UNIVERSIDAD ANAHUAC

Vince In Bono Malum

ESCUELA DE CONTADURIA Y ADMINISTRACION
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

MATEMATICAS APLICADAS A ADMINISTRACION DE EMPRESAS

SEMINARIO DE INVESTIGACION

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN ADMINISTRACION

P R E S E N T A

~~MARIA BARROSO DIAZ~~

Director del Seminario

ING. ENRIQUE OMAÑA

MEXIO **1987**

INDICE

CAPITULO V

CONJUNTOS ORDENADOS Y ANALISIS COMBINATORIO

CAPITULO IX

LOGARITMOS

PROLOGO

Toda empresa requiere optimizar y racionalizar sus recursos, y en la medida en que ésta esté mejor administrada, tendrá mayores posibilidades de éxito. Entre las técnicas específicas de la Administración que son escenciales para el profesional que presta sus servicios en este tipo de instituciones figuran las Matemáticas, las cuáles, constituyen una excelente herramienta para medir, pronosticar y planificar el aprovechamiento de dichos recursos.

Ahora bien, cualquier entidad administrativa requiere también, tanto de personas capacitadas para tomar decisiones como de profesionales aptos para plantear al ejecutivo las opciones óptimas. Si la información es planteada de manera exacta y sistemática, valiéndose para ello de herramientas matemáticas, será fácilmente utilizable para tomar una decisión así como para pronosticar el futuro más acertadamente que si el administrador se basa exclusivamente en la supuesta experiencia.

Son los argumentos anteriores el motivo fundamental para realizar un estudio de las Matemáticas aplicadas a la Administración de Empresas.

El objetivo de este trabajo es proporcionar al alumno de ciencias administrativas, de una manera sencilla y clara, los elementos matemáticos escenciales y su aplicación directa a la Administración de Empresas en el planteamiento, resolución e interpretación de los problemas que en ellas se presentan.

Por último, deseo agradecer el apoyo, la colaboración y el interés brindado por el Ing. Enrique Omaña, Coordinador Académico de la Universidad Anáhuac, para realizar el presente estudio. Espero que el mismo sea de alguna manera una contribución para aquellos que deseen iniciar o ampliar sus conocimientos en relación a las Matemáticas y la Administración.

INTRODUCCION

El desarrollo de la Ciencia Matemática ha provocado el que el uso de ésta dentro de la Administración de Empresas, no sea contemplado como un requisito sino como una necesidad imperiosa; por tal motivo, es imprescindible el desarrollar textos dentro de la Escuela de Administración y Contaduría de la Universidad Anáhuac, que se ajusten a los programas de estudios de la misma y que mediante ejemplos específicos resalten la aplicación de los temas, sin tener que recurrir a un sinnúmero de fuentes de información. El presente estudio, tiene como objetivo primordial el empezar a cumplir con tales fines.

El contenido de este trabajo se divide en capítulos que abarcan los conceptos básicos de Matemáticas; cada uno de ellos comienza con las definiciones y en su caso, principios y teoremas correspondientes. A continuación, figura una colección de problemas resueltos y otra de problemas propuestos; ambos han sido formulados de manera que proporcionen una visión clara de la aplicación de cada uno de los conceptos explicados a la Administración de Empresas.

Los capítulos que conforman el estudio corresponden a los temas incluidos en el Programa de Estudios elaborado por la Universidad Nacional Autónoma de México para el curso de Matemáticas Básicas en la carrera de Administración de Empresas, y son los siguientes :

El capítulo I especifica los objetivos perseguidos, la hipótesis propuesta y los tipos de investigación a realizar.

En el capítulo II, se destaca la importancia que tienen las Matemáticas en el análisis y solución de la problemática que se presenta en la Administración de Empresas y se discuten algunos de los problemas comunes en la docencia de dicha materia.

El capítulo III, presenta los principios fundamentales del álgebra, incluyendo el leguaje y teoremas de la misma, así como las operaciones algebráicas y los casos de productos notables y factorización.

En el capítulo IV, se desarrolla el tema de álgebra de conjuntos, el cuál comprende las relaciones y operaciones entre conjuntos, los subconjuntos, el uso de diagramas y las aplicaciones de esta teoría en la obtención, análisis y evaluación de información.

El capítulo V, explica el análisis combinatorio, fundamentándose en los conceptos de conjuntos ordenados.

El capítulo VI, desarrolla la teoría fundamental de la probabilidad, incluyendo la probabilidad simple y la conjunta.

El capítulo VII, define las funciones lineales y su representación, así como los conceptos correspondientes a la recta y a los sistemas de ecuaciones lineales. Todos los conceptos anteriores son aplicados en el capítulo VIII, en el cuál se enseña el planteamiento, solución e interpretación de modelos matemáticos y de la programación lineal, destacando la importancia que tienen éstos dentro de la Administración.

En los capítulos IX, X y XI se desarrollan los temas de logaritmos, progresiones y matrices, y por último se presentan las conclusiones derivadas del presente estudio.

CAPITULO I

PLANEACION DE LA INVESTIGACION

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar y desarrollar los principios matemáticos indispensables para el planteamiento, resolución e interpretación de la problemática que se presenta en la Administración de Empresas.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Establecer la importancia que las Matemáticas han adquirido dentro del campo de la Administración.
- Analizar la teoría de conjuntos, sus conceptos y aplicaciones, destacando la importancia que tiene esta teoría en la obtención, análisis y evaluación de información para fundamentar decisiones.
- Conceptualizar el análisis combinatorio como fundamento del estudio de la probabilidad, mostrando mediante ejemplos específicos el campo de acción que puede llegar a tener ésta última.
- Desarrollar analítica y gráficamente los conceptos de funciones lineales y de ecuaciones e inecuaciones, estableciendo su utilidad para expresar las interrelaciones entre los elementos de un fenómeno particular bajo estudio.
- Plantear la resolución e interpretación de modelos matemáticos de utilidad en la Administración de Empresas tales como: punto de equilibrio de la oferta y la demanda y punto de equilibrio de las ventas y los gastos.
- Conceptualizar el método gráfico y la trascendencia práctica de la regresión lineal simple y la programación lineal.
- Definir los conceptos de logaritmos, así como explicar las ecuaciones exponenciales.
- Establecer los principios de las progresiones aritméticas y geométricas y la resolución de las mismas.
- Introducir los conceptos básicos del cálculo matricial.
- Crear y resolver ejercicios que muestren la aplicación de los temas planteados en el presente estudio dentro de la Administración.

1.2 PLANTEO DEL PROBLEMA

¿ Son las Matemáticas, realmente una herramienta útil para el planteamiento, resolución e interpretación de problemas administrativos que se presentan en las organizaciones en la actualidad ?

1.3 HIPOTESIS

Si se cuenta con los conocimientos sobre los métodos y herramientas básicas de la ciencia Matemática, es posible lograr un mejor planteamiento, resolución e interpretación de los problemas administrativos, así como alcanzar una mayor eficiencia en el planteamiento del proceso de toma de decisiones, evitando el apoyarse en la experiencia y apreciación personal exclusivamente.

1.3.1 VARIABLE DEPENDIENTE

Un mejor planteamiento, resolución e interpretación de los problemas administrativos y una mayor eficiencia en el planteamineto del proceso de toma de decisiones, evitando el apoyo exclusivo en la experiencia y apreciación personal.

1.3.2 VARIABLE INDEPENDIENTE

El conocimiento de los métodos y herramientas básicas de la ciencia Matemática.

1.4 DISEÑO DE LA PRUEBA

1.4.1 INVESTIGACION DOCUMENTAL

Para efectos del desarrollo de este estudio, se recurrirá como fuentes de investigación documental a las siguientes bibliotecas :

+ Biblioteca Universidad Anáhuac.
+ Biblioteca Instituto Tecnológico Autómomo de México.
+ Biblioteca Universidad Iberoamericana.
+ Biblioteca Tecnológico de Monterrey.

1.4.2 INVESTIGACION DE CAMPO

La parte correspondiente a la investigación de campo, consistirá en la creación y desarrollo de ejercicios para la aplicación práctica de cada uno de los temas planteados a lo largo del presente estudio, dentro del campo específico de la Administración.

CAPITULO II

LAS MATEMATICAS APLICADAS A LA ADMINISTRACION

2.1 LAS MATEMATICAS

Desde el inicio de la historia escrita, los avances científicos y culturales han dependido del uso de los "símbolos". El hombre primitivo descubrió que las ideas se desarrollan y comunican mejor por medio del lenguaje hablado y escrito, es decir a través del uso de símbolos que representan las imágenes mentales. En la medida en que se avanza en el conocimiento de cualquier área, dichas imágenes mentales se hacen más complejas.

Cuando los conceptos a que se refieren los símbolos son esencialmente no cuantitativos, los símbolos y sus relaciones pueden ser estudiados en el marco de la Lógica, y no es requerida la Matemática como tal.

Cuando los símbolos representan conceptos cuantitativos esencialmente, la ciencia Matemática es útil y de hecho indispensable para analizar sus relaciones.

Las Matemáticas,presentan entonces una estructura sistemática dentro de la cual se pueden estudiar las relaciones cuantitativas.

Existen básicamente dos conceptos de la ciencia Matemática :

a) Las Matemáticas Puras.
b) Las Matemáticas Aplicadas.

En forma muy general podría decirse que ambos conceptos de la ciencia Matemática difieren en un aspecto muy importante : en la Matemática Pura los símbolos representan conceptos abstractos cuyas propiedades se fijan por definición, mientras que en la Matemática Aplicada, muchos símbolos representan variables que se observan en el mundo real y cuyas propiedades deben determinarse no por definición abstracta, sino por observación, para luego establecerse en forma matemática.

Con objeto de definir mejor estos dos conceptos de la Matemática, se explicarán a continuación en forma más extensa.

2.1.1 MATEMATICAS PURAS

Cuando se introduce la estructura lógica en las Matemáticas, se hace necesario permitir que algunos enunciados queden sin demostración, es decir que no se deduzcan de otros enunciados, para tener algo con qué empezar. Así, el teorema 10 puede ser demostrado haciendo ver que consecuencia lógica del teorema 9, de igual modo, puede demostrarse el teorema 9 a partir del 8, y así sucesivamente. Tarde o temprano se tendrá que detener y conceder la verdad a algunos enunciados sin demostración.

En caso de que se tratara de demostrar todos los enunciados, necesariamente se caería en la trama de la "circularidad". Esto es, si se dice que el enunciado "A" es verdadero porque "B" es verdadero y se ase gura que "B" es verdadero porque se sigue del "A" y "A" es verdadero, - se está utilizando un razonamiento circular.

Por otra parte, todo enunciado matemático envuelve ciertos "términos". Si preguntamos lo que un término significa, éste podría definirse en términos de otros términos, y éstos últimos definirlos a su vez a través de otros términos nuevamente. Tarde o temprano este proceso de definición, como el proceso de demostración debe detenerse ; es claro - que no pueden definirse todos los términos sin caer en el pecado de la "circularidad". Deben usarse algunos términos sin definición, mientras otros términos se definirán, en última instancia, con estos "términos - indefinidos". En resúmen, todas las definiciones deben involucrar algunos términos que no se definen.

Ahora bien, cuando para explicar cierto enunciado o palabra, se - ve uno conducido a basar la totalidad de sus definiciones sobre algunos enunciados o término indefinidos, se ha hecho "Ciencia Matemática Pura". Es decir, una ciencia Matemática Pura es una colección de enunciados -- que comienzan con ciertos enunciados no demostrados (postulados), que - involucran ciertos términos no definidos, y todos los otros enunciados de sus sistema se deducen lógicamente de los postulados y todos los nuevos términos de definen en téminos de los indefinidos.

Considérese un ejemplo de lo anterior :

Tomando los "términos indefinidos": "x","y","a","b", supónganse - los "enunciados no demostrados o postulados" siguientes :

POSTULADO 1 : Todos los "x" son "y".
POSTULADO 2 : Algunos "x" son "a"
POSTULADO 3 : Todos los "y" son "b"

Partiendo de que los "teoremas" son consecuencias lógicas de los postulados, se obtiene lo siguiente :

TEOREMA 1 : Algunos "y" son "a".
DEFINICION 1 : Todo "y" que es también "a", será llamado "F".
TEOREMA 2 : Algunos "b" son "F"

Este ejemplo muestra una ciencia Matemática Pura con 4 términos - indefinidos, 3 postulados, 1 definición y 2 teoremas. Es sin duda una ciencia Matemática Pura en miniatura, pero describe todas las caracte - rísticas propias de la misma: comienza con términos indefinidos y postulados indemostrados, pero de ahí en adelante todos los nuevos enunciados (teoremas), son consecuencias lógicas de los enunciados previos y - todos los nuevos términos (como el término "F"), son definidos a partir de términos usados previamente (como"y" y "a").

2.1.2 MATEMATICAS APLICADAS

Se tendrá una "aplicación o interpretación" concreta de la ciencia Matemática Pura, cuando se asignen significados a los términos indefinidos de dicha ciencia Matemática.

Si los significados asignados a los términos indefinidos son ta -

les que, cuando estos significados se sustituyen por dichos términos indefinidos, los postulados se convierten en enunciados verdaderos, entonces, en virtud de que los teoremas son consecuencias lógicas de los postulados, los teoremas se convierten automáticamente en enunciados verdaderos acerca de estos significados.

Se llamará entonces "Matemáticas Aplicadas" a las aplicaciones o interpretaciones concretas de las Matemáticas Puras.

Es sin embargo importante señalar por último, que la ciencia Matemática Pura seguirá siendo válida sea que se encuentren o no interpretaciones o aplicaciones concretas de la misma.

2.2 APLICACION DE LAS MATEMATICAS A LA ADMINISTRACION DE EMPRESAS

Las Matemáticas son básicas a todas las materias en las que se inyecta una estructura lógica.

"Matematizar" un asunto, no significa meramente introducir fórmulas y ecuaciones en el mismo, sino más bien moldearlo y fundirlo en un todo coherente. Esto es, estructurarlo con postulados reconocidos de manera clara, con definiciones impecables y conclusiones escrupulosamente exactas. En otras palabras, "matematizar" un tema significa simplemente ponerlo en forma de una ciencia Matemática pura.

Ahora bien, en virtud de que la Administración se relaciona con conceptos que son de naturaleza esencialmente cuantitativa, por ejemplo: precios, costos, escalas de salarios, inversiones y utilidades, gran parte del análisis administrativo es ineludiblemente matemático en su naturaleza.

Cuando las variables administrativas se representan con símbolos y sus propiedades se establecen en forma matemática, las Matemáticas proveen las técnicas para analizar las relaciones entre los símbolos y por lo tanto entre las variables que ellos representan.

Hace algunos años, el recurso de las técnicas matemáticas era limitado; sin embargo se ha estado produciendo una evolución que ha propiciado que numerosas ramas de esta ciencia se hagan indispensables para poder asumir las funciones de responsabilidad de la empresa.

El volúmen de los negocios, la rapidez de las decisiones, la importancia de sus consecuencias y la multiplicidad de cosas que atender, se han incrementado en proporciones tales que la naturaleza de los problemas de las empresas se ha modificado profundamente: "es urgente cambiar la consigna". Hoy, los hombres de negocios no dependen más de corazonadas, por el contrario, cuentan con información sistemáticamente organizada como base para el efectivo control de sus compañías.

Ahora bien, a medida que crecen en número y complejidad las aplicaciones de las Matemáticas a los problemas de negocios, se va haciendo cada vez más difícil el determinar cuáles son los aspectos pertinentes de las Matemáticas para tal efecto : ¿Será la programación lineal la clave de las Matemáticas para la dirección de negocios? o bien, ¿lo será entonces la probabilidad o alguna otra?. El hecho es que el poder más significativo de ésta y otras poderosas herramientas, desde el punto de vista del administrador de una empresa, no reside en la complicada técnica analítica, sino en algo relativamente más simple y de efecto más sutil y penetrante: las Matemáticas le ayudarán a examinar, aclarar y mejorar la lógica en su toma de decisiones.

Con objeto de aprovechar estas ventajas tan importantes, el hombre de negocios no necesita adquirir la agudeza intelectual o habilidad con los números del matemático. Así mismo, tal vez es de poco valor el conocimiento muy detallado de los aspectos mecánicos de las técnicas muy refinadas pero complejas. Lo que se requiere es aumentar el conocimiento, comprensión y apreciación acerca de las "aplicaciones y usos" de las Matemáticas en su campo de acción.

Utilizando una analogía, puede decirse que no es necesario tener la facultad de componer música o de arreglar la partitura de una orquesta sinfónica para ser capaz de apreciar las grandes obras musicales del mundo. El hombre de negocios tampoco tiene que ser un virtuoso matemático para entender y utilizar los grandes conceptos matemáticos universales, con la finalidad de mejorar la toma de decisiones o hacer un uso eficaz de las Matemáticas dentro de su organización.

La tendencia hacia una toma de decisiones más científica continúa; es por ello que, es evidente que quienes tengan un buen conocimiento de las Matemáticas y sus aplicaciones tendrán una notable ventaja sobre los que carezcan de dicho conocimiento. Sin embargo, la gran mayoría de las personas que estudian una carrera profesional, entre ellas la Administración de Empresas, se preguntan ¿ por qué es necesario estudiar Matemáticas ?.

Cuando no se conoce el campo de aplicación de las Matemáticas, resulta difícil contestar a tal pregunta; motivo por el cual se mencionarán a manera de ejemplo algunos temas para los cuales el conocimiento mínimo de las matemáticas resulta sumamente indispensable. Dichos temas son: modelos matemáticos, conjuntos, curvas de regresión, programación lineal y estadística.

A) Modelos Matemáticos :

Dentro de la teoría administrativa, uno de los aspectos más importantes es aquel que se refiere a tomar una decisión respecto a un problema real.

Para tomar tal decisión, debe hacerse una representación del problema real, considerando únicamente aquellas condiciones que tienen una mayor relevancia, ya que sería imposible considerar todas las que podrían intervenir.

A la representación antes mencionada, se le conoce como "modelo" y si se expresa con símbolos matemáticos se le llama modelo matemático.

Como ejemplos de modelos matemáticos frecuentemente aplicados a la Administración podemos citar el modelo de punto de equilibrio entre la oferta y la demanda y el de punto de equilibrio entre las ventas y los gastos. Ahora bien, si consideramos los anteriores modelos como representaciones lineales únicamente, es decir como aplicaciones de la recta, para poder obtenerlos es necesario saber por lo menos: obtener una función lineal, resolver e interpretar gráfica y analíticamente un sistema de ecuaciones lineales, etc.

B) Conjuntos :

Las Matemáticas modernas tienen su columna vertebral basada en los conjuntos. Por medio de la teoría de conjuntos puede encontrarse la relación con temas tan trascendentales para la Administración como es la probabilidad.

C) Curva de Regresión :

Como ha sido visto, la Administración tiene como uno de sus pilares a la teoría de la toma de decisiones; ahora bien, si el análisis de regresión sirve para poder predecir un valor desconocido, luego entonces resalta su importancia.

Para poder obtener la curva de regresión más simple, una recta, es necesario saber de menos: obtener la ecuación de una recta y el valor de una variable dependiente conociendo a la variable independiente.

D) Programación Lineal :

Una de las principales finalidades de la Administración, es la de maximizar o minimizar, según sea el caso, las ganancias obtenidas o los gastos realizados; lo anterior puede calcularse mediante la programación lineal.

Para poder desarrollar la programación lineal es indispensable conocer las siguientes bases : obtener ecuaciones de rectas, graficar inecuaciones lineales, resolver sistemas de ecuaciones lineales y trazar una recta mediante la pendiente y la ordenada al origen.

E) Estadística :

Antiguamente, cuando las empresas eran pequeñas, los dirigentes podían conocer todas las funciones y operaciones mediante el contacto personal con los empleados; pero como cada día las empresas van creciendo, se requiere mayor planeación y sistematización, es decir que el contacto personal se sustituye por el análisis e interpretación de la información numérica obtenida y así poder planear actividades.

Lo anterior puede lograrse mediante la estadística , la cuál no podría dominarse si no se tienen las siguientes bases matemáticas: álgebra, aplicaciones de funciones y ecuaciones, trazo de curvas y rectas, etc.

Se podrían seguir analizando más temas administrativos basados en las Matemáticas para observar la importancia de éstas, sin embargo, con lo antes expuestos se tiene una imagen general al respecto.

Por último, se podría concluir que de una u otra manera, las Matemáticas son utilizadas en cada área o aspecto de una empresa: producción, finanzas, ventas, mercadotecnia, planeación, control, etc. y que los hombres de negocios exitosos están actualmente resolviendo problemas mediante técnicas matemáticas exactas y científicas.

2.3 LA DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS

2.3.1 CONTRIBUCION DE LAS MATEMATICAS AL APRENDIZAJE DE OTRAS MATERIAS

Si las Matemáticas no fueran útiles, habrían desaparecido ya del plan de estudios de centros docentes de todas las categorías. En estos momentos es la utilidad de las Matemáticas lo que les otorga preeminencia en los programas de estudio.

A comienzos del presente siglo, la relación entre la Matemática y otras ciencias era escasa. La biología, historia, economía y otras asignaturas, poco o ningún caso hacían de las ciencias exactas.

Posteriormente, a consecuencia de los grandes progresos en las ciencias en general y en las Matemáticas, y al mismo tiempo a consecuencia de los adelantos en didáctica matemática, se produjo un deslinde mayor de asignaturas por un período largo.

Es por ello que en la actualidad, se nota una creciente preocupación por parte de un gran número de hombres de ciencia y educadores en pro de obtener una armonía y relaciones mutuas entre las matemáticas y las otras esferas del saber en que tienen aplicación.

Respecto de la contribución de las matemáticas en el aprendizaje de otras ciencias, podemos decir que en años recientes la enseñanza de éstas, se ha hecho más formal y más matemática :

- Los cursos de física son más técnicos que antes y destacan conceptos y leyes en una explicación teórica, estructurada y matemática del mundo físico.
- Los cursos de química requieren explicación abstracta, casi matemática del comportamiento de la materia, tanto orgánica como inorgánica.
- La teoría celular en biología, se está desplazando más y más hacia una descripción matemática de los seres vivos, de manera análoga a lo que sucedió en el desenvolvimiento de la física atómica.
- Las teorías de los procesos económicos se han absorbido en explicaciones basadas en la probabilidad.
- Y otro tanto ocurre en astrofísica, astronomía, geología, sociología,

sicología y muchas otras ciencias de gran importancia en estos momentos.

La intervención de las Matemáticas en otras ciencias es entonces cada vez mayor. Existen hoy, un creciente número de hombres de ciencia que en su investigación dependen más y más de los modelos matemáticos. Cuando se proponen construir un cuerpo estructurado del saber, recurren fundamentalmente a los aspectos estructurados de las Matemáticas. No se trata de físicos relativistas solamente, sino de biólogos moleculares, de sicólogos del comportamiento, de estadísticos industriales, de investigadores operacionales y de administradores de negocios entre otros más.

Estas personas reclaman de las escuelas una enseñanza más profunda, más amplia, más práctica y de contenido más estructurado que nunca.

2.3.2 PROBLEMAS EN LA DOCENCIA DE LAS MATEMATICAS

A nivel profesional se manifiesta constantemente una carencia muy acentuada de preparación matemática por parte de los estudiantes.

El contacto informal y cotidiano con ellos, ha mostrado que algunos experimentan miedo ante la sola mención de la palabra "Matemáticas". No en pocos casos, se ha podido constatar que muchas personas, llegado el momento de la elección de una carrera se preguntan: ¿ En qué carrera no se necesitan Matemáticas ? , desde luego, la respuesta condiciona su decisión.

Las Matemáticas, sin embargo, constituyen una disciplina sencilla y fácil de comprender. Es posible que el temor ante ellas se deba a que algunas veces los matemáticos, acostumbrados al lenguaje de esta disciplina, no ponen verdadero énfasis en explicar de manera clara las ideas y conceptos matemáticos, por lo que la mayoría de las personas se intimida ante ese lenguaje aparentemente incomprensible. En la medida en que las Matemáticas sean explicadas al estudiante de manera ordenada, sencilla y accesible, el gusto y dominio en esta ciencia se verá incrementado.

Otro aspecto muy importante en lo que a las Matemáticas y su docencia se refiere, es que el estudiante desea saber para qué sirve dicha ciencia, especialmente en algunas carreras donde imperan las actitudes pragmáticas. No pone en tela de juicio las aseveraciones de los cultivadores de esta disciplina, pero desea conocer la utlidad de las mismas para poder resolver sus problemas prácticos.

Finalmente, es también importante resaltar la carencia de conciencia acerca de que las Matemáticas constituyen una disciplina fundamental en la formación integral de cualquier profesionista; las matemáticas son útiles prácticamente en todos los campos de la actividad humana; el manejo de las mismas permitirá al estudiante de hoy, el profesionista del mañana, enfrentar con mayores perspectivas de triunfo el ejercicio práctico de su profesión.

CAPITULO III

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ALGEBRA

3.1 CALCULO DE PORCENTAJES

3.1.1 DEFINICION DE PORCENTAJE

+ El término "por ciento" indica una cierta cantidad de centésimos.
+ Este término es generalmente utilizado para determinar la cantidad de elementos de un grupo total que cumplen con una característica específica. Así, el decir que el 15% de los clientes de una compañía están ubicados en el estado de Querétaro significa que 15 de cada 100 clientes de la empresa están en dicho estado.

3.1.2 REPRESENTACION DE PORCENTAJES

+ La representación de los porcentajes puede efectuarse de difererentes maneras :
  a) Por medio del símbolo "%".
  b) A través de dividir el número dado entre 100 (pudiéndose simplificar la fracción obtenida).
  c) En forma de decimal.

  Ejemplos :

a	b	c
50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	.50
25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	.25
5%	$\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$	.05

+ Aun y cuando los porcentajes pueden representarse de cualquiera de las formas indicadas, las más usadas son las del símbolo y la decimal.
+ Para poder transformar un porcentaje de la forma del símbolo a la forma decimal y viceversa, se procede de la siguiente manera :

Del Símbolo a Decimal	---	se divide entre 100 y se desaparece el símbolo.
De Decimal al Símbolo	---	se multiplica por 100 y se agrega el símbolo.

3.1.3 CALCULO DE PORCENTAJES

+ Para encontrar el porcentaje de una cantidad determinada, debe multiplicarse dicha cantidad por la forma decimal que representa el porcentaje deseado.

x% de una cantidad "y" = (forma decimal de x%)(cantidad "y")

EJERCICIOS RESUELTOS :

1) 2% de 700
   2% = 2/100 = .02
   700 · .02 = 14

2) 4.5% de 900
   4.5% = 4.5/100 = .045
   900 · .045 = 40.5

3) 2/5 % de 1200
   2/5 % = 2/5 / 100 = .004
   1200 · .004 = 4.8

4) 140% de 5000
   140% = 140/100 = 1.40
   5000 · 1.40 = 7000

5) .25% de 6000
   .25% = .25/100 = .0025
   6000 · .0025 = 15

EJERCICIOS POR RESOLVER :

A) Convierta los siguientes porcentajes en forma de símbolo a la forma de decimal :

1) 98%
2) 28.10%
3) 175%
4) 145.50%
5) .55%
6) .05%
7) .015%
8) 8/10 %
9) 5/8 %
10) 4/3 %

B) Convierta los siguientes porcentajes en forma de decimal a forma de símbolo :

1) .95
2) .3350
3) .5540
4) 1.45
5) 2.5050
6) 1.0800
7) .0065
8) .0024
9) .011
10) .020

C) Calcule los siguientes porcentajes :

1) 45% de 1800
2) 80.50% de 400
6) .05% de 9000
7) 1.10% de 750

3) 120% de 2000
4) 180.50% de 200
5) .70% de 5000

8) 2.05% de 680
9) 6/10 % de 600
10) 3/4 % de 2000

3.2 ALGEBRA

3.2.1 DEFINICION

+ Se llama Algebra a la rama de las Matemáticas que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

+ El Algebra es la parte de las Matemáticas que estudia las relaciones que existen entre las cantidades conocidas y las desconocidas, consideradas todas ellas como expresiones algebráicas.

3.2.2 DIFERENCIA DEL ALGEBRA CON LA ARITMETICA

+ El Algebra difiere de la Aritmética fundamentalmente en lo siguiente:

A) El Algebra tiene un concepto de cantidad mucho más amplio que la Aritmética.
En Aritmética --- las cantidades son representadas por "números", los cuáles expresan "valores determinados.
En Algebra --- las cantidades pueden ser representadas por "letras", y éstas pueden expresar "cualquier valor". Con ésto se logra la generalización.
Ejemplo : mientras que en Aritmetica "10" expresa solo un valor determinado "10" y si se quiere expresar un valor mayor o menor que éste, se requerirá escribir un número distinto de "10"; en Algebra, "a" representa el valor que se quiera asignarle y por tanto puede representar "10", más de "10" o menos de "10", con la única restricción de que cuando en un problema se le asigna a una letra un valor determinado, dicha letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que se le ha asignado.

B) El Algebra es más general que la Aritmética.
En Aritmética --- se resuelve un problema concreto cada vez.
En Algebra --- se da una regla general que permite resolver muchos problemas de un cierto tipo.
Ejemplo : cuando hallamos la utilidad antes de impuestos de una empresa cuyas ventas ascienden a 100 y cuyo costo y gastos totales representan 40 y 20 respectivamente, obtendremos como resultado 40 ... " ésto es Aritmética ". Pero al establecer que : -

" U = V-C-G " se dice que para hallar la utilidad antes de impuestos de cualquier empresa se debe restar el costo "C" y los gastos totales "G" a las ventas "V"... "ésto es Algebra".

3.2.3 UTILIDAD DEL ALGEBRA

El Algebra no es solamente un concepto fundamental dentro de las Matemáticas, sino una importantísima herramienta en el desarrollo de las ciencias aplicadas como la Ingeniería, Química, Física, Economía y también de las técnicas mercantiles y administrativas.

El espíritu de esta rama de las Matemáticas es el deseo de encontrar las soluciones de un problema dado y especialmente, descubrir métodos generales que engloben todos los problemas de una clase determinada. Este deseo de generalidad es el origen de muchos de los modernos progresos en todos los campos.

En la Administración, se requiere constantemente la formulación y utilización de fórmulas o generalizaciones. Si se quiere saber cuánto interés realmente se paga cuando se obtiene un préstamo o se compra a plazos, empléese una fórmula; si se desea encontrar el costo total de la producción de un artículo, empléese una fórmula... y recuerde siempre que tales fórmulas son "algebráicas" y que algunos de estos problemas nunca podrían resolverse si no es por medio del Algebra.

La utilidad del Algebra reside pues, en que ésta permite establecer reglas generales expresadas en términos algebráicos, que muestren la relación entre dos o más símbolos que a su vez representen variables o concéptos reales en el mundo de los negocios.

Ahora bien, el Algebra no es sólo una taquigrafía conveniente sino que, escribiendo las relaciones entre las diferentes variables en este adecuado simbolismo, especialmente cuando las fórmulas son mucho más complicadas que las mencionadas anteriormente, seremos capaces de comprender "con un vistazo" muchos aspectos interesantes que serían difíciles de captar de un complicado enunciado de palabras. Y además, cuando se aprende a manejar tales expresiones algebráicas, resulta que se podrá resolver problemas casi automáticamente, problemas que de otro modo requerirían de un largo y laborioso esfuerzo mental.

Concluyendo, el uso de letras para representar números desconocidos es lo que hace posible en Algebra, transcribir grandes problemas, relaciones e implicaciones de una organización en expresiones matemáticas breves y lo atractivo de la misma es que permite resolver dichos problemas, que pudieron haber sido difíciles, en formas rápidas y fáciles.

3.3 LENGUAJE ALGEBRAICO

3.3.1 SIMBOLOS DEL ALBEBRA

+ En el Algebra se emplean 2 tipos de símbolos para representar las cantidades: los números y las letras.

a) Los números --- se utilizan para representar cantidades conocidas y determinadas; reciben también el nombre de "factores numéricos".

b) Las letras --- se utilizan para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.
- las primeras letras del alfabeto : a,b,c... expresan cantidades conocidas.
- las últimas letras del alfabeto: u,v,w,x... expresan cantidades desconocidas.

Las letras son llamadas también "factores literales".

3.3.2 SIGNOS DEL ALGEBRA

+ En el Albebra se emplean 3 clases de signos : signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.

A) SIGNOS DE OPERACION :

+ En el Algebra se realizan las mismas operaciones que en Aritmética.

Operación	Signo	Ejemplo	Forma de leerse
suma	+	a+b	a más b
resta	-	a-b	a menos b
multiplicación	x · ( )	axb, a·b, (a)(b)	a multiplicada por b
división	÷ / —	a÷b, a/b, $\frac{a}{b}$	a dividida entre b
elevación a potencias	$(\ )^n$	a^b	a elevada a la potencia b
extracción de raíces	$\sqrt[n]{\ }$	$\sqrt[b]{a}$	raíz b de a

+ Observaciones :
  - El signo "+" y "-" tienen en Algebra 2 aplicaciones: uno, indicar las operaciones de suma y resta, otra, indicar el sentido de las cantidades : positivo o negativo.
  - Entre factores numéricos y literales, el signo "x" suele omitirse: axb = ab

- Cuando una letra no tiene exponente, su exponente es la unidad: $a = a^1$
- Cuando un radical no tiene índice, se deduce que se trata de una raíz cuadrada : $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

B) SIGNOS DE RELACION :

+ Son empleados para indicar la relación que existe entre 2 cantidades.
+ Los principales son :

Signo de Relación	Ejemplo	Forma de Leerse
=	$a=b$	a "igual a" b
>	$a > b$	a "mayor que" b
<	$a < b$	a "menor que" b

C) SIGNOS DE AGRUPAMIENTO :

+ Son empleados para indicar que la operación colocada entre e -- llos debe efectuarse primero, y que los términos encerrados dentro de los mismos se consideran como una sola cantidad.
+ Los principales son :

Signo de Agrupamiento	Nombre	Ejemplo
( )	Paréntesis	(a+b)
[ ]	Corchete	a+b
{ }	Llaves	a+b
——	Barra	$\overline{a+b}$

+ Ejemplo:

(a+b)c   indica que la suma de "a" y "b" debe ser multiplicada por "c".

(a-b) ÷ (c+d)   indica que la diferencia entre "a" y "b" debe dividirse entre la suma de "c" y "d".

+ Reglas para suprimir los signos de agrupamiento :

1) Si el signo de agrupamiento es precedido por un signo "+",- dicho signo puede suprimirse sin modificar los términos que contiene.
   Ejemplo : $(2x+4y) + (6xy-2x^2) = 2x+4y+6xy-2x^2$
2) Si el signo de agrupamiento es precedido por un signo "-", dicho signo puede suprimirse cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.
   Ejemplo : $(2x+4y) - (6xy-2x^2) = 2x+4y-6xy+2x^2$
3) Si en una expresión figura más de un signo de agrupamiento, su supresión se debe realizar empezando con los signos inte

riores y terminando con los signos exteriores.

Ejemplo : $3x - [6x^3 - (2x^2 - 5y)] = 3x - [6x^3 - 2x^2 + 5y]$

$= 3x - 6x^3 + 2x^2 - 5y$

3.3.3 NOMENGLATURA ALGEBRAICA

A) EXPRESION ALGEBRAICA :

+ Es una combinación de números, letras y signos ligados por las operaciones fundamentales del Algebra.
  Así, $4a+8b$; $10ax^2$; $2a(2x+6y)$; $a+2b\sqrt{x}$; $(8x-4)a / x^2$ son expresiones algebráicas.

B) TERMINO :

+ Se llama término, a la expresión algebráica que consta de uno o varios números y/o letras , no separados entre sí por el signo "+" (suma) o "-" (resta). La multiplicación o división sí pueden estar indicadas.
  Así, b ; $2a$; $3xy$; $4a/3b$ son términos.

C) GRADO DE UN TERMINO :

+ El grado de un término puede ser de dos clases : grado absoluto o grado con relación a una letra.
  + Grado absoluto de un término, es la suma de los exponentes de todos sus factores literales.
    Así, el término $4a$ es de primer grado y el término $6a^2b^2c^3$ es de séptimo grado porque $2+2+3 = 7$
  + Grado con relación a una letra de un término, es el exponente de dicho factor literal.
    Así, el término $6a^2b^2c^3$ es de segundo grado con relación a "a", de segundo grado con relación a "b" y de tercer grado con relación a "c".

D) CLASES DE TERMINOS :

+ "Término Entero", es aquel que no tiene denominador literal.
  Ejemplos: $4b, 2a^2b^3, 5a/2$
+ "Término Fraccionario", es aquel que sí tiene denominador literal.
  Ejemplos: $5a/b$, $6x^2/y$
+ "Término Racional", es aquel que no tiene radical.
  Ejemplos: $4b$, $2a^2b^3$, $5a/2$
+ "Término Irracional", es aquel que sí tiene radical.
  Ejemplos: $\sqrt{4a}, 5a/\sqrt{b}$

+ "Términos Homogéneos", son aquellos que tienen el mismo grado absoluto, es decir que la suma de los exponentes de todos sus factores literales es la misma.
Ejemplo: $2x^2y^3$ y $8xy^4$ son homogéneos porque ambos son de quinto grado $(2+3 = 1+4)$

+ "Términos Heterogéneos", son aquellos que tienen distinto grado absoluto.
Ejemplo: $2x^2y^4$ y $3xy^2$ son heterogéneos porque el primero es de sexto grado $(2+4=6)$ y el segundo es de tercer grado $(1+2=3)$

+ "Términos Semejantes", son aquellos que tienen los mismos factores literales (incluyendo exponentes) y sólo difieren en su coeficiente numérico.
Ejemplo: $2xy^2$ y $-3xy^2/4$ son términos semejantes.

+ "Términos Disímiles" o no semejantes, son los que tienen factores literales diferentes entre sí.
Ejemplo : $4x$ y $6x^2$ son términos no semejantes.

E) <u>COEFICIENTE</u> :

+ Un término está formado por uno o varios factores: números o letras.
+ Cualquier factor de un término es llamado "coeficiente" del resto de dicho término.
Así, en el término $4x^2y^3$: 4 es el coeficiente de x^2y^3
$4x^2$ es el coeficiente de y^3
$4y^3$ es el coeficiente de x^2

+ Se llama "Coeficiente Numérico", al factor numérico de un término.
Así, en el término $4xy$, 4 es el coeficiente numérico de xy.
+ Cuando un término no tiene coeficiente numérico, se asume que su coeficiente es la unidad. Así, ab equivale a $1ab$.

+ Se llama "Coeficiente Literal" a uno de los factores literales de un término. Cualquiera de los factores literales de un término puede ser el coeficiente literal de los restantes.
Así, en el término abcd : a es el coeficiente literal de bcd
b es el coeficiente literal de acd
y así sucesivamente.

F) <u>CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS</u> :

+ Las expresiones algebráicas se clasifican en :

"Monomio", que es una expresión algebráica formada por un solo término.
Ejemplo: $-5a$; $8b$; $x^2y^3/2a^2$

"Polinomio", que es una expresión algebráica formada por varios términos.

Ejemplo: $x+y$; $2a^2+3b^3+8a$; x^2+bx+c

"Binomio", es un polinomio formado por dos términos.

Ejemplo : $2a+8ab^3$

"Trinomio", es un polinomio formado por tres términos.

Ejemplo: $2a+8ab^2-6c^3$

G) GRADO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA :

+ El "Grado de un Monomio" , es el correspondiente al grado absoluto del único término que forma dicho monomio, ésto es, la suma de los exponentes de todos sus factores literales.
  Ejemplo: el grado de $5x^3y^2z$ es $3+2+1 = 6$

+ El "Grado de un Polinomio", es el correspondiente al término de mayor grado, cuyo coeficiente numérico sea distinto de "0".
  Ejemplo : los grados de los términos del polinomio $4x^2y - 6xz^3 + 3x^3y^3$ son respectivamente 3,4 y 6, por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

3.4 TEOREMAS DEL ALGEBRA

+ Este grupo de teoremas son utilizados frecuentemente para la resolución de operaciones algebráicas.

+ En virtud de su sencillez y con objeto de sintetizar su exposición, se mencionarán sin necesidad de demostración.

3.4.1 TEOREMAS BASICOS DEL ALGEBRA

TEOREMA # 1 :

si:	$a = b$	ejemplo:	$5 = 5$
entonces:	$a+c = b+c$		$5+2 = 5+2$
	$a-c = b-c$		$5-2 = 5-2$
	$a \cdot c = b \cdot c$		$5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$
	$a/c = b/c$	$(c \neq 0)$	$5/2 = 5/2$

"Polinomio", que es una expresión algebráica formada por varios términos.

Ejemplo: $x+y$; $2a^2+3b^3+8a$; x^2+bx+c

"Binomio", es un polinomio formado por dos términos.

Ejemplo : $2a+8ab^3$

"Trinomio", es un polinomio formado por tres términos.

Ejemplo: $2a+8ab^2-6c^2$

G) GRADO DE UNA EXPRESION ALGEBRAICA :

+ El "Grado de un Monomio" , es el correspondiente al grado absoluto del único término que forma dicho monomio, ésto es, la suma de los exponentes de todos sus factores literales.
  Ejemplo: el grado de $5x^3y^2z$ es $3+2+1 = 6$

+ El "Grado de un Polinomio", es el correspondiente al término de mayor grado, cuyo coeficiente numérico sea distinto de "0".
  Ejemplo : los grados de los términos del polinomio $4x^2y - 6xz^3 + 3x^3y^3$ son respectivamente 3,4 y 6, por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

3.4 TEOREMAS DEL ALGEBRA

+ Este grupo de teoremas son utilizados frecuentemente para la resolución de operaciones algebráicas.
+ En virtud de su sencillez y con objeto de sintetizar su exposición, se mencionarán sin necesidad de demostración.

3.4.1 TEOREMAS BASICOS DEL ALGEBRA

TEOREMA # 1 :

si:	$a = b$	ejemplo:	$5 = 5$
entonces:	$a+c = b+c$		$5+2 = 5+2$
	$a-c = b-c$		$5-2 = 5-2$
	$a \cdot c = b \cdot c$		$5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$
	$a/c = b/c \quad (c \neq 0)$		$5/2 = 5/2$

+ Si a cantidades iguales "a" y "b", se efectúan operaciones iguales (+,-,x,/), los resultados serán también iguales. Es decir, se puede sumar, restar, multiplicar o dividir la misma cantidad en cada miembro de la igualdad, sin alterar la misma.
La última operación es válida a condición de que $c \neq 0$, ya que la división entre cero no está definida.

TEOREMA # 2 :

si:	$a+c = b+c$	ejemplo:	$5+2 = 5+2$
	$a-c = b-c$		$5-2 = 5-2$
	$a \cdot c = b \cdot c$		$5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$
	$a/c = b/c$		$5/2 = 5/2$
entonces:	$a = b$		$5 = 5$

+ **Recíprocamente al teorema # 1, si a dos cantidades "a" y "b" se les efectúan operaciones iguales (+,-,x,/) y los resultados son iguales (la igualdad se mantiene), dichas cantidades son iguales.**

TEOREMA # 3 :

si:	$a+b = c$	ejemplo:	$5+2 = 7$
entonces:	$a = c-b$		$5 = 7-2$
si:	$a-b = c$		$5-2 = 3$
entonces:	$a = c+b$		$5 = 3+2$
si:	$a \cdot b = c$		$5 \cdot 2 = 10$
entonces:	$a = c/b$		$5 = 10/2$
si:	$a/b = c$		$5/2 = 2.5$
entonces:	$a = c \cdot b$		$5 = 2.5 \cdot 2$

+ Al cambiar un término de un miembro de una igualdad al otro, el mismo pasa con la operación contraria: si está sumando pasa restando, si está restando pasa sumando, si está multiplicando pasa dividiendo y si está dividiendo pasa multiplicando.

TEOREMA # 4 :

si:	$a = b$	ejemplo:	$5 = 5$
entonces:	$-a = -b$		$-5 = -5$

+ Se podrán cambiar los signos de todos los términos que aparecen en una igualdad sin alterar ésta. Esto es llamado también "multiplicación por -1".

TEOREMA # 5 :

$a \cdot 0 = 0$ ejemplo $5 \cdot 0 = 0$

+ La multiplicación de cualquier número por cero es igual a cero.

TEOREMA # 6 :

si:	$a=0$ ó $b=0$ ó $c=0$	ejemplo:	$a=0, b=5, c=2$
entonces:	$a \cdot b \cdot c = 0$		$0 \cdot 5 \cdot 2 = 0$

+ Si uno solo de los varios factores de un producto es igual a cero, el producto es igual a cero y viceversa, si un producto de factores es igual a cero, significa que por lo menos uno de los factores del mismo también es igual a cero.

TEOREMA # 7 :

$a\,(b \pm c) = ab \pm ac$ ejemplo: $5(2 \pm c) = 10 \pm 5c$

+ El producto de un factor por un binomio, es igual a la suma o resta, según sea el caso, del producto del factor por el primer término del binomio, y el producto del factor por el segundo término del binomio.

3.4.2 TEOREMAS DE LOS EXPONENTES

TEOREMA # 1 :

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \text{ejemplo: } 2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

+ EL producto de coeficientes iguales elevados a cualquier potencia - es igual al coeficiente elevado a la potencia que se obtenga sumando los exponentes.

TEOREMA # 2 :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \text{ejemplo: } \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$$

+ El cociente de dos coeficientes iguales elevados a cualquier potencia es igual al coeficiente elevado a la potencia que se obtenga de restar los exponentes.

TEOREMA # 3 :

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \text{ejemplo: } (4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

+ Al elevar un coeficiente , elevado a una potencia, a otra potencia, el resultado será igual al coeficiente elevado a la potencia que se obtenga de multiplicar los exponentes.

TEOREMA # 4 :

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{ejemplo: } 5^{3/2} = \sqrt[2]{5^3}$$

+ Una base elevada a una potencia fraccionaria es igual a la raíz de la base elevada al numerador de dicha fracción, y que tiene como índice del radical al denominador de la misma fracción.

TEOREMA # 5 :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \text{ejemplo: } (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$$

+ El producto de dos factores elevado a una potencia determinada es igual al primer factor elevado a esa potencia por el segundo factor elevado también a la misma potencia.

TEOREMA # 6 :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{ejemplo:} \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$$

+ El cociente de dos factores elevado a una potencia determinada es igual al numerador elevado a esa potencia determinada entre el denominador elevado también a la misma potencia.

TEOREMA # 7 :

$$a^0 = 1 \qquad \text{ejemplo:} \qquad 5^0 = 1$$

+ Cualquier cantidad elevada a la potencia cero es igual a la unidad.

TEOREMA # 8 :

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \text{ejemplo:} \qquad \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$$

+ Cualquier denominador elevado a un exponente positivo o negativo puede pasar a ser numerador, con solo cambiar su exponente a negativo o positivo respectivamente.

EJERCICIOS

EJERCICIOS RESUELTOS :

1) $(x-3)(x+1) = 0$
si el producto de dos factores es igual a "0", por lo menos uno de ellos debe ser "0".

$(x-3)=0 \qquad (x+1)=0$

$x = 0+3 \qquad x = 0-1$

$x = 3 \qquad x = -1$

Comprobaciones :

2) $x(5+4) = 5x+4x$
$= 9x$

$5+4 = 9$
$(x)9 = 9x$

3) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3}$
$= 2^5$
$= 32$

$2^2=4 \quad 2^3=8$
$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$

4) $\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2}$
$= 2^1$
$= 2$

$2^3=8 \quad 2^2=4$
$\frac{2^3}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$

5) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3}$
$= 2^6$
$= 64$

$(2^2)^3 = 4^3 = 64$

6) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
$= 4 \cdot 9$
$= 36$

$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

7) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$
$= \frac{8}{27}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

8) $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^5 \cdot a^{-3}}$
$= \frac{1}{a^{5-3}}$
$= \frac{1}{a^2}$
$= a^{-2}$

$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$

9) $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$
$= a^2$

$\frac{a^5}{a^3} = a^5 \cdot a^3 = a^{5-3} = a^2$

10) $2^{4/2} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt[2]{16} = 4$

$2^{4/2} = 2^2 = 4$

11) $\dfrac{a^{1/4}}{a^{3/4}} = a^{1/4-3/4} = a^{-2/4} = a^{-1/2} = \dfrac{1}{a^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{a}}$

12) $\dfrac{a^0}{a^{3/2}} = \dfrac{1}{a^{3/2}} = a^{-3/2}$

13) $(3 \cdot 3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 = 27 \cdot 27 = 729$

$(3 \cdot 3)^3 = (9)^3 = 729$

14) $(3^{1/4})^{3/2} = 3^{1/4 \cdot 3/2} = 3^{3/8} = \sqrt[8]{3^3}$

15) $(2^4 \cdot 2^5)^3 = (2^4)^3 \cdot (2^5)^3 = 2^{12} \cdot 2^{15} = 2^{27}$

$(2^4 \cdot 2^5)^3 = (2^{4+5})^3 = (2^9)^3 = 2^{27}$

EJERCICIOS POR RESOLVER :

1) $a(x+y) =$

2) $\dfrac{5^5}{5^3} =$

3) $(8^2 \cdot 3^4)^2 =$

4) $\dfrac{b^4}{b^6} =$

5) $3^{2/3} =$

6) $\dfrac{5^0}{4^{1/2}} =$

7) $(a+4)(a-4) = 0$

8) $(a^{3/4} \cdot b^{2/3})^2 =$

9) $4^{1/2} \cdot 4^{3/4} =$

10) $(25^{1/2})^2 =$

11) $\left(\dfrac{4^{3/2}}{5^0}\right)^2 =$

12) $\dfrac{(8x^{-2})(4)(-6^0)}{2} =$

13) $\dfrac{x^{2/3}}{x^{-2/3}} =$

14) $\dfrac{a^5}{a^2} =$

15) $\left(\dfrac{x^0 \cdot x^{4/3}}{x^{-2/3}}\right)^5 =$

3.5 OPERACIONES ALGEBRAICAS

3.5.1 SUMA ALGEBRAICA

DEFINICION

+ La suma algebráica es la operación que tiene por objeto reunir 2 o más expresiones algebráicas llamadas sumandos, en una sola expre - sión algebráica llamada suma.

+ En Algebra, la suma puede significar aumento o disminución; es de - cir, sumar una cantidad negativa equivale a restar una cantidad posi tiva de igual valor absoluto.

PROPIEDADES DE LA SUMA ALGEBRAICA

A) Propiedad Conmutativa :
   + El orden de los sumandos no altera el valor de la suma.
   + Así: $a+b = b+a$ y $5+2 = 2+5$

B) Propiedad Asociativa:
   + Se pueden agrupar los sumandos de cualquier forma sin que se al- tere el valor de la suma.
   + Así: $a+b+c+d = a+(b+c+d) = (a+b)+(c+d)$ y
   $5+2+3+1 = 5+(2+3+1) = (5+2)+(3+1)$

REGLAS PARA SUMAR

A) Ley de los Signos y los Coeficientes :
   + Para sumar dos cantidades algebráicas del mismo signo, se suman sus valores absolutos y se coloca el signo común.
   Ejemplo : $2a+3a = +5a$
   $-2a-3a = -5a$

   + Para sumar dos cantidades algebráicas con signos opuestos, se - resta la cantidad del menor valor absoluto de la de mayor valor absoluto y se coloca el signo de la cantidad de mayor valor abso luto.
   Ejemplo: $2a-3a = -1a$
   $-2a+3a = +1a$

B) Unicamente podrán reducirse o eliminarse entre sí los términos se- mejantes (aquellos que tienen los mismos factores literales inclu - yendo exponentes).

PROCEDIMIENTO PARA SUMAR

A) Para sumar dos o más expresiones algebráicas :
   1) Se escriben unas a continuación de otras, cada una con su respec

tivo signo.

2) Se reducen términos semejantes si los hay.

Ejemplo: $(2a+3b) + (2b)$

1) $2a+3b+2b$
2) $2a+5b$

B) Para restar dos o más expresiones algebráicas :

1) Se cambia el signo de la cantidad que se está restando (sustraendo).
2) Se suman siguiendo el procedimiento de la suma.

Ejemplo: $-6a-(4a-2b)$

1) $-6a-4a+2b$
2) $-10a+2b$

EJERCICIOS RESUELTOS

+ Encuentre las siguientes sumas algebráicas :

1) $(x^2+4x)+(-5x+x^2) = x^2+4x-5x+x^2$
$= x^2+x^2+4x-5x$
$= 2x^2-x$

2) $(m^2+n^2)+(-3mn+4n^2)+(-5m^2-5n^2) = m^2+n^2-3mn+4n^2-5m^2-5n^2$
$= m^2-5m^2+n^2+4n^2-5n^2-3mn$
$= -4m^2+5n^2-5n^2-3mn$
$= -4m^2-3mn$

3) $(a^x-3a^{x-2})+(5a^{x-1}+6a^{x-3})+(7a^{x-3}+a^{x-4})+(a^{x-1}-13a^{x-3}) =$
$= a^x-3a^{x-2}+5a^{x-1}+6a^{x-3}+7a^{x-3}+a^{x-4}+a^{x-1}-13a^{x-3}$
$= a^x+5a^{x-1}+a^{x-1}-3a^{x-2}+6a^{x-3}+7a^{x-3}-13a^{x-3}+a^{x-4}$
$= a^x+6a^{x-1}-3a^{x-2}+a^{x-4}$

4) $(x^5+x-9)+(3x^4-7x^2+6)+(-3x^3-4x+5) =$
$= x^5+x-9+3x^4-7x^2+6-3x^3-4x+5$
$= x^5+3x^4-3x^3-7x^2-4x-x-9+6+5$
$= x^5+3x^4-3x^3-7x^2-3x+2$

5) $(a^3-ab^2)-(7ab^2+9a^2b)$
$= a^3-ab^2-7ab^2-9a^2b$
$= a^3-8ab^2-9a^2b$

6) $\left(x^2+\frac{2}{3}xy\right)+\left(-\frac{1}{6}xy+y^2\right)+\left(-\frac{5}{6}xy+\frac{2}{3}y^2\right)$

$= x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}xy+y^2-\frac{5}{6}xy+\frac{2}{3}y^2$

$= x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}xy+y^2-\frac{5}{6}xy+\frac{2}{3}y^2$

$= x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{1}{6}xy-\frac{5}{6}xy+y^2+\frac{2}{3}y^2$

$= x^2-\frac{2}{6}xy+\frac{5}{3}y^2$

7) $\left(\frac{3}{8}a^2-\frac{5}{6}a\right)-\left(\frac{5}{6}a^2\right)$

$= \frac{3}{8}a^2-\frac{5}{6}a-\frac{5}{6}a^2$

$= -\frac{11}{24}a^2-\frac{5}{6}a$

8) $(x^2+y^2-2xy)-(-y^2+5x^2-4xy)$

$= x^2+y^2-2xy+y^2-5x^2+4xy$

$= x^2-5x^2-2xy+4xy+y^2+y^2$

$= -4x^2+2xy+2y^2$

9) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}p\right)-(m+n-p)$

$= \frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}p-m-n+p$

$= \frac{2}{3}m-m+\frac{5}{6}n-n+\frac{1}{2}p+p$

$= -\frac{1}{3}m-\frac{1}{6}n+\frac{3}{2}p$

10) $(a+b+c)-\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b+\frac{2}{3}c\right)$

$= a+b+c-\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b-\frac{2}{3}c$

$= a-\frac{1}{2}a+b+\frac{3}{4}b-c-\frac{2}{3}c$

$= \frac{1}{2}a+\frac{7}{4}b-\frac{5}{3}c$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Encuentre las siguientes sumas algebráicas:

1) $(2a+3b-c)+(3a+2b+c)$
2) $(9x-3y+4)+(-x-y+5)+(-5x+4y-8)$

3) $(-3m+2n-6)+(3m-8n+7)+(-5m+n-10)$

4) $(-am+4mn-6s)+(4s-am-4mn)+(-2s-5mn+3am)$

5) $(5a^x-3a^m-7a^n)+(-8a^x+5a^m-8a^n)+(-11a^x+4a^m+10a^n)$

6) $(4m^{a+1}-7m^{a+2}-5m^{a+3})+(2m^{a+1}-6m^{a+2}-m^{a+3})+(-5m^{a+1}+3m^{a+2}+10m^{a+3})$

7) $(4ab-3bc+5cd)+(2bc+3cd-2de)+(4bc-3ab+3de)+(-3bc-6cd-ab)$

8) $(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2)+(-\frac{2}{5}xy+\frac{1}{6}y^2)+(\frac{1}{10}y^2)+(\frac{1}{10}xy+\frac{1}{3}y^2)$

9) $(x^4-x^2+5)+(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{8}x-3)+(-\frac{3}{5}x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{4}x)$

10) $(\frac{1}{4}x^{a+1}-\frac{3}{5}x^{a+2}+\frac{1}{2}x^{a+3})+(2x^{a+3}-2x^{a+2}+\frac{3}{4}x^{a+1})+(-\frac{3}{5}x^{a+2}+\frac{3}{2}x^{a+3})$

11) $(m^3-m^2n)-(7m^2n+9mn^2)$

12) $(a^2+b^2-3ab)+(-b^2+3a^2-4ab)$

13) $(ab+3ac-2cd-4de)-(-2ac+5ab-8cd+5de)$

14) $(y^5-8y^3+5y^2-20)-(-10y^4+20y^3-6y^2-15y)$

15) $(6m^3-9n^3+5m^2n-8mn^2)-(10mn^2-15m^2n+4m^3-6)$

16) $(8x^3y-10xy^3+y^4-4x^2y^2)-(-x^4-5xy^3+30x^2y^2-2x^3y)$

17) $(a^6+a^4b^2+6a^2b^4+10)-(12a^3b^3+6ab^5-3a^2b^4-6)$

18) $(-x^5y+6x^3y^3-9xy^5+40)-(-8x^6+9y^6-10x^4y^2-x^2y^4)$

19) $(\frac{2}{11}m^3n+\frac{5}{14}m^2n^2+\frac{1}{3}mn^3-6)-(-m^4+\frac{7}{8}m^2n^2-\frac{2}{9}mn^3)$

20) $(\frac{5}{6}a^2+\frac{3}{4}ab-\frac{8}{3}b^3)-(a^2-ab-2b^3)$

3.5.2 MULTIPLICACION ALGEBRAICA

DEFINICION

+ La multiplicación es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas factores, hallar una tercera cantidad llamada producto.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION ALGEBRAICA

A) Propiedad Conmutativa :
   + El orden de los factores no altera el valor del producto.
   + Así: $a \cdot b = b \cdot a$ y $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$

B) Propiedad Asociativa:
   + Los factores pueden agruparse de cualquier forma sin que se altere

el valor del producto.

+ Así: $abc = a(bc) = ab(c)$ y $2 \cdot 5 \cdot 3 = 2(5 \cdot 3) = (2 \cdot 5)(3)$

C) Propiedad Distributiva:

+ El producto de un factor "a" por la suma de otras dos cantidades "b,c", es igual a la suma de los productos de "ab" y "ac". En esta propiedad distributiva se apoya el teorema #7 del punto 3.4.1.
+ Así: $a(b+c) = ab+ac$ y $5(2+3) = 10+15 = 25$

REGLAS PARA MULTIPLICAR

+ Para poder efectuar cualquier producto algebráico, deben respetarse las siguientes leyes :

A) Ley de los Signos :

+ **El producto de dos signos iguales da positivo.**
+ **El producto de dos signos diferentes da negativo.**
+ **Así:** $(+a)(+b) = ab$ y $(-a)(+b) = -ab$
  $(-a)(-b) = ab$ $(+a)(-b) = -ab$

B) Ley de los Coeficientes:

+ **El coeficiente del producto de dos factores es igual al producto de los coeficientes de los factores.**
+ **Así:** $(5a)(2b) = 10ab$

C) Ley de los Exponentes :

+ **Para multiplicar potencias de la misma base, se escribe dicha base y se le agrega por exponente la suma de los exponentes de esta base en los diferentes factores.**
+ **Así:** $(a^5)(a^4)(a^3) = a^{5+4+3} = a^{12}$

PROCEDIMIENTO PARA MULTIPLICAR

A) Para multiplicar monomios :

1) Se multiplican los coeficientes.
2) A continuación de este producto, se escriben en orden alfabético las letras de los factores.
3) Se coloca a cada letra un exponente igual a la suma algebráica de los exponentes, que tenga dicha letra en los factores.
4) El signo del producto está dado por la ley de los signos.

Ejemplo: $(3a^3b)(-2b^2x)$

1) $(3)(2) = 6$
2) $6abx$
3) $6a^2b^3x$
4) $(+)(-) = (-)$

$= -6a^2b^3x$

B) Para multiplicar monomios por polinomios :

1) Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio (siguiendo el procedimiento para multiplicar monomios).
2) Se tiene en cuenta en cada caso la ley de los signos.
3) Se separan los productos parciales con sus propios signos.

Ejemplo: $(4a^2-3a+5)(4ax^2)$

1) 2) $(4a^2)(4ax^2) = 16a^3x^2$
$(-3a)(4ax^2) = -12a^2x^2$
$(5)(4ax^2) = 20ax^2$

3) $16a^3x^2-12a^2x^2+20ax^2$

C) Para multiplicar dos polinomios :

1) Se multiplican cada uno de los términos de uno de los polinomios por cada uno de los términos del otro polinomio.
2) Se tienen en cuenta en cada caso la ley de los signos.
3) Se reducen los términos semejantes.

Ejemplo: $(4a^2-3b)(-2b+5a^2)$

1) 2) $4a^2(-2b) = -8a^2b$; $4a^2(5a^2) = 20a^4$
$-3b(-2b) = 6b^2$; $-3b(5a^2) = -15a^2b$

3) $20a^4-8a^2b-15a^2b+6b^2 = 20a^4-23a^2b+6b^2$

EJERICICIOS RESUELTOS

+ Efectúe las siguientes multiplicaciones :

1) $(a^{x+1}b^{x+2})(-3a^{x+2}b^3) =$
$= -a^{x+1}3a^{x+2}b^{x+2}b^3$
$= -3a^{x+1+x+2}b^{x+2+3}$
$= -3a^{2x+3}b^{x+5}$

2) $(-\frac{3}{5}x^3y^4)(-\frac{5}{6}a^2by^5)$
$= \frac{3\cdot 5}{5\ 6}\ x^3a^2by^4y^5$
$= \frac{15}{30}\ x^3a^2by^9$
$= \frac{1}{2}\ x^3a^2by^9$

3) $(a^mb^n+a^{m-1}b^{n+1}-a^{m-2}b^{n+1})(3a^2b)$
$= a^mb^n3a^2b + a^{m-1}b^{n+1}3a^2b - a^{m-2}b^{n+1}3a^2b$
$= 3a^{m+2}b^{n+1}+3a^{m+1}b^{n+2}-3a^mb^{n+2}$

4) $(3y^3+5-6y)(y^2+2)$

$$
\begin{array}{r}
(3y^3+5-6y) \\
(y^2+2) \\
\hline
+6y^3+10-12y \\
3y^5+5y^2-6y^3 \\
\hline
3y^5+5y^2 \quad +0 \quad +10-12y
\end{array}
$$

$= 3y^5+5y^2-12y+10$

5) $(a^{2/3}-2+2a^{-2/3})(3+a^{-2/3}-4a^{-4/3})$

$$
\begin{array}{r}
(a^{2/3}-2+2a^{-2/3}) \\
(3+a^{-2/3}-4a^{-4/3}\ ) \\
\hline
-4a^{-2/3}+8a^{-4/3}-8a^{-2} \\
+a^0-2a^{-2/3}+2a^{-4/3} \\
+3a^{2/3}-6\ +6a^{-2/3} \\
\hline
+3a^{2/3}-5\ +0+10a^{-4/3}-8a^{-2}
\end{array}
$$

$= 3a^{2/3}-5+10a^{-4/3}-8a^{-2}$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ **Efectúe las siguientes multiplicaciones :**

1) $(-4m^a n^{b-1} c)(-2m^{2a-3} n^{b-4})$
2) $(-x^{a-1} y^{m+2})(-6x^{a-3} y^{m-2} c^2)$
3) $(3x^3-5x^2y+6xy^2-2y^3)(2a^2xy^2)$
4) $(a^x-a^{x+1}+a^{x+2})(a+1)$
5) $(\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{5}x^3y^2+\frac{3}{5}x^2y^3-\frac{1}{10}y^6)(-\frac{2}{3}a^3x^4y^3)$
6) $(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}y^2)(-\frac{3}{4}a^2m)$
7) $(8x^3-9y^3+6xy^2-3x^2y)(2x+3y)$
8) $(m^{a+1}-2m^{a+2}-m^{a+3}+m^{a+4})(m^{a-3}-m^{a-1}+m^{a-2})$
9) $(4x^2-x^{3/2}y^{1/2}-x^{1/2}y^{3/2}+xy)(x^{1/2}+y^{1/2})$
10) $(x^{-3/4}y^{3/2}+3x^{-1/4}y-x^{1/4}y^{1/2})(x^{-5/4}y^{1/2}-3x^{-3/4}-x^{-1/4}y^{-1/2})$

3.5.3 DIVISION ALGEBRAICA

DEFINICION

+ "La división es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente)." (1)
+ De aquí se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

REGLAS PARA DIVIDIR

+ Para poder efectuar cualquier cociente algebráico deben de respetarse las siguientes leyes:

A) Ley de los Signos:
  + El cociente de dos signos iguales da positivo.
  + El cociente de dos signos diferentes da negativo.
  + Así: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ y $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

    $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

B) Ley de los Coeficientes :
  + El coeficiente del cociente resulta de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.
  + Así : $\frac{6a}{2} = 3a$

C) Ley de los Exponentes :
  + Para dividir potencias de la misma base, se escribe dicha base y se le coloca por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.
  + Así: $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$

PROCEDIMIENTO PARA DIVIDIR

A) Para dividir monomios :

---

(1) Baldor Aurelio. "Algebra Elemental". Pag. 79.

1) Se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.
2) A contitnuación de este cociente, se escriben las letras en orden alfabético.
3) Se coloca a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene esa letra en el dividendo y el exponente en el divisor.
4) El signo del cociente está dado por la ley de los signos.

Ejemplo: $\frac{6a^2b^3}{-3ab}$

1) $6/3 = 2$
2) $2ab$
3) $2a^{2-1}b^{3-1} = 2a^1b^2 = 2ab^2$
4) $+ / - = -$

$= -2ab^2$

B) **Para dividir polinomios entre monomios:**

1) **Se divide cada uno de los términos del polinomio, entre el monomio.**
2) **Se separan los cocientes parciales con sus propios signos.**
3) **Se tiene en cuenta en cada caso la ley de los signos.**

Ejemplo: $\frac{2a^2-4a^2b+6ab^2}{2a}$

1) $\frac{2a^2}{2a} = a$; $\frac{4a^2b}{2a} = 2ab$; $\frac{6ab^2}{2a} = 3b^2$
2) $a-2ab+3b^2$

C) Para dividir dos polinomios :

1) Se ordenan el dividendo y el divisor en relación a una misma letra y en orden creciente o decreciente del exponente.
2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtendrá el primer término del cociente.
3) Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo (para lo cual hay que cambiarle el signo); debe escribirse cada término debajo de su semejante; si algún término de este último producto no tiene término semejante en el dividendo, se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y del divisor.
4) Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y se tendrá el segundo término del cociente.
5) Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo obtenido (cambiando los signos).
6) Se divide el primer término del segundo resto obtenido, entre el primer término del divisor y se efectúan las operaciones anterio-

res, y así sucesivametne hasta que el residuo sea 0 (en el caso de las divisiones exactas).

Ejemplo :

+ Serán comparados simultáneamente los procedimientos para resol - ver una división algebráica y una aritmética, con el objeto de de mostrar la similitud entre ambos.

