesos se presenta el fenómeno de transporte - de material de un punto a otro sin que sufra ningún cambio, Es este fenómeno se conoce como tiempo muerto o como retraso en el transporte.

De la figura 2.15 se puede obtener el modelo discreto del tiempo muerto.

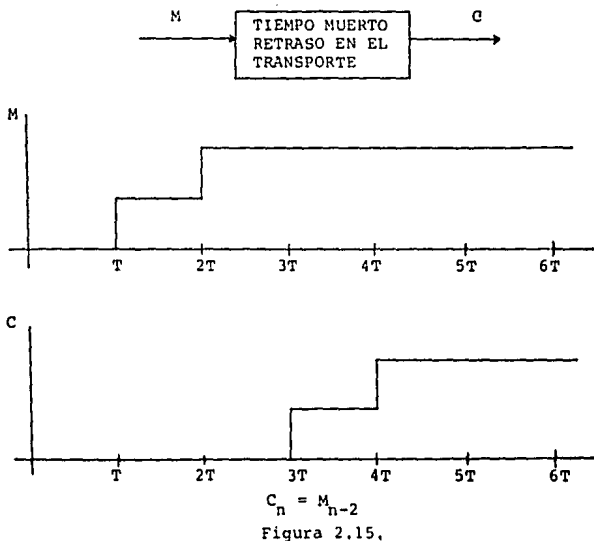


Figura 2.15.

Como se puede apreciar en la figura, la salida es idéntica a la salida sólo que retrasada por dos periodos de muestreo por lo que la ecuación de diferencias es:

$$C_n = M_{n-2}$$

Para el caso general, si D es el tiempo de muerto y $d=D/T$ (un entero), se tiene el modelo del proceso de tiempo muerto:

$$C_n = M_{n-d} \quad (2.21)$$

Otros procesos.

Los modelos discretos de otros procesos típicos pueden obtenerse de la misma forma que los anteriormente analizados. La tabla de la figura 2.16 contiene los modelos matemáticos -- discretos para varios procesos.

ECUACION DEL PROCESO

MODELO DISCRETO
(se supone que la entrada es constante
entre tiempos de muestreo)
Tiempo de muestreo = T

1: Tiempo muerto ($\neq 0$)

$$C_n = M_{n-d} \quad \text{ó} \quad C_{n+1} = M_{n-d+1} \quad \text{donde } d = \frac{D}{T} \text{ (entero)}$$

2: $\frac{dC}{dt} + C = KM$

$$C_{n+1} = C_n + K T M_n$$

3: $\tau \frac{dC}{dt} + C = KM$

$$C_{n+1} = e^{-T/\tau} C_n + K(1 - e^{-T/\tau}) M_n$$

4: $\frac{d^2C}{dt^2} = KM$

$$C_{n+1} = 2 C_n - C_{n-1} + \frac{KT^2}{2} M_n + \frac{KT^2}{2} M_{n-1}$$

5: $\tau \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{dC}{dt} = KM$

$$C_{n+1} = a_0 C_n + a_1 C_{n-1} + b_0 M_n + b_1 M_{n-1}$$

$$a_0 = 1 + e^{-T/\tau} \quad b_0 = K[T - (1 - e^{-T/\tau})]$$

$$a_1 = -e^{-T/\tau} \quad b_1 = -K(T e^{-T/\tau} - (1 - e^{-T/\tau}))$$

6: $\frac{1}{W_n} \frac{d^2C}{dt^2} + \frac{2\xi}{W_n} \frac{dC}{dt} + C = KM$

$$C_{n+1} = a_0 C_n + a_1 C_{n-1} + b_0 M_n + b_1 M_{n-1}$$

$$a_0 = e^{-P_1 T} + e^{-P_2 T}, \quad b_0 = K \left(1 + \frac{P_2 e^{-P_1 T} - P_1 e^{-P_2 T}}{P_1 - P_2} \right)$$

a) Sobre amortiguado
 $\xi > 1$

Figura 2.16

$$a_1 = -e^{-(P_1+P_2)T}$$

$$b_1 = K e^{-(P_1+P_2)T} + \frac{P_2 e^{-P_2T} - P_1 e^{-P_1T}}{P_1 - P_2}$$

Donde:

$$P_1 = W_n + W_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$P_2 = W_n - W_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

b) Criticamente amortiguado

$$\xi = 1$$

$$a_0 = 2 e^{-W_n T} \quad b_0 = K(1 - e^{-W_n T} - W_n T e^{-W_n T})$$

$$a_1 = -e^{-2W_n T}, \quad b_1 = K e^{-W_n T} (e^{-W_n T} (e^{-W_n T} + W_n T - 1))$$

c) Sub-amortiguado

$$\xi < 1$$

$$a_0 = 2 e^{-\xi W_n T} \cos W_d T$$

$$a_1 = -e^{-2\xi W_n T}$$

$$b_0 = K(1 - \frac{W_n}{W_d} e^{-\xi W_n T} \sin W_d T - e^{-\xi W_n T} \cos W_d T)$$

$$b_1 = K e^{-\xi W_n T} (e^{-W_n T} + \frac{\xi W_n}{W_d} \sin W_d T - \cos W_d T)$$

Donde:

$$W_d = W_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Figura 2.16 continuación

CAPITULO III

ANALISIS DE LOS PROCESOS A PARTIR DE SUS MODELOS MATEMATICOS.

- 3.1 Introducción.
- 3.2 Solución de las ecuaciones
diferenciales típicas.
- 3.3 Solución de las ecuaciones
de diferencias típicas.
- 3.4 Consideraciones de estabili-
dad.

ANALISIS DE LOS PROCESOS A PARTIR DE SUS MODELOS MATEMATICOS

3.1 INTRODUCCION

En este capítulo se analizan las bases matemáticas que son utilizadas para estudiar, a partir de los modelos matemáticos, el comportamiento que presentan tanto los sistemas controlados en forma continua como en forma discreta.

Como ya se ha mencionado, las ecuaciones diferenciales son la base matemática para el estudio de los sistemas en el campo continuo. Existe una gran diversidad de ecuaciones, formas y soluciones para dichas ecuaciones diferenciales, las ecuaciones que se plantean más adelante se refieren únicamente a aquellas que con mayor frecuencia se presentan al obtener el modelo del sistema, así como la solución de las ecuaciones por el método de la transformada de Laplace.

De la misma manera, se estudian las ecuaciones en diferencias y por último se plantean las consideraciones que deben ser tomadas en cuenta para analizar la estabilidad de los sistemas con base en los resultados obtenidos de las ecuaciones diferenciales o en diferencias.

3.2 SOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TIPICAS

Una ecuación diferencial es la representación matemática--

de un sistema dinámico por medio de las derivadas de sus variables. Interpretando a las derivadas como variaciones o cambios de una cantidad con respecto a otra.

Lo que se denomina derivada total:

$$\frac{dy}{dt}$$

es la relación de cambio de la variable "y" respecto a la variable "x", y lo que se llama derivada parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

es la relación de cambio de $U(x, y, \dots)$ con respecto a la variable "x", cuando todas las demás variables permanecen constantes.

Las derivadas de orden superior son interpretadas como variación de variación, como en el caso de la aceleración, la cual es en sí la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo.

De lo anterior, se puede decir que una ecuación diferencial es simplemente una igualdad en la cual intervienen variaciones o cambios, esto es, derivadas ya sea parciales o totales.

Resolver una ecuación diferencial puede ser un asunto muy fácil o sumamente complejo, de tal forma que al intentarlo existe la posibilidad de hacer suposiciones, pero se debe de

tener cuidado de que ésto no altere la representación fundamental de la situación física que se desea estudiar.

Se dice que una función:

$$y = \varphi(x)$$

es solución de la ecuación diferencial:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$$

si se calculan los valores:

$$\begin{aligned}y' &= \varphi'(x) \\y'' &= \varphi''(x) \\y^n &= \varphi^n(x)\end{aligned}$$

y se cumple que:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^n(x)) = 0$$

La solución de las ecuaciones diferenciales más comunes -- para sistemas físicos se estudia a continuación en base a ejemplos ilustrativos.

SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

Ecuaciones de primer orden.

Como ejemplo se considera la ecuación :

$$y' + P(x) = 0$$

es decir:

$$\frac{dy}{dt} + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -P(x) dx$$

$$y = e^{-\int P(x) dx + c}$$

$$y = e^{-\int P(x) dx} e^c$$

por lo que la solución general de la ecuación es:

$$y = c e^{-\int P(x) dx}$$

donde c es una constante que depende de los valores de las condiciones iniciales.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

La solución general de una ecuación diferencial de segundo orden se determina a partir de la ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial. Dependiendo de los valores de las raíces de la ecuación auxiliar, se pueden presentar los siguientes casos:

- Raíces reales repetidas
- Raíces reales distintas
- Raíces complejas (en cuyo caso resultan ser conjugadas)

Primer caso: raíces reales repetidas,

Partiendo de la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

la ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

y factorizando se obtienen las raíces:

$$(r + 2)(r + 2) = 0$$

por lo que las raíces son:

$$r_1 = r_2 = -2$$

La solución general para el caso de raíces reales repetidas es:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

por lo tanto, para el ejemplo el resultado es:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$$

En este caso, así como en los que siguen, C_1 y C_2 son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales - en la forma que se verá más adelante.

Segundo caso: raíces reales distintas.

Como ejemplo, se tiene la ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

la ecuación auxiliar es:

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

y las raíces de esta ecuación son:

$$r_1 = -3, r_2 = -2$$

la solución general para el caso de raíces reales distintas es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

para el ejemplo se obtiene:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

Tercer caso: raíces complejas.

Partiendo de la ecuación:

$$y'' + y' + y = 0$$

la ecuación auxiliar es:

$$r^2 + r + 1 = 0$$

y las raíces son:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Para el caso de raíces complejas la solución general es:

$$y = e^{\lambda x} (C_1 \cos \mu x + C_2 \operatorname{sen} \mu x)$$

donde: λ es la parte real de la raíz

μ es la parte imaginaria de la raíz

La solución del ejemplo es:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x)$$

Para el caso más general, en el que las raíces r_1, r_2, \dots, r_n son todas diferentes, las soluciones particulares de la ecuación diferencial serían:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{r_n x}$$

estas funciones son linealmente independientes, por lo que la solución general es:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace es un método operacional que puede ser utilizado para la resolución de ecuaciones diferenciales. Con esta transformada, se pueden convertir funciones senoidales, senoidales amortiguadas y exponenciales en funciones algebraicas de variable compleja, y de esta forma se pueden reemplazar operaciones como la diferenciación e integración por operaciones algebraicas en el plano complejo. En otras palabras, se puede transformar una ecuación diferencial lineal en una ecuación algebraica de una variable compleja y se puede encontrar la solución a la ecuación diferencial con el uso de una tabla de transformadas de Laplace (Anexo 1) o recurriendo a la técnica de expansión de fracciones parciales.

Una ventaja del método de la transformada de Laplace consiste en que permite utilizar técnicas gráficas para predecir el comportamiento del sistema sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. Otra ventaja es que cuando se resuelve la ecuación diferencial, se obtienen simultáneamente las componentes del régimen transitorio y del permanente.

La transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

donde:

$f(t)$: es una función de tiempo t tal que $f(t)=0$ para $t=0$

s : es una variable compleja

\mathcal{L} : es un simbolo operacional que indica que la cantidad - o expresi3n que le sigue ha de ser transformada por la integral de Laplace:

$$F(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$F(S)$: es la transformada de Laplace de $f(t)$

La transformada de Laplace de una funci3n $f(t)$ existe si - $f(t)$ es seccionalmente continua en todo el intervalo finito en el rango $t > 0$; y si la funci3n es exponencial existe si t tiende a infinito.

Ejemplos:

Obtener la transformada de Laplace de la siguiente funci3n escal3n:

$$f(t) = 0 \text{ para } t = 0$$

$$f(t) = A \text{ (constante) para } t > 0$$

La transformada de Laplace de $f(t)$ est1 dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} A e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(S) = \frac{A}{s}$$

Obtener la transformada de Laplace de la funci3n rampa:

$$f(t) = 0 \text{ para } t < 0$$

$$f(t) = At \text{ para } t \geq 0 \text{ (siendo } A \text{ una constante)}$$

La transformada est1 dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)] = A \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$F(S) = At \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} A \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$F(S) = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$F(S) = \frac{A}{s^2}$$

La tabla del Anexo I muestra una colección de transformadas de Laplace, dichas tablas pueden ser utilizadas para obtener la transformada de Laplace de una función de tiempo dada - sin necesidad de obtener la integral que define la transformada de Laplace, o para hallar la función de tiempo dada correspondiente a una transformada de Laplace dada.

La notación para la transformada inversa de Laplace es \mathcal{L}^{-1} de modo que:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(S)] = f(t)$$

Matemáticamente, $f(t)$ se obtiene de $F(S)$ por medio de la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(S) e^{st} ds \quad (t > 0)$$

La otra forma de encontrar \mathcal{L}^{-1} es agrupando la solución para utilizar las tablas de transformadas del Anexo I.

Ejemplos:

Obtener la solución de la ecuación diferencial que representa al siguiente sistema:

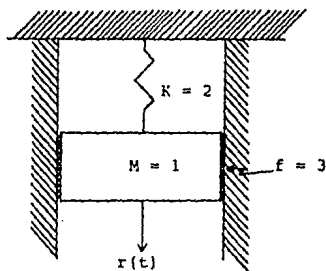


Figura 3.1

Condiciones iniciales: $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $r(t)=0$

Como se vió en el capítulo II, el modelo matemático del sistema mostrado en la figura 3.1 es:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + Kx = r(t) \quad (3.1)$$

Aplicando la transformada de Laplace a cada uno de los términos de la ecuación 3.1 según las tablas del Anexo I se tiene:

$$m \mathcal{L} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \right] = m(s^2 x(s) - s x(0) - x'(0))$$

$$f \mathcal{L} \left[\frac{dx}{dt} \right] = f(s x(s) - 1)$$

$$K \mathcal{L} [x] = k x(s)$$

$$\mathcal{L} [r(t)] = R(s)$$

sustituyendo las condiciones iniciales se tiene:

$$m \mathcal{L} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \right] = m(s^2 x(s) - s)$$

$$f \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = f(s x(s) - 1)$$

$$k \mathcal{L}[x] = k x(s)$$

$$\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$$

y sustituyendo las transformadas así obtenidas en la ecuación 3.1 se tiene:

$$m s^2 x(s) - m s + f s x(s) - f + k x(s) = R(s)$$

agrupando:

$$x(s) (ms^2 + fs + K) = ms + f + R(s)$$

de las condiciones iniciales se tiene que $R(s)=0$ ya que $r(t)=0$, por lo tanto:

$$x(s) = \frac{ms + f}{ms^2 + fs + k}$$

dividiendo ambos miembros entre m se tiene:

$$x(s) = \frac{s + f/m}{s^2 + sf/m + k/m}$$

y sustituyendo los valores de f , k y m :

$$x(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \quad (3.2)$$

El siguiente paso es aplicar la transformada inversa de Laplace para determinar la solución de la ecuación diferencial, por lo que es necesario desarrollar la expresión 3.2 en fracciones parciales:

$$X(s) = \frac{s + 3}{(s + 2)(s + 1)}$$

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} \quad (3.3)$$

Los valores de A y B son:

$$A = \left. \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} (s+2) \right]_{s=-2} = -1$$

$$B = \left. \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} (s+1) \right]_{s=-1} = 2$$

Sustituyendo A y B en 3.3 se obtiene:

$$x(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

De esta manera es posible aplicar las tablas (Anexo I) para obtener la expresión en función del tiempo que finalmente resulta ser:

$$x(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t}$$

que es la ecuación en función del tiempo que describe el comportamiento del sistema mostrado en la figura 3.1.

3.3 SOLUCION DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS

Las ecuaciones en diferencias son utilizadas en aplicaciones matemáticas en las cuales las ecuaciones involucradas no dependen de la rapidez de cambio de las variables sino de la variación finita de las mismas. De aquí que dichas ecuaciones en vez de derivadas contienen "diferencias".

Una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes tiene la forma general:

$$Y_{n+i} + A_{i-1} Y_{n+i-1} + \dots + A_2 Y_{n+2} + A_1 Y_{n+1} + A_0 Y_n = f(n)$$

en donde las A's son los coeficientes (constantes) y $f(n)$ es la llamada "función de excitación" (forcing function) o entrada del sistema. El orden de la ecuación es i , o es de i -ésimo orden.

Como se verá a continuación, el procedimiento de solución de las ecuaciones en diferencias es por completo análogo al de la solución de ecuaciones diferenciales lineales.

Utilizando los operadores, matemáticamente se define al llamado operador "hacia adelante" (forward-shifting operator) - por la siguiente expresión:

$$F Y_n = Y_{n+1}$$

$$F^2 Y_n = Y_{n+2}$$

⋮

etc

También puede definirse un operador "hacia atrás" o de re traso (backward-shifting operator):

$$B Y_n = Y_{n-1}$$

$$B^2 Y_n = Y_{n-2}$$

De donde resulta:

$$B (F Y_n) = Y_n$$

y entonces:

$$B = \frac{1}{F}$$

Sin embargo, el operador "F" es más utilizado que el operador "B", por lo que dicho operador será utilizado para la -- discusión sobre la solución de ecuaciones de diferencias.

Solución de ecuaciones en diferencias homogéneas.

Una ecuación homogénea es aquella en la que la función -- de excitación es igual a cero.

Solución de ecuaciones en diferencias de primer orden.

Como ejemplo específico se tiene la ecuación:

$$Y_{n+1} - 2 Y_n = 0$$

Utilizando el operador F:

$$F Y_n - 2 Y_n = 0$$

Factorizando:

$$(F - 2) Y_n = 0$$

De aquí se tienen dos soluciones:

$$Y_n = 0 \quad (\text{solución trivial})$$

$$F - 2 = 0$$

A esta última ecuación se le llama ecuación característica en función del operador F. La ecuación tiene una sola raíz que es:

$$r = 2$$

La solución general de las ecuaciones en diferencias de -- primer orden tiene la forma:

$$Y_n = C_1 r^n \quad (3.4)$$

donde C_1 es una constante que depende de las condiciones iniciales.

Por lo que la solución para el ejemplo es:

$$Y_n = C_1 2^n \quad (3.5)$$

Ecuaciones en diferencias de segundo orden:

La ecuación característica de las ecuaciones en diferencias de segundo orden presenta los mismos casos que para las ecuaciones diferenciales.

Primer caso: raíces reales repetidas.

Partiendo de la ecuación:

$$Y_{n+2} - 2 Y_{n+1} + Y_n = 0 \quad (3.6)$$

con el operador F :

$$F^2 Y_n - 2 F Y_n + 1 = 0$$

las raíces resultantes son:

$$r_1 = r_2 = 1$$

La solución general para el caso de raíces reales repetidas es:

$$Y_n = C_1 r_1^n + n C_2 r_2^n \quad (3.7)$$

Y para el ejemplo resulta:

$$Y_n = C_1 (1)^n + C_2 n (1)^n$$

$$Y_n = C_1 + n C_2 \quad (3.8)$$

Para comprobar que la ecuación 3.8 es efectivamente solución de la ecuación 3.6 se hace la siguiente sustitución:

de la ecuación 3.8:

$$Y_n = C_1 + C_2 n$$

por lo tanto:

$$Y_{n+1} = C_1 + C_2 (n + 1)$$

$$Y_{n+2} = C_1 + C_2 (n + 2)$$

y sustituyendo estos valores en 3.6:

$$C_1 + C_2 (n + 2) - 2[C_1 + C_2 (n + 1)] + C_1 + C_2 n = 0$$

de donde: $0 = 0$, por lo que la ecuación 3.8 es solución de la ecuación 3.6.

Segundo caso: raíces reales distintas.

Se tiene la ecuación:

$$Y_{n+2} - Y_{n+1} - 6 Y_n = 0 \quad (3.9)$$

con el operador F:

$$F^2 - F - 6 = 0$$

y la ecuación característica es:

$$F^2 - F - 6 = 0$$

de donde las raíces son:

$$r_1 = -2, \quad r_2 = 3$$

Para el caso de raíces reales distintas la solución general es:

$$Y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \quad (3.10)$$

Por la que para el ejemplo resulta:

$$Y_n = C_1 (-2)^n + C_2 (3)^n \quad (3.11)$$

La solución dada por la ecuación 3.11 puede ser comprobada por sustitución en la ecuación 3.9.

Tercer caso: raíces complejas.

Partiendo de la ecuación:

$$Y_{n+2} - 2 Y_{n+1} + 2 Y_n = 0 \quad (3.12)$$

La ecuación característica es:

$$F^2 - 2 F + 2 = 0$$

y las raíces son:

$$r_1 = 1 + i, \quad r_2 = 1 - i$$

en forma polar:

$$r_1 = r \angle \Theta = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

La solución general para este caso es de la forma:

$$Y_n = C_1 r^n \cos (n \Theta + C_2) \quad (3.13)$$

Por lo que para el ejemplo se obtiene:

$$Y_n = C_1 (\sqrt{2})^n \cos \left(\frac{\pi}{4} n + C_2 \right) \quad (3.14)$$

Ecuaciones en diferencias de orden superior a dos.

Las soluciones de ecuaciones en diferencias de orden superior a dos se obtienen como combinaciones de las de primer orden. Por ejemplo, se considera un caso en el que las raíces de la ecuación característica son:

$$r_1 = 2 \quad , \quad r_2 = 3 \quad , \quad r_3 = 3$$

la solución será, por lo tanto:

$$Y_n = C_1 2^n + C_2 3^n + n C_3 3^n$$

Consideración de las condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales son utilizadas también para evaluar las constantes asociadas con las soluciones generales.

Por ejemplo, se desea calcular el valor de la constante C_1 de la ecuación 3.5 con la condición inicial $Y_0=1$.

De la ecuación $Y_n = C_1 2^n$ (3.5)

para $n = 0$:

$$Y_0 = C_1 = 1$$

y la solución total es:

$$Y_n = 2^n$$

Otro ejemplo puede ser la ecuación 3.11 con condiciones iniciales $Y_0=0$ y $Y_1=1$.

