

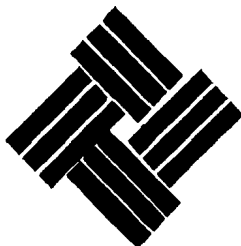
881201

12  
29.

**UNIVERSIDAD ANAHUAC**

**ESCUELA DE ACTUARIA**

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



**EL INTERES COMPUESTO  
EN LOS BONOS**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
A C T U A R I O  
PRESENTA EL ALUMNO

**LUIS EDUARDO MENDOZA VALENCIA**

MEXICO, D. F.

1988

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

I	INTRODUCCION	1
II	CONSIDERACIONES TEORICAS	8
	II.1 Interés Simple y Descuento	8
	II.2 Interés Compuesto	13
	II.3 Anualidades	18
	II.4 Bonos	20
III	INTERES SOBRE INTERES	26
	III.1 Rendimiento a Vencimiento	27
	III.2 Rendimiento Compuesto Realizado	31
	III.3 Variaciones en la Tasa de Reinversión	36
	III.4 Implicaciones para el Inversorista	39
IV	BONOS PERPETUOS Y BONOS A DESCUENTO	41
	IV.1 Bonos Perpetuos	41
	IV.2 Volatilidad de los Bonos Perpetuos	45
	IV.3 Bonos a Descuento puro con cupón cero	48
	IV.4 Volatilidad de los Bonos a Descuento con cupón cero	49
	IV.5 Implicaciones para el Inversorista	53

V	VOLATILIDAD DE LOS PRECIOS DE LOS BONOS	54
	V.1 Determinantes de la Volatilidad	55
	V.2 Implicaciones para el Inversorista	68
VI	RENDIMIENTO DE LOS BONOS	70
	VI.1 Rendimiento "call" y rendimiento mínimo	71
	VI.2 Problemas al evaluar con el rendimiento mínimo	75
	VI.3 Rendimiento compuesto realizado mínimo	77
VII	CONCLUSIONES	82
	BIBLIOGRAFIA	87

## I INTRODUCCION

A partir de la Segunda Guerra Mundial la economía internacional ha experimentado grandes cambios tanto en el volumen de transacciones comerciales como en los flujos de capital entre diferentes países.

Con el fin de evitar las dificultades surgidas durante los 30's (devaluaciones competitivas, desempleo y la Gran Depresión), en la conferencia de Bretton Woods (1944) se acordó fundar el Fondo Monetario Internacional (FMI),<sup>1/</sup> con el objeto de promover la consulta y colaboración en cuanto a problemas monetarios internacionales y prestar ayuda financiera a países miembros que se encuentren con problemas de balanza de pagos, además de dar un marco legal e institucional al sistema monetario internacional.<sup>1/</sup>

El fin de la Segunda Guerra Mundial dejó a Europa y Japón en estado de destrucción tanto industrial como financiero. En tanto, los Estados Unidos de Norteamérica incrementa

---

<sup>1/</sup> Salomon, Robert: The International Monetary System 1945-1981., Harper and Row Publishers, N. Y., 1982

ron notablemente su capacidad industrial y agrícola, y con ello el dólar estadounidense surgió como una divisa fuerte y de aceptación mundial. A través del Plan Marshall los Estados Unidos de Norteamérica se convirtieron en el Banco del Mundo.<sup>1/</sup>

Durante los 50's el progreso económico en Europa fue sorprendente. La producción industrial en los países de la OCDE<sup>2/</sup> se incrementó en más del 60% entre 1952 y 1960, dando lugar a un aumento en las transacciones comerciales entre los países. Por otro lado, la mayoría de los países restringían los flujos de capitales.

A partir de 1958 se observó una mejora substancial en las balanzas de pagos de los países europeos lo que permitió que se registrara un incremento en sus reservas, y es a partir de finales de este año que estos países permitieron la libre convertibilidad de sus divisas, ampliando las transacciones comerciales entre ellos y con el resto del mundo. Japón tomó la medida en 1964, lo que dio lugar a reaparición de inversionistas internacionales.

---

<sup>1/</sup> Salomon, Robert: ob. cit.

<sup>2/</sup> OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

La libre convertibilidad de monedas europeas facilitó y atrajo flujos de capitales. El diferencial en las tasas de interés entre los países pasó a ser el principal determinante de estos flujos, dando lugar al surgimiento y desarrollo de diversos instrumentos financieros que se encuentran en evolución constante, a fin de ser un atractivo permanente para los cada vez más numerosos inversionistas, quienes buscan sobre todo maximizar la función de utilidad dentro de ciertas restricciones y objetivos: liquidez, duración, perspectivas, rendimiento porcentual, seguridad.

El objetivo central de este estudio es presentar la relación entre el principal determinante de la utilidad, las tasas de interés y los instrumentos financieros.

Habremos de establecer el marco estructural de un instrumento lo cual permite medir más apropiadamente el valor relativo que representa éste para el inversionista. El administrador de un portafolios inversiones generalmente no dispone del tiempo suficiente para hacer cálculos precisos acerca del rendimiento de un instrumento financiero. Conociendo la estructura financiera se puede prever como afectarán a los instrumentos a los movimientos registrados por el mercado.

Nos enfocaremos a los bonos, debido a sus características pueden utilizarse para describir otros instrumentos, por ejemplo: una serie de depósitos a plazo reinvertiendo los intereses es muy parecido a un bono; las aceptaciones bancarias, CETES y demás instrumentos a descuento son equivalentes a un bono con cupón cero; las acciones preferenciales co dividendos fijos son semejantes a un bono perpetuo.

Hasta la fecha se han realizado varios estudios al respecto; sin embargo, el poco conocimiento general de la influencia del interés compuesto en el rendimiento de los bonos ha impedido que se difunda la aplicación de variables tan importantes como es la volatilidad. Algunos de estos es tudios resultan ser demasiado teóricos e inaplicables ya que el movimiento tan rápido de los mercados no permite utilizar los, por lo que resultan poco atractivos al inversionista. Otros son superficiales, limitándose a analizar en base a la experiencia, para inferir patrones de comportamiento, sin buscar la fundamentación técnica de dichos patrones.

Parte del objetivo de este trabajo es explicar a la gente común algunos conceptos que intervienen en un instrumento financiero en un lenguaje accesible y con ejemplos reales tomados del mercado internacional.



Como es sabido, el constante flujo de capitales de un país a otro en busca de mayores utilidades existe a pesar de la existencia de controles cambiarios por parte de las autoridades monetarias, llevando a los inversionistas a operar en el mercado internacional y no restringirlos a las condiciones del mercado doméstico.

Creemos que este estudio puede ser particularmente interesante para tesoreros de empresas e instituciones financieras con operaciones en el mercado internacional.

Los bonos pueden analizarse desde dos puntos de vista: Por un lado, como una forma de obtener financiamiento; por otro, como un instrumento de inversión. A lo largo de este trabajo nos situaremos en el segundo punto, presentando las características que deben considerarse en la elección del instrumento adecuado. Existen algunos eventos que afectan el precio de los bonos y que no pueden ser previstos, como son la situación económica, política y social en un país determinado, las expectativas de los participantes del mercado, el tamaño del mismo, operatividad, volumen, etc. Sin embargo, algunas variables pueden ser elegidas por el inversionista, determinando con precisión su influencia en el rendimiento a obtener. A estas últimas enfocaremos este estudio, a

fin de brindar al inversionista las herramientas necesarias para que satisfaga sus requerimientos maximizando sus utilidades.

Para llevar a cabo esta investigación, habremos de dividir en siete capítulos el estudio:

I INTRODUCCION

II CONSIDERACIONES TEORICAS, que permitan al lector familiarizarse con algunos conceptos y términos financieros que se utilizan a lo largo del trabajo, estableciendo el marco teórico de referencia.

III INTERES SOBRE INTERES, donde se presentan los factores que determinan las diferentes alternativas a las que se enfrenta un inversionista antes de tomar una decisión como son el precio, el cupón, la tasa de reinversión, etc.

IV BONOS PERPETUOS Y BONOS A DESCUENTO, dos casos extremos cuyas características especiales (duración y cupón cero, respectivamente) permitirán entender la influencia de cada variable en el valor de un instrumento.

- V VOLATILIDAD DE LOS PRECIOS DE LOS BONOS. Aquí se describirán los diferentes tipos de bonos, así como las variables que influyen en su volatilidad (vencimiento, nivel de tasas de interés y cupón), explicando las características sensibles de alterarse y su interacción al determinar el precio del bono y el riesgo que implica.
- VI RENDIMIENTOS DE LOS BONOS, explicaremos las diversas formas de evaluar la utilidad que representa la inversión, así como la influencia que tiene la relación pre cio-cupón en dicha utilidad.
- Se presenta el concepto de "Rendimiento Compuesto Realizado" para hacer comparables las inversiones a distintos plazos, así como evaluar el portafolios financiero completo.
- VII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES que permitan al lector observar una aplicación real de este trabajo y algunos comentarios que le ayudarán a entender mejor las condi ciones y características que enfrentan los inversionis tas al utilizar el interés compuesto.

## II CONSIDERACIONES TEORICAS

### I Interés Simple y Descuento

Definiremos como interés (I) la cantidad pagada por el uso de dinero recibido como préstamo, es decir, el costo del dinero hasta el punto de vista del inversionista, es la cantidad recibida por la inversión del capital o principal (P). El inversionista permite el uso de su dinero a otro individuo por un período determinado (t) a cambio de un porcentaje sobre el capital que se denomina tasa de interés (i). Esta tasa debe corresponder a un período determinado: semestral, anual, etc., y debe ajustarse según el tiempo que dura la inversión.

El interés que se recibirá está dado por

$$I = P i t \quad . . . (2.1)$$

Por ejemplo, supongamos una inversión de \$100,000 por tres años a una tasa anual de 8%. Nuestras variables son:

$$P = 100,000$$

$$i = .08$$

$$t = 3$$

y el interés que se recibirá será:

$$I = (100,000) (.08) (3) = \$24,000$$

El monto que se recibirá al vencimiento de la operación (S), incluyendo capital e intereses, se conoce como valor futuro y se determina por

$$S = P + P i t = P (1 + i t) \quad . . . (2.2)$$

En nuestro ejemplo tendríamos

$$S = 100,000 [1 + (.08) (3)] = \$124,000$$

La expresión anterior se conoce como ecuación de valor. Consiste en igualar dos obligaciones que son equivalentes y es la base de todos los problemas de matemáticas financieras.

Este ejemplo muestra el caso más sencillo, en el cual la periodicidad de la tasa de interés (anual) coincide con la unidad de tiempo: En caso contrario es preciso hacer un ajuste, por ejemplo, si la tasa fuera semestral, el periodo

(t) sería 6, porque habría que hacer la sustitución para conocer el resultado correspondiente.

La operación más sencilla se conoce como Pagaré, que es la base de los demás instrumentos financieros. Un pagaré es una promesa escrita de pago de una cantidad de dinero, generalmente con intereses, en una fecha determinada. En él se estipulan las siguientes características:

- Valor Nominal: Cantidad estipulada en el documento.
- Fecha de emisión: Fecha en que se crea el pagaré.
- Fecha de vencimiento.
- Tasa de interés.