1) $x+2 \overline{\big)\, 2x^2+3x-2}$ 1) $25 \overline{\big)\, 625}$

2) $2x^2/x = 2x$ 2) $62/25 = 2$

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x+2 & 2x^2+3x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 25 & 625 \end{array}$$

3) $2x(x+2)=2x^2+4x$ 3) $(2)(25)=50$

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x+2 & 2x^2+3x-2 \\ & \underline{-2x^2-4x} \\ & 0\ -1x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 25 & 625 \\ & \underline{-50} \\ & 125 \end{array}$$

4) $-1x/x = -1$ 4) $125/25 = 5$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x-2 \\ & \underline{-2x^2-4x} \\ & \quad -1x-2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 25 \\ \hline 25 & 625 \\ & \underline{-50} \\ & 125 \end{array}$$

5) $(-1)(x+2) = -1x-2$ 5) $(5)(25) = 125$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x-2 \\ & \underline{-2x^2-4x} \\ & \quad -1x-2 \\ & \quad \underline{+1x+2} \\ & \quad 0\ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 25 \\ \hline 25 & 625 \\ & \underline{-50} \\ & 125 \\ & \underline{-125} \\ & 0 \end{array}$$

Entonces :

$$\frac{2x^2+3x-2}{x+2} = 2x-1 \qquad \frac{625}{25} = 25$$

EJERCICIOS RESUELTOS

+ Efectúe las siguientes divisiones :

1) $\dfrac{x^{-4}y^{-5}}{x^{2}y^{-1}} = x^{-4}y^{-5}x^{-2}y^{1} = x^{-4-2}y^{-5+1} = x^{-6}y^{-4}$

2) $\dfrac{a^{1/3}b}{a^{-1/4}b^{-3}} = a^{1/3}ba^{1/4}b^{3} = a^{1/3+1/4}b^{1+3} = a^{7/12}b^{4}$

3) $\dfrac{m^{4}+m^{2}-2+3m^{-2}-2m^{-4}}{m^{2}-1+m^{-2}} =$

$$
\begin{array}{r|l}
 & m^{2}+2-m^{-2} \\ \hline
m^{2}-1+m^{-2} & m^{4}+m^{2}-2+3m^{-2}-2m^{-4} \\
 & \underline{-m^{4}+m^{2}-m^{0}} \\
 & 0+2m^{2}-3+3m^{-2}-2m^{-4} \\
 & \underline{-2m^{2}+2-2m^{-2}} \\
 & 0\quad -1+m^{-2}-2m^{-4} \\
 & \underline{+m^{0}-m^{-2}+m^{-4}} \\
 & 0\quad 0\quad -m^{-4}
\end{array}
$$

4) $\dfrac{a^{5/4}-4a^{1/4}+4a^{-1/4}-a^{-3/4}}{a^{1/2}-2+a^{-1/2}} =$

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^{3/4}+2a^{1/4}-a^{-1/4} \\ \hline
a^{1/2}-2+a^{-1/2} & a^{5/4}-4a^{1/4}+4a^{-1/4}-a^{-3/4} \\
 & \underline{-a^{5/4}-a^{1/4}\qquad\qquad +2a^{3/4}} \\
 & 0\quad -5a^{1/4}+4a^{-1/4}-a^{-3/4}+2a^{3/4}
\end{array}
$$

Ordenando nuevamente:

$$
\begin{array}{l}
2a^{3/4}-5a^{1/4}+4a^{-1/4}-a^{-3/4} \\
\underline{-2a^{3/4}+4a^{1/4}-2a^{-1/4}} \\
0\quad -a^{1/4}+2a^{-1/4}-a^{-3/4} \\
\underline{+a^{1/4}-2a^{-1/4}+a^{-3/4}} \\
0\quad 0\quad 0
\end{array}
$$

5) $\dfrac{m-6m^{1/5}+m^{-3/5}}{m^{3/5}+2m^{1/5}-m^{-1/5}} =$

$$
\begin{array}{r|l}
 & m^{2/5}-2-m^{-2/5} \\ \hline
m^{3/5}+2m^{1/5}-m^{-1/5} & m-6m^{1/5}+m^{-3/5} \\
 & \underline{-m^{5/5}+m^{1/5}\qquad -2m^{3/5}} \\
 & 0-5m^{1/5}+m^{-3/5}\quad -2m^{3/5}
\end{array}
$$

$$0-5m^{1/5}+m^{-3/5}-2m^{3/5}$$

Ordenando nuevamente:

$$\begin{array}{l}
-2m^{3/5}-5m^{1/5}+m^{-3/5} \\
\underline{+2m^{3/5}+4m^{1/5}-2m^{-1/5}} \\
0 \quad -m^{1/5}-2m^{-1/5}+m^{-3/5} \\
\underline{\quad\;\; +m^{1/5}+2m^{-1/5}-m^{-3/5}} \\
\qquad\quad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Efectúe las siguientes divisiones :

1) $\dfrac{a^x b^y}{-4a^y b^n} =$

2) $\dfrac{-3a^x b^m}{ab^3} =$

3) $\dfrac{4a^m-6a^{m+2}+8a^{m+4}}{a^2b^3} =$

4) $\dfrac{\frac{2}{3}a^{x+1}-\frac{1}{4}a^{x-1}-\frac{2}{5}a^x}{\frac{1}{2}a^{x-2}} =$

5) $\dfrac{a^x+a^{x+3}}{a^x-a^{x+1}+a^{x+2}} =$

6) $\dfrac{m^2-11m+27}{m-6} =$

7) $\dfrac{a^{m+x}+a^m b^x+a^x b^m+b^{m+x}}{a^x+b^x} =$

8) $\dfrac{x^{-8}+x^{-2}+2x^{-6}+2}{x^{-4}-x^{-2}+1} =$

9) $\dfrac{3m^{2/3}-5+10m^{-4/3}-8m^{-2}}{3+m^{-2/3}-4m^{-4/3}} =$

10) $\dfrac{x^{-2}+x^{-3/2}y^{-1/2}+x^{-1}y^{-1}+2y^{-2}}{x^{-1}-x^{-1/2}y^{-1/2}+y^{-1}} =$

3.6 PRODUCTOS NOTABLES

3.6.1 DEFINICION

+ Existen ciertos productos que ocurren tan frecuentemente en el cálculo algebráico, que necesitan consideración especial.

+ Se llama "productos notables" a ciertos productos que ;
  + cumplen con reglas fijas y
  + su resultado puede obtenerse por simple inspección, sin necesidad de verificar la multiplicación.

> Los productos notables más utilizados son:
>
> + Cuadrado de un binomio
> + Cubo de un binomio
> + Binomio de Newton
> + Producto de dos binomios con un término común
> + Producto de dos binomios conjugados.

3.6.2 CUADRADO DE UN BINOMIO

FORMULA

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

DEMOSTRACION

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \qquad\qquad (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

DEFINICION

+ El cuadrado de un binomio, es un trinomio constituido por: el cuadrado del primer término, más dos veces el primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.
+ En el caso de que se trate de un binomio constituido por la diferencia de dos cantidades, el segundo término del trinomio resultante llevará signo negativo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $(2x+y)^2 = (2x)^2+2(2x)(y)+(y)^2 = 4x^2+4xy+y^2$
2) $(x+3)^2 = (x)^2+2(x)(3)+(3)^2 = x^2+6x+9$
3) $(x^2y^3-1)^2 = (x^2y^3)^2-2(x^2y^3)(1)+(1)^2 = x^4y^6-2x^2y^3+1$
4) $\left(4x^3y^2+\frac{1}{4y^2}\right)^2 = (4x^3y^2)^2+2(4x^3y^2)\left(\frac{1}{4y^2}\right)+\left(\frac{1}{4y^2}\right)^2 = 16x^6y^4+2x^3+\frac{1}{16y^4}$
5) $\left(\frac{4a}{5}-10ab\right)^2 = \left(\frac{4a}{5}\right)^2-2\left(\frac{4a}{5}\right)(10ab)+(10ab)^2 = \frac{16a^2}{25}-16a^2b+100a^2b^2$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $(ab+5)^2 =$
2) $\left(x^4-\frac{1}{2}\right)^2 =$
3) $(8a^3+3b^4)^2 =$
4) $(x^9-10y^{11})^2 =$
5) $(a^{m+1}b^{n+1}-4a^{m+1}b)^2 =$

3.6.3 CUBO DE UN BINOMIO

FORMULA

$$\boxed{(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

DEMOSTRACION

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ $\qquad$ $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$

$$
\begin{array}{r}
a^2+2ab+b^2 \\
a+b \\
\hline
a^3+2a^2b+ab^2 \qquad\quad \\
a^2b+2ab^2+b^3 \\
\hline
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
a^2-2ab+b^2 \\
a-b \\
\hline
a^3-2a^2b+ab^2 \qquad\quad \\
-a^2b+2ab^2-b^3 \\
\hline
a^3-3a^2b+3ab^2-b^3
\end{array}
$$

DEFINICION

+ El cubo de un binomio es un polinomio de 4 términos constituido por: el cubo del primer término, más tres veces el primero al cuadrado por el segundo, más tres veces el primero por el segundo al cuadrado, más el cubo del segundo.
+ En el caso de que se trate de un binomio constituido por la diferencia de dos cantidades, el segundo y cuarto términos del polinomio resultante llevarán signo negativo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $(3x+2)^3 = (3x)^3+3(3x)^2(2)+3(3x)(2)^2+(2)^3 = 27x^3+54x^2+36x+8$
2) $(x^2-3x^3)^3 = (x^2)^3-3(x^2)^2(3x^3)+3(x^2)(3x^3)^2-(3x^3)^3 = x^6-9x^7+27x^8-27x^9$
3) $\left(\frac{x}{2}+3\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3+3\left(\frac{x}{2}\right)^2(3)+3\left(\frac{x}{2}\right)(3)^2+(3)^3 = \frac{x^3}{8}+\frac{9x^2}{4}+\frac{27x}{2}+27$
4) $(2ab^2-1)^3 = (2ab^2)^3-3(2ab^2)^2(1)+3(2ab^2)(1)^2-(1)^3$
$= 8a^3b^6-12a^2b^4+6ab^2-1$
5) $(5x^{a+1}+2xy^2)^3 = (5x^{a+1})^3+3(5x^{a+a})^2(2xy^2)+3(5x^{a+1})(2xy^2)^2+(2xy^2)^3$
$= 125x^{3a+3}+150x^{2a+3}y^2+60x^{a+3}y^2+8x^3y^6$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $(2ab+3)^3 =$
2) $(2a+b)^3 =$
3) $\left(\frac{1}{y}-\frac{2y}{4}\right)^3 =$
4) $(2a^2-2b^2)^3 =$
5) $(2x^{2m}y^{n-1}-3x^{3m}y^{2n})^3 =$

3.6.4 BINOMIO DE NEWTON

+ El binomio de Newton consiste en una fórmula general para elevar un binomio a cualquier potencia.

FORMULA

$$(a \pm b)^n = a^n \pm na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} \pm \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{(2)(3)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}b^4}{(2)(3)(4)} \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5}b^5}{(2)(3)(4)(5)} \ldots$$

Por lo tanto:

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$
$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$
$$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$$
$$(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$$

CONCLUSIONES

+ EL desarrollo de la potencia de un binomio tiene tantos términos como unidades el exponente más uno.
+ El primer término del binomio aparece en todos los términos del desarrollo excepto en el último. El primer término de dicho desarrollo aparece con un exponente igual al del binomio y va decreciendo ese exponente de unidad en unidad hasta que en el último término tiene un valor de cero.
+ El segundo término del binomio aparece en todos los términos del desarrollo excepto en el primero; en éste, el exponente tiene un valor de cero y va aumentando de unidad en unidad hasta que en el último término tiene un valor igual al exponente del binomio.
+ El coeficiente del primer término del desarrollo siempre es uno y el del segundo es igual al exponente del binomio. Para calcular el coeficiente del tercer término y el de los subsiguientes, basta con multiplicar el coeficiente del término que le precede por el exponente del término "a" y dividir el resultado entre el exponente del término "b" más uno.

  Otra forma de calcular los coeficientes de cada término, es valerse de la siguiente pirámide, en la cuál el valor de cada número es igual a la suma de los dos números a sus extremos colocados en el renglón anterior.

  Cada nuevo renglón de la pirámide deberá empezar y terminar con la unidad.

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

+ El grado de cada término del desarrollo es igual al grado del binomio.
+ Si el binomio es una diferencia en vez de una suma, los signos aparecen alternados empezando por "+".

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $(x+2)^4 = (x)^4+4(x)^3(2)+6(x)^2(2)^2+4(x)(2)^3+(2)^4$
$= x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

2) $(x-2y)^6= (x)^6-6(x)^5(2y)+15(x)^4(2y)^2-20(x)^3(2y)^3+15(x)^2(2y)^4$
$-6(x)(2y)^5+2y^6$
$= x^6-12x^5y+60x^4y^2-160x^3y^3+240x^2y^4-192xy^5+64y^6$

3) $(2x+1)^7= (2x)^7+7(2x)^6(1)+21(2x)^5(1)^2+35(2x)^4(1)^3+35(2x)^3(1)^4$
$+21(2x)^2(1)^5+7(2x)(1)^6+(1)^7$
$= 128x^7+448x^6+672x^5+560x^4+280x^3+84x^2+14x +1$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $(3y^2+\frac{1}{2})5$
2) $(x^2-2x^3y)^4 =$
3) $(4x^2-y)^6 =$
4) $(2x+y^2)^7 =$
5) $(a+b)^{10} =$

3.6.5 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TERMINO COMUN

FORMULA

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

DEMOSTRACION

$$(x+a)(x+b) = \begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline bx + ab \\ x^2 + ax \qquad \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

DEFINICION

+ El producto de dos binomios conjugados que tienen un término común, es un trinomio constituido por: el cuadrado del término común, más la suma algebráica de los términos diferentes por el término común, más el producto de los términos diferentes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $(x+2)(x+3) = (x)^2+(2+3)x+(2)(3) = x^2+5x+6$
2) $(y-7)(y+5) = (y)^2+(-7+5)y+(-7)(5) = y^2-2y-35$
3) $(2a-3b)(2a+5b) = (2a)^2+(-3b+5b)(2a)+(-3b)(5b) = 4a^2+4ab-15b^2$
4) $(x^3+\frac{1}{2})(x^3+\frac{3}{2}) = (x^3)^2+(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(x^3)+(\frac{1}{2})(\frac{3}{2}) = x^6+2x^3+\frac{3}{4}$
5) $(x^{a+m}+y^{1/2})(x^{a+m}+4y^{1/2}) = (x^{a+m})^2+(y^{1/2}+4y^{1/2})(x^{a+m})+(y^{1/2})(4y^{1/2})$
$= x^{2a+2m}+5x^{a+m}y^{1/2}+4y$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $(x^3+y^2)(x^3-3y^2) =$
2) $(a^2b^3-1)(a^2b^3-2) =$
3) $(y^3-1)(y^3+\frac{1}{2}) =$
4) $(2ab-1)(2ab-2) =$
5) $(3x^{1/2}y^{m-1}+5a)(3x^{1/2}y^{m-1}+\frac{1}{10}a) =$

3.6.6 PRODUCTO DE DOS BIMONIOS CONJUGADOS

+ Se llama "binomios conjugados", a la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas.

FORMULA

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

DEMOSTRACION

$$\begin{array}{r} (a+b) \\ (a-b) \\ \hline a^2+ab \quad\; \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad - \quad b^2 \end{array}$$

DEFINICION

+ El producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados, es decir es igual al cuadrado del primer término de los binomios menos el cuadrado del segundo término de los mismos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $(x+3)(x-3) = x^2-9$
2) $(y^2-7)(y^2+7) = y^4-49$
3) $(4a-8)(4a+8) = 16a^2-64$
4) $(2x+\frac{1}{2})(2x-\frac{1}{2}) = 4x^2-\frac{1}{4}$
5) $(\frac{x^3}{y^2}+1)(\frac{x^3}{y^2}-1) = \frac{x^6}{y^4}-1$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $(m+n)(m-n) =$
2) $(2x-1)(1+2x) =$
3) $(2m+9)(2m-9) =$
4) $(y^3-3y^2)(y^3+3y^2) =$
5) $(2x-4xy)(4xy+2) =$

3.7 FACTORIZACION

3.7.1 DEFINICION

+ " Los factores de una expresión algebráica dada, son dos o más expresiones algebráicas que multiplicadas entre sí, originan la primera." (2)
+ Factorizar una expresión algebráica significa convertirla en el producto indicado de sus factores.
+ Los 9 principales casos de factorización a tratar en el presente apartado son :

1) Factores en común. 2) Agrupación de términos semejantes. 3) Trinomio cuadrado perfecto. 4) Trinomio cuadrado perfecto por adición o sustracción. 5) Cubo perfecto de un binomio 6) Trinomio de la forma $x^n+bx^{n/2}+c$ 7) Trinomio de la forma $ax^n+bx^{n/2}+c$ 8) Diferencia de cuadrados perfectos. 9) Suma o diferencia de cubos perfectos.

+ En cualquiera de estos 9 casos, la prueba consiste en multiplicar los factores que se obtienen. y su producto debe ser igual a la expresión que se factorizó.

3.7.2 FACTORES EN COMUN

FORMA DE FACTORIZAR

1) Se descompone cada uno de los términos en sus factores primos.
2) Se forma un monomio con los factores primos comunes a todos los términos de la expresión.
3) Se multiplica ese monomio por un polinomio compuesto de cada uno de los términos de la expresión algebráica original entre el monomio obtenido.

---

(2) Spiegel R. Murray. "Teoría y Problemas de Algebra Superior". Pag.26

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $x^2+2x =$

$x^2= x\cdot x$

$2x= 2\cdot x$

Factores comunes a los dos términos : x

$x^2+2x = x(x+2)$

2) $10x^2-5x+15x^4 =$

$10x^2 = 2\cdot 5\cdot x\cdot x$

$5x = 5\cdot x$

$15x = 5\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$

Factores comunes: 5, x

$10x^2-5x+15x^4 = 5x(2x-1+3x^3)$

3) $10y+20xy^2 =$

$10y = 2\cdot 5\cdot y$

$20xy^2 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot x\cdot y\cdot y$

Factores comunes: 2, 5, y

$10y+20xy^2 = 10y(1-2xy)$

4) $24a^2xy^2-36x^2y^4 =$

$24a^2xy^2 = 3\cdot 2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot x\cdot y\cdot y$

$36x^2y^4 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y$

Factores comunes: 3,2,2,x,y,y

$24a^2xy^2-36x^2y^4 = 12xy^2(2a^2-3xy^2)$

5) $x(2a+b+c)-2a-b-c =$

$x(2a+b+c)-(2a+b+c)$

Factor común: $(2a+b+c)$

$x(2a+b+c)-2a-b-c = (2a+b+c)(x-1)$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $x+x^2 =$

2) $35x^2y^3-70x^3 =$

3) $15x^3+2cx^2-5x =$

4) $55x^2y^3z+110x^2y^3z^2-220b^3x^2 =$

5) $9m^2-12mn+15m^3n^2-24mn^3 =$

3.7.3 AGRUPACION DE TERMINOS SEMEJANTES

FORMULA

$$
\begin{aligned}
ax+bx+\ldots +ay+by+\ldots &= (ax+bx)+\ldots+(ay+by)\\
&= x(a+b) +\ldots+y(a+b)\\
&= (a+b)(x+y+\ldots)
\end{aligned}
$$

FORMA DE FACTORIZAR

\+ Para el caso particular $ax+bx+ay+by$:

1) Los dos primeros términos tienen el factor común "x" y los dos últimos tienen el factor común "y".
2) Se agrupan los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro precedido por el signo "+" en este caso, porque el signo del tercer término es positivo.
3) Se separa de cada paréntesis el factor común de los términos incluidos en él.
4) Se multiplican, las cantidades que quedan dentro del paréntesis después de sacar el factor común, por la suma algebráica de los factores comunes.
5) La agrupación a que se refiere el punto 2) puede hacerse generalmente de más de un modo, siempre y cuando:
   + Los dos términos que se agrupan tengan algún factor común.
   + Las cantidades que quedan dentro del paréntesis después de sacar el factor común en cada grupo, sean exáctamente iguales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $$\begin{aligned} x^3+2x^2y+4x+8y &= (x^3+2x^2y)+(4x+8y)\\ &= x^2(x+2y)+4(x+2y)\\ &= (x+2y)(x^2+4)\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 8ab-2b+16a-4 &= (8ab-2b)+(16a-4)\\ &= 2b(4a-1)+4(4a-1)\\ &= (4a-1)(2b+4)\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} ab^2+3b-7ab-21 &= (ab^2-7ab)+(3b-21)\\ &= ab(b-7)+3(b-7)\\ &= (b-7)(ab+3)\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 2x^2-3xy-4x+6y &= (2x^2-4x)-(3xy-6y)\\ &= 2x(x-2)-3y(x-2)\\ &= (x-2)(2x-3y)\end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^3-2x^2y &= (a^2x-2a^2y)-(ax^2-2axy)+(x^3-2x^2y)\\ &= a^2(x-2y)-ax(x-2y)+x^2(x-2y)\\ &= (a^2-ax+x^2)(x-2y)\end{aligned}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $m^2+mb+mx+bx =$
2) $b^2-a^2+b-a^2b =$
3) $4a^3y-4a^2b+3bm-3amy =$
4) $2a^2b+2ac^2+b^2c^2+ab^3 =$
5) $4x^3-2nx^2+4xz^2-2nz^2-6ny^2+12xy^2 =$

3.7.4 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

FORMULA

$$\boxed{a^2 \pm 2ab+b^2 = (a \pm b)^2}$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar si la expresión es un "trinomio cuadrado perfecto".
   Condiciones :
   + el primero y tercer términos tienen raíz cuadrada exacta y son positivos.
   + el segundo término es dos veces el producto de las raíces cuadradas del primero y tercer términos.
2) Se forma un binomio elevado al cuadrado.
3) Los elementos del binomio son:
   + primer término : raíz cuadrada del primer término del trinomio.
   + segundo término : raíz cuadrada del tercer término del trinomio.
4) El signo del binomio resultante será el signo del segundo término del trinomio original.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $a^2 64ab+4b^2 =$

$\sqrt[2]{a^2} = a$

$\sqrt[2]{4b^2} = 2b$

$2(a)(2b) = 4ab$

$a^2-4ab+4b^2 = (a-2b)^2$

2) $x^2+bx+\frac{b^2}{4} =$

$\sqrt[2]{x^2} = x$

$\sqrt[2]{\frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2}$

$2(x)(\frac{b}{2}) = \frac{2bx}{2} = bx$

$x^2+bx+\frac{b^2}{4} = (x+\frac{b}{2})^2$

3) $400a^{10}+40a^5+1 =$

$\sqrt[2]{400a^{10}} = 20a^5$

$\sqrt[2]{1} = 1$

$2(20a^5)(1) = 40a^5$

$400a^{10}+40a^5+1 = (20a^5+1)^2$

4) $\frac{1}{25} + \frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3} = \frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3} + \frac{1}{25}$

$\sqrt[2]{\frac{25a^4}{36}} = \frac{5a^2}{6}$

$\sqrt[2]{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$

$2(\frac{5a^2}{6})(\frac{1}{5}) = \frac{10a^2}{30} = \frac{a^2}{3}$

$\frac{25a^4}{36} - \frac{a^2}{3} + \frac{1}{25} = (\frac{5a^2}{6} - \frac{1}{5})^2$

5) $16-104x^2+169x^4 = 169x^4-104x^2+16$

$\sqrt[2]{169x^4} = 13x^2$

$\sqrt[2]{16} = 4$

$2(13x^2)(4) = 104x^2$

$169x^4-104x^2+16 = (13x^2-4)^2$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $a^2-2a+1 =$
2) $9y^2-30x^2y+25x^4 =$
3) $\frac{x^2}{4}-xy+y^2 =$

4) $m^2+2m(m+n)+(m+n)^2 =$

5) $(a+b)^2-1(x-m)(a+b)+(x-m)^2 =$

3.7.5 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICION O SUSTRACCION

FORMA DE FACTORIZAR

+ Hay ocaciones en que un trinomio que no es cuadrado perfecto, puede convertirse en éste, sumándole o restándole una cantidad determinada.

  Sin embargo, para que el trinomio dado no se altere, se debe restar (en caso de que se haya sumado) o sumar (en caso de que se haya restado) la misma cantidad que le fue agregada para convertirlo en trinomio cuadrado perfecto.

2) Una vez que se ha convertido el trinomio original en cuadrado perfecto, se factoriza de igual modo que el caso 3.7.4, y se deja indicada la suma o resta, según sea el caso, de la cantidad que hubo necesidad de agregar.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $x^4+x^2y^2+y^4 =$

$\sqrt[2]{x^4} = x^2$

$\sqrt[2]{y^4} = y^2$

$2(x^2)(y^2) = 2x^2y^2 \neq x^2y^2$

Para convertirlo en trinomio cuadrado perfecto, se necesita sumarle una vez "x^2y^2"; para no afectar la expresión también se resta una vez "x^2y^2":

$$x^4+x^2y^2+y^4 = x^4+x^2y^2+y^4+x^2y^2-x^2y^2$$
$$= \underbrace{x^4+2x^2y^2+y^4}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto.}} \quad -x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2)^2 -x^2y^2$$

2) $4x^4+16x^2y^2+9y^4 =$

$2\sqrt{4x^4} = 2x^2$

$2\sqrt{9y^4} = 3y^2$

$2(2x^2)(3y^2) = 12x^2y^2 \neq 16x^2y^2$

Para convertirlo en trinomio cuadrado perfecto, es necesario res -

tarle "$4x^2y^2$" ; para no afectar la expresión, también se le suma - "$4x^2y^2$".

$$
\begin{aligned}
4x^4+16x^2y^2+9y^4 &= 4x^4+16x^2y^2+9y^4-4x^2y^2+4x^2y^2 \\
&= \underbrace{4x^4+12x^2y^2+9y^4}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto.}} \quad +4x^2y^2 \\
&= (2x^2+3y^2)^2 \quad +4x^2y^2
\end{aligned}
$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $x^4+x^2+1 =$
2) $4x^4+3x^2y^2+9y^4 =$
3) $25m^4+54m^2n^2+49n^4 =$
4) $121a^4-133a^2b^4+36b^8 =$
5) $49c^8+75a^2b^2c^4+196a^4b^4 =$

3.7.6 CUBO PERFECTO DE UN BINOMIO

FORMULA

$$\boxed{a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3}$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar que es un cubo perfecto.
   Condiciones:
   + debe tener cuatro términos.
   + el primero y el cuarto término, deben tener raíz cúbica exacta.
   + el segundo término debe ser igual al triple de la raíz cúbica del primer término al cuadrado, por la raíz cúbica del cuarto término.
   + el tercer término debe ser igual al triple de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto término al cuadrado.
   + los signos deben ser todos positivos o alternadamente positivos y negativos.
2) Se forma un binomio elevado al cubo.
3) Los elementos del binomio son:
   + primer término ; raíz cúbica del primer término de la expresión dada.

+ segundo término : raíz cúbica del cuarto término de la expresión dada.

4) El signo del binomio es positivo, si todos los términos de la expresión son positivos, y es negativo, si los signos de los términos son positivos y negativos alternadamente.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $m^3-3m^2+3m-1 =$

$\sqrt[3]{m^3} = m$

$\sqrt[3]{1} = 1$

$3(m)^2(1) = 3m^2$

$3(m)(1)^2 = 3m$

$m^3-3m^2+3m-1 = (m-1)^3$

2) $8a^3+12a^2+6a+1 =$

$\sqrt[3]{8a^3} = 2a$

$\sqrt[3]{1} = 1$

$3(2a)^2(1) = 12a^2$

$3(2a)(1)^2 = 6a$

$8a^3+12a^2+6a+1 = (2a+1)^3$

3) $1+12x+48x^2+64x^3 =$

$\sqrt[3]{1} = 1$

$\sqrt[3]{64x^3} = 4x$

$3(1)^2(4x) = 12x$

$3(1)(4x)^2 = 48x^2$

$1+12x+48x^2+64x^3 = (1+4x)^3$

4) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 =$

$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$

$\sqrt[3]{27y^3} = 3y$

$3(2x)^2(3y) = 36x^2y$

$3(2x)(3y)^2 = 54xy^2$

$8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 = (2x+3y)^2$

5) $64a^3+240a^2b+300ab^2+125b^3 =$

$\sqrt[3]{64a^3} = 4a$

$$\sqrt[3]{125b^3} = 5b$$
$$3(4a)^2(5b) = 240a^2b$$
$$3(4a)(5b)^2 = 300ab^2$$
$$64a^3+240a^2b+300ab^2+125b^3 = (4a+5b)^3$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $27-27b+9b^2-b^3$
2) $27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3 =$
3) $125x^3+150x^2y+60xy^2+8y^3 =$
4) $x^6+3x^4y^3+3x^2y^6+y^9 =$
5) $216x^6y^9+1+18x^2y^3+108x^4y^6 =$

3.7.7 TRINOMIO DE LA FORMA : $x^n+bx^{n/2}+c$

FORMULA

$$x^n \pm bx^{n/2} \pm c = (x^{n/2} \pm d)(x^{n/2} \pm e)$$

donde:

$$d \pm e = b$$
$$d \cdot e = c$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar que es un trinomio de la forma $x^n+bx^{n/2}+c$.
Condiciones:
+ el coeficiente de x^n es igual a uno.
+ la variable que en el primer término esté elevada a la potencia "n", en el segundo término debe estar elevada a la potencia "n/2".
+ el coeficiente de la variable en el segundo y tercer términos deben ser factores numéricos.
2) El resultado lo forma el producto de dos binomios.
3) Los elementos de los binomios son:
+ primeros términos : la raíz cuadrada del primer término del trinomio; este primer término es igual en ambos binomios.

+ segundos términos : los forman dos números cuya suma algebróica sea igual al coeficiente del segundo término del trinomio original y cuya multiplicación sea igual al tercer término del mismo.

4) En el primer binomio, se pone el signo del segundo término del trinomio y en el segundo binomio se pone el signo que resulte de multiplicar los signos de los términos segundo y tercer del trinomio.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $a^2+5a+6 = (x+3)(x+2)$
2) $x^2+7x+6 = (x+6)(x+1)$
3) $x^2-20x-300 = (x-30)(x+10)$
4) $m^2-7m+12 = (m-4)(m-3)$
5) $a^2+28a-29 = (a+29)(a-1)$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $a^2-5a+6 =$
2) $m^2+5m-24 =$
3) $m^2+7m-18 =$
4) $54+a^2-15a =$
5) $m^2-2m-528 =$

3.7.8 TRINOMIO DE LA FORMA : $ax^n+bx^{n/2}+c$

FORMULA

$$\boxed{\begin{aligned} ax^n \pm bx^{n/2} \pm c &= a(ax^n \pm bx^{n/2} \pm c) \\ &= a^2x^n \pm (a)(bx^{n/2}) \pm ac \\ &= (ax^{n/2} \pm d)(ax^{n/2} \pm e) \\ &\text{donde :} \\ &\quad d \pm e = b \\ &\quad d \cdot e = ac \\ &= \frac{(ax^{n/2} \pm d)(ax^{n/2} \pm e)}{a} \end{aligned}}$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar que es un trinomio de la forma "$ax^n+bx^{n/2}+c$".
Condiciones :
+ las condiciones son las mismas que para los trinomios estudiados en el punto 3.7.7. únicamente se diferencían estos trinomios de los anteriores en que el primer término tiene un coeficiente diferente a uno.

2) Se multiplica todo el trinomio por el coeficiente de "x^n" ("a"), dejando indicada dicha operación en el segundo término del trinomio.

3) Se procede igual que en el caso 3.7.7. excepto que se considera que la suma de los dos números que constituyen el segundo término de los binomios resultantes, debe ser igual al segundo término del trinomio sin considerar el factor ("a") por el que se multiplicó.

4) Como en un principio se multiplicó el trinomio por el coeficiente de la x^n, se debe dividir ahora entre el mismo número para no alterar el trinomio.
En caso de que los binomios no sean divisibles entre ese número, puede descomponerse el mismo en un producto de dos números entre los cuáles sí puedan dividirse los monomios.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $$\begin{aligned} 6a^2+7a+2 &= 6(6a^2+7a+2) \\ &= 36a^2+(6)(7a)+12 \\ &= (6a+4)(6a+3) \\ &= \frac{(6a+4)(6a+3)}{6} \\ &= \frac{(6a+4)}{2}\cdot\frac{(6a+3)}{3} \\ &= (3a+2)(2a+1) \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 5m^2+13m-6 &= 5(5m^2+13m-6) \\ &= 25m^2+(5)(13m)-30 \\ &= (5m+15)(5m-2) \\ &= \frac{(5m+15)(5m-2)}{5} \\ &= \frac{(5m+15)}{5}\cdot\frac{(5m-2)}{1} \\ &= (m+3)(5m-2) \end{aligned}$$

3) $15x^4-11x^2-12 = 15(15x^4-11x^2-12)$

$$\begin{aligned}
&= 225x^4-(15)(11x^2)-180\\
&= (15x^2-20)(15x^2+9)\\
&= \frac{(15x^2-20)(15x^2+9)}{15}\\
&= \frac{(15x^2-20)}{5}\cdot\frac{(15x^2+9)}{3}\\
&= (3x^2-4)(5x^2+3)
\end{aligned}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $3a^2-5a-2 =$
2) $12x^2-35-16x =$
3) $5m+2m^2+2 =$
4) $11a+21a^2-2 =$
5) $20x^2-40-7x =$

3.7.9 DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

FORMULA

$$\boxed{(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)}$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar que los elementos que forman la diferencia tienen raíz cuadrada exacta.
2) Se forma el producto de dos binomios cuyos elementos son·
   - primer término : raíz cuadrada del primer elemento de la diferencia dada.
   - segundo término : raíz cuadrada del segundo elemento de la diferencia dada.
3) Los binomios deben tener signo diferente; es decir, uno positivo y otro negativo.

EJERICICIOS RESUELTOS

1) $4x^2-81y^4 =$

$\sqrt[2]{4x^2} = 2x$

$\sqrt[2]{81y^4} = 9y^2$

$4x^2-81y^4 = (2x+9y^2)(2x-9y^2)$

2) $16-b^2 =$

$\sqrt[2]{16} = 4$

$\sqrt[2]{b^2} = b$

$16-b^2 = (4+b)(4-b)$

3) $1-9a^2b^4c^6d^8 =$

$\sqrt[2]{1} = 1$

$\sqrt[2]{9a^2b^4c^6d^8} = 3ab^2c^3d^4$

$1-9a^2b^4c^6d^8 = (1-3ab^2c^3d^4)(1+3ab^2c^3d^4)$

4) $100-m^2n^6 =$

$\sqrt[2]{100} = 10$

$\sqrt[2]{m^2n^6} = mn^3$

$100-m^2n^6 = (10+mn^3)(10-mn^3)$

5) $\frac{25x^2y^2}{196} - \frac{16x^{10}y^8}{121} =$

$\sqrt[2]{\frac{25x^4y^2}{196}} = \frac{5x^2y}{13}$

$\sqrt[2]{\frac{16x^{10}y^8}{121}} = \frac{4x^5y^4}{11}$

$\frac{25x^4y^2}{196}-\frac{16x^{10}y^8}{121} = \left(\frac{5x^2y}{13}+\frac{4x^5y^4}{11}\right)\left(\frac{5x^2y}{13}-\frac{4x^5y^4}{11}\right)$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $9-x^2 =$
2) $4m^2-9 =$
3) $100x^2y^4-169a^6 =$
4) $x^{2a}-y^{2a} =$
5) $m^{2x}n^{4x}-\frac{1}{25} =$

3.7.10 SUMA O DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS

FORMULA

$$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$(a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

FORMA DE FACTORIZAR

1) Comprobar que son cubos perfectos.
   Condiciones:
   + los términos tienen raíz cúbica exacta.
2) El resultado de la suma de dos cubos perfectos es el producto de:
   + un binomio cuyos elementos son las raíces cúbicas de los términos., sumadas .
   + un trinomio cuyo primer término es el cuadrado de la raíz cúbica del primer elemento del binomio; el segundo elemento con signo negativo es el producto de las dos raíces cúbicas y el tercer elemento es el cuadrado de la raíz cúbica del segundo elemento del binomio.
3) El resultado de la resta de dos cubos perfectos es exactamente igual que el de la suma, únicamente que se cambian el signo del binomio y el signo del segundo término del trinomio obtenidos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) $x^3-27 =$
   $\sqrt[3]{x^3} = x$
   $\sqrt[3]{27} = 3$
   $x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$
2) $8+m^3 =$
   $\sqrt[3]{8} = 2$
   $\sqrt[3]{m^3} = m$
   $8+m^3 = (m+2)(m^2-2m+4)$
3) $27x^3+125 =$
   $\sqrt[3]{27x^3} = 3x$
   $\sqrt[3]{125} = 5$
   $27x^3+125 = (3x+5)(9x^2-15x+25)$

4) $y^3-1 =$

$\sqrt[3]{y^3} = y$

$\sqrt[3]{1} = 1$

$y^3-1 = (y-1)(y^2-y+1)$

5) $27a^6-b^9 =$

$\sqrt[3]{27a^6} = 3a^2$

$\sqrt[3]{b^9} = b^3$

$27a^6-b^9 = (3a-b^3)(9a^4+3a^2b^3+b^6)$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) $a^3+b^3 =$
2) $27a^3+b^6 =$
3) $y^3-216x^3 =$
4) $x^6y^6-a^{12} =$
5) $m^6-8n^{12} =$

3.7.11 MISCELANEA

1) $a^3-4a^4 =$
2) $3a-2b-2bx^4+3ax^4 =$
3) $x^2-10x+25 =$
4) $a^8+3a^4+4 =$
5) $125m^3+1+75m^2+15m =$
6) $x^2+5x-14$
7) $6m^2-5m-6 =$
8) $1-4x^2 =$
9) $8m^3-1 =$
10) $24b^2xy^2-36x^2y^4$
11) $3mnx^2-2y^2-2x^2+3mny^2 =$
12) $49a^6-70a^3b^2x+25b^4x^2 =$
13) $a^8+4a^4b^4+16b^8 =$
14) $x^3y^3-3x^2y^2+3xy-1 =$
15) $x^2+12-8x =$
16) $8x^2-14x-15 =$
17) $25a^2b^4-121 =$
18) $64+x^6 =$
19) $14a^2b^2-28a^3+56a^4 =$
20) $1+x+3xy+3y =$
21) $x^2-xy^2+y^4/4 =$
22) $49+76b^2+64b^4 =$
23) $m^3-3m^2+3m-1 =$
24) $a^2-17a-60 =$
25) $15x^2+16x-15 =$
26) $256m^{12}-289n^4b^{10}$
27) $x^{12}-b^{18} =$
28) $y-y^2+y^3-y^4 =$
29) $6a-9b+21bx-14ax =$
30) $4-4(1-x)+(1-x)^2 =$

31) $1-126x^2y^4+169x^4y^8 =$

32) $64a^3+240a^2b+300ab^2+125b^3 =$

33) $x^2-41x+400 =$

34) $9m^2+37m+4 =$

35) $\frac{a^6}{49}-\frac{4x^{10}}{121} =$

36) $512+27x^9 =$

37) $3x^2y+6xy-5x^3y^2+8x^2yz+4mxy^2 =$

38) $6x^3+4axy+4ay^2-6xy^2-4ax^2-6x^2y =$

39) $9(a-b)^2+12(a-b)(a+b)+4(a+b)^2 =$

40) $81x^2y^8-292x^2y^4z^8+256z^{16} =$

41) $64a^9-240a^6b^4-125b^{12}+300a^3b^8 =$

42) $x^2+43x+432$

43) $15m^2n^2+mn-6 =$

44) $16a^{6m}-\frac{b^{2n}}{49}$

45) $$\frac{9a^{-4/5}c^{6/7}}{4x^{1/4}}+\frac{5a^{-6/5}}{40c^{-6/7}}+\frac{81c^{6/7}}{3x^{3/4}}+\frac{27a^{-2/5}}{2x^{1/2}c^{-6/7}} =$$

46) $$\frac{x^{3/8}b^{-4/5}}{6c^{5/3}}+\frac{8c^{-10/3}b^{-4/5}}{5}+\frac{3}{48b^{4/5}x^{-3/4}}+\frac{12b^{-4/5}}{5c^{10/3}} =$$

47) $$\frac{3}{27w^{-2}y^{-3/5}z^{3}}+\frac{w^{4/3}y^{-1/5}z^{-5/3}}{2}+\frac{9}{8w^{-2/3}y^{-1}z^{1/3}}+\frac{1}{2w^{-4/3}y^{1/5}z^{5/3}}+$$

$$+\frac{27y^{-9/5}z}{64}+\frac{5}{w^{-2}y^{-3/5}z^{3}\cdot 27} =$$

48) $$\frac{9}{5}+\frac{2}{25z^{1}y^{3/2}w^{-8/5}}+:\frac{2}{3z^{0}}+\frac{4w^{-8/5}zy^{3/2}}{9}+\frac{14w^{8/5}y^{-3/2}}{50z} =$$

49) $$\frac{2a^{9/4}}{x^{-1}y^{-1}}+\frac{y^{3/2}}{2x^{-2}a^{-9/2}}+\frac{4x^{0}}{3y^{-1/2}}+\frac{10a^{-9/4}}{54x}+\frac{2^{-1}x^{2}a^{9/2}}{y^{-3/2}}+\frac{3x^{-1}}{27a^{9/4}} =$$

50) $$\frac{64x^{-2/3}}{y^{2/5}a^{-8/3}}-\frac{y^{4/5}x^{-10/3}}{8}+\frac{3a^{0}}{16y^{-4/5}x^{10/3}}-\frac{8x^{-2}a^{4/3}}{y^{-1/5}} =$$

CAPITULO IV

ALGEBRA DE CONJUNTOS

4.1 UTILIDAD DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

La noción de conjunto es muy antigua; desde hace siglos el hombre ha tenido una idea intuitiva de conjunto. Cantor y Boole, durante el siglo XIX elevaron la noción de conjunto al rango de método matemático, ésto permitió una reestructuración de las Matemáticas. Lo que había sido descubierto en Matemáticas continuó siendo cierto, se establecieron solamente nuevas bases para definir conceptos ya establecidos.

Si bien es cierto que las Matemáticas han existido y progresado hasta el siglo XIX sin ninguna ayuda de la Teoría de los Conjuntos, así como que muchas de las disciplinas de las Matemáticas.como el Algebra y la Estadística entre otras, pueden ser estudiadas y comprendidas sin el recurso de esta teoría, también lo es, que las Matemáticas modernas han establecido un instrumento valioso que permite visualizar y clasificar los conceptos, así como definirlos con mayor precisión. Por lo anterior, esta teoría permite el aprendizaje de temas matemáticos más avanzados como la Probabilidad, Muestreo, Funciones, Optimización y otros, permitiendo representar en forma muy asequible algunos conceptos lógicos que constituyen un fundamento esencial para el trabajo con modelos matemáticos.

En las organizaciones, las aplicaciones de la Teoría de Conjuntos son muchas y muy variadas; en realidad, en el análisis de negocios constantemente se estudian conjuntos de varias clases, desde conjuntos de datos hasta conjuntos de mercancías fabricadas o de resultados favorables de decisiones. Se puede afirmar que un problema analizado en su totalidad a través de la Teoría de Conjuntos, permite que sus componentes y el comportamiento entre los mismos sean revisados y como consecuencia, puede lograrse eliminar aquellos componentes que por su naturaleza no son relevantes en la solución del planteamiento original. Asimismo, a través de las operaciones con conjuntos, se combinan los elementos de una situación dada, con el objeto de identificar alternativas de acción, evaluando la información para lograr tomar una decisión.

Quizá la mejor manera de tener una idea de la utilidad del Algebra de Conjuntos en las organizaciones, es considerar un problema difícil de captar mentalmente, pero que se resuelve sencillamente por medio del uso de dicha técnica, como veremos posteriormente : los estatutos de cierta compañía requieren: a) que la Junta de Directores forme con algunos de sus miembros todo el Comité Financiero; b) que ninguno sea miembro a la vez de la Junta de Directores y del Consejo de Asignaciones, a menos que también forme parte del Comité Financiero; c) que ningún miembro del Consejo de Asignaciones pertenezca a dicho Comité.

Por último, cabría mencionar que la metodología de los conjuntos y su razonamiento deductivo, no sólo fijan un marco de referencia para el análisis lógico de situaciones complejas, sino que además sistematiza la capacidad analítica en el manejo de situaciones difíciles.

4.2 DEFINICION DE CONJUNTO

+ Matemáticamente, un conjunto se define como: cualquier agregado o colección de objetos o entes de cualquier índole, con o sin relación entre ellos.

  Ejemplos:
  - El conjunto de los clientes de la empresa "X" S.A.
  - El conjunto de los alumnos de Administración de la Universidad Anáhuac.

+ Los objetos que forman a un conjunto se denominan "elementos" o miembros del conjunto.

4.2.1 REQUISITOS DE UN CONJUNTO

+ Los conjuntos, desde el punto de vista matemático, deben cumplir los siguientes requisitos :

  A) La colección de elementos debe estar descrita en forma lo suficientemente clara para que no haya duda alguna acerca de si cierto elemento pertenece o no al conjunto.
  Esta definición elimina colecciones imprecisas.

  Ejemplos de conjuntos bien definidos:
  - El conjunto de los meses del año según el calendario gregoriano.
  - El conjunto de los números pares enteros negativos.

  B) Ningun elemento de un conjunto debe considerarse más de una vez; es decir que aunque se repita varias veces, sólo se contabiliza en una ocasión.

  Ejemplo:
  - ¿Cuántos elementos forman el conjunto constituido por las cantidades siguientes: \$50,\$75,\$50,\$60? Lo forman 3 elementos porque no deben considerarse más de una vez los repetidos.

  C) El orden en que se coloquen los elementos que forman el conjunto carece de importancia.

  Ejemplo:
  - El conjunto formado por los elementos a,b,c, es igual al conjunto formado por los elementos c,a,b.

4.2.2 REPRESENTACION DE UN CONJUNTO

+ Los conjuntos generalmente se denotan por letras mayúsculas ; A,B,C... y los elementos se representan con letras minúsculas ; a,b,c,... .

+ Existen dos métodos para representar conjuntos:
  A) Método de Enumeración o Extensión :
  Consiste en encerrar entre dos llaves a todos los elementos que forman el conjunto, separados por una coma. A pesar de que no todos los elementos de cierto conjunto pueden esfecificarse de esta forma, este método es súmamente sencillo.
  B) Método de Comprensión o Descriptivo :
  Consiste en encerrar entre llaves una propiedad (frase) que exprese claramente los requisitos que debe satisfacer un elemento para pertenecer al conjunto en cuestión.

  Ejemplo:
  El conjunto de las letras de la palabra matemáticas.
  A) Enumeración : {m,a,t,e,i,c,s}
  B) Comprensión : {x/x es un letra de la palabra matemáticas} (se lee: x "tal que" x es una letra de la palabra matemáticas).

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Basándose en la definición de conjunto, diga si los siguientes enunciados representan o no un conjunto :
1) Los 10 mejores obras musicales de todos los tiempos. NO
2) Los mejores programas de televisión. NO
3) Los activos de la empresa "La Mercantil" a fines de 1979. SI
4) Los alumnos que acreditaron Matemáticas I en la Universidad Anáhuac en 1985. SI
5) Los albañiles de México que ganan un sueldo diario de un millón de pesos. SI

B) Especifique los siguientes conjuntos por el método de enumeración o comprensión según sea el caso :
1) A = {los océanos del planeta tierra}
   A = {pacífico, atlántico, índico, ártico, antártico}
2) B = {los números reales enteros positivos}
   B = {1,2,3,4,5,...}
3) C = {dimus, fobos}
   C = {x/x es un satélite del planeta marte}
4) D = {américa, guadalajara, atlante,... }
   D = {x/x es un equipo de foot ball profesional de primera división en México}

5) $E = \{+4, -4\}$
$E = \{x/x = \sqrt[2]{16}\}$

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Basándose en la definición de conjunto, diga si los siguientes enunciados representan o no un conjunto :
1) Los objetivos institucionales de la UNAM.
2) Los coches que viajan a más de 1000 km/hr.
3) Las aves que llegan a la luna.
4) Los 10 mejores programas de la T.V. mexicana según Teleguia.
5) Los objetivos de la Universidad.
6) Los 10 mejores coches del mundo.
7) Las gentes que tienen más de 200 años de vida.
8) Los integrantes de la selección de foot ball mexicana.
9) Los desiertos con clima frio de la tierra.
10) Los granos de arena de la playa del puerto de Veracrúz.

B) Especifique los siguientes conjuntos por el método de enumera - ción o comprensión, según sea el caso :
1) A ={ x/x es un punto cardinal }
2) B ={ x/x es una vocal del alfabeto castellano }
3) C ={ la luna }
4) D ={ américa, asia, áfrica, europa, oceanía }
5) A ={ b,c,d,f,... z }
6) B ={ x/x es un dedo de la mano humana }
7) C ={ Miguel de la Madrid }
8) A ={ x/x es un número entero,par,positivo }
9) B ={ mercurio, venus, tierra,... plutón }
10) C ={ gusto, tacto, vista, oido, olfato }

4.3 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS Y ELEMENTOS

+ Existen básicamente dos relaciones entre conjuntos y elementos :
  A) Relación de pertenencia y no pertenencia.
  B) Número de elementos de un conjunto.

4.3.1 RELACION DE PERTENENCIA Y NO PERTENENCIA

+ Un elemento determinado puede pertenecer (formar parte o ser - miembro) o no pertenecer a un conjunto.

+ Para simbolizar la pertenencia se utiliza la letra griega "epsilon" :

$$\boxed{\epsilon}$$

Así, cuando un elemento "a" pertenece a un conjunto "A", se representa :

$$a \in A$$

Y cuando un elemento "a" no pertenece a un conjunto "A", se representa :

$$a \notin A$$

+ Es importante aclarar que la pertenencia es una relación que vincula a cada elemento con un conjunto y no la relación que vincula elementos entre sí o conjuntos entre sí.

Ejemplo:
Si A = { x/x es una cuenta del balance general de "Z" empresa }

Entonces :	acreedores	$\in$	A
	mobiliario y equipo	$\in$	A
	acciones comunes	$\in$	A
En cambio :	ventas	$\notin$	A
	sueldos y salarios	$\notin$	A
	gastos de administración	$\notin$	A

4.3.2 NUMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

+ Para cualquier conjunto "A", el número de elementos que integran este conjunto se representa por :

$$\boxed{n(A)}$$

Ejemplo:
De los siguientes conjuntos indique cuál es el número de elementos y enumérelos:

1) A = { a,b,c }
   n(A) = n(a,b,c) = 3
2) B = { 3,5,7,9,11,9 }
   n(B) = n(3,5,7,9,11,9) = 5
3) C = { x/x es un número entero entre 10 y 20 }
   n(C) = n(10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20) = 11
4) El cuadro siguiente indica la distribución de los meseros del restaurante "El Goloso" S.A., en función de sexo, edad y estudios :

sexo / estudios / edad	hombres		mujeres	
	primaria	secundaria	primaria	secundaria
21 a 30	4	5	13	5
31 a 40	31	12	18	3
41 a 50	75	20	16	2
51 1 60	51	11	14	1

Especifique por comprensión el conjunto de referencia.
A = { x/x es un mesero o mesera del restaurante "El Goloso" }

Obtenga el número de elementos de cada uno de los conjuntos siguientes :

a) A = { x/x es un mesero que estudió solamente primaria }
$n(A) = 4+31+75+51$ $n(A)=161$

b) B = { x/x es una mesera que estudió solamente primaria y tiene entre 31 y 40 años de edad }
$n(B) = 18$

c) C = { x/x es un mesero o una mesera del restaurante "El Goloso" }
$n(C) = 161+48+61+11$ $n(C) = 281$

4.4 RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

+ Para poder analizar las relaciones entre conjuntos, es necesario definir antes algunos conjuntos catalogados como "especiales".

4.4.1 CONJUNTOS ESPECIALES

+ Son 4 :
  A) Conjunto Universal
  B) Conjunto Vacío
  C) Conjunto Finito
  D) Conjunto Infinito

A) Conjunto Universal

+ Es aquel conjunto que contiene todos los elementos existentes del conjunto particular en el que se está interesado.
  Puede decirse que el conjunto universal es " un conjunto de referencia para el conjunto que estudiamos ". (3)
+ Se representa por la letra griega omega : "ω" ó por la letra "Ω".
+ El conjunto universal normalmente se elige de acuerdo a las necesidades y tomando en cuenta 2 consideraciones:
  a) el conjunto universal no es "único", ya que depende de:
  - la naturaleza de los elementos estudiados o del problema que se esté analizando.
  - el grado de amplitud que se quiera dar al problema.

---

(3) Fiol Michel. Arias Galicia Fernando. "Elementos de Matemáticas para las Ciencias de la Administración y el Comportamiento". Pag. 42.

b) el conjunto universal de un mismo problema analizado puede ser distinto dependiendo de:
   - el criterio que se aplique para elegirlo.

   Ejemplos :

   1) Si el conjunto a considerar incluye como elementos a las empresas textiles del centro del D.F., el conjunto universal a elegir puede ser:
      - El conjunto de empresas textiles de México.
      - El conjunto de empresas textiles de América.
      - El conjunto de empresas textiles del mundo.

      La elección del conjunto universal dependerá de cuáles empresas textiles se esté hablando en cuanto a su localización se refiere (criterios para elegirlo).

   2) Si el conjunto a considerar incluye como elementos a los libros de Matemáticas de la Biblioteca de la Universidad Anáhuac, el conjunto universal podría ser :
      - El conjunto de los libros de Matemáticas de México.
      - El conjunto de los libros de Matemáticas en español.
      - El conjunto de los libros de Matemáticas en todos los idiomas.

+ Es importante aclarar que la relativa libertad que se tiene para elegir al conjunto universal no implica que éste deba tomarse como un conjunto impreciso o de naturaleza variable. De hecho, al ser escogido el conjunto universal, éste permanece fijo durante todo el análisis de una situación particular.

8) Conjunto Vacío

+ El conjunto vacío " es aquel conjunto particular que no contiene ningún elemento " (4). Es decir, es un conjunto que carece de elementos.

+ Se representa por la letra griega fi: "ϕ" o por { } .

+ El conjunto vacío sí es un conjunto "único".

+ Es importante aclarar que el conjunto vacío "ϕ" es distinto de "0" y "{0}" :

   ϕ o { } --- es el conjunto vacío.
   {0} --- es un conjunto formado por un elemento: el "0".
   0 --- no es un conjunto, es un número.

---

(4) Springer H. Clifford, Herlihy E. Robert, Beggs I. Robert. "Matemáticas Básicas". Pag. 262.

Ejemplos :

1) Los siguientes conjuntos son vacíos :

A= { x/x es una persona viviente mayor de 200 años. }

B= { x/x es una planta industrial con 75 millones de empleados }

C= { x/x es un perro que habla }

C) Conjunto Finito

+ El conjunto finito " es aquel cuyos elementos se pueden listar exhaustivamente y contar uno a uno hasta el último ". (5)
En otras palabras, un conjunto es finito cuando al contar los elementos del mismo, el proceso de conteo puede acabar.

Ejemplos :

1) Los siguientes conjuntos son finitos :

A= { x/x es un día de la semana }

B= { x/x es un residente del D.F. }

C= { x/x es un empleado de la empresa "X" S.A. }

D= { x/x es un grano de arena de la playa de Mazatlán }

D) Conjunto Infinito

+ El conjunto infinito " es aquel cuyos elementos no se pueden listar exhaustivamente porque nunca se terminan de contar ". (6)

Ejemplos :

1) Los siguientes conjuntos son infinitos :

A = { x/x es un número entero positivo }

B = { x/x es una recta que pasa por un punto }

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos :

1) $\{P\} = \{P,Q\}$	6) $\phi = \{\phi\}$
2) $\{Q,0,1\} = \{\phi,1\}$	7) $\{5\} = 5$
3) $\{\phi\} = \{0\}$	8) $\phi \in \{5\}$
4) $\{2-2\} = \{0\}$	9) $\{x/x \in N,\ 1<x<2\} = \{0\}$
5) $\phi = \{0\}$	10) $\{x/x \in N,\ x<3\} = \{2,1\}$

(Sea N= conjunto de números enteros positivos).

---

(5) Fiol Michel, Enriquez F. Jose Jaime. "Algebra para Estudiantes de Administración y Economía". Pag. 43.

(6) Ibidem.

B) De los siguientes conjuntos, diga si es finito o infinito y represéntelos por comprensión y por enumeración :

1) El conjunto de \$250,000 en acciones comunes y \$500,000 en bonos que constituyen el capital de la empresa enlatadora "La Lata".
2) El conjunto de los enteros positivos pares.
3) El conjunto de las empresas : "Cartón y Papel de México", "Astrolito" y "Kimberly Clark", proveedoras de "Artículos de Cartón DIN".
4) El conjunto de las letras de la palabra "rentabilidad".
5) El conjunto de transacciones de venta de la casa de artículos para el hogar "Kalmar".

4.4.2 CONJUNTOS IGUALES

+ "El conjunto A es igual al conjunto B, si ambos tienen los mismos elementos, si cada elemento que pertenece a A, pertenece también a B y si cada elemento que pertenece a B, pertenece también a A." (7)

+ En símbolos :

  Para todo $a \in A$ --- se tiene que $a \in B$ y,
  para todo $b \in A$ --- se tiene que $b \in B$

+ Si dos conjuntos son iguales, se representa $A = B$.

+ Es importante recordar que:
  - Dos conjuntos pueden ser iguales sin importar que los elementos no estén en el mismo orden.
  - Dos conjuntos pueden ser iguales a pesar de que se repitan sus elementos.
  - Dos conjuntos definidos por el método de comprensión pueden ser iguales aunque las frases que los definan sean diferentes.
  - Dos conjuntos vacíos son iguales; ésto confirma que el conjunto vacío es único.

  Ejemplos :

  1) Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{3,4,2,1,5\}$ Entonces : $A = B$
  2) Si $A = \{6,7,6,8\}$ y $B = \{8,6,8,7\}$ Entonces : $A = B$
  3) Si $A = \{x/x$ es uno de los tres socios de la Cía.Mexicana S.A.$\}$ y
     $B = \{$Juan Pérez, José López y Jesús Gómez$\}$

     Entonces: $A = B$

(7) Lipschutz Seymour. "Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos y Temas Afines". Pag.2.

4) Si $A = \{x/\ (x-2)(x-1)=0\}$ y $B = \{x/\ 0<x<3\}$ Entonces: $A = B$
5) Si $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$ Entonces: $A' = B$

4.4.3 CONJUNTOS DESIGUALES

+ El conjunto "A" es desigual o diferente del conjunto "B", si alguno de ellos posee un elemento que no pertenezca también al otro.

+ En símbolos :

Existe un elemento a tal que $a \notin A$ y $a \notin B$ o
existe un elemento b tal que $b \notin A$ y $b \notin B$

+ Si dos conjuntos son desiguales se representa : $A \neq B$

Ejemplos :
1) Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{1,4,3\}$ Entonces: $A \neq B$
2) Si A = { x/x es el matrimonio de los reyes de España}
y B = {El rey Juan Carlos}
Entonces: $A \neq B$
3) Si A = { x/x es un número entero positivo mayor a 5 y menor a 10 }
y $B = \{6,8,9\}$
Entonces: $A \neq B$

4.4.4 CONJUNTOS DISJUNTOS

+ Dos conjuntos "A" y "B" son disjuntos si, y solo si, no tienen elementos comunes, es decir, si no existe ningún elemento que pertenezca a ambos conjuntos.

Ejemplos :
1) Si $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{5,6,7,8\}$ Entonces AyB son disjuntos.
2) Si A = { x/x es un obrero de la empresa "X" S.A. }
y B = { x/x es un gerente de la empresa "X" S.A. }
Entonces : AyB son disjuntos porque ningún obrero de la empresa es gerente de la misma y viceversa.
3) Si A = { x/x es un número entero positivo}
y B = { x/x es un número entero negativo}
Entonces : AyB son disjuntos porque ningún número positivo es negativo o viceversa.

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Colocar un signo "=" o "≠", o bien la palabra disjunto, según convenga :

1) $\{a+b, (b-a)(b+a), a+a\}$ ____ $\{b^2-a^2, 2a, a+b\}$

2) $\{5+1, 7, 34+16, 0\}$ ____ $\{5-4, 51, 2, 8+1\}$

3) $\{3^4, 2^0, 5^2, 25\}$ ____ $\{9^2, 1, 25\}$ ____ $\{81, 37^0, 25, 25\}$

4) $\{\frac{0}{15}, 1^0, \frac{4}{4}, 1\}$ ____ $\{0, 1\}$

5) $\{(a+b)^3-(a+b)^2\}$ ____ $\{-a^2-b^2+2ab+b^3+3a^2b+3ab^2+a^3\}$

4.5 SUBCONJUNTOS

4.5.1 DEFINICION

+ Un conjunto "B" es "subconjunto" del conjunto "A", si todo elemento de "B" es también elemento de "A", es decir que "B" esté incluido en "A".

+ La forma de representar ésto es:

$$\boxed{B \subset A}$$

que se lee: "el conjunto B es subconjunto del conjunto A" y significa que todos los elementos de "B" están incluidos en "A". Y :

$$\boxed{B \not\subset A}$$

se lee: "el conjunto B no es subconjunto del conjunto A" y significa que cuando menos un elemento de "B" no es elemento de "A".

+ En el caso de que "A" sea igual a "B", entonces a será "subconjunto propio" de "B" y a la vez, "B" será subconjunto propio" de "A". Lo anterior se representa :

$$\boxed{B \subseteq A}$$

y significa que :

Si : $A = B$

Entonces : $A \subset B$

$B \subset A$

Y : $A \subseteq B$

+ Esta relación de inclusión o de subconjunto, es parecida a la de pertenencia ($\in$), sólo que la primera relaciona conjuntos con conjuntos y la segunda relaciona elementos con conjuntos.

Así: si "a" es un elemento del conjunto "A" se escribe : $a \notin A$
si el conjunto "B" es un subconjunto del conjunto "A", se - escribe $B \subset A$, pero se prohibe escribir $a \subset A$, porque "a" es un elemento y no un conjunto.

Ejemplos :

1) A = { población del D.F. } B = { población de México }
   $A \subset B$ (A es subconjunto de B)
2) A = { pasivos circulantes } B = { activos }
   $A \not\subset B$ (A no es subconjunto de B)
3) $A = \{a, e, i, o, u, z\}$ $B = \{x/x$ es una vocal$\}$
   $A \not\subset B$ (A no es subconjunto de B)
4) A = { producción, ventas, recursos humanos, finanzas }
   B = { x/x es un área funcional de la empresa }
   $A \subset B$ (A es un subconjunto de B)
5) $A = \{a, b, c, d, e\}$ $B = \{a, b, e, d, c\}$
   $A \subseteq B$ (A es un subconjunto propio de B)

4.5.2 PROPIEDADES DE LOS SUBCONJUNTOS

1) Propiedad Reflexiva :
Todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Esto es cierto porque - todos los elementos de "A" están en "A".

$$A \subseteq A$$

2) Propiedad Transitiva :
Si "A" es subconjunto de "B" y "B", a su vez, es subconjunto de - "C", luego entonces "A" es subconjunto de "C".

$$A \subset B \ \text{ y } \ B \subset C \underset{\text{(implica que)}}{====>} A \subset C$$

3) Propiedad Antisimétrica :
Si el conjunto "A" es subconjunto del conjunto "B", no necesariamente el conjunto "B" debe ser subconjunto de "A".

$$A \subset B \underset{\text{(no implica que)}}{=\!\not=\!=\!=>} B \subset A$$

4) Inclusión del Conjunto Vacío :
El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.
Esto parte de lo siguiente : para que un conjunto "B" no sea subconjunto de otro "A", se necesita que por lo menos un elemento del primero no sea elemento del segundo. Es decir : $a \in B$ y $a \notin A$.

" Como el conjunto vacío carece de elementos, esta situación, nunca puede presentarse, y por lo tanto no importando cuál sea el conjunto A que se elija (incluyendo los casos $A = \phi$ y $A = \mathbb{U}$), siempre se cumplirá que :

$$\phi \subset A$$ " (8)

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Sean los siguientes conjuntos :

$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h,i \}$
$B = \{ a,b,c,d,e \}$
$C = \{ b,d,f,g,i \}$
$D = \{ c,f,i \}$
$E = \{ c,i \}$
$F = \{ f \}$
$G = \phi$

Determinar cuáles de los conjuntos anteriores son subconjuntos de:

a) A y B
b) D
c) D y E
d) C y D
e) A,B,C y D

a) $A \subset A$ $\quad B \subset B$
$B \subset A$ $\quad G \subset B$
$C \subset A$
$D \subset A$
$E \subset A$
$F \subset A$
$G \subset A$
Por lo tanto: B y G

b) $D \subset D$
$E \subset D$
$F \subset D$
$G \subset D$
Por lo tanto: D,E,F y G

c) $D \subset D$ $\quad E \subset E$
$E \subset D$ $\quad G \subset E$
$F \subset D$
$G \subset D$
Por lo tanto: E y G

d) $C \subset C$ $\quad D \subset D$
$F \subset C$ $\quad E \subset D$
$G \subset C$ $\quad F \subset D$
$G \subset D$
Por lo tanto: F y G

e) $A \subset A$ $\quad C \subset C$
$B \subset A$ $\quad F \subset C$
$C \subset A$ $\quad G \subset C$
$D \subset A$
$E \subset A$ $\quad D \subset D$
$F \subset A$ $\quad E \subset D$
$G \subset A$ $\quad F \subset D$
$G \subset D$
$B \subset B$
$G \subset B$
Por lo tanto : G

---

(8) Kleiman Ariel, Kleiman Elena K. de. "Conjuntos, Aplicaciones Matemáticas a la Administración". Pag.34.

B) La fábrica de aceites comestibles "Casa S.A." tiene 6 sucursales en el D.F. y otras 6 en el interior de la República : 3 en Querétaro, 1 en Puebla, 1 en Tlaxcala y 1 en San Luis Potosí.
Se pide encontrar las relaciones que existen entre estos conjuntos.

Para lograr lo anterior es necesario formar los conjuntos pertinentes y representarlos en un diagrama de árbol :

F : conjunto de todas las sucursales de "Casa S.A."
M : conjunto de sucursales de "Casa S.A." en el D.F.
I : conjunto de sucursales de "Casa S.A." en el interior de la República.
Q : conjunto de sucursales de "Casa S.A." en Querétaro.
P : conjunto de sucursales de "Casa S.A" en Puebla.
T : conjunto de sucursales de "Casa S.A." en Tlaxcala.
S : conjunto de sucursales de "Casa S.A." en San Luis Potosí.

```
                                                             |-- Querétaro 1 (Q1)
                         Sucursales |-- Querétaro (Q)        |-- Querétaro 2 (Q2)
                         en el inte |                        |-- Querétaro 3 (Q3)
                       |-- rior de la |-- Puebla (P)
Todas las              |   República  |-- Tlaxcala (T)
Sucursales             |     (I)      |-- San Luis Potosí (S)
de "Casa -             |
S.A"                   |              |-- D.F. 1  (D1)
  (F)                  |  Sucursales  |-- D.F. 2  (D2)
                       |-- en el D.F. |-- D.F. 3  (D3)
                             (M)      |-- D.F. 4  (D4)
                                      |-- D.F. 5  (D5)
                                      |-- D.F. 6  (D6)
```

Las relaciones entre los conjuntos son:

$Q_1 \subset Q$
$Q_2 \subset Q$
$Q_3 \subset Q$

$Q \subset I$
$P \subset I$
$T \subset I$
$S \subset I$

$D_1 \subset M$
$D_2 \subset M$
$D_3 \subset M$
$D_4 \subset M$
$D_5 \subset M$
$D_6 \subset M$

$M \subset F$
$I \subset F$

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Complemente la siguiente tabla colocando $\subset$, $\not\subset$ o $\subseteq$.