De la ecuación: $Y_n = C_1 (-2)^n + C_2 (3)^n$ (3.11)

$$Y_0 = C_1 + C_2 = 0 \quad (3.15)$$

$$Y_1 = -2C_1 + 3C_2 = 1 \quad (3.16)$$

resolviendo simultáneamente las ecuaciones 3.15 y 3.16 y--
sustituyendo los valores en 3.5 se tiene:

$$Y_n = -\frac{1}{5} (-2)^n + \frac{1}{5} (3)^n$$

Solución de ecuaciones en diferencias no homogéneas.

La solución total de las ecuaciones en diferencias no homogéneas se obtiene de la suma de la solución homogénea (haciendo la función de excitación igual a cero) y la solución particular de la ecuación:

$$Y_T = Y_h + Y_p$$

La solución particular se obtiene asumiendo una solución - del mismo tipo o estructura que la función de excitación, y sus- tituyendo esta solución general para evaluar las constantes. La tabla mostrada en la figura 3.2 contiene las soluciones supues- tas para obtener la solución particular (K,A,B y C son constantes).

FUERZA DE EXCITACION	SOLUCION PARTICULAR SUPUESTA
K Kn Kn ² sen Kn K ⁿ	A An + B An ² + Bn + C A sen Kn + B cos Kn AK ⁿ

Figura 3.2

Para ver como es que se propone una solución supuesta y se encuentra la solución particular, la ecuación 3.19, de la cual se encontró la solución homogénea anteriormente, se escribe de la siguiente manera:

$$Y_{n+2} - Y_{n+1} - 6 Y_n = 12 \quad (3.17)$$

De la tabla de la figura 3.2 la solución particular supuesta que se elije es:

$$Y_n = A$$

de donde:

$$Y_{n+1} = Y_{n+2} = A$$

sustituyendo lo anterior en la ecuación 3.17:

$$A - A - 6A = 12$$

$$A = -2$$

que es la solución particular, por lo que sustituyendo, se obtiene la solución total ($Y_T = Y_p + Y_h$):

$$Y_n = C_1 (-2)^n + C_2 (3)^n - 2$$

Como segundo ejemplo, se tiene la ecuación:

$$Y_{n+1} - 2 Y_n = n \quad (3.18)$$

de la tabla, la solución supuesta es:

$$Y_n = An + B$$

entonces:

$$Y_{n+1} = A(n+1) + B$$

por lo tanto:

$$An + A + B - 2An - 2B = n$$

igualando coeficientes de términos semejantes:

$$A - 2A = 1 \qquad A = -1$$

$$A + B - 2B = 0 \qquad B = -1$$

por lo que la solución particular de la ecuación 3.18 es:

$$Y_n = -n - 1$$

Otro ejemplo, obtener la solución total de la ecuación:

$$Y_{n+1} - Y_n = 1 \qquad (3.19)$$

con la condición inicial $Y_0 = 0$.

La solución homogénea es:

$$Y_{n+1} - Y_n = 1$$

con el operador F:

$$F Y_n - Y_n = 0$$

$$Y_n (F - 1) = 0$$

por lo que la solución homogénea es:

$$Y_n = C_1$$

La solución particular supuesta es:

$$Y_n = A$$

de donde:

$$Y_{n+1} = A$$

substituyendo en 3.19:

$$A - A = 1$$

$$0 = 1$$

Con la suposición de esta solución particular no se llega

a un resultado congruente, por lo que el paso a seguir es multiplicar la solución propuesta por n:

$$Y_n = An$$

$$Y_{n+1} = A(n + 1)$$

sustituyendo en la ecuación 3.19:

$$An + A - An = 1$$

$$A = 1$$

Por lo que la solución total de la ecuación 3.19 es:

$$Y_n = C_1 + n$$

y de la condición inicial:

$$Y_0 = 0 = C_1$$

con lo que finalmente el resultado es:

$$Y_n = n$$

3.5 CONSIDERACIONES DE ESTABILIDAD

Como se mencionó anteriormente, en los sistemas continuos al resolver la ecuación diferencial por el método de la transformada de Laplace se llega a una expresión en función de --- variable compleja. El denominador de la expresión así obtenida se conoce como "polos del sistema", y son dichos polos los que determinan el comportamiento del sistema.

Para conocer la estabilidad de los sistemas continuos, se obtienen las raíces de los polos del sistema y se grafican en el plano complejo (σ , $i\omega$). Es decir, que en forma gráfica, si las raí

ces se localizan en los cuadrantes II y III el sistema es estable, si se encuentran en los cuadrantes I y IV es inestable y si están sobre el eje $i\omega$ es críticamente inestable. Esta distribución se muestra en la figura 3.3.

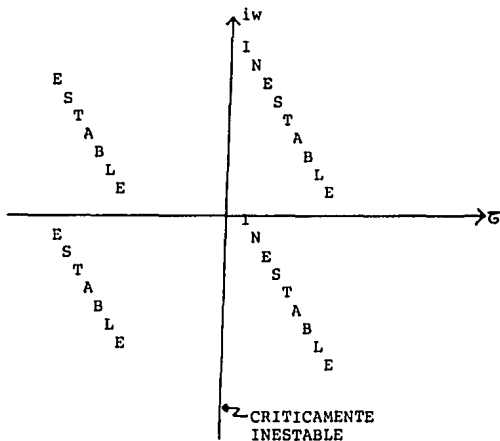


Figura 3,3

Para conocer el comportamiento del sistema en el tiempo se utilizan métodos como el del lugar de las raíces, traza polar de Nyquist o traza logarítmica Bode.

En los sistemas discretos la estabilidad del sistema se determina también a través de las raíces de la ecuación característica del sistema.

Para el caso de raíces reales, la forma general de la solución es:

$$Y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n + \dots$$

y para raíces complejas:

$$Y_n = C_1 r^n \cos(n\theta + C_2)$$

En ambos casos, si $|r| > 1$, Y_n aumenta sin límite, por lo que para que el sistema sea estable se requiere que:

$$|r| < 1$$

Utilizando los operadores B y F, cuando se está trabajando con el operador F la condición de estabilidad es $|r| < 1$ y con el operador B se requiere que $|r| > 1$.

En forma gráfica, las áreas sombreadas de la figura 3.4 - indican para cada caso la región de estabilidad.

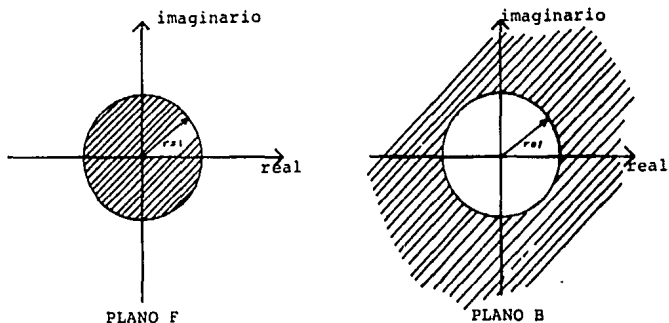


Figura 3.3

Ejemplos específicos del análisis de la estabilidad de -
los sistemas serán ilustrados en el capítulo IV.

CAPITULO IV

CONTROLADORES CONTINUOS Y DISCRETOS.

- 4.1 Introducción.
- 4.2 Funciones de transferencia.
- 4.3 Modos y acciones de control convencionales.
- 4.4 Respuesta de los sistemas discretos.

CONTROLADORES CONTINUOS Y DISCRETOS

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se estudia en forma general el concepto de función de transferencia, el cual es indispensable para analizar los modos y acciones de control tanto en el campo continuo como en el discreto, así como la técnica a seguir para obtener la respuesta de los sistemas discretos a las diversas señales de entrada o comandos.

4.2 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

En la teoría de control se utilizan con mucha frecuencia las denominadas funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de sistemas lineales invariantes en el tiempo. Aunque el concepto de función de transferencia se aplica únicamente a sistemas lineales invariantes en el tiempo, es posible aplicarlo a algunos sistemas de control no lineales.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la relación de la transformada de Laplace de la salida (función respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son iguales a cero. Es decir, que la función de transferencia de un sistema representa la relación que describe la dinámica del sistema en --

estudio.

Sea el sistema lineal invariante en el tiempo definido -- por la ecuación diferencial:

$$a_0^{(n)} y + a_1^{(n-1)} \dot{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0^{(m)} x + b_1^{(m-1)} \dot{x} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (4.1)$$

$(n \geq m)$

donde "y" es la salida del sistema y "x" es la entrada.

La función de transferencia del sistema se obtiene aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación 4.1 bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero; por lo que se obtiene:

$$\text{Func. de transferencia} = G(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_0 S^m + b_1 S^{m-1} + \dots + b_{m-1} + b_m}{a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + \dots + a_{n-1} + a_n}$$

La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, sin embargo, no -- provee ninguna información respecto a la estructura física del sistema de hecho sistemas diferentes pueden llegar a tener una misma función de transferencia.

En el campo discreto, mediante los operadores B (de atraso) y F (de adelanto), es posible también obtener funciones de transferencia, diagramas de bloques y utilizar técnicas algebraicas -- para propósitos de manipulación, ejemplos específicos serán analizados más adelante.

4.2 MODOS Y ACCIONES DE CONTROL CONVENCIONALES

Dentro del campo continuo, y como ya se mencionó, un controlador compara el valor efectivo de la salida de un proceso con el valor deseado, determina la desviación y produce una acción de control que reduce la desviación a cero o a un valor muy cercano a cero.

De acuerdo con su acción de control, los controladores automáticos se pueden clasificar en:

- Control de dos posiciones (abierto-cerrado)
- Control proporcional
- Control integral
- Control proporcional e integral
- Control proporcional y derivativo
- Control proporcional, derivativo e integral

Las características básicas de cada uno de ellos se mencionan a continuación.

Acción de dos posiciones (abierto-cerrado).

Es un sistema de control en el que el elemento accionador tiene sólo dos posiciones fijas, que en muchos casos son simplemente conectado y desconectado, por ejemplo: si la señal de salida del control es $m(t)$ y la señal de entrada es el error actuante $e(t)$, en este tipo de control, la salida $m(t)$ permanece constante en el valor máximo o mínimo, dependiendo de si la señal --

de error actuante es positiva o negativa, de modo que:

$$m(t) = M_1 \quad \text{para } e(t) > 0$$

$$m(t) = M_2 \quad \text{para } e(t) < 0$$

donde M_1 y M_2 son valores constantes.

Acción de control proporcional.

Para un control de acción proporcional, la relación entre la salida $m(t)$ y la señal de entrada, que puede ser el error actuante $e(t)$ quedaría:

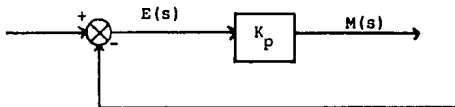
$$m(t) = K_p e(t) \quad (4.2)$$

o en términos de Laplace, su función de transferencia:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \quad (4.3)$$

donde K_p es la constante de proporcionalidad o ganancia.

El control proporcional es básicamente un amplificador con ganancia ajustable. En forma de diagrama de bloques, este control queda representado de la siguiente manera:



Acción de control integral.