En ocasiones es necesario conocer el valor de una deuda en una fecha anterior a su vencimiento. Este monto se conoce como Valor Presente y se deduce de la fórmula (2.2) despejando P

$$P = \frac{S}{1 + it} \quad \dots \quad (2.3)$$

donde P será el valor presente cuando falta un tiempo t para recibir un monto S a una tasa i.

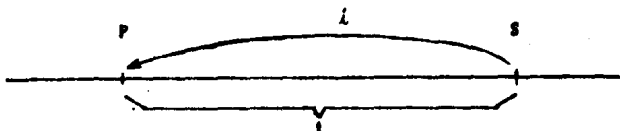
Continuando con nuestro ejemplo, el valor presente de

los 124,000 serfa

$$P = \frac{124,000}{[1 + (.08)(3)]} = \$100,000$$

En la gráfica (2.A) vemos los flujos que genera la operación anterior.

GRAFICA 2.A



Podemos considerar también que P es el valor de S descontando a una tasa que llamaremos Tasa de Descuento (d). Esta tasa se aplica cuando el interés se cobra anticipadamente, en el momento en que se hace la inversión.

El descuento (D) sobre un monto S por t años a la tasa d está dado por

$$D = S d t \quad . . . (2.4)$$

por lo que el valor presente del monto es

$$P = S - D = S - S d t = S (1 - d t) \dots (2.5)$$

Supongamos que una persona va a recibir un préstamo de \$100,000 a una tasa de descuento de 8% anual por 3 años. El valor presente, i. e., el monto que recibirá prestado será

$$P = 100,000 [1 - (.08)(3)] = \$76,000$$

Como podemos observar, va a tener que pagar \$100,000 aunque sólo le presten \$76,000. La tasa de interés equivalente (también llamada tasa de rendimiento) puede ser obtenida despejando de la ecuación (2.2).

$$i = \left[ \frac{S}{P} - 1 \right] \frac{1}{t} = 0.105$$

Es decir, en tres años una tasa de rendimiento de 10.5% equivale a una tasa de descuento de 8%.

La tasa de descuento se utiliza en operaciones bancarias y en muchos instrumentos financieros.



## 2 Interés Compuesto

En algunas operaciones, en lugar de haber un pago de intereses al vencimiento se realiza una serie de pagos periódicos regulares mientras dure la operación. En este caso el interés puede tratarse de dos formas:

- El interés se puede pagar mediante cupones, quedando el capital invariable durante toda la operación. En este caso estamos hablando de interés simple (ver gráfica 2.B).

GRAFICA 2.B



- El interés se puede acumular al capital, de tal forma que se ganarán intereses sobre los intereses. En este caso estamos hablando de interés compuesto.

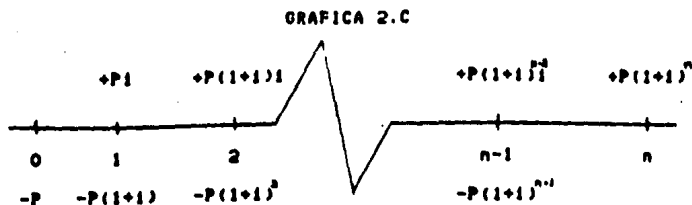
Supongamos que invertimos un monto  $P$  por  $n$  años a una tasa anual de  $i$ . Los flujos generados serían:

AÑO	CAPITAL INVERTIDO AL PRINCIPIO DEL AÑO	MONTO AL RECIBIR AL FINAL DEL AÑO
1	$P$	$Pi$
2	$P+Pi=P(1+i)$	$P(1+i)i$
3	$P(1+i)+P(1+i)i=P(1+i)(1+i)$ $=P(1+i)^2$	$P(1+i)^2i$
4	$P(1+i)^2+P(1+i)^2i=P(1+i)^2(1+i)$ $=P(1+i)^3$	$P(1+i)^3i$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$n-1$	$P(1+i)^{n-3}+P(1+i)^{n-3}i=P(1+i)^{n-3}(1+i)$ $=P(1+i)^{n-2}$	$P(1+i)^{n-2}i$
$n$	$P(1+i)^{n-2}+P(1+i)^{n-2}i=P(1+i)^{n-2}(1+i)$ $=P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}+P(1+i)^{n-1}i$ $=P(1+i)^{n-1}(1+i)$ $=P(1+i)^n$

Por lo tanto, el valor futuro  $S$  de la inversión a  $n$  años a interés compuesto  $i$  es

$$S = P (1 + i)^n \quad \dots (2.6)$$

La siguiente gráfica nos muestra los flujos en el interés compuesto.



La tabla 2.1 nos muestra una comparación entre interés simple y compuesto considerando una tasa de 10% sobre un monto de 1000.

TABLA 2.1

AÑO	MONTO INTERES SIMPLE	MONTO INTERES COMPUESTO
0	1000	1000
1	1100	1100
2	1200	1210
3	1300	1331
4	1400	1464
5	1500	1611

Podemos observar la diferencia ocasionada por el crecimiento geométrico en el caso del interés compuesto. Este efecto generalmente es menospreciado, pero puede generar diferencias muy costosas.

El interés puede ser capitalizado varias veces durante el año. Cuando el interés se capitaliza  $m$  veces al año se le llama interés anual convertible y se define como  $i^{(m)}$ . La tasa efectiva por cada período en que se divide el año es  $i = i^{(m)}/m$ . De esta forma, si tenemos una tasa anual de 20% convertible semestralmente tendríamos:

$$\begin{aligned}
 - m &= 2 \\
 - i^{(2)} &= 20\% \\
 - i &= 10\%
 \end{aligned}$$

La tasa anual convertible es equivalente a la tasa anual efectiva ( $i$ ) que produce los mismos intereses al final de la inversión. En el caso anterior, si capitalizamos semestralmente tendríamos al final del año, con un capital inicial de 1:

$$S = (1+0.10)^2 = 1.21$$

Es decir, una tasa anual convertible semestralmente de 20% equivale a una tasa anual efectiva de 21%. Observemos que una tasa convertible equivale a una tasa efectiva más al ta debido a que los intereses ganan intereses más rápidamente.

Generalizando tendríamos:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \quad \dots \quad (2.7)$$

Consideraremos en el resto del presente capítulo tasas efectivas por período.

El valor presente en el caso del interés compuesto se despeja de la ecuación (2.6)

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n} \quad \dots \quad (2.8)$$

### 3 Anualidades

Entenderemos por anualidad una serie de pagos periódicos regulares durante un plazo determinado. Existen anualidades contingentes, esto es, aquellas en las que los pagos dependen de la ocurrencia de algún evento. En este trabajo nos limitaremos a las anualidades ciertas.

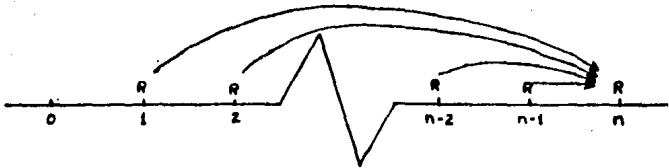
Una anualidad cierta ordinaria es aquella en la cual los pagos periódicos son efectuados al final de cada período regular. Llamaremos  $R$  al monto del pago periódico. La siguiente gráfica nos muestra los flujos generados por una anualidad.

GRAFICA 2.D



El valor futuro de una anualidad es la suma de los pagos periódicos compuestos a una tasa de interés  $i$  determinada, acumulados al término de la operación. Llamaremos  $S_n$  al valor futuro de una anualidad de  $n$  pagos a una tasa  $i$ , según nos muestra la gráfica (2.E).

GRAFICA 2.B



Aplicando la fórmula (2.6) tenemos que

$$\begin{aligned} S_n i &= R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} \\ &= R[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}] \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de una progresión geométrica nos resulta

$$S_n i = R \frac{(1+i)^n - 1}{i} \dots (2.9)$$

De la misma forma, el valor presente de una anualidad de  $n$  pagos a una tasa  $i$ , que se conoce como  $n i$ , está dado por la suma de los valores presentes de los pagos.

$$\begin{aligned} n i &= R(1+i)^{-1} + \dots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n} \\ &= R[(1+i)^{-1} + \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}] \end{aligned}$$

$$= R \frac{i - (1+i)^{-n}}{i} \dots (2.10)$$

#### 4 Bonos

Se entiende por bono una promesa escrita de una serie de pagos periódicos regulares durante un plazo  $n$ , además del pago de una suma fija al final de la operación.

Las características que determinan un bono son:

- Valor Nominal (VN): Denominación del bono. En la mayoría de los casos, el monto que se recibirá al vencimiento.
- Valor de Redención: Monto a recibir al vencimiento del bono. Generalmente coincide con el valor nominal. Para el presente trabajo supondremos que eso sucede, salvo donde se especifique lo contrario.
- Fecha de Vencimiento: Fecha en que se recibirá el valor de Redención, terminando con esto la operación.
- Cupón: Tasa que aplicada al valor nominal determina el monto de los pagos periódicos regulares. En



algunos puntos del trabajo llamaremos cupón al monto de dichos pagos.

Los bonos pueden dividirse en emisiones públicas (listadas en bolsas de valores o colocaciones privadas. Pueden también ser bonos internacionales (vendidos fuera del país del mismo emisor) o domésticos (vendidos en el país del emisor). Estos aspectos junto con otros que mencionaremos a continuación, determinan la preferencia por un bono específico. El inversionista elegirá invertir en un instrumento denominado en la divisa en que tenga compromisos futuros. También estudiará el tipo de emisor: gobiernos, empresas del gobierno, autoridades o agencias regionales, instituciones internacionales, corporaciones, bancos. Analizará la situación económica del país donde se emite el bono. Todas estas características determinan la "Calidad" del instrumento. Se entiende por calidad la seguridad de pago que representa un emisor. El instrumento emitido por el gobierno de un país desarrollado garantiza más al prestamista la recuperación de su inversión que aquel emitido por una corporación. Los inversionistas generalmente prefieren negociar con instrumentos de alta calidad, haciendo que éstos sean los más líquidos, que es otra característica que se busca en una inversión. En caso de que el inversionista necesite utilizar su dinero,

podrá vender el bono con mayor facilidad si éste es de alta calidad y por tanto líquido.

Cuando un individuo adquiere un bono, compra el derecho de recibir ciertos pagos futuros. Los intereses que se hayan devengado antes de la compra corresponden al vendedor. De esta forma, podemos calcular el precio de un bono calculando el valor presente de los pagos futuros a una tasa estimada.

Supongamos que la compra se efectúa en la fecha de emisión o en una fecha de pago de intereses. En tal caso, el precio será el valor presente de la anualidad correspondiente a los pagos periódicos más el valor presente del valor de redención a la tasa contratada o deseada. Sean:

P: precio del bono

c: cupón. Tasa por período a la que el bono paga intereses.

n: número de períodos que faltan para el vencimiento

i: tasa acordada en la operación

$$v_i^n = (1+i)^{-n}$$

Si calculamos el precio por unidad de valor nominal ten  
dremos:

$$P = c \cdot n \cdot i + v_1^n \quad \dots \quad (2.11)$$

En el caso en que el cupón coincida con la tasa  $i$ , el precio será igual al valor nominal. Entonces se dice que la compra se hizo "a par". Cuando el precio es menor que el valor nominal, la compra se hace "a descuento". En este caso, el rendimiento  $i$  será mayor que el cupón ya que estamos realizando una ganancia anticipada de capital. Si, por el contrario, el precio es mayor que el valor nominal, estamos comprando "a premio". En este caso estamos aceptando anticipadamente una pérdida de capital, por lo que el rendimiento será menor que el cupón.