Conjuntos	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{1,0\}$	$\{3,0,1\}$
$\emptyset$				
$\{1\}$				
$\{1,3\}$				
$\{0,1\}$				
$\{0,1,3\}$				
$\{0\}$				

B) Diga cuáles de los siguientes expresiones son verdaderas , cuáles falsas y el por qué.

$\mathbb{U} \subset A$ si: $A \neq \mathbb{U}$
$0 \in \emptyset$
$A \supset \emptyset$
$2 \subset \{1,2,3\}$
$\emptyset \subset \{0\}$
$\emptyset \subset \{\ \}$
$\mathbb{U} \subset \emptyset$ si: $\mathbb{U} \neq \emptyset$
$0 \in \emptyset$

$\emptyset \in A$
$A \subset \mathbb{U}$
$5 = \{5\}$
$\emptyset \in \{\ \}$
$R \subset R$
$\emptyset \subset \{1,2,x,y\}$
$R \subset 2$

4.5.3 CONJUNTO POTENCIA

+ En el análisis de algunos problemas específicos es importante conocer cuáles son todos los subconjuntos de un conjunto dado.

+ Se llama "conjunto potencia" al conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto. En otras palabras, el conjunto potencia es el conjunto de los subconjuntos y se representa de la siguiente forma :

$$\boxed{\text{Conjunto Potencia de A : } P(A)}$$

o bien:

$$P(A) = \{x / x \subset A \text{ o } X \subseteq A\}$$

+ Existe una regla general para determinar el número total de subconjuntos de un conjunto dado :

$$\boxed{P(A) = 2^{n(A)}}$$

En donde 2 siempre es constante y n(A) es el número de elementos del conjunto dado A.

Ejemplo:

$A = \{x,y,z\}$; encontrar:

a) Todos los subconjuntos de A

b) Cuánto vale el conjunto potencia de A : P(A)

subconjuntos de 0 elementos: ϕ (ϕ es subconjunto de A)
subconjuntos de 1 elemento : $\{x\},\{y\},\{z\}$
subconjuntos de 2 elementos: $\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\}$
subconjuntos de 3 elementos: $\{x,y,z\}$ (A es subconjunto de A)

Entonces :

$P(A) = \{\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\},\phi\}$

Se observa que P(A) está formado por 8 subconjuntos. El número de subconjuntos se hubiese podido encontrar también, utilizando la fórmula :

$P(A) = 2^{n(A)}$

si: $n(A) = 3$

$P(A) = 2^3$

$P(A) = 8$

+ Si se aplica la fórmula del conjunto potencia al conjunto vacío "ϕ", para saber cuántos subconjuntos tiene, se encuentra que :

$P(\phi) = 2^{n(\phi)}$

si: $n(\phi) = 0$

$P(\phi) = 2^0$

$P(\phi) = 1$

Esto confirma que:

- el conjunto vacío es subconjunto de sí mismo.
- todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Encontrar todos los subconjuntos de los conjuntos dados y determinar cuánto vale el conjunto potencia P(A) :

1) $A = \{1,2,3\}$
2) A = {azul,rojo,verde,amarillo}
3) $A = \{a,e,i,o,u\}$
4) A = { Juan,Pedro,Miguel,Pablo }
5) $A = \{a,b,c,d,e,f\}$

4.6 OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

+ En los apartados anteriores se ha utilizado la Teoría de Conjuntos como un lenguaje; ésto ha servido como una simbología adecuada para representar ciertos conceptos y sus relaciones mutuas. En este apartado se definirán las operaciones entre conjuntos.

+ " Las operaciones entre conjuntos son formas específicas de combinar conjuntos para formar otros conjuntos. Constituyen un sistema lógico de construcción de nuevos conjuntos en base a conjuntos dados. Estas operaciones y sus propiedades nos llevan a la teoría de conjuntos como un álgebra, o sea como un "sistema matemático"". (9)

+ Las operaciones entre conjuntos son cuatro :
  A) Complementación
  B) Intersección
  C) Unión
  D) Diferencia

4.6.1 COMPLEMENTACION

Definición

+ Sea "A" un subconjunto cualquiera del conjunto universal. El complemento de cualquier conjunto "A" con respecto al conjunto universal, es el conjunto de los elementos de dicho conjunto universal que no pertenecen a A.

Notación

+ Se designa el complemento de un conjunto "A" con respecto al conjunto universal por :

$$\boxed{A' \; ; \; \overline{A} \; ; \; C(A)}$$

+ Entonces el complemento de un conjunto "A" puede definirse a través de la siguiente expresión matemática.

$$A' = \{ x / x \in \mathcal{U} \text{ y } x \notin A \}$$

---

(9) Kleiman Ariel, Kleiman Elena K. de. Ob.Cit. Pag.55

Ejemplos

1) Sea el conjunto universal: $\mathcal{U} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$
Y los subconjuntos de éste: $A = \{a,b,c\}$
$B = \{d,e,f,g\}$
$C = \{h,i,j\}$

Especifique por extensión los conjuntos A', B' y C'.

$A' = \{d,e,f,g,h,i,j\}$
$B' = \{a,b,c,h,i,j\}$
$C' = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

2) Si "$\mathcal{U}$" es el conjunto de todos los clientes de la empresa de ropa para bebés "Baby Dior S.A." y "A" es el conjunto de los clientes de la misma que pagan sus pedidos al contado. Especificar por comprensión el conjunto A'.

$\mathcal{U}$ = { x/x es un cliente de la empresa "Baby Dior S.A."}
A = { x/x es un cliente de la empresa "Baby Dior S.A." que paga al contado }
A'= { x/x es un cliente de la empresa "Baby Dior S.A." que no paga al contado }

Propiedades

1) $\boxed{\mathcal{U}' = \emptyset}$

El complemento del conjunto universal, es el conjunto vacío. Si en cualquier problema particular el conjunto universal $\mathcal{U}$, contiene todos los elementos a que se puede uno referir, el complemento de este conjunto universal no contiene elementos y es el conjunto vacío. En símbolos:

$$\mathcal{U}' = \{x/x \notin \mathcal{U}\} = \emptyset$$

2) $\boxed{\emptyset' = \mathcal{U}}$

El complemento del conjunto vacío es el conjunto universal. Si en cualquier problema particular el conjunto vacío no tiene elementos, su complemento estará formado por todos los elementos del conjunto universal al cual está referido. En símbolos :

$$\emptyset' = \{x/x \notin \emptyset\} = \{x/x \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}$$

3) $\boxed{(A')' = A}$

El complemento del complemento de un conjunto, es él mismo. El complemento del conjunto A:(A'), está formado por todos los elementos que no pertenecen a A. A su vez el complemento de A' está formado por todos los elementos que "no" están en A' (o sea por todos los que no quedan fuera de A), y éstos son exáctamente los elementos del conjunto A. En símbolos:

$$(A')' = \{x/x \notin A'\} = \{x/x \in A\} = A$$

4) Si: $a \in A$
Entonces: $a \notin A'$

Un elemento del conjunto universal pertenece a un conjunto A o a su complemento A', pero no puede pertencer a los dos al mismo tiempo. Se dice que A y A' son mutuamente excluyentes.

4.6.2 INTERSECCION

Definición

+ La intersección entre dos conjuntos cualesquiera "A" y "B" que están incluidos en un conjunto universal, es el conjunto de elementos que son miembros tanto de A como de B. Es el conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos.

Notación

+ Se designa la intersección de dos conjuntos cualesquiera por el símbolo :

$$\boxed{\cap}$$

+ Entonces, la intersección de dos conjuntos "A" y "B" puede definirse a través de la siguiente expresión matemática :

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplos

1) Sea el conjunto universal $\mathbb{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Y los subconjuntos de éste: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$
$B = \{4,5,6,7,8\}$
Especifique por extensión la intersección entre A y B, así como la intersección del complemento del conjunto A: A' y B.

$A \cap B = \{4,5,6\}$
$A' \cap B$: $A' = \{7,8,9,10\}$
$A' \cap B = \{7,8\}$

2) Si $\mathbb{U}$ es el conjunto de todas las empresas de cajas de cartón en el D.F., A es el conjunto de empresas que fabrican cajas de cartoncillo en el D.F. y B es el conjunto de empresas que fabrican cajas de cartón corrugado en el D.F., especifique por comprensión la intersección entre A y B.

$A \cap B = \{$ x/x es una empresa en el D.F. que fabrica cajas de cartoncillo y cajas de corrugado $\}$

Propiedades

1) $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ La operación de intersección es conmutativa.

2) $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C}$ La operación de intersección es asociativa.

3) $\boxed{A \cap A = A}$ Cuando dos conjuntos son iguales (A=A), los elementos comunes a los dos conjuntos son los que forman el propio conjunto.

4) $\boxed{A \cap \emptyset = \emptyset}$ La intersección de cualquier conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío. Como el conjunto vacío carece de elementos, no pueden existir elementos comunes entre él y otro conjunto A, cualquiera que sea este último.

5) $\boxed{A \cap U = A}$ La intersección de cualquier conjunto con el conjunto universal, es el mismo conjunto. Si A es un subconjunto del conjunto universal, todo elemento que pertenece a A, pertenece al conjunto universal también.

6) $\boxed{A \cap A' = \emptyset}$ La intersección entre dos conjuntos complementarios es el conjunto vacío porque un conjunto no tiene ningún elemento en común con su complemento.

7) Si: A disjunto de B $A \cap B = \emptyset$ — La intersección entre dos conjuntos disjuntos es el conjunto vacío, porque entre ambos conjuntos no existe ningún elemento en común.

8) Si: A no disjunto de B $A \cap B \neq \emptyset$ — Si existen elementos en común entre dos conjuntos, la intersección es diferente del conjunto vacío.

9) $\boxed{A \cap B \cap C \ldots}$ La intersección es aplicable a cualquier número de conjuntos.

4.6.3 UNION

Definición

+ La unión de dos conjuntos cualesquiera "A" y "B" que están incluidos en un conjunto universal, es el conjunto de elementos que pertenecen a "A", a "B" o a ambos ("A"y"B").

Notación

+ Se designa la unión de dos conjuntos cualesquiera por el símbolo:

$$\boxed{\cup}$$

+ Entonces la unión de dos conjuntos "A" y "B" puede definirse a través de la siguiente expresión matemática :

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplos

1) Sea el conjunto universal : $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
Y los subconjuntos de éste: $A = \{1,2,3\}$
$B = \{3,4,5,8\}$
Especifique por extensión la unión de A y B.
$A \cup B = \{1,2,3,4,5,8\}$
Nótese que el elemento 3 forma parte de ambos conjuntos ($A \cap B$) y se indica una sola vez.

2) La empresa "Enlatadora de México S.A." ha decidido fusionarse con la empresa "Latas Durables S.A." para formar una sola empresa denominada "Latas de México S.A."; los socios de la primera son los Sres. Juan Pérez, Raúl Gómez y Eustaquio Rodríguez ; los socios de la segunda son los Sres. Agustín Blanco, Raúl Gómez, Juan Pérez y Carlos Diez.
¿ Cómo queda integrada la nueva empresa ?

A = { x/x es un socio de la empresa "Enlatadora de México S.A." }
A = { Juan Pérez, Raúl Gómez, Eustaquio Rodríguez }

B = { x/x es un socio de la empresa "Latas Durables S.A." }
B = { Agustín Blanco, Raúl Gómez, Juán Pérez y Carlos Diez }

C = { x/x es un socio de la nueva empresa "Latas de México S.A." }
C = $A \cup B$ = { Juan Pérez, Raúl Gómez, Eustaquio Rodríguez, Agustín Blanco, Carlos Diez }

Los socios de la nueva empresa ($A \cup B$) son tanto los socios de la empresa A, como los socios de la empresa B, así como los socios de ambos ($A \cap B$).

Propiedades

1) $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ La operación de unión de conjuntos es conmutativa.

2) $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C}$ La operación de unión es asociativa.

3) $\boxed{A \cup A = A}$ La unión de dos conjuntos iguales es el conjunto mismo porque los elementos de A y los de A son idénticos.

4) $\boxed{A \cup \emptyset = A}$ La unión de un conjunto cualquiera y el conjunto vacío es igual al conjunto mismo. Como el conjunto vacío no tiene elementos, el conjunto de los elementos de ambos conjuntos incluye solo los elementos de A.

5) $\boxed{A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}}$ La unión de cualquier conjunto con el conjunto universal es igual al conjunto universal, porque los elementos de A son también elementos del conjunto universal.

6) $\boxed{A \cup A' = \mathcal{U}}$ La unión de un conjunto cualquiera con su complemento es igual al conjunto universal, porque los elementos del conjunto A' son los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A.

7) $\boxed{\begin{array}{l} A \cup B = \emptyset \\ \text{Si: } A=\emptyset \\ \text{y: } B=\emptyset \end{array}}$ La unión de dos conjuntos es igual al conjunto vacío, sólo si ambos conjuntos son vacíos.

8) $\boxed{A \cup B \cup C \ldots}$ La unión es aplicable a cualquier número de conjuntos.

4.6.4 DIFERENCIA

Definición

+ La diferencia entre dos conjuntos cualesquiera "A" y "B" que es- tán incluidos en un conjunto universal, es el conjunto de los elementos que pertencecen a "A" y no pertenecen a "B". En otras palabras, es el conjunto de los elementos que faltan a "B" para tener todos los elementos de "A".

Notación

+ Se designa la diferencia de dos conjuntos cualesquiera a través del signo :

$$\boxed{\;-\;}$$

+ Entonces, la diferencia de dos conjuntos "A" y "B" puede definirse por medio de la siguiente expresión matemática :

$$A - B = \{x/x \in A \text{ o } x \notin B\}$$

Ejemplos

1) Si $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{3,3,4,7\}$
   Especifique por extensión, la diferencia de A-B.
   $A - B = \{1,2,5,6\}$
2) En el ejemplo número 2 de la unión de conjuntos, especifique la diferencia del conjunto de los socios de la nueva empresa "Latas de México S.A." creada por la fusión, y el conjunto de los socios de la empresa "Latas Durables S.A."
   C = A U B = { Juan Pérez, Raúl Gómez, Eustaquio Rodríguez, Agustín Blanco, Carlos Diez }
   B = { Agustín Blanco, Raúl Gómez, Juán Pérez, Carlos Diez }
   C - B = { Eustaquio Rodríguez }
   La diferencia entre ambos es un solo socio, el cuál pertenecía a la empresa A pero no pertenecía a la empresa B.

Propiedades

1) $\boxed{A - B \neq B - A}$ La operación de diferencia no es conmutativo, excepto en el caso de que ambos conjuntos sean iguales. Ejemplo:

$A = \{1,2,3,4,5\}$
$B = \{1,2,6,7,8\}$ Entonces: $A - B = \{3,4,5\}$, $B - A = \{6,7,8\}$

$A = \{1,2,3\}$
$B = \{1,2,3\}$ Entonces: $A - B = \emptyset$, $B - A = \emptyset$

2)

$(A - B) \subset A$
$(B - A) \subset B$

El conjunto de los elementos que pertenecen a A y no a B (A-B) pertenecen a A, por tanto esta diferencia es subconjunto de A. Lo mismo sucede en el caso de (B-A).

3)

Si: $A \subset B$
$A - B = \phi$

Si un conjunto es subconjunto de otro y se le resta éste segundo, se obtiene como resultado el conjunto vacío, porque no hay ningún elemento que pertenezca al subconjunto y no al conjunto en el cuál este subconjunto está incluido. Ejemplo:

$B = \{1,2,3,4,5\}$
$A = \{1,2\}$ Entonces: $A \subset B$ y: $A - B = \phi$

4)

$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$
$(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$
$(A - B) \cap (B - A) = \phi$

La intersección de cualquiera de estos conjuntos es vacío.

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Sea $= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
Y sus subconjuntos : $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{2,4,6,8\}$
$C = \{1,3,5,7\}$ $D = \{5\}$
Aplicando las definiciones de las operaciones obtenga los conjuntos :

1) A' $= \{5,6,7,8,9,10\}$
2) B' $= \{1,3,5,7,9,10\}$
3) C' $= \{2,4,6,8,9,10\}$
4) $A \cup B$ $= \{1,2,3,4,6,8\}$
5) $(A \cup B)'$ $= W - (A\cup B) = \{5,7,9,10\}$
6) $B \cup C$ $= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
7) $(B \cup C)'$ $= W - (B\cup C) = \{9,10\}$
8) $C \cup D$ $= \{1,3,5,7\}$
9) $(C \cup D)'$ $= W - (C\cup D) = \{2,4,6,8,9,10\}$
10) $A - B$ $= \{1,3\}$
11) $B - A$ $= \{6,8\}$
12) $B - C$ $= \{2,4,6,8\}$
13) $A - D$ $= \{1,2,3,4\}$
14) $C - D$ $= \{1,3,7\}$
15) $(A \cap C) \cup D$ $= \{1,3\} \cup \{5\} = \{1,3,5\}$

16) $(A')'$ = $A = \{1,2,3,4\}$
17) $B \cap C$ = ϕ
18) $A \cap C$ = $\{1,3\}$
19) $(A \cap C)'$ = $U - \{1,3\} = \{2,4,5,6,7,8,9,10\}$
20) $(A \cap B \cap C \cap D) \cup D$ = $(A \cap B \cap C \cap D) = \phi$
$\phi \cup D = D = \{5\}$

B) Una empresa con 250 obreros está en huelga; el gerente general recabó los datos acerca de la posición de los diferentes grupos de trabajadores frente a la huelga. Los resultados se encuentran tabulados en la siguiente tabla :

Posición			obreros:		
	capataces	supervisores	maestros	auxiliares	Total
A favor de la huelga	6	24	50	80	160
En contra de la huelga	2	19	21	38	80
Sin opinión	2	1	0	7	10
Total	10	44	71	125	250

Partiendo de que:

F = conjunto de empleados que están a favor de la huelga
N = conjunto de empleados que estan en contra de la huelga
C = conjunto de capataces
S = conjunto de supervisores
M = conjunto de maestros

Determine el número de empleados de cada uno de los siguientes conjuntos :

$n(F) = 160$ $C \cup S = 10+44 = 54$ $N-(S \cup C) = 80-21 = 59$
$n(C) = 10$ $F \cap S = 24$ $(F \cup N)' \cap C = 2$
$n(S) = 44$ $(F \cup N)' = 250-(60+80) = 10$ $M-(F \cup N)' = 71-0 = 71$
$n(M) = 71$ $(S \cup M) \cap N = 19+21 = 40$

Escriba cada uno de los siguientes conjuntos usando sólo los símbolos: F, N, C, S, M, ', $\cup$, $\cap$.

a) El conjunto de empleados que están a favor de la huelga y que no son obreros auxiliares.
$(C \cup S \cup M)' \cap F$
b) El conjunto de empleados sin opinión.
$(F \cup N)'$
c) El conjunto de empleados que no dieron opinión y son obreros auxiliares.
$(F \cup N)' \cap (C \cup S \cup M)'$
d) El conjunto de empleados obreros y en contra de la huelga.
$N \cap (C \cup S)'$

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Complete las siguientes expresiones :

1) $S \cap \phi =$
2) $\{0\} \cup \{0\} =$
3) $Q \cup W =$
4) $A' \cup A =$
5) $\phi \cap \{Z\} =$
6) $W - K' =$
7) $B \cap W =$
8) $A \cap A' =$
9) $M - N \subset$
10) $(A - B) \cap (B-A) =$

B) Bajo qué circunstancias las siguientes proposiciones son ciertas:

1) $M \subset \phi$
2) $M \cap L' = M$
3) $M \cup L = M \cap L$
4) $(A \cup B) \cap B' = A$
5) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$

C) Exprese la proposición $P \subset Q$, utilizando los siguientes conjuntos y operaciones : $P, Q, \cup, \cap$.

D) Dado el conjunto $F = \{0,5,9,20,26,34,48,65\}$
Construya 4 subconjuntos de F que sean diferentes al conjunto vacío ϕ y que satisfagan las siguientes 2 condiciones :
$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 = F$ y :
$F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_3 \cap F_4 = F_4 \cap F_1 = \phi$

E) Si: $F \cup G = \phi$
¿ Qué se puede concluir de los conjuntos F y G ?
Si: $F \subset G$ y $F \cap G = \phi$
¿ Cómo debe ser F ?
Si: $F \cap G = \phi$
¿ Qué se puede concluir de F y G ?

4.6.5 ALGEBRA DE CONJUNTOS

+ En resúmen, las propiedades a las que obedecen las operaciones entre conjuntos son :

1) Leyes Conmutativas:	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
2) Leyes Asociativas:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3) Leyes Distributivas:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4) Leyes de Tautología:	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
5) Leyes de Absorción:	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
6) Leyes de Complementación:	$A \cap A' = \phi$ $A \cup A' = \mathcal{U}$
7) Ley de la Doble Complementación:	$(A')' = A$
8) Leyes de Morgan:	$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$
9) Leyes de ϕ y $\mathcal{U}$:	$\phi \cap A = \phi$ $\phi \cup A = A$ $\phi' = \mathcal{U}$ $\mathcal{U} \cap A = A$ $\mathcal{U} \cup A = \mathcal{U}$ $\mathcal{U}' = \phi$

+ Todas estas propiedades se derivan de las definiciones de conjunto universal y conjunto vacío, de las operaciones de complementación, intersección, unión y diferencia y de la relación de igualdad entre conjuntos.
+ Estas propiedades caracterizan un "sistema matemático" que se denomina Algebra de Conjuntos. Este sistema está formado por:
  - elementos : los conjuntos (incluyendo $\mathcal{U}$ y ϕ).
  - relaciones : de igualdad y de inclusión.
  - operaciones: de complementación, intersección, unión y diferencia.

4.7 DIAGRAMAS DE VENN

Definición

+ Las imágenes ayudan a menudo a visualizar conceptos abstractos. - Es por ello que al trabajar con conjuntos, con las relaciones y operaciones entre ellos, es útil disponer de un sistema de representación gráfico que permita visualizar lo que ocurre e interpretar las deducciones obtenidas.

+ El procedimiento para representar gráficamente los conjuntos se - conoce como "Diagramas de Venn".

+ Los Diagramas de Venn consisten en dibujar un rectángulo para representar el conjunto universal y círculos (u otras figuras) para representar los subconjuntos del mismo, en cuyo interior estarán todos los elementos.

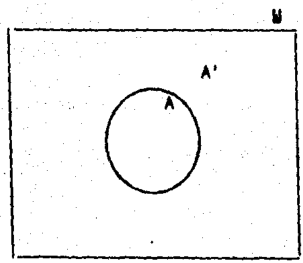
+ Si no se sabe nada específico acerca de los conjuntos que se pretende representar, los círculos se dibujarán de forma que puedan representarse todas las posibles operaciones y relaciones entre - ellos.

Representación

+ Se ilustrará la utilidad de los Diagramas de Venn considerando diversos casos de representación gráfica de conjuntos :

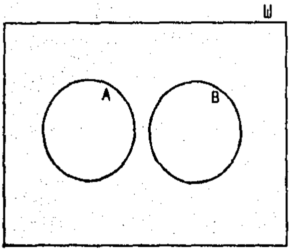
Caso 1

Representación gráfica de un subconjunto "A" del conjunto universal "W"

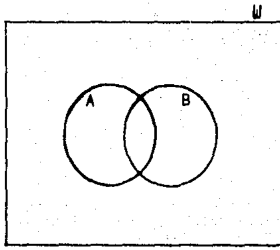


<u>Caso 2</u>

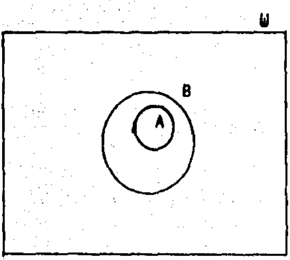
Representación gráfica de dos subconjuntos "A" y "B" del conjunto universal "W"



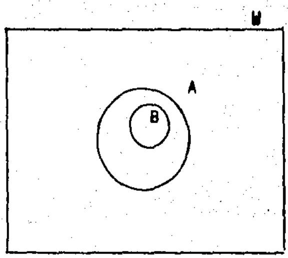
$A \neq B$
(Disjuntos)



$A \neq B$
(Con Elementos Comunes)



$A \subset B$



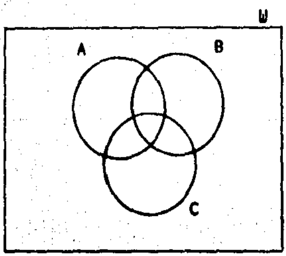
$A \subset B$

A través de estos Diagramas de Venn, puede observarse y comprobarse que :

$A \subset B$ si y solo si $A \cap B = A$
$A \subset B$ si y solo si $A \cap B' = \phi$
$A \subset B$ si y solo si $A' \cap B = B - A$

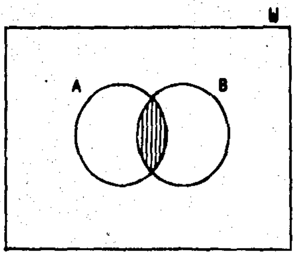
Caso 3

Representación gráfica de tres subconjuntos "A", "B" y "C" del conjunto universal "W" :

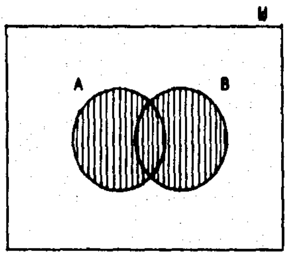


Caso 4

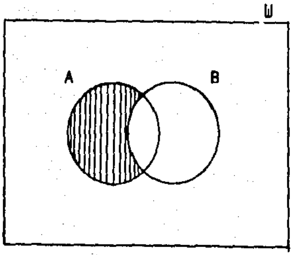
Representación gráfica de las operaciones entre conjuntos :



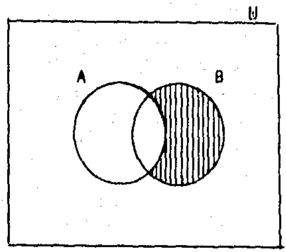
A ∩ B
(Intersección)



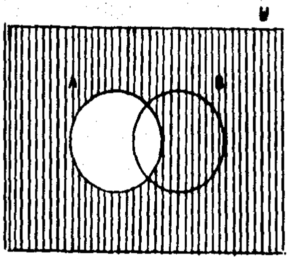
A U B
(Unión)



A - B
(Diferencia)



B - A
(Diferencia)



A'
(Complementación)

A través de estos Diagramas de Venn pueden observarse y comprobarse algunas propiedades de esas operaciones :

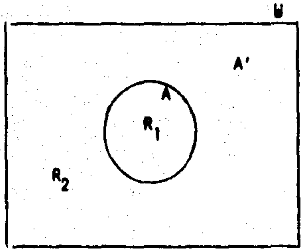
Intersección	Unión	Complementación
$A \cap B \subset A$	$A \subset A \cup B$	$A \cup A' = \mathbb{U}$
$A \cap B \subset B$	$B \subset A \cup B$	$A \cap A' = \emptyset$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cap B \subset A \cup B$	$(A')' = A$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	
$A \cap \mathbb{U} = A$	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$	

4.7.1 REGIONES EN LOS DIAGRAMAS

+ En cualquier Diagrama de Venn pueden reconocerse varias regiones. Las regiones se simbolizan por la letra "R" y son utilizadas para identificar las relaciones de pertenencia y las operaicones combinadas entre los conjuntos.
+ Las regiones que pueden definirse en los tres diagramas más utilizados son :

Caso 1

Regiones de un subconjunto "A" del conjunto universal "U" :

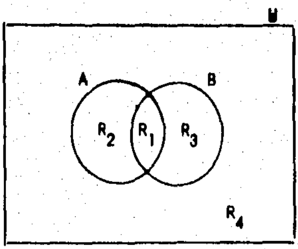


Se obtienen 2 regiones :

Región:	Por Comprensión:	Corresponde a:
R_1	$= \{ x/x \in A \}$	A
R_2	$= \{ x/x \in A' \}$	A'

Caso 2

Regiones de dos subconjuntos "A" y "B" de conjunto universal "U":

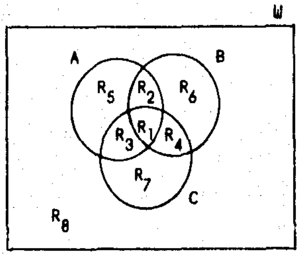


Se obtienen 4 regiones :

Región:	Por Comprensión:	Corresponde a:
R_1	$=\{x/x \in A$ y $x \in B\}$	$A \cap B$
R_2	$=\{x/x \in A$ y $x \notin B\}$	$A - B$
R_3	$=\{x/x \notin A$ y $x \in B\}$	$B - A$
R_4	$=\{x/x \notin A$ y $x \notin B\}$	$(A \cup B)'$

Caso 3

Regiones de tres subconjuntos "A", "B" y "C" del conjunto universal "W" :



Se obtienen 8 regiones :

Región:	Por Comprensión:	Corresponde a:
R_1	$=\{x/x \in A, x \in B, x \in C\}$	$A \cap B \cap C$
R_2	$=\{x/x \in A, x \in B, x \notin C\}$	$A \cap B \cap C'$
R_3	$=\{x/x \in A, x \notin B, x \in C\}$	$A \cap B' \cap C$
R_4	$=\{x/x \notin A, x \in B, x \in C\}$	$A' \cap B \cap C$
R_5	$=\{x/x \in A, x \notin B, x \notin C\}$	$A \cap B' \cap C'$
R_6	$=\{x/x \notin A, x \in B, x \notin C\}$	$A' \cap B \cap C'$
R_7	$=\{x/x \notin A, x \notin B, x \in C\}$	$A' \cap B' \cap C$
R_8	$=\{x/x \notin A, x \notin B, x \notin C\}$	$A' \cap B' \cap C'$

Aplicaciones de las Regiones

+ El definir las regiones dentro de un Diagrama de Venn tiene dos aplicaciones fundamentalmente :

A) Cualquier conjunto expresado en términos de diversas operaciones puede representarse por alguna combinación específica de regiones de un Diagrama de Venn.

Ejemplo :
Tomando como referencia las regiones en el diagrama Caso 2: dos subconjuntos "A" y "B" del conjunto universal "W", especifique las regiones a que corresponden las siguientes expresiones:

1)	$W = R_1, R_2, R_3, R_4$	6)	$A \cap B' = R_2$
2)	$A = R_1, R_2$	7)	$A' \cap B = R_3$
3)	$A' = R_3, R_4$	8)	$A \cap B = R_1$
4)	$B = R_1, R_3$	9)	$(A \cap B)' = R_2, R_3, R_4$
5)	$B' = R_2, R_4$	10)	$(A \cup B)' = R_4$

B) Las propiedades de las operaciones entre conjuntos, pueden ser demostradas a través de las regiones de un Diagrama de Venn.

Ejemplo :
Tomando como referencia el mismo diagrama que para el ejemplo anterior, demuestre a través de regiones que:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Conjunto :	A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)'$
Regiones :	R_1, R_2	R_1, R_3	R_1, R_2, R_3	R_4

Conjunto :	A	A'	B	B'	$A' \cap B'$
Regiones :	R_1, R_2	R_3, R_4	R_1, R_3	R_2, R_4	R_4

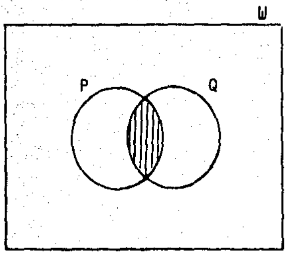
Entonces: $(A \cup B)' = A' \cap B' = R_4$

EJERCICIOS RESUELTOS

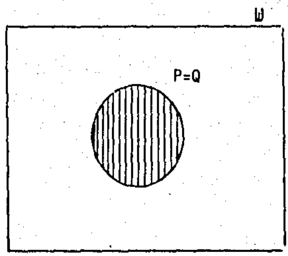
1) Represente con un Diagrama de Venn para dos conjuntos todas las posibilidades en las cuales se cumple que :

$$P \cap Q \neq \phi$$

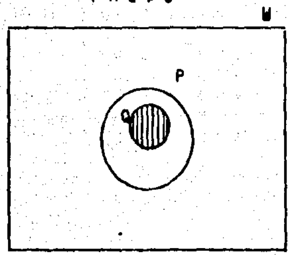
Pueden presentarse 4 situaciones :



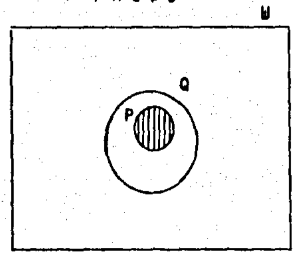
$P \cap Q \neq \emptyset$



$P \cap Q \neq \emptyset$



$P \cap Q \neq \emptyset$



$P \cap Q \neq \emptyset$

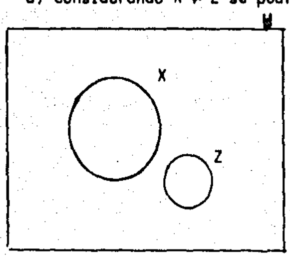
2) Se tienen 3 conjuntos: "X", "Y" y "Z" que satisfacen las siguientes relaciones :

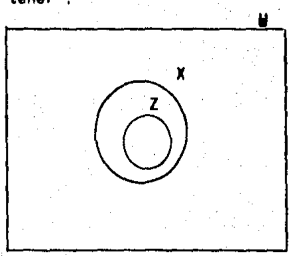
a) $X \not\subset Z$
b) $X \cap Z \neq \emptyset$
c) $Z \not\subset X$
d) $Y \cap Z = \emptyset$
e) $Y \neq X$
f) $Y \subset X$

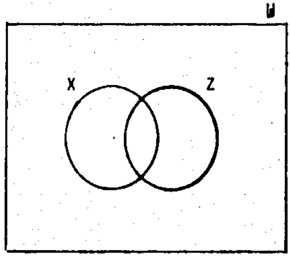
Represente mediante un Diagrama de Venn estos 3 conjuntos.

Procedimiento :

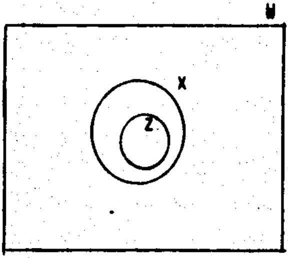
a) Considerando $X \not\subset Z$ se podría tener :

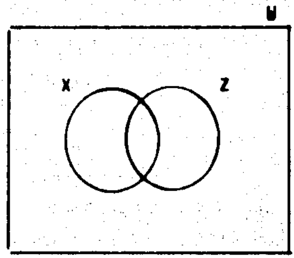




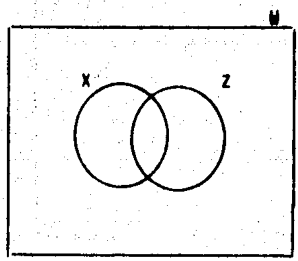


b) Si $X \cap Z \neq \emptyset$, se elimina una de las 3 opciones anteriores:

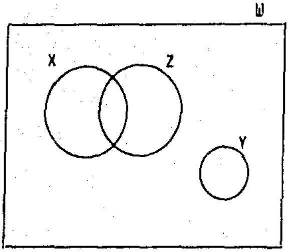


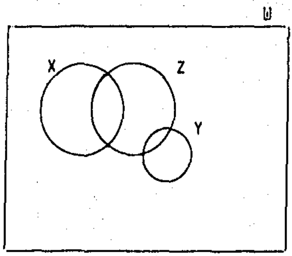


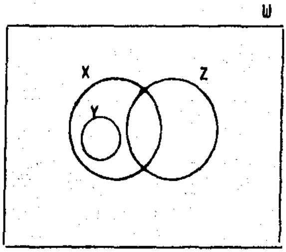
c) Si $Z \not\subset X$, queda solamente una posibilidad :



d) Si $Y \cap Z \neq \emptyset$, se podría tener :

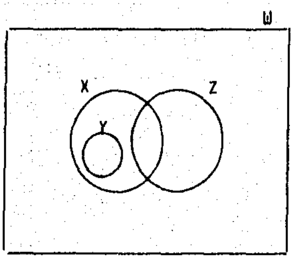






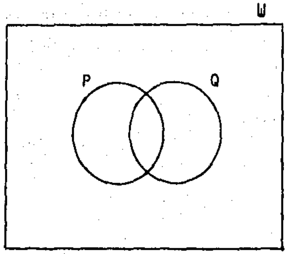
e) Si $Y \neq Z$ se siguen teniendo las mismas 3 opciones anteriores.

f) Si $Y \subset X$, el diagrama resultante es :



3) Si "P" y "Q" son subonjuntos de "W", determinar cuál de las si - guientes proposiciones son falsas.
Para las falsas muestre un Diagrama de Venn.

Si:



a) $(P \cup Q)' \subset P'$ (V)

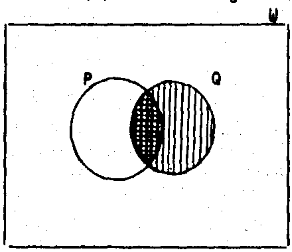
b) $P \cup Q \supset P \cap Q$ (V)

c) $(P \cap Q) \cup P = P$ (V)

d) $(P \cup Q)' \subset (P \cap Q)'$ (V)

e) $Q \subset P \cap Q$ (F)

diagrama :



Por lo tanto:

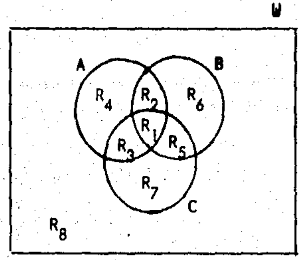
$Q \not\subset P \cap Q$

f) $P \cup (P \cap Q)' = W$ (V)

g) $Q' \subset (P \cap Q)'$ (V)

h) $P \cap Q \subset P \cup Q$ (V)

4) Considere el Diagrama de Venn de 3 subconjuntos "A","B" y "C" del conjunto universal "W" :



(Diagrama para los ejercicios 4),5),6) y 7))

Indique las regiones que corresponden a las siguientes expresiones :

A	$= R_1, R_2, R_3, R_4$	$A \cap B \cap C$	$= R_1$
B	$= R_1, R_2, R_5, R_6$	$A \cup B$	$= R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$
C	$= R_1, R_3, R_5, R_7$	$A \cup C$	$= R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7$
A'	$= R_5, R_6, R_7, R_8$	$B \cup C$	$= R_1, R_2, R_3, R_5, R_6, R_7$
B'	$= R_3, R_4, R_7, R_8$	$A \cup B \cup C$	$= R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$
C'	$= R_2, R_4, R_6, R_7$	$(A \cup B \cup C)'$	$= R_8$
$A \cap B$	$= R_1, R_2$	$(A \cup B) \cap C$	$= R_1, R_3, R_5$
$A \cap C$	$= R_1, R_3$	$A \cap B' \cap C'$	$= R_4$
$B \cap C$	$= R_1, R_5$	$A' \cap (B \cap C)$	$= R_5$

5) Utilizando el mismo diagrama de Venn que para el ejercicio 4), indique las regiones a las cuales corresponden los siguientes expresiones :

$A \cap B' \cap C$	$= R_3$	$A' \cap C$	$= R_5, R_7$
$A \cap B \cap C'$	$= R_2$	$B \cap C'$	$= R_2, R_6$
$A' \cap B' \cap C$	$= R_7$	$A - B$	$= R_3, R_4$
$A' \cap B' \cap C'$	$= R_8$	$A \cap (B - C)$	$= R_2$
$A' \cap B'$	$= R_7, R_8$	$(A \cup B) - C$	$= R_2, R_4, R_6$
$B' \cap C'$	$= R_4, R_8$	$(B - A) \cap C'$	$= R_6$

6) Escriba las expresiones que corresponden en el diagrama del ejercicio 4) a las regiones dadas, usando los conjuntos "A", "B" y "C" así como las operaciones entre conjuntos.

R_1, R_3	$= (A \cap C)$
R_1, R_5	$= (B \cap C)$
R_1, R_2, R_3, R_4	$= ((A \cap C) \cup A)$ o: $(A \cap \mathbb{U})$ o: A
R_3, R_4, R_7, R_8	$= (B')$ o: $(\mathbb{U} - B)$ o: $((A \cup B \cup C)' \cup (A \cup B \cup C) - B)$
R_2, R_4, R_6, R_8	$= (C')$ o: $(\mathbb{U} - C)$ o: $((A \cup B \cup C)' \cup (A \cup B \cup C) - C)$
R_1, R_2	$= (A \cap B)$
R_8	$= (A \cup B \cup C)'$ o : $(A' \cap B' \cap C')$
R_1, R_2, R_3, R_5	$= ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$
R_7, R_8	$= (A \cup B)'$

7) Demuestre la propiedad distributiva de la intersección respecto a la unión en el caso de tres conjuntos :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

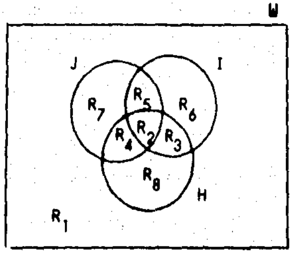
Utilice de nuevo el diagrama del ejercicio 4).

Conjuntos :	A	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
Regiones :	R_1, R_2, R_3, R_4	$R_1, R_2, R_3, R_5, R_6, R_7$	R_1, R_2, R_3

Conjuntos :	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
Regiones :	R_1, R_2	R_1, R_3	R_1, R_2, R_3

Entonces : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = R_1, R_2, R_3$

8) De acuerdo con el siguiente Diagrama de Venn, escriba con todos los símbolos dados, la expresión que corresponde a las regiones indicadas :



Regiones: R_4 Símbolos a usar : H, H, I, J, J, ∩, ∩, ∩, ∪, ', ', '.

Respuesta: $((J \cap H)' \cup (H \cap I \cap J))'$

9) Utilizando el mismo diagrama que para el ejercicio 8), indique a qué regiones corresponde la siguiente expresión :

Expresión: $((I' \cap J) \cap (H' \cap I' \cap J)')$

Respuesta: R_4

10) Represente un Diagrama de Venn con los conjuntos "X", "Y" y "Z" que son diferentes al conjunto vacío y que cumplen con las condiciones siguientes :

$X \not\subset Z$

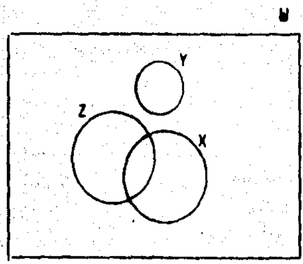
$Z \cap X \neq \phi$

$Z - Y = Z$

$Z \cap X \neq Z$

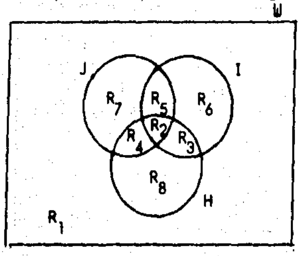
$X - Y = X$

$Z \cap X \subset X$



EJERCICIOS POR RESOLVER

1) De acuerdo al siguiente Diagrama de Venn, escriba con los símbolos dados, la expresión que corresponde a las regiones indicadas.



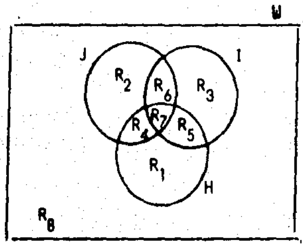
Regiones:	Símbolos a usar:
R_6	H,H,I,J,J,∩,∩,∩,U,',','
$R_1, R_2, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$	H,H,J,J,I,∩,∩,∩,U,',',','

2) Utilizando el mismo diagrama anterior, especifique ahora a qué regiones corresponden las siguientes expresiones :

a) $(H \cap I \cap J)' - (H' \cap I')$

b) $(H \cup (J \cap H'))'$

3) De acuerdo al siguiente Diagrama de Venn, escriba con los símbolos indicados, la expresión que corresponde a las regiones dadas.



Regiones:	Símbolos a usar:
R_3, R_6, R_7, R_8	H,I,J,J,∩,U,−,','
R_1, R_3, R_4, R_5, R_6	H,H,I,I,J,∩,∩,∩,U,',','
R_3, R_8	H,H,J,U,∩,','

4) Utilizando el mismo diagrama, especifique ahora a qué regiones -- corresponden las siguientes expresiones :

a) $((J \cap H') \cup (H \cap J'))$
b) $((I \cap J') \cup (H \cap I'))$
c) $((H \cap J') \cup (H \cap I' \cap J'))$

5) Represente en un Diagrama de Venn a los conjuntos "X", "Y" y "Z", que son diferentes del conjunto vacío y cumplen con las condicio - nes especificadas :

Diagrama 1	Diagrama 2
$Z \not\subset X$	$X \cap Y \subset X$
$Z \cap X = X$	$Z \cap Y = Z$
$X - Y = X$	$X \not\subset Y$
$X \cup Y \subset Z$	$Z \cap X = \emptyset$
$X \cap Z \neq \emptyset$	$Y \not\subset X$
$Z \not\subset Y$	

Diagrama 3	Diagrama 4
$Y \neq X$	$Y \not\subset Z$
$Y \subset X$	$Y - Z = Y$
$Z \cap Y \neq \emptyset$	$X \cap Y \subset X$
$Z \not\subset Y$	$X \subset Y$
$Z \cap Y \subset X \cap Z$	$Z \cap X = \emptyset$
$Z \not\subset X$	

Diagrama 5
$X \not\subset Z$
$X \cap Y = Y$
$Z \cap Y \neq \emptyset$
$X \cap Y = Y \cap Z$
$Y \subset Z$

4.8 APLICACIONES

4.8.1 NUMERO DE ELEMENTOS DE LA UNION DE CONJUNTOS

+ Antes de iniciar el tratamiento de las aplicaciones concretas de la Teoría de Conjuntos, es necesario conocer cómo se calcula el número de elementos de la unión de dos o más conjuntos.

+ Anteriormente se introdujo el símbolo "n(A)" para indicar el número de elementos de cualquier conjunto "A"; se requiere ahora utilizar este conocimiento para determinar el número de elementos que forman la unión de conjuntos.

Número de Elementos de la Unión de Dos Conjuntos

+ Para obtener el número de elementos de la unión de dos conjuntos "A" y "B", existen dos casos :

A) Si "A" y "B" son conjuntos disjuntos, el número de elementos de la unión es :

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

B) Si "A" y "B" no son conjuntos disjuntos (tienen elementos en común), el número de elementos de la unión es :

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

Nota: al sumar el número de elementos de "A": n(A), con el número de elementos de "B": n(B), el número de elementos de la intersección se ha contado dos veces (una vez al calcular n(A) y otra al calcular n(B)) porque los elementos de $A \cap B$, pertenecen tanto al conjunto "A" como al conjunto "B", es por ello que es necesario restar una vez $n(A \cap B)$ de modo que los elementos de la misma sean considerados en una sola ocasión.

Ejemplos:

1) Si A = { x/x es un acreedor de la empresa La Loma S.A }
= { BS,BM,NF }
y B = { x/x es un acreedor de la emprsa El Lago S.A. }
= { BC,FV,LB }

Determinar cuántos elementos tiene la unión de A y B.

A y B son conjuntos disjuntos.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ Comprobación:

$n(A \cup B) = 3 + 3 = 6$ $A \cup B$ = { BS,BM,NF,BC,FV,LB }

2) La Asociación Nacional de Productores de Algodón ha organizado dos concursos. Todos los miembros han confirmado su participación; de ellos, 140 participarán en el primer concurso, 84 en el segundo y 15 en ambos.

¿Cuántos miembros integran la Asociación?

$A = \{x/x$ es un miembro de la ANPA que participará en el primer concurso$\}$

$B = \{x/x$ es un miembro de la ANPA que participará en el segundo concurso$\}$

$A \ \ B = \{x/x$ es un miembro que participará en ambos concursos.$\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 140 + 84 - 15 = 209$ miembros.

Número de Elementos de la Unión de 3 Conjuntos

+ Para obtener el número de elementos de la unión de tres conjuntos puede generalizarse, por un razonamiento análogo, la fórmula descrita anteriormente :

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)}$$

Nota: al sumar $n(A), n(B)$ y $n(C)$, se han tomado en cuenta dos veces las intersecciones entre cada dos conjuntos; $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$; deben entonces restarse éstas para ser consideradas en una sola ocasión. Por otra parte, la intersección entre los tres conjuntos : $A \cap B \cap C$, ha sido contada 3 veces al efectuar la suma de $n(A)+n(B)+n(C)$ y después descontada 3 veces al efectuar la resta de $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$ y $n(C \cap A)$; es por ello que para incorporar los elementos de esta región, se debe sumar una vez la misma al resultado del cómputo anterior.

Ejemplo:

1) La familia González ha decidido poner un pequeño negocio de elaboración de zapatos; las funciones a realizar son fundamentalmente 3: producir el zapato, venderlo y llevar la contabilidad del negocio. Casi todos los miembros de la familia desempeñan más de una función como sigue :

$A = \{$productores de la familia González$\} = \{$Miguel, Pedro, José$\}$

$B = \{$vendedores de la familia González$\} = \{$Miguel, Carlos, Jorge$\}$

$C = \{$contadores de la familia González$\} = \{$Pedro$\}$

$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cup B \cup C) = 3 + 3 + 1 - 1 - 0 - 1 + 0$

$= 5$ González

+ La fórmula puede extenderse para obtener el número de elementos de la unión de 4,5,... "n" conjuntos utilizando razonamientos análogos a los presentados.

4.8.2 APLICACIONES : OBTENCION, ANALISIS Y EVALUACION DE INFORMACION

+ Hasta ahora han sido desarrollados los conocimientos sobre la Teoría de Conjuntos; en este apartado se pretende estudiar las aplicaciones a problemas prácticos. Es decir, serán aplicados los conceptos e instrumentos aprendidos para analizar lógicamente conjuntos de información, evaluar su consistencia interna, obtener información adicional, interpretar su significado en un contexto específico y discriminar la información que es irrelevante de la que es fundamental para el proceso de toma de decisiones.

+ Se utilizarán dos diferentes ejemplos para mostrar lo anterior.

Ejemplo 1

Una empresa produce tres tipos de productos: shampoo 1, shampoo 2 y shampoo 3 con los siguientes atributos :

Atributo	Shampoo 1	Shampoo 2	Shampoo 3
calidad	alta	media	baja
precio	$600	$450	$200
publicidad	televisión	televisión	ninguna
promoción	ninguna	ninguna	concursos, rifas
distribución	tiendas departamentales, supermercados perfumerías	supermercados farmacias	farmacias abarroterías

La empresa produce y distribuye en toda la República y es política de la misma el distribuir a cada ciudad igual cantidad de cada tipo de shampoo. La ciudad de Querétaro ha ocasionado problemas: los ingresos de las ventas no alcanzan siquiera a cubrir los gastos para distribuir el producto en dicho lugar. Es por ello que el dueño de la empresa decidió contratar a un investigador de mercados, quién obtuvo la siguiente información de una muestra de 1250 personas :

94	consumen el shampoo 1
386	consumen el shampoo 2
776	consumen el shampoo 3

60 consumen los shampoos 1 y 2
192 consumen los shampoos 2 y 3
44 consumen los shampoos 1 y 3
40 consumen los tres tipos de shampoo

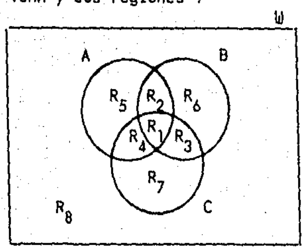
Se pide a usted, que analice dicha información, obtenga información adicional, separe los datos que son irrelevantes de los fundamentales para evaluar el problema e interprete el significado de los primeros tomando en cuenta el contexto específico de la empresa y productos dados.

Solución

+ Se consideran los siguientes conjuntos :
  A = { personas que consumen el producto 1}
  B = { personas que consumen el producto 2}
  C = { personas que consumen el producto 3}
+ Con la información obtenida del problema se puede elaborar la siguiente tabla :

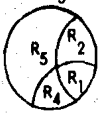
Producto Consumido	No.de Personas que lo Consumen	Conjunto
1	94	A
2	386	B
3	776	C
1 y 2	60	$A \cap B$
2 y 3	192	$B \cap C$
1 y 3	44	$A \cap C$
1, 2 y 3	40	$A \cap B \cap C$

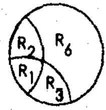
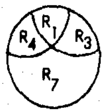
+ Se puede representar estos 3 conjuntos por medio de un Diagrama de Venn y sus regiones :



$R_1 = A \cap B \cap C$
$R_2 = A \cap B \cap C'$
$R_3 = A' \cap B \cap C$
$R_4 = A \cap B' \cap C$
$R_5 = A \cap B' \cap C'$
$R_6 = A' \cap B \cap C'$
$R_7 = A' \cap B' \cap C$
$R_8 = A' \cap B' \cap C'$

+ De todas las regiones definidas en el diagrama anterior se conoce únicamente R_1, sin embargo, es posible determinar todas las demás regiones considerando las relaciones de la tabla de datos del problema :

Región R_1 : 	- representa el conjunto de personas que consumen los 3 productos simultáneamente. - $R_1 = A \cap B \cap C$ $n(R_1) = 40$ (según los datos del problema)
Región R_2 : 	- representa el conjunto de personas que consumen los productos 1 y 2 (el 3 no). - $R_2 = (A \cap B) - (A \cap B \cap C)$ $n(R_2) = 60 - 40$ $n(R_2) = 20$
Región R_3 : 	- representa el conjunto de personas que consumen los productos 2 y 3 (el 1 no). - $R_3 = (B \cap C) - (A \cap B \cap C)$ $n(R_3) = 192 - 40$ $n(R_3) = 152$
Región R_4 : 	- representa el conjunto de personas que consumen los productos 1 y 3 (el 2 no). - $R_4 = (A \cap C) - (A \cap B \cap C)$ $n(R_4) = 44 - 40$ $n(R_4) = 4$
Región R_5 : 	- representa el número de personas que compran exclusivamente el producto 1. - $R_5 = A-(A \cap B)-(A \cap C)+(A \cap B \cap C)$ $n(R_5) = 94 - 60 - 44 + 40$ $n(R_5) = 30$

Región R_6 :  	- representa el número de personas que compran exclusivamente el producto 2. - $R_6 = B-(A \cap B)-(B \cap C)+(A \cap B \cap C)$ $n(R_6) = 386 - 60 - 192 + 40$ $n(R_6) = 174$
Región R_7 :  	- representa el número de personas que compran exclusivamente el producto 3. - $R_7 = C-(A \cap C)-(B \cap C)-(A \cap B \cap C)$ $n(R_7) = 776 - 44 - 192 + 40$ $n(R_7) = 580$

Comprobaciones :

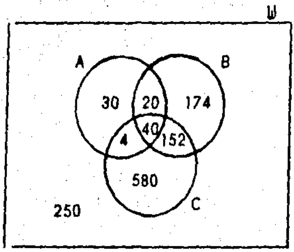
$A = R_1 + R_2 + R_4 + R_5$
$A = 40 + 20 + 4 + 30$
$A = 94$ ✓

$B = R_1 + R_2 + R_3 + R_6$
$B = 40 + 20 + 152 + 174$
$B = 386$ ✓

$C = R_1 + R_3 + R_4 + R_7$
$C = 40 + 152 + 4 + 580$
$C = 776$ ✓

Región R_8 : R_8	- representa el número de personas de la muestra analizada que no compra ninguno de los 3 productos. - $n(R_8) = n(\omega) - n(A \cup B \cup C)$ $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(A \cap C)+n(A \cap B \cap C)$ $= 94+386+776-60-192-44+40 = 1000$ $\omega = 1250$ $n(R_8) = 1250 - 1000 = 250$

+ Con todos los datos obtenidos se puede volver a representar el Diagrama de Venn como sigue :



+ Análisis de la Información obtenida :
  - $R_8 = 250$; $250/1250 = .2$
    De la muestra tomada, únicamente el 20% no consume ninguno de los tres productos de la compañía, lo cual indica que Querétaro es un mercado en donde el índice de consumo de los productos de esta empresa en general, es muy elevado.
    ¿ Cuál es entonces el problema en esta ciudad ?
  - Del 80% restante de la población que sí consume los productos de la compañía, se encuentra que :
  - $R_1 = 40$; $40/1000 = .04$
    Sólamente el 4% de los consumidores compran indistintamente el shampoo 1, el 2 o el 3. Esto comprueba que los aspectos de calidad, costo, publicidad, promoción y distribución que diferencían a los tres productos son muy importantes (en el 96% de las veces) para la decisión de compra.
  - $R_2 = 20$; $20/1000 = .02$
    $R_3 = 152$; $152/1000 = .152$
    $R_4 = 4$; $4/1000 = .004$
    De las personas que compran indistintamente dos de los tres shampoos que produce la empresa se puede concluir que:
    - el porcentaje de personas que consumen el shampoo 1 y 3 simultáneamente es insignificante (.4%); esto es lógico, ya que las diferencias en costo y calidad entre uno y otro son bastante representativos.
    - el porcentaje de personas que consumen el shampoo 1 y 2 simultáneamente (2%) es mayor que el grupo anterior, sin embargo sigue representando un grupo muy pequeño frente al conjunto de personas que consumen los shampoos 2 y 3 (15.2%).
      Los productos 2 y 3 tienen un punto de distribución común: las farmacias; existe entonces la posibilidad de que estas representen el intermediario más interesante en la ciudad de

Querétaro.

- de los datos anteriores y considerando los supuestos de cada diferente producto se puede deducir que :
  el mercado de Querétaro tiende más a consumir productos de calidad media y bajo que productos de calidad alta y medio.

- $R_5 = 30$; $30/1000 = .03$
  $R_6 = 174$; $174/1000 = .174$
  $R_7 = 580$; $580/1000 = .580$

  Se puede concluir que más de la mitad (58%) de los consumidores de Querétaro compra exclusivamente el producto 3; el 17.4% exclusivamente el producto 2 y sólamente el 3% adquiere únicamente el producto 1.

  Lo anterior indica que el mercado de Querétaro se inclina preferentemente al producto de tipo económico.

  Por otra parte las cifras muestran que el producto 3 tiene una fidelidad de marca superior a cualquiera de los otros dos productos.

  Tomando en cuenta los datos del problema, el producto 1 y 2 tienen publicidad en televisión ,y que el producto 3, pese a no contar con ningún apoyo publicitario, supera por mucho en ventas a los otros dos productos, se recomienda que la empresa cuestione seriamente la utilización de medios publicitarios en Querétaro.

- Por último cabría concluir, que existen diferencias muy marcadas en el volúmen de consumo de cada uno de los tres productos, de donde se sugiere que la empresa estudie la posibilidad de eliminar la politica de distribuir igual cantidad de cada producto para esta ciudad, y realizar la distribución de acuerdo a las necesidades del mercado específico.

+ De una manera semejante a lo anterior se podrían seguir extrayendo conclusiones, sin embargo bastan las presentadas para mostrar que a través de la utilización de la Teoría de Conjuntos se puede extraer, analizar e interpretar el significado concreto de un grupo de datos, así como fundamentar en su caso la toma de decisiones para resolver algunas deficiencias.

Ejemplo 2

Una empresa trasnacional productora de maquinaria pesada ha efectuado un estudio sobre sus 700 empleados para conocer lo referente a sexo, estado civil y lugar de origen de los mismos. Han sido obtenidos los siguientes resultados :

335	empleados son hombres
260	empleados son casados
125	empleados son extranjeros

180	empleados son hombres,solteros y mexicanos
115	empleados son hombres y son casados
65	empleados son hombres y extranjeros
5	empleados son mujeres,casados y extranjeros.

Se pretende determinar :

a) ¿Cuántos empleados son hombes, casados y extranjeros?
b) ¿Cuántos empleados son mujeres, solteras y mexicanas?
c) ¿Cuántos empleados son mujeres, casadas y mexicanas?
d) ¿Cuántos empleados son hombres, solteros y extranjeros?
e) ¿Cuántos empleados son hombres, casados y mexicanos?
f) ¿Cuántos empleados tienen uno solo de los siguientes atributos: hombres, casados, extranjeros.
g) ¿Cuántos de los empleados tienen exáctamente dos de los siguientes atributos: hombres, casados, extranjeros?

Solución

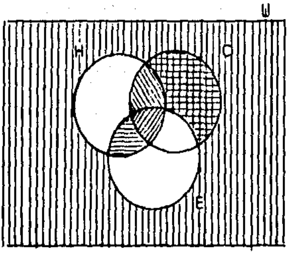
+ Sean los conjuntos :
  H = {empleados de la empresa que son hombres }
  C = {empleados de la empresa que están casados}
  E = {empleados de la empresa que son extranjeros}

+ Se pueden representar los datos proporcionados y las preguntas, por medio de operaciones entre conjuntos y graficarlas en un Diagrama de Venn :

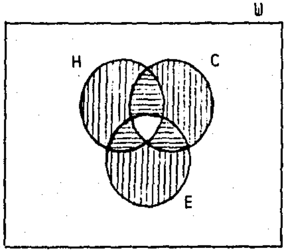
Atributo	No. Empleados	Conjunto
hombre	335	H
casado	260	C
extranjero	125	E
hombre-soltero-mexicano	180	$H \cap C' \cap E'$
hombre-casado	115	$H \cap C$
hombre-extranjero	65	$H \cap E$
mujer-casada-extranjera	5	$H' \cap C \cap E$

+ Se pide :

a) $H \cap C \cap E$
b) $H' \cap C' \cap E'$
c) $H' \cap C \cap E'$
d) $H \cap C' \cap E$
e) $H \cap C \cap E'$
f) $H \cap C' \cap E' + H' \cap C \cap E' + H' \cap C' \cap E$
g) $H \cap C \cap E' + H' \cap C \cap E + H \cap C' \cap E$



a) b) c) d) e)



f) g)

+ Para poder obtener cualquier dato, se requiere conocer el número de elementos de $(H \cap C \cap E)$:

  $n(H) = n(H \cap C' \cap E') + n(H \cap C) + n(H \cap E) - n(H \cap C \cap E)$

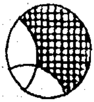
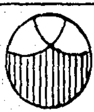
  $335 = 180 + 115 + 65 - n(H \cap C \cap E)$

  Despejando:

  $n(H \cap C \cap E) = 180 + 115 + 65 - 335$

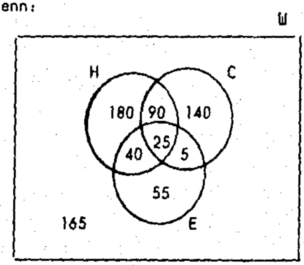
  $= 25$

+ Se puede entonces conocer todas las zonas restantes e indicarlas en el Diagrama de Venn :

	$n(H \cap C \cap E') = n(H \cap C) - n(H \cap C \cap E)$ $= 115 - 25$ $= 90$
	$n(H \cap C' \cap E) = n(H \cap E) - n(H \cap C \cap E)$ $= 65 - 25$ $= 40$
	$n(H' \cap C \cap E') = n(C) - n(H \cap C) - n(H' \cap C \cap E)$ $= 260 - 115 - 5$ $= 140$
	$n(H' \cap C' \cap E) = n(E) - n(H \cap E) - n(H' \cap C \cap E)$ $= 125 - 65 - 5$ $= 55$

	$n(H' \cap C' \cap E') = W - n(H \cup C \cup E)$ $n(H \cup C \cup E) = n(H)+n(C)+n(E)-n(H \cap C)$ $-n(C \cap E)-n(H \cap E)+$ - $n(H \cap C \cap E)$ $= 335+260+125-115-30-65$ $+25 = 535$ $n(H' \cap C' \cap E') = 700 - 535$ $= 165$

En el Diagrama de Venn:



Respuestas:

a) empleados hombres, casados y extanjeros
   $= n(H \cap C \cap E) = 25$

b) empleados mujeres, solteros y mexicanas
   $= n(H' \cap C' \cap E') = 165$

c) empleados mujeres, casados y mexicanas
   $= n(H' \cap C \cap E') = 140$

d) empleados hombres, solteros y extranjeros
   $= n(H \cap C' \cap E) = 40$

e) empleados hombres, casados y mexicanos
   $= n(H \cap C \cap E') = 90$

f) empleados que tienen uno solo de los siguientes atributos: hom - bre-casado-extranjero
   $= n(H \cap C' \cap E') + n(H' \cap C \cap E') + n(H' \cap C' \cap E)$
   $= 180 + 140 + 55 = 375$

g) empleados que tienen exáctamente dos de los siguientes atribu - tos: hombre-casado-extranjero
   $= n(H \cap C \cap E') + n(H \cap C' \cap E) + n(H' \cap C \cap E)$
   $= 90 + 40 + 5 = 135$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) Una de las dependencias del gobierno ha realizado un censo sobre la población económicamente activa en el Distrito Federal, obteniéndose los siguientes resultados :

   40.5% de la población está estudiando.
   38.9% de la población está trabajando.
   41.5% de la población es menor de 25 años.
   8.6% de la población está estudiando y trabajando a la vez.
   24.9% de la población es menor de 25 años y está estudiando.
   16.0% de la población es menor de 25 años y está trabajando.
   77.6% de la población o estudia o trabaja o es menor de 25 años.

   El estado desea saber :

   a) ¿ Qué porcentaje de la población del Distrito Federal no entra en ninguna de estas tres categorías ?
   b) ¿ Qué porcentaje de la población se encuentra en dos de estas categorías a la vez ?
   c) ¿ Qué porcentaje es menor de 25 años, estudia y trabaja ?

2) La agencia de viajes "MundoMex" está investigando cuál es la principal motivación del turista de origen norteamericano para visitar nuestro país con el fin de lanzar su campaña publicitaria de 1986 con base a esta motivación. En el año de 1985, realizó para tal efecto una encuesta sobre 8000 turistas que visitaron México.

   Los resultados indican que :

   4600 turistas viajaron a México porque está cerca de su país.
   400 turistas viajaron a México porque tiene lugares atractivos y porque es barato.
   600 turistas viajaron a México porque es barato y está cerca de su país.
   800 turistas viajaron a México porque está cerca de su país y tiene lugares atractivos.
   1200 turistas viajaron a México por algún otro motivo diferente a los tres mencionados anteriormente.

   La agencia desea que usted determine :

   a) ¿ Cuántos turistas viajaron a nuestro país por dos motivos de los tres mencionados ?
   b) ¿ Cuántos lo hicieron exclusivamente por uno de los tres motivos ?
   c) ¿ Cuántos turistas se vieron influenciados por los tres motivos ?

   Considérense las siguientes condiciones para obtener todos los datos anteriores : que el número total de personas que consideran que nuestro país tiene lugares atractivos es igual al número de personas que están motivadas porque es un lugar barato, además, el número de personas que consideran a México un país atractivo más el número total de personas que lo consideran barato es igual a nueve veces el número de personas que viajan al mismo porque es atractivo, barato y está cerca.

3) El Sr. Rodríguez va a iniciar un negocio de ropa en el centro de la ciudad de Guadalajara, sin embargo no sabe si se dedicará a la ropa de hombre, de mujer o de niño. Para determinar lo anterior ha estado investigando el giro de las 520 tiendas que están en el centro de la ciudad; de éstas :

120	venden ropa de hombre
61	venden ropa de mujer y de niño.
146	venden ropa de mujer o de hombre.
22	venden ropa exclusivamente de niño.

Además se sabe que :

a) el número de tiendas que venden ropa para mujer y hombre es igual a dos veces el número de tiendas que venden ropa de los tres tipos.

b) el número de tiendas que venden ropa para mujer y niño es igual al número de tiendas que venden ropa de hombre y de niño.

c) el número de tiendas que venden ropa para mujer es igual al número de tiendas que venden ropa para hombre más ocho.