En un control de acción integral, el valor de la salida del

controlador $m(t)$ varía proporcionalmente a la señal de entrada (error actuante) $e(t)$ de la siguiente manera:

$$\frac{dm(t)}{dt} = K_i e(t)$$

o bien:

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (4.4)$$

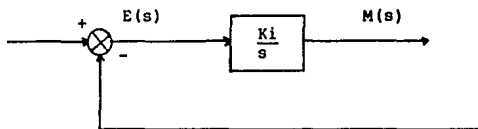
donde K_i es una constante de proporcionalidad y es regulable.

La función de transferencia del control en términos de la transformada de Laplace es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (4.5)$$

Para un error actuante igual a cero, el valor $m(t)$ se mantiene constante.

En diagrama de bloques:



Acción de control proporcional y derivativa.

La acción de control proporcional y derivativa queda definida como la suma dada por la ecuación:

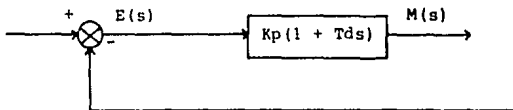
$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (4.6)$$

y la función de transferencia en términos de Laplace es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \quad (4.7)$$

donde K_p es la sensibilidad proporcional y T_d es el tiempo derivativo. La acción de control derivativa, a veces denominada de velocidad, se da cuando el valor de la salida del controlador es proporcional a la velocidad de variación de la señal de error actuante. El tiempo derivativo T_d es el intervalo de tiempo en que la acción de velocidad se adelanta al efecto de la acción proporcional.

En diagrama de bloques se tiene:



Si la función de error actuante $e(t)$ es una función rampa unitaria, por ejemplo, la salida del controlador $m(t)$ es la mostrada en la figura 4.1.

Como se puede ver en la figura 4.1, la acción de control derivativa tiene un carácter de anticipación. Sin embargo, por supuesto, la acción derivativa nunca podrá anticiparse a una acción que aún no ha sucedido.

Acción de control proporcional e integral.

La acción de control proporcional e integral queda defi-

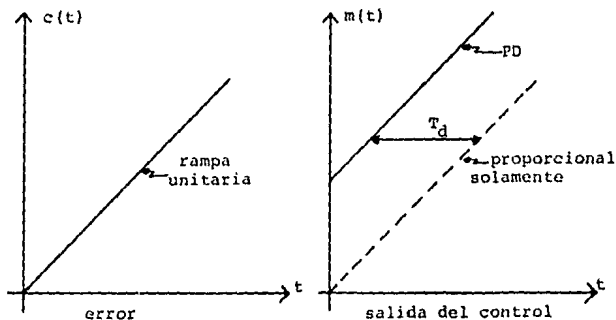


Figura 4.1.

nida por la ecuación:

$$m(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (4.8)$$

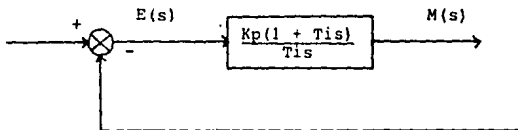
y la función de transferencia es términos de Laplace es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.9)$$

T_i es el tiempo que regula la acción de control integral mientras que una modificación de K_p afecta tanto a la parte integral como a la proporcional de la acción de control. Al inverso del tiempo integral T_i se le llama frecuencia de reposición.

La frecuencia de reposición es el número de veces por minuto en que se duplica la parte proporcional.

En diagrama de bloques:



Por ejemplo, si la señal de error actuante $e(t)$ es una -- función escalón unitario, la salida del control $m(t)$ es la mostrada en la figura 4.2.

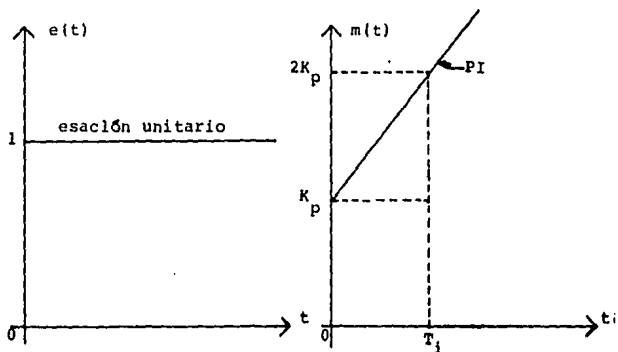


Figura 4.2.

Acción de control proporcional, derivativa e integral.

Es la acción de control obtenida de la combinación de los efectos de las acciones proporcional, derivativa e integral, como su nombre lo indica, y tiene las ventajas de cada una de las tres acciones individuales.

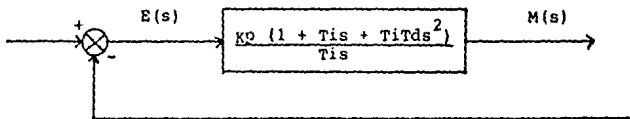
La ecuación de dicha acción de control está dada por:

$$m(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (4.10)$$

y la función de transferencia en términos de Laplace es:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (4.11)$$

en diagrama de bloques se tiene:



Por ejemplo, si $e(t)$ es una función rampa unitaria, la salida del control $m(t)$ será la mostrada en la figura 4.3.

Ahora bien, en el campo discreto, la computadora de control generalmente desarrolla las siguientes funciones:

- Obtiene el valor muestreado de la variable controlada C_n
- Calcula el error de la relación: $E_n = R_n - C_n$, donde R_n es la referencia (o valor deseado) que está almacenada

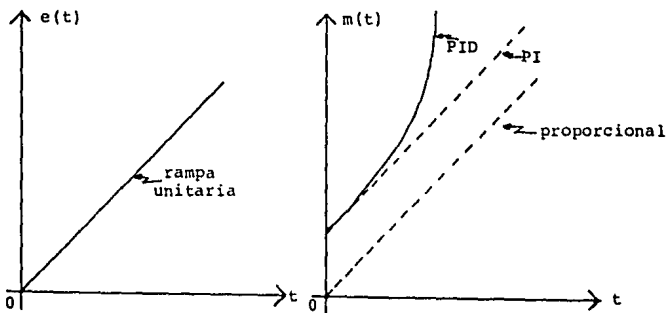


Figura 4.3

do en la computadora

- Calcula el valor adecuado de la variable manipulada M_n (que es la entrada al proceso)
- Inicia la señal de control para el elemento de control adecuado
- Continúa con la siguiente variable controlada

En todo este proceso, se tiene generalmente que el tiempo para calcular una nueva variable manipulada es considerablemente menor que el tiempo entre muestras, de tal forma que al analizar los procesos es razonable suponer que la entrada al proceso será

una serie de escalones.

Por otra parte, es indispensable proporcionarle a la computadora un algoritmo de control de tal forma que pueda calcular los valores de la variable manipulada.

Los modos de control convencionales en forma discreta son los que se mencionan a continuación:

Acción proporcional.

La corrección que se hace es de tal forma que sea proporcional al error. La ecuación de esta acción de control en forma continua es:

$$m(t) = K_p e(t)$$

La forma discreta de esta ecuación es:

$$M_n = K_p E_n$$

o en forma incremental:

$$M_n - M_{n-1} = K_p (E_n - E_{n-1}) \quad (4.12)$$

Acción integral.

La corrección se hace proporcionalmente a la integral con el tiempo del error. La forma continua de la acción integral es:

$$m(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

El área bajo la curva de error (que es continua), o sea la integral, se puede aproximar por una suma de áreas rectangulares

$$M_n = K_i \sum_{j=1}^n T E_j = K_i T \sum_{j=1}^n E_j \quad (4.13)$$

en el punto n-1 se tiene:

$$M_{n-1} = K_i T \sum_{j=0}^{n-1} E_j \quad (4.14)$$

y restando las ecuaciones 4.13 y 4.14 se tiene:

$$M_n - M_{n-1} = K_i T E_n \quad (4.15)$$

que es la aproximación continua discreta del modo integral.

Acción derivativa.

En forma continua, la acción derivativa está definida por:

$$m(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$$

y la aproximación discreta está dada por:

$$M_n = K_d \frac{E_n - E_{n-1}}{T} \quad (4.16)$$

por lo tanto:

$$M_n - M_{n-1} = \frac{K_d}{T} (E_n - 2 E_{n-1} - E_{n-2}) \quad (4.17)$$

que es la aproximación discreta de la acción derivativa, se hace notar la diferencia entre esta aproximación y el modelo exacto de la tabla de la figura 2.16.

De los modelos obtenidos se observa que los diferentes modos de control tienen la forma general:

$$M_n - M_{n-1} = K_1 E_n + K_2 E_{n-1} + K_3 E_{n-2}$$

Y al igual que los controladores automáticos (continuos), se pueden obtener los modelos para las combinaciones de los dife

rentes modos de control.

Habiendo descrito algunos modelos de las acciones de control, a continuación se analiza la forma en la que se obtienen las funciones de transferencia de algunos sistemas mediante el uso del operador B.

Como ya se mencionó, el operador B se define como:

$$B Y_n = Y_{n-1}$$

$$B^2 Y_n = Y_{n-2}$$

⋮

etc

Recordando el proceso integrador:

$$\frac{dc}{dt} = KM$$

donde c es la variable controlada y M es la variable manipulada, se asume que $KT=1$, por lo que el modelo discreto del proceso es:

$$C_{n+1} - C_n = M_n$$

Moviendo un lugar hacia la izquierda (retrasando un paso) se tiene:

$$C_n - C_{n-1} = M_{n-1}$$

y aplicando el operador B resulta:

$$C_n - BC_n = BM_n$$

$$C_n(1 - B) = BM_n$$

Y formando el cociente de la salida (C_n) a la entrada (M_n)-

o sea la función de transferencia resulta:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{B}{1 - B} \quad (4.18)$$

Ahora, para fines de ejemplificación, se supone que el algoritmo (modo) de control es de la forma:

$$M_n - M_{n-1} = 1.5 E_n - E_{n-1} \quad (\text{tipo proporcional})$$

aplicando el operador B, se obtiene la función de transferencia del controlador:

$$\begin{aligned} M_n - BM_n &= 1.5 E_n - BE_n \\ (1 - B)M_n &= (1.5 - B)E_n \\ \frac{M_n}{E_n} &= \frac{1.5 - B}{(1 - B)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

De manera que las ecuaciones 4.18 y 4.19 permiten formar un diagrama de bloques del sistema completo.

Recordando que la ecuación $E_n = R_n - C_n$ se representa como un punto de suma, el diagrama de bloques queda como se muestra en la figura 4.4.

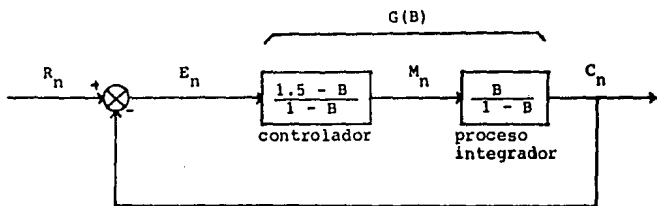


Figura 4.4

Con este diagrama de bloques, es posible obtener la función de transferencia de lazo cerrado (C_n/R_n) y de ahí pasar a la ecuación de diferencias del sistema completo.