En general, los bonos se cotizan a precio, es decir, se establece el monto que se pagará por 100 unidades de valor nominal, por ejemplo, si un bono se cotiza a 105 estamos pagando \$105.00 por cada \$100.00 de valor nominal. Tendríamos entonces que estimar la tasa  $i$  de la fórmula (2.11) para conocer el rendimiento contratado.

Si la operación se realiza en una fecha distinta del valor de redención o de una fecha de pago de cupón, el rendimiento contratado cambia, ya que además del precio acordado el comprador debe pagar al vendedor el interés acumulado no liquidado por concepto de cupones que devengó el bono mien-

tras este último lo tuvo en posesión. El método para calcular estos intereses está estipulado en el bono (número de días naturales o meses de 30 días, año de 360 (comercial) o 365 (natural) días, etc.), pero, generalmente se hace utilizando interés simple. Supondremos en este trabajo que el método de cálculo es días naturales con un año de 360 días.

Sea  $D$  el número de días desde la emisión o la fecha de pago del último cupón hasta la fecha de compra. Entonces la ecuación de valor será:

$$P + \frac{cD}{360} = c n i + V_1^n \quad \dots \quad (2.12)$$

De esta ecuación tendremos que estimar el valor de  $i$  a fin de conocer el rendimiento contratado en la operación. A lo largo de este estudio supondremos que las operaciones se realizan en la fecha de emisión o en una fecha de pago de cupón, a fin de simplificar los cálculos.

Finalmente, existe una característica que poseen algunos bonos, y es que pueden ser redimidos anticipadamente, ya sea a opción del emisor, a fin de que pueda aprovechar futuras bajas en las tasas de interés, o a opción del comprador, para hacer el instrumento más atractivo. Los bonos con posible redención anticipada generalmente lo son a opción del

emisor, lo cual se conoce como opción "call". En el otro ca  
so se le llama opción "put".

Además de las mencionadas, los bonos pueden tener mu-  
chas otras caracterfsticas con el fin de hacerlos más atrac-  
tivos para el inversionista. En este estudio nos limitare-  
mos a las caracterfsticas generales de estos instrumentos.

### III INTERES SOBRE INTERES

La colocación de capital con propósitos de inversión debe ser analizada cuidadosamente, ya que implica un riesgo porque los beneficios serán recibidos en el futuro y por tanto son inciertos. Consecuentemente, las inversiones deben evaluarse de acuerdo a su rendimiento y al riesgo, ya que estos factores afectan el valor de la inversión.

El principal problema al evaluar una inversión es el desconocimiento generalizado del efecto del interés compuesto, limitándose los estudios a la aplicación del interés simple.

Como es sabido, el interés simple considera ganancia de intereses sobre el capital únicamente, mientras que el interés compuesto implica la reinversión de los intereses generados (en el caso de los bonos, la reinversión de valor de los cupones). Lógicamente, el interés compuesto nos dará un mejor indicativo del valor del instrumento, sin embargo, existen distintos métodos al aplicar el interés compuesto que nos llevarán a resultados diferentes. Estos métodos se estudiarán en este capítulo.

## 1 Rendimiento a Vencimiento

Cuando se quiere evaluar el rendimiento que se obtendrá al invertir en un bono determinado, se deben considerar los siguientes factores:

- El capital que se invertirá.
- El monto que se recibirá al vencimiento.
- Los intereses que se recibirán por concepto de cupones.
- Los intereses que se obtendrán mediante la reinversión de los cupones.

El método convencionalmente usado como medida de la utilidad producida por un bono es el "Rendimiento a Vencimiento (RAV)", que no es más que la tasa interna de retorno generada por los flujos de los factores arriba mencionados. Este método nos proporciona un indicativo muy confiable del rendimiento que se obtendrá. Sin embargo, tiene algunos inconvenientes en cuanto a su interpretación. Algunos inversionistas suponen erróneamente que un bono comprado a un RAV dado producirá dicho rendimiento durante toda la vida del instrumento, sin considerar las posibles variaciones futuras en las tasas de la reinversión de los cupones.

Para entender mejor el problema, vamos a exponer lo que es el RAV. Para esto, necesitamos definir algunos conceptos básicos y establecer la notación.

- $P$  = Precio que se paga por el bono, i. e., capital invertido
- $VN$  = Capital que se recibirá al vencimiento  
Denominación o valor nominal
- $c$  = Tasa anualizada a la que el bono paga los intereses regulares
- $i^{(m)}$  = Tasa anual convertible  $m$  veces al año
- $n$  = Años que faltan para el vencimiento
- $n i$  = Anualidad en  $n$  periodos a una tasa  $i$ , es decir, el valor presente de una serie de  $n$  pagos periódicos regulares a una tasa  $i$  determinada
- $n i$  = Valor futuro de una serie de  $n$  pagos periódicos regulares a una tasa  $i$  determinada

La gráfica (3.A) nos muestra los flujos de fondos generados por la inversión. (Por razones prácticas, supondremos que el valor nominal es uno y que el bono paga intereses dos veces al año).



GRAFICA 3.A



Podemos inferir que el valor presente de los flujos es:

$$P = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-1} + \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2} + \dots + \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-(2n-1)} +$$

$$+ \left(1 + \frac{c}{2}\right) \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n}$$

$$P = \frac{c}{2} \left[ \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2} + \dots + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-(2n-1)} + \right.$$

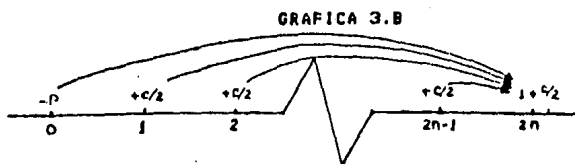
$$\left. + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n} \right] + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n}$$

$$P = \frac{c}{2} \left[ 2n \frac{i^{(2)}}{2} + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{-2n} \right] \dots \quad (3.1)$$

donde  $i^{(2)}$  es el RAV.

Como se puede apreciar en la fórmula (3.1), podemos llegar al mismo RAV con un número infinito de combinaciones de

precio y cupón, esto es, manteniendo el mismo RAV, su aumentamos el cupón aumenta también el precio, y el hecho es que no podemos ser indiferentes a dichas combinaciones. Esto se aprecia mejor si calculamos el valor futuro de los flujos. (Ver gráfica 3.B).



$$P \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n} = \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n-1} + \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n-2} + \dots +$$

$$+ \frac{c}{2} \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right) + \frac{c}{2} + 1$$

$$P \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n} = \frac{c}{2} \left[ \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n-1} + \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n-2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right) + 1 \right] + 1$$

$$P \left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n} = \frac{c}{2} S_{2n} \frac{i(2)}{2} + 1 \quad \dots \quad (3.2)$$

Se puede observar que al obtener el valor futuro de los fondos estamos suponiendo la reinversión de los cupones a la tasa obtenida como RAV, lo cual no es necesariamente cierto. Si el inversionista busca cobrar los cupones y gastarlos, no le interesan las fluctuaciones futuras en las tasas de interés y sus ingresos están determinados, pero si lo que pretende es reinvertir los cupones, debe buscar obtener la mayor utilidad basado en sus perspectivas sobre la tasa de reinversión. En este caso, sus ingresos no son seguros porque la tasa de reinversión puede ser mayor o menor haciendo que la utilidad obtenida por la inversión sea indiferente a la combinación precio/cupón. Nuestra decisión deberá considerar las expectativas sobre la tasa de reinversión a fin de que ésta se aproveche al máximo usando la combinación óptima.

## 2 Rendimiento Compuesto Realizado

A fin de conocer la utilidad real que nos producirá un bono comprado a un precio dado, es preciso considerar que el ingreso por cupones se reinvertirá y compondrá a una "tasa de reinversión ( $tr^{(2)}$ )" específica. Esta medida de utilidad se denomina "Rendimiento compuesto realizado (RCR)", de tal forma que este rendimiento coincide con el RAV únicamente si la tasa de reinversión es igual a dicho RAV.

La forma de obtener el RCR es la siguiente:

- Sea  $r^{(2)}$  el RCR anualizado
- Sea  $tr^{(2)}$  la tasa de reinversión de los cupones

Entonces tenemos que:

$$P \left(1 + \frac{r^{(2)}}{2}\right)^{2n} = \frac{c}{2} S_{2n} \frac{tr^{(2)}}{2} + 1$$

$$\left(1 + \frac{r^{(2)}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{P} \left(\frac{c}{2} S_{2n} \frac{tr^{(2)}}{2} + 1\right)$$

$$\left(1 + \frac{r^{(2)}}{2}\right) = \left[\frac{1}{P} \left(\frac{c}{2} S_{2n} \frac{tr^{(2)}}{2} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2n}}$$

$$r^{(2)} = 2 \left[ \left( \frac{\frac{c}{2} S_{2n} \frac{tr^{(2)}}{2} + 1}{P} \right)^{\frac{1}{2n}} - 1 \right] \dots (3.3)$$

En la fórmula (3.3) se puede apreciar que el RCR depende no sólo del precio de compra y del cupón, como sucedía con el RAV, sino también de la tasa de reinversión.

Ahora bien, si tenemos la opción entre dos bonos con precios y cupones distintos que nos producen el mismo RAV.

¿Cuál debemos escoger? Para tomar esta decisión necesitamos analizar el efecto que produciría un incremento de cupón (y de precio) sobre el RCR.