El Sr. Rodríguez contrata sus servicios para que determine :

a) ¿Cuántas tiendas venden al menos dos de estos productos?

b) ¿Cuántas tiendas venden un producto exclusivamente?

c) ¿Cuántas tiendas no representan competencia alguna para el nuevo negocio?

d) ¿Cuál de los tres negocios es el menos competido en esa zona?

4) Una tienda departamental está realizando una investigación para determinar cuál de los siguientes factores tiene mayor incidencia sobre el público en el momento de decidir el establecimiento específico en que realizará su compra : precios, surtido, atención.

De la muestra tomada se obtuvieron los siguientes opiniones :

1200	personas escogen la tienda en que comprarán basándose en la atención.
1457	lo hacen basándose en el surtido.
1600	lo hacen basándose en el precio.

Además se sabe que:

a) el número de personas que seleccionan la tienda en base a los 3 factores conjuntos es igual al 1% del total de personas entrevistadas.

b) el número de personas que lo hacen en base al precio y a la atención es igual al 10% del número total de entrevistados.

c) el número de personas que se basan en la atención y el surtido es igual al número de personas que se basan en el surtido y el precio.

d) el número de personas que se basan en el surtido y el precio es igual a aquel que se basa en el precio y la atención.

e) del total de entrevistados ninguno opinó que alguno de estos 3 factores fuera totalmente irrelevante para decidir.

La tienda desea conocer :

a) ¿ Cuántos se basan en dos de estos tres factores en el momento de seleccionar la tienda en que realizarón su compra ?

b) ¿ Cuántos seleccionan la tienda en base al precio solamente ?

c) ¿ Cuántos se basan en uno solo de los tres factores ?

5) Televisa ha realizado una encuesta para investigar la preferencia del público respecto a 3 programas que son televisados a las 9 PM en tres días diferentes; de una muestra de 23,085 personas se obtuvieron los siguientes resultados :

6880 personas acostumbran ver el programa 1 o el 2.
6370 acostumbran ver el programa 2
4215 ven exclusivamente el programa 3.
11075 ven el programa 2 o el 3.

Si el número de personas que ven el programa 1 y el 3 es igual a 15 veces el número de personas que ven los 3 programas, se pide a usted que determine :

a) ¿ Cuántas personas ven los tres programas de Televisa ?

CAPITULO V

CONJUNTOS ORDENADOS Y ANALISIS COMBINATORIO

5.1 CONJUNTOS ORDENADOS

+ En el capítulo anterior quedó establecido el valor de la Teoría de Conjuntos como herramienta útil para la resolución de problemas; dicha teoría brinda una estructura lógica y ordenada para tal efecto.
+ En el presente capítulo se pretende mostrar la utilidad de los conjuntos para sistematizar el proceso de generación de alternativas, elemento fundamental para la toma de decisiones del administrador.
+ El "Análisis Combinatorio" tiene su fundamento en la Teoría de Conjuntos, es por ello que será necesario examinar previamente el concepto de orden, el de conjunto ordenado y el de producto cartesiano para comprender dicho tema.

5.1.1 DEFINICION DE ORDEN

+ Al establecer la definición de conjunto, entre los diversos requisitos necesarios se mencionó, que el orden en que se coloquen los elementos que forman el conjunto carece de importancia. Ahora, los conjuntos ordenados específicamente, son conjuntos en los que es fundamental el orden en que estén dispuestos dichos elementos.
+ Es complicado establecer una definición puramente matemática de "orden" en virtud de que existe más de una noción de éste; sin embargo, el orden puede definirse esencialmente como "una relación entre los elementos de un conjunto". (10)
  En un orden interviene al menos un par de objetos; por ejemplo se dice: "a" es mayor que "b" ; "m" está a la izquierda de "n" ; "x" es padre de "y", etc. Estas expresiones indican relaciones entre elementos.
+ Existen básicamente dos clases de orden para colocar los elementos de un conjunto ordenado :
  A) Orden Natural :
    + Cuando el orden surge de la propia naturaleza de los elementos que forman el conjunto.
    + Ejemplo: el registro de operaciones que siguen un orden cronológico tales como: la sucesión de presidentes de la -

---

(10) Kleiman Ariel, Kleiman Elena K de. Ob.Cit. Pag.121.

compañía Ford.

B) Orden Convencional :

+ Cuando el orden surge de un criterio convencionalmente aceptado.
+ Ejemplo: el conjunto de letras del abecedario suele ordenarse en el orden alfabético convencional.

+ En el caso de que no exista un orden natural ni tampoco uno convencional, debe indicarse cuál es el criterio de ordenación. Lo anterior es así, porque un mismo conjunto puede ordenarse de diferentes maneras, según sea el criterio que se elija.

5.1.2 PARES, TERNAS Y CUARTETAS ORDENADAS

A) Pares Ordenados:

+ A los conjuntos formados por dos elementos se les llama "pares o parejas".

+ Para indicar que uno de estos pares es ordenado, se acostumbra encerrarlo entre paréntesis.
Así, el conjunto (x,y) es un par ordenado en donde "x" y "y" se denominan "primero" y "segundo" elemento respectivamente.

Ejemplos:

1) Sea el conjunto ordenado $(2,18)$ en el que el primer elemento se refiere al número de máquina y el segundo al número de obrero que lo maneja; como se comprende, es bien distinto el par $(2,18)$ del par $(18,2)$.
2) Sea el conjunto ordenado (a,b) en el que el primer elemento es el nombre de la materia prima y el segundo el del producto terminado; luego entonces el colocar los elementos como (b,a) produciría información falsa y tal vez hasta ilógico para el departamento de producción.

+ Nota:
"Puede haber pares ordenados que tengan iguales el primero y el segundo elementos tales como : $(1,1),(4,4),(5,5)$". (11)

+ La relación de igualdad entre conjuntos difiere en el caso de los conjuntos ordenados como sigue :

(11) Lipschutz Seymour. Ob.Cit. Pag.66.

En el caso de dos conjuntos "no ordenados"	En el caso de dos conjuntos "ordenados"
$A = \{x,y\}$ $B = \{a,b\}$ A es igual a B si se cumple que: $x=a$ y $y=b$ o bien: $x=b$ y $y=a$	$A = (x,y)$ $B = (a,b)$ A es igual a B sí y solo sí: $x=a$ y $y=b$

+ Es decir, en el caso de dos conjuntos ordenados: A es igual a B, solo si el primero y el segundo elemento de un par son iguales respectivamente al primero y al segundo elemento del otro par.
+ Ejemplo : los pares ordenados $A= (3,5)$ y $B= (5,3)$ son distintos aunque se cumpla que $\{3,5\} = \{5,3\}$

B) Ternas y Cuartetas Ordenadas :

+ Lo mismo que se ha definido para pares ordenados puede definirse para ternas, cuartetas o conjuntos ordenados con "n" elementos.
+ En estos casos, el orden de los "n" elementos deberá también representarse de acuerdo al criterio de ordenación empleado para el conjunto.

Ejemplos:
1) A = (nombre del empleado, número de clave, departamento en que labora) es una terna.
2) B = (empresa, dirección, teléfono, monto del crédito) es una cuarteta.
3) $C = (2,4,6,8,10)$ es un conjunto ordenado de 5 elementos.

5.1.3 CONJUNTO DE CONJUNTOS ORDENADOS

+ Así como existen conjuntos cuyos elementos son conjuntos, por ejemplo: $A= \{\{a,b\},\{c,d\},\{e,f\},\{g,h\}\}$, análogamente existen conjuntos cuyos elementos son conjuntos ordenados, por ejemplo: $A= \{ (a,b),(c,d),(e,f),(g,h) \}$ que es un conjunto formado por cuatro elementos, cada uno de los cuales es un par ordenado.

5.1.4 PRODUCTO CARTESIANO

5.1.4.1 DEFINICION

+ En el capítulo anterior fueron introducidas las 4 operaciones fundamentales entre conjuntos: complementación, intersección, unión y diferencia, las cuales permiten construir nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado.

+ El producto cartesiano es otra operación entre conjuntos que tiene por elementos pares, ternas, etc. ordenados.

+ El producto cartesiano de dos conjuntos "A" y "B" se simboliza por: "AxB" ; se define de la siguiente manera :

$$\boxed{A \times B = \{(x,y) / x \in A,\ y \in B\}}$$

y se lee: " "A" cartesiano "B", o el producto cartesiano de "AxB" ", es el conjunto formado por todos los pares ordenados, donde el primer elemento de cada par pertenece al conjunto "A" y el segundo al conjunto "B".

+ Puede ocurrir que se requiera construir el producto cartesiano de "BxA", en cuyo caso los primeros componentes de los pares ordenados se eligen del conjunto "B" y los segundos componentes del conjunto "A".
Entonces, " el producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo, es decir que en general $A \times B \neq B \times A$, salvo el caso en que $A=B$." (12)

Ejemplos:

1) Sean los conjuntos $A=\{2,4\}$ $B=\{6,8,9\}$
Entonces $A \times B = \{(2,6),(2,8),(2,9),(4,6),(4,8),(4,9)\}$
y $B \times A = \{(6,2),(6,4),(8,2),(8,4),(9,2),(9,4)\}$
Nótese que $A \times B \neq B \times A$

2) Una empresa clasifica a todos sus trabajadores (T) en tres categorías: ejecutivos (e), empleados administrativos (a), empleados operativos (o); además para efectos de sueldos, clasifica a todo su personal en tres niveles según su eficiencia (E) : superior (s), media (m), inferior (i). El gerente de personal desea saber cuántos sueldos distintos tiene la compañía, para mandar imprimir las formas correspondientes.

---

(12) Suger Eduardo, Morales Bernardo, Pinot Leonel. "Introducción a la Matemática Moderna". Pag.46.

Entonces: $T = \{e,o,o\}$
$E = \{s,m,i\}$

Para responder esta pregunta se forman todos los pares ordenados posibles, respetando el orden de que el primer elemento pertenezca a "T" y el segundo a "E".

$T \times E = \{(e,s),(e,m),(e,i),(o,s),(o,m),(o,i),(o,s),(o,m),(o,i)\}$

$T \times E =$ 9 pares ordenados

+ Un caso especial es el del producto cartesiano de un conjunto consigo mismo tal como AxA o BxB.

Ejemplo : $A = \{2,4\}$ $B = \{6,8,10\}$

$A \times A = \{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

$B \times B = \{(6,6),(6,8),(6,10),(8,6),(8,8),(8,10),(10,6)(10,8),(10,10)\}$

+ Generalización del producto cartesiano :
Así como los elementos del producto cartesiano de dos conjuntos son pares ordenados, los de tres conjuntos son ternas ordenadas y así - sucesivamente.

Ejemplo : $A = \{1,2\}$ $B = \{3,4\}$ $C = \{5,6\}$

$A \times B \times C = \{(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6)\}$

5.1.4.2 NUMERO DE ELEMENTOS DEL PRODUCTO CARTESIANO

+ El número de elementos del producto cartesiano de dos conjuntos está dado por :

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)}$$

Donde :

$n(A)$ = número de elementos del conjunto A
$n(B)$ = número de elementos del conjunto B
$n(A \times B)$ = número de elementos del producto cartesiano de AxB

+ Este teorema es intuitivamente evidente: si se toma un elemento de "A", éste puede formar pareja con todos los elementos de "B"; un segundo elemento de "A" puede también formar pareja con todos los elementos de "B", y así sucesivamente. Luego, todos los elementos de "A" pueden formar parejas con todos los elementos de "B", $n(A) \cdot n(B)$ veces.

+ El número de elementos del producto cartesiano de 3 o más conjuntos está dado de forma análoga por:

$$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C)$$
$$n(A \times B \times C \times D) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) \cdot n(D)$$

Ejemplo:
Si $A = \{v,r,a\}$ $B = \{1,2,3,4\}$
Entonces: $n(A) = 3$; $n(B) = 4$; $n(A \times B) = 3 \cdot 4 = 12$
Comprobación: $A \times B = \{(v,1),(v,2),(v,3),(v,4),(r,1),(r,2),(r,3),(r,4),(a,1),(a,2),(a,3),(a,4)\}$

+ Nota : se ha visto que en general: $A \times B \neq B \times A$, sin embargo, debido a la propiedad conmutativa de los números (ej: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$), se tiene que:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$
$$n(B \times A) = n(B) \cdot n(A)$$
$$n(A \times B) = n(B \times A)$$

5.1.4.3 METODOS PRACTICOS PARA CONSTRUIR PRODUCTOS CARTESIANOS

+ Es conveniente disponer de métodos prácticos para listar sistemáticamente todos los elementos de un producto cartesiano y evitar errores. Se considerarán para tal efecto, 2 métodos fundamentales:
  A) Diagramas Arborescentes.
  B) Tablas de Múltiple Entrada.

A) Diagramas Arborescentes :

+ Un diagrama arborescente se construye de la siguiente manera:
  a) Fijar un punto inicial.
  b) Abrir a partir de éste tantas ramas como elementos tenga el primer conjunto.
  c) Abrir de cada rama anterior (punto b), tantas ramas como elementos tenga el segundo conjunto.
  d) Continuar así con los demás conjuntos del producto cartesiano.
  e) Obtener, siguiendo la secuencia de cada rama, los elementos que forman a cada par, terna, etc. ordenado, que a su vez integran el producto cartesiano completo.

  Ejemplos:

  1) Si $A = \{2,4\}$ y $B = \{6,8,9\}$, obtenga el producto cartesiano de $A \times B$.
     Se elabora un diagrama arborescente:

```
            |----- 6 ----- (2,6)
    r---- 2 |----- 8 ----- (2,8)
    |       |----- 9 ----- (2,9)
   o|
    |       |----- 6 ----- (4,6)
    L---- 4 |----- 8 ----- (4,8)
            |----- 9 ----- (4,9)
```

Entonces: $A \times B = \{(2,6),(2,8),(2,9),(4,6),(4,8),(4,9)\}$

2) Si $A = \{m,a\}$, $B = \{r,s,t,u\}$ y $C = \{x,y,z\}$ obtenga $A \times B \times C$.

```
                       |----- x ----- (m,r,x)
              r----- r |----- y ----- (m,r,y)
              |        |----- z ----- (m,r,z)
              |        |----- x ----- (m,s,x)
              |----- s |----- y ----- (m,s,y)
              |        |----- z ----- (m,s,z)
     r----- m |        |----- x ----- (m,t,x)
     |        |----- t |----- y ----- (m,t,y)
     |        |        |----- z ----- (m,t,z)
     |        |        |----- x ----- (m,u,x)
     |        L----- u |----- y ----- (m,u,y)
     |                 |----- z ----- (m,u,z)
   o |
     |                 |----- x ----- (a,r,x)
     |        r----- r |----- y ----- (a,r,y)
     |        |        |----- z ----- (a,r,z)
     |        |        |----- x ----- (a,s,x)
     |        |----- s |----- y ----- (a,s,y)
     |        |        |----- z ----- (a,s,z)
     L----- a |        |----- x ----- (a,t,x)
              |----- t |----- y ----- (a,t,y)
              |        |----- z ----- (a,t,z)
              |        |----- x ----- (a,u,x)
              L----- u |----- y ----- (a,u,y)
                       |----- z ----- (a,u,z)
```

Entonces: $A \times B \times C = \{ (m,r,x),(m,r,y),(m,r,z),(m,s,x),(m,s,y),$
$(m,s,z),(m,t,x),(m,t,y),(m,t,z),(m,u,x),$
$(m,u,y),(m,u,z),(a,r,x),(a,r,y),(a,r,z),$
$(a,s,x),(a,s,y),(a,s,z),(a,t,x),(a,t,y),$
$(a,t,z),(a,u,x),(a,u,y),(a,u,z) \}$

B) <u>Tablas de Múltiple Entrada</u> :

+ Otro procedimiento semejante consiste en utilizar tablas de doble,

triple, etc. entrada.
Estas tablas se elaboran de la siguiente forma:

a) Construir el formato de la tabla indicando los elementos del primer conjunto en los renglones y los elementos de los conjuntos segundo y tercero en las columnas.
b) Los casilleros se llenan formando pares, ternas, etc. ordenados en que el primer elemento se toma del renglón y el segundo, tercero, etc. de la columna correspondiente.

Para ilustrar este método se recurrirá a los dos ejemplos anteriores:

1) Si $A = \{2,4\}$ y $B = \{6,8,9\}$, obtenga AxB.

A B	6	8	9
2	(2,6)	(2,8)	(2,9)
4	(4,6)	(4,8)	(4,9)

Entonces $AxB = \{(2,6),(2,8),(2,9),(46),(4,8),(4,9)\}$

2) Si $A = \{m,a\}$, $B = \{r,s,t,u\}$ y $C = \{x,y,z\}$, obtenga AxBxC.

A \ B	x				y				z			
	r	s	t	u	r	s	t	u	r	s	t	u
m	(mrx)	(msx)	(mtx)	(mux)	(mry)	(msy)	(mty)	(muy)	(mrz)	(msz)	(mtz)	(muz)
a	(arx)	(asx)	(atx)	(aux)	(ary)	(asy)	(aty)	(auy)	(arz)	(asz)	(atz)	(auz)

Entonces $AxBxC = \{ (m,r,x),(m,s,x),(m,t,x),(m,u,x),(m,r,y),$
$(m,s,y),(m,t,y),(m,u,y),(m,r,z),(m,s,z),$
$(m,t,z),(m,u,z),(a,r,x),(a,s,x),(a,t,x),$
$(a,u,x),(a,r,y),(a,s,y),(a,t,y),(a,u,y),$
$(a,r,z),(a;s,z),(a,t,z),(a,u,z) \}$

5.1.4.4 SUBCONJUNTOS DEL PRODUCTO CARTESIANO

+ Se observó que el producto cartesiano es un conjunto y éste a su vez está formado por varios subconjuntos ordenados.
  Ahora bien, en ciertas circunstancias especiales, interesa considerar el caso de algún subconjunto específico de ese producto cartesiano.
+ Por ejemplo, del producto cartesiano de 2 conjuntos (AxB), puede ser de interés, específicamente algúno de estos casos :

a) $A = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x > y\}$
b) $B = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x = y\}$
c) $C = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x < y\}$
d) $D = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x \neq y\}$
e) $E = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x \cdot y \neq -z\}$
f) $F = \{(x,y)/\ x \in A,\ y \in B,\ \ x = 2y\}$

+ Análogamente, para el producto cartesiano de tres conjuntos (AxBxC), puede ser de interés alpuno de estos casos :

a) $A = \{(x,y,z)/\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ \ x > y > z\}$
b) $B = \{(x,y,z)/\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ \ z = y = z\}$
c) $C = \{(x,y,z)/\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ \ x < y < z\}$
d) $D = \{(x,y,z)/\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ \ x = y,\ y \neq z\}$
e) $E = \{(x,y,z)/\ x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ \ x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x\}$

+ Cada uno de estos subconjuntos puede resultar ineresante en alguna circunstancia particular.
En los temas siguientes será enfocado el análisis de los subconjuntos del producto cartesiano en los cuales los elementos de cada par, terna, cuarteto, etc. "son diferentes" (caso d)

EJERCICIOS POR RESOLVER :

A) Mencione si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas:

1) $\{2\}$ es un conjunto ordenado
2) (lun,mar,mie,jue,vie) es un conjunto ordenado naturalmente.
3) $\{2,4,5\}$ es un conjunto ordenado
4) $(1,5) = (5,1)$
5) $P = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$
6) $\{x,y,z\} - \{z,y,x\}$
7) $PxQ = \{(m,n)/\ m \in P,\ n \in Q\}$
8) AxB = BxA si A y B son conjuntos ordenados
9) n(AxB) = n(BxA) si A y B son conjuntos ordenados
10) $(AxB) \subset (FxG)$ si $AxB = \{(x,y)/x \in A,\ y \in B,\ x \neq y\}$ y $FxG = \{(x,y)/x \in F,\ y \in G\}$ y: A=F, B=G

B) Encuentre el producto cartesiano y su número de elementos de los siguientes conjuntos por el método de diagrama arborescente.

1) AxB si: $A=\{x,y,z\}$ $B=\{a,b,c\}$
2) CxAxB si: $A=\{10,20,30\}$ $B=\{40,50,60,70\}$ $C=\{80\}$
3) AxBxCxA si: $A=\{x\}$ $B=\{a,e,i,o,u\}$ $C=\{y,z\}$
4) PxP si: $P=\{c,o,l,e,g,i\}$
5) AxBxCxD si: $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4,5\}$ $C=\{6,7,8,9\}$ $D=\{10,11,12\}$

C) Encuentre el producto cartesiano y su número de elementos de los siguientes conjuntos por el método de tablas múltiples de entrada.

1) AxB si: A={t,r,a} B={p,o,n,i}
2) BxA si: A={l,m,j,v,s,d} B={e,f,a,o,n,k}
3) AxBxC si: A={1,5} B={2,4,6} C={3,7,9}
4) CxBxA si: A={m,a,r} B={t,i,e,n} C={b,c}
5) AxAxA si: A= {f,l,o,j}

5.2 ANALISIS COMBINATORIO

5.2.1 PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

+ Al obtener el conjunto formado por el producto cartesiano AxA, puede ser de interés el caso específico del subconjunto formado por los pares ordenados que contienen "elementos distintos":

$$AxA = \{(x,y)/x \in A, y \in A, x \neq y\}$$

Por ejemplo:
Si A = {a,b,c,d,e} , se pide construir el conjunto AxA, en el cual todos los pares tengan dos elementos distintos entre sí (x≠y).
Puede utilizarse una tabla de doble entrada en la cual se eliminen los casilleros que contengan pares con elementos iguales.

	a	b	c	d	e
a		(a,b)	(a,c)	(a,d)	(a,e)
b	(b,a)		(b,c)	(b,d)	(b,e)
c	(c,a)	(c,b)		(c,d)	(c,e)
d	(d,a)	(d,b)	(d,c)		(d,e)
e	(e,a)	(e,b)	(e,c)	(e,d)	

Eliminando los pares con elementos iguales, se cumple con la condición establecida (x≠y) y se llega al siguiente conjunto especificado por extensión:

AxA = { (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,c), (b,d),
(b,e), (c,a), (c,b), (c,d), (c,e), (d,a), (d,b),
(d,c), (d,e), (e,a), (e,b), (e,c), (e,d) }

Nótese que en este subconjunto todos los pares ordenados tienen elementos distintos. Si se cuenta el número de pares ordenados se observa que al subconjunto en cuestión lo forman 20 elementos.

+ Ahora bien, el número de pares que conforman este subconjunto puede obtenerse sin necesidad de utilizar un diagrama o una tabla. Basta con razonar lo siguiente :
  + Al ser el producto AxA, los elementos de ambos conjuntos son los mismos. Como está analizándose el caso en que los elementos de cada par son diferentes, considerando que el número de elementos de A es 5 (n(A)=5), se tiene que:
    - el primer elemento de cada par puede elegirse de 5 maneras diferentes: a,b,c,d,e.
    - como al seleccionar uno de estos elementos ya no se puede utilizar nuevamente, quedan 4 de ellos para elegir el segundo componente de cada par; es decir, si se elige "a" como primer elemento del par ordenado de entre 5 alternativas: a,b,c,d,e y en dicho par no se puede repetir elementos, el segundo de ellos se tendrá que elegir de entre b,c,d,e, o sea, se tienen 4 formas de elegir este segundo elemento.
  + Para obtener el número total de posibles pares ordenados, se multiplica el número de formas en que se puede elegir el primer elemento, por el número de formas en que puede elegirse el segundo elemento.

    Entonces, los dos lugares que forman cada par ordenado de este subconjunto se pueden cubrir de: 5x4=20 maneras distintas.

+ El razonamiento anterior se conoce como el "Principio Multiplicativo", el cuál puede extenderse a cualquier número de conjuntos y elementos como sigue:

Si una primera elección puede efectuarse de "f" formas distintas, una segunda elección de "g" formas distintas, una tercera elección de "h" formas distintas y así sucesivamente, el número total de posibles elecciones es igual a: $f \times g \times h \times \ldots =$ Número Total de Posibles Elecciones

Ejemplo:
El Sr. Velasco desea establecer una fábrica de refacciones para aparatos eléctricos y ha solicitado los servicios de una compañía de colocación la cuál le ha proporcionado lo siguiente:
Para gerente de producción puede elegir entre el Sr. Núñez (n), y el Sr. Gonzáles (g); para gerente de finanzas, entre el Sr. Torres (t) y el Sr. Serna (s); para gerente de recursos humanos, entre el Sr. Cabeza (c), el Sr. Zapata (z), el Sr. López (l), el Sr. Espinoza (e) y el Sr. Domínguez (d) y por último para geren

te de ventas, entre el Sr. Alvarez (a), el Sr Buenrostro (b) y el Sr. Méndez (m).

- Aun y cuando este problema podría resolverse con un diagrama o con una tabla de multiple entrada, es más sencillo utilizar el principio multiplicativo.

  $P = \{n,g\}$ --- $n(P)=2$
  $F = \{t,s\}$ --- $n(F)=2$
  $R = \{z,c,l,e,d\}$ --- $n(R)=5$
  $V = \{a,b,m\}$ --- $n(V)=3$

  La primera decisión (gerente de producción) se puede elegir de dos formas diferentes, la segunda (gerente de finanzas) también de dos formas distintas, la tercera (gerente de recursos humanos) de cinco y la cuarta (gerente de ventas) de tres.

  Aplicando el principio multiplicativo·

  $f \times g \times h \times i$ = Número Total de Posibles Elecciones
  $2 \times 2 \times 5 \times 3$ = Formas Diferentes de Conformar el Cuerpo Gerencial

+ Caso Especial ·

Cabe mencionar un caso especial del principio multiplicativo· cuando "sí" pueden repetirse los elementos, o sea:

$$AxA = \{(x.y)/ x \in A.\ y \in B\}$$

Este es el caso en que $f = g = h = \ldots$. es decir la eleccion se puede hacer siempre de la misma cantidad de veces. Así, si $n(A)=4$:

La 1a elección se puede hacer de 4 formas diferentes.
La 2a elección se puede hacer de 4 formas diferentes.
La 3a elección se puede hacer de 4 formas diferentes.
⋮
La ra elección se puede hacer de 4 formas diferentes.

Si se considera que r=número de veces que hay que elegir, entonces el principio multiplicativo para este caso especial se enuncia de la siguiente forma:

> Si cada una de las "r" decisiones sucesivas puede tomarse del mismo número de formas diferentes (k=cte), el número total de formas diferentes que pueden tomarse para "r" decisiones es igual a:

$$\underbrace{k \times k \times k \ldots \times k}_{r\ \text{veces}} = k^r$$

Entonces para el conjunto A formado por 4 elementos: $4 \times 4 \times 4 \times \ldots \cdot \times 4$ (r veces) $= 4^r$

+ En ocasiones, al tomar una serie de decisiones sucesivas, en algunas de ellas es posible repetir elementos y en otras de ellas no se permite hacerlo; en esta situación se utilizan ambos casos del principio multiplicativo.

Ejemplo:
Una papelería desea poner clave a cada uno de los productos que vende, con el objeto de facilitar el control de inventarios; la clave deberá constar de 5 dígitos, los dos primeros deben ser letras y los tres últimos números del 0 al 9; es política de la compañía evitar claves que empiecen con dos letras iguales, pues se ha comprobado que son fuente de constantes errores en los registros. ¿Cuántas claves diferentes pueden formarse?

clave:

letra	letra	número	número	número

si: letras = 29
números = 10

El 1er dígito puede elegirse de 29 maneras.
El 2o. dígito puede elegirse de 29 maneras.
El 3er dígito upede elegirse de 10 maneras.
El 4o. dígito puede elegirse de 10 maneras.
El 5o. dígito puede elegirse de 10 maneras.

Aplicando el principio multiplicativo :
Número Total de Claves Posibles $= 29 \times 28 \times 10 \times 10 \times 10$
$= 812{,}000$

5.2.2 NOTACION FACTORIAL

+ Una de las grandes cualidades de las Matemáticas es la de escribir algunas expresiones complicadas por medio de símbolos específicos. Uno de estos símbolos se conoce como "factorial".
A menudo se encuentra un producto de varios números naturales enteros positivos consecutivos a partir del "1" , los cuales pueden abreviarse usando la notación factorial:

Producto Consecutivo	Notación Factorial	Se lee
$2 \cdot 1$	$2!$	dos factorial
$3 \cdot 2 \cdot 1$	$3!$	tres factorial
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	$4!$	cuatro factorial
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	$5!$	cinco factorial

+ Y en general :

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (3)(2)(1) = n!$$

El factorial de un número es la multiplicación de dicho número por todos los números enteros y positivos menores que él.

+ La notación fatorial tiene las siguientes propiedades:
  - El cero factorial siempre es igual a la unidad por definición:
    $0! = 1$ ejemplo: $\frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 6!$
  - El factorial de un número dado (n), es igual al producto de dicho número por el factorial del número consecutivo anterior: -- (n-1).
    $n! = n(n-1)!$ ejemplo: $10! = 10 \times 9!$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Calcular $14!$

$$14! = 14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$
$$= 87,178,291,000$$

2) Calcular $8!$

$$8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$
$$= 40,320$$

3) Calcular $7!/3!$

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} \quad ; \quad \text{pero } 3\cdot2\cdot1 = 3!$$
$$= \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!} = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$$

4) Calcular $10!/7!4!$

$$\frac{10!}{7!4!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{7!4!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{720}{24} = 30$$

5) Calcular $11!6!/9!3!0!$

$$\frac{11!6!}{9!3!0!} = \frac{(11\cdot10\cdot9!)(6\cdot5\cdot4\cdot3!)}{9!\,3!\,0!} = \frac{11\cdot10\cdot6\cdot5\cdot4}{0!}$$
$$= \frac{13200}{0!} = \frac{13200}{1} = 13200$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) Calcular 12!
2) Calcular 20!/15!
3) Calcular 20!10!8!/16!10!4!0!
4) Calcular 8!/6!2!
5) Calcular 6!5!/5!3!

5.2.3 OPERACIONES

5.2.3.1 PERMUTACIONES

+ Se considera que dos conjuntos ordenados son iguales, sí y solo sí tienen los mismos elementos y estos elementos están en el mismo orden.

+ Frecuentemente es importante saber cuántos conjuntos ordenados de "n" elementos "distintos" pueden formarse de un conjunto de "n" elementos. Para calcular ésto, se utiliza lo que se conoce como "permutaciones".

Definición :

+ Se llama "permutación" de "n" elementos a cualquier conjunto ordenado de esos "n" elementos.
Por ejemplo: del conjunto A= {a,e,i,o,u} , (a,e,i,o,u) es una permutación, (a,o,e,i,u) es otra permutación y (e,i,o,u,a) es otra más.

+ Cada permutación:
  - está formada por todos los "n" elementos del conjunto original.
  - difiere de otra únicamente en el orden de sus elementos.

+ El número total de permutaciónes de "n" elementos se simboliza por:

$$P_n$$

Así, P_5 simboliza el número total de permutaciones de 5 elementos, P_{10} el de 10 elementos, etc.

Cálculo del Número de Permutaciones :

+ Suponiendo que se tiene un conjunto de "n" elementos y se desea saber de cuántas formas diferentes pueden ordenarse los "n" elementos sin necesidad de formar cada una de ellas, es decir, cuántos conjuntos ordenados distintos de esos mismos "n" elementos pueden formarse sin elementos repetidos:
el 1er elemento puede escogerse de " n " formas diferentes
el 2o. elemento puede escogerse de "n-1" formas diferentes
el 3er elemento puede escogerse de "n-2" formas diferentes
y así sucesivamente hasta que el último elemento puede escogerse -

de una sola forma.
Utilizando el principio multiplicativo, el número total de posibles conjuntos ordenados sería entonces igual a:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ (3)(2)(1)$$

Utilizando la notación factorial, lo anterior es igual a:

$$n!$$

+ Se concluye finalmente, que el número total de permutaciones de "n" elementos de un conjunto de "n" elementos originales, sin elementos repetidos es:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo:
En el comité directivo de cierta obra de beneficencia se tienen 4 personas. Se desea nombrar 4 puestos : presidente, vicepresidente, secretario y tesorero.
¿ De cuántas formas distintas pueden ocupar los cargos esas personas, si no existe prioridad de ninguna de ellas para un puesto específico y no puede alguien ocupar dos puestos a la vez ?

Sean las personas : a, b, c, d y los puestos :

presidente	vicepresidente	secretario	tesorero

El 1er puesto (P) puede ser ocupado por 4 personas distintas.
El 2o. puesto (V) puede ser ocupado por 3 personas distintas.
El 3er puesto (S) puede ser ocupado por 2 personas distintas.
El 4o. puesto (T) puede ser ocupado por 1 persona solamente.

Entonces, el número total de formas diferentes de asignar las 4 personas a los 4 puestos son :

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Ahora bien, el problema anterior puede resolverse directamente a través de la fórmula del número total de permutaciones de 4 elementos :

$$P_n = n!$$
$$P_4 = 4! = 24$$

5.2.3.2 ARREGLOS

Definición :

+ "Arreglos" de "r" elementos tomados de un conjunto de "n" elementos, son todos los subconjuntos ordenados de "r" elementos tomados de los "n" elementos originales.

+ El proceso para encontrar arreglos consta de dos etapas :
  a) se selecciona un subconjunto de "r" elementos (donde: $1 \leq r \leq n$), de entre los "n" elementos disponibles.
  b) se forman todos los conjuntos ordenados posibles de esos "r" elementos seleccionados.

  Por ejemplo: del conjunto A = {a,e,i,o,u} hay 5 elementos; de estos 5 se desea seleccionar 3 y formar con ellos todos los conjuntos ordenados posibles.
  Una selección posible es {a,e,i} en cuyo caso se obtienen los siguientes arreglos ordenados de 3 elementos: (a,e,i),(a,i,e),(e,a,i),(e,i,a),(i,a,e),(i,e,a).
  Otra selección posible es {e,i,o} en cuyo caso se obtienen los siguientes arreglos ordenados: (e,i,o),(e,o,i),(i,e,o),(i,o,e),(o,e,i),(e,i,e).
  Y así en forma análoga para los demás selecciones posibles.

+ Un arreglo :
  - difiere de otro si tiene al menos uno de sus r elementos distinto, o :
  - difiere de otro si tiene los mismos r elementos que otro, pero colocados en distinto orden.

+ El número total de arreglos posibles de "r" elementos, tomados de "n" elementos se simboliza por:

$$A_{n,r}$$

Así, $A_{8,5}$ simboliza el número total de arreglos de 3 elementos tomados de 8 elementos; $A_{10,5}$, arreglos de 5 elementos tomados de 10, etc.

Cálculo del Número de Arreglos :

+ La fórmula básica para el cálculo del número de arreglos de "r" elementos tomados de "n" elementos originales, sin elementos repetidos, y cuya demostración el presente estudio se abstiene de desarrollar es :

$$\boxed{A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Ejemplo:
Una compañía pequeña consta de 15 obreros con diferente experiencia y desea formar equipos de 3: un maestro, un ayudante y un aprendiz. ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

Nótese que el orden en que son asignados los 3 trabajadores es importante porque no es lo mismo que una persona ocupe el puesto de maestro al puesto de aprendiz. Sin embargo no son permutaciones porque no se incluyen a todos los elementos originales (15), sino arreglos de 3 elementos tomados de 15.
Entonces, el número total de equipos de 3 trabajadores diferentes es :

$$A_{15,3} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{12!} = 15\cdot 14\cdot 13 = 2730$$

Se puede comprobar lo anterior utilizando el principio multiplicativo como sigue :
al 1er. obrero, se le puede elegir de 15 formas distintas
al 2o. obrero, se le puede elegir de 14 formas distintas
al 3er. obrero, se le puede elegir de 13 formas distintas
Entonces, el número total de equipos de 3 trabajadores diferentes es :

$$15\cdot 14\cdot 13 = 2,730$$

<u>Casos Especiales</u> :

+ Existen algunos casos de valores de "r" que merecen ser analizados:
  a) cuando r = n
  b) cuando r = n

a) En el caso de que r=1, se está seleccionando un elemento de los "n" disponibles. Esto puede ser efectuado de "n" formas diferentes (una por cada uno de los elementos disponibles). En la fórmula:

$$A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\boxed{A_{n,1} = n}$$

b) En el caso de que r=n, se está seleccionado "n" elementos de entre "n", ésto es, no se efectúa ninguna selección, sencillamente se toman los "n" elementos disponibles y se reordenan de todas las formas diferentes posibles.
Este es precisamente el caso de las permutaciones, es decir, cuando el número de elementos de un arreglo es igual al del conjunto original, se trata de una permutación, que constituye un caso particular de los arreglos.

En la fórmula :

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$\boxed{A_{n,n} = P_n = n!}$$

5.2.3.3 COMBINACIONES

Definición :

+ "Combinaciones" de "r" elementos tomados de un conjunto de "n" elementos, son todos los subconjuntos "no ordenados" de "r" elementos (donde $1 \leq r \leq n$), tomados de "n" elementos originales.

  Por ejemplo: del conjunto A = {a,e,i,o,u} con 5 elementos se desean formar combinaciones de 3 elementos.
  Algunas combinaciones posibles son: {a,e,i} , {e,i,o} , {i,o,u}

+ Una combinación:
  - difiere de otra, sí y solo sí, difieren al menos en un elemento, siendo absolutamente "irrelevante el orden" en que son colocados los "r" elementos.

+ Así, mientras en el caso de los arreglos: (a,e,i) $\neq$ (e,i,o)
  En las combinaciones no importa el orden y: {a,e,i} = {e,i,o}

+ El número total de combinaciones posibles de "r" elementos tomados de "n" elementos originales se simboliza por:

$$C_{n,r}$$

  Así, $C_{10,3}$ simboliza el número total de combinaciones de 3 elementos tomadas de 10 elementos; $C_{12,6}$, de 6 elementos tomadas de 12, etc.

Cálculo del Número Total de Combinaciones :

+ La fórmula para el cálculo del número de combinaciones de "r" elementos tomados de "n" elementos originales, sin elementos repetidos, cuya demostración tampoco se considera necesario desarrollar es:

$$\boxed{C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

Casos Especiales :

+ Existen algunos casos de valores de "r" que merecen ser analizados :

  a) cuando r = 1
  b) cuando r = n

  a) En el caso de que r=1, se elige un elemento de los "n" disponibles. Esto puede realizarse de "n" formas diferentes :

$$C_{n,1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!\ 1!} = \frac{n}{1!} = n$$

$$\boxed{C_{n,1} = n}$$

  b) En el caso de que r=n, se está seleccionando "n" elementos de entre "n" elementos originales. Esto puede efectuarse de una sola manera en virtud de que en las combinaciones el orden en que estén colocados dichos "n" elementos seleccionados es irrelevante.
  En la fórmula :

$$C_{n,n} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\boxed{C_{n,n} = 1}$$

Ejemplo:
Una empresa produce 6 productos, debido a la crisis económica por la que pasa, se ve obligada a recortar su línea a 4 productos únicamente.
¿ De cuántas maneras pueden elegirse estos 4 productos ?

Nótese que no se incluye a todos los elementos: 6 (por tanto no son permutaciones) y que el orden en que son elegidos los productos no es importante, se trata entonces de combinaciones de 4 elementos tomados de 6 elementos.

Entonces, el número total de formas de elegir 4 productos es:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{4!2\cdot1} = \frac{30}{2} = 15$$

Diferencia Entre Permutaciones, Arreglos y Combinaciones

+ La diferencia entre permutaciones, arreglos y combinaciones puede concentrarse en el siguiente cuadro :

Permutaciones	Arreglos	Combinaciones
Se toman "n" elementos de "n" elementos originales	Se toman "r" elementos de "n" elementos originales.	Se toman "r" elementos de "n" elementos originales.
Sí importa el orden en que sean colocados los "n" elementos.	Sí importa el orden en que sean colocados los "r" elementos.	No importa el orden en que sean colocados los "r" elementos.
Fórmula: $P_n = n!$	Fórmula: $A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$	Fórmula: $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
Casos Especiales: - - -	Casos Especiales: $A_{n,1} = n$ $A_{n,n} = n!$	Casos Especiales: $C_{n,1} = n$ $C_{n,n} = 1$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) La Bolsa de Valores tiene 10 empresas cuyas acciones están cotizadas como las de mayor valor en el mercado. El Sr. Gonzáles desea invertir en 4 de ellas, 4 sumas de dinero diferentes: -- \$100,000 en la primera, \$80,000 en la segunda, \$60,000 en la tercera y \$40,000 en la cuarta.
¿ De cuántas maneras diferentes puede invertir su dinero ?

Nótese que no son permutaciones porque no se incluyen todos los elementos originales (10); no son combinaciones porque sí es importante el orden al ser diferentes las cantidades a invertir en la primera, segunda, tercera y cuarta empresa.
Son arreglos de 4 elementos tomados de 10 elementos.

El número total de posibles formas diferentes de invertir son:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

2) Es cuerpo directivo de la Cámara de la Industria del Calzado, para 1987 deberá estar integrado por 5 miembros. Han sido propuestos 6 hombres y 4 mujeres para ser electos.
Determinar de cuántas formas puede integrarse dicho cuerpo directivo :
a) Si se desea que en el grupo directivo figuren 3 hombres y 2 mujeres.
b) Si se requiere que haya como mínimo 2 hombres y 1 mujer.

Nótese que no se toman en cuenta todos los elementos y que el orden carece de importancia; se trata entonces de combinaciones.

a) Grupo Directivo :

H	H	H	M	M

Se deben escoger 3 hombres de entre 6 propuestos y 2 mujeres de entre 4 propuestas.

* En virtud de que ambas selecciones son eventos simultáneos, es decir, deben darse el primero y el segundo, se multiplica :

$$C_{6,3} \cdot C_{4,2}$$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20 \qquad 20 \cdot 6 = 120$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} \quad \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

b) Esta condición puede satisfacerse de 3 formas diferentes :

$C_{6,4} \cdot C_{4,1}$

$C_{6,2} \cdot C_{4,3}$

$C_{6,3} \cdot C_{4,2}$

H	H	M	H	H
H	H	M	M	M
H	H	M	M	H

Entonces :

$$C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

$$C_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!1!} = \frac{4}{1} = 4$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} = \frac{4}{1} = 4$$

$$C_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} \quad \frac{6!}{3!3!} \quad \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!3!} \quad \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} \quad \frac{120}{6} = 20$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} \quad \frac{4!}{2!2!} \quad \frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!2!} \quad \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

Entonces:

$$C_{6,4} \cdot C_{4,1} = 15 \cdot 4 = 90$$
$$C_{6,2} \cdot C_{4,3} = 15 \cdot 4 = 90$$
$$C_{6,3} \cdot C_{4,2} = 20 \cdot 6 = 120$$

En virtud de que estas tres alternativas para cumplir con la condición de que haya por lo menos 2 hombres y 1 mujer son eventos que pueden ocurrir "uno u otro", pero no los dos o los tres al mismo tiempo, se suma :

$$C_{6,4} \cdot C_{4,1} + C_{6,2} \cdot C_{4,3} + C_{6,3} \cdot C_{4,2} = 90 + 90 + 120 = 300$$

3) La empresa "La Salada" S.A. se ha visto en la necesidad de ser liquidada. El contador ha clasificado sus deudas en 7 grupos distintos; no existe un sistema de prioridades para atender las deudas, con la salvedad de que los trabajadores grupo "a" deben ser indemnizados antes que nadie y los accionistas grupo "g" recibirán su dinero después de que todos los demás grupos hayan recibido su parte.
¿ Cuántas secuencias diferentes pueden seguirse para hacer frente a todas las deudas de la empresa ?

Grupos :

a	b	c	d	e	f	g

Hay 5 grupos acreedores cuya secuencia puede variar: b,c,d,e, f. Después de pagar al grupo a, el primer grupo a pagarle puede elegirse de 5 formas distintas, el segundo de 4, el tercero de 3, el cuarto de 2, el quinto de 1 y después se paga a g. Entonces de acuerdo al principio multiplicativo se tendría que el número de secuencias diferentes para las deudas es:

$$1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 120$$

Sin embargo, lo anterior puede resolverse también por medio de permutaciones (porque sí es importante el orden y se toman todos los elementos del conjunto original: 7) como sigue:

$$P_5 = 5!$$
$$P_5 = 120$$

4) Si un librero tiene 3 libros de inglés, 4 de álgebra y 6 de historia, ¿ de cuántas maneras se pueden escoger 6 de ellos en cada uno de los siguientes casos ? :

a) Deben ser 2 de cada materia.
b) Deben ser al menos 2 de historia y 2 de álgebra.
c) Deben ser 4 de álgebra.
d) Deben ser como mínimo 5 de historia.

a) Deben ser 2 de cada materia :

A	A	I	I	H	H

$C_{4,2} \cdot C_{3,2} \cdot C_{6,2}$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$$

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3}{1} = 3$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

2 de cada materia : :

$6 \cdot 3 \cdot 15 = 270$

b) Deben ser al menos 2 de historia y dos de álgebra :

H	H	A	A	H	H
H	H	A	A	A	A
H	H	A	A	I	I
H	H	A	A	H	A
H	H	A	A	H	I
H	H	A	A	A	I

$$C_{6,4} \cdot C_{4,2} = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} = 90$$

$$C_{6,2} \cdot C_{4,4} = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot 1 = 15$$

$$C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{3,2} = 15 \cdot 6 \cdot \frac{3}{1} = 270$$

$$C_{6,3} \cdot C_{4,3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} \cdot 4 = 80$$

$$C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{3,1} = 20 \cdot 6 \cdot 3 = 360$$

$$C_{6,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{3,1} = 15 \cdot 4 \cdot 3 = 180$$

Al menos 2 de historia y 2 de álgebra :
$90 + 15 + 270 + 80 + 360 + 180 = 995$

c) Deben ser 4 de álgebra :

A	A	A	A	H	H
A	A	A	A	I	I
A	A	A	A	H	I

$$C_{4,4} \cdot C_{6,2} = 1 \cdot 15 = 15$$

$$C_{4,4} \cdot C_{3,2} = 1 \cdot 3 = 3$$

$$C_{4,4} \cdot C_{6,1} \cdot C_{3,1} = 1 \cdot 6 \cdot 3 = 18$$

4 de álgebra : $15 + 3 + 18 = 36$

d) Deben ser como mínimo 5 de historia :

H	H	H	H	H	H
H	H	H	H	H	I
H	H	H	H	H	A

$$C_{6,6} = 1$$

$$C_{6,5}\, C_{3,1} = 6 \cdot 3 = 18$$

$$C_{6,5}\, C_{4,1} = 6 \cdot 4 = 24$$

Mínimo 5 de historia : $1 + 18 + 24 = 43$

5) Un estudiante debe resolver 10 preguntas de 13 de un exámen. ¿ De cuántas maneras debe escoger las 10 preguntas bajo las siguientes condiciones ? :

a) Escoger las 10 preguntas.
b) Si una de las 2 primeras es obligatoria y la otra no debe contestarse.
c) Si tiene que contestar exáctamente 3 de las 5 primeras.
d) Si tiene que contestar por lo menos 3 de las 5 primeras.

a) ¿ De cuántas maneras puede escoger las 10 preguntas ?

$$C_{13,10} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1} = 286$$

b) Si una de las 2 primeras es obligatoria y la otra no debe contestarse.

$$C_{11,9} = \frac{11!}{2!9!} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$$

$$C_{11,9} = \frac{11!}{2!9!} = \frac{11\cdot 10}{2} = 55$$

Si escoge una u otra : 55 + 55 = 110

c) Si tiene que contestar exáctamente 3 de las 5 primeras:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \quad \text{(para las 3 primeras)}$$

$$C_{8,7} = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8}{1} = 8 \quad \text{(para las 7 restantes)}$$

Si contesta exáctamente 3 de las 5 primeras : $10\cdot 8 = 80$

d) Si tiene que contestar por lo menos 3 de las 5 primeras :
- si contesta 3 de las 5 :

$$C_{5,3}\cdot C_{8,7} = \frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{8!}{1!7!} = 10\cdot 8 = 80$$

- si contesta 4 de las 5 :

$$C_{5,4}\cdot C_{8,6} = \frac{5!}{1!4!}\cdot\frac{8!}{2!6!} = 5\cdot 28 = 140$$

- si contesta las 5 :

$$C_{5,5}\cdot C_{8,5} = \frac{5!}{1!5!}\cdot\frac{8!}{3!5!} = 1\cdot 56 = 56$$

Si contesta al menos 3 de las 5 primeras : 80 + 140 + 56 = 276

EJERCICIOS POR RESOLVER :

1) Si una placa de coche está formada por 3 dígitos diferentes seguidos de 2 letras diferentes y pueden utilizarse las 27 letras del alfabeto, así como los 10 dígitos conocidos, encuentre:
   a) ¿ Cuántas placas diferentes pueden formarse ?
   b) De las placas que pueden formarse, ¿ cuántas no empiezan ni con el cero ni con el 1 ?
   c) ¿ Cuántas placas tienen dígitos mayores al 5 o dígitos menores al 6 ?
   d) ¿ Cuántas placas tienen vocales exclusivamente ?

2) Si se tienen 3 niños y 2 niñas, así como 5 asientos para los mismos, encuentre :
   a) ¿De cuántas maneras pueden sentarse los tres niños?
   b) ¿De cuántas maneras pueden sentarse todos los niños, si los tres niños se sientan juntos y si las dos niñas lo hacen juntas?
   c) ¿De cuántas maneras pueden sentarse todos los niños si únicamente las dos niñas deben quedar juntas?
   d) ¿De cuántas maneras pueden sentarse todos los niños, si los niños deben quedar juntos?

3) El sindicato de una empresa está formado por 15 empleados, de los cuáles 5 son de confianza, 3 son eventuales y 7 son de base. Si dicho sindicato debe formar un comité de 5 personas, ¿de cuántas maneras podrá hacerlo para cada una de las siguientes condiciones?:
   a) Debe haber cuatro empleados de la misma categoría.
   b) No debe haber empleados de confianza.
   c) Cuando menos debe haber tres empleados de base.

4) Las claves numéricas con las que se lleva el control de artículos de una tienda de autoservicio están formadas por 5 números. Considerando que no pueden repetirse los números en una clave y que pueden utilizar los números del 1 al 9, ¿cuántas claves diferentes pueden formarse para cada una de las condiciones siguientes?:
   a) Ninguna clave puede tener al 4 y al 9 al mismo tiempo.
   b) La clave debe ser divisible entre 2.
   c) La clave debe tener números mayores a 2 o números menores a 8.
   d) La clave debe tener dos números pares y tres números impares.

5) La dirección de tránsito va a emitir nuevas placas para automóviles, mismas que estarán compuestas de 4 números y 2 letras en dicho orden. Considerando que no pueden repetirse números y letras en una placa y que se pueden utilizar los números del 0 al 9 y las 27 letras del alfabeto, ¿cuántas placas podrían formarse para cada una de las condiciones siguientes?:
   a) No debe haber constantes ni números mayores a 8.
   b) Se deben tener números mayores a 2 o menores a 9.
   c) La parte numérica debe ser divisible entre 5.

CAPITULO VI

TEORIA FUNDAMENTAL DE LA PROBABILIDAD

6.1 UTILIDAD DE LA PROBABILIDAD

El importante y fascinante tema de la Probabilidad empieza en el siglo XVII, con los esfuerzos de matemáticos como Fermat y Pascal por resolver preguntas relacionadas con los juegos de azar y no es hasta el siglo XX cuando se desarrolla una teoría matemática rigurosa basada en axiomas, definiciones y teoremas.

Con el correr de los años, la Teoría de la Probabilidad encuentra su cauce en muchas aplicaciones, no solamente en la Ingeniería o las Matemáticas, sino también en campos como la Medicina, la Psicología, la Sociología, la Agricultura, la Administración de Empresas, la Ciencia Política, la Educación y la Economía.

La necesidad de la Teoría de la Probabilidad en la práctica administrativa surge cuando se han de estudiar experimentos o fenómenos aleatorios en los que no se puede predecir los resultados antes de llevarse a cabo el experimento o fenómeno.

Aun cuando la Probabilidad se aplica a muchas situaciones prácticas de los negocios, la comprensión de las nociones bašicas del tema se hace más simple si se aplica a situaciones tales como ciertos juegos de azar. Por esta razón algunas de las definiciones y reglas de la Probabilidad se explicarán al iniciarse el presente capítulo en el contexto de problemas idealizados, sin embargo dichas reglas se aplicarán después a las situaciones de la vida real que se presentan en los problemas prácticos.

La construcción de modelos teóricos para explicar los fenómenos que se dan en el mundo de los negocios, es una de las principales funciones del administrador; si los modelos son realistas, las conclusiones derivadas de ellos, serán realistas también. Ahora bien, es relativamente sencillo contruir un modelo de Probabilidad para juegos de azar, pero es más difícil contruirlo para situaciones de negocios cuando existe muy poca información sobre la cuál fundamentar el modelo; es por ello que debe reconocerse que la confiabilidad de un modelo de Probabilidad para los negocios dependerá obviamente de la cantidad de conocimiento que se tenga de la situación en cuestión.

Por otra parte, entre algunas de las herramientas más importantes del hombre de negocios se cuenta la Estadística y no es sino hasta el advenimiento de la Probabilidad cuando se puso de manifiesto que la Estadística podría emplearse en la extracción de conclusiones válidas y en la toma de decisiones ; por ejemplo en la teoría de muestreo y predicción. En otras palabras, el tema completo de la inferencia estadística está basado en consideraciones probabilísticas, es por ello que para poder utilizar estas técnicas inteligentemente es necesaria una profunda comprensión de los conceptos de Probabilidad.

Un último aspecto importante que conviene recalcar es que, además de familiarizarse con muchos conceptos y métodos específicos, el administrador debe sobre todo desarrollar cierto criterio: "pensar probabilísticamente", sustituyendo preguntas tales como: ¿ Durante cuánto tiempo contínuo funcionará este mecanismo ? por : ¿ Cuál es la probabilidad de que este mecanismo funcione durante 8 horas contínuas ?. En muchas situaciones, la segunda pregunta puede no solo ser la más atinada, sino de hecho, la única pertinente.

No es necesario seguir remarcando la importancia de la Teoría de la Probabilidad; basta con establecer que los modelos matemáticos apropiados para la descripción y estudio de un gran número de fenómenos observables en la Administración de Empresas, son "probabilísticos" y no determinísticos.

6.2 CONCEPTOS

+ Con el objeto de comprender la Teoría de la Probabilidad, es necesario definir primero los siguientes conceptos :

A) Experimento

+ Fenómeno provocado que puede consistir en una o varias operaciones o intentos.

Ejemplos:

- el "experimento" de lanzar 1 dado una vez, consiste en 1 intento.
- el "experimento" de lanzar 1 dado 200 veces, consiste en 200 intentos.

B) Evento

+ Cada uno de los posibles resultados que se pueden obtener al efectuar un intento en un experimento.

Se acostumbra representar un evento de la siguiente manera :

$$\boxed{E_n}$$

En donde, el subíndice "n" indica el número del evento.

Ejemplos:

- si se lanza una vez un dado se tienen 6 diferentes resultados posbiles, ésto es, 6 eventos :
  $E_1 = 1$ $E_3 = 3$ $E_5 = 5$
  $E_2 = 2$ $E_4 = 4$ $E_6 = 6$

- si se lanza 100 veces un dado, se tienen 6 diferentes resultados posibles, es decir, los mismos 6 eventos :
  $E_1 = 1$ $E_3 = 3$ $E_5 = 5$
  $E_2 = 2$ $E_4 = 4$ $E_6 = 6$

♦ Los eventos pueden ser de dos tipos :

- Evento Simple :
  Aquel evento que no puede descomponerse en una combinación de otros eventos. Este tipo de eventos pueden describirse con una característica única.
  Ejemplos:
  - El evento de obtener un 4 al lanzar un dado al aire.
  - El evento de obtener un as de una baraja americana.

- Evento Compuesto :
  Aquel evento que puede descomponerse en una combinación de dos o más eventos simples. Este tipo de eventos tienen dos o más características.
  Ejemplos:
  - El evento de obtener una suma de 4 al lanzar 2 dados simultáneamente. Dicho evento puede descomponerse en 3 eventos simples :

		dado 1	dado 2	
evento compuesto :	evento simple E_1 :	2	2	= 4
	evento simple E_2 :	1	3	= 4
	evento simple E_3 :	3	1	= 4

  - El evento de obtener un as negro, también puede descomponerse en 2 eventos :

evento compuesto :	evento simple E_1 :	as
	evento simple E_2 :	negro

Se puede concluir que el evento compuesto, no es más que una colección de eventos simples.

C) <u>Espacio Muestral</u> :

♦ Así como un evento es cada uno de los resultados posibles de un intento, el espacio muestral es el conjunto formado por "todos" esos resultados posibles (eventos), luego entonces, un evento no es sino un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo :

- El espacio muestral de lazar 1 dado es el conjunto de "todos" los eventos posibles :

1	2	3	4	5	6

+ Es importante aclarar que el espacio muestral dependerá del tipo de problemas que sea analizado o de las variables que se estén manejando; es decir, un espacio muestral puede obtenerse con eventos simples o compuestos.

+ Los espacios muestrales pueden obtenerse fundamentalmente a través de dos formas :

a) Tablas de Contingencia.

b) Utilización de Análisis Combinatorio : permutaciones, arreglos y combinaciones.

Ambos métodos han sido explicados con detalle en el capítulo anterior, de modo que se procederá únicamente a presentar dos ejemplos :

Ejemplo 1 :

- El espacio muestral de lanzar 2 dados al aire sería :

dado #1 / dado #2	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Es decir, que hay un conjunto de 36 posibles resultados o eventos

Ejemplo 2 :

- El espacio muestral de obtener 2 pelotas de una bolsa de 15 pelotas, si no importa el orden, sería :

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$C_{15,2} = \frac{15!}{(15-2)!2!} = \frac{15!}{13!2!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13!}{13!2!} = \frac{15\cdot 14}{2\cdot 1} = \frac{210}{2} = 105$$

Esto significa que hay un total de 105 resultados posibles.

6.3 DEFINICION DE PROBABILIDAD

Definición :

+ La Probabilidad puede interpretarse como la posibilidad de que un evento ocurra.

Representación :

+ La probabilidad de ocurrencia de un evento se representa por :

$$\boxed{P(E)}$$

+ La probabilidad de no ocurrencia de un evento se representa por :

$$\boxed{Q(E)}$$

Fórmula :

+ La probabilidad de ocurrencia de un evento se define como el número de "resultados favorables" dividido entre el número total de "resultados posibles" ; luego entonces, la fórmula general para obtener la probabilidad sería :

$$\boxed{P(E) = \frac{\#\ \text{de resultados favorables}}{\#\ \text{de resultados posibles}}}$$

O bien :

$$\boxed{P(E) = \frac{\#\ \text{de eventos favorables}}{\#\ \text{de eventos posibles}}}$$

Teoremas :

+ Teorema 1 :
La probabilidad de ocurrencia de un evento "es un número comprendido entre 0 y 1. Si el suceso es imposible (no puede ocurrir), su probabilidad es 0. Si es un suceso cierto (tiene que ocurrir), su probabilidad es 1. " (13)

(13) Spiegel R. Murray. "Teoría y Problemas de Estadística". Pag.99.

$$\boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$$

+ Teorema 2 :
La probabilidad de ocurrencia de un evento más la probabilidad de no ocurrencia del mismo es igual a la unidad.

$$\boxed{P(E) + Q(E) = 1}$$

Tipos de Probabilidad :

+ Existen básicamente dos conceptos de la Probabilidad :

Probabilidad
- Probabilidad Objetiva
  - Clásica
  - Clásica Empírica
- Probabilidad Subjetiva

A) Probabilidad Objetiva :
Es aquella que puede ser calculada de una forma objetiva, es decir que si es calculada por dos personas diferentes, debe arrojar el mismo resultado.
La probabilidad objetiva se clasifica en dos:

+ Probabilidad Objetiva Clásica :
Es aquella que al calcularse se basa en el hecho de conocer previamente el proceso que se está analizando.
Ejemplo :
- La probabilidad de obtener un rey de una baraja americana de 52 cartas que consta de 4 palos : corazón, diamante, trébol y espada, cada uno de los mismos subdividido en 13 cartas.

$$P(rey) = \frac{\#\text{ eventos favorables}}{\#\text{ eventos posibles}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Esta probabilidad es objetiva clásica en virtud de que puede obtenerse la probabilidad de sacar un rey sin siquiera tener la baraja (conocimiento previo del proceso).

+ Probabilidad Objetiva Clásica Empírica :
Es aquella que se basa en ciertos datos observados y no en un conocimiento previo del proceso.
Ejemplo:
- Se tiene un grupo de 40 productos de plástico recién salidos de la máquina con las siguientes condiciones :
15 miden 50.5 cms.
20 miden 50.0 cms.
5 miden 49.5 cms.
40

Obtener la probabilidad de que al seleccionar un producto de plástico de dicha máquina, éste mida 50.5 cms.

$$P(50.5\ \text{cms.}) = \frac{\#\ \text{resultados favorables}}{\#\ \text{resultados posibles}} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Esta probabilidad objetiva es clásica empírica porque es obvio que tuvieron que observarse los resultados de los tamaños o medidas dentro de cierta cantidad de productos.

B) Probabilidad Subjetiva :
Es aquella que es calculada de acuerdo al criterio de una persona determinada, lo que ocasiona que pueda haber divergencia en los criterios utilizados por dos o más personas.

Ejemplo :

- Un ingeniero ha diseñado una nueva máquina para agilizar la producción de la fábrica, se desea conocer la probabilidad de éxito de que los 20 obreros aprendan a manejarla.
  - El criterio del inventor de la máquina respecto a la probabilidad de éxito en su manejo, puede estar influenciado porque la máquina le parece sencilla y diría que la probabilidad de éxito es grande.
  - El criterio del gerente de recursos humanos está influenciado porque piensa que los obreros no están suficientemente capacitados para manejar la nueva máquina y difiere del criterio del inventor.
  - Entonces, la probabilidad de éxito sería diferente dependiendo de la persona que la calculara.

" La asignación de probabilidades a diversos eventos suele estar basada en la experiencia previa, opinión personal del individuo y el análisis de la situación particular. " (14)

\+ Hasta ahora han sido definidos los conceptos elementales para poder manejar la probabilidad, a continuación se desarrollarán las reglas básicas para poder desarrollar los diferentes cálculos que pueden obtenerse a través de la probabilidad.

6.4 PROBABILIDAD SIMPLE

\+ Es aquella " probabilidad de ocurrencia de un evento simple, un evento descrito por una sola característica ." (15)

---

(14) Berenson Mark L., Levine David M. "Estadística para Administración y Economía, Conceptos y Aplicaciones". Pag 114.

(15) Berenson Mark L., Levine David M. Ob.Cit. Pag.118.

+ Como fue mencionado, la probabilidad simple estó dado por :

$$\boxed{P(E_1) = \frac{\text{\# de eventos simples favorables}}{\text{\# de eventos simples posibles}}}$$

Ejemplos:

1) Calcular la probabilidad de que al extraer una carta de una - baraja de 52 , ésta :
   a) sea un 5
   b) sea de color rojo

   a) $P(5) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# de cartas "5"}}{\text{\# total de cartas}}$
   $= \frac{4}{52} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

   b) $P(R) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# de cartas rojas}}{\text{\# total de cartas}}$
   $= \frac{26}{52} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$

2) Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado al aire :
   a) caiga un 4
   b) caiga un número par

   a) $P(4) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# de caras cuatro del dado}}{\text{\# total de caras del dado}}$
   $= \frac{1}{6}$

   b) $P(par) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# de caras par del dado: (2,4,6)}}{\text{\# total de caras del dado}}$
   $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) Calcular la probabilidad de que al sacar una sola bola de una urna que contiene 5 blancas, 4 rojas y 3 amarillas, se obtenga :
   a) una bola blanca
   b) una bola roja
   c) una bola amarilla

   a) $P(B) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# bolas blancas}}{\text{\# total de bolas}} = \frac{5}{12}$

   b) $P(R) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# bolas rojas}}{\text{\# total de bolas}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   c) $P(A) = \frac{\text{\# eventos favorables}}{\text{\# eventos posibles}} = \frac{\text{\# bolas amarillas}}{\text{\# total de bolas}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

6.5 PROBABILIDAD CONJUNTA

+ La probabilidad conjunta es aquella probabilidad de ocurrencia de un evento que puede descomponerse en eventos simples.
+ Cuando se relacionan dos o más eventos, éstos pueden combinarse de dos formas :

$$\boxed{E_1 \text{ "y" } E_2}$$

Que en lenguaje de conjuntos se representa : $A \cap B$

$$\boxed{E_1 \text{ "o" } E_2}$$

Que en lenguaje de conjuntos se representa : $A \cup B$

+ Lo anterior da lugar a 2 reglas para el cálculo de probabilidades :

a)	Regla de la Adición	(E_1 "o" E_2)
b)	Regla de la Multiplicación	(E_1 "y" E_2)

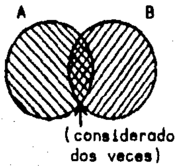
+ Se procederá a desarrollar cada una de ellos :

6.5.1 REGLA DE LA ADICION

+ Se utiliza para encontrar la probabilidad de que ocurra el evento "A" "o" el evento "B" : $P(A \text{ o } B) = P(A \cup B)$
+ En el cálculo de P(A o B), puden darse los dos siguientes casos :
  a) Que "A" y "B" sean eventos "no excluyentes".
  b) Que "A" y "B" sean eventos "excluyentes"

<table>
<tr><th>Que "A" y "B" sean eventos "No Excluyentes"</th><th>Que "A" y "B" sean eventos "Excluyentes"</th></tr>
<tr><td>

+ En los eventos no excluyentes, la ocurrencia de un evento no impide la ocurrencia del otro, es decir que ambos pueden darse simultáneamente.
+ Ejemplo: una carta "as-negro"
+ En un Diagrama de Venn, se refiere a la ocurrenica, ya sea del evento "A", del evento "B" o de "AyB" ($A \cap B$) :



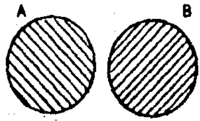
+ En este caso, la probabilidad de " A o B " se calcula :

$\boxed{P(AoB)=P(AUB)=P(A)+P(B)-P(AyB)}$

+ La Regla de la Adición, toma la probabilidad de "A" y le añade la de "B". La probabilidad de intersección de "AyB" debe restarse de este total porque ya se ha incluida 2 veces en el cálculo de P(A) y P(B). Esto puede mostrarse con claridad en el diagrama.

</td><td>

+ En los eventos excluyentes, la ocurrencia de un evento impide la ocurrencia del otro, es decir que ambos no pueden darse simultáneamente.
+ Ejemplo: una carta "as-rey"
+ En un Diagrama de Venn, no existe intersección entre el evento "A" o el evento "B" (no existe ninguna carta que cumpla ambas características), o bien, la intersección es igual a 0.



+ En este caso, la probabilidad de " A y B" se calcula :

P(AoB)=P(AUB)=P(A)+P(B)-P(AyB)

P(AoB)=P(AUB)=P(A)+P(B)- 0

$\boxed{P(AoB) = P(AUB) = P(A)+P(B)}$

+ La probabilidad de que ocurra el evento "A" o el evento "B" es igual a la suma de la probabilidad de ocurrencia de "A" y la probabilidad de ocurrencia de "B".