Del diagrama de bloques:

$$R_n - C_n = E_n \quad (4.20)$$

$$\frac{1.5 - B}{1 - B} E_n = M_n \quad (4.21)$$

$$\frac{B}{1 - B} M_n = C_n \quad (4.22)$$

sustituyendo la ecuación 4.21 en la 4.22 se tiene:

$$C_n = \left(\frac{1.5 - B}{1 - B} \right) E_n \left(\frac{B}{1 - B} \right) = G(B) E_n$$

y de la ecuación 4.20:

$$\frac{C_n}{R_n} = \frac{G(B)}{1 + G(B)} = \frac{B(1.5 - B)}{1 - 0.5B} \quad (4.23)$$

La ecuación 4.23 se puede escribir de la siguiente manera:

$$(1 - 0.5B)C_n = R_n B(1.5 - B)$$

o lo que es igual:

$$C_n - B \cdot 0.5 C_n = 1.5 B R_n - R_n B^2$$

$$C_n - 0.5 C_{n-1} = 1.5 R_{n-1} - R_{n-2}$$

Y moviendo un lugar hacia la derecha (adelantando un paso) se tiene:

$$C_{n+1} - 0.5 C_n = 1.5 R_n - R_{n-1}$$

que es la ecuación de diferencias del sistema completo.

A continuación se obtienen las funciones de transferencia de algunos procesos típicos.

a) planta integradora.

En forma continua, su ecuación es:

$$\frac{dC(t)}{dt} = K M(t)$$

en ecuaciones de diferencias:

$$C_{n+1} - C_n = K T M_n$$

$$C_n - C_{n-1} = K T M_{n-1}$$

$$C_n (1 - B) = K T M_n$$

$$C_n = \frac{K T B}{1 - B} M_n$$

de donde finalmente la función de transferencia es:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{K T B}{1 - B}$$

en diagrama de bloques:



b) proceso de primer orden.

En forma continua su ecuación es:

$$\tau \frac{dC}{dt} + C = KM$$

y la ecuación de diferencias correspondiente (tabla fig.2.16)

es:

$$C_{n+1} = a C_n + b C_n$$

donde: $a = e^{-T/\tau}$; $b = K(1 - e^{-T/\tau})$

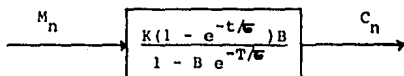
con el operador B:

$$(1 - aB)C_n = BbM_n$$

y la función de transferencia es:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{K(1 - e^{-T/\tau})B}{1 - B e^{-T/\tau}}$$

y el diagrama de bloques es:



c) proceso de doble integración.

En forma continua está dado por:

$$\frac{d^2C}{dt^2} = KM$$

y el modelo discreto (tabla fig. 2.16) es:

$$C_{n+1} = 2C_n - C_{n-1} + \frac{KT^2}{2} M_n + \frac{KT^2}{2} M_{n-1}$$

retrasando un paso:

$$C_n = 2C_{n-1} - C_{n-2} + \frac{KT^2}{2} M_{n-1} + \frac{KT^2}{2} M_{n-2}$$

y aplicando el operador B;

$$C_n = (2B - B^2)C_n + \left(\frac{KT^2B}{2} + \frac{KT^2B^2}{2} \right) M_n$$

$$C_n (1 - 2B - B^2) = \frac{KT^2 B}{2} (1 - B) M_n$$

de donde la función de transferencia es:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{(KT^2/2) B (1 - B)}{1 - 2B - B^2}$$

d) proceso de primer orden con integración en cascada.

En forma continua está definido por la ecuación:

$$\tau \frac{d^2 C}{dt^2} + \frac{dC}{dt} = KM$$

el modelo discreto (tabla fig. 2.16) es:

$$C_{n+1} = a_0 C_n + a_1 C_{n-1} + b_0 M_{n-1} + b_1 M_{n-2}$$

atrasando un paso:

$$C_n = a_0 C_{n-1} + a_1 C_{n-2} + b_0 M_{n-1} + b_1 M_{n-2}$$

aplicando el operador B:

$$C_n (1 - a_0 B - a_1 B^2) = (b_0 B - b_1 B^2) M_n$$

de donde la función de transferencia es:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{b_0 B + b_1 B^2}{1 - a_0 B - a_1 B^2}$$

4.4 RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DISCRETOS

Cualquier señal variante en el tiempo, muestreada a intervalos constantes (iguales) de tiempo, puede ser representada por una serie de números llamados secuencia muestreada a la que tam-

bién se le conoce como serie en el tiempo; por ejemplo, - si un voltaje da la temperatura de un proceso através de un -- transductor, y éste se mide cada T segundos, un conjunto de -- lecturas de voltaje graficadas contra el tiempo es una secuen- cia muestreada o serie en el tiempo. Dichas secuencias mues- treadas pueden ser expresadas en función del operador B.

La respuesta de un sistema a cambios en el comando (entra- da al sistema), se pueden obtener y resolver en forma directa - utilizando técnicas de operadores, resolviendo la ecuación de - diferencias o utilizando el método recursivo.

La habilidad para describir señales variantes en el tiempo en forma matemática, que es análoga a la manera en que la compu- tadora maneja los datos, es un ingrediente esencial para formu- lar un método conveniente para el análisis de la respuesta de - un sistema.

El muestreo discreto en el tiempo de una función continua- produce una serie de números que son todo lo que la computadora conoce de dicha función. Para comenzar, se define una muestra- unitaria tomada en el origen del tiempo (o en un tiempo "n" del muestreo) denominada S_n , tal como se muestra en la figura 4.5.

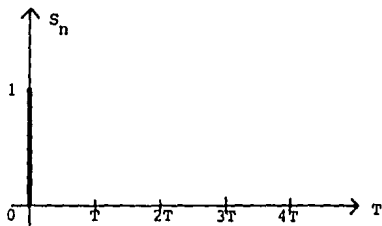


Figura 4.5 Muestra unitaria.

De aquí entonces que S_n está definida por una secuencia de números dados por:

$$S_n \begin{cases} 1 & \text{en } n=0 \\ 0 & \text{en } n \neq 0 \end{cases}$$

La muestra unitaria puede ser movida o trasladada para definir una muestra tomada por la computadora en un tiempo cualquiera T , tal como se muestra en la figura 4.6.

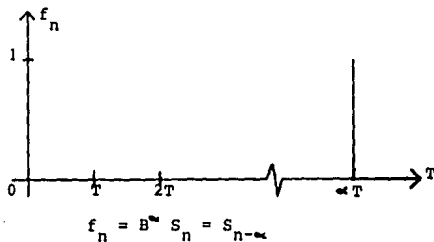


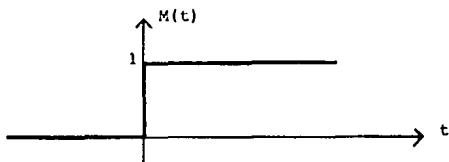
Figura 4.6

en donde:

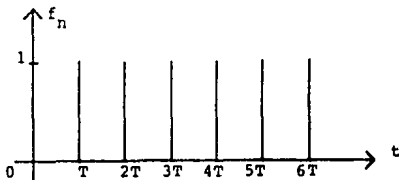
$$S_n \begin{cases} 1 & \text{en } t = nT \\ 0 & \text{en } t \neq nT \end{cases}$$

De esta forma, una muestra de magnitud A se puede expresar por medio de la muestra unitaria multiplicada A veces, y así, - superponiendo (sumando) muestras unitarias adecuadamente traspuestas y escaladas, es posible expresar cualquier función muestreada.

Por ejemplo, se considera la siguiente función escalón:



Su función muestreada queda expresada por:



$$f_n = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + \dots$$

o bien:

$$f_n = S_n + B S_n + B^2 S_n + B^3 S_n + \dots$$

o sea:

$$f_n = S_n (1 + B + B^2 + B^3 + \dots)$$

que puede ser reducido a:

$$f_n = \left(\frac{1}{1-B} \right) S_n$$

El término $\left(\frac{1}{1-B} \right) S_n$ se llama función generadora, dado -- que es una función del operador de atraso (B) que está operando en la muestra unitaria para generar una secuencia de números -- que corresponden a los valores muestreados de la función esca-- lón del ejemplo.

Analizando otro ejemplo, la función generadora de la se--- cuencia de la función pulso, se obtiene superponiendo las se--- cuencias individuales de las funciones escalón, según se mues-- tra en la figura 4.7.

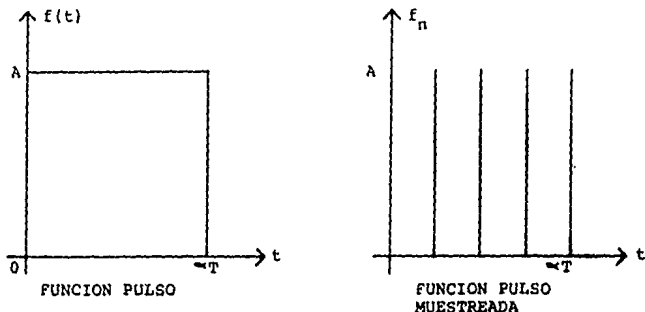


Figura 4.7.

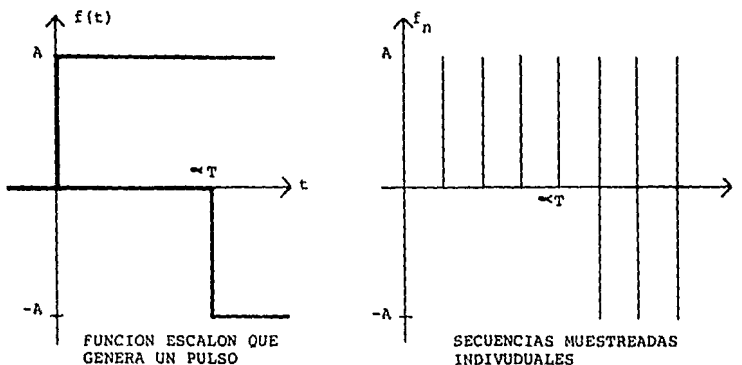


Figura 4.7 (continuación).

en donde:

$$F_n = AS_n (1 + B + B^2 + \dots) - AS_n B (1 + B + B^2 + \dots)$$

$$F_n = \left[\frac{1}{1-B} - \frac{B}{1-B} \right] AS_n$$

$$F_n = A \frac{1-B}{1-B} S_n$$

que es la función generadora de la función pulso.

Como tercer ejemplo, se tiene una función rampa con pendiente A en $t=0$.

$$f(t) \begin{cases} At & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

la función muestreada a intervalos de tiempo T es:

$$F_n = 0 TS_n + ATS_{n-1} + 2ATS_{n-2} + 3ATS_{n-3} + \dots$$

o bien:

$$F_n = AT(B + 2B^2 + 3B^3 + \dots) S_n$$

de donde la función generadora resulta ser:

$$F_n = \frac{ATB}{(1 - B)^2} S_n$$

La tabla de la figura 4.8 muestra una recopilación de las funciones generadoras típicas.

Ahora bien, la respuesta de un proceso a comandos específicos de la computadora o la respuesta de sistemas retroalimentados de control, puede ser fácilmente conocida mediante el concepto de función generadora.