Sustituyendo (3.1) en (3.3) tenemos que:

$$r^{(2)} = 2 \left[ \left( \frac{\frac{c}{2} S 2n \frac{tr^{(2)}}{2} + 1}{\frac{c}{2} 2n \frac{i^{(2)}}{2} + v \frac{i^{(2)}}{2}} \right)^{2n} - 1 \right] \dots (3.4)$$

La derivada de  $r^{(2)}$  con respecto al cupón nos indicará la influencia de un incremento en el cupón sobre el RCR, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dr^{(2)}}{dc} &= \frac{2}{2n} \left( \frac{\frac{c}{2} S 2n \frac{tr^{(2)}}{2} + 1}{\frac{c}{2} 2n \frac{i^{(2)}}{2} + v \frac{i^{(2)}}{2}} \right)^{2n-1} \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{\frac{c}{2} S 2n \frac{tr^{(2)}}{2} + 1}{\frac{c}{2} 2n \frac{i^{(2)}}{2} + v \frac{i^{(2)}}{2}} \right)^{2n-1} \left[ \frac{S 2n \frac{tr^{(2)}}{2}}{2 \left( \frac{c}{2} 2n \frac{i^{(2)}}{2} + v \frac{i^{(2)}}{2} \right)^2} - \frac{\frac{2n \frac{i^{(2)}}{2}}{2}}{\left( \frac{c}{2} 2n \frac{i^{(2)}}{2} + v \frac{i^{(2)}}{2} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

I

$$-\frac{\left(\frac{c}{2} s 2n \frac{tr(2)}{2} + 1\right) 2n \frac{i(2)}{2}}{2\left(\frac{c}{2} 2n \frac{i(2)}{2} + v \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}\right)^2}$$

II

Entonces, el efecto de un incremento en el cupón dependerá de la relación entre I y II, así que necesitamos saber si esa relación es positiva o negativa.

$$\frac{s 2n \frac{tr(2)}{2}}{2\left(\frac{c}{2} 2n \frac{i(2)}{2} + v \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}\right)} \quad \frac{\left(\frac{c}{2} s 2n \frac{tr(2)}{2} + 1\right) 2n \frac{i(2)}{2}}{2\left(\frac{c}{2} 2n \frac{i(2)}{2} + v \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}\right)^2}$$

$$s 2n \frac{tr(2)}{2} \quad \frac{\left(\frac{c}{2} s 2n \frac{tr(2)}{2} + 1\right) 2n \frac{i(2)}{2}}{\frac{c}{2} 2n \frac{i(2)}{2} + v \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}}$$

$$\frac{c}{2} s 2n \frac{tr(2)}{2} \quad 2n \frac{i(2)}{2} + s 2n \frac{tr(2)}{2} v \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}$$

$$\frac{c}{2} s 2n \frac{tr(2)}{2} \quad 2n \frac{i(2)}{2} + \quad 2n \frac{i(2)}{2}$$

$$S \ 2n \ \frac{tr(2)}{2} \ V \ \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}} \quad 2n \ \frac{i(2)}{2}$$

$$S \ 2n \ \frac{tr(2)}{2} \quad S \ 2n \ \frac{i(2)}{2}$$

Por lo tanto, el efecto de una variación en el cupón sobre el RCR dependerá de la relación entre la tasa de reinversión de los cupones y el RAV.

- Si la tasa de reinversión es mayor que el rendimiento a vencimiento, entonces la derivada será positiva, lo cual quiere decir que el RCR será mayor con el bono con cupón más alto.
- Si el RAV es mayor que la tasa de reinversión, entonces la derivada es negativa, por lo que el RCR será mayor con el bono con cupón más bajo.
- Si la tasa de reinversión es igual al RAV, la derivada será cero, así que el RCR será el mismo para los dos bonos.

Considerando estos factores y suponiendo una tasa de reinversión, el inversionista podrá aprovechar la relación precio-cupón a fin de obtener el mayor ingreso posible.

### 3 Variaciones en la Tasa de Reinversión

Hasta el momento hemos supuesto que los cupones se reinvertirán a una tasa fija, pero sabemos que en realidad esta tasa variará a través del tiempo y que no es posible precisar dichas variaciones.

Existen muchos servicios de proyección de tasas de interés, generados por analistas de las principales instituciones financieras, lo que puede ahorrar tiempo y reducir el índice de error en el cálculo.<sup>3/</sup>

Para obtener el RCR generalmente se utiliza como tasa de reinversión el promedio de las tasas proyectadas para el período en que se quiere mantener el instrumento. Este procedimiento nos puede llevar a conclusiones erróneas, porque no considera la tendencia proyectada de las tasas ni la acumulación de capital para la reinversión.

Podemos obtener el mismo rendimiento promedio aunque las tasas se comportaran en forma distinta, por ejemplo, si las tasas aumentarían de 15% a 20%, o si disminuirían de 20%

---

<sup>3/</sup> Para mayor profundidad ver Espasa, Antoni: Problemas y Enfoques en la predicción de los tipos de interés., Servicio de Estudios del Banco de España, documento de trabajo 8214



a 15%, obtendríamos la misma tasa promedio. Sin embargo, nuestro ingreso sería mayor en el primer caso debido a la acumulación de capital: sólo los primeros cupones ganarían interés a tasas bajas en los primeros periodos, mientras que todos los cupones ganarían interés a tasas altas en los últimos periodos (ver gráfica 3.C). En el otro caso, sólo los primeros cupones obtendrían interés a tasas altas en los primeros periodos, mientras que todos los cupones ganarían interés a tasas bajas en los últimos periodos (ver gráfica 3.D).

La diferencia se aprecia en la gráfica (3.E). Podemos observar que la utilidad es mayor si las tasas se mueven al alza.

Para evitar este sesgo y si se dispone de proyecciones confiables sobre las tasas de interés, lo más conveniente es utilizar una tasa de reinversión variable de acuerdo a dichas proyecciones.

NUMERO DE CUPONES

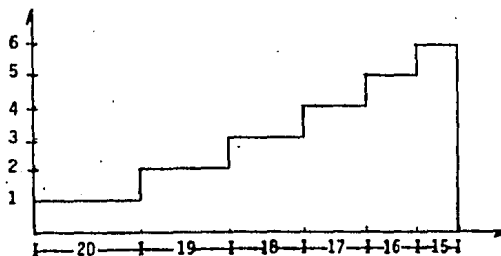
GRAFICA 3.C



TASAS AL ALZA

NUMERO DE CUPONES

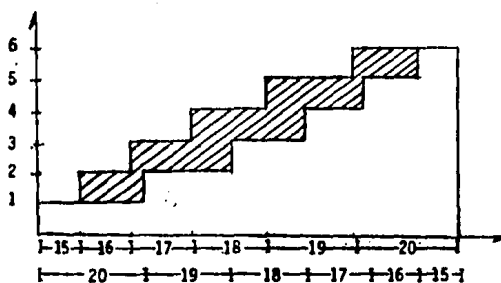
GRAFICA 3.D



TASAS A LA BAJA

NUMERO DE CUPONES

GRAFICA 3.E



TASAS AL ALZA

TASAS A LA BAJA

#### 4 Implicaciones para el Inversionista

- a) El comprador de un bono que planea gastar los ingresos que de él reciba tiene garantizada una tasa de retorno, ya que no pretende reinvertir los pagos por cupones y por ende su inversión variará con las fluctuaciones futuras en las tasas de interés.
  
- b) El comprador de un bono que planea reinvertir los ingresos por pagos de cupones que produce dicho instrumento, no puede conocer de antemano con certeza cuál será el rendimiento compuesto realizado en esta inversión, ya que éste dependerá de la tasa que consiga para la reinversión de cada cupón.
  
- c) Para el inversionista que espera que las tasas de interés futuras sean más bajas que las actuales, es más conveniente comprar bonos a descuento, ya que dicho descuento representa una ganancia eventual de capital que constituye un componente fijo del ingreso total, dado que no se verá afectado por las tasas bajas esperadas. Además un instrumento es vendido a descuento generalmente cuando su cupón es bajo, por lo que la mayor parte del ingreso total será ese componente fijo determinado por la ganancia de capital originada por el descuento y

y no el ingreso obtenido por la reinversión de los cupones. Cuando el ingreso es por cupones es una porción menor del ingreso total, el interés sobre interés es también una porción menor del RCR, minimizando así el efecto negativo de las tasas bajas esperadas.

- d) Para el inversionista que espera tasas de interés más altas en los años venideros que la que puede obtener en el momento de la compra, y que por alguna razón está obligado a adquirir bonos a largo plazo, es más conveniente la inversión en bonos cotizados a premio. Al comprar un instrumento a premio está pagando por él más de su valor nominal. Esta pérdida de capital provoca que la utilidad que se va a recibir dependa en su mayor parte de la reinversión de los cupones, de tal manera que el interés sobre interés constituirá la parte principal del RCR. Considerando además que generalmente un instrumento es vendido a premio cuando su cupón es alto, el inversionista aprovecharía de esta forma el efecto ocasionado por las tasas esperadas, maximizando así el ingreso total.

#### IV BONOS PERPETUOS Y BONOS A DESCUENTO

El interés compuesto es una potente fuerza de crecimiento en los mercados de inversión. La principal incertidumbre al invertir en bonos es precisamente la tasa a la que podrán componerse los ingresos por concepto de cupones, de tal forma que el RCR que obtendrá el inversionista dependerá en gran parte de las tasas futuras de interés.

Sin embargo, como se mencionó anteriormente, es posible reducir esta incertidumbre invirtiendo en instrumentos con características específicas, tales como bonos a descuento o con cupones bajos.

Desde luego, es preciso conocer el objetivo que el inversionista pretende alcanzar con sus fondos. En algunos casos, lo que busca es obtener el mayor ingreso posible. Tal es el caso de la persona que vive del producto de sus inversiones. Lo que le interesa es recibir la mayor cantidad de dinero en cada pago, por lo que compra bonos con cupones altos aunque el rendimiento no sea tan bueno porque tiene que comprar a premio. En otros casos lo que se busca es maximizar el rendimiento. Esto sucede en la mayoría de las Tesore

rias, donde el desempeño es evaluado en términos de rendimiento porcentual.

En el presente capítulo analizaremos dos tipos de bonos poco comunes pero que nos servirán para determinar las características más convenientes para satisfacer los requerimientos del inversionista.

Los bonos pueden clasificarse en tres escalas según las siguientes características:

- Vencimiento a corto, mediano y largo plazo
- Cupón, alto o bajo en relación a las tasas prevalecientes en el mercado
- Precio a descuento, a par o a premio

En los extremos de estas escalas se encuentran los bonos que estudiaremos. Aunque rara vez se encuentran en la vida real, ilustran claramente algunas relaciones entre el precio y el rendimiento que pueden aplicarse para cualquier bono. Estos instrumentos son los bonos perpetuos (sin vencimiento) y los bonos a descuento puro con cupón cero.

## 1 Bonos Perpetuos

Los bonos perpetuos aparecieron en Europa hace algunos siglos bajo el nombre de "anualidades perpetuas", y eran ven di dos por gobiernos de naciones, estados o ciudades. Generalmente eran redimidos a par en una fecha posterior, a opción del emisor.

En el siglo XIX, se empezaron a utilizar vencimientos establecidos, pero generalmente a plazos muy largos, de tal manera que los bonos perpetuos tenían, en la mayoría de los casos, una vida más corta, ya que eran redimidos con anterio ridad.

El precio de un bono, como vimos en el capítulo anterior, está dado por el valor presente de los flujos que gene ra. En el caso de los bonos perpetuos, el precio está dado por:

$$P = \frac{1fm}{n} \frac{c}{2} \quad 2n \frac{i(2)}{2}$$

$$P = \frac{1fm}{n} \frac{c}{2} - \frac{1 - v^{2n}}{\frac{i(2)}{2}}$$

$$P = \frac{c}{i(2)} \quad \dots \quad (4.1)$$

El ejemplo siguiente nos mostrará la diferencia entre el precio de un bono perpetuo y un bono a muy largo plazo:

- El precio por unidad de un bono con vencimiento en 100 años que paga cupones semianuales al 8%, traído a valor presente al 10% es, usando la fórmula (3.1):

$$P = \frac{0.08}{2} \overline{200} .05 + V \frac{200}{.05} = 0.800011566$$

- El precio por unidad de un bono perpetuo que paga cupones semianuales al 8%, traído a valor presente al 10% es, aplicando la fórmula (4.1):

$$P = \frac{0.08}{0.10} = 0.800000000$$

Podemos observar que la diferencia entre ambos precios es insignificante; únicamente 0.000011566 ¿Por qué sucede esto? Ambos recibirán una serie de pagos periódicos regulares, y mientras que con el bono perpetuo estos pagos se prolongarán hasta el infinito, con el instrumento a plazo se recibirá un monto determinado al vencimiento. De cualquier forma, el valor de los ingresos que se recibirán del  $n$ -ésimo año en adelante es mínimo en ambos casos, debido a que el interés compuesto aumenta geométricamente al aumentar el plazo,



afectando en forma inversa el valor de los montos recibidos al obtener su valor presente.