</td></tr>
</table>

+ Ejemplos:

1) Una empresa productora de fibras de limpieza hace una investigación de mercados que arroja los siguientes resultados acerca de la opinión de 150 amas de casa sobre su producto :

5	opinan que las fibras son excelentes (E)
40	opinan que las fibras son muy buenas (MB)
40	opinan que las fibras son suficientemente buenas (SB)
30	opinan que las fibras son regulares (R)
15	opinan que las fibras son malas (M)
20	opinan que las fibras son pésimas (P)

La empresa desea televisar entrevistas a amas de casa escogidas al azar, sin embargo, para no arriesgar su imagen, desea saber primero la probabilidad de que :

a) salga una ama de casa que diga que su producto es suficientemente bueno o una que diga que es regular.

b) salga una ama de casa que diga que su producto es excelente o una que diga que es pésimo.

c) salga una ama de casa que no diga que su producto es excelente o una que no diga que es muy bueno.

+ Dado que cada ama de casa puede generar solo una opinión, los eventos E, MB, SB, R, M y P, son "mutuamente excluyentes". Entonces :

a) $P(SB o R) = P(SB) + P(R) = \frac{40}{150} + \frac{30}{150} = \frac{70}{150} = \frac{7}{15}$

b) $P(M o P) = P(M) + P(P) = \frac{15}{150} + \frac{20}{150} + \frac{35}{150} = \frac{7}{30}$

c) Partiendo de que P + Q = 1, en este caso la probabilidad de ocurrencia de E + MB, más la probabilidad de ocurrencia de SB + R + M + P es igual a la unidad, se puede establecer que :

$$1 - P = Q$$

Luego entonces, es más fácil calcular $1-(P(E)+P(MB))$, que calcular $P(SB)+P(R)+P(M)+P(P)$ y ambas representan la probabilidad de que salga una ama de casa que no diga que el producto de la empresa es excelente o una que no diga que es muy bueno, que es lo mismo a que salga una ama de casa que diga que su producto es suficientemente bueno o una que diga que es regular, o una que diga que es malo o una que diga que es pésimo.

$$1 - (P(E)+P(MB)) = P(SB)+P(R)+P(M)+P(P)$$

Entonces :

$$1 - (P(E)+P(MB)) = 1 - \left(\frac{5}{150} + \frac{40}{150}\right) = 1 - \frac{45}{150} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

2) Una empresa gubernamental se ve en la necesidad de correr a una persona porque deben ser solo 50 empleados. En virtud de que todo el personal está calificado como excelente, el director ha decidido escoger al azar la persona que será despedida. El gerente de recursos humanos teme que le toque a los empleados de su departamento, y desea calcular a partir de los siguientes datos que posee, algunas probabilidades :

Años Trabajados / Tipo de empleado	2 años	5 años	10 años	15 años	Total
Ejecutivo	5	1	5	2	13
De Confianza	15	7	6	10	38
Total	20	8	11	12	51

a) Probabilidad de que despidan un trabajador de confianza o una persona que lleve dos años en la empresa.
b) Probabilidad de que despidan un ejecutivo o una persona que lleve dos años en la empresa.
c) Probabilidad de que despidan a un ejecutivo o una persona que lleve 15 años en la empresa.

En virtud de que los eventos tipo de trabajador y número de años trabajados, no son excluyentes (pueden darse simultáneamente), las probabilidades se calculan como sigue :

De confianza = C
Ejecutivo = E

a) $P(Co2) = P(C) + P(2) - P(Cy2)$
$= \frac{38}{51} + \frac{20}{51} - \frac{15}{51} = \frac{43}{51}.$

b) $P(Eo2) = P(E) + P(2) - P(Ey2)$
$= \frac{13}{51} + \frac{20}{51} - \frac{5}{51} = \frac{28}{51}$

c) $P(Eo15) = P(E) + P(15) - P(Ey15)$
$= \frac{13}{51} + \frac{12}{51} - \frac{2}{51} = \frac{23}{51}$

6.5.2 REGLA DE LA MULTIPLICACION

+ Se utiliza para encontrar la probabilidad de que ocurra el evento "A" "y" el evento "B" : $P(AyB) = P(A \cap B)$.

+ En el cálculo de P(AyB), pueden darse los dos siguientes casos:
a) Que "A" y "B" sean eventos independientes.
b) Que "A" y "B" sean eventos dependientes.

Que "A" y "B" sean eventos "Independientes"	Que "A" y "B" sean eventos "Dependientes"
+ En los eventos independientes, la ocurrencia de un evento no afecta la ocurrencia del otro evento. Este es el caso del "muestreo con reemplazo", en el que cualquier selección posterior, es independiente de la anterior.	+ En los eventos dependientes la ocurrencia de uno de los eventos sí afecta la del otro; en otras palabras, la probabilidad del evento posterior, depende de lo que haya resultado del anterior. Este es el caso del "muestreo sin reemplazo".
+ Ejemplo: Probabilidad de sacar dos bolas de una urna, siendo la primera roja y la segunda también, si se reemplaza la primera que se sacó.	+ Ejemplo: Probabilidad de sacar dos bolas de una urna, siendo la primera roja y la segunda también, si no se reemplaza la primera que se sacó.
+ En el caso de eventos independientes, la probabilidad de ocurrencia de "A y B" se calcula:	+ En el caso de eventos dependientes, la probabilidad de ocurrencia de "A y B", se calcula:
$\boxed{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)}$	$\boxed{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)}$
+ La probabilidad de ocurrencia de "A y B" es igual a la multiplicación de la probabilidad de que ocurra "A" por la probabilidad de que ocurra "B".	+ La probabilidad de que ocurran "A y B" es igual a la probabilidad de que ocurra "A" por la probabilidad de que ocurra "B", "habiendo ya ocurrido "A" ".

+ Ejemplos :
1) En una bodega hay 20 televisiones de los cuáles: 7 son grandes,

10 son medianas y 3 son chicas. Una persona vendada seleccionará en forma aleatoria 2 televisiones entre las 20. Hallar :

a) La probabilidad de que las 2 televisiones fueran chicas si se devuelve a la bodega la primera televisión, después de determinar su tamaño y antes de sacar la segunda televisión.

b) La probabilidad de que las dos televisiones fueran chicas si no se devuelve la primera que se seleccionó.

a) $P(CH_1 \text{ y } CH_2) = P(CH_1) \cdot P(CH_2) = \frac{3}{20} \cdot \frac{3}{20} = \frac{9}{400}$

La probabilidad de que salga la primera televisión chica es de 3/20, como se devuelve ésta, la probabilidad del segundo evento es independiente de lo que haya sucedido en el primero, es decir, la primera selección no afecta la segunda. Entonces la probabilidad de obtener otra televisión chica vuelve a ser 3/20.

b) $P(CH_1 \text{ y } CH_2) = P(CH_1) \cdot P(CH_2/CH_1) = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} = \frac{6}{380} = \frac{3}{190}$

En este caso la probabilidad del segundo evento sí se ve influenciada por el primer evento, en virtud de que al sacar la primera televisión chica quedan en la bodega 2 televisiones chicas y 10 televisiones en total, luego entonces, la probabilidad de que la segunda televisión sea chica se calcula sobre "el restante" del primer evento, es decir "ya ocurrido" el primer evento : 2/19.

2) Una fábrica tiene 8 obreros casados, 3 viudos y 9 solteros. Requiere escoger 3 al azar para que monten guardia una noche. Determine la probabilidad de que :

a) Los 3 obreros ean casados.
b) Los 3 obreros sean viudos.
c) 2 obreros sean casados y uno sea viudo.
d) Se escoga un obrero de cada estado civil.
e) Los obreros escogidos sean en el orden casado, viudo, soltero.

Se observa que el primer evento afecta el resultado del segundo y éste el del tercero, porque van quedando menos obreros de donde escoger, luego entonces, se trata de eventos "dependientes".

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/B/A)$$

a) P(3 casados)

+ Por el método tradicional :

$$P(C_1 y C_2 y C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2/C_1) \cdot P(C_3/C_2/C_1)$$

$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{336}{6840} = \frac{14}{285}$$

+ Utilizando Análisis Combinatorio :

$$P(3 \text{ casados}) = \frac{\#\text{ eventos favorables}}{\#\text{ eventos posibles}}$$

$$= \frac{\text{todos los grupos de 3 casados tomados de 8}}{\text{todos los grupos de 3 obreros tomados de 20}}$$

$$= \frac{C_{8,3}}{C_{20,3}}$$

$$= \frac{\frac{8!}{5!3!}}{\frac{20!}{17!3!}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{\frac{336}{6}}{\frac{6840}{6}} = \frac{56}{1140} = \frac{14}{285}$$

b) P(3 viudos)

+ Por el Método Tradicional :

$$P(V_1 y V_2 y V_3) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) \cdot P(V_3/V_2/V_1)$$

$$= \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{6}{6840} = \frac{1}{1140}$$

+ Utilizando Análisis Combinatorio :

$$P(3 \text{ viudos}) = \frac{\#\text{ eventos favorables}}{\#\text{ eventos posibles}}$$

$$= \frac{\text{todos los grupos de 3 viudos tomados de 3}}{\text{todos los grupos de 3 obreros tomados de 20}}$$

$$= \frac{C_{3,3}}{C_{20,3}}$$

$$= \frac{\frac{3!}{0!3!}}{\frac{20!}{17!3!}} = \frac{1}{1140}$$

• Nota :

Alguien podría pensar que al considerar las combinaciones de 3 obreros viudos de los 3 existentes se está tomando en cuenta el orden; obsérvese la diferencia considerando que los obreros viudos fuesen numerados : V_1, V_2 y V_3 .

+ Sin orden: $C_{3,3} = 1$ $\quad V_1V_2V_3 = V_3V_2V_1 = V_1V_3V_2$

$V_2V_1V_3 = V_2V_3V_1 = V_3V_1V_2$

+ Con orden: $A_{3,3} = 6$ $\quad V_1V_2V_3 \neq V_3V_2V_1 \neq V_1V_3V_2$

$V_2V_1V_3 \neq V_2V_3V_1 \neq V_3V_1V_2$

Como puede observarse, el número de arreglos es superior al número de combinaciones debido a que se considerarían diferentes los grupos de 3 formados, según el orden.

c) P(2 casados y 1 viudo)

+ Por el Método Tradicional :

P(2 casados y 1 viudo) : pueden tenerse los siguientes casos:

$$P(C,C,V) = \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{168}{6840} = \frac{28}{1140} = \frac{7}{285}$$

$$P(C,V,C) = \frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{285}$$

$$P(V,C,C) = \frac{3}{20} \cdot \frac{8}{19} \cdot \frac{7}{18} = \frac{7}{285}$$

Como puede darse el primer caso "o" el segundo "o" el tercero, y los tres eventos son excluyentes (es decir, no pueden darse simultáneamente), entonces :

$$P(2 \text{ casados y } 1 \text{ viudo}) = P(C,C,V)+(P(C,V,C)+P(V,C,C)$$
$$= \frac{7}{285} + \frac{7}{285} + \frac{7}{285} = \frac{21}{585} = \frac{7}{95}$$

+ Por el Método de Análisis Combinatorio :

$$P(2 \text{ casados y } 1 \text{ viudo}) = \frac{\# \text{ eventos favorables}}{\# \text{ eventos posibles}}$$

$$= \frac{\text{grupos de 2 casados tomados de 8 y grupos de 1 viudo tomado de 3}}{\text{grupos de 3 obreros tomados de 20}}$$

$$= \frac{C_{8,2} \cdot C_{3,1}}{C_{20,3}}$$

$$= \frac{\frac{8!}{6!2!} \cdot \frac{3!}{2!1!}}{\frac{6840}{6}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 3}{1140} = \frac{84}{1140} = \frac{7}{95}$$

d) P(1 de cada estado civil)

+ Por el Método de Análisis Combinatorio :

$$P(1 \text{ de cada estado civil}) = \frac{C_{8,1} \cdot C_{3,1} \cdot C_{9,1}}{C_{20,3}}$$

$$= \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{1140} = \frac{216}{1140} = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}$$

e) P(1 casado, 1 viudo, 1 soltero)

+ Considerando que se marca el orden específico de que el primero sea casado, el segundo viudo y el tercero soltero, se tendría :

$$P(CyVyS) = \frac{8}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{9}{18} = \frac{216}{6840} = \frac{54}{1710} = \frac{3}{95}$$

6.6 TABLA

+ Con el objeto de comprender mejor todas las probabilidades hasta ahora vistas, se representarán éstas mediante una tabla :

PROBABILIDAD	UN EXPERIMENTO (A)	PROBABILIDAD SIMPLE	P(A) =	$\frac{\text{eventos favorables}}{\text{eventos posibles}}$
	DOS O MAS EXPERIMENTOS (A,B, ...)	PROBABILIDAD CONJUNTA	P(AoB)	EVENTOS EXCLUYENTES: P(AoB)=P(A)+P(B) EVENTOS NO EXCLUYENTES: P(AoB)=P(A)+P(B)-P(AyB)
			P(AyB)	EVENTOS INDEPENDIENTES: P(AyB)=P(A)·P(B) EVENTOS DEPENDIENTES: P(AyB)=P(A)·P(B/A)

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Hallar la probabilidad de que en un lanzamiento de dos dados (uno rojo y otro azul) haya 3 o menos en el dado rojo y 4 o más en el azul.

- dado rojo (R) puede ser : 3 o 2 o 1
- dado azul (A) puede ser : 4 o 5 o 6

$$P(R \text{ en } 3 \text{ o } 2 \text{ o } 1) = P(3) + P(2) + P(1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$ (eventos excluyentes)

$$P(A \text{ en } 4 \text{ o } 5 \text{ o } 6) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$ (eventos excluyentes)

$$P(R(3o2o1) \text{ y } A(4o5o6)) = P(1o2o3) \cdot P(4o5o6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$ (eventos independientes)

Entonces : $P(\text{Rojo en 3 o menos y Azul en 4 o más}) = \frac{1}{9}$

2) Dos personas de edad avanzada han decidido hacerse un chequeo médico general; el médico les ha dicho que la probabilidad de que el Sr. "A" viva dentro de 10 años es de 2/5 y la probabilidad de que el Sr. "B" viva dentro de 10 años es de 2/3 .
Los señores "A" y "B", hermanos y socios en varios negocios, desean conocer las siguientes probabilidades, con el fin de dejar sus negocios arreglados antes de morir.
a) Probabilidad de que ambos vivan detro de 10 años.
b) Probabilidad de que viva solo el Sr. "A".
c) Probabilidad de que viva solo el Sr. "B".
d) Probabilidad de que viva uno al menos.

Son considerados 4 eventos posibles y sus probabilidades :

$P(\text{viva } A) = \frac{2}{5}$ $\qquad$ $P(\text{muera } A) = \frac{3}{5}$

$P(\text{viva } B) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(\text{muera } B) = \frac{1}{3}$

a) $P(\text{vivan ambos}) = P(\text{viva } A \text{ y viva } B)$ (eventos independientes)
$$= P(\text{viva } A) \cdot P(\text{viva } B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

b) $P(\text{viva solo } A) = P(\text{viva } A \text{ y muera } B)$
$$= P(\text{viva } A) \cdot P(\text{muera } B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

c) $P(\text{viva solo } B) = P(\text{viva } B \text{ y muera } A)$
$$= P(\text{viva } B) \cdot P(\text{muera } A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

d) $P(\text{viva 1 al menos}) = P(\text{viva solo } A) \text{ o } P(\text{viva solo } B) \text{ o } P(\text{vivan ambos})$
$$= \frac{2}{15} + \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{2+6+4}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

3) La empresa "La Urgida" requiere encontrar un administrador que ocupe el puesto de Subgerente General ; para lo anterior ha decidido recurrir a una compañía de "Head-Hunters", la cuál tiene en sus archivos los nombres de 200 hombres de primera que han estudiado para ocupar dicho puesto. De éstos 200, un total de 35 tienen maestría, 60 han hecho sus estudios en E.U.A y 12 de los que han estudiado en E.U.A tienen maestría.
La Urgida envía por correo su solicitud para que le manden un prospecto. Determinar cuál es la probabilidad de que reciba :
a) Un prospecto con estudios en E.U.A.
b) Un prospecto con estudios en E.U.A. y sin maestría.
c) El candidato elegido llama a la empresa para concertar una cita; la persona que contestó sabe que ese candidato es egresado de la Universidad de Harvard. ¿ Cuál es la probabilidad de que no tenga maestría ?

d) Un prospecto con estudios en E.U.A o que tenga maestría.
Se sugiere utilizar una tabla de 2x2 para evaluar las probabilidades.

+ La información dada puede resumirse :

Maestría / Lugar de Estudios	Con	Sin	Total
E.U.A	12		60
México			
Total	35		200

+ Completando la tabla se tiene que :

Maestría / Lugar de Estudios	Con	Sin	Total
E.U.A	12	48	60
México	23	117	140
Total	35	165	200

a) $P(EUA) = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$

b) $P(EUA \text{ y s-Maestría}) = P(EUA) \cdot P(\text{s-Maestría}/EUA)$
$$= \frac{60}{200} \cdot \frac{48}{60} = \frac{48}{200} = \frac{6}{25}$$

- Lo anterior puede también obtenerse directamente de la tabla observando que 48 de los 200 candidatos cumplen con la condición de ser de E.U.A. y no tener maestría.

c) $P(\text{s-Maestría}/EUA)$
Si: $P(EUA \text{ y s-Maestría}) = P(EUA) \cdot P(\text{s-Maestría}/EUA)$
Entonces : $\frac{P(EUA \text{ y s-Maestría})}{P(EUA)} = P(\text{s-Maestría}/EUA)$

$$P(\text{s-Maestría}/EUA) = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{60}{200}} = \frac{60}{75} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

d) $P(EUA \text{ o c-Maestría}) = P(EUA) + P(\text{c-Maestría}) - P(EUA \text{ y c-Maestría})$
$$= \frac{60}{200} + \frac{35}{200} - \frac{12}{200} = \frac{83}{200}$$

4) Una fábrica encuentra que el 15% de las chapas producidas por una nueva máquina que compraron, salen con pequeños defectos. Si se e-

ligen 6 chapas al azar producidas por dicha máquina, hallar la probabilidad de que :

a) Se obtenga 1 chapa defectuosa.

b) Se obtengan dos o más chapas defectuosas.

c) Se obtengan más de la mitad defectuosas.

Si $P(D) = .15$
y $P(ND) = .85$

Entonces:

a) $P(1 \text{ Defectuosa}) = P(D,ND,ND,ND,ND,ND)$
$= P(D)\cdot P(ND)\cdot P(ND)\cdot P(ND)\cdot P(ND)\cdot P(ND)$
$= (.15)^1\cdot(.85)^5 = .15\cdot .4437 = .0666$

Sin embargo, (D,ND,ND,ND,ND,ND) no es la única manera de obtener 1 defectuosa y 5 no defectuosas, pueden obtenerse :

(D,ND,ND,ND,ND,ND)
(ND,D,ND,ND,ND,ND)
(ND,ND,D,ND,ND,ND)
(ND,ND,ND,D,ND,ND)
(ND,ND,ND,ND,D,ND)
(ND,ND,ND,ND,ND,D)

$$C_{6,1} = \frac{6!}{(6-1)!1!} = \frac{6!}{5!1!} = 6$$

6 maneras de escoger 1 defectuosa y 5 no defectuosas.

Entonces :
$P(1 \text{ Defectuosa}) = 6(.0666) = .3996$

b) $P(\text{ 2 o más Defectuosas}) = 1-(P(0 \text{ defectuosas})+P(1 \text{ defectuosa}))$
$= 1-(C_{6,0}(.15)^0(.85)^6+C_{6,1}(.15)^1(.85)^5)$
$= 1-(1\cdot 1\cdot .3771 + 6\cdot .15\cdot .4437)$
$= 1-(.3771 + .3993) = .2236$

$P(\text{ 2 o más Defectuosos}) = .2236$

c) $P(\text{más de la mitad Defectuosos}) = P(4D) + P(5D) + P(6D)$
$= C_{6,4}(.15)^4(.85)^2 + C_{6,5}(.15)^5(.85)^1 + C_{6,6}(.15)^6(.85)^0$
$=\left(\frac{6!}{2!4!}(.0005)(.7225)\right)+\left(\frac{6!}{1!5!}(.00008)(.8500)\right)+(1(.00001)(1))$
$= (15\cdot .00036) + (6\cdot .00006) + (1\cdot .00001)$
$= (.00540 + .00036 + .00001)$
$= .00577$

5) El gobierno ha decidido vender algunas paraestatales. Se integrarán paquetes de 4 empresas al azar. El Sr. González está interesado en adquirir un paquete de empresas y ha averiguado que quedan en venta solamente 3 empresas buenas, 4 regulares y 6 malas. Antes de in-

vertir desea conocer la probabilidad de que le toque un paquete integrado por :

a) 2 empresas buenas y 2 regulares.
b) 3 empresas buenas y 1 mala.
c) Más de una empresa mala.

Sean: 3 empresas buenas (B)
4 empresas regulares (R)
$\underline{6}$ empresas malas (M)
13

a) $P(2By2R) = P(2B)\ P(2R/2B)$

$$= \frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{72}{17160} = \frac{3}{715}\cdot 6 = \frac{18}{715}$$

Pues hay 6 maneras de obtener 2 buenas y 2 regulares : BBRR, RRBB, BRRB, RBBR, BRBR, RBRB .

O bien :

$$P(2By2R) = \frac{C_{3,2}\cdot C_{4,2}}{C_{13,4}}$$

$$\frac{\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{4!}{2!2!}}{\frac{13!}{9!4!}} = \frac{\frac{3}{1}\cdot\frac{12}{2}}{\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{18}{715}$$

b) $P(3By1M) = P(3B)\ P(1M)$

$$= \frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{36}{17160} = \frac{3}{1430}\cdot 4 = \frac{12}{1430} = \frac{6}{715}$$

Pues hay 4 maneras de obtener 3 buenas y 1 mala : BBBM, BBMB, BMBB, MBBB .

O bien :

$$P(3By1M) = \frac{C_{3,3}\cdot C_{6,1}}{C_{13,4}}$$

$$= \frac{1\cdot 6}{715} = \frac{6}{715}$$

c) $P(\text{más de } 1M) = 1-(P(0Mo1M)$
$= 1-(\ P(0M) + P(1M)\ )$

$P(0M)$: si no se quiere obtener ninguna mala, quedan 7 empresas para escoger las 4 a integrar el paquete, entonces :

$$P(0M) = \frac{C_{7,4}}{C_{13,4}} = \frac{\frac{7!}{3!4!}}{\frac{13!}{9!4!}} = \frac{\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{1}}{\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{35}{715}$$

$P(1M)$: si se desea obtener 1 mala, ésta se escoge de 6 que existen, mientras que las 3 restantes se e - ligen de las 7 empresas que no son malas :

$$P(1M) = \frac{C_{6,1} \cdot C_{7,3}}{C_{13,4}} = \frac{6 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3\ 2\ 1}}{715} = \frac{210}{715}$$

Entonces :

$$P(\text{más de } 1M) = 1 - (\ P(0M) + P(1M)\ )$$
$$= 1 - \left(\frac{35}{715} + \frac{210}{715} \right) = 1 - \frac{(245)}{715} = \frac{470}{715}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) En una fábrica trabajan 20 hombres, 10 mujeres y 2 menores, de los cuáles están afiliados al sindicato, la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres. Hallar la probabilidad de que una persona escogida al azar :
   a) Sea hombre o mujer.
   b) Sea hombre o pertenezca al sindicato.
   c) Sea mujer y no pertenezca al sindicato.
   d) Sea miembro del sindicato.

2) Al tirar un dado una vez, cuál es la probabilidad de que la cara del dado sea :
   a) Par .
   b) Par o impar.
   c) Par o un tres.
   d) Impar o un tres.
   e) A la vez par y tres.
   f) Dado que la cara es impar, sea un tres.

3) Si se seleccionara un empleado de una empresa que tiene 10 personas en el departamento de finanzas, 30 en el de producción, 20 en el de ventas y 15 en el de contabilidad, hallar la probabilidad de que ésta sea :
   a) De contabilidad o de finanzas.
   b) No de finanzas o no de ventas.
   c) No de ventas.
   d) De producción.
   e) De finanzas, de producción o de ventas.

4) Si se extraen dos empleados sucesivamente de la empresa del problema anterior, reemplazando de nuevo al empleado antes de extraer el siguiente, hallar la probabilidad de que :
   a) Ambos sean del departamento de producción.
   b) El primero sea de finanzas y el segundo de producción.
   c) Ninguno sea de contabilidad.
   d) Los dos sean de finanzas o de producción o de ambos departamentos.
   e) El segundo no sea de ventas.
   f) El primero sea de contabilidad.
   g) Al menos uno sea de ventas.

h) No más de uno sea de finanzas.
i) El primero sea de producción pero el segundo no.
j) Solamente uno sea de finanzas.

5) Obtener la misma información pedida en el problema anterior, pero sin reemplazamiento.

6) Una distribuidora de Renault ha organizado un concurso para premiar a los gerentes de sus sucursales; los gerentes que entrarán serán : 7 de la sucursal A, 4 de la sucursal B y 5 de la sucursal C. Si se escogen 3 personas para darles premios, hallar la probabilidad de que :
a) Los tres gerentes sean de la sucursal A.
b) Sean 2 gerentes de la sucursal A y 1 de la B.
c) Sea 1 gerente de cada sucursal.
d) Sean cuando menos dos gerentes de la sucursal C.
Se sugiere resolver este problema a través de análisis combinatorio.

7) El gerente de ventas de la empresa "X", ha decidido meter uno de sus vendedores al concurso anual de vendedores para que represente a la compañía. Se ha determinado escoger dicha persona al azar a partir de los siguientes datos :

zona / eficiencia	1	2
muy eficiente	70	50
eficiencia normal	40	40

Determinar la probabilidad de que se elija :
a) Un vendedor muy eficiente.
b) Un vendedor muy eficiente y que pertenezca a la zona 1.
c) Un vendedor muy eficiente o que pertenezca a la zona 2.
d) Supóngase que se decide escoger uno de los vendedores calificados como muy eficientes, ¿ Cuál es la probabilidad de que sea de la zona 1 ?

8) El Banco Azteca tiene categorizados sus inversionistas según el monto de su inversión y el número de años que han tenido cuenta con ellos. Los estudios revelan que de sus 500 clientes, 210 han hecho inversiones menores a \$1'000,000 ; otros 260 han tenido cuenta en el mismo 6 o más años y 80 han tenido inversiones mayores a \$1'000,000 y han tenido cuentas de inversión por menos de 6 años. Si se selecciona al azar un cliente, cuál es la probabilidad de que :
a) Tenga una inversión mayor de \$1'000,000 .

b) Tenga una inversión menor de $1'000,000 o haya tenido su cuenta por lo menos 6 años.
c) Tenga una inversión menor de $1'000,000 y haya tenido su cuenta por lo menos 6 años.
d) Suponga que sabe que el cliente ha tenido su cuenta de inversiones menos de 6 años, ¿ Cuál es la probabilidad de que tenga una inversión menor de 1'000,000. ?

Se sugiere tomar una tabla de 2x2 para evaluar las probabilidades.

9) El 40% de los obreros de la empresa "Saldremos" están en cursos de capacitación y adiestramiento. Si se eligen 8 obreros al azar, hallar la probabilidad de que :
a) Sean 3 exáctamente los que están en capacitación.
b) Sean cuando menos 4 los que están en capacitación.
c) Sean 2 o más los que están en capacitación.

10) Los resultados de una investigación determinaron que de una muestra de 1500 familias con 4 hijos cada una, existe igual probabilidad de que los hijos hombres trabajen y las hijas mujeres lo hagan. Se pide determinar el número de familias que :
a) De los 4 hijos trabajen 2 hombres y 2 mujeres.
b) De los 4 hijos trabaje al menos un hombre.
c) De los 4 hijos no trabaje ninguna mujer.
d) De los 4 hijos trabajen a lo sumo 2 mujeres.

CAPITULO VII

FUNCIONES LINEALES

7.1 RELACION

+ Si se tienen dos conjuntos "D" y "R", puede definirse una relación entre ellos mediante el producto cartesiano.
  El producto cartesiano D x R está formado por todos los "pares ordenados" (x,y) en los que el primer elemento (x) pertenece al conjunto "D" y el segundo elemento (y) pertenece al conjunto "R".

  Ejemplo:

  $D = \{2,4\} \qquad R = \{1,3,5\}$

  $D \times R = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

  Entonces:

  relación = $r = \{(x,y) / x \in D,\ y \in R\}$

+ Considerando algunas de las distintas relaciones que pueden tenerse del producto cartesiano D x R, los cuáles son subconjuntos del mismo, se tendría :

  1a. relación : $r = \{(2,3),(2,5),(4,5)\}$
  $r = \{(x,y) / x \in D,\ y \in R,\ r < y\}$

  2a. relación : $r = \{(2,3),(4,5)\}$
  $r = \{(x,y) / x \in D,\ y \in R,\ y = x+1\}$

  3a. relación : $r = \{(2,5)\}$
  $r = \{(x,y) / x \in D,\ y \in R,\ y = x+3\}$

  Entonces, se puede describir al elemento "y" como una relación de "x", lo cuál se representa :

  $$\boxed{y = r(x)}$$

+ Nótese que al igual que cuando se habló de producto cartesiano, el orden de los elementos es vital.

+ Concluyendo :

Una "Relación" es cualquier subconjunto de un producto cartesiano.

  - El conjunto formado por los primeros elementos de una relación se llama "Dominio" (D).
  - El conjunto formado por los segundos elementos de una relación se llama "Rango" (R).

    Ejemplo :
    Dada la relación $r = \{(4,2),(9,3),(16,4)\}$ defínase el dominio y el rango.

D = {4,9,16}
F = {2,3,4 }
y puede definirse que r es : $y = \sqrt{x}$

+ Se recuerda que todo conjunto es subconjunto de sí mismo, por lo tanto una relación puede ser el producto cartesiano mismo.

7.2 FUNCION

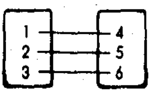
+ Explicado el concepto de relación puede definirse el concepto de función, que es un caso particular del primero.

> Una "Función es una relación en donde a cada elemento del dominio, le corresponde un elemento y solo uno del rango.

Esta definición destaca dos aspectos importantes del concepto de función :
- Que "a todos" los elementos del dominio les corresponde un elemento del rango.
- Que a los elementos del dominio les corresponde "exáctamente un" elemento del rango.

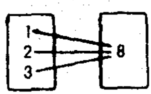
Ejemplos :
Dígase si las siguientes relaciones "T" constituyen también una función :

D = { 1,2,3 }
R = {4,5,6 }
Relación "T" :
T = { (1,4), (2,5), (3,6) }



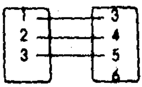
"T" sí es una función porque a cada elemento del dominio le corresponde un solo elemento del rango.

D = { 1,2,3 }
R = { 8 }
Relación "T" :
T = { (1,8), (2,8), (3,8) }



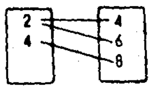
"T" sí es una función porque nótese que la definición permite el mismo elemento del rango para más de un elemento del dominio.

D = {1,2,3}
R = {3,4,5,6}
Relación "T" :
T = {(1,3),(2,4),(3,5)}



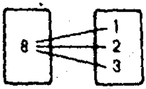
"T" sí es una función porque la definición permite también que existan elementos del rango que no se relacionen con ningun elemento del dominio.

D = {2,4}
R = {4,6,8}
Relación "T" :
T = {(2,4),(2,6),(4,8)}



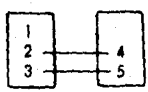
"T" no es una función porque a un elemento del dominio (2) le corresponden más de un elemento del rango (4y6).

D = {8}
R = {1,2,3}
Relación "T" :
T = {(8,1),(8,2),(8,3)}



"T" no es una función porque al elemento del dominio (8) le corresponden más de un elemento del rango (1,2y3).

D = {1,2,3}
R = {4,5}
Relación "T" :
T = {(2,4),(3,5)}



"T" no es una función porque existe un elemenro del dominio (1) al que no le corresponde ningún elemento del rango.

+ Con el fin de comprender mejor el concepto de función, se estructurará una segunda definición:

- Variable : es un símbolo que puede tomar diferentes valores.
- Cuando se tiene una función, resulta claro que se tienen dos variables relacionadas entre sí de alguna manera.

Ejemplo :

$y = 2x$ en donde : "x" es una variable
"y" es otra variable

Dentro de esta función, el valor de la variable "y" depende del valor que tenga la variable "x", entonces se puede definir que :

y = variable dependiente
x = variable independiente

Cabe aclarar que en un momento dado la función podría haberse definido como $x = y/2$; entonces, el valor de "x" dependería del de "y", y podría definirse que :

x = variable dependiente
y = variable independiente

+ A través de lo anterior se puede conlcuir entonces que :

> "Se dice que y es función de x, cuando a cada valor de x, corresponden uno o varios valores determinados de la variable y." (16)

7.3 FUNCION LINEAL

+ Una función lineal es aquella en la que las variables están elevadas a la potencia uno y cuya representación gráfica es una recta.
+ Las funciones lineales pueden ser representadas por cualesquiera de las dos siguientes formas :
  A) Representación Analítica ---- La Ecuación.
  B) Representación Gráfica ---- La Recta.

7.3.1 REPRESENTACION ANALITICA

+ En general, las funciones son expresables en ecuaciones o fórmulas cuando se conoce la relación matemática que liga la variable dependiente con la variable independiente.
+ La ecuación será entonces la expresión analítica de la función lineal y puede adoptar cualquiera de las siguientes formas :

$y = mx + b$	donde: m y b son constantes	ej: $x=4x+5$
$x = c$	donde: c es una constante	ej: $x=-5$
$y = c$	donde: c es una constante	ej: $y=6$

(16) Baldor Aurelio. Ob.Cit. Pag. 283.

7.3.2 REPRESENTACION GRAFICA

+ Resulta indispensable contar con alguna forma gráfica de representar las funciones lineales. Sin embargo, para poder realizar lo anterior es necesario primero explicar el concepto de coordenadas cartesianas.

Coordenadas Cartesianas :

+ Las coordenadas cartesianas se definen como dos rectas que forman 90° entre sí y en el cruce de las mismas se tiene el "origen".
+ A las dos rectas se les conoce como "ejes cartesianos", siendo la recta horizontal el "eje de las obscisas (x)" y la recta vertical el "eje de las ordenadas (y)"; aclarando que para "x", los valores positivos están a la derecha del origen y a la izquierda los valores negativos; así mismo, para "y" los valores positivos están hacia arriba del origen y hacia abajo los negativos.
+ La gráfica indicada divide el espacio en 4 regiones llamadas "cuadrantes", los cuáles se enumeran en sentido contrario a las manecillas del reloj.
+ En las coordenadas cartesianas, se puede entonces representar cualquier par ordenado que se indique.
  El origen, es decir el cruce entre los dos ejes, se define como el punto (0,0) donde $x = 0$ y $y = 0$.
  Para cualquier otro punto $P(x,y)$ diferente al origen, el primer número (x) es la distancia perpendicular del punto al eje de las ordenadas o eje de las y's; y el segundo número (y), es la distancia perpendicular del punto al eje de las obscisas o eje de las x's.
+ Todos los conceptos descritos pueden observarse en las coordenadas cartesianas trazadas en la pagina siguiente.

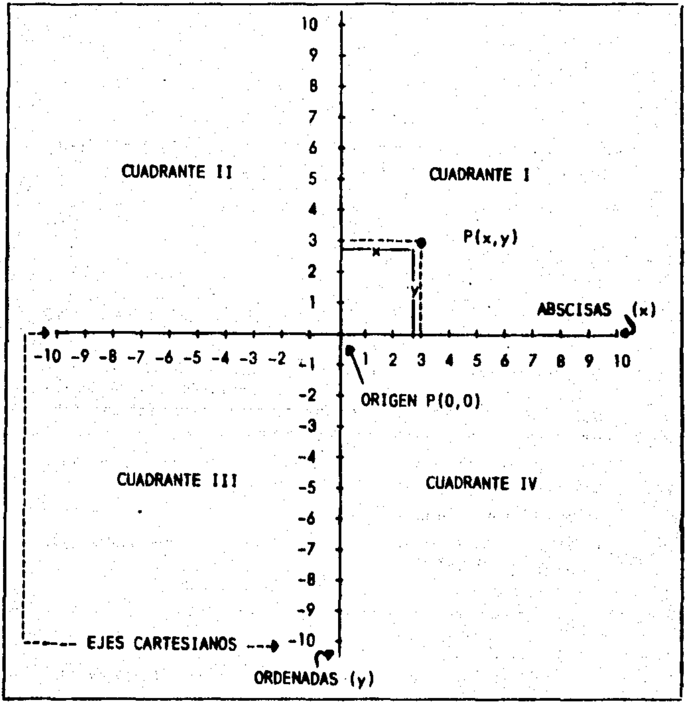
Representación Gráfica de Funciones Lineales :

+ La representación gráfica de las funciones lineales consiste en representar a éstas en ejes cartesianos, en cualquiera de sus 3 ecuaciones antes descritas :

  A) $y = mx + b$

  B) $x = c$

  C) $y = c$



COORDENADAS CARTESIANAS

A) Gráfica de la Ecuación $y = mx + b$

+ Es una línea recta que corta al eje de las ordenadas (y), en el punto (0,b), y al eje de las abscisas en el punto en el cuál el valor de "y" es igual a cero.

+ Forma de Graficar :

- Para poder trazar una función lineal, se debe indicar a la misma en la forma $y = mx + b$.

Ejemplo :

$$-2x + y = 6$$
$$y = 2x + 6$$

- Se toman valores arbitráreos de "x" y se calculan sus correspondientes de "y", tabulándose de la siguiente manera :

x	y
0	6
1	8
2	10
3	12

- Se sabe que para cada valor de "x", corresponde un valor de "y"; tomando los valores de "x" y "y" obtenidos, se tendrán una serie de puntos. El conjunto de todos estos puntos será una línea recta que representa la función.

- Sin embargo, por geometría, para poder trazar una recta, se necesitan tan solo 2 puntos cualesquiera de ella.

Es conveniente obtener :

- El punto donde la recta cruza al eje de las ordenadas (y), es decir P(0,y) :

$$\text{para } x = 0$$
$$y = 2x+6$$
$$y = 2(0)+6$$
$$y = 6$$

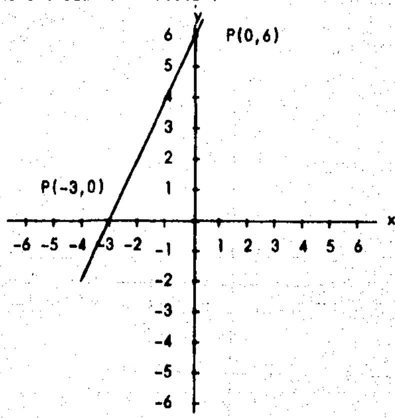
Por lo tanto, el punto donde la recta cruza el eje de las y's es : P(0,6).

- El punto donde la recta cruza al eje de las obscisas (x) , es decir P(x,0) :

$$\text{para } y = 0$$
$$0 = 2x+6$$
$$-2x = 6$$
$$x = \frac{6}{-2}$$
$$x = -3$$

Por lo tanto, el punto donde la recta cruza al eje de las x's es : P(-3,0).

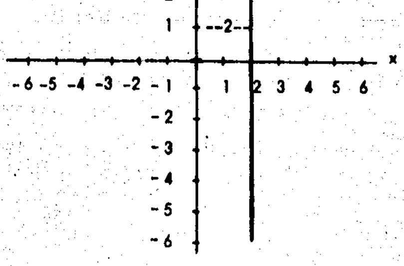
+ Puede entonces trazarse la recta :



B) Gráfica de la Ecuación $x = c$ (c = constante)

+ Es una línea recta que no corta al eje de las ordenadas (y), es decir es paralela a éste y se separa de él el valor de "c".

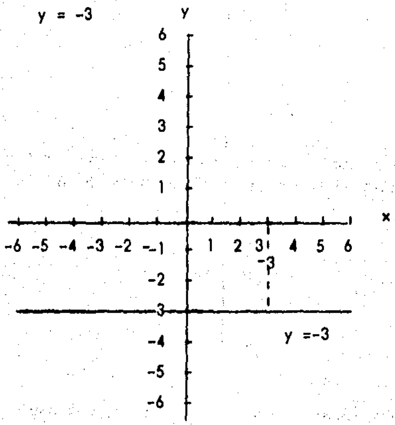
Ejemplo : $x = 2$



C) Gráfica de la ecuación $y = c$ (c = constante)

+ Es una línea recta que no corta al eje de las abscisas (x), es decir es paralela a él y se separa del mismo el valor de "c".

Ejemplo : $y = -3$



EJERCICIOS POR RESOLVER

1) En las siguientes funciones especifique el dominio y el rango :
   a) $F = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$
   b) $F = \{(7,10),(11,10),(6,10)\}$

2) Si el dominio es $D = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$ y el rango es $R = \{a, b,c,d,e,f\}$; determinar si los siguientes conjuntos son una relación y determinar si son también una función.
   a) $T = \{(10,c),(14,f)\}$
   b) $T = \{(2,d),(4,d),(6,d),8,d),(10,d),(12,d),(14,d),(16,d)\}$
   c) $T = \{(4,a),(4,b),(4,c),(4,d),(4,e),(4,f)\}$

3) Dígase cuáles de las siguientes relaciones son funciones y justifíquense sus respuestas :
   a) $R = \{(1,7),(3,4),(2,0),(4,0)\}$ cuyo $D = \{1,3,2,4\}$
   b) $R = \{(1,2),(a,2),(2,4),(b,6)\}$ cuyo $D = \{1,a,2,b\}$
   c) $y = 2x+4$ cuyo $D = \{x/x$ es un número real$\}$
   d) $y = x^2+1$ cuyo $D = \{1,3,5,7\}$

4) Represente las siguientes expresiones como funciones lineales:

a) $3y+7y+7x-2x = 1$

b) $\frac{y}{5} = -1$

c) $-4x = 8x+12y-10-6$

d) $1 = \frac{6}{12x}$

5) Represente en ejes cartesianos los siguientes puntos :

a) $P_1(2,-1)$

b) $P_2(-3,-2)$

c) $P_3(3,2)$

d) $P_4(0,0)$

e) $P_5(0,5)$

6) Trazar en un sistema de coordenadas las siguientes funciones lineales:

a) $y = -5$

b) $x = -4$

c) $-2x+3y = -4$

7) Exprese por enumeración y gráficamente en ejes cartesianos, la función cuya ecuación es:

a) $y = \frac{1}{4}x$ cuyo $D = \{8,12,16\}$

b) $y = 3+5x$ cuyo $D = \{2,4,6\}$

8) Exprese por medio de una ecuación la función $F = \{(0,0),(1,3),(3,9),(4,12)\}$ y por enumeración el conjunto del dominio y el rango de esta misma función.

9) Exprese por descripción la función cuyo dominio es $D= \{3,6,9\}$ y cuyo rango es $R = \{7,9,11\}$, respetando que el método de descripción es $F = \{(x,y)/x \in D, y \in R, y=f(x)\}$.

10) Exprese por descripción y gráficamente las funicones :

a) $F = \{(0,0),(1,3),(2,6),(3,9)\}$

b) $F = \{(0,-1),(1,1),(2,3),(3,5)\}$

7.4 ECUACIONES E INECUACIONES

7.4.1 ECUACIONES

Una "Ecuación" es una igualdad en la que existe una o varias cantidades desconocidas llamadas "incógnitas", y la cuál solo es verdadera para determinados valores de dichas incógnitas.

+ Se acostumbra representar las incógnitas a través de las últimas letras del alfabeto : u,v,w,x,y,z.

  Ejemplo:

  $6x+2 = 14$ es una ecuación, porque es una igualdad en la que hay una incógnita: "x", y esta igualdad solo es verdadera para el valor x=2. En efecto, si se sustituye la "x" por 2 se tiene :

  $6(2)+2 = 14$

  $14 = 14$

+ No se debe confundir el concepto de ecuación con el concepto de identidad.

  Una "identidad" es una igualdad que se verifica para "cualesquiera" valores de las letras que estén en ella.

  Ejemplos:

  $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

  $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

  son identidades porque se verifican para cualesquiera valores de las letras "a" y "b".

  El signo de identidad es " $\equiv$ " , el cuál se lee "idéntico a".

+ Se llama "Miembro" de una ecuación a la expresión que está a cada lado del signo de igualdad. Se acostumbra llamar primer miembro a la expresión del lado izquierdo y segundo miembro a la del lado derecho del signo de igualdad.

  Ejemplo:

  $$\underbrace{2x-5}_{\text{1er miembro}} = \underbrace{3x-9}_{\text{2o. miembro}}$$

+ Se llaman "Términos" de una ecuación a cada uno de las cantidades que están conectados por el signo "+" o "-".

  No deben confundirse los miembros de una ecuación con los térmi-

nos de la misma, éstos serán equivalentes solo cuando en un miembro de una ecuación exista una sola cantidad.
Así, en la ecuación :

$$2x-5 = 3x-9$$

los términos son : $2x$, -5, $3x$, -9.

+ Las "Soluciones" de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, hacen que ambos miembros de la ecuación sean iguales.
Así, en la ecuación :

$$2x-5 = 3x-9$$

la solución es "4", porque haciendo $x=4$ se tiene que :

$$2(4)-5 = 3(4)-9$$
$$8-5 = 12-9$$
$$3 = 3$$

es decir, que 4 satisface la ecuación.

+ El método general para encontrar las soluciones de una ecuación, consiste en transformar las ecuaciones a través de ciertas operaciones permitidas, de la cuáles se enumeran las principales a continuación :

Operaciones principales permitidas en la transformación de ecuaciones :

a) Cualquier término de una ecuación, se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $2y-4x = 8$

Entonces: $2y = 8+4x$

Porque ésto equivale a sumar o restar a los dos miembros de la ecuación la misma cantidad (en este caso $4x$):

$$2y-4x+4x = 8+4x$$
$$2y = 8+4x$$

b) Cualquier factor que esté multiplicando a un miembro de la ecuación, puede pasar (con su mismo signo) dividiendo al otro miembro de la ecuación.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $-3x = 15$

Entonces: $x = \frac{15}{-3} = -5$

Porque ésto equivale a dividir los dos miembros de la ecuación por la misma cantidad (en este caso -3):

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{15}{-3}$$
$$x = \frac{15}{-3} = -5$$

c) Cualquier término que esté dividiendo a un miembro de la ecuación, puede pasar multiplicando al otro miembro de la ecuación conservando también su signo original.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $\frac{5y}{4x} = 5x$

Entonces: $5y = 5x(4x) = 20x^2$

Porque ésto equivale a multiplicar ambos miembros de la ecuación por una misma cantidad (en este caso 4x):

$$(4x)\frac{5y}{4x} = 5x(4x)$$

$$5y = 5x(4y) = 20x^2$$

+ En resúmen, el método de resolución de ecuaciones, consiste en aplicar estos axiomas para aislar a la incógnita de un lado de la ecuación. Se dice comúnmente que el método consiste en "despejar la incógnita".

+ Para comprobar una ecuación, se sustituye la solución encontrada en la eucación original.

Ejemplo:

La solución de : $-3x = 15$

Fue : -5

Sustituyendo el valor de "x" en la ecuación:

$$-3(-5) = 15$$

$$15 = 15$$

7.4.2 INECUACIONES

> Una "Inecuación" es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas), la cuál solo se verifica para determinados valores de las incógnitas.

+ "En las inecuaciones se utilizan los siguientes símbolos de desigualdad :

1. $x > y$	significa "x es mayor que y"
2. $x < y$	significa "x es menor que y"

3. $x \geq y$	significa "x es mayor o igual que y"
4. $x \leq y$	significa "x es menor o igual que y"
5. $0 < x < 3$	significa "x es mayor que cero y menor que 3"
6. $0 \leq x \leq 3$	significa "x es mayor o igual que cero y menor o igual que 3" " (17)

Ejemplo:

$3x-1 > 8$ es una inecuación porque tiene la incógnita "x" y solo se verifica para cualquier valor de "x" mayor que 3.

+ Del mismo modo que no se debe confundir una ecuación con una identidad, tampoco debe confundirse una inecuación condicional con una inecuación absoluta.

  - Una "Inecuación Condicional" es aquella que es verdadera solo para ciertos valores de las variables.

    Ejemplo:

    $x+2 > 6$ es cierta solo cuando "x" es mayor que 4.

  - Una "Incecuación Absoluta" es aquella que es verdadera para todos los valores permitidos de las variables.

    Ejemplo:

    $(x+y)^2 \geq 0$ es cierta para todos los valores de "x" y "y", ya que el cuadrado de cualquier número real es positivo o cero.

+ Resolver una inecuación consiste en hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación.
  Igual que en el caso de las ecuaciones, las inecuaciones se transforman hasta despejar la incógnita, a través de las operaciones permitidas, de las cuáles se enumeran las principales :

  Operaciones principales permitidas en la transformación de inecuaciones :

  a) Cualquier término de una inecuación se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo y el sentido de la inecuación no cambia.

---

(17) Sevilla Joel, Fiol Michel, Sauvegrain Robert. "Tópicos de Matemáticas para Administración y Economía". Pag.90.

Ejemplo:

Sea la inecuación: $y+3 > 7$

$$y > 7-3$$
$$y > 4$$

Porque éste equivale a sumar o restar, según el caso, la misma cantidad a los dos miembros (en este caso 3).

$$y+3-3 > 7-3$$
$$y > 4$$

b) Cualquier término positivo que esté multiplicando o dividiendo a un miembro de la inecuación, puede pasar (conservando su signo original), dividiendo en el primer caso o multiplicando en el segundo, al otro miembro de la inecuación, sin que el sentido de la misma cambie.

Ejemplo:

Sea la inecuación: $\frac{5x}{7y} < (2x)(3y)$

$$\frac{5x}{2x} < (3y)(7y)$$

Porque ésto equivale a multiplicar o dividir, según el caso, a los dos miembros de la desigualdad por la misma cantidad.

c) Si el mismo número negativo multiplica o divide a ambos miembros de la inecuación, su sentido se invierte.

Ejemplo:

Sea la inecuación $-y < 0$

Se puede multiplicar por "-1" ambos miembros, entonces el sentido de la inecuación se invierte:

$$(-1)(-y) > (0)(-1)$$
$$y > 0$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Resolver la ecuación $5x-5 = x+11$ y verificar su resultado.

Solución:	Verificación:
$5x-5 = x+11$ Se pasa "x" al primer miembro y "-5" al segundo, cambiándoles los signos: $5x-x = 11+5$ Reduciendo términos semejantes: $4x = 16$	Se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación, la incógnita por la solución obtenida y si ésta es correcta, los dos miembros serán iguales: Así, haciendo $x=4$ en la ecuación dada:

Despejando "x", para lo cuál es necesario pasar el 4 que multiplica al primer miembro, dividiendo al segundo miembro :

$$x = \frac{16}{4}$$

Y simplificando:

$$x = 4$$

$$5x-5 = x+11$$
$$5(4)-5 = 4+11$$
$$20-5 = 15$$
$$15 = 15$$

2) Despejar la variable "y" de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2y+9-y-2}{2} = 5x+8-4x-3$

Reduciendo términos semejantes:

$$\frac{2y-y+9-2}{2} = 5x-4x+8-3$$

$$\frac{y+7}{2} = x+5$$

Utilizando las operaciones permitidas para transformar ecuaciones:

$$y+7 = 2(x+5)$$
$$y+7 = 2x+10$$
$$y = 2x+10-7$$
$$.\ y = 2x+3$$

b) $\frac{x+5}{y-10} = \frac{1}{2}$

Utilizando el mismo procedimiento:

$$x+5 = \frac{1}{2}(y-10)$$
$$x+5 = \frac{y}{2}-\frac{10}{2}$$
$$x = \frac{y}{2}-5-5 = \frac{y}{2}-10$$
$$x+10 = \frac{y}{2}$$
$$(x+10)2 = y$$
$$2x+20 = y$$
$$y = 2x+20$$

c) $\frac{y-8}{x+5} = \frac{-4}{5}$

$$y-8 = \frac{-4}{5}(x+5)$$
$$y-8 = \frac{-4x}{5}-\frac{20}{5}$$

$$y-8 = \frac{-4}{5}x-4$$

$$y = \frac{-4}{5}x-4+8$$

$$y = \frac{-4}{5}x+4$$

3) Resolver los siguientes ecuaciones:

a) $3x-4+8x = x+14+7x$

$$3x+8x-x-7x = 14+4$$
$$11x-8x = 18$$
$$3x = 18$$
$$x = \frac{18}{3}$$
$$x = 6$$

b) $(7-2x)(-3+10x) = (4x-5)(-5x+4)$

$$-21+70x+6x-20x^2 = -20x^2+16x+25x-20$$
$$70x+6x-20x^2+20x^2-16x-25x = -20+21$$
$$35x = 1$$
$$x = \frac{1}{35}$$

c) $-x^2-(-(3x+1)) = -5(2x+1)(x-2)+(3x-7)^2$

$$-x^2+3x+1 = -5(2x^2-4x+x-2)+9x^2-42x+49$$
$$-x^2+3x+1 = -10x^2+20x-5x+10+9x^2-42x+49$$
$$-x^2+10x^2-9x^2+3x-20x+5x+42x = -1+10+49$$
$$30x = 58$$
$$x = \frac{58}{30} = \frac{29}{15}$$

4) Resolver la siguiente incecuación y verificar su resultado : $3x-5 > x+3$

Solución:	Verificación:
$3x-5 > x+3$	
Pasando "x" al primer miembro y "-5" al segundo:	Un número mayor que 4:5
$3x-x > 3+5$	Sustituyendo en la inecuación:
Reduciendo términos semejantes:	$3x-5 > x+3$
$2x > 8$	$3(5)-5 > 5+3$
Despejando la "x":	$15-5 > 8$
$x > \frac{8}{2}$	$10 > 8$
$x > 4$	
Lo que significa que la de	

siguoldad dada, solo se ve
rifica para valores de "x"
menores que 4.

5) Resolver las siguientes incecuaciones :

a) $x-21 > -8x+6$

$$\begin{aligned} x+8x &> 6+21 \\ 9x &> 27 \\ x &> \frac{27}{9} \\ x &> 3 \end{aligned}$$

b) $26+(y-1)(y+2) < (y+4)(y+5)$

$$\begin{aligned} 26+(y^2+2y-y-2) &< y^2+9y+20 \\ y^2+2y-y+26-2 &< y^2+9y+20 \\ y^2+y+24 &< y^2+9y-20 \\ y^2-y^2+y-9y &< 20-24 \\ -8y &< -4 \\ y &< \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) $4(x-2)^3 > 4x^2(x-7)+(2x-3)^2$

$$\begin{aligned} 4(\ x^3-3x^2(2)+3x(2)^2-2^3 &> 4x^3-28x^2+4x^2-12x+9 \\ 4(x^3-6x^2+12x-8) &> 4x^3-24x^2-12x+9 \\ 4x^3-24x^2+48x-32 &> 4x^3-24x^2-12x+9 \\ 4x^3-4x^3-24x^2+24x^2+48x+12x &> 9+32 \\ 60x &> 41 \\ x &> \frac{41}{60} \end{aligned}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

A) Resolver las siguientes ecuaciones :

1) $7x+65x+102+81 = 5x+6x$
2) $101-4y-33+3y = -16y-100+108$
3) $31y+53y-172 = -51y-30y-15y+8y$
4) $1/2x(2x+1+2) = x+3(x-1)$
5) $-2(x^2+7)-x(x+1)+3x(x-3)+5(x+7) = -4$
6) $1+(3-y)^2 = (y-2)^2$
7) $x(x-3)+(x-2)^2 = -(x+2)(x-1)+3(x+4)(x-3)+2$
8) $(y-3)(y+2)(y+1) = (y-2)(y+1)(y+1)$
9) $4(x+1)(x-1)-2 = -3(x+5)^2+7(x-4)^2$
10) $y(y-3)-2y(y+5)+6(y^2-3y-7) = 5(1-y)^2+2$

B) Resolver las siguientes incecuaciones :

1) $-8+2x+3-x < x-6+x$
2) $-14+3y < -2+7y$

3) $(y-2)^2 < (y-1)^2-7$

4) $10x-\frac{2}{3}-8x-1 > 10+\frac{x}{3}$

5) $2x(x+3) > (x+4)(2x-1)-3(x-2)$

6) $(x-2)(x-3) > (x+5)(x-4)$

7) $4(1-2y)-7 < 4(3-y)-3y$

8) $-(3x+4-2)(x-4+x)+6(x^2+1) < 3(5x+21)$

9) $(x-1)^2+3x > (x-1)(x+3)$

10) $\frac{x}{3} < \frac{x+3}{3} - \frac{4}{x+2}$

7.5 LA RECTA

7.5.1 PENDIENTE DE UNA RECTA

+ Dada una función lineal $y=mx+b$, se puede definir la pendiente (m) de dicha recta como :

$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

Donde: (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 de la recta.

+ Puede demostrarse que la pendiente de la función lineal se obtiene a través de dos puntos :
  - Sean los puntos de la recta $y=mx+b$, los siguientes :
    $P_1(x_1,y_1)$
    $P_2(x_2,y_2)$
  - Sustituyendo dichos puntos en la ecuación de la recta:
    $y_1= mx_1+b$
    $y_2= mx_2+b$
  - Entonces:
    $y_2-y_1 = mx_2+b-mx_1-b$
    $y_2-y_1 = m(x_2-x_1)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

+ Es importante notar que :
  - Pueden tomarse cualesquiera dos puntos sobre la recta y obte-

ner el mismo resultado para la pendiente.

- No importa el orden en que se tomen los dos puntos de la recta.

Ejemplos:

1) Encontrar la pendiente de la recta $5x+6y = 1$.

$$5x+6y=1$$
$$6y=-5x+1$$
$$y=-\frac{5x}{6}+\frac{1}{6}$$
$$y= mx+b \ ; \text{ entonces } \ m= -\frac{5}{6}$$

2) Dada la función $y=3x+6$, encontrar la pendiente por medio de dos puntos de la recta.

Se calculan dos puntos de la recta:

$y=3x+6$

si $x=$ $y=6$ entonces: $P_1(x_1,y_1) = (0,6)$

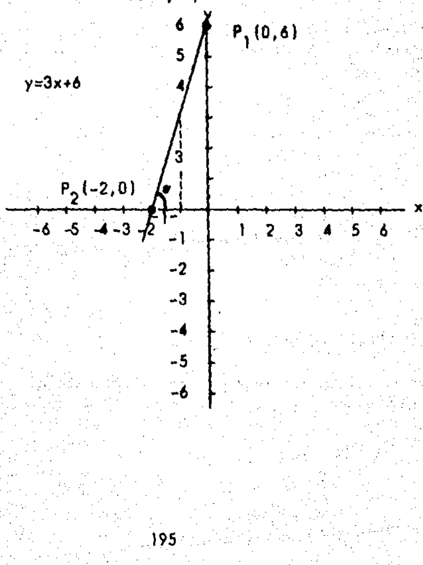
$y=0$ $x=-2$ $P_2(x_2,y_2) = (-2,0)$

Se calcula la pendiente:

$$m= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{0-6}{-2-0} = \frac{-6}{-2} = 3$$

+ Interpretación de la pendiente :

Graficando la función del ejemplo anterior:



- La pendiente "m", se interpreta como el monto del cambio en el eje de las ordenadas (y), como consecuencia del cambio de una unidad positiva en el eje de las obscisas (x).
  Así, en el ejemplo anterior, por cada unidad más en el eje de las x's, hay un aumento de 3 unidades (m=3) en el eje de las - y's. Esto puede observarse claramente en la gráfica.

- Por otra parte, la pendiente puede también definirse como el - valor de la tangente del ángulo que la recta forma con el eje de las x's; dicho ángulo está indicado en la gráfica por "θ".

Si la pendiente m es positiva --- el ángulo es agudo.
Si la pendiente m es negativa --- el ángulo es obtuso.
Si la pendiente m no está definida --- el ángulo es de 90°

Ejemplos :

1) Dada la función lineal $y=x+2$, ¿Cuál es la pendiente de la recta y qué ángulo forma con el eje de las x's?

   si $y=mx+b$
   $m = 1$
   $m = \text{tang } \theta$
   $\theta = \text{ang tang } (m)$
   $\theta = \text{ang tang } (1)$
   $\theta = 45°$ (tomado de tablas de tangentes)

2) Dada la función lineal $y=-x+2$, ¿Cuál es la pendiente de - la recta y qué ángulo forma con el eje de las x's?

   si $y=mx+b$
   $m = -1$
   $m = \text{tang } \theta$
   $\theta = \text{ang tang } (m)$
   $\theta = \text{ang tang } (-1)$
   $\theta = -\text{ang tang } (1)$
   $\theta = -45°$ (tomado de tablas de tangentes)

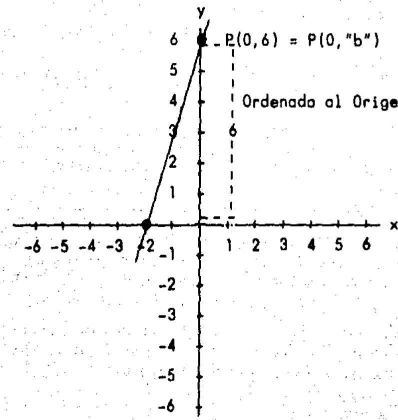
   Ahora bien, un ángulo negativo de -45° equivale a - un ángulo positivo de :
   $\theta = 180°-45°$
   $\theta = 135°$

7.5.2 ORDENADA AL ORIGEN

+ La ordenada al origen de una recta se define como el valor de "y", en el punto en el cuál la recta cruza al eje de las ordenadas (y).

+ La ordenada al origen se representa por la letra "b".

Utilizando la misma gráfica de la función y=3x+6 se tiene:



+ El valor de la ordenada al origen (b), se obtiene despejando la variable "y" de la ecuación considerando un valor de "0" para la variable "x".

Ejemplo:

y=mx+b	y=3x+6
si x=0	si x=0
y=m(0)+b	y=3(0)+6
y=0+b	y=0+6
y=b	y=6

+ Es importante observar que al igual que en el caso de la pendiente "m", la ordenada al origen "b" se encuentra indicada explícitamente.

y=mx+b

b = ordenada al origen

7.5.3 LA ECUACION DE LA RECTA

+ Se considerará ahora el problema de expresar una función lineal, es decir una recta, en forma algebráica.

+ Se presentan en general dos casos:
  a) Cuando se conoce un punto $P_1(x_1,y_1)$ y la pendiente m de la recta.
  b) Cuando se conocen dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ de la recta.

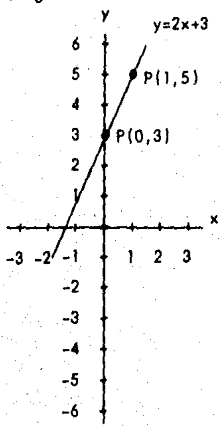
Cuando se conoce : UN PUNTO Y LA PENDIENTE DE LA RECTA	Cuando se conocen : DOS PUNTOS DE LA RECTA
+ Geométrica y algebráicamente, una recta queda definida por uno de sus puntos y su dirección (dada por m). + Aprovechando que la pendiente se define con cualesquiera 2 puntos sobre la recta, tomando cualquier otro punto P(x,y) sobre dicha recta se tiene: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ Sin embargo esta forma de la ecuación de la recta, puede ser transformada a una forma más usual al quitar el denominador: $\boxed{y-y_1 = m(x-x_1)}$ Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada. + Sustituyendo el punto $P_1(x_1,y_1)$ y la pendiente m, puede obtenerse la ecuación de la recta.	+ Geométrica y analíticamente, una recta queda también definida por 2 cualesquiera de sus puntos. + Partiendo de que la forma usual de la ecuación de la recta es: $y-y_1 = m(x-x_1)$ Y sabiendo que la pendiente está dada por: $y-y_1 = m(x-x_1)$ $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ + Sustituyendo se obtiene que: $y-y_1 = m(x-x_1)$ $\boxed{y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$ Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. + Sustituyendo los dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ puede obtenerse la ecuación de la recta.

+ Ejemplo:
  Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,5) y tiene una pendiente m=2.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$
$$y-5 = 2(x-1)$$
$$y-5 = 2x-2$$
$$y = 2x-2+5$$
$$y = 2x+3$$

+ Se trata de una recta cuya pendiente es 2 y cuya ordenada al origen es 3.

+ Puede graficarse esta ecuación de la recta, teniendo 2 puntos: se conoce el punto (1,5) y se conoce de la ecuación obtenida y=mx+b, la ordenada al origen b=3.

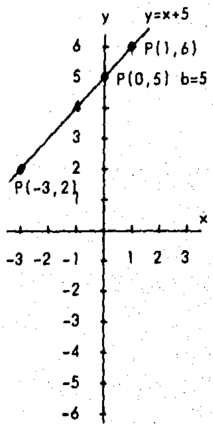


+ Ejemplo:
  Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $P_1(-3,2)$ y $P_2(1,6)$.

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y-2 = \frac{6-2}{1-(-3)}(x-(-3))$$
$$y-2 = \frac{4}{4}(x+3)$$
$$y-2 = x+3$$
$$y = x+3+2$$
$$y = x+5$$

+ Se trata de una recta cuya pendiente es 1 y cuya ordenada al origen es 5.

+ Puede graficarse la ecuación de la recta obtenida, a través de los puntos dados: $P_1(-3,2)$ y $P_2(1,6)$.



+ En los casos en que se conoce:
  - la ordenada al origen (que no es más que el punto cuyas coordenadas son (0,y) y la pendiente m.
  - un punto cualquiera de la recta y la recta paralela (cuya pendiente m es la misma).

  El problema se reduce a hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada.

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

+ Puede comprobarse en ambos casos que cualquier punto sobre la recta satisface la ecuación obtenida y recíprocamente, cualquier punto calculado a partir de la ecuación, se encuentra sobre la recta de la figura.

+ $P(\frac{1}{2},4)$ está sobre la recta.

$y = 2x+3$
$4 = 2(\frac{1}{2})+4$
$4 = 1+3$
$4 = 4$ ✓

+ $y = 2x+3$

si: $x = -1$
$y = 2(-1)+3$
$y = -2+3$
$y = 1$

$P(-1,1)$ está sobre la recta.

+ $P(-1,4)$ está sobre la recta.

$y = x+5$
$4 = -1+5$
$4 = 4$ ✓

+ $y = x+5$

si: $x = -2$
$y = -2+5$
$y = 3$

$P(-2,3)$ está sobre la recta.

7.6 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

7.6.1 SISTEMA DE ECUACIONES

+ Un sistema de ecuaciones es una reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas respectivamente; se dice que dos o más ecuaciones son "simultáneas" cuando los mismos valores de las incógnitas satisfacen todas las ecuaciones.
  Así, las ecuaciones:

$$x+y = 7$$
$$x-y = 1$$

  son simultáneas porque $x=4$ y $y=3$ satisfacen "ambas" ecuaciones.

+ La solución de un sistema de eucaciones consiste en encontrar un grupo de valores de las incógnitas que satisface todas las ecuaciones del sistema.
  La solución del sistema anterior es: $x=4$, $y=3$.

+ El tipo de sistemas de ecuaciones a tratar en este capítulo son: "sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas".

+ Existen fundamentalmente 4 métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, sin embargo, antes de explicar los mismos, es oportuno estudiar los casos en que un sistema de este tipo "no tiene una solución única", y que son dos:

7.6.2 CASOS EN QUE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS NO TIENE UNA SOLUCION UNICA

+ Son dos:
  A) Cuando el sistema es inconsistente.
  B) Cuando el sistema es redundante.