Recordando la función de transferencia discreta de un sistema cualquiera:

$$\frac{O_n}{I_n} = I_n G(B) = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}}$$

resulta que la salida está dada por:

$$O_n = I_n G(B) \quad (4.23)$$

Si la naturaleza de I_n es conocida, entonces también puede determinarse su función generadora:

$$I_n = F(B) S_n \quad (4.24)$$

sustituyendo la ecuación 4.24 en la 4.23 se tiene:

$$O_n = G(B) F(B) S_n \quad (4.25)$$

La cantidad $G(B) F(B) S_n$ forma una nueva función generadora

Función Continua $f(t)$	Función discreta en función de s_n	Función Generadora	Término gen. de la secuencia
Muestra unitaria	1 para $n = 0$ 0 para $n \neq 0$	S_n	---
$f(t)$ función cualquiera con escalón	$(f_0 + f_1 B + f_2 B^2 + \dots) S_n$	$F(B) S_n$	f_n
$Kf(t)$ función cualquiera con rampa	$K(f_0 + f_1 B + f_2 B^2 + \dots) S_n$	$KF(B) S_n$	Kf_n
$\mu(t)$ Escalón unitario	$(1 + B + B^2 + \dots) S_n$	$\left(\frac{1}{1-B} \right) S_n$	1
t Rampa Unitaria	$T(B + 2B^2 + 3B^3 + \dots) S_n$	$\frac{TB}{(1-B)^2} S_n$	nT
e^{-at} Exponencial	$(1 + AB + A^2 B^2 + \dots) S_n$ donde $A = e^{-at}$	$\frac{1}{1-AB} S_n$	A^n

Figura 4.8

ra de la salida O_n . Si se expande $G(B) F(B)$ por el método de división larga, la secuencia muestreada en el tiempo se obtiene directamente.

Como ejemplo de lo anterior, se desea conocer la respuesta del error E_n del sistema mostrado en la figura 4.9 cuando la entrada es una función rampa, esto es $R_n = n$.

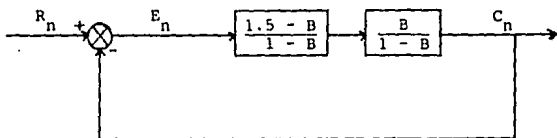


Figura 4.9.

Por algebra de bloques se determina que:

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1.5 - B}{1 - B}\right) \left(\frac{B}{1 - B}\right)}$$

$$\frac{E_n}{C_n} = \frac{(1 - B^2)}{(1 - B^2) + (1.5 - B) B}$$

de donde:

$$E_n = \frac{1 - 2B - B^2}{1 - 0.5B} R_n$$

$$E_n = \frac{(1 - B)^2}{1 - 0.5B} R_n$$

La función generadora de R_n (rampa) (tabla fig. 4.8) es:

$$R_n = \frac{B}{(1 - B)^2} S_n$$

Por lo tanto la función generadora del error es:

$$E_n = \frac{(1 - B)^2}{(1 - 0.5B)B} \left(\frac{B}{(1 - B)^2} \right) S_n$$

$$E_n = \frac{B}{1 - 0.5B} S_n$$

haciendo la división larga:

$$1 - 0.5B \overline{) \begin{array}{l} B + 0.5B^2 + 0.25B^3 + 0.125B^4 + \dots \\ B \\ \hline -B + 0.5B^2 \\ \hline 0.5B^2 \\ \hline -0.5B^2 + 0.25B^3 \\ \hline 0.25B^3 \end{array}}$$

o lo que es igual:

$$E_n = (0B^0 + B + 0.5B^2 + 0.25B^3 + 0.125B^4 + \dots) S_n$$

Los coeficientes de la serie en B son los valores correspondientes a los tiempos de muestreo, como se muestra en la figura 4.10.

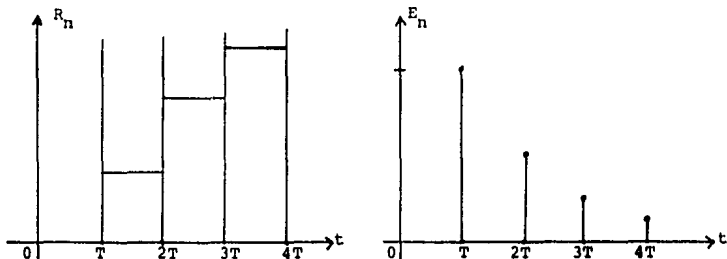


Figura 4.10.

Ahora bien, considerando una entrada escalón unitario, su función generadora es:

$$R_n = \frac{1}{1 - B} S_n$$

entonces:

$$\frac{C_n}{R_n} = \frac{\frac{(1.5 - B) B}{(1 - B)^2}}{\frac{1 + (1.5 - B)B}{(1 - B)^2}}$$

$$\frac{C_n}{R_n} = \frac{(1.5 - B) B}{(1 - B)^2 + (1.5 - B)B}$$

$$\frac{C_n}{R_n} = \frac{(1.5 - B) B}{1 - 0.5B}$$

$$C_n = \frac{(1.5 - B) B}{1 - 0.5B} R_n$$

y sustituyendo R_n :

$$C_n = \frac{B(1.5B)}{(1 - 0.5B)(1 - B)} S_n$$

En esta expresión debe hacerse un arreglo, ya que para expandir en fracciones parciales, el orden del denominador debe ser mayor que el del numerador, entonces:

$$\frac{C_n}{B} = C_{n+1} = \frac{1.5 - B}{(1 - 0.5B)(1 - B)} S_n$$

$$C_{n+1} = \frac{A_1}{1 - 0.5B} + \frac{A_2}{1 - B} S_n$$

para determinar A_1 y A_2 :

$$A_1 = \left[\frac{1.5 - B}{1 - B} \right]_{B=2} = 0.5$$

$$A_2 = \left[\frac{1.5 - B}{1 - 0.5B} \right]_{B=1} = 1$$

entonces:

$$C_{n+1} = 0.5 \left(\frac{1}{1 - 0.5B} \right) S_n + \left(\frac{1}{1 - B} \right) S_n$$

y utilizando las dos últimas columnas de la tabla de la figura 4.8 se tiene:

$$C_{n+1} = 0.5 (0.5)^n + 1$$

Para comparar la respuesta final, se puede llegar al mismo resultado por el método de división larga, tal como se hizo en el ejemplo en el que la entrada era una rampa.

Se hace notar que la tabla de la figura 4.8 puede ser usada para obtener la secuencia de la respuesta sin necesidad de hacer la división larga

Para el ejemplo en cuestión, la función generadora del error E_n se determinó como:

$$E_n = B \left(\frac{1}{1 - 0.5B} \right) S_n$$

De la tabla 4.8 se obtiene:

$$\frac{1}{1 - 0.5B} = 1 + 0.5B + 0.25B^2 + \dots$$

De esta forma, se puede observar que las tablas pueden ser

utilizadas en ambos sentidos, o sea, que una función generadora se puede transformar en una secuencia y una secuencia - se puede transformar en una función generadora.

En algunos casos se desea conocer el valor final de una secuencia sin obtener los valores intermedios, en estos casos es conveniente utilizar el teorema del valor final, el cual establece que:

$$F = \lim_{B \rightarrow 1} (1 - B)F(B) \quad (4.26)$$

donde:

$$F_n = F(B)S_n$$

Para demostrar esta última expresión, se tiene que:

$$F_n = (F_0 + F_1B + F_2B^2 + F_3B^3 + \dots)S_n = F(B)S_n$$

truncando la secuencia en $n=N$:

$$F_{n,N} = (F_0 + F_1B + \dots + F_{N-1}B^{N-1} + F_NB^N)S_n \quad (4.27)$$

truncando en $n=N-1$:

$$F_{n,N-1} = (F_0 + F_1B + \dots + F_{N-1}B^{N-1})S_n \quad (4.28)$$

Atrasando un paso la ecuación 4.28 y restandola de la 4.27:

$$F_{n,N} - BF_{n,N-1} = [(1-B)F_0 + (1-B)F_1B + (1-B)F_2B^2 + \dots + (1-B)F_{N-1}B^{N-1} + F_NB^N]S_n$$

de la ecuación anterior:

$$\lim_{B \rightarrow 1} [F_{n,N} - BF_{n,N-1}] = (F_N) S_n$$

y cuando $N \rightarrow \infty$:

$$F_N = F_\infty$$

$$F_{n,N-1} \approx F_{n,N} = F(B)S_n$$

por lo tanto:

$$\lim_{B \rightarrow 1} [F(B)S_n - BF(B)S_n] = (F_\infty - F)S_n$$

$$\lim_{B \rightarrow 1} (1 - B) F(B) = F_\infty$$

Como ejemplo de la aplicación del teorema del valor final, se desea encontrar el valor de estado estable de la respuesta descrita por la ecuación:

$$C_n = \frac{\overbrace{F(B)}^{F(B)}}{\frac{B(1.5-B)}{(1-B)(1-0.5B)}} S_n$$

aplicando el teorema se tiene:

$$C_{n \rightarrow \infty} = \lim_{B \rightarrow 1} (1 - B)F(B)$$

$$C_\infty = \left[\frac{(1-B) B (1.5-B)}{(1-B)(1-0.5B)} \right]_{B \rightarrow 1}$$

$$C_\infty = 1$$

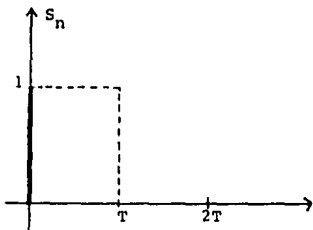
Es decir que el valor de estado estable de la ecuación es .

1.

Respuesta a un pulso unitario.

El pulso unitario tiene una función generadora igual a --

"S_n".



Si el comportamiento dinámico está dado por:

$$\frac{Y_n}{X_n} = G(B)$$

y la entrada es un pulso unitario, entonces $X_n = S_n$

$$Y_n = F(B) S_n$$

de aquí, la respuesta de un sistema a un pulso unitario es simplemente la secuencia formada por la función discreta de -- transferencia operando en la muestra unitaria S_n .

Ejemplo de cálculo: se desea controlar el paso de un fluido a través de un ducto por medio de una válvula conectada a un mo-- tor, tal como se muestra en la figura 4.18.

Las ecuaciones dinámicas del proceso son:

$$R_n - q_n = E_n$$

$$M_n = Kc E_n$$

$$\frac{dq_o}{dt} = Kv M$$

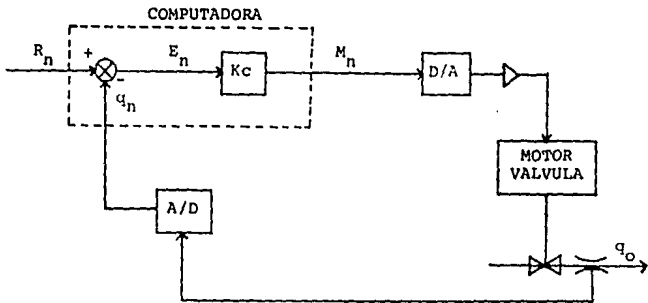
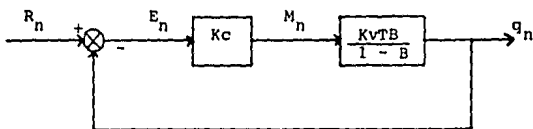


Figura 4.18.