## 2 Volatilidad de los Bonos Perpetuos

El aspecto que nos interesa destacar de los bonos perpetuos es que los ingresos que generarán serán exclusivamente los obtenidos por concepto de cupones y de su reinversión, de tal forma que, como se aprecia en la fórmula (4.1), un cambio en las tasas de interés vigentes afecta notoriamente el precio del instrumento. Esto lo podemos observar si obtenemos la derivada del precio con respecto a la tasa de interés. De la fórmula (4.1) tenemos que

$$P = \frac{C}{i^{(2)}}$$

por lo que la derivada es

$$\frac{dP}{di^{(2)}} = -\frac{C}{[i^{(2)}]^2} \quad \dots \quad (4.2)$$

es decir, un aumento en las tasas de interés disminuye considerablemente el precio. Este hecho nos ayudará a conocer la influencia que tienen los ingresos por cupones en el precio de un bono, haciendo que éste sea más o menos volátil. La

volatilidad en el precio se determina por el cambio porcentual en dicho precio ocasionado por cambios en las tasas de interés, los cuales se suelen medir de dos formas:

- 1 Cambios porcentuales en el rendimiento
- 2 Puntos base<sup>4/</sup> de cambio en el rendimiento

En el primer caso sucede lo siguiente. Sea  $P_0$  el precio original. Tenemos que

$$P_0 = \frac{C}{i(2)}$$

Si el rendimiento sufriera un cambio porcentual de , el nuevo precio ( $P_1$ ) sería

$$P_1 = \frac{C}{(1+i)(2)} = \frac{P_0}{(1+i)} \quad \dots (4.3)$$

de tal modo que el cambio porcentual en el precio estaría dado por

$$\Delta P = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \frac{1}{(1+i)} - 1 = \frac{-i}{1+i} \quad \dots (4.4)$$

es decir, a cualquier nivel de tasas de interés, un cambio porcentual de  $i$  en el rendimiento provocaría un cambio porcentual constante negativo en el precio de  $-i/(d+i)$ . Lo anterior se ejemplifica en la siguiente tabla:

TABLA 4.1

CAMBIO EN EL RENDIMIENTO	CAMBIO PORCENTUAL EN EL RENDIMIENTO ( % )	CAMBIO PORCENTUAL EN EL PRECIO ( $-\frac{i}{d+i}$ )
3% a 4%	+ 33.33%	- 25%
10% a 13.33%	+ 33.33%	- 25%

Este cambio proporcional no se observa cuando se mide la volatilidad en función de la segunda variable. Si el rendimiento cambia en  $k$  puntos base, el nuevo precio ( $P_1$ ) será

$$P_1 = \frac{C}{i(2) + k} \quad \dots \quad (4.5)$$

y el cambio porcentual en el precio resultará

$$\%P = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \frac{C}{i(2) + k} - 1 = \frac{-k}{i(2) + k} \quad \dots \quad (4.6)$$

La influencia de un cambio en puntos base de rendimiento dependerá del nivel de tasas de interés, según se muestra en la tabla (4.ii):

TABLA 4.ii

CAMBIO EN EL RENDIMIENTO	CAMBIO EN PUNTOS BASE EN EL RENDIMIENTO (k)	CAMBIO PORCENTUAL EN EL PRECIO $\left(\frac{-k}{1(2)+k}\right)$
3% a 4%	100 pb	- 25%
10% a 13.33%	333 pb	- 25%

Parece lógico esperar que un cambio porcentual mayor o menor en el rendimiento lleve a un cambio porcentual en el precio proporcionalmente mayor o menor. Sin embargo, esta relación, como se verá más adelante, sólo se aplica en los bonos perpetuos.

### 3 Bonos a Descuento puro con cupón cero

En contraste con otros instrumentos, los bonos a descuento con cupón cero efectivamente producen el RAV comprado durante toda la vida del bono, ya que al no ser necesario reinvertir los cupones dicho rendimiento no se ve afectado por las tasas futuras. El ingreso que producen estos bonos se

deriva en su totalidad del descuento, i. e., la diferencia entre el precio pagado y el valor de redención al vencimiento.

Estos instrumentos ofrecen ventajas tanto para el inversionista, que asegura el rendimiento a obtener, como para el emisor, que se libera de la obligación de hacer gastos periódicos hasta el vencimiento.

El precio de estos bonos se determina como sigue:

$$P = V \frac{2n}{\frac{i(2)}{2}}$$

$$P = \frac{1}{\left(1 + \frac{i(2)}{2}\right)^{2n}} \quad \dots \quad (4.7)$$

donde se considera una tasa anual convertible semestralmente para hacerlo comparable con otros instrumentos.

#### 4 Volatilidad de los Bonos a Descuento con cupón cero

Como muestra la fórmula (4.7), el precio de los bonos a descuento es el valor presente de un monto único pagadero en  $n$  años a una tasa determinada (RAV). Derivando para conocer el efecto de una variación en la tasa de interés sobre el pre

cio tenemos:

$$\frac{dp}{di^{(2)}} = - \frac{n}{\left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{2n+1}} \quad \dots \quad (4.8)$$

Podemos apreciar que un cambio en las tasas de interés afecta en forma geométrica el precio del bono, de tal forma que una pequeña variación en el rendimiento produce un gran cambio en el precio. Es por esto que los bonos a descuento con cupón cero son los más volátiles, ya que el único ingreso que generan se recibirá en una fecha muy distante.

Usando la fórmula (4.7), el nuevo precio ( $P_1$ ) que se obtendría con un cambio porcentual en las tasas de interés estaría dado por:

$$P_1 = \frac{1}{\left[1 + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{2n}} \quad \dots \quad (4.9)$$

por lo que el cambio porcentual en el precio se determinaría por

$$\%P = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \left[ \frac{1 + \frac{i^{(2)}}{2}}{1 + \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{2n} - 1 \quad \dots \quad (4.10)$$

Podemos observar que en este caso la variación porcentual en el precio no dependerá exclusivamente del cambio porcentual en el rendimiento, sino que también se verá afectado por el nivel de tasas de interés y por la duración del bono, de tal forma que no existe una relación directa entre los cambios porcentuales. Esto se aprecia mejor en la siguiente tabla:

TABLA 4.iii

INCREMENTO DE 25% EN EL RENDIMIENTO			INCREMENTO PORCENTUAL EN EL PRECIO		
			1 AÑO	10 AÑOS	30 AÑOS
2.00	-	2.50	- 0.49	- 4.82	-13.79
3.00	-	3.75	- 0.73	- 7.11	-19.85
4.00	-	5.00	- 0.97	- 9.32	-25.43
5.00	-	6.25	- 1.21	-11.45	-30.56
7.00	-	8.75	- 1.67	-15.50	-39.66

Veamos ahora la relación entre la volatilidad en el precio y los puntos base de cambio en el rendimiento. El nuevo precio sería:

$$P_1 = \frac{1}{\left[1 + \frac{i(2)}{2} + \frac{k}{2}\right]^{2n}} \quad \dots \quad (4.11)$$

y el cambio porcentual en el precio se determinaría por:

$$\%P = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \left[ \frac{1 + \frac{i(2)}{2}}{1 + \frac{i(2)}{2} + \frac{k}{2}} \right]^{2n} - 1 \quad \dots (4.12)$$

Nuevamente, la volatilidad dependerá del nivel de tasas de interés y de la duración del bono, además de los puntos base de cambio en el rendimiento. La tabla (4.iv) nos muestra la volatilidad en el precio considerando esta relación.

TABLA 4.iv

INCREMENTO 100 pb EN EL RENDIMIENTO		V O L A T I L I D A D 1 AÑO	10 AÑOS	30 AÑOS
2.00	- 3.00	-0.98	-9.40	-25.64
3.00	- 4.00	-0.98	-9.36	-25.53
4.00	- 5.00	-0.97	-9.32	-25.43
5.00	- 6.00	-0.97	-0.27	-25.32
7.00	- 8.00	-0.96	-9.19	-25.11

Sorprendentemente observamos en la tabla anterior que la variación en el precio de los bonos a descuento puro con cupón cero depende casi directamente de los puntos base de cambio en el rendimiento, sin importar el nivel de tasas de interés, contrariamente a lo que sucede con los bonos perpetuos.



## 5 Implicaciones para el inversionista

Hemos encontrado que las características volátiles de los bonos analizados en este capítulo son muy diferentes y prácticamente opuestas:

- a) La volatilidad en el precio de los bonos perpetuos es directamente proporcional a los cambios porcentuales en el rendimiento a cualquier nivel de tasas de interés.

De esta forma, la volatilidad de instrumentos similares dependerá de la volatilidad de las tasas de interés, medida ésta en base al cambio porcentual en los rendimientos.

- b) La volatilidad de los bonos a descuento puro no es proporcional a la volatilidad de las tasas de interés, sino que está fuertemente relacionada con puntos base de cambio en el rendimiento, de tal suerte que un cambio en las tasas del 3% al 4% tiene aproximadamente el mismo efecto en el precio que un cambio del 8% al 9%.

Esta diferencia de metodología en la medición de los cambios en las tasas de interés es de vital importancia ya que puede hacer variar nuestro concepto de volatilidad.

## V VOLATILIDAD DE LOS PRECIOS DE LOS BONOS

En la vida real, casi todos los bonos combinan una serie de pagos periódicos regulares por concepto de cupones con un monto pagadero al vencimiento (valor de redención). Por tal motivo, su volatilidad está determinada por una combinación de las características volátiles de los bonos perpetuos, así como aquellas derivadas de recibir un solo pago al vencimiento.

En el caso de los bonos largos a par o premio, los pagos por cupones juegan un papel más importante al determinar el precio debido a que el valor presente del valor de redención es muy pequeño, ya que se recibirá en una fecha muy lejana, de tal manera que su volatilidad es semejante a la de los bonos perpetuos analizados. Por el contrario, para los bonos a descuento con cupón bajo, el principal determinante del precio es el valor de redención, por lo que su volatilidad se parecerá a la de los bonos a descuento puro.

Resumiendo, podemos decir que la volatilidad de un instrumento se determina por los siguientes factores:

- Vencimiento, i. e., duración del bono
- Cupón específico del instrumento
- Nivel de tasas de interés a partir del cual comienza la fluctuación

Los dos primeros pueden ser seleccionados por el inversionista. El tercero está fuera de su control, pero debe considerarlo al planear su portafolio.