A) Sistemas Inconsistentes

+ Considérese el siguiente sistema

$$x+y = 4$$
$$x+y = 6$$

  Es obvio que $x+y$ no puede ser igual simultáneamente a 4 y a 6 y por tanto, este sistema no tiene solución.
  Para aclarar lo anterior se despeja "y" en las dos ecuaciones del sistema (es decir se transforma cada ecuación a la forma $y=mx+b$):

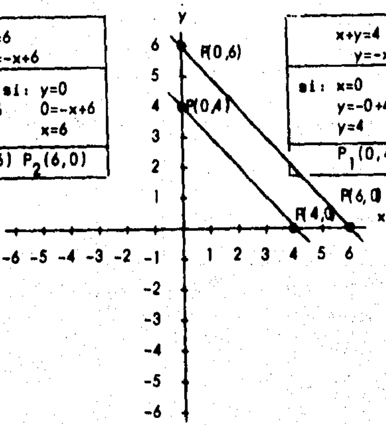
$$y = -x+4 \qquad \text{donde:} \qquad m=-1 \qquad b=4$$
$$y = -x+6 \qquad \text{donde:} \qquad m=-1 \qquad b=6$$

+ Concluyendo:

> Se dice que un sistema es "Inconsistente" cuando tiene como características:
> + Que las dos ecuaciones tienen la misma pendiente m.
> + Que las ordenadas al origen (b), son diferentes en ambas ecuaciones.

+ Geométricamente lo anterior equivaldría a dos rectas paralelas (porque tienen la misma pendiente) y que cruzan al eje de las y's en diferentes puntos (porque tienen diferentes ordenadas al origen).
Este sistema no tiene solución porque dos rectas paralelas nunca se cruzan y como se verá en el método gráfico de resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas, la solución a dos rectas se encuentra en el punto de intersección entre ambas.

$x+y=6$ $y=-x+6$	
si: $x=0$ $y=-0+6$ $y=6$	si: $y=0$ $0=-x+6$ $x=6$
$P_1(0,6)$	$P_2(6,0)$



$x+y=4$ $y=-x+4$	
si: $x=0$ $y=-0+4$ $y=4$	si: $y=0$ $0=-x+4$ $x=4$
$P_1(0,4)$	$P_2(4,0)$

B) Sistemas Redundates

+ Considérese el siguiente sistema:

$$x+y = 3$$
$$2x+2y = 6$$

+ Estas dos ecuaciones son realmente una sola, lo cual se comprueba -

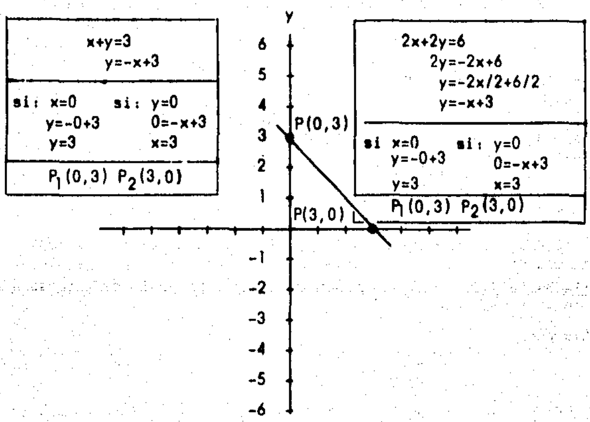
fácilmente viendo que la segunda no es sino la primera multiplicada por 2.
Despejando estas ecuaciones a la forma y=mx+b se tiene:

$$y = -x + 3$$
$$2y = -2x + 6$$

+ Gráficamente estas dos ecuaciones son una misma recta. Como se sabe, una ecuación lineal con dos incógnitas es satisfecha por todos los puntos de la recta que representa, luego entonces este sistema no tiene una solución única, tiene infinitas soluciones, ya que las dos ecuaciones son realmente una sola recta.

+ Concluyendo:

> Se dice que un sistema es "Redundante" cuando tiene como características:
> + Que las dos ecuaciones tienen la misma pendiente m.
> + Que las dos ecuaciones tienen la misma ordenada al origen b.



+ Se deduce entonces, que antes de tratar de resolver cualquier sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se debe confirmar si no se trata de un sistema de ecuaciones inconsistente ni redundante, a través de transformar la ecuación a la forma -

$y=mx+b$ y comparar sus pendientes (m) y sus ordenadas al origen (b).

+ En resúmen:

Sistema:	Las 2 ecuaciones tienen:	
Inconsistente	= m	≠ b
Redundante	= m	= b

+ Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, no es ni inconsistente ni redundante cuando sus ecuaciones tienen diferente pendiente e igual o desigual ordenada al origen; este sistema puede resolverse indistintamente por cualquiera de los cuatro métodos de resolución que a continuación se desarrollan.

7.6.3 METODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

+ Se analizarán 4 métodos :
  A) Método gráfico
  B) Método de eliminación por adición o sustracción.
  C) Método de eliminación por sustitución.
  D) Método de eliminación por igualación.

A) Método Gráfico

+ "Se representan las dos ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas y se obtienen así dos líneas rectas. La solución simultánea es dada por las coordenadas (x,y) del punto de intersección de estas rectas". (18)

Ejemplo:

$$2x-y = 9$$
$$x+2y = 12$$

- Primero se comprueba que el sistema tenga solución (no sea inconsistente ni redundante) a través de adoptar la forma $y=mx+b$:

(18) Sevilla Joel, Fiol Michel, Sauvegrain Robert. Ob.Cit. Pag.101.

$$y = 2x-9$$
$$y = \frac{-1x}{2}+\frac{12}{2} = \frac{-1}{2}x+6$$

En virtud de que $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$, este sistema sí tiene solución.

- Se procede entonces a graficar. Como se mencionó anteriormente, es conveniente hallar los puntos en que las rectas se cruzan con los ejes de las x's y las y's a través de sustituir x=0 y y=0 respectivamente :

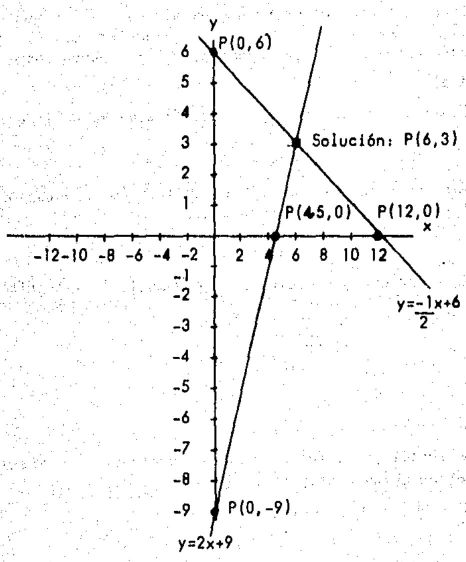
$y=2x-9$

si: $x=0$	si: $y=0$
$y=2(0)-9$	$0=2x-9$
$y=0-9$	$-2x=-9$
$y=-9$	$x=\frac{-9}{-2}$
	$x=4.5$
P(0,-9)	P(4.5,0)

$y=\frac{-1}{2}x+6$

si: $x=0$	si: $y=0$
$y=\frac{-1}{2}(0)+6$	$0=\frac{-1}{2}x+6$
$y=0+6$	$\frac{1}{2}x=6$
$y=6$	$x=12$
P(0,6)	P(12,0)

- Graficando los puntos resultantes se obtienen las 2 rectas:



+ La solución simultánea que satisface ambas ecuaciones P(6,3) es el punto en que se intersectan ambas rectas.

Comprobación :

$$2x-y = 9 \qquad x+2y = 12$$

$$\begin{aligned} 2(6)-3 &= 9 & \qquad 6+2(3) &= 12 \\ 12-3 &= 9 & 6+6 &= 12 \\ 9 &= 9 & 12 &= 12 \end{aligned}$$

+ El método gráfico posee la ventaja de que permite captar visualmente los conceptos principales implicados en la resolución de un sistema de ecuaciones.

B) Método de Eliminación por Adición o Sustracción

+ Consiste en eliminar una de las incógnitas multiplicando, si es necesario, las ecuaciones por números tales (positivos o negativos), que hagan que los coeficientes de una de las incógnitas en las ecuaciones resultantes sean iguales pero con signo contrario.
Al sumar las ecuaciones resultantes se elimina una incógnita.
Al tener sólo una incógnita se despeja ésta y una vez obtenido su valor numérico, se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor numérico de la segunda incógnita.

Ejemplo:

- Considérese de nuevo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x-y = 9$$
$$x+2y = 12$$

Para eliminar "x" se multiplica la segunda ecuación por "-2" obteniendo el siguiente sistema :

$$2x-y = 9$$
$$-2x-4y = -24$$

Se suman ambas ecuaciones y se despeja la incógnita resultante :

$$\begin{aligned} 2x-y &= 9 \\ -2x-4y &= -24 \\ \hline -5y &= -15 \\ y &= \frac{-15}{5} \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Se sustituye el valor de la incógnita en cualquiera de las dos ecuaciones originales :

$$2x-y = 9$$

$$2x-3 = 9$$
$$x = \frac{9+3}{2}$$
$$x = 6$$

La solución del sistema es P(6,3).

C) Método de Eliminación por Sustitución

+ Consiste en despejar una de las variables (primera) en cualquiera de las ecuaciones y sustituir su despeje en la otra ecuación.
De la expresión obtenida se calcula entonces el valor de la segunda variable y sustituyendo el mismo en el despeje inicialmente obtenido de la primera variable, se obtiene el valor de esta última.

Ejemplo:

- Considérese una vez más al sistema de ecuaciones:
$$2x-y = 9$$
$$x+2y = 12$$
- Se despeja "x" (o bien podría ser "y") en una de las dos ecuaciones:
$$x = 12-2y$$
- Se sustituye este valor en la otra ecuación:
$$2x-y = 9$$
$$2(12-2y)-y = 9$$

Se despeja "y":
$$24-4y-y = 9$$
$$-5y = 9-24$$
$$y = \frac{-15}{-5}$$
$$y = 3$$
- Ahora se sustituye y=3 en el despeje inicialmente obtenido de la primera variable:
$$x = 12-2y$$
$$x = 12-2(3)$$
$$x = 12-6$$
$$x = 6$$

De nuevo se ha obtenido la solución P(6,3).

D) Método de Eliminación por Igualación

+ Consiste en despejar la misma incógnita (primera) en las dos ecuaciones e igualar ambos resultados.
Posteriormente se despeja esta primera incógnita y obtenido su valor numérico se sustituye el mismo en cualquiera de las dos ecua-

ciones originales para obtener el valor numérico de la segunda incógnita.

Ejemplo:

- Volviendo al sistema de ecuaciones:

$$2x-y = 9$$
$$x+2y = 12$$

- Se despeja "y" (o pudiera ser "x") en las dos ecuaciones:

$$2x-y = 9 \qquad x+2y = 12$$
$$2x-9 = y \qquad y = \frac{12}{2}-\frac{x}{2}$$
$$y = 2x-9 \qquad y = \frac{-1x+6}{2}$$

- Se igualan los valores de "y" :

$$y = y$$
$$2x-9 = \frac{-1x+6}{2}$$

- Se despeja "x":

$$2x+\frac{1x}{2} = 9+6$$
$$\frac{5x}{2} = 15$$
$$5x = 15(2)$$
$$x = \frac{30}{5}$$
$$x = 6$$

- Se sustituye x=6 en cualquiera de las dos ecuaciones originales:

$$x+2y = 12$$
$$6+2y = 12$$
$$2y = 12-6$$
$$y = \frac{6}{2}$$
$$y = 3$$

- La solución es igual a la obtenida por los otros dos métodos P(6,3).

+ Es importante mencionar que es exáctamente igual utilizar cualquiera de los 4 métodos estudiados para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; las soluciones independientemente del método utilizado, siempre serán las mismas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Determinar si los siguientes sistemas de ecuaciones son inconsistentes o redundantes :

a) $-4y+3x = 2$
$-6x+8y = -4$

$-4y = 2-3x \qquad 8y = -4+6x$

$y = \frac{-3x}{-4}+\frac{2}{-4} \qquad y = \frac{-4}{8}+\frac{6x}{8}$

$y = \frac{3x}{4}-\frac{1}{2} \qquad y = \frac{3x}{4}-\frac{1}{2}$

Las 2 ecuaciones tienen $m_1=m_2$ y $b_1=b_2$, luego entonces el sistema es redundante.

b) $3x+5y = 2$
$9x+15y = 8$

$5y = -3x+2 \qquad 15y = -9x+8$

$y = \frac{-3x}{5}+\frac{2}{5} \qquad y = \frac{-9x}{15}+\frac{8}{15}$

$y = \frac{-3x}{5}+\frac{8}{15}$

Las 2 ecuaciones tienen $m_1=m_2$ y $b_1=b_2$, luego entonces el sistema es inconsistente.

2) Resolver por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x+2y = 13$$
$$7x-3y = 6$$

En la forma y=mx+b :

$y = \frac{-x}{2}+\frac{13}{2}$

$y = \frac{-7x}{-3}+\frac{6}{-3}$

$y = \frac{7x}{3}-2$

Se obtienen 2 puntos de cada recta :

$y = \frac{-x}{2}+\frac{13}{2} \qquad y = \frac{7x}{3}-2$

si $x = 0$

$y = \frac{-0}{2}+\frac{13}{2}$

$y = \frac{13}{2}$

$y = 7.5$

si $x = 0$

$y = \frac{7(0)-2}{3}$

$y = -2$

si $y = 0$

$0 = \frac{-x}{2}+\frac{13}{2}$

$\frac{x}{2} = \frac{13}{2}$

$x = \frac{13(2)}{2} = 13$

si $y = 0$

$0 = \frac{7x}{3}-2$

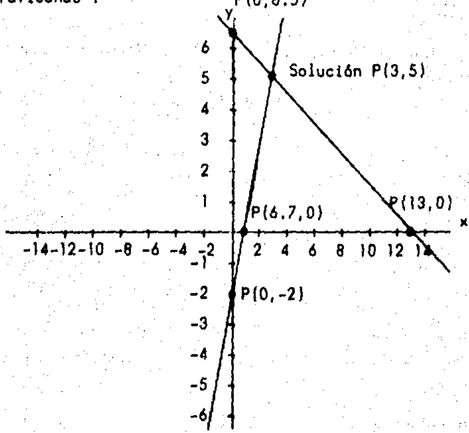
$\frac{-7x}{3} = -2$

$x = \frac{-2(3)}{-7} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$

P(0,6.5) P(13,0)

P(0,-2) P($\frac{6}{7}$,0)

Graficando :



3) Resolver por el método de eliminación por adición o sustracción - el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} 7x-4y &= 10 \\ 9x+8y &= 26 \end{aligned}$$

$$(2)\quad (7x-4y) = (10)$$

$$\begin{aligned} 14x-8y &= 20 \\ 9x+8y &= 26 \\ \hline 23x &= 46 \\ x &= \frac{46}{23} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x+8y &= 26 \\ y &= -\frac{9x}{8}+\frac{26}{8} \\ y &= \frac{-9(2)+26}{8} \\ y &= \frac{-18}{8}+\frac{26}{8} = \frac{8}{8} = 1 \end{aligned}$$

Solución: P(2,1)

4) Resolver por el método de eliminación por igualación el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} -18y+6x &= -85 \\ -5y+24x &= -5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-85}{6}+\frac{18y}{6}$$

$$x = \frac{-85}{6}+3y$$

$$x = \frac{-5}{24}+\frac{5y}{24}$$

Igualando :

$$\frac{-85}{6}+3y = \frac{-5}{24}+\frac{5y}{24}$$

Despejando y:

$$3y-\frac{5y}{24} = \frac{-5}{24}+\frac{85}{6}$$
$$\frac{72y-5y}{24} = \frac{-5+340}{24}$$
$$\frac{67y}{24} = \frac{335}{24}$$
$$y = \frac{335(24)}{24(67)}$$
$$y = 5$$

Sustituyendo y en el despeje de x:

$$x = \frac{-5}{24}+\frac{5y}{24}$$
$$x = \frac{-5}{24}+\frac{5(5)}{24}$$
$$x = \frac{-5}{24}+\frac{25}{24}$$
$$x = \frac{20}{24}$$
$$x = \frac{5}{6}$$

Solución $P(\frac{5}{6},5)$

5) Resolver por el método de eliminación por sustitución el siguiente sistema de ecuaciones :

$$6x+8y = 48$$
$$12x+10y = 24$$

Despejando "x" en cualquier ecuación :

$$6x+8y = 48$$
$$x = \frac{48}{6}-\frac{8y}{6}$$
$$x = 8-\frac{4}{3}y$$

Sustituyendo "x" en la otra ecuación :

$$12(8-\frac{4}{3}y)+10y = 24$$
$$96-16y+10y = 24$$
$$-6y = -72$$
$$y = \frac{-72}{-6} = 12$$

Sustituyendo "y" obtenida en el despeje de "x" :

$$x = 8-\frac{4y}{3}$$
$$x = 8-\frac{4(12)}{3}$$
$$x = 8-\frac{48}{3}$$
$$x = 8-16$$
$$x = -8$$

Solución $P(-8,12)$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Resolver por dos de los cuatro métodos cada uno de los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Verificar antes de resolver si no se trata de un sistema inconsistente o redundante.

1) $6x+3y = 21$
   $10x+2y = 26$

2) $2x+2y = 0$
   $3x+8y = 5$

3) $8x+16y = 10$
$4y-16x = -2$

4) $18x+10y = -11$
$-9x+16y = -5$

5) $-5x+y = 8$
$8x-7y = 25$

6) $-x+15y = 40$
$8x+19y = 236$

7) $19x+15y = -31$
$-17x+12y = 20$

8) $12x-14y = -19$
$-14x+12y = 20$

9) $32y-25x-13 = 0$
$16y+15x-1 = 0$

10) $-17x+12y-104 = 0$
$19x+15y+31 = 0$

CAPITULO VIII

APLICACION DE LAS FUNCIONES LINEALES

8.1 DEFINICION DE MODELO

+ En la teoría económica y administrativa es necesario realizar una abstracción del mundo real. La gran complejidad de los problemas en la realidad es lo que, entre otros factores, hace imposible entender todas sus interrelaciones a la vez; ahora bien, no todas las interrelaciones son de igual importancia para la comprensión de un fenómeno particular bajo estudio. Luego entonces el proceso consecuente consistirá en seleccionar los que a nuestro criterio parecen ser los factores principales y las relaciones más relevantes para el problema bajo estudio y enfocar la atención únicamente a éstos.
+ Tal esquema analítico simplificado es llamado "Modelo" ; por ejemplo, una naranja es utilizada como sustituto de un ser humano para aprender a inyectar y constituye por tanto un modelo
+ Cuando se utilizan conceptos o símbolos matemáticos para expresar un modelo, se le llama "Modelo Matemático".
+ En el presente capítulo serán analizados 4 modelos matemáticos de especial importancia para la Administración :
  - Modelo matemático para la determinación del precio de equilibrio de la oferta y la demanda.
  - Modelo matemático para la determinación del punto de equilibrio de las ventas y los gastos.
  - Modelo de regresión lineal simple.
  - Programación lineal.
+ La utilidad de cada modelo desde el punto de vista administrativo será precisada al desarrollar cada uno de éstos

8.2 MODELO PARA LA DETERMINACION DEL PRECIO DE EQUILIBRIO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA

+ Se llama "Precio de Equilibrio", a aquel precio en el cuál la cantidad de productos ofrecida (oferta) y la cantidad de productos demandada (demanda) son exáctamente iguales.
+ La obtención del modelo para la determinacion del precio de equilibrio de la oferta y la demanda, no es más que la aplicación de los conocimientos sobre "Funciones Lineales" adquiridos en el capítulo VII, en un mercado hipotéticamente simplificado.
+ Para efectos del modelo, se considera un mercado hipotético en

el cuál se negociará un producto cuya cantidad demandada por los compradores y cuya cantidad ofrecida por los vendedores varían solo en función del precio.

+ Lo anterior significa que se consideran exclusivamente 3 variables que son :

Qd	=	Cantidad de productos demandados
Qo	=	Cantidad de productos ofrecidos
P	=	Precio del producto

+ Es necesario también establecer los siguientes 3 suspuestos básicos :
  a) A medida que el precio aumenta, la cantidad demandada disminuye; es decir, Qd es función lineal decreciente de P.
  b) A medida que el precio aumenta, la cantidad ofrecida aumenta; es decir, Qo es función lineal creciente de P.
  c) El mercado del producto de referencia se considerará en equilibrio solo si, la demanda es igual a la oferta (Qd=Qo).

+ Partiendo del supuesto de que se conocen las funciones particulares que relacionan tanto el precio con la cantidad demandada, como el precio con la cantidad ofrecida, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\boxed{\begin{aligned} Qd &= a-bP \\ Qo &= -c+dP \end{aligned}}$$

Donde: a,b,c,d son 4 variables que representan constantes cuyo valor lo definirá cada uno de los problemas específicos.

Estas 2 ecuaciones son ecuaciones lineales de una recta de la forma $y=mx+b$, las cuáles pudieron ser obtenidas a partir de dos puntos cualesquiera, es decir de observar o investigar la cantidad demandada y ofrecida cuando se tiene un precio "1" determinado y la cantidad demandada y ofrecida cuando se tiene un precio "2" determinado.

+ Por otra parte, el precio de equilibrio está dado en el punto donde la cantidad demandada y la cantidad ofrecida son iguales , es decir :

$$\boxed{Qd = Qo}$$

+ Aparentemente, se tiene entonces un sistema de 3 ecuaciones con

3 incógnitas :

$$Qd = a-bP$$
$$Qo = -c+dP$$
$$Qd = Qo$$

Sin embargo, la realidad es que la tercera ecuación puede ser indicada como :

$$Qd = Qo = Q$$

De donde se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas :

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = a-bP \\ Q = -c+dP \end{array}}$$

8.2.1 SOLUCION GRAFICA

+ Para resolver el sistema que relaciona el precio con la cantidad demandada y con la cantidad ofrecida por el método gráfico, se representan en un sistema de coordenadas (P y Q) las funciones de demanda y oferta y la solución o precio de equilibrio estará dada por las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.

Ejemplo :

- Las funciones particulares que relacionan el precio con la cantidad demandada y con la cantidad ofrecida son :

$$Qd = 4000-15P$$
$$Qo = -1400+300P$$

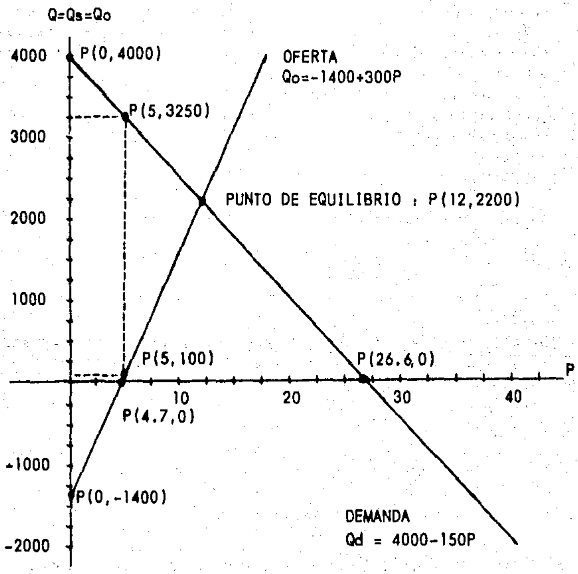
- Si Qd=Qo=Q, lo anterior se reduce a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas :

$$Q = 4000-15P$$
$$Q = -1400+300P$$

- Se obtienen dos puntos para trazar cada recta :

$Q = 4000-150P$	$Q = -1400+300P$
si $P = 0$	si $P = 0$
$Q = 4000-150(0)$	$Q = -1400+300(0)$
$Q = 4000$	$Q = -1400$
si $Q = 0$	si $Q = 0$
$0 = 4000-150P$	$0 = -1400+300P$
$P = 4000/150$	$P = -1400/-300$
$P = 26.67$	$P = 4.66$
P(0,4000) P(26.67,0)	P(0,-1400) P(4.66,0)

- Se grafican los puntos obtenidos :



+ Conclusiones :
  - La función de demanda expresa que si el precio fuera igual a \$0, la demanda sería de 4000 unidades y por cada peso que se incremente el precio, la demanda disminuye en 150 unidades (m=-150).
  - La función de oferta expresa que para un precio igual o inferior a \$4.7 la oferta es igual a 0 unidades y por cada peso que suba el precio, la oferta aumentará en 300 unidades (m = 300).

    Nota: Es importante establecer que en las funciones que expresan relaciones económicas, el dominio y el rango se definen solo para los valores positivos. En este caso en particular, no tendría sentido hablar de demanda, oferta y precios negativos.

- El punto de equilibrio se tiene cuando se habla de 2,200 unidades de producto.
- El precio de equilibrio entre la oferta y la demanda es de $12; es decir que cuando el producto cueste ésto, se igualarán la cantidad de unidades ofrecidas y la cantidad de unidades demandadas.
- Si el precio de cada artículo disminuye de $12 (precio de equilibrio), se tendrá que de acuerdo a las funciones, la cantidad demandada sería mayor que la cantidad ofrecida.

  Ejemplo :

  Para $P = \$5$

  $Qd = 4000-150P$ $\qquad$ $Qo = -1400+300P$

  $Qd = 4000-150(5)$ $\qquad$ $Qo = -1400+300(5)$

  $Qd = 3250$ $\qquad$ $Qo = 100$

  $$3250 > 100$$
  $$Qd > Qo$$

  Lo anterior puede observarse con líneas punteadas en la gráfica.

- Si el precio de cada artículo aumenta de $12 (precio de equilibrio) se tendrá que de acuerdo con las funciones, la cantidad demandada sería menor que la cantidad ofrecida.

  Ejemplo :

  Para $P = \$20$

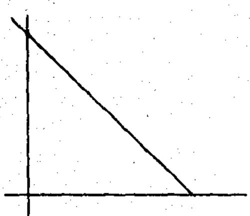
  $Qd = 4000-150P$ $\qquad$ $Qo = -1400+300P$

  $Qd = 4000-150(20)$ $\qquad$ $Qo = -1400+300(20)$

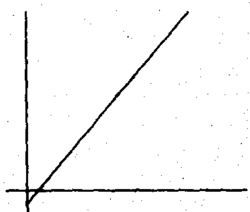
  $Qd = 1000$ $\qquad$ $Qo = 4600$

  $$1000 < 4600$$
  $$Qd < Qo$$

+ Por último es importante observar, que siempre que la función de demanda se grafique, ésta deberá tener una ordenada al origen (b) positiva y una pendiente (m) negativa ; del mismo modo, la función de oferta siempre deberá tener una ordenada al origen (b) negativa y una pendiente (m) positiva.



Función de Demanda



Función de Oferta

8.2.2 SOLUCION ANALITICA

+ De igual modo que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede ser resuelto indistintamente por cualquiera de los 4 métodos estudiados en el capítulo anterior, el precio de equilibrio entre la oferta y la demanda, puede ser obtenido tanto por el método gráfico, como por cualquiera de los tres métodos algebráicos, obteniéndose la misma solución siempre :
  - Método de eliminación por adición o sustracción.
  - Método de eliminación por sustitución.
  - Método de eliminación por igualación.

+ Partiendo de las suposiciones :

$$Qd = Qo$$
$$Qd = a-bP$$
$$Qo = -c+dP$$

Como $Qd=Qo=Q$, quedan dos ecuaciones con dos incógnitas (PyQ) y cuatro constantes (a,b,c,d) :

$$Q = a-bP$$
$$Q = -c+dP$$

+ Para obtener el precio de equilibrio se resuelve el sistema por el método de igualación (o cualquier otro) :

$$a-bP = -c+dP$$
$$a+c = dP+bP$$
$$P = \frac{a+c}{d+b}$$

$$\boxed{P = \frac{a+c}{d+b}}$$

Sustituyendo P se obtiene Q :

$$Q = a-b\left(\frac{a+c}{d+b}\right)$$
$$Q = \frac{a(d+b)-ab-cb}{d+b}$$
$$Q = \frac{ad+ab-ab-cb}{d+b}$$
$$Q = \frac{ad-cb}{d+b}$$

$$\boxed{Q = \frac{ad-cb}{d+b}}$$

+ A través de estas dos fórmulas obtenidas, pueden calcularse los valores del precio del artículo, así como la cantidad ofrecida y la cantidad demandada en el precio de equilibrio de la oferta y la demanda para cualquier problema.

Ejemplo :

- Será resuelto el mismo ejemplo del método gráfico, a través del método analítico.

  Sea el sistema :

$$Q = 4000-150P$$
$$Q = -1400+300P$$

- Por el método de igualación :

$$Q = Q$$
$$4000-150P = -1400+300P$$
$$-150P-300P = -1400-4000$$
$$-450P = -5400$$
$$P = -5400/-450$$
$$P = 12$$
$$Q = 4000-150P$$
$$Q = 4000-150(12)$$
$$Q = 2200$$
$$P(12,2200)$$

- La solución del sistema o punto de equilibrio es P(12,2200), decir que el precio de equilibrio de la oferta y la demanda es :

$$P = \$12$$

  el cuál origina que la cantidad producida y demandada sean igual a :

$$Qd = 2200 \text{ unidades}$$
$$Qo = 2200 \text{ unidades}$$

- Para verificar lo anterior, se obtiene el precio de equilibrio directamente mediante las fórmulas generales antes obtenidas :

$$Qd = 4000-150P$$
$$Qo = -1400+300P$$

$$P = \frac{a+c}{d+b} \qquad Q = \frac{ad-cb}{d+b}$$

$$P = \frac{4000+1400}{150+300} \qquad Q = \frac{(4000)(300)-(1400)(150)}{150+300}$$

$$P = \frac{5400}{450} \qquad Q = \frac{1'200000-210000}{450}$$

$$P = 12 \qquad Q = 2200$$

$$P(12,2200) \quad \checkmark$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) La empresa "El Sol" ha tenido problemas de altos remanentes en inventario de producto terminado; está produciéndose más de lo que le demanda el mercado. El departamento de investigación de mercados ha presentado la relación entre la variable precio y la

cantidad demandada y ofertada como sigue :

$$Qd = 20-5P$$
$$Qo = -7+4P$$

Se pregunta : ¿Cuál será el precio de equilibrio para que la cantidad de artículos ofertados sea igual a la cantidad de artículos demandados, y además cuál será el nivel de producción óptimo a este precio, de modo que no haya remanente alguno?
Resolver el problema :
a) Gráficamente.
b) Analíticamente.

2) Supóngase que después de 6 meses la empresa empieza a tener de nuevo el mismo problema; ahora las ecuaciones que relacionan las variables involucradas son:

$$Qd = 30-6P$$
$$Qo = -26+8P$$

Calcule por el método gráfico y analítico el nuevo precio de equilibrio y la cantidad demandada y ofertada a este precio.

3) Resuélvase el siguiente modelo de mercado por el método que prefiera y explique el significado del resultado obtenido :

$$Qd = 110-5P$$
$$Qo = -70+10P$$

4) El estado ha recibido últimamente varias quejas sobre la mala distribución de gasolina; la cantidad de combustible demandada es superior a la cantidad ofrecida. Se sabe que será necesario hacer una modificación en el precio. Sabiendo que las funciones de la cantidad demandada y ofrecida de gasolina son :

$$Qd = 2000-10P$$
$$Qo = 250+20P$$

Calcule a través de las fórmulas generales del modelo de determinación del precio de equilibrio de la oferta y la demanda, el precio que debe fijarse para que la cantidad demandada y la cantidad ofrecida sean iguales. Calcule además cuál sería la diferencia entre la cantidad ofrecida y la demandada si se mantiene la gasolina al precio actual ($55).

5) Se se tienen las siguientes funciones que representan un modelo matemático :

$$Qd = Qo$$
$$Qd = -9P+18$$
$$Qo = -4+12P$$

Utilizando el método gráfico y las fórmulas generales del modelo del precio de equilibrio, determine :
a) Cuánto vale la cantidad demandada en el punto de equilibrio de la oferta y la demanda.
b) El precio en el mismo punto anterior.
c) La cantidad demandada si el precio unitario fuera de $0.50.

8.3 MODELO PARA LA DETERMINACION DEL PUNTO DE EQUILIBRIO DE LAS VENTAS Y LOS GASTOS

+ El modelo del punto de equilibrio de las ventas y los gastos, trata, entre otras cuestiones, el problema de determinar el punto donde el ingreso por ventas se iguala a los gastos totales de una empresa.
  Este punto es llamado "Punto de Equilibrio" de la empresa, e indica el volúmen de ventas en donde ésta no obtiene utilidades ni sufre pérdidas.
  Con un volúmen de ventas menor al punto de equilibrio, la organización sufre pérdidas y con un volúmen de ventas mayor al punto de equilibrio, obtiene utilidades.

+ Para introducirse al modelo, es necesario primero definir los 2 tipos de gastos que tiene una empresa :

  Gastos Fijos ---- aquellos que no varían en función del volúmen de la producción (dentro de ciertos límites) y se calculan durante un determinado período de tiempo.
  Ejemplos : renta, sueldos administrativos, depreciación del equipo, etc.

  Gastos Variables - aquellos que varían de acuerdo al volúmen de producción y que permanecen constantes por unidad durante un determinado período de tiempo.
  Ejemplos : materia prima directa, mano de obra extra, etc.

+ Con la finalidad de simplificar y facilitar la comprensión del tema que a este apartado ocupa, se deben simbolizar los siguientes conceptos :

V	=	ingresos por ventas
P	=	precio de venta por unidad
X	=	unidades producidas y vendidas
Gf	=	gastos fijos por período
Gv	=	gastos variables por unidad
Gt	=	gastos totales

+ Para poder hablar de funciones lineales,se consideran en este modelo también, los siguientes supuestos básicos :

 a) Se produce y vende un solo artículo.
 b) El volúmen de unidades producidas es exáctamente igual al de unidades vendidas.
 c) El precio de venta (P) no varía con el volúmen de ventas.
 d) Los gastos fijos (Gf) permanecen constantes durante el período considerado.
 e) Los gastos variables (Gv) por unidad permanecen constantes por unidad durante el período considerado.

+ Con las anteriores restricciones, puede iniciarse el modelo :

Variables	Constantes
V	P
X	Gf
Gt	Gv

+ Se establecen las ecuaciones que relacionan las ventas con las unidades y el precio , y los gastos totales con los gastos fijos y variables :

Ventas = # de Unidades · Precio por Unidad

Gastos Totales = G.Fijos + G.Variables # de Unidades

Punto de Equilibrio = Donde las Ventas y los Gastos Totales son iguales.

+ En símbolos :

$$V = XP$$
$$Gt = Gf + GvX$$
$$V = Gt$$

+ Como puede observarse, la primera ecuación de ventas (V) es una función lineal de dos variables (la variable independiente "X" y la variable dependiente "V") , es decir una recta con pendiente "P" y ordenada al origen cero. La ecuación de los gastos totales expresa también una función lineal (con "X" como variable independiente y "Gt" como variable dependiente) con pendiente "Gv" y ordenada al origen "Gf". La tercera ecuación es la del punto de equilibrio y establece que en este punto, las ventas son iguales a los gastos totales.

+ Una vez identificadas las ecuaciones anteriores, el modelo puede resolverse por cualquiera de los métodos: gráfico o analítico.

8.3.1 SOLUCION GRAFICA

+ Sean las ecuaciones :

$$V = XP$$
$$Gt = Gf + GvX$$
$$V = Gt$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la segunda, queda un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas :

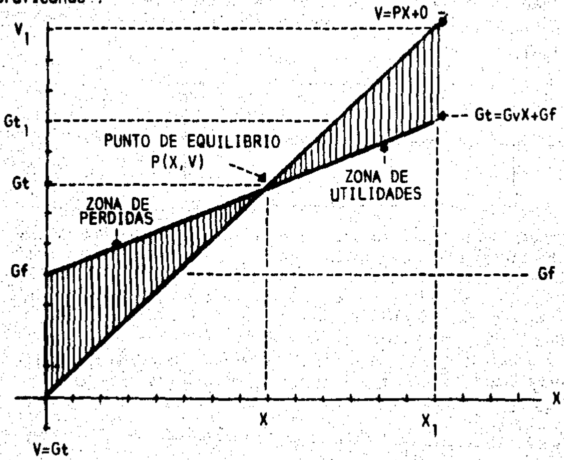
$$V = XP$$
$$V = Gf + GvX$$

Las cuáles pueden adoptar la forma $y = mx+b$ como sigue :

$$V = XP+0 \qquad (b=0)$$
$$V = GvX+Gf \qquad (b=Gf)$$

+ La solución gráfica consistirá en trazar las dos rectas y determinar las coordenadas del punto de intersección, con lo cuál se obtienen los valores de X y V=Gt en el punto de equilibrio entre las ventas y los gastos.

+ Graficando :



+ "X" ---- Número de unidades que necesitan producirse para que las ventas sean iguales a los gastos.

+ Si el número de unidades es menor a X ---- se tienen Pérdidas.
Si el número de unidades es mayor a X ---- se tienen Utilidades.

Por ejemplo en la gráfica, si el número de unidades producidas es igual a X_1, se tendrán unos gastos totales de Gt_1 y unas ventas de V_1, de donde se puede observar que las utilidades son iguales a :

$$U = V_1 - Gt_1$$

+ Generalizando, las utilidades son iguales a las ventas menos los gastos totales :

$$\boxed{U = V - Gt}$$

+ Cabe aclarar que si Gt fuera mayor que V, se obtendría un punto en la zona de pérdidas.

Ejemplo :
Una empresa produce un solo tipo de artículo, tiene como gastos fijos \$35,000 anuales, gastos variables de \$300 por unidad y un precio de venta de \$650 por unidad.
El director desea calcular el número de unidades que debe producir para que la empresa esté en su punto de equilibrio, es decir no gane ni pierda; además quiere conocer cuál será el monto de sus ventas y sus gastos totales, si produjera dicho número de unidades.

- Se tiene que:

$$Gf = 35,000$$
$$Gv = 300$$
$$P = 650$$

- Dadas las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} V &= PX \\ Gt &= GvX + Gf \\ V &= Gt \end{aligned}}$$

- Sustituyendo la tercera ecuación en la primera se obtiene un sistema de dos ecuaciones ocn dos incógnitas :

$$V = PX$$
$$V = GvX+Gf$$

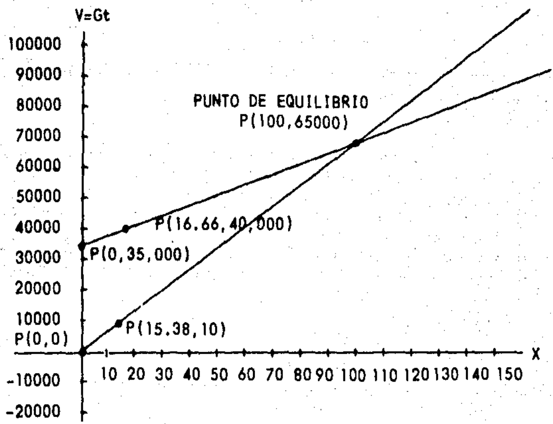
Entonces:

$$V = 650X$$
$$V = 300X+35000$$

- Conociendo las ordenadas al origen (P(0,0) y P(0,35000) respectivamente), para graficar se obtiene un punto cual quiera más de cada recta :

$V = 650X$	$Gt = 300X+35000$
si: $Gt = 10000$	si: $Gt = 40000$
$X = \dfrac{10000}{650}$	$X = \dfrac{40000-35000}{300}$
$X = 15.38$	$X = 16.66$
P(0,0) P(15.38,10000)	P(0,35000) P(16.66,40000)

- Graficando los puntos :



+ El punto de equilibrio es P(100,65000), lo cuál indica que el número de unidades (X) que se deben producir para que la empresa no gane ni pierda son 100 y que en este nivel de producción, las ventas y los gastos totales son 65000.

- Comprobación :

$V = PX$	$Gt = GvX+Gf$
$V = 650(100) = 65000$	$Gt = 300(100)+35000=65000$

Punto de equilibrio $V = Gt$

$$65000 = 65000 \quad \checkmark$$

8.3.2 SOLUCION ANALITICA

+ Considérense las mismas ecuaciones generales :

$$V = PX$$
$$V = GvX+Gf$$

Se resuelve este sistema por el método de igualación (o cualquier otro) :

$$V = V$$
$$PX = Gf+GvX$$
$$PX-GvX = Gf$$
$$X(P-Gv) = Gf$$
$$X = \frac{Gf}{P-Gv}$$

$$\boxed{X = \frac{Gf}{P - Gv}}$$

Sustituyendo X en cualquier ecuación :

$$V = PX$$
$$V = P\left(\frac{Gf}{P-Gv}\right)$$
$$V = \frac{PGf}{P-Gv}$$

$$\boxed{V = \frac{PGf}{P - Gv}}$$

+ Puede también calcularse la expresión que de la utilidad, ya sea positiva (ganancias) o negativa (pérdidas) :

Se sabe que :

$$U = V-Gt$$

Sustituyendo que :

$$V = PX$$
$$Gt = GvX+Gf$$

Se tiene que :

$$U = PX-(GvX+Gf)$$
$$U = PX-GvX-Gf$$
$$U = X(P-Gv)-Gf$$

$$\boxed{U = X(P - Gv) - Gf}$$

Ejemplo :

Se resolverá por el método analítico el mismo problema que en el caso del método gráfico. El gerente desea saber admeás, qué ni_ vel de producción requiere para obtener una ganancia de \$20000.

- Partiendo de las ecuaciones :

$$V = 650X$$
$$V = 300X+35000$$

Por el método de igualación (o cualquier otro):

$$\begin{aligned} V &= V \\ 650X &= 35000+300X \\ 650X-300X &= 35000 \\ 350X &= 35000 \\ X &= \frac{35000}{350} \\ X &= 100 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V &= 650X \\ V &= 650(100) \\ V &= 65000 \end{aligned}$$

Solución: $P(100,65000)$

- Se comprueba que el nivel de producción requerido (X) es igual a 100 y los gastos totales y ventas a ese nivel de producción son de 65000.

- Ahora bien, los valores obtenidos pueden calcularse directamente también, utilizando las fórmulas generales descritas, con solo sustituir las constantes o datos del problema :

$$X = \frac{Gf}{P-Gv} \qquad V = \frac{PGf}{P-Gv}$$

$$X = \frac{35000}{650-300} \qquad V = \frac{(650)(35000)}{650-300}$$

$$X = \frac{35000}{350} \qquad V = \frac{22750000}{350}$$

$$X = 100 \checkmark \qquad V = 65000 \checkmark$$

- Por último, para responder a la pregunta del nivel de producción requerido para ganar una utilidad de \$20000 se tiene :

$$\begin{aligned} U &= X(P-Gv)-Gf \\ 20000 &= X(650-300)-35000 \\ 20000+35000 &= X(350) \\ \frac{55000}{350} &= X \\ X &= 157.14 \text{ unidades} \\ X &= 157 \text{ unidades} \end{aligned}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) Calcular por el método gráfico, el punto de equilibrio de una em-

presa que tiene gastos fijos de $17,500, gastos variables por unidad de $150 y un precio de venta de $225.
Calcular también, por medio de las fórmulas generales del modelo del punto de equilibrio de ventas y gastos, los resultados de la utilidad o pérdida para un nivel de producción de 115 unidades.

2) La empresa X tiene gastos fijos por $50,000 y gastos variables por unidad de $100. Calcular por el método analítico, el precio unitario que necesitaría la empresa para obtener una utilidad de $20000 con un nivel de producción de 105 unidades.

3) La empresa "El Fin", tiene gastos fijos de $20000 y gastos variables por unidad de $450. Esta empresa produce y vende un solo artículo cuyo precio es de $530. La empresa le pide a usted que calcule :
   a) Utilizando el método gráfico y el método analítico, el punto de equilibrio de la compañía.
   b) Interpretar el significado de este punto de equilibrio calculado.
   c) Hallar qué precio necesitaría poner la empresa a su artículo si se desea que las utilidades asciendan a $500,000 si se sabe que la empresa tiene capacidad para producir 1000 unidades.

4) La compañía "Nuevo Mundo", es una organización de beneficencia, que recibe un solo tipo de medicina para distribuirla "al costo" entre las gentes necesitadas de una ciudad afectada por una epidemia. El número de unidades de distribución es de 100; sus gastos fijos ascienden a $300 anuales y los gastos variables son de $2 por unidad.
Se sabe que el ingreso por ventas asciende a $600 y se sospecha que se está lucrando indebidamente con las medicinas.
¿ Cuál será el precio al cuál deberían venderse los productos para que la empresa no gane ni pierda ? ¿ Qué utilidad está obteniendo actualmente esta compañía ?

5) La empresa Johnsons produce jabones de un solo tipo, teniendo gastos fijos de $2,500 y un precio de venta de $15 cada jabón. Si la cantidad de jabones que deben producirse es de 1000 jabones para obtener el punto de equilibrio entre las ventas y los gastos, se pregunta :
   a) ¿ A cuánto ascienden los gastos variables por unidad en el punto de equilibrio ?
   b) ¿ Qué cantidad de ingresos por ventas se tienen en el punto de equilibrio ?
   c) ¿ Cuáles son las pérdidas o la utilidad si la empresa produce 1500 jabones disminuyendo su precio a $10.00 ?

8.4 MODELO DE REGRESION LINEAL SIMPLE

Utilidad

+ El Análisis de Regresión es una importante aplicación de los conceptos de relación y función estudiados en el capítulo anterior, que reviste una gran trascendencia práctica en la predicción económica de las empresas.

+ En la práctica administrativa, se encuentra frecuentemente, que existe una relación entre dos (o más) variables.
Por ejemplo, "si se reducen costos se influye en las ganancias o utilidades y posiblemente también en los precios, la posición competitiva, etcétera. Una reducción del inventario de existencias tiene gran efecto sobre la inversión, la rentabilidad, el espacio de piso, la facilidad de preparar embarques o remesas..., y así sucesivamente. Cada decisión o acción origina complejas reacciones en cadena que influyen en las "variables relacionadas"." (19)

+ Ahora bien, las relaciones entre variables son siempre difíciles de encontrar y representar; es por ello que en muchas ocasiones es útil expresar la relación en forma matemática, determinando una "ecuación que conecte las variables".

+ El Análisis de Regresión, consiste precisamente en determinar dicha ecuación, de modo que a partir de ella se pueda estimar el valor de una variable "y" (variable dependiente), que corresponde a un valor de una variable "x" (variable independiente).
Por ejemplo, determinar a través de datos históricos, la ecuación que relaciona el monto de las utilidades de una empresa, con el monto de los gastos de la misma, y a partir de esta ecuación estimar las utilidades que corresponderían a cierto valor dado de gastos.

+ Es importante resaltar el hecho de que en el análisis de los problemas prácticos de relaciones entre variables, debe distinguirse claramente la variable dependiente de la variable independiente; puede considerarse a la variable independiente como "causa" de un fenómeno y a la dependiente como "efecto" del mismo.

+ De entre las diversas aplicaciones del Análisis de Regresión, es

---

(19) Springer Clifford, Herlihy Robert, Beggs Robert. Ob.Cit. Pag. 145.

sumamente interesante el caso en que la variable independiente expresa unidades de tiempo (horas, días, meses, años, etc.).
Por ejemplo, las ventas de una empresa registradas durante los últimos 20 años pueden ser útiles para expresar una recta de regresión,considerando las ventas como variable dependiente y los años como variable independiente. En otras palabras, considerando las ventas como dependientes del tiempo, puede obtenerse la ecuación de regresión que permita proyectar las ventas para años futuros.

+ El Análisis de Regresión que incluye solo dos variables lineales es llamado "Análisis de Regresión Simple".

+ Esta sección, como los anteriores modelos, se circunscribirá a la Regresión Lineal Simple y describirá dos de los métodos más sencillos para determinar la ecuación que exprese la relación entre las variables.

Modelo

+ Con el fin de comprender mejor el Modelo de Regresión Lineal Simple, se trabajará con un ejemplo que vaya ilustrando los pasos a seguir.

Ejemplo :

La empresa "Z" fabrica productos sobre pedido únicamente; el nuevo encargado de realizar las cotizaciones emplea un valor de $750 para cada producto encargado por el cliente ML-14; sin embargo sus cotizaciones no han sido muy correctas. Según se cree el costo unitario está relacionado con las cantidades del artículo ordenadas. Se desea encontrar cuál es la relación entre el costo y la cantidad y la manera de calcular el costo en base a la cantidad pedida.

+ Para determinar la ecuación que relaciona las variables es necesario seguir los siguientes pasos :

Paso 1

+ Recopilar una muestra de pares ordenados (x,y) de datos, en donde el primer elemento es el valor de la variable independiente y el segundo el de la variable que se supone depende de la primera.

En el ejemplo :

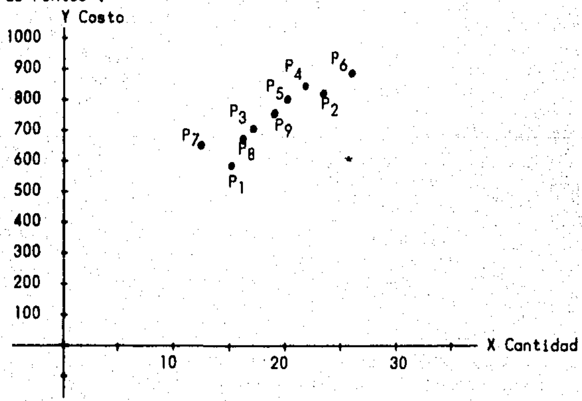
Se reunen los costos de los pedidos mensuales de las cajas ML-14 durante los últimos 9 meses y se forman 9 pares ordenados en donde el primer elemento se refiere a la cantidad de unidades ordenadas (x) y el segundo elemento al costo correspondiente (y):

	X Cantidad Ordenada	Y Costo
P_1	15	600
P_2	23	805
P_3	17	700
P_4	22	825
P_5	20	800
P_6	26	880
P_7	13	640
P_8	16	650
P_9	19	750

+ Aun y cuando se utilize un ejemplo con una muestra de pares ordenados de datos bastante pequeña para proveer inferencias realmente válidas, éste sirve para ilustrar los Métodos de Regresión Lineal aplicables a cualquier número de datos.

Paso 2

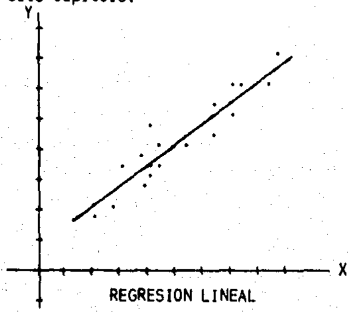
+ Representar los pares ordenados (x,y) como puntos en un sistema de coordenadas. El conjunto de puntos resultantes se llama "Nube de Puntos".



Paso 3

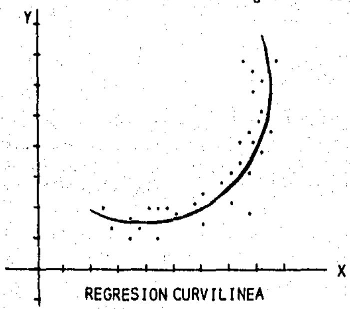
+ A partir de la nube de puntos es posible visualizar o imaginar una curva (recuérdese que la recta es un caso particular de la curva), que se aproxima a la "tendencia" que siguen los datos de puntos representados.
Dicha curva es llamada "Curva de Regresión" y pueden darse en general tres situaciones :

A) Cuando la tendencia y ubicación de los datos parece ser bien aproximada a una recta, se dice que existe una "Regresión Lineal" entre las variables. Este es el caso a estudiar en este capítulo.



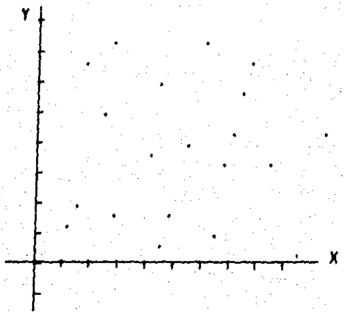
REGRESION LINEAL

B) Cuando la tendencia de los datos parece aproximarse a una curva, entonces se trata de una "Regresión Curvilinea".



REGRESION CURVILINEA

C) Cuando no existe ninguna tendencia común entre los datos - significa que las variables no se encuentran en una relación de dependencia, es decir, que si varía el valor de una variable, no existe un patrón, aunque sea aproximado, de la variación del valor de la otra variable.



Paso 4

+ Se describirán dos métodos para determinar la recta y su ecuación que representa la tendencia de los puntos y por tanto la relación entre las dos variables involucradas :

A) Método Visual
B) Método de Semipromedios

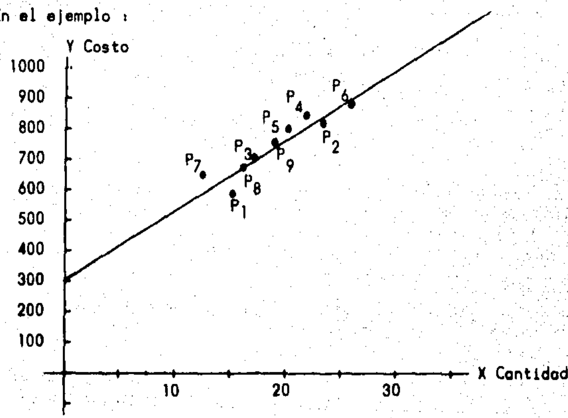
8.4.1 METODO VISUAL

Procedimiento

1) Una vez representados los pares ordenados en un sistema de coordenadas cartesianas, usando el criterio personal, se dibuja una recta aproximada que se ajuste al conjunto de datos (nube de puntos).

Es importante mencionar, que la recta trazada a criterio, puede pasar o no por alguno de los puntos originales.

En el ejemplo :



2) Para obtener la ecuación de la recta correspondiente, se seleccionan sobre la recta dibujada, dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ y se sustituyen en la ecuación de la recta de la forma :

$$y-y_1 = m(x-x_1)$$

donde :

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\boxed{y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

En el ejemplo :
$P_1(x_1, y_1) = P(0,300)$
$P_2(x_2, y_2) = P(26,880)$

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-300 = \frac{880-300}{26-0}(x-0)$$

$$y-300 = \frac{580}{26}(x)$$

$$y = 22.30x+300$$

Ecuación de Regresión

La ecuación de regresión obtenida relaciona el costo (y) con la cantidad de artículos pedido a la empresa (x). Esta ecuación tiene la forma y=mx+b, donde 22.30 es la pendiente y 300 es la ordenada al orígen de la recta de regresión.

3) Si se desea estimar o proyectar aproximadamente un valor de "y" para un valor de "x" dado, se sustituye en la ecuación de la recta de regresión el valor de "x".

En el ejemplo :

Para estimar aproximadamente el costo que tendría un pedido de 10 artículos ML-14, se sustituye x=10 en la ecuación obtenida en el paso anterior.

$$y = 22.30x+300$$
$$y = 22.30(10)+300$$
$$y = 223+300$$
$$y = 523$$

Desventajas

+ Es muy importante establecer que el método visual para trazar la recta de regresión, tiene la desventaja obvia de que el criterio individual aplicado, no es en general lo suficientemente "preciso", y cada persona puede obtener diferentes rectas a partir de la misma nube de puntos.
Es por ello también, que cualquier proyección que se realize será también "estimada o aproximada".

+ Naturalmente, la estimación será más confiable :
  - A medida que se consideren mayor cantidad de datos (ésto es , mayor cantidad de pares ordenados que relacionan ambas variables y resultan en una nube de puntos más llena).
  - A medida que los puntos que representan los datos estén más cercanos a la recta de regresión utilizada.

8.4.2 METODO DE SEMIPROMEDIOS

Ventajas

+ El Método de Semipromedios para determinar la ecuación de la recta de regresión, es un método más elaborado que el anterior y evita totalmente el uso del criterio personal en la construcción de la misma.

Procedimiento

+ Para poder aplicar el Modelo de Semipromedios, es necesario saber calcular el promedio más conocido: "La Media", la cuál no es más que la suma de todos los valores de una variable, dividida entre el número de valores que adopta la variable.
La media de una variable "x" se representa por :

$$\boxed{"\bar{x}"}$$

Ejemplo :
Obtener la media $\bar{x}$ de los siguientes valores: 5,6,8,7,9.

$$\bar{x} = \frac{5+6+8+7+9}{5}$$
$$\bar{x} = \frac{35}{5}$$
$$\bar{x} = 7$$

+ Los pasos del Modelo de Semipromedios, para determinar la ecuación que relaciona las variables son :

1) Ordenar (en sentido creciente o decreciente) los valores de la variable independiente "x", acompañando a éstos de sus correspondientes valores de la variable dependiente "y".
Es importante recordar que debe respetarse la relación indicada por los pares ordenados (x,y).

Utilizando el mismo ejemplo de los artículos ML-14 :

X Cantidad Ordenada	Y Costo
13	640
15	600
16	650
17	700

19	750
20	800
22	825
23	805
26	880

2) Se divide el conjunto de valores de la variable independiente "x" en dos subconjuntos : "x_1" y "x_2" que incluyan el mismo número de elementos cada uno.
Se realiza exáctamente lo mismo con "y" : "y_1" y "y_2".
En el caso de que el número de elementos de "x" y "y" fuese impar, se incluye el elemento central en los dos subconjuntos.

En el ejemplo:

	X Cantidad Ordenada	Y Costo	
x_1	13	640	y_1
x_1	15	600	y_1
x_1	16	650	y_1
x_1	17	700	y_1
x_1, x_2	19	750	y_1, y_2
x_2	20	800	y_2
x_2	22	825	y_2
x_2	23	805	y_2
x_2	26	880	y_2

3) Se calcula la media $(\bar{x})(\bar{y})$ de cada uno de los 4 subconjuntos - formados: x_1, x_2, y_1, y_2 .

En el ejemplo :

$$\bar{x}_1 = \frac{13+15+16+17+19}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$\bar{x}_2 = \frac{19+20+22+23+26}{5} = \frac{110}{5} = 22$$

$$\bar{x}_3 = \frac{640+600+650+700+750}{5} = \frac{3340}{5} = 668$$

$$\bar{x}_4 = \frac{750+800+825+805+880}{5} = \frac{4060}{5} = 812$$

4) Con $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ y $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, se tienen definidos dos puntos, los cuáles sirven para calcular la recta de regresión.
Se sustituyen los puntos en la ecuación :

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

En el ejemplo :

$P_1(x_1,y_1) = P(16,668)$
$P_2(x_2,y_2) = P(22,812)$

$$y-668 = \frac{812-668}{22-16}(x-16)$$
$$y-668 = \frac{144}{4}(x-16)$$
$$y-668 = 24(x-16)$$
$$y = 24x-384+668$$
$$y = 24x+284$$

Ecuación de Regresión

5) Con la ecuación de regresión definida, puede calcularse o proyectarse cualquier valor de "y" para un valor de "x" dado, sustituyendo el primero en la ecuación.

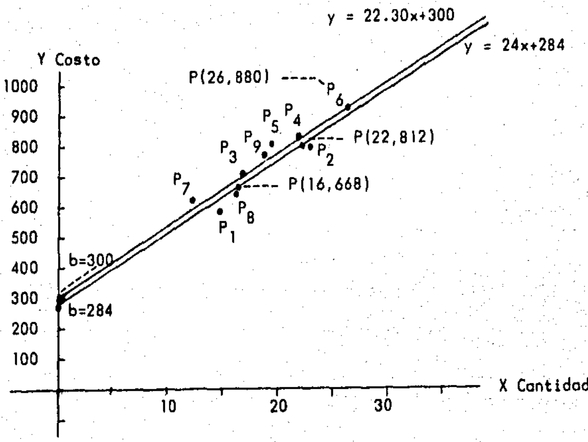
En el ejemplo :

Se desea saber qué costo tendrían los productos ML-14 si el cliente correspondiente ordena la cantidad de 10 unidades.

$$y = 24x+284$$
$$y = 24(10)+284$$
$$y = 240+284$$
$$y = 524$$

Comparación del Método Visual y el Método de Semipromedios

+ Si se comparan en un sistema de coordenadas las rectas de regresión obtenidas, se observa que la recta obtenida por el Método Visual pasa por los puntos $P_1(0,300)$ y $P_2(26,880)$ y la obtenida por el Método de Semipromedios pasa por los puntos $P_1(16,668)$ y $P_2(22,812)$.
+ De hecho las dos rectas de regresión son muy semejantes, lo cuál indica que el criterio personal que se empleó en el Método Visual fue bastante adecuado. Sin embargo, a través de este último método la recta pudo haber diferido más de la obtenida por el Método de Semipromedios y ser por lo tanto mucho menos exactas las estimaciones de la variable dependiente derivadas de la misma.
+ Lo anterior puede observarse claramente en la gráfica siguiente: :



+ Por último, es importante mencionar que existe un método más elaborado y más exacto que el de semipromedios, que es llamado Método de los Mínimos Cuadrados, el cuál se trata en cualquiera de los textos clásicos de Estadística. Este método no ha sido desarrollado en el presente capítulo debido a que rebasa los propósitos introductorios de este trabajo.

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) La empresa "Rico el Pollo" hizo un experimento con 8 pollos; 4 de ellos no recibían concentrado alguno, se alimentaban únicamente con grano y 4 sí consumían 80 kg. de concentrado con vitaminas y minerales. El rendimiento en carne de cada pollo vendido se muestra en la siguiente tabla:

Pollo #	Kgs. de Concentrado	Rendimiento (kgs)
1	0	12
2	0	36
3	0	6
4	0	18
5	80	128
6	80	112
7	80	112
8	80	72

a) Obtenga la ecuación de regresión que relaciona las variables involucradas, a través del método visual y del método de semipromedios.
b) Muestre en una gráfica, qué tan acertado fue su criterio para trazar la línea de regresión por el primer método comparándola con la recta trazada por el método de semipromedios.
c) Prediga el rendimiento de carne de un pollo alimentado con 50 kgs. de concentrado.

2) Una empresa pide a usted administrador que determine la relación entre la cantidad de dinero gastado en publicidad de sus artículos y la cantidad de artículos vendidos. La tabla siguiente muestra la suma total gastada en el año 1985 en publicidad por cada una de las 6 sucursales de la empresa en cuestión, en diferentes estados de la República.

Sucursal	Publicidad (en cientos de miles de pesos)	Monto de Ventas (en millones de pesos)
1	74	139
2	43	108
3	48	98
4	36	76
5	27	62
6	15	57

a) Calcule la ecuación que relaciona el dinero gastado en publicidad con el monto de las ventas a través del método gráfico y del de semipromedios.
b) Tomando como más exacta la ecuación obtenida por el método de semipromedios, ¿Cuál sería el monto de las ventas de cada sucursal si el director de la compañía autorizara un aumento del 20% sobre el presupuesto de 1985 de cada sucursal?

3) Una empresa desea hacer un pronóstico de las utilidades anuales para les siguientes 5 años; los datos estadísticos sobre utilidades en los últimos 10 años son :

Año	Utilidades Anuales
1976	750,000
1977	900,000
1978	800,000
1979	1050,000
1980	1300,000
1981	1350,000

1982	1250,000
1983	1600,000
1984	1550,000
1985	1700,000

Suponiendo que la empresa mantenga su estructura de costos (50% sobre ventas) y de gastos (20% sobre ventas) igual que estos - últimos años y la economía del país no tenga cambios drásticos, calcule el pronostico deseado.
Para efectos de simplificación considere 1976 como año 1, 1977 como año 2 y así sucesivamente.

4) Una empresa productora de pure de tomate tiene el monopolio de dicho producto en la ciudad de Monterrey; la misma, estima sus ventas en base al aumento de la población. Los datos en los últimos años muestran que la población y las ventas han ido cre - ciendo en las siguientes proporciones :

Población (en cientos de miles)	# de latas de pure consumidas (en millones)
1.7	6.4
2.0	8.0
2.0	7.2
2.1	7.5
2.3	6.9
2.6	10.9
2.6	10.3
2.8	9.5
3.1	9.7
3.2	10.6
3.2	12.5
4.0	12.9
4.1	14.0
4.1	13.8
4.2	12.8
4.2	16.5
4.2	17.1
4.3	15.4
4.6	16.2
5.0	15.8
5.4	19.0
5.8	19.4
6.0	19.1
6.4	18.5
6.5	20.0

a) Calcular la ecuación de regresión que relaciona la población y el monto de latas consumidas.

b) Estimar la venta de productos cuando la población alcance los setecientos mil habitantes.

5) La compañía vendedora de bienes raíces "La Periquera", ha decidido construir un edificio. El gerente desea saber cuánto contribuyen el tamaño y la vista de cada departamento en su valor comercial; también desea encontrar un método justo para establecer un precio razonable a cada departamento. Para obtener información, el gerente seleccionó 20 departamentos en diferentes edificios cercanos y de la misma calidad, obteniendo el tamaño y precio de cada uno, así como la altura correspondiente. Los datos obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Departamento	Area (en miles de pies)	Altura (en pies s/el nivel del mar)	Precio (en millones de pesos)
1	14.2	155	3.9
2	13.8	158	2.9
3	14.4	155	3.9
4	14.0	170	5.1
5	23.0	185	6.8
6	19.4	205	7.0
7	15.2	215	5.8
8	18.3	195	5.1
9	16.7	160	4.9
10	14.5	190	5.3
11	17.4	125	4.3
12	14.7	155	4.1
13	12.7	158	3.2
14	17.4	157	4.1
15	21.8	172	5.8
16	17.5	175	6.8
17	18.3	185	6.5
18	21.7	178	5.3
19	13.6	205	6.0
20	12.1	203	4.8

a) Calcule por el método de semipromedios, la ecuación de regresión que relaciona el tamaño de un departamento de este tipo con su precio correspondiente.

b) Estime qué precio tendría un departamento de 20,000 pies cuadrados.

c) Calcule por el mismo método la ecuación de regresión que relaciona la altura y vista del departamento con su precio correspondiente.

d) Estime qué precio tendría un departamento con una altura de 200 pies.

8.5 PROGRAMACION LINEAL

8.5.1 DEFINICION

+ Antes de definir lo que es la Programación Lineal, será referido su utilidad :

+ La Administraicón dispone de hombres, dinero, materiales y máquinas, cuyo suministro es limitado. En caso de que éstos recursos fueran ilimitados, no existiría necesidad alguna de intrumentos de Administración tales como la Programación Lineal.

+ Desgraciadamente en la mayoría, si no es que en todas las empresas, los recursos son limitados, es por ello que la organización debe encontrar la mejor asignación de sus recursos a fin de aumentar al máximo sus ganancias y reducir al mínimo sus costos. Sin embargo, la ejecución de esta tarea comprende grandes problemas, y por lo tanto es evidente la necesidad de métodos cuantitativos y matemáticos que faciliten y simplifiquen este trabajo.
  La Programación Lineal, es precisamente una técnica matemática para determinar la mejor asignación de los recursos limitados de una empresa.

+ Puede definirse entonces, que la "Programación Lineal" es un método de solución de problemas en el que una función objetivo debe maximizarse o minimizarse cuando se consideran ciertas restricciones.

+ Es obvio que resulta difícil entender la definición y conceptos anteriores a primera vista, sin embargo, a través del planteamiento y solución de algunos problemas de Programación Lineal se comprenderá fácilmente la definición establecida.

+ Se entiende por "Función Objetivo", a la expresión matemática (ecuación) que representa el objetivo de, maximizar la contribución utilizando los recursos disponibles, o bien, producir el costo más bajo posible usando una cantidad limitada de factores productivos.

  Nota : Se llama "Contribución de un Producto", a la expresión P-Gv (precio de venta menos gastos variables) y representa la parte con que contribuye cada unidad de producto a cubrir los gastos fijos y en su caso formar las utilidades.

+ Para efectos de exponer el tema, puede decirse que los problemas de Programación Lineal incluyen en general 2 situaciones o casos:

A) Maximización.
B) Minimización

+ Se analizará cada uno de ellos :

8.5.2 MAXIMIZACION

8.5.2.1 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE MAXIMIZACION

+ A través de un ejemplo se tratará el concepto de Programación Lineal y se desarrollará el Método de Solución Gráfica para problemas de esta clase que incluye "solo dos variables".