Y la función de transferencia de la válvula es:

$$\frac{q_n}{M_n} = \frac{KvTB}{1-B}$$

de lo anterior, el diagrama de bloques del sistema es:



de donde la función de transferencia del sistema es:

$$\frac{q_n}{R_n} = \frac{Kc Kv T B}{1 - (1 - Kc Kv T)B}$$

y la ecuación característica es:

$$1 - (1 - Kc Kv T)B = 0$$

por estar trabajando con el operador B, la condición de -
estabilidad es que $|r| > 1$, por lo que:

$$\left| \frac{1}{1 - Kc Kv T} \right| > 1$$

$$|1 - Kc Kv T| < 1$$

o lo que es igual:

$$0 < Kc Kv T < 2$$

Ahora bien, asumiendo una entrada escalón unitario:

$$R_n = \frac{1}{1 - B} S_n$$

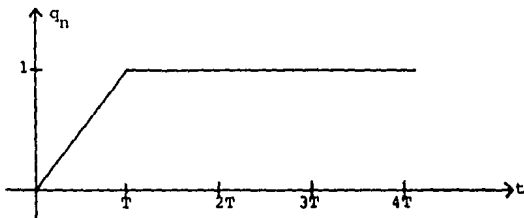
se desea conocer la respuesta en los casos:

a) si $Kc Kv T = 1$

$$q_n = \left(\frac{1}{1 - B} \right) B S_n$$

$$q_n = \frac{B}{1 - B} S_n = (B + B^2 + B^3 + \dots) S_n$$

de donde:

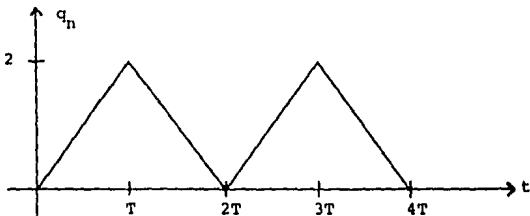


b) si $K_c K_v T = 2$ (limite de estabilidad)

$$q_n = \left(\frac{1}{1-B} \right) \left(\frac{2B}{1+B} \right) S_n$$

$$q_n = \frac{2B}{1-B} S_n = (0B^2 + 2B + 0B^2 + 2B^3 + 0B^4 + \dots) S_n$$

de donde:



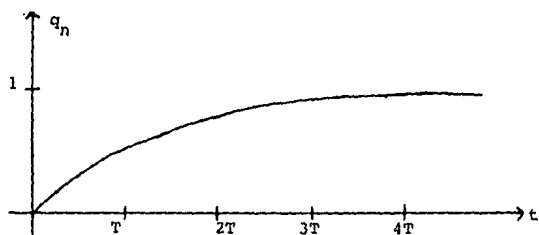
c) si $K_c K_v T = 0.5$

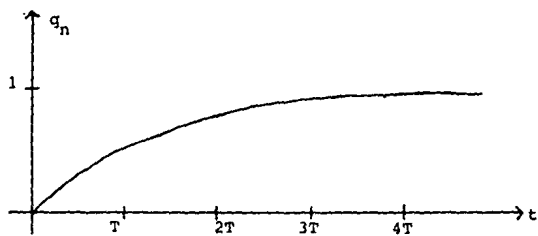
$$q_n = \left(\frac{1}{1-B} \right) \left(\frac{0.5B}{1-0.5B} \right) S_n$$

$$q_n = \frac{0.5B}{1-1.5B+0.5B^2} S_n$$

$$q_n = (0.5B + 0.7B^2 + 0.875B^3 + 0.9374B^4 + \dots) S_n$$

de donde:





CAPITULO V

DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES Y FORMULACION DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL.

- 5.1 Introducción.
- 5.2 Métodos para el diseño de controladores digitales.
- 5.3 Algoritmos de control para una relación variable de referencia-variable controlada deseada.
- 5.4 Algoritmos de control para relaciones señal de error-señales de referencia deseadas.

DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES Y FORMULACION DE LOS ALGORITMOS DE CONTROL

5.1 INTRODUCCION

Se mencionarán dos métodos para el diseño de un controlador digital y dos caminos alternativos para la formulación de los algoritmos de control a programarse en dicho control digital.

5.2 METODOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

El primero de ellos consiste en utilizar la aproximación discreta de los controladores continuos, tal como se mencionó en el capítulo IV.

Por ejemplo, el control proporcional, derivativo e integral que incluye los tres efectos, y que tiene la forma general:

$$M_n - M_{n-1} = K_1 E_n + K_2 E_{n-1} + K_3 E_{n-2}$$

en donde:

$$K_1 = K_p + K_i T + \frac{K_d}{T}$$

$$K_2 = -\left(K_p + \frac{2K_d}{T}\right)$$

$$K_3 = \frac{K_d}{T}$$

K_p , K_d y K_i son las constantes de proporcional, derivativa e integral, respectivamente, y T es el tiempo de muestreo.

El problema en el diseño de este tipo de controladores con

siste en encontrar el ajuste apropiado de las constantes - (parámetros) del controlador, o sea K_1 , K_2 y K_3 , de tal manera que el sistema de control se comporte en forma adecuada.

La mayor parte de las técnicas de ajuste de parámetros requiere de un conocimiento adecuado del modelo matemático, por lo menos aproximado, del proceso de control. Cuando dicho modelo es conocido, las técnicas aplicables van desde procedimientos empíricos hasta complejas técnicas de optimización.

El otro método para el diseño de controladores digitales - consiste en obtener el algoritmo de control necesario para lograr un cierto objetivo de entrada-salida en el sistema de control. Para poder efectuar ésto, es esencial un conocimiento adecuado del proceso a controlar, de tal manera que sea posible formular un modelo del proceso.

Analizando las formas bajo las cuales se obtiene conocimiento de los procesos, éstos se pueden clasificar en:

- En el caso de procesos simples, las leyes que gobiernan el proceso se pueden analizar, y a través del análisis se puede formular el modelo matemático.

- En muchos casos son difíciles de analizar desde un punto de vista matemático, pero su respuesta a cambios es relativamente simple. En este caso se selecciona racionalmente una función de transferencia basada en datos de entrada-salida.

- En otros procesos, la complejidad se presenta no sólo --

en su análisis matemático sino en su respuesta, que generalmente se encuentra contaminada por ruido y disturbios. En este caso se utilizan técnicas estadísticas para obtener un conocimiento aproximado del modelo del proceso.

Como ya se mencionó, el objetivo es obtener un controlador que permita una respuesta de lazo cerrado adecuada. La figura 5.1 muestra un sistema de control de lazo cerrado con retroalimentación unitaria.

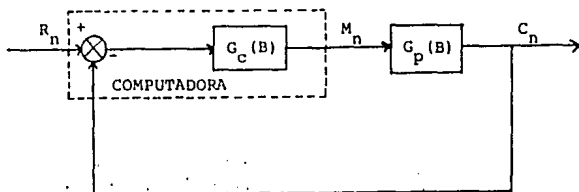


Figura 5.1

En donde la función de transferencia

$$G_p(B) = \frac{C_n}{M_n}$$

debe ser conocida.

La forma en la que la computadora implementa el control es:

- 1) Muestra y convierte a "palabra" digital la variable C_n
- 2) Formula el error con C_n y el comando de entrada R_n ;

$$E_n = R_n - C_n$$

3) Mediante una subrutina resuelve el algoritmo de control en forma recursiva. Este algoritmo de control se obtiene de la función de transferencia del controlador:

$$\frac{M_n}{E_n} = G(B)$$

Por ejemplo; si $G(B) = \frac{(1-d)B}{1-dB}$

entonces $M_n = d M_{n-1} + (1-d) E_{n-1}$ sería el algoritmo de control.

4) Convierte la nueva manipulación para presentarla al proceso.

Es conveniente mencionar de nuevo que el tiempo invertido en todo el proceso descrito, debe ser insignificante en relación al tiempo de muestreo, para que el hecho en que se basa la teoría de los operadores B y F se cumpla (este consiste en que el proceso debe recibir una manipulación constituida por escalones de duración igual al tiempo de muestreo).

5.3 ALGORITMOS DE CONTROL PARA UNA RELACION VARIABLE DE REFERENCIA-VARIABLE CONTROLADA DESEADA

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control mostrado en la figura 5.1 es:

$$\frac{C_n}{R_n} = \frac{G_c(B) G_p(B)}{1 + G_c(B) G_p(B)} = G_d(B) \quad (5.1)$$

en donde $G_d(B)$ es la función de transferencia de lazo cerrado deseada para cambios en la señal de referencia.

Manipulando la ecuación 5.1 se puede obtener la función de transferencia del controlador:

$$\frac{M_n}{E_n} = G_c(B) = \frac{G_d(B)}{G_p(B) (1 - G_d(B))} \quad (5.2)$$

La ecuación 5.2 proporciona una relación matemática que permite encontrar la función de transferencia del controlador cuando se conoce la función de transferencia del proceso ($G_p(B)$) y la función de transferencia de lazo cerrado deseada ($G_d(B)$).

Se debe tener cuidado en no tratar de exigir demasiado respecto a la función de transferencia de lazo cerrado deseada. Por ejemplo, si en un proceso integrador cuya ecuación diferencial es:

$$\frac{dC}{dt} = K_p M$$

y su función de transferencia discreta es:

$$\frac{C_n}{M_n} = G_p(B) = \frac{K_p TB}{1 - B}$$

se exige que dicha función de transferencia de lazo cerrado sea:

$$G_d(B) = \frac{C_n}{R_n} = 1$$

esto implica que la salida sea siempre igual a la entrada - por lo que el controlador requerido sería:

$$G_c(B) = \frac{G_d(B)}{G_p(B) (1 - G_d(B))}$$

$$G_c(B) = \frac{1}{\frac{K_p T B}{1 - B} (1 - 1)} = \frac{1}{0} = \infty$$

El resultado obtenido muestra claramente un controlador que no es físicamente realizable, pues se requeriría de una manipulación infinita.

En base a este resultado, se debe ceder un poco en el requisito, por ejemplo se podría pedir que la respuesta iguale al comando un periodo de muestreo después, es decir:

$$C_{n+1} = R_n$$

de esta forma:

$$\frac{C_n}{R_n} = B = G_d(B)$$

por lo que el controlador requerido es:

$$G_c(B) = \frac{B}{\frac{K_p T B}{1 - B} (1 - B)} = \frac{1}{K_p T}$$

y el algoritmo de control es:

$$M_n = \frac{1}{K_p T} E_n$$

De esta forma, un simple controlador proporcional con la ganancia ajustada al valor apropiado deberá lograr el objetivo deseado.

El siguiente ejemplo muestra el procedimiento para obtener el algoritmo de control en base a lo anteriormente expuesto.

Se desea diseñar un algoritmo de control para un sistema de primer orden descrito por la ecuación diferencial:

$$T_p \frac{dC}{dt} + C = K_p M$$

Con un tiempo de muestreo T tal que: $C_{n+1} = R_n$, es decir - que la salida esté un paso atrasada con respecto a la entrada, - dicho de otra manera, que la salida sea igual a la entrada después de un tiempo de muestreo.