#### 1 Determinantes de la volatilidad

Es muy común entre los inversionistas suponer que la volatilidad en los precios de los bonos depende exclusivamente del vencimiento del instrumento, y no consideran los otros dos factores mencionados. La influencia de éstos da lugar a la existencia de volatilidades poco comunes, tales como bonos cortos con cupón bajo que son más volátiles que otros más largos con cupón más alto.

También se presta a confusión el concepto de volatilidad en los precios que tanto hemos manejado, debido a las dos posibilidades de medir el cambio en las tasas de interés mencionadas en el capítulo anterior: cambio porcentual o puntos base de cambio.

Aunque muchos inversionistas evalúan los cambios considerando puntos base, lo correcto es hacerlo en base a cambios porcentuales, que es lo que indica la lógica. Un cambio en las tasas de interés del 3% al 4% (variación de 33.33%) es equivalente a un cambio de 10% a 13.33%, aunque este último implique 333 puntos base y el primero sólo 100. Si a la tasa de 3% le aplicáramos un incremento de 333 puntos base se movería a 6.33%, que es más del doble de la tasa original.

Podemos decir entonces que los ingresos por cupones representan menor volatilidad ya que, al igual que los bonos perpetuos, varían en relación directa a la variación porcentual de las tasas de interés, mientras que el monto que se recibe como valor de redención implica mayor volatilidad por que, similarmente a los bonos a descuento puro, varían en relación a los puntos base de cambio, y además esta volatilidad aumenta con el nivel de tasas, ya que en un ambiente de rendimientos altos un cambio porcentual implica muchos puntos base de cambio; esto es, una variación mínima porcentual en las tasas de interés provoca una variación igualmente mínima en la volatilidad correspondiente a los cupones, pero si el nivel de tasas es muy alto, esa variación porcentual mínima en el rendimiento puede representar muchos puntos ba-

se, aumentando notoriamente la volatilidad del monto a recibir como valor de redención.

De acuerdo a lo anterior, definiremos la volatilidad de un bono como el cambio porcentual en el precio originado por un cambio porcentual en el rendimiento.

$$VOL = \frac{c \left[ \frac{1 - \left[1 + \frac{i(2)}{2}\right]^{-2n}}{i(2)} \right] + \left[1 + \frac{i(2)}{2}\right]^{-2n}}{c \left[ \frac{1 - \left[1 + \frac{i(2)}{2}\right]^{-2n}}{i(2)} \right] + \left[1 + \frac{i(2)}{2}\right]^{-2n}} - 1 \quad \dots (5.1)$$

donde: VOL = volatilidad  
 = cambio porcentual en el rendimiento

Habiendo establecido esto, estudiaremos los factores que afectan esta volatilidad, pero antes de hacer un análisis estructural presentaremos tres tablas (con sus respectivas gráficas) que nos ilustran el efecto volátil ocasionado por cada variable.

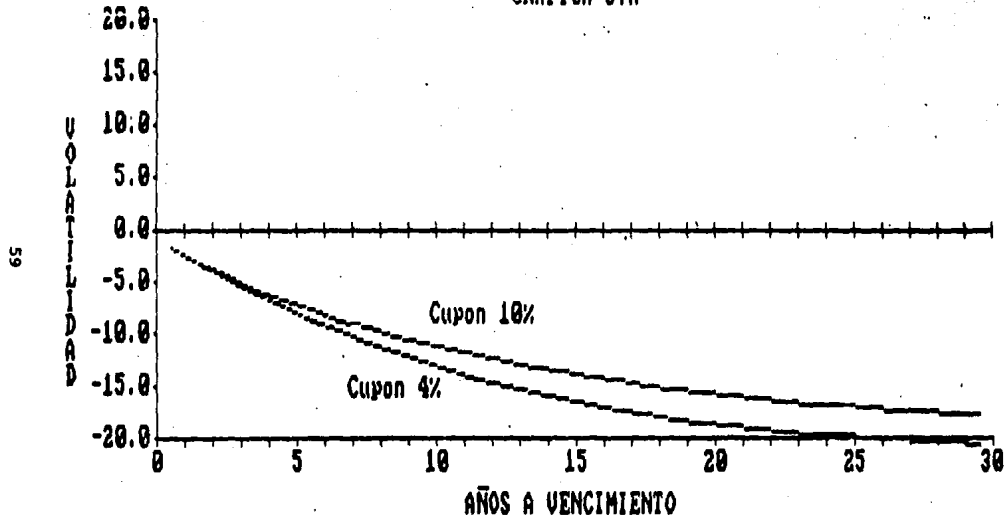
Esta tabla nos muestra que la volatilidad aumenta con el vencimiento, pero este incremento va siendo cada vez menor, llegando a un punto en que empieza a decrecer. Finalmente, la volatilidad se acerca asintóticamente a la de los bonos perpetuos (ver gráfica 5.A.).

TABLA 5.1

- Incremento en el rendimiento de 7% a 8.75% (25%)

VENCIMIENTO	VOLATILIDAD	
	CUPON 4%	CUPON 10%
1 año	- 1.65	- 1.63
5 años	- 7.35	- 6.67
10 años	-12.60	-10.80
20 años	-18.34	-15.39
30 años	-20.31	-17.63
Perpetuos	-20.00	-20.00

GRAFICA 5.A



La tabla anterior refleja el incremento en la volatilidad producido por un decremento en el cupón. Este incremento es particularmente rápido con los cupones abajo de 25% (ver gráfica 5.B).

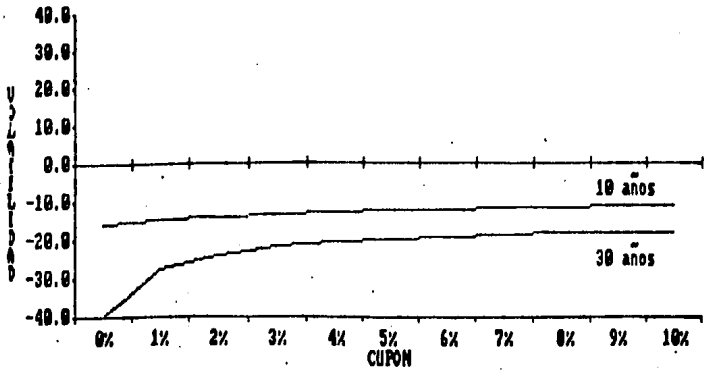
TABLA 5.11

- Incremento en el rendimiento de 7% a 8.75% (25%)

CUPON	VOLATILIDAD	
	10 AÑOS	30 AÑOS
10%	-10.80	-17.67
9%	-11.00	-17.85
8%	-11.24	-18.13
7%	-11.51	-18.47
6%	-11.81	-18.91
5%	-12.17	-19.49
4%	-12.60	-20.31
3%	-13.11	-21.54
2%	-13.73	-23.57
1%	-14.50	-27.63
0%	-15.50	-39.66



GRAFICA 5.B



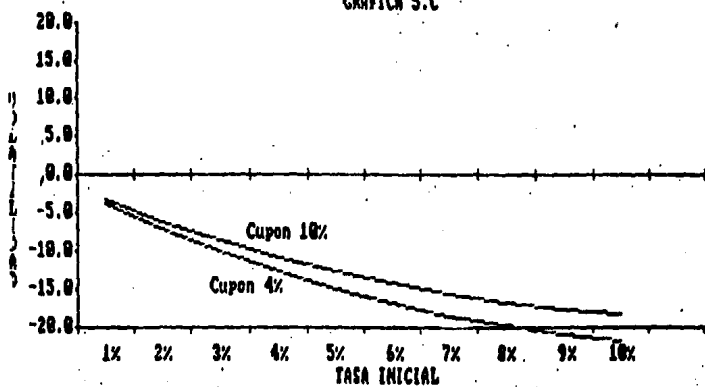
Finalmente, la tabla (5.iii) nos muestra que al aumentar el nivel de tasas de interés la volatilidad también aumenta. En ocasiones se supone erróneamente que, ceteris paribus, la volatilidad en el precio es una función inversa de la volatilidad en el rendimiento, pero esto sólo sucede con los bonos perpetuos. La gráfica (5.C) nos muestra que al aumentar el nivel de tasas de interés la volatilidad aumenta cada vez más rápidamente.

TABLA 5.iii

- Vencimiento a 20 años

25% DE INCREMENTO EN TASAS		VOLATILIDAD	
		CUPON 4%	CUPON 10%
2.00	- 2.50	- 7.03	- 5.99
3.00	- 3.75	- 9.97	- 8.46
4.00	- 5.00	-12.55	-10.61
5.00	- 6.25	-14.79	-12.46
7.00	- 8.75	-18.34	-15.39

GRAFICA 5.C



Veamos ahora el porqué del comportamiento de la volatilidad en cada caso:

- a) El aumento en la volatilidad al aumentar el vencimiento se relaciona con el valor de redención, como sucede con los bonos a descuento. El valor presente del valor de redención está dado por

$$(1 + i^{(2)}/2)^{-2n}$$

Si el interés se mueve un poco, esta variación se ve aumentada por el exponente, por lo que un vencimiento más lejano, i. e., un exponente mayor en valor absoluto amplifica aún más la volatilidad.

Sin embargo, ese incremento es cada vez menor, llegando a convertirse en decremento porque progresivamente va tomando mayor valor dentro del precio la parte correspondiente a los cupones que, como vimos en el capítulo anterior, es la de menor volatilidad, mientras que la parte más volátil correspondiente al valor de redención va minimizando su valor. Por esto mismo, la volatilidad se acerca a la de los bonos perpetuos.

- b) El incremento en la volatilidad al reducirse los cupones se debe a los mismos factores. Entre más bajo es

el cupón más importante es para el precio el valor presente del valor de redención, que representa el elemento más volátil. Además, dado que el valor de redención es el ingreso que se recibe en la fecha más distante, salvo por el último cupón, su valor presente es también más volátil que el de todos los cupones, excepto uno, según lo visto en el punto (a).

- c) Finalmente, el incremento en la volatilidad al aumentar el nivel de tasas de interés se debe al hecho de que, a niveles más altos, el mismo cambio porcentual implica más puntos base. Dado que el valor presente del valor de redención fluctúa en relación casi directa a los puntos base de cambio y no a la variación porcentual, cambiará mucho más rápidamente en un ambiente de tasas altas.

En suma, hemos visto que la volatilidad de un bono se ve afectada por los tres factores mencionados, pero muchas veces esos factores influyen en direcciones distintas, de tal forma que un bono a largo plazo puede ser menos volátil que otro más corto, dependiendo de sus características.

En la tabla (5.iv) se muestra la volatilidad de los bonos combinando las características estudiadas. Podemos observar que se cumple lo que hemos establecido con excepción del caso de los bonos perpetuos que poseen características especiales:

- Todas las volatilidades aumentan con el vencimiento si el cupón y el nivel de tasas se mantienen constantes.
- Todas las volatilidades disminuyen al aumentar el cupón.
- Todas las volatilidades en el ambiente de tasas altas son mayores que aquellas en el ambiente de tasas bajas.