+ Ejemplo :

  - La Compañía "M" fabrica dos modelos de productos: A y B.
  - La contribución promedio (P-Gv) del modelo A es de $40 por unidad y la del modelo B es de $10 por unidad.
  - La empresa tiene una demanda superior a sus capacidades productivas.
  - La fábrica está formada por 3 departamentos: estructuras, ensambles, acabados; el primero solo puede trabajar 800 hrs. mensuales; el segundo solo 600 hrs. mensuales y el tercero solo 801 hrs. mensuales.
  - El proceso de producción de cada producto es:
    - el producto A, se procesa primero en el departamento uno por 4 hrs., luego en el departamento dos por 0 hrs. y por último en el departamento tres por 4.5 hrs.
    - el producto B, se procesa en el departamento uno por 2 hrs., en el dos por 2 hrs. y en el tres por 1.5 hrs.

  - El problema consiste en calcular "qué combinación de productos (de A y B) debe procesar la empresa diariamente para maximizar la contribución, dentro de los límites de las restricciones de producción".

+ La información obtenida del problema puede ordenarse en la siguiente tabla :

Departamentos:	Requerimientos de Tiempo		Capacidad Mensual (en hrs.)
	Producto A (en hrs.)	Producto B (en hrs.)	
departamento 1	4.0	2.0	800
departamento 2	0	2.0	600
departamento 3	4.5	1.5	801
contribución por unidad:	$40	$10	

+ A partir de esta tabla se puede expresar y resolver más fácilmente el problema en forma matemática.
Las variables del problema son :

x =	# de unidades del producto A
y =	# de unidades del producto B

8.5.2.2 METODO GRAFICO

+ El método de solución gráfica de problemas de Programación Lineal de maximización, solo puede utilizarse cuando no hay más de 2 variables, porque es muy difícil dibujar más de dos dimensiones.
+ Existen 4 pasos básicos en la solución gráfica de un problema de este tipo :

Pasos de Método Gráfico

+ Básicamente el primero y el segundo paso del método consisten en expresar de nuevo la información dada en el problema, en forma matemática, y los pasos tercero y cuarto en resolver o encontrar la combinación de la cantidad de cada uno de los dos productos que maximize la contribución dentro de las restricciones establecidas.

Paso 1

+ Establecer la "función objetivo" de la empresa en forma de ecuación lineal.
+ La función objetivo, muestra la relación de lo producido con la contribución.

En el ejemplo :

La contribución "E" (Efectividad) de la producción del modelo "x" y del "y" es:

$$E = 40x + 10y$$

+ La función objetivo de los problemas de Programación Lineal adopta en términos generales la forma :

$$\boxed{E = C_1x + C_2y}$$

En donde, "C_1" y "C_2" son el monto de las contribuciones de los productos "x" y "y" respectivamente.

Se vuelve a hacer notar que el propósito de este capítulo se restringe a problemas de Programación Lineal con dos variables ("x" y "y"), por las limitaciones del método gráfico.

+ Obviamente, la contribución E, será mayor a mayor cantidad de artículos "x" y "y" producidos y vendidos, sin embargo, el valor máximo que la contribución E puede alcanzar está determinado por las restricciones de produccción.

Paso 2

+ Expresar matemáticamente las restricciones en forma de inecuaciones lineales.

+ En problemas de Programación Lineal casi todas las restricciones se expresan como ineacuaciones que fijan límites superiores ($\leq$) o inferiores ($\geq$), para los valores de "x" y "y", pero que no expresan igualdades exactas (=).

En el ejemplo :

Maximizar : $E = 40x + 10y$

Sujeto a :

Restricción del departamento 1 : $4x + 2y \leq 800$

Restricción del departamento 2 : $2y \leq 600$

Restricción del departamento 3 : $4.5x + 1.5y \leq 801$

Simplificando éstas :

Restricción del departamento 1 : $2x + y \leq 400$

Restricción del departamento 2 : $y \leq 300$

Restricción del departamento 3 : $4.5x + 1.5y \leq 801$

+ Estas tres inecuaciones se refieren al tiempo empleado en la fabricación de una unidad de productos A y B, del lado izquierdo de la igualdad y al tiempo total de que disponen los departamentos,del lado derecho de la igualdad.

+ Las horas necesarias para fabricar una unidad del producto A, multiplicadas por el número de unidades producidas del mismo, y las horas requeridas para fabricar una unidad del producto B por el número de unidades producidas del mismo, deben ser iguales o menores al tiempo disponible de cada departamento.

+ Cabe hacer notar que las tres desigualdades representan 3 restricciones de capacidad respecto a las unidades producidas ("x" y "y") y no a la contribución (C).

+ En términos generales las restricciones de un problema de Programación Lineal adoptan la forma :

$$\begin{array}{|l|}\hline a_{1,1}x + a_{1,2}y \leq \text{cte.} \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y \leq \text{cte.} \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y \leq \text{cte.} \\ \vdots \\ a_{m,n}x + a_{m,n}y \leq \text{cte.} \\ \hline \end{array}$$

Donde "m" es igual al número de restricciones , "n" al número de producto (que en este caso se restringe a 2) y "cte" a cualquier constante.

+ En todos los problemas de Programación Lineal existe un tipo de restricción adicional, que aunque es obvio, debe enunciarse explícitamente : "ninguna" variable de los problemas de Programación Lineal ("x" y "y") puede tomar valores negativos, porque se produce "una" unidad de los productos (valor positivo) o bien no se produce (valor cero).
Lo anterior significa que gráficamente la solución debe hallarse en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas.

Paso 3

+ Se expresan en forma gráfica las desigualdades de restricción.

+ Es necesario para ello, obtener dos puntos de cada inecuación y poder así, trazar la recta correspondiente, que será el límite del área definida.
La forma más sencilla es representar la inecuación en la forma tradicional $y \leq mx+b$, para identificar su ordenada al origen o punto en que la recta cruza al eje de las y's y posteriormente, sustituir en la ecuación y=0 para encontrar el punto en que la recta cruza el eje de las x's.

R_1	R_2	R_3
$2x+y \leq 400$	$y \leq 300$	$4.5x+1.5y \leq 801$
$y \leq -2x+400$ donde b=400	donde b=300	$y \leq \frac{-4.5x}{1.5}+\frac{801}{1.5}$ $y \leq -3x + 534$ donde b=534

Y si : $y=0$

$$0 \leq -2x+400$$
$$2x \leq 400$$
$$x \leq \frac{400}{2}$$
$$x \leq 200$$

Y si : $y=0$

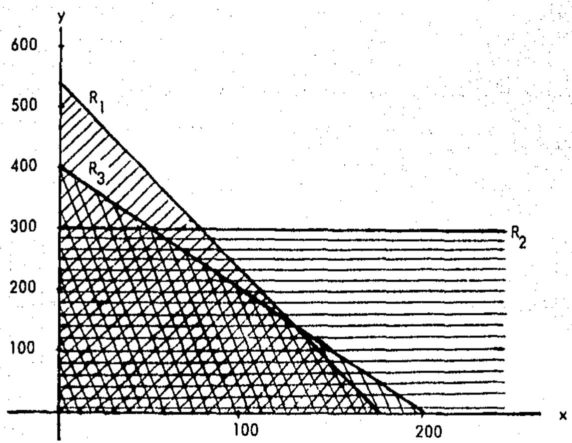
$$0 \leq -3x+534$$
$$3x \leq 534$$
$$x \leq \frac{534}{3}$$
$$x \leq 178$$

Entonces, los puntos de intersección de las rectas con ambos ejes son :

R_1	R_2	R_3
P(0,400)	P(0,300)	P(0,534)
P(200,0)		P(178,0)

+ Los valores obtenidos de $x \leq 200$ y $x \leq 178$ se toman como $x = 200$ y $x = 178$ para trazar las rectas que indican los límites de las regiones establecidas por las inecuaciones.

+ Graficando :



Donde :

$y \leq -2x+400$ $y \leq 300$ $y \leq -3x+534$

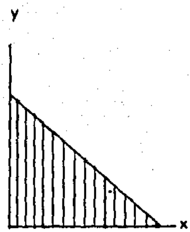
+ Es importante hacer notar que cuando se grafican las inecuaciones, éstas se representan como un área limitada por una recta, es decir se traza la recta correspondiente y se indica o rellena el área cuyos puntos satisfacen la ecuación.

+ En el caso de que la inecuación tenga como signo " $\leq$ ", esta área corresponderá a toda la superficie inferior de la recta y ambos ejes.

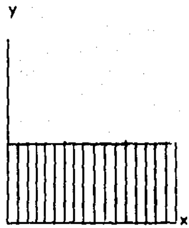
+ En el caso de que la inecuación tenga como signo " $\geq$ ", el área corresponderá a la superficie superior a la recta.

+ Lo anterior resulta más claro al observar los siguientes diagramas :

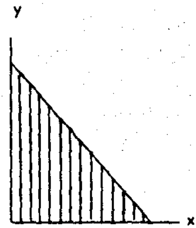
$y \leq -2x+400$



$y \leq 300$

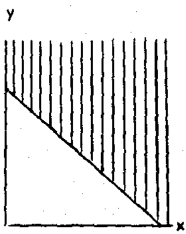


$y \leq -3x+534$

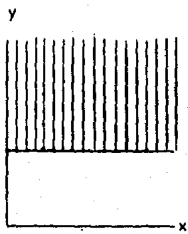


Si por el contrario, las inecuaciones tuvieran el signo " ", se representarían :

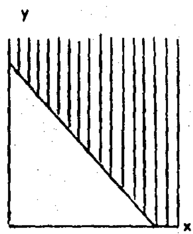
$y \geq -2x+400$



$y \geq 300$



$y \geq -3x+534$



+ El polígono sombreado en la figura en que se representan las rectas de las tres restricciones juntas, indica el área cuyos puntos

("x" y "y") respetan las tres restricciones de producción.Esta área es llamada "Región Factible".
Nótese que esta región factible incluye también los puntos de las rectas que la limitan.

Paso 4

+ Conociendo la región factible, el problema se reduce a encontrar un punto (x,y) que maximice (haga lo más grande posible) la contribución $E=C_1x+C_2y$, en este caso $E=40x+10y$, respetando que se encuentre dentro de esta área factible. Es decir, encontrar la recta de la función objetivo E, cuya ordenada al origen (b) sea tan grande como sea posible y por lo menos un punto (x,y) de esta recta se encuentre en la región factible.

+ Para obtener lo anterior, podrían dibujarse varias rectas de la ecuación $E=40x+10y$ paralelas y con ordenadas al origen diferentes hasta encontrar aquella que tiene la ordenada al origen mayor posible y toca a la región factible en uno de sus puntos.

+ Sin embargo, existe una forma más sencilla y precisa de obtener la ordenada al origen mayor posible (la cuál maximiza la función objetivo E) que toque en un punto la región factible, y consiste en :

  a) Determinar el valor exacto de las "coordenadas de todas las esquinas" de la región factible, partiendo de que en todo problema de programación lineal, la solución se encuentra en una de estas esquinas.

  b) Sustituir los valores de cada esquina en la función objetivo, para seleccionar la esquina que produzca el valor máximo (o mínimo en caso de minimización) de la función objetivo.

+ Ahora bien, para determinar las coordenadas de las esquinas, basta con determinar los puntos de intersección de las rectas con ambos ejes en la región factible, y encontrar, a través de un sistema de ecuaciones, el punto donde se intersectan las rectas que representan los límites de las áreas de restricción.

En el ejemplo :

Punto 1 : Intersección de la recta de restricción R_2 con el eje de las y's.

$P_1(0,300)$ (obtenida en el paso 3 : b de $R_2=300$).

Punto 2 : Intersección de la recta de restricción R_1 y la recta de restricción R_2.

R_1 : $y \leq -2x+400$
R_2 : $y \leq 300$

Por el método de igualación :

$$300 \leq -2x+400$$
$$2x \leq 400-300$$
$$x \leq \frac{100}{2}$$
$$x \leq 50 \qquad\qquad y \leq 300$$

Entonces el punto de intersección es $P_2=(50,300)$

Punto 3 : Intersección de la recta de restricción R_1 con la recta de restricción R_3.

R_1: $y \leq -2x+400$
R_3: $y \leq -3x+534$

Por el método de igualación :

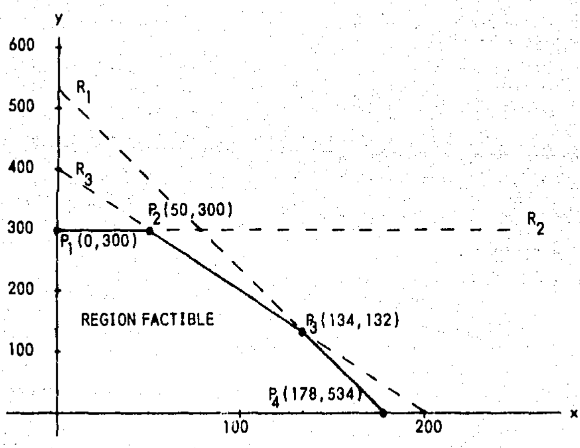
$$-2x+400 \leq -3x+534 \qquad y \leq -2x+400$$
$$-2x+3x \leq 534-400 \qquad y \leq -2(134)+400$$
$$x \leq 134 \qquad y \leq 132$$

Entonces el punto de intersección es $P_3=(134,132)$

Punto 4 : Intersección de la recta de restricción R_3 con el eje de las x's.

$P_4(178,0)$ (obtenida en el paso 3)

+ Graficando :



+ Obtenidas todas las esquinas de la región factible, se sustituyen los valores de cada una en la función objetivo y se selecciona aquella que produzca el valor máximo de E.

En el ejemplo :

Esquina P(x,y)	Función Objetivo E = 40x+10y
P_1(0,300)	E = 40(0)+10(300) = 3000
P_2(50,300)	E = 40(50)+10(300 = 5000
P_3(134,132)	E = 40(134+10(132) = 6710
P_4(178,0)	E = 40(178)+10(0) = 7120 ---

Efectividad Máxima

+ Lo anterior indica que de las 4 combinaciones de cantidad de unidades que deben producirse de los dos artículos "x" y "y" , la - que produce la contribución máxima (E=7120 E=6710 E=5000 E=3000) es 178 unidades del producto "x" y 0 unidades del producto "y", siendo entonces esta última la solución del problema de Programación Lineal planteado.

8.5.3 MINIMIZACION

+ Ha sido ilustrado el Método Gráfico para solucionar problemas de - Programación Lineal y específicamente problemas de maximización. Puede aplicarse fácilmente dicho método a los problemas de minimización, realizando unos cuantos cambios pertinentes.

8.5.3.1 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DE MINIMIZACION

+ Se utilizará también un ejemplo práctico para facilitar la comprensión del concepto de minimización y su Método de Solución Gráfica.

+ Ejemplo :

  - La fábrica de yogurt Danone, adquiere 2 tipos de productos para fabricar sus productos : el producto "x" que es leche de vaca y el producto "y" que es fruta. El precio del primero es de $70 kg. y el del segundo de $105 kg.
  - Cada frasco de yogurt requiere 3 ingredientes para ser alimenticio y cumplir con los requerimientos de sabor :
    a) Glucositos, en una cantidad mínima de 20 uds. por kg.
    b) Minerales, en una cantidad mínima de 48 uds. por kg.
    c) Vitaminas, en una cantidad mínima de 60 uds. por kg.

- Los contenidos de ingredientes nutritivos de la leche y la fruta comprados son:
  - un kg. de leche contiene : 0 uds. de glucositos, 8 uds. de minerales y 6 uds. de vitaminas.
  - un kg. de fruta contiene : 4 uds. de glucositos, 2 uds. de minerales y 3 uds. de vitaminas.
  - El problemas consiste en calcular con qué combinación de leche (x) y fruta (y) debe producrise cada yogurt, con el fin de "minimizar" el costo de dicho producto y satisfacer los requerimientos o restricciones nutritivas y de sabor .

8.5.3.2 METODO GRAFICO

+ Se seguirán los mismos 4 pasos descritos en el problema de maximización con algunas pequeñas modificaciones :

Paso 1

+ Se concentra la información del problema en una tabla:

	Ingredientes Contenidos		Requerimientos Mínimos Nutritivos y de Sabor (en uds. x kg.)
	Producto x (en uds. x kg.)	Producto y (en uds. x kg.)	
Glucositos	0	4	20
Minerales	8	2	48
Vitaminas	6	3	60
costo por unidad:	\$40	\$105	

+ Se establece la función objetivo, solo que ésta se referirá en vez de a la efectividad "E", al costo "C" de los productos "x" y "y".

  En el ejemplo : $C = 70x + 105y$

Paso 2

+ Se expresan matemáticamente las restricciones en forma de inecuaciones lineales; obsérvese que en el caso de minimización, las ecuaciones tienen el signo " $\geq$ " , en virtud de que se tiene que cumplir con requerimientos mínimos.

En el ejemplo :

Minimizar : $C = 70x+105y$

Sujeto a :

R_1 : $4y \geq 20$
R_2 : $8x+2y \geq 48$
R_3 : $6x+3y \geq 60$

Simplificando :

R_1 : $y \geq 5$
R_2 : $4x+y \geq 24$
R_3 : $2x+y \geq 20$

Paso 3

+ Se expresan en forma gráfica las desigualdades de restricción; obsérvese que en el caso de minimización, las inecuaciones representarán un área limitada por una recta.
Al ser el signo " $\geq$ ", el área corresponderá a la superficie superior a la recta límite (superficie rayada en la gráfica).

+ Para graficar, se obtienen dos puntos de cada recta de restricción.

En el ejemplo :

R_1	R_2	R_3
$y \geq 5$	$4x+y \geq 24$	$2x+y \geq 20$
donde b=5	$y \geq -4x+24$ donde b=24 y si: y=0 $0 \geq -4x+24$ $4x \geq 24$ $x \geq \frac{24}{4}$ $x \geq 6$	$y \geq -2x+20$ donde b=20 y si y=0 $0 \geq -2x+20$ $2x \geq 20$ $x \geq \frac{20}{2}$ $x \geq 10$
P(0,5)	P(0,24) P(6,0)	P(0,20) P(10,0)

La gráfica resultante es representada en la página siguiente. Nótese que la región factible respeta las tres restricciones de requerimientos nutritivos y de sabor de los productos "x" y "y".

Paso 4

+ Conociendo la región factible, se calculan las coordenadas de cada una de las esquinas o puntos de intersección, para determinar en qué punto (x,y) se da la combinación adecuada que minimiza la función objetivo y cumple las restricciones a la vez.

En el ejemplo :

Punto 1 : Intersección de la recta de restricción R_2 y el eje de las x's.

$P_1(0,24)$ (obtenida del paso 3: b de R_2=24)

Punto 2 : Intersección de la recta de restricción R_2 y la recta de restricción R_3.

R_2 : $y \geq -4x+24$
R_3 : $y \geq -2x+20$

Por el método de igualación :

$$-4x+24 \geq -2x+20 \qquad y \geq -2x+20$$
$$-4x+2x \geq 20-24 \qquad y \geq -2(2)+20$$
$$-2x \geq -4 \qquad y \geq -4+20$$
$$x \geq \frac{-4}{-2} \qquad y \geq 16$$
$$x \geq 2$$

Entonces el punto de intersección es $P_2(2,16)$

Punto 3 : Intersección de la recta de restricción R_1 y la recta de restricción R_3.

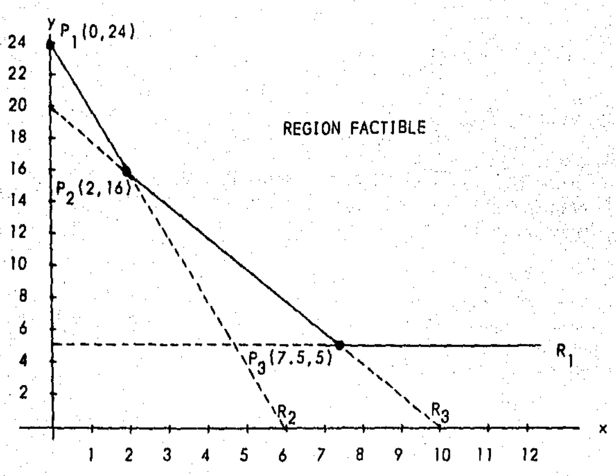
R_1 : $y \geq 5$
R_3 : $y \geq -2x+20$

Por el método de igualación :

$$5 \geq -2x+20 \qquad y \geq 5$$
$$2x \geq 20-5$$
$$x \geq \frac{15}{2}$$
$$x \geq 7.5$$

Entonces el punto de intersección es $P_3(7.5,5)$

+ Graficando :



+ Obtenidas las coordenadas de cada esquina de la región factible, se sustituyen en la función objetivo para seleccionar aquella que produzca el valor mínimo de "C".

En el ejemplo :

Esquina P(x,y)	Función Objetivo $C = 70x+105y$
$P_1(0,24)$	$C = 70(0)+105(24) = 2520$
$P_2(2,16)$	$C = 70(2)+105(16) = 1820$
$P_3(7.5,5)$	$C = 70(7.5)+105(5) = 1050$ ---

Costo Mínimo

+ Lo anterior indica, que de las 3 combinaciones de leche (x) y fruta (y) para elaborar el yogurt, aquella que cumple con los requerimientos nutritivos y de sabor y que genera el costo mínimo posible, es 7.5 gr. de leche y 5 gr. de fruta.

+ Han sido ilustrados dos problemas prototipo de Programación Lineal, los cuáles se dan muy frecuentemente en la realidad; estos dos problemas prototipo son análogos en su estructura a cualquier problema de Programación Lineal.

+ Por último, es importante hacer mención de que existen "Métodos Algebráicos" para la resolución de problemas de este tipo, los cuáles no se restringen al caso de "2" variables (pueden involucrar más), sin embargo, dichos métodos quedan fuera del ámbito introductorio de este trabajo.

PROBLEMAS POR RESOLVER

1) La empresa "Tejidos Finos", produce dos tipos de productos: calcetines y guantes; cada unidad del primer producto produce una contribución (precio de venta menos gastos variables por unidad) de $25 y cada unidad del segundo producto produce una contribución de $38.
Los productos se procesan en 3 tipos de máquinas: A,B y C; el primer producto requiere 1 hora en la máquina A, 1 en la B y 3.75 en la C; el segundo producto requiere 2 horas en la máquina A, 2 en la B y 3 en la C.
Sin embargo, el tiempo disponible de las máquinas A, B y C está limitado a 1000, 1200 y 3000 horas mensuales respectivamente.
Calcular cuánto debe producirse de guantes y de calcetines para maximizar la contribución.

2) Determine la combinación de crema y leche que debe producir una

empresa de lácteos para maximizar sus utilidades, considerando que la crema genera una contribución total de $27 por unidad y la leche de $20 por unidad, y que cada porducto pasa por 4 departamentos cuyas horas están restringidas según el siguiente cuadro :

Departamento:	Requerimientos de Tiempo : Crema (x) (en hrs.)	Leche (y) (en hrs.)	Horas Disponibles:
Extracción	0	2	800
Desinfectantes	2	3	1500
Pasteurización	1	1	600
Empaque	3	2	1500

3) La compañía Mexicana Textil fabrica actualmente dos productos nuevos, con una producción actual diaria de 50 unidades del modelo ES-4001 y 100 unidades diarias del modelo LS-4002 ; el director sabe que la compañía puede vender cualquier cantidad de estos productos y, desea saber si podrían aumentarse las ganancias cambiando la mezcla de productos entre los dos modelos. Ha sido obtenida la siguiente información acerca de las horas requeridas para la fabricación de cada modelo y las capacidades de cada departamento de la fábrica, así como la contribución total por unidad que cada modelo genera.

Departamento de Fabricación:	Requerimientos de Tiempo : ES-4001 (x) (en hrs.)	LS-4002 (y) (en hrs.)	Capacidad Departamental:
1	3	0	450
2	0	6	1200
3	6	6	1320
4	1.5	1.2	300
Contribución por unidad :	$58	$82	

a) Determine la mezcla óptima de producción, suponiendo que la empresa tiene capacidad para vender las cantidades que sean.
b) Calcule qué aumento significaría en la contribución a los costos fijos y a las ganancias esta mezcla óptima en comparación a la actual mezcla.
c) Si por cambios en el precio de venta del modelo ES-4001, la --

contribución del mismo aumentara en $25 por unidad, ¿cuál sería la mezcla óptima de productos?.

4) La misma empresa textil del problema anterior debe comprar dos sustancias para colorar los listones y los elásticos; las dos sustancias o materias primas llevan una combinación de tres colores:
- Cada kg. de la materia prima 1 contiene, además de otras sustancias : 2 gr. del colorante 1, 3 gr. del colorante 2 y 4.5 gr. del colorante 3.
- Del mismo modo, cada kg. de la materia prima 2, contiene 5 gr. del colorante 1, 3 gr. del 2 y 9 gr. del 3.

Todos los productos de la empresa que serán teñidos con estas sustancias deberán contener un mínimo de 200 gr. del colorante 1, de 90 gr. del 2 y de 180 gr. del 3.
El costo de la materia prima 1 es de $40 el gr. y el de la materia prima 2 es de $60 el gr.
El gerente de compras desea que usted le calcule que cantidad de cada uno debe comprar a cada proveedor para minimizar los costos y cumplir con los requerimientos de producción.

5) Cada caja grande de harina para pastel fabricada por "Industrias Pronto", debe contener un mínimo de 900 gr. del ingrediente 1, 1200 gr. del ingrediente 2 y 700 gr. del ingrediente 3.
La harina se hace con dos materias primas : A y B; cada kg. de la A contiene 150 gr. del ingrediente 1, 150 gr. del ingrediente 2 y 700 gr. del ingrediente 3; cada kg. de la materia prima B contiene 300 gr. del ingrediente 1, 600 gr. del 2 y 100 gr. del 3.
Si la materia prima A cuesta $157 el kg. y la B $201 por kg. calcular las cantidades de las dos materias primas que deben comprarse para producir cada caja de harina, respetando sus requerimientos y teniendo un costo mínimo.

CAPITULO IX

LOGARITMOS

9.1 DEFINICIONES

9.1.1 LOGARITMO

+ En ocasiones, pueden encontrarse expresiones de la forma " $y=a^x$ " en las cuáles es necesario conocer el valor de "x". Por los métodos tradicionales del Algebra no es posible despejar dicha variable, sin embargo utilizando las operaciones conocidas como "logaritmos", la situación anterior desaparece.

+ En la expresión " $y=a^x$ ", se le llama "base" a la "a" y "exponente" a la "x".

+ El "logaritmo" de un número es, el exponente al cuál se debe elevar otro número llamado base, para que reproduzca el primero.

+ Los logaritmos se representan por :

$$\boxed{\log_b}$$

Donde "b" es la base.

Ejemplos :

1) $2^3=8$ — 3 es el logaritmo en base 2 de 8, porque 3 es el exponente al que se debe de elevar la base 2 para obtener 8 ; este logaritmo se representa : $\log_2 8=3$

2) $3^4=81$ --- $\log_3 81=4$

3) $5^3=125$ --- $\log_5 125=3$

4) $8^2=64$ --- $\log_8 64=2$

5) $10^3=1000$ -- $\log_{10} 1000=3$

+ Generalizando :
  - La expresión :

$$y = a^x$$

  - Se puede representar como :

$$x = \log_a y$$

"x" es el logaritmo en base "a" de "y", en donde :

a --> es la base del logaritmo
x --> es el logaritmo en base "a" de "y"
y --> es el número del cuál se está obteniendo el logaritmo.

- De lo anterior se deduce que :

$y = a^x$	$x = \log_a y$
Se le llama "forma exponencial" y permite calcular "y" en función de "x".	Se le llama "forma logarítmica" y permite conocer "x" en función de "y".

9.1.2 SISTEMAS DE LOGARITMOS

+ La "base" de un sistema de logaritmos puede ser cualquier número positivo. Nótese sin embargo, que la unidad no puede tomarse como base, porque todas las potencias de 1 son iguales a 1.
+ Pudiéndose tomar como base cualquier número positivo, el número de sistemas de logaritmos es ilimitado.
+ Sin embargo, los sistemas generalmente usados son dos :
  a) Sistema de logaritmos decimales, cuya base es 10.
  b) Sistema de logaritmos naturales, cuya base es el número "e" (el cuál tiene un valor de 2.71828182845).
+ Los logaritmos que interesan para efectos de este capítulo son los logaritmos base 10, llamados logaritmos decimales, vulgares o de Briggs.

9.1.3 PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

+ En cualquier sistema de logaritmos, se cumple que :

1) La "base" de un sistema de logaritmos no puede ser negativa.

   Si fuera negativa, sus potencias pares serían positivas y sus potencias impares serían negativas, y por lo tanto habría números positivos que no tendrían logaritmo.

   Ejemplo :

   "-3" es una base negativa:

   $\log_{-3} 81 = 4$ $-3^4 = 81$ --▶ su potencia par es positiva
   $\log_{-3} -27 = 3$ $-3^3 = -27$ --▶ su potencia impar es negativa
   $\log_{-3} 27 = ?$ $-3^? = 27$ --▶ el número 27 (positivo), no tendría logaritmo en esta base negativa.

2) Los números negativos no tienen logaritmo.

   Si la base es positiva, todas sus potencias, ya sean pares o impares, son positivas y nunca negativas.

- De lo anterior se deduce que :

$y = a^x$	$x = \log_a y$
Se le llama "forma exponencial" y permite calcular "y" en función de "x".	Se le llama "forma logarítmica" y permite conocer "x" en función de "y".

9.1.2 SISTEMAS DE LOGARITMOS

+ La "base" de un sistema de logaritmos puede ser cualquier número positivo. Nótese sin embargo, que la unidad no puede tomarse como base, porque todas las potencias de 1 son iguales a 1.

+ Pudiéndose tomar como base cualquier número positivo, el número de sistemas de logaritmos es ilimitado.

+ Sin embargo, los sistemas generalmente usados son dos :
  a) Sistema de logaritmos decimales, cuya base es 10.
  b) Sistema de logaritmos naturales, cuya base es el número "e" (el cuál tiene un valor de 2.71828182845).

+ Los logaritmos que interesan para efectos de este capítulo son los logaritmos base 10, llamados logaritmos decimales, vulgares o de Briggs.

9.1.3 PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

+ En cualquier sistema de logaritmos, se cumple que :

1) La "base" de un sistema de logaritmos no puede ser negativa.

   Si fuera negativa, sus potencias pares serían positivas y sus potencias impares serían negativas, y por lo tanto habría números positivos que no tendrían logaritmo.

   Ejemplo :

   "-3" es una base negativa:

   $\log_{-3}81 = 4$ $-3^4 = 81$ --▶ su potencia par es positiva
   $\log_{-3}-27 = 3$ $-3^3 = -27$ --▶ su potencia impar es negativa
   $\log_{-3}27 = ?$ $-3^? = 27$ --▶ el número 27 (positivo), no tendría logaritmo en esta base negativa.

2) Los números negativos no tienen logaritmo.

   Si la base es positiva, todas sus potencias, ya sean pares o impares, son positivas y nunca negativas.

3) En cualquier sistema el logaritmo de "1" es igual a "0".

$$\boxed{\log_b 1 = 0}$$

Cualquiera que sea la base, si se eleva ésta a la potencia "0", resulta "1":

$b^0 = 1$ y entonces: $lob_b 1 = 0$

Ejemplo:

$25^0 = 1$ y entonces: $\log_{25} 1 = 0$

4) En cualquier sistema de logaritmos, el logaritmo de la base misma es igual a "1".

$$\boxed{\log_b b = 1}$$

Cualquier base elevada a la potencia "1" da como resultado la misma base :

$b^1 = b$ y entonces: $\log_b b = 1$

Ejemplo:

$25^1 = 25$ y entonces: $\log_{25} 25 = 1$

9.1.4 LOGARITMOS DECIMALES

+ Como fue mencionado, los logaritmos que interesan para efectos de este capítulo, son los de base 10, en virtud de que son los más comúnmente usados por la facilidad para calcularlos.
+ De acuerdo a la definición de logaritmo, se llamará "logaritmo decimal" de un número, al exponente al cuál se debe elevar la base 10 para obtener dicho número.
+ En los logaritmos decimales, se acostumbra no escribir la base, y se sobrentiende que ésta es igual a 10.

  Ejemplo:

  $\log 25 = \log_{10} 25$

9.1.5 PROPIEDADES PARTICULARES DE LOS LOGARITMOS DECIMALES

+ Los logaritmos decimales cumplen con algunas propiedades particulares que han hecho de ellos los más comunes en su utilización. Serán analizadas dichas propiedades :

1) En el sistema de logaritmos decimales, los únicos números cuyos logaritmos son números enteros, son las potencias de 10.

$10^4 = 10,000$		$\log 10,000 = 4$
$10^3 = 1,000$		$\log 1,000 = 3$
$10^2 = 100$		$\log 100 = 2$
$10^1 = 10$		$\log 10 = 1$
$10^0 = 1$		$\log 1 = 0$
$10^{-1} = .1$		$\log .1 = -1$
$10^{-2} = .01$		$\log .01 = -2$
$10^{-3} = .001$		$\log .001 = -3$
$10^{-4} = .0001$		$\log .0001 = -4$

2) El logaritmo de todo número que no sea una potencia exacta de 10, no es un número entero, sino que consta de: una parte decimal, o de una parte entera y otra decimal.

$\log 5 = .6990$
$\log 25 = 1.3979$

9.2 CARACTERISTICA Y MANTISA

+ La parte entera de un logaritmo, situada antes del punto, se llama "Característica".
+ La parte decimal de un logaritmo, situada después del punto, se llama "Mantisa".

Ejemplo :

$\log 25 = 1.3979$ característica $= 1$
mantisa $= .3979$

+ Es importante resaltar que :

> + La característica puede ser : positiva, igual a "0" o negativa.
> + La mantisa siempre será : positiva o igual a "0" (si se trata de una potencia exacta de 10).

9.2.1 PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA CARACTERISTICA DE UN LOGARITMO

+ La característica de un logaritmo se determina de acuerdo con las siguientes reglas :

1) Si el número es mayor que uno, la característica: es positiva e igual al número de cifras enteras (a la izaquierda del punto decimal) disminuido en una unidad.

   Ejemplos:

Número	Característica de su logaritmo
5397	3 (Nótese que la cantidad 5397 comprende 4 cifras antes del punto decimal; entonces la característica del logaritmo conrrespondiente es: 4-1=3).
249	2
905	2
34.8	1
613.15	2
19851.10	4

2) Si el número es menor que uno (sólo tiene parte decimal), la característica: es negativa e igual al número de ceros que haya inmediatamente después del punto decimal, aumentado en una unidad.

   El signo negativo de la característica se acostumbra escribir encima de ésta, para indicar que solo la característica es negativa.

   Ejemplos :

Número	Característica de su logaritmo
.005210	$\overline{3}$ (Nótese que la cantidad .005210 tiene dos ceros después del punto decimal y antes de la primera cifra significativa; entonces la característica del logaritmo corresponde a: -- 2+1=3).

.2525	$\bar{1}$
.00010	$\bar{4}$
.00425	$\bar{3}$
.00008	$\bar{5}$
.20000	$\bar{1}$

9.2.2 PROCEDIMIENTO PARA CALCULAR LA MANTISA DE UN LOGARITMO

+ La mantisa o parte decimal de un logaritmo se obtiene por medio de "Tablas de Logaritmos".

+ Las tablas de logaritmos son cuadros que contienen las mantisas de los logaritmos hasta un límite que varía según la extensión de las tablas.
  Existen tablas que proporcionan las mantisas con tres, cuatro y más cifras decimales, sin embargo, para los cálculos a realizar en este capítulo, es suficiente manejar con destreza, las tablas de logaritmos con 4 decimales.

+ Con el fin de facilitar los cálculos a realizar en este capítulo, se incluyen en la página siguiente las tablas de logaritmos con cuatro decimales.

+ Para determinar la mantisa del logaritmo de un número y utilizando tablas del tipo al que se ha hecho referencia, se sigue la siguiente regla :

  " Se determina la mantisa, buscando en la tabla, en la primera columna de la izquierda (N), el número formado por las dos primeras cifras del número propuesto, empezando por su primera cifra significativa. Se sigue en el renglón correspondiente hasta llegar a la columna encabezada por la tercera cifra del número dado; y en el cruce del renglón y la columna se encuentra la mantisa buscada." (20)

+ Si el número tiene menos de tres cifras,se completa con ceros y se busca la mantisa.

+ Si el número tiene 4 cifras, a la mantisa encontrada para las tres primeras cifras se le agrega la parte proporcional que da la tabla para la cuarta cifra. La suma obtenida será la mantisa buscada.

---

(20) Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. "Matemáticas". Pag. 372.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLAS DE LOGARITMOS

Fuente: Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. "Tablas Matemáticas". Pag.28.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLAS DE LOGARITMOS

Fuente: Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. "Tablas Matemáticas". Pag. 29.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Determinar el logaritmo de 764.

La característica de este número es 2.

Para encontrar la mantisa se busca en las tablas, en la primera columna de la izquierda (N), el número formado por las dos primeras cifras del número dado, es decir 76. Se sigue el renglón correspondiente hasta llegar a la columna encabezada por 4, tercera cifra del número dado, y en el cruce del renglón y la columna se encuentra la mantisa buscada: 8831.

Entonces:

$$\log 764 = 2.8831$$

2) Determinar el logaritmo de 9268

La característica es 3.

Se encuentra primero la mantisa del número formado por sus tres primeras cifras siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior. La mantisa de 926 es: 9666. Por el mismo renglón se continúa hasta llegar a la columna de partes proporcionales encabezada por la cuarta cifra del número dado (8) y en el cruce se encuentra el número 4. Sumando : 9666 + 4 se obtiene 9670, que es la mantisa buscada.

Entonces:

$$\log 9268 = 3.9670$$

3) Hallar el logaritmo de 54.

La característica es 1.

Para hallar la mantisa de este número que tiene menos de tres cifras, se completa con ceros, es decir se busca la mantisa de 540 : 7324.

Entonces:

$$\log 54 = 1.7324$$

4) Hallar el logaritmo de 706.4

La característica es 2.

Para hallar la mantisa, "se prescinde del punto decimal"; es decir se busca la mantisa de 7064 que es: 8488 + 2 (parte proporcional) = 8490.

Entonces :

$$\log 706.4 = 2.8490$$

5) Hallar el logaritmo de 0.00682

La característica es $\overline{3}$.

Para hallar la mantisa se prescinde del punto decimal y se toman solo las cifras significativas: 682, encontrándose que la mantisa de dicho número corresponde a : 8338.

Entonces: $\log .00682 = \bar{3}.8338$

+ Por último, puede generalizarse, que los números que solo difieren en la localización del punto decimal, tienen la misma mantisa, variando únicamente la característica.

  Lo anterior es en virtud de que en el cálculo de la mantisa se hace caso omiso del punto decimal.

  Ejemplo:

$\log 7394 = 3.8688$	$\log .7394 = \bar{1}.8688$
$\log 739.4 = 2.8688$	$\log .07394 = \bar{2}.8688$
$\log 73.94 = 1.8688$	$\log .007394 = \bar{3}.8688$
$\log 7.394 = 0.8688$	$\log .0007394 = \bar{4}.8688$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Hallar los siguientes logaritmos :

1) log 8 =	6) log 796.5 =
2) log 9.9 =	7) log .0076 =
3) log 228 =	8) log 8.001 =
4) log 6329 =	9) log 1 =
5) log .2 =	10) log 7.255 =

9.3 LOGARITMOS NEGATIVOS

+ Aun y cuando se ha mencionado que la característica de un logaritmo puede ser positiva o negativa y la mantisa del mismo siempre será positiva algebráicamente puede obtenerse que un logaritmo sea negativo tanto en la característica como en la mantisa.

  Ejemplo:

  Considerando que el logaritmo de 0.07394 es $\bar{2}.8688$, se tendría :

$$\bar{2}.8688 = \frac{\bar{2}}{\text{característica}} + \frac{0.8688}{\text{mantisa}}$$

$$= -2 + 0.8688$$

Sumando algebráicamente :

$$= -(1.1312)$$

+ Nótese que el hecho de que la mantisa de un logaritmo sea negati va se debe a la aplicación del Algebra, aunque de origen , dicha mantisa nunca podrá ser negativa.

+ Lo anterior puede ser confirmado obteniendo el logaritmo en cualquier calculadora de bolsillo, ya que éstas no pueden manejar números con partes positivas y negativas al mismo tiempo.

+ En conclusión :

Un "Logaritmo Negativo" es aquel en que tanto la característica como la mantisa son negativas.

A) <u>Procedimiento para transformar un logaritmo con característica negativa y mantisa positiva, en un logaritmo negativo</u> :

+ Dado un logaritmo con característica negativa y mantisa positiva, para convertirlo en un logaritmo negativo, "se suma uno a la característica y se resta uno a la mantisa", operación que no altera la cifra dada.

Ejemplo:

Convertir el logaritmo $\overline{3}.7190$ en un logaritmo negativo.

$$\overline{3}.7190 = (-3) + (+.7190)$$

Sumando y restando 1 : $\underline{(+1) \quad (-1)}$

$$(-2) + (-.2810)$$

De este modo se tiene un logaritmo negativo: $-(2.2810)$

+ Esta conversión, como se verá posteriormente, es escencial cuando se multiplican o dividen logaritmos entre una cantidad determinada, ya que resultaría complicado manejar por separado la característica y la mantisa que tienen signos diferentes y determinar qué signo tendría el resultado.

Ejemplo:

¿ Cómo resolver ? :

a) $4(\overline{3}.7190)$

Se convierte el logaritmo en un logaritmo todo negativo:

$\overline{3}.7190 = -(2.2810)$

Se multiplica por la cantidad dada:

$4(-2.2810) = -9.1240$

b) $\dfrac{\overline{3}.7190}{8}$

Se convierte el logaritmo en un logaritmo todo negativo:

$\overline{3}.7190 = -(2.2810)$

Se divide entre la cantidad dada:

$\dfrac{-2.2810}{8} = -.2851$

+ Ahora bien, en ocasiones es necesario realizar el proceso contrario :

B) Procedimiento para transformar un logaritmo negativo en un logaritmo con característica negativa y mantisa positiva

+ Dado un logaritmo con característica y mantisa negativas, con el fin de volver positiva a esta última, "se resta uno a la característica y se suma uno a la mantisa", operación que tampoco altera la cifra dada.

Ejemplo:

Convertir el logaritmo -(2.2810) en un logaritmo con característica negativa y mantisa positiva.

$$-(2.2810) = (-2) + (-.2810)$$

Restando y Sumando 1 : $\underline{(-1) + (+1)}$

$$(-3) + (+.7190)$$

De este modo se tiene un logaritmo con característica negativa y mantisa positiva: $= \bar{3}.7190$

+ Esta conversión, como se verá también posteriormente, es fundamental cuando se realizan sumas y restas entre logaritmos.

Ejemplo:

¿ Cómo sumar ?

$\bar{2}.7214 - (2.2810)$

Se convierte el logaritmo negativo en un logaritmo con mantisa positiva:

$\bar{2}.7214 - (2.2810) = \bar{2}.7214 - \bar{3}.7190$

Se suman las características y las mantisas por separado:

$$\begin{aligned}\bar{2}.7214 - \bar{3}.7190 &= \bar{2} + .7214 + \bar{3} + .7190\\ &= \bar{2} + \bar{3} + .7214 + .7190\\ &= \bar{5} + 1 + .4404\\ &= \bar{4} + .4404\\ &= \bar{4}.4404\end{aligned}$$

9.4 LEYES DE LOS LOGARITMOS

+ Las leyes de los logaritmos son fundamentalmente cuatro :

A) Ley del logaritmo de un producto.
B) Ley del logaritmo de un cociente.
C) Ley del logaritmo de una potencia.
D) Ley del logaritmo de una raíz.

9.4.1 LOGARITMO DE UN PRODUCTO

Ley

+ El logaritmo de un producto de dos o más factores, es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de estos factores.

$$\boxed{\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B}$$

Demostración

+ Si:	$b^x = A$ y $b^y = B$
+ Entonces:	$x = \log_b A$ y $y = \log_b B$
+ Si se desea multiplicar (A·B), se tiene que:	$A \cdot B = b^x \cdot b^y$
Y de acuerdo a las leyes de los exponentes:	$A \cdot B = b^{x+y}$
+ Entonces, "x+y" es el logaritmo del producto (A·B), pues es el exponente al que se debe elevar la base "b" para obtener (A·B).	$\log_b (A \cdot B) = x+y$
+ Pero si:	$x = \log_b A$ y $y = \log_b B$
+ Sustituyendo se comprueba que :	$\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

Ejemplo

+ Encontrar el valor del logaritmo de (226)(8232).

$$\begin{aligned} \log (226 \cdot 8232) &= \log 226 + \log 8232 \\ &= 2.3541 + 3.9155 \\ &= 6.2696 \end{aligned}$$

9.4.2 LOGARITMO DE UN COCIENTE

Ley

+ El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor :

$$\boxed{\log \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B}$$

Demostración

+ Si:	$b^x = A \quad y \quad b^y = B$
+ Entonces:	$x = \log_b A \quad y \quad y = \log_b B$
+ Si se desea dividir $\frac{A}{B}$:	$\frac{A}{B} = \frac{b^x}{b^y}$
+ Y de acuerdo con las leyes de los exponentes:	$\frac{A}{B} = b^{x-y}$
+ Entonces, "x+y" es el logaritmo del cociente A/B, pues es el exponente al que se debe elevar la base "b" para obtener A/B :	$\log_b \frac{A}{B} = x-y$
+ Sustituyendo que:	$x = \log_b A \quad y \quad y = \log_b B$
+ Se comprueba que:	$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

Ejemplo

+ Encontrar el valor del logaritmo de $\frac{226}{8232}$

$$\log \frac{226}{8232} = \log 226 - \log 8232$$
$$= 2.3541 - (3.9155)$$
$$= -(1.5614)$$

Convirtiendo este logaritmo negativo a uno con característica negativa y mantisa positiva se obtiene que :

$-(1.5614) = \bar{2}.4386$

Puede comprobarse que el logaritmo de 226/8232 es $\bar{2}.4386$, observando en tablas que el logaritmo de .02745 es $\bar{2}.4386$.

9.4.3 LOGARITMO DE UNA POTENCIA

Ley

+ El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia, multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\boxed{\log A^n = n(\log_b A)}$$

Donde :
 n = exponente de la potencia
 A = base de la potencia.

Demostración

+ Si:	$b^x = A$
+ Entonces:	$x = \log_b A$
+ Si se eleva ambos miembros de $b^x = A$ a la potencia n:	$b^{xn} = A^n$
+ Ahora, si "nx" es el exponente al cuál se debe elevar la base "b" para obtener A^n, entonces "nx", es el logaritmo en base "b" de A^n :	$\log_b A^n = nx$
+ Pero como se vió en un principio de esta demostración:	$x = \log_b A$
+ Sustituyendo se comprueba que:	$\log_b A^n = n(\log_b A)$

Ejemplo

+ Encontrar el valor del logaritmo de $(68)^2$.

$$\begin{aligned}\log (68)^2 &= 2 \cdot \log 68\\ &= 2 \cdot 1.8325\\ &= 3.6650\end{aligned}$$

Puede comprobarse que el logaritmo de $(68)^2$ es 3.6650, observando en las tablas que el logaritmo de 4624 es 3.6650 .

9.4.4 LOGARITMO DE UNA RAIZ

Ley

+ El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido entre el índice de la raíz.

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}}$$

Demostración

+ Si: $b^x = A$
+ Entonces: $x = \log_b A$
+ Si se desea extraer la raíz enésima a ambos miembros de $b^x = A$, se tiene : $\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n]{A}$
+ De acuerdo a las leyes de los exponentes : $b^{x/n} = \sqrt[n]{A}$
+ Ahora, si "x/n" es el exponente al que se debe elevar la base "b" para obtener $\sqrt[n]{A}$, "x/n" es el logaritmo base "b" de $\sqrt[n]{A}$: $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{x}{n}$
+ Sustituyendo que: $x = \log_b A$
+ Se comprueba que : $\log_n \sqrt[n]{A} = \frac{\log_b A}{n}$

Ejemplo

+ Encontrar el valor del logaritmo de $\sqrt[3]{.089}$

$$\log \sqrt[3]{.089} = \frac{\log .089}{3}$$

$$= \frac{\bar{2}.9494}{3}$$

Aquí se presenta de nuevo: ¿Cómo dividir una cantidad que tiene su parte entera negativa y su parte fraccionaria positiva entre un número determinado. Para resolver lo anterior es necesario convertir todo el número en una cantidad negativa, siguiendo el procedimiento antes explicado. Luego :

$$\bar{2}.9494 = -(1.0506)$$

Entonces:

$$\log \sqrt[3]{.089} = \frac{-1.0506}{3}$$

$$= -.3502$$

Y ahora es necesario convertir este logaritmo negativo en uno con mantisa positiva :

$$-.3502 = \bar{1}.6498$$

Entonces:

$$\log \sqrt[3]{.089} = \bar{1}.6498$$

9.5 ANTILOGARITMOS

Definición

+ Determinar un "Antilogaritmo" consiste en encontrar el número al que corresponde un logaritmo dado.

+ El antilogaritmo de un número se representa por:

$$\boxed{\text{antilog}_b}$$

Donde:
  b = base

Sin embargo, recuérdese que para efectos de los logaritmos decimales, no es requisito poner la base, se sobrentiende que es 10.

Tablas

+ En las tablas de logaritmos, además de hallar el logaritmo de un número, se puede resolver el problema inverso, es decir, conocido el logaritmo de un número determinar dicho número.

+ Sin embargo, con el fin de agilizar los cálculos existen "tablas de antilogaritmos" que permiten obtener éstos con mayor rapidez, mismas que son incluidas en la siguiente página.

Procedimiento

+ Para encontrar en las tablas el antilogaritmo de un número se procede de acuerdo a la siguiente regla :

" Para obtener el antilogaritmo de un logaritmo dado, buscamos en la primera columna de la izquierda de las tablas de antilogaritmos, el número formado por las dos primeras cifras de la mantisa dada. Se sigue por el renglón correspondiente, hasta llegar

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLAS DE ANTILOGARITMOS

Fuente: Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. "Tablas Matemáticas". Pag. 30

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8015	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLAS DE ANTILOGARITMOS

Fuente: Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. "Tablas de Matemáticas". Pag.31.

a la columna encabezada con la tercera cifra de la mantisa, y se anota el número que se encuentra en el cruce.
Se continúa por el mismo renglón hasta la columna de las partes proporcionales marcada con la cuarta cifra de la mantisa, y el número que ahí se encuentra, se suma con el anotado anteriormente, obteniéndose así las cifras del antilogaritmo buscado, empezando por su primera cifra significativa." (21)

La característica por su parte, indica el lugar donde debe colocarse el punto decimal o bien, el número de cifras enteras antes del mismo.

- Si la característica es positiva, el número de cifras enteras antes del punto decimal será igual a la característica más uno. Nótese que habrá ocasiones en que será necesario completar con ceros.
- Si la característica es negativa, ésta indicará el lugar que debe ocupar la primera cifra significativa a partir del punto decimal.

Ejemplos

1) Hallar el antilogaritmo de 2.7045.

En la primera columna de la izquierda de las tablas de antilogaritmos, se localiza el número .70 formado por las dos cifras primeras de la mantisa. En el cruce de este renglón y la columna encabezada por 4 (tercera cifra de la mantisa) se encuentra el número 5058, y en el cruce del mismo renglón con la columna de las partes proporcionales encabezada por 5 (cuarta cifra de la mantisa) se halla el número 6. Sumando 5058+6, se obtiene 5064.
Como la característica del logaritmo dado 2.7045 es dos, el antilogaritmo deberá tener tres cifras enteras antes del punto decimal.
Por tanto :
antilog 2.7045 = 506.4

2) Hallar el número cuyo logaritmo es 4.3678.

Procediendo como en el caso anterior, en el cruce del renglón que empieza por .36 y la columna 7, se encuentra el número 2328; en el mismo renglón, en la columna 8 de las partes proporcionales está el número 4. Sumando 2328+4 se tiene: 2332.
Siendo la característica del logaritmo dado 4, el número que se busca debe tener cinco cifras en la parte entera, por lo que se deben completar con un cero las cifras halladas.
Entonces :
antilog 4.3678 = 23320

(21) Caballero Arquímides, Martínez Lorenzo, Bernárdez Jesús. Ob.Cit. Pag. 376

3) Hallar el número cuyo logaritmo es $\overline{2}.1440$.

Donde se cruza el renglón que comienza con .14 y la columna 4, está el número 1393; en este caso no se suma parte proporcional porque el cuarto dígito de la mantisa dada es 0.
La característica es $\overline{2}$, lo cuál indica que la primera cifra significativa debe ocupar el segundo lugar a partir del punto decimal, o bien debe haber un cero antes de dicha cifra significativa.
Entonces:

$$\text{antilog } \overline{2}.1440 = .01393$$

4) Hallar el antilogaritmo de $-(2.7590)$.

Primero debe convertirse este logaritmo negativo en uno con característica negativa y mantisa positiva, para poder buscarlo en tablas.

$$\begin{array}{l} (-2) + (-.7590) \\ \underline{(-1) + (+1)} \\ (-3) + (+.2410) \end{array}$$

Entonces el logaritmo correcto es $\overline{3}.2410$, cuyo antilogaritmo en tablas y tomando en cuenta la localización del punto decimal dada por la característica $\overline{3}$ es;

$$\text{antilog } \overline{3}.2410 = .001742$$

5) Hallar el antilogaritmo de 5.2550 .

$$\text{antilog } 5.2550 = 179900$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Hallar los antilogaritmos de los siguientes números :

1) 2.4950
2) 4.9866
3) $-(3.4021)$
4) $\overline{3}.2980$
5) $\overline{1}.7695$
6) 1.1810
7) 5.2794
8) $\overline{4}.4484$
9) $-(2.5760)$
10) .3333

9.6 CALCULO DEL VALOR DE EXPRESIONES POR MEDIO DE LOGARITMOS

+ Las leyes de los logaritmos, hacen posible emplearlos en el cálculo del valor de diversas expresiones.

Ejemplos :

1) Hallar el valor de 952.8 ·.95, a través de logaritmos.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

$$\begin{aligned} \log(952.8 \cdot .95) &= \log 952.8 + \log .95 \\ &= 2.9790 + \bar{1}.9777 \\ &= 2.9567 \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} 952.8 \cdot .95 &= \text{antilog } 2.9567 \\ \text{antilog } 2.9567 &= 905.1 \\ 952.8 \cdot .95 &= 905.1 \end{aligned}$$

2) Hallar el valor de 4214· .0023 ·(-25.76) a través de logaritmos.

Como un número negativo no tiene logaritmo, se trabajará prescindiendo del signo menos de 25.76 y luego, hayado el producto, de acuerdo a la regla de los signos se le pondrá el signo "-".

$$\begin{aligned} \log(4214 \cdot .0023 \cdot 25.76) &= \log 4214 + \log .0023 + \log 25.76 \\ &= 3.6247 + \bar{3}.3617 + 1.4109 \\ &= 2.3973 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4214 \cdot .0023 \cdot 25.76 &= \text{antilog } 2.3973 \\ \text{antilog } 2.3973 &= 249.7 \\ 4214 \cdot .0023 \cdot -25.76 &= -249.7 \end{aligned}$$

3) Hallar el valor de $\frac{.358}{46.31}$ por logaritmos.

$$\begin{aligned} \log \frac{.358}{46.31} &= \log .358 - \log 46.31 \\ &= \bar{1}.5539 - (1.6657) \end{aligned}$$

Volviendo la característica negativa y la montisa positiva del segundo factor se tiene :

$$\begin{array}{l} (-1) + (-.6657) \\ \underline{(-1) + (+1)} \\ (-2) + (.3343) \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \log \frac{.358}{46.31} &= \bar{1}.5539 + \bar{2}.3343 \\ &= \bar{3}.8882 \\ \frac{.358}{46.31} &= \text{antilog } \bar{3}.8882 \\ &= .007731 \end{aligned}$$

4) Hallar el valor de $(8.256)^6$ por logaritmos.

$$\log (8.256)^6 = 6(\log 8.256)$$
$$= 6(0.9168)$$
$$= 5.5008$$
$$\text{antilog } 5.5008 = 317000$$
$$(8.256)^6 = 317000$$

5) Hallar el valor de $\sqrt[5]{4}$ por logaritmos.

$$\log \sqrt[5]{4} = \frac{\log 4}{5}$$
$$= \frac{.6021}{5}$$
$$= .1204$$
$$\text{antilog } .1204 = 1.319$$
$$\sqrt[5]{4} = 1.319$$

+ Del mismo modo pueden resolverse a través de logaritmos, también expresiones que contengan varias operaciones a la vez y cuyo cálculo por medio de la aritmética, sería tal vez muy tardado.

Ejemplos:

1) Hallar el valor de $C = \sqrt[2]{\dfrac{120.10 \cdot .06230}{9.27 \cdot .098}}$ por logaritmos.

$$\log \sqrt[2]{\frac{(120.10 \cdot .0623)}{(9.27 \cdot .098)}} = [(\log 120.1 + \log .0623) - (\log 9.27 + \log .098)] / 2$$
$$= [2.0792 + \overline{2}.7945 - (0.9671 + \overline{2}.9912)] / 2$$
$$= [.8737 - (-.0417)] / 2$$
$$= [.8737 + .0417] / 2$$
$$= .9154 / 2$$
$$\text{antilog } .4577 = 2.8688$$

Entonces: $C = 2.8688$

2) Hallar el valor de $x = \sqrt[3]{\dfrac{15430 \cdot .34}{742.9 \cdot .08}}$ por logaritmos.

$$\log x = \log 15430 + \log .34 - (\log 742.9 + \log .08)$$
$$= \frac{4.1883 + \overline{1}.5315 - (2.8709 + \overline{2}.9031)}{3}$$
$$= \frac{3.7198 - (1.7740)}{3}$$
$$= .6486$$
$$\text{antilog } .6486 = 4.4520$$

Entonces : $x = 4.4520$

3) Hallar el valor de $m = \sqrt[2]{\dfrac{(.89)^2 \cdot 45.12 \cdot 4825}{.08 \cdot (8.27)^3 \cdot \sqrt[4]{25}}}$ por logaritmos.

$$\log m = \frac{2(\log .89)+\log 45.12+\log 4825-\left(\log .08+3\log 8.27+\log \frac{25}{4}\right)}{2}$$

$$\log m = \frac{2(\bar{1}.9494)+1.6544+3.6834-\left(\bar{2}.9031+3(0.9175)+\frac{1.3979}{4}\right)}{2}$$

$$\log m = \frac{-.1012+1.6544+3.6834-(\bar{2}.9031+2.7525+.3495)}{2}$$

$$\log m = \frac{5.2366-2.0051}{2}$$

$\log m = 1.6158$

antilog $1.6158 = 41.29$

$m = 41.29$

4) Utilizando logaritmos encontrar el valor de b, en la siguiente expresión : $\log_b .094 = 4.28$

$$b^{4.28} = .094$$
$$\log b^{4.28} = .094$$
$$4.28 \log b = \log .094$$
$$\log b = \frac{\log .094}{4.28}$$
$$\log b = \frac{\bar{2}.9731}{4.28}$$

Convirtiendo $\bar{2}.9731$ en logaritmo negativo:

$$\log b = \frac{-1.0269}{4.28}$$
$$\log b = -0.2399$$

Convirtiendo el logaritmo negativo en uno con mantisa positiva para poder obtener el antilogaritmo :

$$\log b = \bar{1}.7601$$
$$b = \text{antilog } \bar{1}.7601$$
$$b = .5755$$

5) Exprese la siguiente relación por un solo logaritmo, es decir el logaritmo de una sola cantidad :

$$4 \log A + \frac{1}{8} \log C - \frac{\log D}{5}$$

$$4 \log A = \log A^4$$
$$\frac{\log C}{8} = \log C^{1/8}$$
$$\frac{\log D}{5} = \log D^{1/5}$$

$$4 \log A + \frac{1}{8} \log C - \frac{\log D}{5} = \log A^4 + \log C^{1/8} - \log D^{1/5}$$
$$= \log (A^4 \cdot C^{1/8}) - \log (D^{1/5})$$
$$= \log \frac{(A^4 \cdot C^{1/8})}{(D^{1/5})}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Hallar el valor de las siguientes expresiones por logaritmos:

1) $\dfrac{8.10 \cdot 102.2 \cdot 3548 \cdot 9622}{2 \cdot .0025} =$

2) $\dfrac{2432 \cdot}{.0009} \sqrt{\dfrac{631.50}{24}} =$

3) $\sqrt[3]{\dfrac{.84^5}{18.65^4}} =$

4) $\sqrt[4]{\dfrac{2875 \cdot 74120}{1748000}} =$

5) $\dfrac{\sqrt{1985}}{.003210} =$

6) $\dfrac{(.02871)^{1/4}}{(.029)^{-2}} =$

7) $\dfrac{78.4 \cdot \sqrt[4]{12.28} \cdot (8.4)^2 \cdot .71}{23.2 \cdot \sqrt[3]{10.4} \cdot (9.2) \cdot 0.53} =$

8) $\dfrac{\sqrt[5]{915} \cdot \sqrt[3]{.0089} \cdot (84)^4}{32 \cdot \sqrt{102} \cdot 0.1} =$

9) $\left[\dfrac{3450 \cdot (.009990)^8 \cdot \sqrt[3]{129} \cdot \dfrac{1596}{6^3}}{46.78 \cdot \sqrt[4]{7821}}\right]^3 =$

10) $\sqrt[2]{\dfrac{(41.70)^5 \cdot 129.60 \cdot \sqrt[3]{10}}{14 \cdot 150 \cdot \dfrac{(25890)^2}{2}}} =$

9.7 ECUACIONES EXPONENCIALES

Definición

+ "Una ecuación exponencial es la que incluye una o varias incógnitas en un exponente, por ejemplo: $3^x=5$, $2^{x+y}=3^{2x}$." (22)

---

(22) Ridel L. Paul. "Algebra". Pag.239.

+ En otras palabras, las ecuaciones exponenciales son aquellas en - las cuáles la "incógnita" es el exponente de una cantidad.

+ Para poder resolver este tipo de ecuaciones es necesario utilizar logaritmos.

Procedimiento para Resolver una Ecuación Exponencial

+ Para resolver una ecuación exponencial :
1) Se aplican logaritmos a los dos miembros de la ecuación.
2) Se despeja la incógnita.

Ejemplos

+ Hallar el valor de "x" en las siguientes ecuaciones :

1) $8^x = 70$

Aplicando logaritmos :

$\log(8^x) = \log 70$

$x(\log 8) = \log 70$

Despejando x :

$$x = \frac{\log 70}{\log 8} = \frac{1.8451}{.9031} = 2.0431$$

Entonces :

$8^{2.0431} = 70$

2) $6^{3x-2} = 245$

Aplicando logaritmos :

$\log(6^{3x-2}) = \log 245$

$3x-2(\log 6) = \log 245$

$$3x-2 = \frac{\log 245}{\log 6} = \frac{2.3892}{.7782} = 3.0702$$

Despejando x :

$$x = \frac{3.0702 + 2}{3} = 1.6901$$

Entonces :

$6^{3(1.6901)-2} = 245$

3) $4^{3x+5} = 3^{6x-2}$

Aplicando logaritmos :

$(3x+5)(\log 4) = (6x-2)(\log 3)$

$$\frac{\log 4}{\log 3} = \frac{6x-2}{3x+5}$$

$$\frac{.6021}{.4771} = \frac{6x-2}{3x+5}$$

$1.2620\,(3x+5) = 6x-2$

$$3.7860x + 6.3100 = 6x-2$$
$$6.3100 + 2 = 6x - 3.7860x$$
$$8.31 = 2.2140x$$

Despejando x:

$$x = \frac{8.31}{2.2140} = 3.7534$$

Entonces :

$$4^{3(3.7534)+5} = 3^{6(3.7534)-2}$$

4) $75^{\frac{\log x}{2}} = 60000$

$$\log 75^{\frac{\log x}{2}} = \log 60000$$
$$\left(\frac{\log x}{2}\right)(\log 75) = \log 60000$$
$$\left(\frac{\log x}{2}\right) = \frac{\log 60000}{\log 75}$$
$$\frac{\log x}{2} = \frac{4.7782}{1.8751}$$
$$\log x = (2.5482)2 = 5.0964$$
$$x = \text{antilog } 5.0964$$
$$x = 124,800$$

Entonces :

$$75^{\frac{\log 124800}{2}} = 60000$$

5) $\dfrac{15}{600^{\log 3^{2x}-5}} = 10$

$$15 = (10)\ 600^{\log 3^{2x}-5}$$
$$\frac{15}{10} = 600^{\log 3^{2x}-5}$$
$$\log \frac{15}{10} = \log (600^{\log 3^{2x}-5})$$
$$\log \frac{15}{10} = (\log 3^{2x}-5)(\log 600)$$
$$\frac{\log 1.5}{\log 600} = \log 3^{2x}-5$$
$$\frac{\log 1.5}{\log 600} + 5 = \log 3^{2x}$$
$$\frac{\log 1.5}{\log 600} + 5 = 2x \log 3$$

$$\frac{\frac{\log 1.5}{\log 600}+5}{\log 3} = 2x$$

$$\frac{\frac{\log 1.5}{\log 600}+5}{2\log 3} = x$$

$$\frac{\frac{.1761}{2.7781}+5}{2(.4771)} = x$$

$$x = \frac{.0634 + 5}{.9542}$$

$$x = 5.3062$$

EJERCICIOS POR RESOLVER :

+ Hallar el valor de la variable "x" en los siguientes expresiones:

1) $9^{x} = 132.80$

2) $124.50^{x} = 1.1309$

3) $4^{x+2} = 7584$

4) $3^{4x+1} = 9.6550$

5) $12^{2x+1} = 900$

6) $4^{2x-1} = 5^{x+2}$

7) $3^{x-1} = 5^{1-3x}$

8) $.038^{\log(3x/2)} = 3494$

9) $\dfrac{4200}{700^{\log(3/2x)}} = 11$

10) $\dfrac{1}{13^{\log(3x/2)}} = 4200$

CAPITULO X

PROGRESIONES

10.1 DEFINICIONES

+ Sucesión, "es un conjunto ordenado de números que se deducen unos de otros mediante una regla definida". (23)
+ Términos, son los números que forman la sucesión.

Ejemplos :

1) 1,4,7,10,... es una sucesión cuya regla es que cada término se obtiene sumando 3 al término anterior.
2) 1,3,9,27,... es una sucesión cuya regla es que cada término se obtiene multiplicando por 3 el término anterior.

+ Las sucesiones que serán estudiadas en este capítulo son las progresiones, las cuáles se clasifican en :

A) Progresiones Aritméticas.
B) Progresiones Geométricas.

10.2 PROGRESIONES ARITMETICAS

10.2.1 DEFINICION

+ "Progresión Aritmética" es una sucesión en la cuál cada término después del primero, se obtiene sumando al término precedente una cantidad constante llamada diferencia común.
Se acostumbra separar cada término de la progresión aritmética mediante una coma.
+ Si se considera la siguiente sucesión :

$$s = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots a_n$$

Para que tal sucesión sea una progresión aritmética, se debe cumplir que :

(23) Spiegel R. Murray. Ob.Cit. Pag.140.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d \\
a_4 &= a_3 + d \\
a_5 &= a_4 + d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d
\end{aligned}
$$

donde :
d = diferencia común

+ En toda progresión aritmética, la "diferencia común" se halla restándole a un término cualquiera el término anterior.