La función de transferencia de la planta es:

$$G_p(B) = \frac{C_n}{M_n} = \frac{K_p (1 - dB)}{1 - dB}$$

en donde : $d = e^{-T/T_p}$

de las restricciones se tiene que:

$$\frac{C_n}{R_n} = G_d(B) = B$$

así:

$$\frac{M_n}{E_n} = G_c(B) = \frac{B}{\frac{K_p (1 - dB)}{1 - dB} (1 - B)}$$

$$\frac{M_n}{E_n} = \frac{1 - dB}{K_p (1 - d) (1 - B)}$$

por lo que el algoritmo de control se obtiene de:

$$K_p (1 - d) (1 - B) M_n = (1 - dB) E_n$$

y el algoritmo de control buscado es:

$$M_n - M_{n-1} = \frac{1}{K_p (1 - d)} (E_n - E_{n-1}d)$$

o bien:

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1}{K_p (1 - d)} (E_n - E_{n-1}d)$$

5.4 ALGORITMOS DE CONTROL PARA RELACIONES DE SEÑAL DE ERROR-SEÑALES DE REFERENCIA DESEADAS

De la figura 5.1, el error puede expresarse como:

$$E_n = R_n - C_n \quad (5.3)$$

y la función de lazo abierto es:

$$C_n = G_c(B) G_p(B) E_n \quad (5.4)$$

sustituyendo la ecuación 5.3 en la 5.4 y reorganizando:

$$\frac{E_n}{R_n} = \frac{1}{1 + G_c(B) G_p(B)} = G_e(B)$$

$G_e(B)$ es la función de transferencia deseada de transferencia de lazo cerrado que relaciona el error con la señal de referencia.

Despejando la función del controlador se tiene:

$$G_c(B) = \frac{1 - G_e(B)}{G_p(B) G_e(B)}$$

En la selección de $G_e(B)$ se debe tener en cuenta:

- Que pedir que $E_n = 0$ no es físicamente realizable

- Que el valor del error en estado estable se puede encontrar utilizando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{B \rightarrow 1} (1 - B) G_e(B) R_n$$

Esta última ecuación puede ser muy útil para llegar a obtener una $G_e(B)$ apropiada.

Si por ejemplo, se desea diseñar un algoritmo de control -- que lleve a un proceso a seguir un comando rampa con un error de estado estable igual a cero, lo más pronto posible, dicho algoritmo de control se obtiene de la siguiente manera:

la función del proceso es $G_p(B)$ y la del comando es:

$$R_n = A(nT) = \frac{ATB}{(1 - B)^2} S_n$$

una secuencia del error podría ser:

$$E_n = (0B^0 + ATB + 0B^2 + \dots) S_n$$

por lo tanto:

$$E_n = ATB S_n = G_e(B) S_n$$

sustituyendo R_n y reorganizando:

$$\frac{E_n}{R_n} = G_e(B) = (1 - B)^2$$

por lo tanto:

$$G_c(B) = \frac{1 - (1 - B)^2}{G_p(B) (1 - B)^2} = \frac{B(2 - B)}{G_p(B) (1 - B)^2}$$

Que es el algoritmo buscado en función de una función de proceso $G_p(B)$ cualquiera.

La figura 5.2 muestra un diagrama de bloques de un sistema de control en el que se puede observar la señal de perturbación:

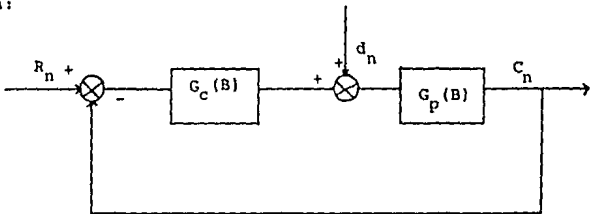


Figura 5.2.

Un objetivo común de los sistemas de control regulatorios es mantener la variable controlada en un nivel deseado a pesar de los disturbios que afectan al proceso.

En el siguiente ejemplo, se supone que las perturbaciones entran al proceso en forma de cambios de escalón, que ocurren en los tiempos de muestreo. Esto no es cierto en un caso real pero es una buena aproximación si la razón de muestreo es mayor que la razón de cambio de la perturbación.

Si se considera por un momento, para fines de análisis, - que $R_n = 0$, el diagrama de bloques de la figura 5.2 queda tal como se muestra en la figura 5.3.

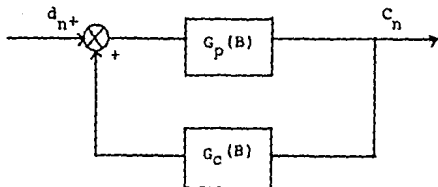


Figura 5.3.

de donde la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C_n}{d_n} = \frac{G_p(B)}{1 + G_c(B)G_p(B)} = G_f(B)$$

$G_f(B)$ es la función de transferencia deseada entre la perturbación y la variable controlada, por lo tanto:

$$G_c(B) = \frac{G_p(B) - G_f(B)}{G_p(B) G_f(B)} \quad (5.5)$$

Para utilizar esta relación, es necesario considerar una secuencia de salida aceptable, y a partir de ésta, obtener la $G_f(B)$ más adecuada.

Por ejemplo, se tiene un proceso de primer orden, cuya función de transferencia discreta es:

$$\frac{C_n}{M_n} = \frac{K_p (1 - d_p) B}{1 - d_p B} = G_p(B)$$

y la planta está sujeta a perturbaciones periódicas de tipo escalón, que pueden ser representadas en forma aproximada por:

$$d_n = \frac{D}{1 - B} S_n$$

Se desea diseñar un algoritmo de control que minimice la desviación de la planta de su condición de equilibrio.

Lo mejor que puede esperarse es que:

$$C_n = (0 B^0 + A B + 0 B^2 + \dots) S_n$$

la desviación A está determinada por el comportamiento de la planta ya que la perturbación debe ser percibida primero por ésta y después, debido al cambio producido, el detector de error nota la diferencia y principia la acción de control correspondiente de la siguiente manera:

$$C_n = \frac{K_p (1 - d_p) B}{1 - d_p B} \frac{D}{1 - B} S_n$$

$$C_n = K_p (1 - d_p) D (B + (1 + d_p)B^2 + \dots) S_n$$

por lo tanto:

$$A = K_p (1 - d_p) D$$

de esta forma:

$$G_f(B) = \frac{C_n}{d_n} = \frac{A B S_n}{\frac{D}{1 - B} S_n} = K_p (1 - d_p) B (1 - B)$$

Esta última ecuación representa la función deseada, por lo que, de la ecuación 5.5, la función de transferencia del controlador es:

$$G_c(B) = \frac{\frac{K_p (1 - d_p) B}{1 - d_p B} - (K_p (1 - d_p) B (1 - B))}{\frac{K_p (1 - d_p) B}{1 - d_p B} \quad K_p (1 - d_p) B (1 - B)}$$

simplificando:

$$G_c(B) = \frac{(1 + d_p) - d_p B}{K_p (1 - d_p) (1 - B)}$$

de donde:

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1 + d_p}{K_p (1 - d_p)} E_n - \frac{d_p}{K_p (1 - d_p)} E_{n-1}$$

que finalmente es el algoritmo de control para la relación deseada.

CONCLUSIONES

El control digital o control por computadora es hoy en día una herramienta de vital importancia en la industria, ya que presenta grandes ventajas sobre el control analógico o control continuo. Dichas ventajas pueden resumirse en:

- Los controles digitales pueden realizar complejos cálculos con exactitud constante a alta velocidad. Las computadoras digitales pueden realizar los cálculos hasta cualquier grado de exactitud deseado, con un incremento de costo relativamente pequeño. En cambio, el costo de las computadoras analógicas aumenta rápidamente al hacerlo la complejidad de los cálculos, si es que se desea mantener una exactitud constante.

- Los controles digitales son extremadamente versátiles. Simplemente colocando un nuevo programa o algoritmo de control se pueden cambiar totalmente las operaciones a efectuar. Esta característica es particularmente importante si el sistema de control ha de recibir información operativa o instrucciones de un centro de cómputo, en donde se realizan estudios de optimización y análisis económicos de los procesos.

Como se ha podido apreciar, los operadores "B" y "f" son elementos que facilitan en gran medida el análisis y estudio de los sistemas controlados por computadora, especialmente si se compara su complejidad con la de la transformada Z. Aunque si bien es cierto, la transformada Z es una herramienta de utilización más general y adecuada para todos los sistemas discretos,

los operadores "B" y "F" son de gran ayuda para simplificar -- los cálculos y operaciones en los casos que son aplicables. De esta manera, puede decirse que cuando el sistema lo permite, es preferible analizarlo por medio de dichos operadores.

Por otra parte, la implementación del control por computadora es el primer paso en una industria para la automatización completa del proceso, la cual, en la actualidad y como se ha de mostrado en los países industrializados, es la base de partida para obtener incrementos sustanciales en la productividad y calidad, disminución de desperdicios y en general para mejorar -- las características de los productos.

ANEXO I
Pares de transformadas de Laplace

$f(t)$	$F(s)$
impulso unitario $\delta(t)$	1
escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\text{sen } wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\text{cos } wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$t^n \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} \left(1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt})\right)$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
$e^{-at} \text{ sen } wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
$e^{-at} \text{ cos } wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

ANEXO I continuación

$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2 (s + a)}$
$\frac{w_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta w_n t} \operatorname{sen} w_n \sqrt{1 - \zeta^2} t$	$\frac{w_n^2}{s^2 + 2 \zeta w_n s + w_n^2}$
$\frac{-1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta w_n t} \operatorname{sen}(w_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2 \zeta w_n s + w_n^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta w_n t} \operatorname{sen}(w_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{w_n^2}{s(s^2 + 2 \zeta w_n s + w_n^2)}$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- ECUACIONES DE DIFERENCIAS - Apuntes
Departamento de Física y Matemáticas
ULSA

- 2.- INGENIERIA DE CONTROL MODERNA
Katsuhiko Ogata
Prentice Hall

- 3.- INTEGRATED CONTROL, BUILDING FOR THE FUTURE
Production Engineering, Agosto 1985
pp 46-50

- 4.- CONTROL DIGITAL - Apuntes
José de Jesús Rodríguez y Miguel Pérez
I.T.E.S.M.

- 5.- SUPERVISORY CONTROL OF A PROCESS LINE
Technical paper, IEEE
Rubber and plastics conference April 2/3, 1984
C. W. Bardwell Jones
pp 17-21

- 6.- ESTUDIO EXPERIMENTAL DE CONTROL ANTEALIMENTADO
IMPLEMENTADO EN UNA MICROCOMPUTADORA
Jorge Flores Calleja
Tesis de Maestría I.T.E.S.M.

- 7.- TEORIA DEL CONTROL
Albert B. Bishop
Academic Press

- 8.- TEORIA DEL CONTROL
Pierre Fourre
North-Holland
- 9.- TEORIA DEL CONTROL
Charlotte Striebel
Springer-Verlag
- 10.- CALCULUS OF FINITE DIFFERENCES AND DIFFERENCE EQUATIONS
Murray S. Spiegel
Mc. Graw Hill
- 11.- SISTEMAS AUTOMATICOS DE CONTROL
Richard C. Dorf
Fondo Educativo Interamericano