TABLA 5.iv

Vencimientos

CUPON	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	PERPETUOS
-Incremento en el rendimiento de 7% a 8.75% (25%)											
0	-1.67	-3.31	-4.93	-6.51	-8.07	-15.50	-22.32	-28.59	-34.36	-39.66	-20.00
1	-1.67	-3.29	-4.86	-6.38	-7.86	-14.50	-19.82	-23.74	-26.30	-27.63	-20.00
2	-1.66	-3.26	-4.80	-6.27	-7.67	-13.73	-18.16	-21.11	-22.82	-23.57	-20.00
3	-1.66	-3.24	-4.74	-6.16	-7.50	-13.11	-16.99	-19.47	-20.87	-21.54	-20.00
4	-1.65	-3.21	-4.68	-6.06	-7.35	-12.60	-16.12	-18.34	-19.63	-20.31	-20.00
5	-1.65	-3.19	-4.63	-5.97	-7.21	-12.17	-15.44	-17.51	-18.77	-19.49	-20.00
6	-1.65	-3.17	-4.58	-5.88	-7.08	-11.81	-14.91	-16.89	-18.13	-18.91	-20.00
7	-1.64	-3.15	-4.53	-5.80	-6.97	-11.51	-14.46	-16.39	-17.65	-18.47	-20.00
8	-1.64	-3.13	-4.49	-5.73	-6.86	-11.24	-14.10	-16.00	-17.27	-18.13	-20.00
9	-1.63	-3.11	-4.44	-5.66	-6.76	-11.00	-13.79	-15.67	-16.96	-17.85	-20.00
-Incremento en el rendimiento de 4% a 5% (25%)											
0	-0.97	-1.94	-2.89	-3.84	-4.77	-9.32	-13.64	-17.77	-21.69	-25.43	-20.00
1	-0.97	-1.92	-2.85	-3.77	-4.66	-8.81	-12.45	-15.56	-18.14	-20.22	-20.00
2	-0.97	-1.91	-2.82	-3.70	-4.55	-8.41	-11.60	-14.18	-16.22	-17.78	-20.00
3	-0.97	-1.89	-2.79	-3.64	-4.46	-8.07	-10.96	-13.24	-13.24	-16.37	-20.00
4	-0.96	-1.88	-2.75	-3.59	-4.38	-7.79	-10.47	-12.55	-12.55	-15.45	-20.00
5	-0.96	-1.87	-2.72	-3.53	-4.30	-7.56	-10.07	-12.03	-12.03	-14.81	-20.00
6	-0.96	-1.86	-2.70	-3.49	-4.23	-7.35	-9.75	-11.62	-11.62	-14.33	-20.00
7	-0.96	-1.84	-2.67	-3.44	-4.16	-7.18	-9.48	-11.30	-11.30	-13.96	-20.00
8	-0.95	-1.83	-2.64	-3.40	-4.10	-7.02	-9.25	-11.02	-11.02	-13.66	-20.00
9	-0.95	-1.82	-2.62	-3.36	-4.04	-6.89	-9.06	-10.80	-10.80	-13.42	-20.00

## 2 Implicaciones para el inversionista

Muchas de las ventajas y desventajas estructurales de los bonos que hemos estudiado pueden ser contrarrestadas por el comportamiento del mercado, por ejemplo, la volatilidad de los bonos a mediano plazo (entre cinco y diez años) en la realidad es mayor de lo que nos muestra la tabla (5.iv), ya que los rendimientos a corto y mediano plazo fluctúan más que aquellos a largo plazo. Dado que esos factores no se pueden medir y varían constantemente, el objeto de este trabajo no es señalar un programa de inversión sino destacar las características estructurales propias de los bonos y derivar de ellas algunas conclusiones.

El invertir en un instrumento más volátil implica un mayor riesgo pero también brinda la posibilidad de obtener una mayor recompensa. La decisión del inversionista en cuanto a comprar un instrumento más o menos volátil dependerá de sus perspectivas de tasas de interés:

- a) Si se esperan tasas más altas en el futuro, el inversionista buscará un instrumento con mínima volatilidad, a fin de que el alza de las tasas afecte lo menos posible su rendimiento. Por lo anterior invertirá en instrumentos a corto plazo, con cupón alto y



arriba de par (a premio), características que, como hemos estudiado, son menos volátiles. De esta forma, además de disminuir el riesgo ganará cupones al tos que podrá reinvertir a tasas altas.

- b) Cuando un inversionista espera tasas más bajas en el futuro buscará aumentar la volatilidad de su car tera, a fin de que el precio de sus instrumentos au mente mucho aunque la disminución en las tasas sea menor de lo previsto. Para lograrlo comprará bonos a largo plazo, con cupón bajo y a descuento, que son las características que aumentan dicha volatili dad.

## VI RENDIMIENTO DE LOS BONOS

Debido al enorme volumen de instrumentos que se maneja en el mercado internacional, el inversionista tiene a su alcance una gran variedad de bonos entre los que debe elegir, los cuales presentan un amplio rango de cupones y precios que conllevan a un amplio rango de rendimientos. Por tal motivo, es de suma importancia que el inversionista decida la combinación de precio y cupón que más convenga a sus intereses.

Para enfrentar adecuadamente este problema, describiremos y evaluaremos las ventajas y desventajas en precio y rendimiento de tres clases de bonos que mencionamos anteriormente: a premio, a par y a descuento. Haremos un análisis comparativo utilizando los siguientes ejemplos:

TABLA 6.1

- Compra en 1985					REDENCION ANTICIPADA	
BONO	VENCIMIENTO	CUPON	PRECIO		FECHA	PRECIO
a premio	2000	11%	106.77	10.25	1990	105
a par	2000	10%	100.00	10.00	1990	105
a desc.	2000	9%	92.26	9.75	--	-

El factor de decisión es generalmente el RAV. En este caso, el inversionista escogerá en primer lugar el bono a premio. Sin embargo, existen otros elementos que deben considerarse antes de elegir, como son el efecto en el rendimiento de la posible redención anticipada, el efecto resultante del interés sobre interés, la mayor o menor volatilidad del instrumento dependiendo de su cupón, o el posible riesgo de la redención anticipada por las fluctuaciones futuras del precio.

#### 1 Rendimiento a "call" y rendimiento mínimo

El cálculo del rendimiento a "call" (RAC) se ha convertido en un proceso estándar para evaluar los bonos con premio alto. Para este cálculo, los flujos que se consideran son los cupones que se recibirán hasta la redención anticipada, así como el valor de redención determinado para esa fecha. Sea  $m$  el número de años que faltan para la redención anticipada y  $Pr$  el precio al que se redimiría prematuramente. Entonces el precio del bono considerando los flujos a "call" ( $P_c$ ) será:

$$P_c = c \frac{1 - (1 + \frac{i(2)}{2})^{-2m}}{i(2)} + Pr (1 + \frac{i(2)}{2})^{-2m} \dots (6.1)$$

El rendimiento a "call" será la tasa interna de retorno generada por estos flujos. Completando la tabla (6.i) tendríamos que el rendimiento a "call" del bono a premio es 10.04 y el del bono a par es 10.78. La opción de redimir prematuramente es, salvo algunas excepciones, del emisor. Por tal motivo, el inversionista sólo puede considerar que recibirá el rendimiento menor entre el RAV y el RAC. Esto ha llevado a la práctica de evaluar los bonos a premio en base a su rendimiento mínimo (el menor de los dos mencionados). Al cambiar el precio del instrumento en el mercado, ambos se moverán en la misma dirección, pero el RAC lo hará más rápidamente, como lo muestra la tabla (6.ii) que se refiere al bono a premio de la tabla (6.i).

TABLA 6.ii

PRECIO	RENDIMIENTOS	
	A VENCIMIENTO	A CALL
100	11.00	11.76
101	10.87	11.50
102	10.73	11.24
103	10.60	10.98
104	10.47	10.73
105	10.34	10.48
106	10.21	10.23
* 106.154	* 10.19	* 10.19
107	10.08	9.98
108	9.96	9.75
109	9.84	9.50
110	9.72	9.27
111	9.60	9.03
112	9.48	8.80
113	9.37	8.57
114	9.26	8.34
115	9.14	8.12

Al precio en el que ambos rendimientos son iguales se le llama Precio de Transferencia y al rendimiento correspondiente se le llama Rendimiento de Transferencia. De esta forma el RAC será el rendimiento mínimo cuando el precio de mercado sea mayor que el precio de transferencia. En caso contrario, el rendimiento mínimo será el RAV.

Aplicando el rendimiento de transferencia ( $j^{(2)}$ ), como acabamos de mencionar, el precio a call ( $P_c$ ) y el precio a vencimiento ( $P_v$ ) deben ser iguales. Tenemos entonces que

$$P_{c_j(2)} = P_{v_j(2)}$$

Sustituyendo las fórmulas (6.1) y (3.1) tenemos que

$$c \frac{1 - (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2m}}{j^{(2)}} + Pr (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2m} = c \frac{1 - (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2n}}{j^{(2)}} + (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2n}$$

Despejando Pr nos queda:

$$Pr = [c \frac{1 - (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2n}}{j^{(2)}} + (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2n} - c \frac{1 - (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{-2m}}{j^{(2)}}] (1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{2m}$$

$$Pr = c \frac{1 - (1 + \frac{i(2)}{2})^{-2(n-m)}}{j(2)} + (1 + \frac{i(2)}{2})^{-2(n-m)} \dots (6.2)$$

Podemos observar de la fórmula (6.2) que el rendimiento de transferencia se determina fácilmente. Es el RAV del bono vendido al precio de redención anticipada con una duración igual al tiempo que queda después de la redención anticipada (n-m). Además, el rendimiento de cambio permanecerá constante durante todo el período hasta la redención anticipada, ya que la diferencia (n-m) permanecerá constante.

De esta forma, el inversionista tendrá que calcular el rendimiento de transferencia una sola vez. Mientras que el RAV sea menor que el rendimiento de transferencia, será también el rendimiento mínimo. En el caso de los bonos de la tabla (6.i), el rendimiento y el precio de transferencia son, respectivamente, 10.19% y 106.15 para el bono a premio y 9.22% y 106.27 para el bono a par.

## 2 Problemas al evaluar con el rendimiento mínimo

El rendimiento mínimo que estamos estudiando es el procedimiento convencionalmente utilizado para evaluar los bo-

nos a premio con opción de redención anticipada. Sin embargo, existen algunas omisiones en este método que pueden tener implicaciones serias.

El problema más obvio es que el rendimiento mínimo ignora un importante factor que es la duración de la inversión. Un rendimiento determinado (10.04) por el tiempo que falta para la posible redención anticipada (5 años) tiene un significado muy diferente del rendimiento a vencimiento del mismo bono (10.25% durante 15 años). Estos números ni siquiera son comparables.

Si el inversionista compra un bono a un vencimiento determinado porque desea mantener su dinero invertido durante ese plazo, debe tomar en cuenta la posibilidad de redención anticipada. Puede suceder que el instrumento que está adquiriendo pase de ser un bono a largo plazo con rendimiento alto a ser uno a corto plazo, y que tenga que reinvertir su capital a tasas más bajas por el lapso que falta.

Similarmente, un inversionista a mediano plazo que espera que las tasas bajen puede comprar un bono a premio con opción de redención anticipada, esperando que esta opción se realice. Sin embargo, existe la posibilidad de que no suceda lo previsto y que su bono se transforme en un instrumento



a largo plazo que tal vez tenga que vender a un precio menor de lo esperado.