Ejemplos :

1) 1,5,9,13,17,... es una progresión aritmética cuya diferencia común es 4 porque: 17-13 = 13-9 = 9-5 = 5-1 = 4

2) 10,5,0,-5,-10,... es una progresión aritmética cuya diferencia común es -5 porque: -10-(-5) = -5-0 = 0-5 = 5-10 = -5

10.2.2 ENESIMO TERMINO

+ En términos generales se tiene que cualquier progresión aritmética está representada por :

$$\boxed{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ \dots \ a_n}$$

En donde :
a_1 = primer término
n = número del término
a_n = el enésimo término o término "n"

+ Como fue mencionado, en toda progresión aritmética cada término es igual al anterior más la diferencia común:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1+d) + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = (a_1+2d) + d = a_1 + 3d \\
a_5 &= a_4 + d = (a_1+3d) + d = a_1 + 4d
\end{aligned}
$$

Puede observarse, que cada término es igual al primer término de la progresión (a_1) más tantas veces la diferencia común (d) como términos le preceden.

+ Como esta ley se cumple para todos los términos se tiene que :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

El "enésimo término" de una progresión aritmética (a_n), es igual al primer término (a_1) más tantas veces la diferencia común (d) como términos le preceden (n-1).

+ A través de esta fórmula general del término enésimo, puede obtenerse cualquier término de una progresión aritmética.

Ejemplos :

1) Hallar el 10º término de la progresión aritmética : 2,5, 8,1 ...

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ n &= 10 \\ a_n &= a_{10} \\ d &= 5-2 = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_{10} &= 2 + (10-1)3 \\ a_{10} &= 29 \end{aligned}$$

2) Hallar el 25º término de la progresión aritmética: $-\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \ldots$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{3}{5} \\ n &= 25 \\ a_n &= a_{25} \\ d &= \frac{3}{10} - \frac{(-3)}{5} = \frac{3+6}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_{25} &= -\frac{3}{5} + (25-1)\frac{9}{10} \\ a_{25} &= -\frac{3}{5} + \frac{216}{10} = \frac{-6+216}{10} = \frac{210}{10} \\ a_{25} &= 21 \end{aligned}$$

+ De la fórmula del enésimo término, pueden deducirse las fórmulas del primer término, de la diferencia común y del número de términos.

Fórmula del Primer Término :

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ a_n - (n-1)d &= a_1 \end{aligned} \qquad \boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$$

Fórmula de la Diferencia Común :

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ a_n-a_1 &= (n-1)d \\ \frac{a_n-a_1}{(n-1)} &= d \end{aligned} \qquad \boxed{d = \frac{a_n - a_1}{(n-1)}}$$

Fórmula del Número de Términos :

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ a_n-a_1 &= (n-1)d \\ a_n-a_1 &= nd-d \\ \frac{a_n-a_1+d}{d} &= n \end{aligned} \qquad \boxed{n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}}$$

10.2.3 SUMAS PARCIALES DE TERMINOS

+ Aun y cuando una progresión aritmética es infinita, a menudo es necesario encontrar la suma de algún número finito de sus términos.
  La fórmula para tal efecto está basada en lo siguiente :

Términos Equidistantes

+ En toda progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes (localizados a la misma distancia) de los extremos, es igual a la suma de dichos extremos.
  Sea la progresión aritmética :

$$a_1 \underbrace{\quad \dots \quad}_{n \text{ términos}} a_p \dots a_q \underbrace{\quad \dots \quad}_{n \text{ términos}} a_n$$

Supóngase que entre a_1 y a_p hay "n" términos y entre a_q y a_n hay también "n" términos, entonces a_p y a_q son términos equidistantes de los extremos: a_1 y a_n.

+ Según lo expresado anteriormente, se busca demostrar que :

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

- Habiendo "n" términos entre a_1 y a_p, al término a_p le preceden n+1 términos (contando a_1) ; entonces, puede decirse que según la fórmula del enésimo término :

$$a_p = a_1 + (n+1)d \qquad \text{(a)}$$

- Usando la misma lógica, habiendo n términos entre a_q y a_n, se tiene que :

$$a_n = a_q + (n+1)d \qquad \text{(b)}$$

- Restando (b) de (a), se obtiene :

$$\begin{array}{r} a_p = a_1 + (n+1)d \\ -a_n = -a_q - (n+1)d \\ \hline a_p - a_n = a_1 - a_q \end{array}$$

- Pasando a_q al primer miembro de la igualdad y a_n al segundo, se comprueba que :

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

Fórmula de la Suma de "n" Términos de una Progresión Aritmética

+ Para obtenerla :
  - Sea la progresión aritmética :

$$a_1, a_b, a_c \;\ldots\ldots\; a_l, a_m, a_n$$

  - Designando la suma de "n" términos de esta progresión con la letra "S_n", se tiene :

$$S_n = a_1 + a_b + a_c \;\ldots\ldots\; a_l + a_m + a_n$$

  Expresión que es lo mismo que :

$$S_n = a_n + a_m + a_l \;\ldots\ldots\; a_c + a_b + a_1$$

  - Sumando estas dos igualdades se obtiene :

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_b+a_m)+(a_c+a_l), \ldots\ldots +(a_l+a_c)+(a_m+a_b)+(a_n+a_1)$$

  - Sin embargo, todos estos binomios son iguales a: (a_1+a_n) en virtud de que se ha demostrado que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos ($a_p+a_q = a_1+a_n$).
  - Ahora, como hay tantos binomios como términos (n) tiene la progresión, se obtiene que :

$$2S_n = n(a_1+a_n)$$

  - Y de aquí se puede concluir entonces que la "fórmula general" para obtener la suma de "n" términos de una progresión es :

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)}$$

  Donde:
  - S_n = suma de "n" términos de una progresión aritmética.
  - n = número de términos a sumar de la progresión.
  - a_1 = primer término a sumar de la progresión.
  - a_n = último término a sumar de la progresión.

+ Si en lugar de conocer el primero y último términos a sumar, se conociera el primer término y la diferencia común, la fórmula por aplicar sería la que se obtiene al sustituir la fórmula del enésimo término : $a_n = a_1 + (n-1)d$, en la fórmula general :

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\ (a_1+(a_1+(n-1)d))$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\ (\ 2a_1+(n-1)d\ )}$$

Ejemplos :

1) Hallar la suma de los 59 primeros términos de la progresión aritmética que tiene como primer término $\frac{3}{4}$ y como 19º término $\frac{57}{4}$.

$a_1 = \frac{3}{4}$ $\qquad S_{19} = \frac{n}{2}\ (a_1+a_n)$

$n = 19$ $\qquad S_{19} = \frac{19}{2}\ (\frac{3}{4} + \frac{57}{4})$

$a_{19} = \frac{57}{4}$ $\qquad S_{19} = \frac{19}{2} \cdot \frac{60}{4} = \frac{1140}{8} = \frac{285}{2}$

2) Hallar la suma de los 59 primeros términos de la progresión aritmética: 11, 1, -9, ...

$n = 59$ $\qquad S_{59} = \frac{n}{2}\ (2a_1+(n-1)d)$

$a_1 = 11$

$d = 1-11 = -10$ $\qquad S_{59} = \frac{59}{2}\ (2(11)+(59-1)-10)$

$$S_{59} = \frac{59}{2}\ (22-580)$$

$$S_{59} = \frac{59}{2}\ (-558)$$

$$S_{59} = \frac{-32922}{2} = -16461$$

10.2.4 INTERPOLACION

+ Se llaman "medios aritméticos" a los términos de una progresión aritmética que se encuentran entre el primero y el último término de la misma.

  Ejemplo :

  En la progresión aritmética: 4,6,8,10,12,14, los términos 6,8,10,12, son medios aritméticos.

+ Interpolar medios aritméticos entre dos números se refiere a formar una progresión, cuyos extremos sean los dos números dados.

+ Para obtener los medios aritméticos, basta con sumar al primer término la diferencia común , sumar al término obtenido, de nuevo la diferencia común ... y así sucesivamente.

+ Dados el primero y último términos de la progresión aritmética, para obtener la diferencia común, se utiliza la fórmula deducida anteriormente :

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{n-1}}$$

Ejemplos :

1) Interpolar 4 medios aritméticos entre 12 y -8.

12 y -8 son los extremos de la progresión.

La diferencia común es :

$$d = \frac{a_n - a_1}{(n-1)} = \frac{-8-12}{6-1} = \frac{-20}{5} = -4$$

Y los términos buscados se obtienen sumando esta diferencia común al término precedente a partir del primero :

$a_1 = 12$ $\qquad$ $a_4 = 4-4 = 0$
$a_2 = 12-4 = 8$ $\qquad$ $a_5 = 0-4 = -4$
$a_3 = 8-4 = 4$ $\qquad$ $a_6 = -4-4 = -8$

La progresión resultante es : 12,8,4,0,-4,-8

2) Determinar la progresión que tiene como primer término 125 y como último 150, si se sabe que la progresión tiene 11 términos.

$a_1 = 125$
$a_n = 150$
$n = 11$

La diferencia común es :

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{150-125}{11-1} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Entonces:

$a_1 = 125$
$a_2 = 125 + \frac{5}{2} = \frac{255}{2}$
$a_3 = \frac{255}{2} + \frac{5}{2} = \frac{260}{2} = 130$

y así sucesivamente.

La progresión buscada es :

$125, \frac{255}{2}, 130, \frac{265}{2}, 135, \frac{275}{2}, 140, \frac{285}{2}, 145, \frac{295}{2}, 150$

10.2.5 APLICACIONES

+ Resumiendo los conceptos de progresiones aritméticas explicados hasta ahora, se cuenta con las siguientes fórmulas :

Enésimo Término :

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Primer Término :

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$$

Diferencia Común :

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{(n-1)}}$$

Número de Términos :

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}}$$

Suma de "n" Términos:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$ Cuando se conoce: a_1 y a_n.

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$ Cuando se conoce: a_1 y d.

+ A continuación se presentarán problemas elementales de tipo administrativo en donde se aplican los conceptos explicados en esta primera parte del presente capítulo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1) El precio de 10 kgs. de cocoa para una fábrica de chocolates, -

sube a razón de $1,100 cada mes. El proveedor garantiza que mantendrá este incremento gradual por 8 años. El gerente de compras desea saber, suponiendo que el consumo de esta materia prima permanezca constante, cuál será el precio de la misma dentro de un año si el precio actual es de $6600 (por 10 kgs) y cuánto habrá gastado la compañía en cocoa en 6 años.

$a_1 = 6600$
$d = 1100$
a_{12} = precio en un año
S_{72} = suma en 6 años $(6 \cdot 12 = 72)$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{12} = 6600 + (12-1)1100 = \$18,700$$
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$
$$S_{72} = \frac{72}{2}(2(6600) + (72-1)1100)$$
$$S_{72} = 36\ (13200 + 78100) = \$3'286,800$$

2) Una fábrica produjo el primer año de trabajo 500,000 toneladas de cemento y el último 1'900,000 toneladas del mismo. Si se sabe que en cada año se produjeron 200,000 toneladas más que el anterior, ¿Cuántos años estuvo funcionando esta fábrica?.

$a_1 = 500000$
$a_n = 1900000$
$d = 200000$
$n = ?$

$$n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}$$
$$n = \frac{1900000 - 500000 + 200000}{200000}$$
$$n = 8 \text{ años}$$

3) El Sr. Alfonso Urquiza ha decidido poner un restaurante. Este ha ido incrementando sus ventas en progresión aritmética mes con mes desde que arrancó. Si en junio vendió 2'700,000 y en diciembre vendió 4'800,000 , ¿Cuánto vendió cada mes de enero a diciembre?

junio : $n=6$ $a_6 = 27$ (en cientos de miles de pesos)
diciembre : $n=12$ $a_{12} = 48$ (en cientos de miles de pesos)

Aplicando la fórmula general : $a_n = a_1 + (n-1)d$:

$a_6 = a_1 + (6-1)d$ $\quad a_{12} = a_1 + (12-1)d$
$27 = a_1 + 5d$ (a) $\quad a_{12} = a_1 + 11d$ (b)

Para encontrar a_1 y d, se resuelve un sistema formado por estas dos ecuaciones.

$a_1 = 27 - 5d$
$a_1 = 48 - 11d$

Resolviendo por igualación :

$$27-5d = 48-11d \qquad a_1 = 27-5d$$
$$-21 = -6d \qquad a_1 = 27-5(3.5)$$
$$d = \frac{-21}{-6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5 \qquad a_1 = 27-17.5 = 9.5$$

La progresión quedaría :

$a_1 = 9.5$
$a_2 = 9.5+3.5 = 13$
$a_3 = 13+3.5 = 16.5$

Y así sucesivamente hasta a_{12}, lo cuál significa que los montos vendidos de enero a diciembre fueron:

950,000, 1'300,000, 1'650,000, 2'000,000, 2'350,000, 2'700,000, 3'050,000, 3'400,000, 3'750,000, 4'100,000, 4'450,000, 4'800,000

4) El gerente de una empresa desea ampliar su capacidad de producción para un nuevo proyecto con una duración de 43 meses. Ha preguntado al departamento de finanzas si es posible disponer de \$50,000 el primer mes y de un incremento del 40% sobre esta cantidad inicial, cada mes. El departamento de finanzas desea saber qué cantidad implicaría en total este proyecto y cuál es la cantidad a entregar al gerente en el mes 43.

$a_1 = 50000$
$d = 50000(.40) = 20000$
$n = 43$
$a_{43} = ?$
$S_{43} = ?$

$a_n = a_1+(n-1)d$
$a_{43} = 50000+(42)20000 = \$890,000$
$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$
$S_{43} = \frac{43}{2}(2(50000)+42(20000))$
$S_{43} = 21.5(100000+840000)$
$S_{43} = \$20'210,000$

5) El departamento contable de una compañía "Beta" realizó un estudio sobre los estímulos económicos que ha otorgado a los empleados cumplidos, durante los últimos 10 años.
Si los resultados obtenidos indican que durante dichos 10 años ha entregado \$71,500 y los estímulos durante el 9º año fueron 3 veces más que durante el tercer año, se pregunta :

a) ¿ Qué estímulos entregó el primer año ?
b) ¿ Cuál es la diferencia de estímulos entre dos años consecutivos ?
c) ¿ Qué estímulos entregó el 6º año ?
d) ¿ Qué estimulos entregará en el 11º año ?

Los estímulos están en progresión aritmética.

$n = 10$ $\qquad$ $a_1 = ?$

$S_{10} = 71500$ $\qquad$ $d = ?$

$a_9 = 3a_3$ $\qquad$ $a_6 = ?$

$a_{11} = ?$

Para resolver :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

$$71500 = \frac{10}{2}(2a_1+9d)$$

$$71500 = 5\ (2a_1+9d)$$

$$\frac{71500}{5} = 2a_1+9d$$

$$14300 = 2a_1+9d \qquad (1)$$

Y : $a_9 = 3a_3$

Pero : $a_9 = a_1+(9-1)d = a_1+8d$

$a_3 = a_1+(3-1)d = a_1+2d$

Entonces: $a_9 = 3a_3$

$$a_1+8d = 3(a_1+2d)$$

$$a_1+8d = 3a_1+6d$$

$$2a_1 = 2d$$

$$a_1 = d \qquad (2)$$

Formando con (1) y (2) un sistema de ecuaciones se puede obtener a_1 y d :

$$14300 = 2a_1+9d \qquad (1)$$

$$a_1 = d \qquad (2)$$

Por sustitución :

$$14300 = 2a_1+9a_1$$

$$14300 = 11a_1$$

$$a_1 = \frac{14300}{11} = 1300$$

Y como : $a_1 = d$

$$d = 1300$$

Entonces :

a) Estímulos entregados el 1er. año = \$1,300

b) Diferencia de estímulos en 2 años consecutivos = \$1,300

c) Estímulos entregados el 6º año :

$$a_6 = a_1+(6-1)d = 1300+5(1300) = \$\ 7,800$$

d) Estímulos que se entregarán el 11º año :

$$a_{11} = a_1+(11-1)d = 1300+10(1300) = \$14,300$$

PROBLEMAS POR RESOLVER

1) Una empresa imprenta desea comprar una colección de 10 libros antiguos que fueron de las primeras ediciones de la compañía; el vendedor le pide por cada uno de ellos \$300 más que por el anterior. Si se sabe que el libro número 10 les cuesta \$5,000, encuentre cuánto les cuestan los primeros cuatro libros y cuál sería el importe total de la compra.

2) Una empresa "x" tiene actualmente un préstamo de Fogain que puede ser pagado en 5 años dando $20,000 el primer mes y en cada mes posterior $30,000 más que en el precedente. ¿Cuál es el importe a pagar?

3) Un obrero desea aportar a la caja de ahorros una cantidad mensual de su sueldo. El primer mes aporta $500, el segundo $800, el tercero $1,100 y así sucesivamente. A los dos años y ocho meses este obrero decide dejar el trabajo y desea ver qué cantidad ha metido en total a la caja de ahorros para compararla con la cantidad que le regresarán y ver cuánto ganó de intereses.

4) Las ventas anuales del primer año de la miscelanea "De todo", fueron de $1'800,000; después de 11 años las ventas anuales de la empresa ascienden a $6'800,000; si las ventas están en progresión aritmética. ¿ Cuánto más vendió cada año en relación con el anterior ?

5) La máquina número 35 del departamento de empaque de la compañía "La Chatarra" fue comprada hace 5 años y para entonces ya era vieja. El último año empacó 3'000,000 unidades de producto. Si cada año logró empacar 300,000 unidades menos que en el anterior por descomposturas cada vez más frecuentes, ¿Cuántas unidades empacaba cuando se compró?.

6) Las ganancias de 5 años de una papelería están en progresión aritmética; el primer año ganó $2'300,000 y el tercer año $4'802,000. ¿ Cuáles fueron las ganancias en los años 2,3 y 4 ?

7) Las pérdidas del mes de septiembre de la compañía de sal "La Salada", suman $-117,000. Si en el noveno mes del año obtuvo 29 veces lo que obtuvo en el segundo mes, determine : ¿ Cuánto se obtuvo el primer mes ? ¿ Cuánto el quinto mes ? ¿ Cuánto más se tuvo cada mes en relación al anterior ? ¿ Cuánto suma lo obtenido en el tercer mes y cuarto mes ?

8) Al personal de la compañía "Y" se le paga su sueldo diario, y en progresión aritmética del día primero al día último del mes. Un obrero tenía en su cartera $4,000 como resultado de no comprar nada con su sueldo diario la suma de los primeros 8 días del mes. Si la suma de lo que tenía el día 7 y el día 3 era también $4,000 entonces: ¿Cuánto era su haber el primer día del mes ?, ¿Cuánto más se le paga cada día del mes en relación con el anterior?, ¿ Cuánto junta con lo que ganó el día 4 y lo que ganó el día 8? , ¿Cuánto se le paga el día 20?.

9) El departamento de finanzas de la compañía "Omega" realizó un estudio respecto a los estímulos económicos que ha otorgado a sus empleados más sobresalientes en los últimos 10 años. Los resultados indican que durante el décimo año entregó $1'175,000 y durante el noveno año entregó $175,000 más que durante el segundo año. Considerando que los mencionados estímulos forman una pro -

gresión aritmética, encontrar: ¿ Qué cantidad se entregó el sexto año por concepto de estímulos ? ¿ Qué cantidad se entregará durante el quinceavo año suponiendo que las condiciones de los años anteriores sigan prevaleciendo ? ¿ Qué cantidad se entregó durante los primeros 5 años ?

10) El Sr. Gómez realiza un estudio respecto a sus ingresos personales que ha obtenido durante los últimos 8 años y observa que éstos forman una progresión aritmética. Si durante dichos 8 años el Sr. Gómez ha ganado un total de $5'240,000 y el séptimo año ganó $680,000 más que el tercer año. Ayude al Sr. Gómez a encontrar: ¿ Cuánto ganó el quinto año ? ¿ Cuál fue la diferencia de ingresos entre el séptimo y el cuarto año ? ¿ Cuánto ganó durante los últimos 4 años ?.

10.3 PROGRESIONES GEOMETRICAS

10.3.1 DEFINICION

+ Una "Progresión Geométrica" es una sucesión en la cuál, cada término después del primero se obtiene multiplicando el término precedente por una cantidad llamada razón común.
  Se acostumbra separar cada término de una progresión geométrica mediante "dos puntos" : ":".

+ Para que una sucesión sea una progresión geométrica, se debe cumplir que :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ a_4 &= a_3 r \\ a_5 &= a_4 r \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} r \end{aligned}$$

donde :
r = razón común

+ En toda progresión geométrica, la razón común se obtiene dividiendo a cualquiera de sus términos entre el anterior.

  Ejemplos :

  1) $4:12:36:108:\ldots$ es una progresión geométrica cuya razón común es 3 porque:
  $$\frac{108}{36} = \frac{36}{12} = \frac{12}{4} = 3$$

  2) $4:2:1:\ \ldots$ es una progresión geométrica cuya razón común es $\frac{1}{2}$ porque:
  $$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

10.3.2 ENESIMO TERMINO

+ Cualquier progresión geométrica puede representarse por:

$$\boxed{a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : \ \ldots\ a_n}$$

En donde :
a_1 = primer término
n = número del término
a_n = enésimo término

+ Como fue mencionado, en toda progresión geométrica cada término es igual al anterior multiplicado por la razón común :

$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_2 r = (a_1 r)r = ar^2$$
$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)r = ar^3$$
$$a_5 = a_4 r = (a_1 r^3)r = ar^4 \quad \ldots$$

Se observa que cada término es igual al primero (a_1) multiplicado por la razón común (r) elevada a una potencia igual al número de términos que le preceden (n-1).

+ Ahora bien, como al término "a_n", le preceden "n-1" términos, se deduce que la fórmula general del enésimo término es :

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

Ejemplos :

1) Hallar el 11º término de la progresión geométrica 8:4:2...

$a_1 = 8$

$r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$n = 11$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_{11} = 8(\frac{1}{2})^{10}$

$a_{11} = .0078$

2) Hallar el 6º término de la progresión geométrica $\frac{3}{4}:\frac{-1}{2}:\frac{1}{3}: \ldots$

$a_1 = \frac{3}{4}$

$r = \frac{-1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_6 = \frac{3}{4}(\frac{-2}{3})^5 = \frac{3}{4}(-1317)$

$a_6 = -.0988$

Nota :
Cuando la razón común es negativa, los términos de la progresión geométrica son alternadamente positivos y negativos :
- si "n-1" es par, el resultado tendrá signo positivo
- si "n-1" es impar, el resultado tendrá signo negativo.

+ Despejando la fórmula del enésimo término, pueden deducirse las fórmulas del primer término y de la razón común :

Fórmula del Primer Término :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{r^{n-1}} = a_1$$

$$\boxed{\frac{a_n}{r^{n-1}}}$$

Fórmula de la Razón Común :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = r$$

$$\boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}}$$

10.3.3 SUMAS PARCIALES DE TERMINOS

+ Sea la progresión geométrica :

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : \ldots\ a_n$$

cuya razón común es r.

+ Designando la suma de "n" términos de esta progresión por "S_n", se tiene :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ a_n$$

Y multiplicando ambos miembros por la razón :

$$S_n r = a_1 r + a_2 r + a_3 r + a_4 r + \ldots a_n r$$

+ Ahora, si se resta la primera igualdad de la segunda se obtiene:

$$\begin{array}{rl} S_n r & = a_1 r + a_2 r + a_3 r + a_4 r + \ldots a_n r \\ - S_n & = -a_1 \ -a_2 \ -a_3 \ -a_4 \ \ldots -a_n r \\ \hline S_n r - S_n & = a_n r - a_1 \end{array}$$

Al efectuar la resta se tiene presente que cada término multi - plicado por la razón común da el siguiente. Así :

$a_1 r = a_2$ y este a_2 se anula con $-a_2$
$a_2 r = a_3$ y este a_3 se anula con $-a_3$
$a_3 r = a_4$ y este a_4 se anula con $-a_4$

y así sucesivamente.

Entonces en la primera igualdad queda solo "$a_n r$" y en la segunda solo "$-a_1$", y de aquí resulta $a_n r - a_1$.

+ Simplificando :

$$S_n r - S_n = a_{nr} - a_1$$
$$S_n(r-1) = a_n r - a_1$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}}$$

Donde:

S_n = suma de "n" términos de una progresión geométrica.
a_1 = primer término a sumar de la progresión.
a_n = último término a sumar de la progresión.
r = razón común.

+ En ocasiones, no se conoce el enésimo término o término "n", entonces se sustituirá :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

en : $$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}$$

Quedando : $$S_n = \frac{(a_1 r^{n-1})(r) - a_1}{r-1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}}$$

Ejemplos :

1) Hallar la suma de los 12 primeros términos de la progresión geométrica: $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{4}{2}$; $13\frac{1}{2}$; ...

$a_1 = \frac{1}{2}$
$n = 12$
$r = 1\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 3$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}$$

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}(3)^{12} - \frac{1}{2}}{3-1} = \frac{\frac{1}{2}(531441) - \frac{1}{2}}{2}$$

$$S_n = \frac{265720}{2} = 132860$$

2) Hallar la suma de los 7 primeros términos de la progresión geométrica : 4:-8:16: ...

$a_1 = 4$
$r = \frac{-8}{4} = -2$
$n = 7$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}$$
$$S_7 = \frac{4(-2)^7-4}{-3} = \frac{4(-128)-4}{-3}$$
$$S_7 = \frac{-516}{-3} = 172$$

10.3.4 INTERPOLACION

+ Interpolar medios geométricos consiste en formar una progresión geométrica cuyos extremos son dos números conocidos.

+ Para lograrlo basta con hallarla razón común a través de la fórmula obtenida para el efecto y multiplicar el primer término por ella para obtener el segundo término, éste a su vez multiplicado por la razón común dará el tercer término y así sucesivamente.

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Donde :

n = número de términos de la progresión geométrica, tomando en cuenta el primero y último términos dados.

Ejemplos :

1) Interpolar dos medios en la progresión geométrica cuyos primero y último términos son : 5 y 625.

$a_1 = 5$
$a_n = 625$
$n = 4$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$
$$r = \sqrt[4-1]{\frac{625}{5}} \quad \sqrt[3]{125} = 5$$

La progresión quedaría :

$a_1 = 5$
$a_2 = 5 \cdot 5 = 25$
$a_3 = 25 \cdot 5 = 125$
$a_4 = 125 \cdot 5 = 625$

5:25:125:625

2) Determinar la progresión cuyo primer término es 8 y cuyo octavo término es $\frac{1}{16}$.

$a_1 = 8$

$a_n = \frac{1}{16}$

$n = 8$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$r = \sqrt[7]{\frac{\frac{1}{16}}{8}} = \sqrt[7]{.0078} = .5$$

Y la progresión resultaría :

$a_1 = 8$

$a_2 = 8 \cdot .5 = 4$

$a_3 = 4 \cdot .5 = 2$ ... hasta quedar:

8;4;2;.5;.25;.125;.0625: ...

10.3.5 APLICACIONES

+ Resumiendo los conceptos de progresiones geométricas explicados hasta ahora, se cuenta con los siguientes fórmulas :

Enésimo Término :

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

Primer Término :

$$\boxed{a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}}$$

Razón Común :

$$\boxed{r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}}$$

Suma de "n" Términos :

$$\boxed{S_n = \frac{a_n r - a_1}{r-1}}$$ Cuando se conoce: a_1 y a_n.

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}}$$ Cuando se conoce: a_1 y n.

PROBLEMAS RESUELTOS

1) El costo de impresión del material punto de venta para los cigarros "x" es de $21,870 por cada 10 cartelones. Sin embargo, a medida que la cantidad pedida aumenta, los costos unitarios van reduciéndose, de modo que por cada 10 cartelones más el costo es de 1/3 del último precio. ¿ Cuál es el costo de producción de los cartelones si el cliente decide ordenar 80 ?.

$a_1 = 21870$

$r = \frac{1}{3}$

$n = 8$

$a_8 = ?$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_8 = 21870(\frac{1}{3})^{8-1}$

$a_8 = 21870(.00046)$

$a_8 = \$10$

2) Un hombre ha decidido poner un negocio; después de haber hecho un estudio de mercado y proyectar sus ventas y utilidades, determina que el primer año espera tener ventas por $500,000, y como resultado de reinvertir las utilidades para expander el negocio, espera que cada año posterior venda el doble del año que le precede. ¿ Cuánto espera vender el décimo año ? ¿ Cuál será la suma de las ventas durante estos primeros 10 años del negocio ?

$a_1 = 500000$

$r = 2$

$n = 10$

$a_{10} = ?$

$S_{10} = ?$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_{10} = 500000(2)^9 = 500000(512)$

$a_{10} = \$256'000,000$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{256000000(2)^{10} - 500000}{2-1}$$

$S_{10} = \$262,143,500,000$

3) Una empresa ha decidido meter parte de sus utilidades a la Bolsa de Valores, en 6 meses ha ganado $36'400,000; si cada mes ha ganado la tercera parte de lo que ganó el mes anterior , ¿ Cuánto ganó el primer mes ?.

$S_6 = 36'400000$

$r = \frac{1}{3}$

$a_1 = ?$

$n = 6$

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r-1}$$

Despejando a_1 :

$S_n(r-1) = a_1(r^n-1)$

$$a_1 = \frac{S_n(r-1)}{r^n-1}$$

$$a_1 = \frac{36'400000(\frac{1}{3} - 1)}{(\frac{1}{3})^6 - 1}$$

$$a_1 = \frac{36'400000(-\frac{2}{3})}{\frac{-728}{729}} = \frac{24'266667}{-.9986}$$

$$a_1 = \$\ 24'300,000$$

4) La distribución de las acciones de una empresa está en progresión geométrica. Si el porcentaje de lo que tiene el socio número 2 por lo que tiene el socio número 4 es de 16%, ¿ Cuánto tiene el socio número 3 ?

$a_2 \cdot a_4 = .16$

$a_3 = ?$

$$a_n = a_1 r^n$$
$$a_2 = a_1 r$$
$$a_4 = a_1 r^3$$
$$(a_1 r)(a_1 r^3) = .16$$
$$(a_1^2 r^4) = .16$$

Pero si : $(a_1 r^2)^2 = (a_1^2 r^4)$

y : $(a_1 r^2) = a_3$

Luego :

$$a_3^2 = (a_1^2 r^4) = .16$$
$$a_3 = \sqrt[2]{.16} = .04$$
$$a_3 = 4\%$$

5) Los intereses de un crédito otorgado por un banco van en progresión geométrica. Si el producto del interés cobrado en el tercer año por el interés cobrado en el quinto año es igual a 27.04% , ¿ Cuál fue el interés cobrado el cuarto año ?

$a_3 \cdot a_5 = .2704$

$a_4 = ?$

$$a_3 = a_1 r^2$$
$$a_5 = a_1 r^4$$
$$(a_1 r^2)(a_1 r^4) = .2704$$
$$(a_1^2 r^6) = .2704$$

Pero si : $(a_1 r^3)^2 = (a_1^2 r^6)$

y : $(a_1 r^3) = a_4$

Luego :

$$a_4^2 = (a_1^2 r^6) = .2704$$
$$a_4 = \sqrt[2]{.2704} = .52$$
$$a_4 = 52\%$$

PROBLEMAS POR RESOLVER

1) Una colección de cuadros antiguos está formada por 5 pinturas. - Cada una de ellas vale el doble que la anterior. Si el quinto y último cuadro cuesta $100,000, ¿ Cuánto vale cada cuadro y cuánto la colección completa ?

2) Una persona tiene acciones en una pequeña empresa. Como la compañía está dando un rendimiento sobre la inversión cada vez mayor, esta persona ha decidido que invertirá cada medio año el doble - de lo que invirtió el semestre anterior. Si el primer semestre - invierte $20,000, ¿ Cuánto invertira en el tercer año y cuánto - llevará invertido en total a finales de ese año ?.

3) Un trabajador pide un préstamo a su patrón y éste no le cobra interés alguno; además le permite le pague cada mes las dos terceras partes de lo que le pagó el mes anterior. Si en los primeros 5 meses le ha pagado un total de $21,100, ¿ Cuánto le pagó - el primer mes ?

4) Las comisiones de un vendedor están en progresión geométrica, según el número de unidades vendidas. Si la mitad del producto - del porcentaje que gana por vender 3000 unidades por el porcentaje que gana por vender 5000 unidades es igual a 1/1152, ¿ Qué porcentaje ganará si vende 4000 unidades ?

5) Los abonos para comprar un coche van en progresión geométrica; - si el coche se pagará en 5 pagos y se sabe que el quinto pago es de $200,000 y el triple del tercer pago es de $600,000, ¿ A cuánto asciende el primer pago ?

6) Una empresa ha metido parte de sus utilidades a la Bolsa de Valores; en 6 meses, ha ganado $36'400,000; si cada mes ha ganado la tercera parte de lo que ganó el mes anterior, ¿ Cuánto ganó el - primer mes ?

7) La población de la ciudad de México va aumentando en progresión geométrica; de 24,300 habitantes que eran en 1981 a 36,400 habitantes en 1986. ¿ Cuál es la razón o tasa de crecimiento por año ?

8) El saldo de la caja chica de una empresa está en progresión geométrica; si los saldos de los días uno, dos y tres del mes son : 160,000 , 40,000 , 10,000 , y se sigue sacando igual proporción - del saldo de cada día, ¿ Cuál es el saldo del octavo día ?

9) Los objetivos de ventas de la empresa "X" este año establecen - que los meses uno, dos y tres se venda $25,000 , $50,000 y $100,000; siguiendo la misma tendencia, ¿ Cuánto se llevará vendido para el décimo mes ?.

10) La producción de una fábrica de yeso se incrementa cada dos años en progresión geométrica; si se sabe que el doble de los que se produjo en el año cuatro por lo que se produjo en el año ocho es igual a 32,000,000 toneladas, ¿ Cuánto se produjo en el año 3 ?

CAPITULO XI

MATRICES

11.1 DEFINICION DE MATRIZ

+ Se llama "Matriz" al conjunto ordenado de cantidades dispuestas en "m" renglones y "n" columnas.
+ Las cantidades que forman una matriz pueden ser números, operaciones o funciones, sin embargo, el presente capítulo se referirá únicamente al estudio de matrices cuyas cantidades son números.

11.2 NOTACION

Orden de una Matriz

+ El orden de una matriz indica el número de renglones y el número de columnas que tiene dicha matriz.
+ El orden de una matriz se acostumbra representar por :

$$\boxed{(m,n)}$$

Donde :

m = número de renglones de la matriz .
n = número de columnas de la matriz.

Representación de una Matriz

+ La forma de representar una matriz es por medio de una letra mayúscula (A,B,C,...) escribiendo abajo de la misma el orden de la matriz.

$$\boxed{A_{(m,n)}}$$

+ La matriz misma puede representarse de cualquiera de las siguientes tres formas, siendo la primera la más común de ellas.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Corchetes   Barras   Llaves

Ejemplos :

1) $A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden (2,3).

2) $B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden (3,3).

3) $A_{(1,4)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden (1,4).

4) $C_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden (2,1).

+ Obsérvese que si se multiplica el número de renglones (m) por el número de columnas (n) indicados en el orden de la matriz, se obtiene el número de elementos que constituyen la matriz.

Representación de los Elementos de una Matriz

+ Cada elemento de una matriz puede ser representado por el símbolo:

$$\boxed{a_{(i,j)}}$$

Donde:
i = el renglón en que está localizado el elemento.
j = la columna en que está localizado el elemento.

Ejemplo :

Representar algunos elementos de la siguiente matriz :

$$A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \end{bmatrix}$$

$a_{1,1}$ = elemento del primer renglón y la primera columna.
$a_{1,3}$ = elemento del primer renglón y la tercera columna.
$a_{2,1}$ = elemento del segundo renglón y la primera columna.
$a_{2,4}$ = elemento del segundo renglón y la cuarta columna.

Igualdad de Matrices

+ Dos matrices "A" y "B" son iguales sí y solo sí:

a) Son del mismo orden.

$$A_{(m,n)} = B_{(p,q)}$$

Si : m=p y n=q

b) Los elementos que ocupan el mismo lugar en las dos matrices dadas son iguales.

$$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \qquad B_{(3,2)} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

A = B Solo si :

$$a_{1,1} = b_{1,1} \qquad a_{1,2} = b_{1,2}$$
$$a_{2,1} = b_{2,1} \qquad a_{2,2} = b_{2,2}$$
$$a_{3,1} = b_{3,1} \qquad a_{3,2} = b_{3,2}$$

Ejemplo :

$$A_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & y \\ -4 & x & 0 \end{bmatrix} \qquad B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A = B si : $x=2$, $y=-1$

Tablas de Doble Entrada

+ Las matrices son una herramienta muy adecuada para representar y resumir información o datos de un problema que relaciona dos variables.

  En estos casos las matrices conforman lo que se suele llamar "Tablas de Doble Entrada".

  Ejemplo :

  - Un fabricante de ropa produce pantalones, faldas y chaquetas de piel en tallas chica, mediana, grande y extragrande. Las ventas de la sucursal 2 pueden representarse a través de una tabla de doble entrada que es una matriz de orden (4,3), la cuál muestra cómo las ventas de cada tipo de producto se distribuyeron entre las diferentes tallas y cómo las ventas de cada talla se distribuyeron entre los diferentes tipos de artículos.

Ventas Sucursal 2

	Pantalones	Faldas	Chaquetas
Chico	30	40	54
Mediana	85	92	70
Grande	52	5	63
Extra-Grande	7	2	18

$$A_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 54 \\ 85 & 92 & 70 \\ 52 & 5 & 63 \\ 7 & 2 & 18 \end{bmatrix}$$

11.3 TIPOS DE MATRICES

+ Matriz Renglón

Es aquella formada por un solo renglón y "n" columnas, es decir que su orden es (1,n).

Ejemplos :

$$A_{(1,5)} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \qquad A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

+ Matriz Columna

Es aquella formada por "m" renglones y una sola columna, es decir que su orden es (m,1)

Ejemplos :

$$A_{(4,1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

+ Matriz Rectangular

Es aquella en que el número de renglones y el número de columnas son diferentes, es decir $m \neq n$.

Ejemplos :

$$A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & -9 & 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

+ Matriz Cuadrada

Es aquella en la cuál, el número de renglones y el número de columnas son iguales, es decir $m = n$.

Ejemplos :

$$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -9 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La "Diagonal Principal" de una matriz cuadrada está formada por aquellos elementos cuyo renglón y columna en que se encuentran localizados son iguales, es decir aquellos elementos $a_{i,j}$ en que $i = j$.

Ejemplos :

$$A_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 1 \\ 8 & -1 & -1 & -1 \\ -6 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} 3 & & & \\ & 4 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{array}$$

Matriz Cuadrada Diagonal Principal

Las matrices cuadradas pueden ser a su vez :

Matriz Diagonal :

Es una matriz cuadrada en la que los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

Ejemplos :

$$A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad :

Es una matriz cuadrada en la cuál los elementos de la diagonal principal son "unos" y los que se encuentran fuera de ella son "ceros". Se representa por la letra "I".

Ejemplos :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

+ Matriz Cero o Nula

Es aquella matriz en la cuál todos los elementos son iguales a cero.

Ejemplos :

$$A_{(4,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

+ Matriz Transpuesta

La transpuesta de una matriz "A" es aquella matriz que se obtiene de intercambiar en la matriz "A" los renglones y las columnas que tienen el mismo índice; es decir que el renglón "1" de la matriz "A" pasaría a ser la columna "1" de su matriz transpuesta, el renglón "2" de la matriz "A" pasaría a ser la columna "2" de la transpuesta de "A" y así sucesivamente.

La matriz transpuesta de "A" se simboliza por :

$$\boxed{A^t}$$

Ejemplos :

$$A_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad A^t{}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B^t_{(2,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \qquad C^t_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -1 & 4 & -7 \\ 2 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

En el caso de que $A = A^t$, se dice que se tiene una matriz simétrica.

11.4 OPERACIONES CON MATRICES

+ Las operaciones que se pueden realizar con matrices son :
  + Suma.
  + Producto.
  + Inversión.

11.4.1 SUMA

Requisitos

+ Para que la suma de dos o más matrices pueda ser efectuada, es necesario que las matrices sean del mismo orden.

Procedimiento

+ La suma de dos o más matrices se realiza sumando los elementos -- que están localizados en la misma posición en cada matriz.

Ejemplos

+ Sumar las siguientes matrices :

1) $$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+6 \\ 5-4 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 6+6 & 4+1 \\ 2+5 & 0+1 & -3+0 \\ -1+4 & -6+1 & 1-3 \\ 0+0 & 4+2 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

3) $$\begin{bmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

4) $$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} =$$ No se puede efectuar porque las matrices son de orden diferente: $(2,3) \neq (2,1)$.

5) La mercería "X" tiene 3 sucursales en la ciudad de México que venden listones (L), estambres (E) e hilos (H) de dos marcas diferentes: "W" y "Z". Las cantidades (en miles de pesos) vendidas en el mes de noviembre en cada tienda se dan en las matrices que a continuación aparecen; exprese la venta total como una sola matriz.

Sucursal 1:

	L	E	H
W	100	62	50
Z	70	80	45

Sucursal 2:

	L	E	H
W	45	30	20
Z	5	10	15

Sucursal 3:

	L	E	H
W	38	46	51
Z	60	42	12

$$\begin{bmatrix} 100 & 62 & 50 \\ 70 & 80 & 45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 45 & 30 & 20 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 38 & 46 & 51 \\ 60 & 42 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 183 & 138 & 121 \\ 135 & 132 & 72 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1) La suma de matrices es conmutativa.

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = B_{(m,n)} + A_{(m,n)}$$

2) La suma de matrices es asociativa.

$$\begin{aligned} A_{(m,n)} + B_{(m,n)} + C_{(m,n)} &= (A_{(m,n)} + B_{(m,n)}) + C_{(m,n)} \\ &= A_{(m,n)} + (B_{(m,n)} + C_{(m,n)}) \end{aligned}$$

11.4.2 PRODUCTO

+ Una matriz puede ser multiplicada por una constante o por otra matriz.

Producto de una Matriz por una Constante :

Procedimiento

+ El producto de una matriz por una constante se realiza multiplicando a cada uno de los términos de la matriz por dicha constante.

Ejemplos

+ Efectuar los siguientes productos :

1) $$-1 \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -7 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(6) & -1(5) & -1(2) \\ -1(0) & -1(-3) & -1(-7) \\ -1(-1) & -1(8) & -1(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

2) $5 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -7 \\ 9 & -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(1) & 5(3) & 5(5) & 5(-7) \\ 5(9) & 5(-5) & 5(0) & 5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 25 & -35 \\ 45 & -25 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

3) Una vez que la mercería "X" ha conocido el monto de sus ventas totales del mes de noviembre, desea estimar las del mes de diciembre en base a un aumento del 30% en virtud de que sus productos son indispensables para los adornos de navidad. Exprese la venta estimada para este mes como una matriz.

Venta Total en Noviembre

	L	E	H
W	183	138	121
Z	135	132	72

$$1.30 \begin{bmatrix} 183 & 138 & 121 \\ 135 & 132 & 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3(183) & 1.3(138) & 1.3(121) \\ 1.3(135) & 1.3(132) & 1.3(72) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 237.9 & 179.4 & 157.3 \\ 175.5 & 171.6 & 93.6 \end{bmatrix}$$

Producto de Matrices :

Requisitos

+ Para que la multiplicación de dos matrices "A" y "B" pueda ser efectuada, es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones de la segunda matriz.

$$\text{Si:} \quad \underbrace{A_{(m,n)} \cdot B_{(p,q)}}_{n=p}$$

Ejemplos :

1) Si $A_{(3,4)}$ y $B_{(4,1)}$ Si puede multiplicarse $A \cdot B$
Si $A_{(2,3)}$ y $B_{(3,2)}$ Si puede multiplicarse $A \cdot B$
Si $A_{(5,5)}$ y $B_{(5,5)}$ Si puede multiplicarse $A \cdot B$
Si $A_{(5,2)}$ y $B_{(3,3)}$ No puede multiplicarse $A \cdot B$
Si $A_{(1,2)}$ y $B_{(1,2)}$ No puede multiplicarse $A \cdot B$

Procedimiento

+ La multiplicación de 2 matrices se realiza multiplicando cada elemento de los renglones de la primera matriz por los correspondientes elementos de las columnas de la segunda matriz, sumando luego los productos resultantes.

Es decir, se multiplica el primer elemento del renglón uno de la matriz "A" por el primer elemento de la columna uno de la matriz "B"; después se multiplica el segundo elemento del renglón

uno de la matriz "A" por el segundo elemento de la columna uno de la matriz "B" y así sucesivamente los "n" elementos del primer renglón por los "n" elementos de la primera columna, efectuando al final la suma de los productos resultantes.
Se realiza el mismo procedimiento con el renglón dos de "A" por la columna dos de "B", con el renglón tres de "A" por la columna tres de "B" y así sucesivamente.

+ Como puede observarse el procedimiento anterior resulta complicado, es por ello que es conveniente valerse de la siguiente regla para multiplicar matrices :
  - Trazar líneas horizontales por cada renglón de la primera matriz.
  - Trazar líneas verticales por cada columna de la segunda matriz.
  - Donde se cruzan dichas líneas deben efectuarse los productos de los elementos correspondientes (primer elemento con primer elemento, segundo con segundo, etc.) y sumar dichos productos.
  - En símbolos :

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1,1}\,b_{1,1} + a_{1,2}\,b_{2,1} & a_{1,1}\,b_{1,2} + a_{1,2}\,b_{2,2} \\ a_{2,1}\,b_{1,1} + a_{2,2}\,b_{2,1} & a_{2,1}\,b_{1,2} + a_{2,2}\,b_{2,2} \end{bmatrix}$$

<u>Ejemplos</u>

+ Multiplicar las siguientes matrices :

1) $A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \quad : \quad \underbrace{(3,2)\cdot(2,4)}_{=}$ Si puede efectuarse el producto

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2) & 2(4) & 2(3) & 2(1) \\ -3(5) & -3(0) & -3(0) & -3(3) \\ -4(2) & -4(4) & -4(3) & -4(1) \\ 1(5) & 1(0) & 1(0) & 1(3) \\ 0(2) & 0(4) & 0(3) & 0(1) \\ 5(5) & 5(0) & 5(0) & 5(3) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4-15 & 8+0 & 6-0 & 2-9 \\ -8+5 & -16+0 & -12+0 & -4+3 \\ 0+25 & 0+0 & 0+0 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 8 & 6 & -7 \\ -3 & -16 & -12 & -1 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

2) $A_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 8 \\ 5 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \; : \; (3,\underbrace{4)\cdot(3}_{\neq},4)$ No puede efectuarse el producto porque el número de columnas de A es diferente del número de renglones de B.

$A_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$A \cdot B \; : \; (3,\underbrace{3)\cdot(3}_{=},3)$ Si puede efectuarse el producto.

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ \\ 7 & 3 & 1 \\ \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(9) & 2(5) & 2(6) \\ 1(-3) & 1(2) & 1(0) \\ -4(-4) & -4(1) & -4(3) \\ 7(9) & 7(5) & 7(6) \\ 3(-3) & 3(2) & 3(0) \\ 1(-4) & 1(1) & 1(3) \\ 5(9) & 5(5) & 5(6) \\ 0(-3) & 0(2) & 0(0) \\ 2(-4) & 2(1) & 2(3) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 18-3+6 & 10+2-4 & 12+0-12 \\ 63-9-4 & 35+6+1 & 42+0+3 \\ 45+0-8 & 25+0+2 & 30+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 8 & 0 \\ 58 & 42 & 45 \\ 37 & 27 & 36 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1) Al multiplicar matrices, el producto resultante será de un orden tal que su número de renglones será igual al número de renglones de la primera matriz y su número de columnas será igual al número de columnas de la segunda matriz.

$$A_{(m,\underbrace{n)} \cdot B_{(n}_{=},q)} = C_{(m,q)}$$

2) El producto de matrices no es conmutativo.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Nota: La propiedad conmutativa se cumplirá solamente cuando se multiplica una matriz por sí misma y dicha matriz es cuadrada.

EJERCICIOS POR RESOLVER

1) Efectúe la suma de 3A-2B dadas las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

2) Encontrar el valor de $-\frac{1}{4}A-3B$ dadas las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Efectuar el producto A·B si las matrices A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4) Efectuar el producto A · B de las siguientes dos matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 0 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

5) Efectuar el producto A · B de las siguientes dos matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ -5 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

11.5 INVERSION DE MATRICES

Concepto

+ Aun y cuando en el conjunto de los números reales existe la operación de división, en el caso de las matrices dicha operación no se encuentra definida.

+ Sin embargo, sí es posible encontrar la "Matriz Inversa" de una -

matriz dada.

+ En el caso de operaciones algebráicas se tiene que :

$$a = \frac{1}{a^{-1}}$$

En el caso de operaciones con matrices también se tiene que :

$$A = \frac{I}{A^{-1}}$$

Donde :
A^{-1} es la inversa de la matriz A.
I es la matriz identidad

Nota :
Recuérdese que se define a la matriz identidad como aquella matriz cuadrada en la cuál los elementos de la diagonal principal son "unos" y los que se encuentran fuera de ella son "ceros".

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

+ Ahora bien, si : $A = \frac{I}{A^{-1}}$

Luego : $A \cdot A^{-1} = I$

+ Se puede concluir entonces que : la matriz inversa de una matriz "A" es aquella matriz que multiplicada por "A" es igual a la matriz identidad.

Requisitos

+ Para poder calcular la inversa de una matriz, ésta debe ser cuadrada.
+ Aun y cuando se tenga una matriz cuadrada, puede suceder que ésta no tenga inversa.

Propiedades

1) El producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad y es conmutativa.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

2) La inversa de una matriz dada será siempre única.
3) Si "A" tiene como inversa a "A^{-1}", "A^{-1}" tiene como inversa a "A".
4) La inversa de un producto de matrices es igual al producto de las inversas en orden contrario.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

+ Para calcular la inversa de una matriz dada, es necesario comprender primero el concepto de "Determinante".

Determinante

+ Sea la matriz de orden (2,2) :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

En donde :

$\longrightarrow$ es la diagonal principal

$\dashrightarrow$ es la diagonal secundaria

La determinante de esta matriz equivale al producto de los elementos que pertenecen a la diagonal principal menos, el producto de los términos que pertenecen a la diagonal secundaria.

Es decir :

$$\boxed{D = (a \cdot d) - (b \cdot c)}$$

Ejemplo :

Hallar la determinante de la matriz $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$D = (5 \cdot 4) - (3 \cdot 6) = 20 - 18 = 2$

+ En el caso de una matriz de orden (3,3) :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Para poder trazar tres diagonales principales y tres diagonales secundarias, se repiten debajo del tercer renglón de la matriz, los dos primeros renglones de la misma :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

La determinante de esta matriz equivale a la suma de los productos resultantes de las tres diagonales principales menos, los productos resultantes de las tres diagonales secundarias.

$$\boxed{D = (a \cdot e \cdot i) + (d \cdot h \cdot c) + (g \cdot b \cdot f) - (c \cdot e \cdot g) - (f \cdot h \cdot a) - (i \cdot b \cdot d)}$$

Ejemplo :

Hallar la determinante de la matriz $A_{(3,3)} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} D &= (5\cdot1\cdot1)+(0\cdot2\cdot-2)+(-3\cdot4\cdot6)-(-2\cdot1\cdot-3)- \\ &\quad -(6\cdot2\cdot5)-(1\cdot4\cdot0) \\ D &= 5 + 0 + (-72) -6 -60 -0 \\ D &= -133 \end{aligned}$$

Cálculo de la Inversa de una Matriz

+ El método más sencillo para invertir matrices es el "Método de Cofactores", el cuál consiste en 5 pasos :

Paso 1

+ Se obtiene la "Matriz de Menores" a partir de la matriz original.
  - Para formar la matriz de menores (M), cada elemento $(m_{i,j})$ se obtiene encontrando el valor de la determinante que resulta de eliminar al renglón "i" y a la columna "j".
  - El orden de la matriz de menores es el mismo que el orden de la matriz original.

Ejemplo :

Sea la matriz original :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Se obtiene la matriz de menores :

$$B = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$m_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3-4 = -1$$

$$m_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 3-6 = -3$$

$$m_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 2-3 = -1$$

$$m_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6-0 = 6$$

$$m_{2,2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 9-0 = 9$$

$$m_{2,3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 6-6 = 0$$

$$m_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-0 = 4$$

$$m_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-0 = 6$$

$$m_{3,3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$$

Entonces la matriz de menores resultante es :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 9 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2

+ Se obtiene la "Matriz de Cofactores" , a partir de la matriz de menores.
  - Cada elemento de la matriz de cofactores (C) resulta de multiplicar al elemento correspondiente ($m_{i,j}$) de la matriz de los menores por el término $(-1)^{i+j}$.
  - El orden de la matriz de cofactores es igual al orden de la matriz de menores.

  Siguiendo el ejemplo anterior :

$$\boxed{C_{i,j} = m_{i,j}(-1)^{i+j}}$$

$$\begin{aligned}
C_{1,1} &= -1(-1)^{1+1} = -1(-1)^2 = -1 \\
C_{1,2} &= -3(-1)^{1+2} = -3(-1)^3 = -3 \\
C_{1,3} &= -1(-1)^{1+3} = -1(-1)^4 = -1 \\
C_{2,1} &= 6(-1)^{2+1} = 6(-1)^3 = -6 \\
C_{2,2} &= 9(-1)^{2+2} = 9(-1)^4 = 9 \\
C_{2,3} &= 0(-1)^{2+3} = 0(-1)^5 = 0 \\
C_{3,1} &= 4(-1)^{3+1} = 4(-1)^4 = 4 \\
C_{3,2} &= 6(-1)^{3+2} = 6(-1)^5 = -6 \\
C_{3,3} &= 1(-1)^{3+3} = 1(-1)^6 = 1
\end{aligned}$$

Entonces :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3

+ Se obtiene la "Matriz Adjunta" (A_{adj}) que no es más que la transpuesta de la matriz de los cofactores.
  - Como fue explicado anteriormente, transponer una matriz consis-

te en intercambiar en la misma los renglones y las columnas que tienen el mismo índice.

En el ejemplo :

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4

+ Se divide la matriz adjunta entre el valor de la determinante (D) de la matriz original (A), para obtener finalmente la "Matriz Inversa"(A^{-1}).

En el ejemplo :

Se obtienen la determinante de la matriz original :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} D(A) &= (3\cdot1\cdot3)+(1\cdot2\cdot0)+(3\cdot2\cdot2) \\ &\quad -(0\cdot1\cdot3)-(2\cdot2\cdot3)-(3\cdot2\cdot1) \\ D(A) &= 9 + 0 + 12 - 0 - 12 - 6 \\ D(A) &= 3 \end{aligned}$$

Se obtiene la matriz inversa :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{A_{adj}}{D(A)}}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}{3}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 3 & 9 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2 & 4/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Paso 5

+ Para comprobar el resultado, se multiplica la matriz inversa por la matriz original, debiendo resultar la matriz identidad.

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2 & 4/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando $A \cdot A^{-1}$:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2 & 4/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ \\ 1 & 1 & 2 \\ \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 3(-1/3) \\ 2(1) \\ 0(-1/3) \end{matrix} & \begin{matrix} 3(-2) \\ 2(3) \\ 0(0) \end{matrix} & \begin{matrix} 3(4/3) \\ 2(-2) \\ 0(1/3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1(-1/3) \\ 1(1) \\ 2(-1/3) \end{matrix} & \begin{matrix} 1(-2) \\ 1(3) \\ 2(0) \end{matrix} & \begin{matrix} 1(4/3) \\ 1(-2) \\ 2(1/3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3(-1/3) \\ 2(1) \\ 3(-1/3) \end{matrix} & \begin{matrix} 3(-2) \\ 2(3) \\ 3(0) \end{matrix} & \begin{matrix} 3(4/3) \\ 2(-2) \\ 3(1/3) \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1+2+0 & -6+6+0 & 4-4+0 \\ -1/3+1-2/3 & -2+3+0 & 4/3-2+2/3 \\ -1+2-1 & -6+6+0 & 4-4+1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Hágase la inversión de las siguientes matrices :

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} -1/3 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/3 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

11.6 RESOLUCION MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

+ Una de las aplicaciones más usuales de las matrices se refiere a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

+ Para resolver un sistema de ecuaciones lineales a través de matrices se siguen fundamentalmente cuatro pasos, mismos que serán explicados a través de un ejemplo.

Sea el sistema :

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ x + y + 2z &= 7 \\ 3x + 2y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

Paso 1

+ Representar la parte del sistema que contiene las variables, a través de un producto de dos matrices.

En el ejemplo :

$$\begin{matrix} 3x + 2y + 0z \\ 1x + 1y + 2z \\ 3x + 2y + 3z \end{matrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse la operación anterior :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \\ 3 \quad 2 \quad 0 \text{ ----} & \begin{bmatrix} 3(x) \\ 2(y) \\ 0(z) \end{bmatrix} & \text{----} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \text{ ----} & \begin{bmatrix} 1(x) \\ 1(y) \\ 2(z) \end{bmatrix} & \text{-- =} \\ 3 \quad 2 \quad 3 \text{ ----} & \begin{bmatrix} 3(x) \\ 2(y) \\ 3(z) \end{bmatrix} & \text{----} \end{array} \begin{bmatrix} 3x + 2y + 0z \\ \\ 1x + 1y + 2z \\ \\ 3x + 2y + 3z \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

+ Nota :
Obsérvese que si :

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 0z &= 12 \\ 1x + 1y + 2z &= 7 \\ 3x + 2y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Debido a que el producto de las dos matrices da como resultado una matriz columna.

Despejando la matriz de las incógnitas se tiene :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}}$$

O lo que es lo mismo :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Por lo que se concluye que es necesario invertir la matriz original de los coeficientes de las variables y multiplicarla por la matriz columna de los términos independientes para obtener los valores de las incógnitas.

Paso 2

+ Invertir la matriz original de los coeficientes de las variables. Para lo anterior, se utiliza el método de inversión de matrices por cofactores, mismo que fue explicado en el apartado anterior.

En el ejemplo :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2 & 4/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$ Calculada en el apartado anterior.

Paso 3

+ Multiplicar la matriz inversa obtenida por la matriz de los términos independientes para obtener el valor de las incógnitas.

En el ejemplo :

$$\begin{bmatrix} -1/3 & -2 & 4/3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -14 & 20 \\ 12 & 21 & -30 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces se tiene que :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultados :

$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 1$$

Paso 4

+ Comprobar que los valores de la incógnitas obtenidos, satisfacen el sistema de ecuaciones original.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ x + y + 2z &= 7 \\ 3x + 2y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(2) + 2(3) &= 12 \quad \checkmark \\ 1(2) + 1(3) + 2(1) &= 7 \quad \checkmark \\ 3(2) + 2(3) + 3(1) &= 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$

EJERCICIOS POR RESOLVER

+ Resolver por matrices los siguientes sistemas de ecuaciones :

1) $$\begin{aligned} 2x + 3x - z &= 4 \\ x + y - z &= -2 \\ 3x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 7 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 3 \\ x - 2y - z &= 7 \\ 3x + 2z &= 14 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z &= \frac{1}{3} \\ x - 2y + \frac{z}{4} &= -3 \\ -\frac{x}{2} + y - \frac{z}{2} &= -2 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z &= 7 \\ \frac{x}{4} - \frac{3y}{2} + \frac{z}{2} &= -6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} &= 1 \end{aligned}$$

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las Matemáticas, lejos de ser una ciencia meramente abstracta, constituyen una ciencia práctica y aplicable a situaciones y conceptos de tipo administrativo tales como precios, costos, escalas de salarios, inversiones, utilidades, predicciones, etc.

Cualquiera de estas variables administrativas puede ser representada por símbolos y sus propiedades pueden ser establecidas en forma matemática, de modo que las Matemáticas proveen las técnicas para analizar las relaciones entre símbolos y por lo tanto entre las variables que ellos representan.

Cada uno de los temas expuestos a lo largo de este estudio contribuyen de una u otra manera a la Administración :

El Algebra, permite establecer reglas generales expresadas en términos algebráicos que muestran la relación entre dos o más símbolos que a su vez representan variables o conceptos del mundo real de los negocios. Por otra parte, el manejo de tales expresiones algebráicas permite resolver problemas casi automáticamente, que de otro modo requerirían de un largo y laborioso esfuerzo mental. En suma, el Algebra permite transcribir grandes problemas, relaciones e implicaciones de una organización en expresiones matemáticas breves y hace posible resolver dichos problemas de manera fácil y rápida.

En lo que a Teoría de Conjuntos se refiere, ésta es un instrumento que da la oportunidad de sistematizar nuestra manera de pensar, desarrollando así la capacidad de análisis. Por otra parte, constituye una valiosa ayuda para visualizar un problema en su totalidad y determinar las interrelaciones existentes entre todas las partes componentes de dicho problema.

El Análisis Combinatorio provee un medio útil para sistematizar el proceso de generación de alternativas; a través del mismo se pueden combinar los elementos de una situación dada e identificar entonces las diferentes alternativas de acción, resultando una mayor eficiencia en la toma de decisiones.

La necesidad de la Teoría de la Probabilidad en la práctica, surge cuando se han de estudiar experimentos o fenómenos aleatorios en los que no se puede predecir los resultados antes de llevarse a cabo el experimento o fenómeno. La utilidad de esta teoría reside entonces, en que los modelos matemáticos apropiados para el estu -

dio de un gran número de fenómenos apreciables en los negocios, son probabilísticos y no determinísticos. Es decir, si se parte de que cualquier situación o decisión que se tome tiene cierto grado de riesgo o incertidumbre o bien, tienen cierta probabilidad de ocurrencia y cierta probabilidad de no ocurrencia, el familiarizarse con los conceptos de la Teoría de la Probabilidad permite al administrador desarrollar cierto criterio : pensar probabilísticamente.

En la teoría económica y administrativa es necesario con frecuencia realizar una abstracción del mundo real. La gran complejidad de los problemas de la realidad es lo que hace imposible el entender todas sus interrelaciones a la vez; sin embargo, es posible elaborar un esquema analítico simplificado y expresado en símbolos matemáticos. Este esquema se llama modelo matemático y constituye una herramienta de suma importancia para el administrador.

El Modelo para la Determinación del Punto de Equilibrio entre la Oferta y la Demanda, hace posible a la empresa el determinar el precio requerido del artículo para que la cantidad de productos ofrecida por el vendedor sea igual a la cantidad demandada por el consumidor, evitando de esta manera situaciones tales como altos remanentes en inventarios, insuficiencia de un producto para cubrir las necesidades del mercado, etc.

El Modelo del Punto de Equilibrio entre las Ventas y los Gastos, permite al administrador conocer el volúmen de ventas en el cual los ingresos por ventas de una organización se igualan a los gastos totales de la misma, y en consecuencia la empresa no obtiene utilidad ni sufre pérdida.

En la práctica administrativa se encuentra frecuentemente que cada decisión o acción origina complejas reacciones en cadena que influyen en otras variables relacionadas. La Regresión Lineal por su parte, constituye una herramienta valiosísima para expresar la relación entre dos variables y predecir en base a ésta el valor de una variable en el futuro; puede decirse entonces, que esta técnica reviste una gran trascendencia práctica en la predicción económica de las empresas.

La Administración dispone de hombres, dinero, materiales y máquinas cuyo suministro desgraciadamente en la mayoría, si no es que en todas las empresas, es limitado. Es por ello que la organización debe encontrar la mejor asignación de estos recursos, resultando entonces evidente la necesidad de métodos cuantitativos y matemáticos que simplifiquen la ejecución de esta tarea. El último de los modelos matemáticos estudiados: la Programación Lineal, constituye una excelente técnica para determinar la mejor asignación de dichos recursos a fin de aumentar al máximo las ganancias y reducir al mínimo los costos.

Como ha sido mencionado, la relación entre variables puede ser representada mediante una expresión matemática, sin embargo en ocasiones pueden encontrarse expresiones en las cuales resulta imposible conocer el valor de una variable determinada a través de los métodos tradicionales del Algebra; es entonces cuando los Logaritmos representan un recurso útil para el administrador.

Los conocimientos sobre Progresiones son importantes en virtud de que algunas veces las operaciones comerciales o actividades productivas de una empresa siguen una secuencia regular determinada y es necesario conocer los valores de las variables de dicha secuencie y el orden de las mismas.

En lo que a la utilidad de las Matrices se refiere, éstas conforman un intrumento que permite representar y resumir información o datos de una manera ordenada y sistemática.

A través entonces de las explicaciones sobre los conceptos y aplicaciones de los métodos y herramientas básicas de la ciencia Matemática, así como de los diversos ejemplos y ejercicios prácticos desarrollados a lo largo de este estudio, puede observarse que mediante la utilización de estos métodos es posible lograr un mejor planteamiento, resolución e interpretación de los problemas administrativos y alcanzar una mayor eficiencia en el planteamiento del proceso de toma de decisiones, evitando el apoyarse en la experiencia y apreciación personal exclusivamente.

Por último, la conclusión tal vez más importante a la que llego después de elaborar este texto para la Escuela de Contaduría y Administración de la Universidad Anáhuac, es que cualquier teoría, técnica o modelo matemático por complicado que parezca, puede ser descrito o explicado en forma sencilla; en la medida en que las ideas y los conceptos de las Matemáticas sean explicados el estudiante de manera ordenada y accesible, el gusto y dominio por esta materia se verá incrementado.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

Arias Galicia Fernando. Fiol G. Michel.
"Elementos de Matemáticas para las Ciencias de Administración y del Comportamiento"
Editorial Trillas
México
1979

Baldor Aurelio
"Algebra Elemental"
Editorial Mediterráneo
España
1970

Berenson L. Mark. Levine M. David.
"Estadística para la Administración y Economía"
Editorial Mc Graw Hill
México
1976

Caballero Arquímides. Martínez Lorenzo. Bernárdez Jesús.
"Matemáticas"
Editorial Esfinge
México
1971

Fiol G. Michel. Enriquez F. José Jaime
"Algebra para Estudiantes de Administración y Economía"
Ediciones Nuevomar
México
1979

García Malo Javier
"Algebra Mercantil"
Editorial Banco y Comercio
México
1967

Hoel G. Paul. Jessen J. Raymond
"Estadística Básica para Negocios y Economía"
Editorial Continental
México
1977

Kattsoff O. Louis. Simone J. Albert
"Matemática Finita con Aplicaciones a las Ciencias Administrativas"
Editorial Trillas
México
1979

Kleiman Ariel. K. de Kleiman Elena
"Conjuntos. Aplicaciones Matemáticas a la Administración".
Editorial Limusa
México
1979

Kruglak Haym. Moore T. John
"Matemáticas Aplicadas"
Editorial Mc Graw-Hill
México
1976

Meyer L. Paul
"Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas
Fondo Educativo Interamericano
México
1973

Rider R. Paul
"Algebra"
Editorial Herrero
México
1978

Seymour Lipschutz
"Teoría y Problemas de Conjuntos y Temas Afines"
Editorial Mc Graw-Hill
México
1970

Seymour Lispchutz
"Teoría y Problemas de Probabilidad"
Editorial Mc Graw-Hill
México
1971

Spiegel R. Murray
"Teoría y Problemas de Probabilidad y Estadística"
Editorial Mc Graw-Hill
México
1976

Spiegel R. Murray
"Teoría y Problemas de Algebra Superior"
Editorial Mc Graw-Hill
México
1979

Springer H. Clifford. Herlihy E. Robert. Beggs I. Robert
"Matemáticas Básicas"
Editorial Hispanoamericana Uteha
México
1972

Stephen P. Shao. Rodríguez Cristina
"Matemáticas y Métodos Cuantitativos para Comercio y Economía"
Editorial
Southwestern
E.U.A.
1978