### 3 Rendimiento compuesto realizado mínimo

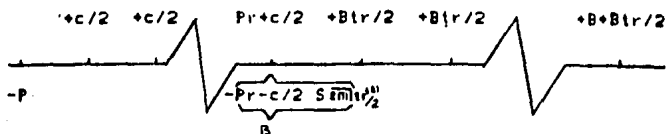
Por estos problemas de incertidumbre sobre la utilidad, podemos concluir que el rendimiento mínimo falla al tratar de explicar la relación en el precio de mercado de los bonos a premio, a par o a descuento. A fin de analizar la conveniencia de una inversión se requiere un sistema más poderoso que nos permita calcular rendimientos comparables y más realistas. Para esto utilizaremos el concepto de rendimiento compuesto realizado analizado en el capítulo III, es decir, obtendremos el rendimiento mínimo, pero suponiendo una tasa de reinversión distinta tanto del RAV como del RAC. Podríamos utilizar diversas tasas de reinversión a lo largo de la operación, pero nuestro objetivo es solamente mostrar la forma de hacer comparables las inversiones en caso de que se ejerza o no la redención anticipada, por lo que utilizaremos una única tasa de reinversión a lo largo del período.

En caso de que no se ejerza la opción, obtenemos el rendimiento compuesto realizado ( $r^{(2)}$ ) de la fórmula (3.3).

Para el caso en que se ejerza la redención anticipada, necesitamos desglosar la operación:

- El precio que pagamos es el precio contratado  $P$ .
- Durante los  $m$  años entra la compra y la redención anticipada reinvertiremos los cupones a la tasa de reinversión  $tr$  (2).
- Al ejercerse la opción, reinvertimos el monto recibido por el precio de redención ( $Pr$ ) y el monto acumulado de los cupones comprando un bono a par con cupón igual a la tasa de reinversión para hacerlo comparable.

La gráfica (6.A) nos muestra los flujos de la operación.



NOTA: ESTOS BONOS SE VENDEN  
SALVO EN LA DEBEHARRA

La ecuación de valor en la fecha de vencimiento es:

$$P(1 + \frac{r^{(2)}}{2})^{2n} = [\frac{c}{2} S_{2m} \frac{tr^{(2)}}{2} + Pr - (\frac{c}{2} S_{2m} \frac{tr^{(2)}}{2} + Pr)]$$

$$(1 + \frac{tr^{(2)}}{2})^{2(n-m)} +$$

$$+ (Pr + \frac{c}{2} S_{2m} \frac{tr^{(2)}}{2}) (\frac{tr^{(2)}}{2} S_{2(n-m)} \frac{tr^{(2)}}{2} + 1)$$

$$P(1 + \frac{r^{(2)}}{2})^{2n} = Pr + \frac{c}{tr^{(2)}} [(1 + \frac{tr^{(2)}}{2})^{2m} - 1]$$

$$(1 + \frac{tr^{(2)}}{2})^{2(n-m)}$$

por lo que el rendimiento compuesto realizado es:

$$r^{(2)} = 2 \left[ \frac{Pr + \frac{c}{tr^{(2)}} [(1 + \frac{tr^{(2)}}{2})^{2m} - 1] (1 + \frac{tr^{(2)}}{2})^{2(n-m)}}{P} \right]^{1/n} - 1$$

. . . (6.3)

Aplicando las fórmulas (3.3) y (6.3), según sea el caso, a los bonos de la tabla (6.1), obtendremos los rendimientos compuestos realizados que nos muestra la siguiente tabla:

TABLA 6.iii

TASA DE REINVERSION	BONO A PREMIO		BONO A PAR		BONO A DESCUENTO
	Red.	No Red.	Red.	No Red.	
12%	11.47	11.04	11.67	10.96	10.88
11%	10.74	10.54	10.94	10.47	10.41
10%	10.01	10.06	10.21	10.00	9.95
9%	9.28	9.60	9.48	9.55	9.51
8%	8.55	9.15	8.76	9.11	9.08
7%	7.82	8.72	8.03	8.69	8.68

De esta forma podemos comparar los rendimientos, ya que en todos los casos hablamos de un rendimiento al mismo plazo (15 años) y utilizamos la misma tasa de reinversión. Utilizando el rendimiento compuesto realizado mínimo y basado en sus expectativas de tasas de interés, el inversionista podrá tomar una decisión más fundamentada. Para el ejemplo que estamos analizando sucederfa lo siguiente:

- Si el inversionista espera tasas altas en el futuro (11% o más), es poco probable que se ejerza la opción de redención ya que el emisor tendria que financiarse a tasas más altas. Según la tabla (6.iii)

el instrumento más conveniente es el bono a premio, aunque con muy poca diferencia sobre los otros.

- Si el inversionista piensa que las tasas se mantendrán en los mismos niveles (alrededor de 10%), las posibilidades de que se ejerza o no la opción están niveladas. En este caso conviene más el bono a par ya que, en caso de redención, ofrece una ventaja no table, mientras que en caso de que no haya redención la diferencia contra el bono a premio es mínima.
- Finalmente, si las perspectivas de tasas son a la baja (menos de 8%), lo más probable es que el emisor redima sus bonos para financiarse a menor costo. En este caso la ventaja es notoriamente para el bono a descuento.

## VII CONCLUSIONES

Los principios básicos de la Teoría del Interés son relativamente pocos. En este trabajo los hemos aplicado a situaciones reales generalizadas a fin de llevar la teoría a la práctica, es decir, el poder obtener resultados concretos al utilizar dicha teoría para analizar la estructura intrínseca de los bonos y de este modo aprovechar sus características en la obtención de la mayor utilidad posible.

Cabe señalar que la aplicación de la teoría financiera en la toma de decisiones es muy limitada debido al desconocimiento de la misma. Lo más común es encontrarse con análisis superficiales y generalmente sin fundamento, considerando el comportamiento histórico de precios, tasas de interés y diferenciales.

Mediante este trabajo, el lector que no haya tenido contacto frecuente con las matemáticas financieras estará más familiarizado con los conceptos que se manejan en éstas y podrá abocarse a la utilización de conceptos y características más complejas.

Como se mencionó en el contenido de este estudio, existen factores externos que afectan la utilidad que representan los bonos y que no pueden medirse. Entre estos factores destacan la calidad del instrumento, la cual está estrechamente relacionada con el prestigio y la seriedad del emisor, la divisa en que está denominado el mismo, la liquidez que implica y su duración. Aunque la utilidad que representan estas características no pueda medirse, es preciso considerarlas seriamente al decidir una inversión ya que pueden influir más de lo esperado. En el presente estudio no pretendemos restarle importancia a estos factores contingentes, si no resolver de forma fundamentada y realista las principales interrogantes que surgen relacionadas con un bono, considerando las características medibles. Las dudas que destacan son:

- Dado el rendimiento deseado por el inversionista, qué precio debe pagar por un instrumento determinado.
- Dado el precio de un instrumento, cuál es el rendimiento que obtendrá el inversionista.
- Cuál es el valor de un instrumento en una fecha dada después de que ha sido comprado.

Existen varios procedimientos para determinar el valor de un instrumento. La intención de presentarlos no es señalar cuál es mejor, sino permitir que el inversionista los conozca y utilice el que resulte más conveniente a sus intereses.

- El primer método es el Valor de Mercado, esto es, el valor que determinan la oferta y la demanda existentes por un instrumento determinado. Este método representa un indicador muy confiable de las expectativas sobre tasas de interés, pero generalmente sigue fluctuaciones muy marcadas.
- El segundo método es el Valor en Libros, es decir, el costo original del instrumento ajustado por las amortizaciones ya hechas o por el descuento acumulado. Este método es conveniente para valuar instrumentos estables, pero resulta poco realista cuando difiere mucho del valor de mercado.
- El tercer método es lo que hemos utilizado en este estudio; el Valor Presente de todos los flujos generados por el bono. Su principal ventaja, como se demostró, es que todo el portafolio puede ser evaluado usando la misma tasa de interés. La selec-



ción de esta tasa afectará notoriamente el resultado, pudiendo llevarnos a resultados muy alejados de la realidad si no se le determina acertadamente.

Una aplicación importante que se ha dado al interés compuesto es el tratar de asegurar un rendimiento determinado durante todo el tiempo que dura la inversión, para de esta forma eliminar la incertidumbre que ocasionan las fluctuaciones en las tasas de reinversión. Estos estudios, aunque iniciados hace casi medio siglo,<sup>5/</sup> siguen en proceso de desarrollo y son muy poco utilizados. Sin embargo, se ha encontrado una gran aplicación de estas teorías en un ámbito puramente actuarial como es el caso de los seguros de vida. Es posible agrupar los flujos generados por una cartera de clientes (primas e indemnizaciones) y buscar un portafolio de bonos equivalente que permita asegurar que la compañía tendrá los fondos suficientes para hacer frente a las contingencias que se le presenten, además de generar una utilidad.

La aplicación de estas técnicas no se limita a esta área. Cualquier persona que tenga que ver con el manejo de fondos

---

<sup>5/</sup> Macaulay, Frederick R.: Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856., NY, National Bureau of Economic Research, 1938

y su distribución a fin de cumplir con obligaciones determinadas (tesoreros de bancos, corporaciones e inclusive inversionistas particulares) puede utilizar estos estudios para disminuir la incertidumbre y maximizar su rendimiento.

En muchas ocasiones se encontrarán con un grave problema: la carencia de información suficiente y oportuna. La única forma de solucionar este impedimento será promover el desarrollo del mercado mediante estudios aplicables y al alcance de cualquier inversionista potencial.

## BIBLIOGRAFIA

- Homer, Sidney and Leibowitz, Martin L.: INSIDE THE YIELD BOOK., Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. and New York Institute of Finance, New York, N. Y., 1981.
- Leibowitz, Martin L.: PROS AND CONS OF IMMUNIZATION. PROCEEDINGS OF A SEMINAR ON THE ROLES AND LIMITS OF BOND IMMUNIZATION., Salomon Brothers, 1980.
- Financial Publishing Company: INVESTOR BOND VALUES TABLE., Financial Publishing Company, 1962.
- Solomon, Robert: THE INTERNATIONAL MONETARY SYSTEM 1945-1981., Harper and Row, Publishers, N. Y., 1982.
- Orion Royal Bank LTD: THE ORION ROYAL GUIDE TO THE INTERNATIONAL CAPITAL MARKETS., Euromoney Publications, 1984.
- Stigum, Marcia: THE MONEY MARKET., Dow Jones-Irwin, 1983.
- Kellison, Stephen G.: THE THEORY OF INTEREST., Irwin Series in Insurance and Economic Security, Richard D. Irwin Inc., Homewood, Ill., 1970.
- Stigum, Marcia: MONEY MARKET CALCULATIONS., Dow Jones-Irwin, 1981.
- Diller, Stanley: INTERPRETING THE YIELD CURVE., Financial Strategies, Goldman Sachs, N. Y., September 1976.
- Espasa, Antoni: PROBLEMAS Y ENFOQUES EN LA PREDICCIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS., Servicio de Estudios del Banco de España, documento de Trabajo 8214.