88/201
2
2

UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ANALISIS DE METODOLOGIAS PARA ESTIMAR LA DURACION DE LOS BILLETES EN CIRCULACION

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
A C T U A R I O
P R E S E N T A

ESPERANZA CASTILLO ACOSTA

MEXICO, D. F. 1986

I N D I C E

1. INTRODUCCION

Una de las funciones del Banco de México es satisfacer la demanda de billete en la República Mexicana. Con este objetivo, el Banco fabrica, distribuye, recolecta y destruye billete en el país, cuidando mantener niveles y calidades adecuados de piezas de billete en circulación.

Es fundamental para la realización de esta función tener estimaciones del número de piezas que será necesario emitir para poder fabricarlas de antemano; este número depende, entre otros factores, de la duración del billete que está en un momento dado en circulación, pues a una duración pequeña corresponde una emisión mayor y viceversa, de aquí la necesidad de conocer también la duración del billete.

La durabilidad del billete en circulación es función de las características físicas del billete, de la velocidad de circulación de éste, del manejo a que lo somete el público, de las características de la región donde circula, etc. El fabricar un billete de larga duración es poco costeable, por lo que es necesario obtener un equilibrio entre los costos de producirlo y su duración en circulación. Los cambios tecnológicos presentan diversas opciones para los materiales que constituyen a un billete, por lo que es importante evaluar frecuentemente la durabilidad de billetes hechos con distintos materiales o con técnicas diversas.

El objetivo de este estudio es proponer metodologías para estimar la vida útil de un billete en circulación. Por considerarse apropiado, se ha separado el estudio en dos partes. En la primera se investigan metodologías de -

estimación directa de la duración de un billete empleadas en otros países y su adecuación para México. Además, se desarrolla una metodología original - basada en muestreos. Estos métodos se utilizan para evaluar la conveniencia de efectuar cambios en los insumos que constituyen a un billete.

En la segunda parte se propone y prueba una metodología matemática de estimación con aplicaciones en la planeación de la emisión y fabricación del billete.

En el transcurso de este estudio se identifican otros temas de interés que sería apropiado analizar en el mediano plazo. Estos temas se sumarizan en el cuarto capítulo de esta tesis. Se termina puntualizando las principales conclusiones.

2. METODOLOGIA DE ESTIMACION DIRECTA

2.1 Introducción

Como ya se mencionó, es muy importante tener estimaciones de la durabilidad de un billete en circulación. Estas estimaciones pueden llevarse a cabo en forma directa mediante pruebas de laboratorio o de campo, o indirectamente a partir de métodos matemático-estadísticos.

Dado que en el laboratorio es imposible simular todas las situaciones a las que se enfrenta un billete en circulación, la mejor metodología de estimación directa la constituyen las pruebas de campo.

En este capítulo se expondrá, en forma general, como se estima la durabilidad de un billete a través de pruebas de campo. Estas pruebas dependen de la organización particular del sistema de emisión del país donde se efectúan — como se verá en los casos de Holanda y Canadá —, pero es posible conceptualizar un modelo común de estimación.

Por último, se indicará como deberían implantarse metodologías de estimación directa en México.

2.2 Metodología

Para los propósitos de este documento, la metodología de estimación directa se puede conceptualizar de la siguiente forma, a saber: Un banco — normalmente el central — emite un lote de billete nuevo marcado (n) a través del propio banco o de otras instituciones intermedias. Como el patrón de las necesidades de billete en circulación tienen estacionalidades y debido a que existe un cierto número de billete que se deteriora, hay excedentes de billete usado, compuesto por billete apto y por no apto para circular, que son recolectados tiempo después por el banco. El billete deteriorado es destruído, y el billete apto pasa a formar parte del inventario correspondiente para ser re-emitido con posterioridad. Además, existe una cantidad de billete que por diversas causas nunca es recuperado por el banco (ingresa a colecciones numismáticas, se destruye, etc.). A este billete se le denomina irrecuperable.

Esta descripción se presenta esquemáticamente en la Figura 1.

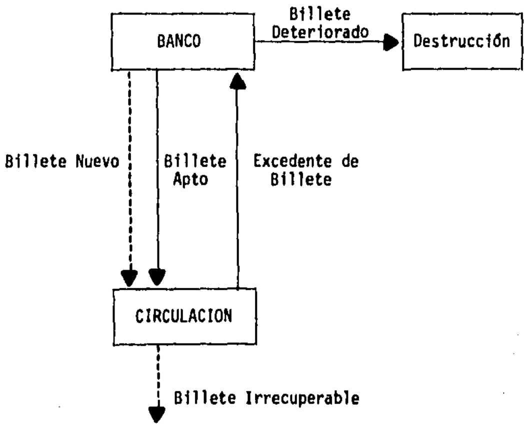

FIGURA 1

Aunque los flujos de billete descritos podrían modelarse en forma continua, por propósitos operativos y contables es conveniente discretizar el tiempo en unidades como días, semanas, etc. Además, es normal que existan políticas de re-emisión de billete usado de tal forma que un lote de billete usado no deba permanecer en inventario más de un cierto número de períodos.

Para modelar el esquema se utilizarán las siguientes variables:

n : Número total de billetes nuevos marcados emitidos por el banco al inicio del experimento.

$v(t)$: Billetes no aptos marcados retirados por el banco en el período t.

$w(t)$: Suma acumulada de estos billetes hasta un tiempo t.

$s(t)$: Billetes usados marcados, aptos para circular, recogidos por el banco en el período t.

$p(t)$: Billetes aptos marcados en el inventario al final del período t.

$c(t)$: Billetes del lote sujeto a experimento en circulación al final del período t.

ε : Billete marcado irrecuperable.

k : Número de períodos que permanece el billete apto en inventario.

Con estas variables es posible formular las ecuaciones siguientes:

1) $$w(t) = \sum_{i=1}^{t} v(i)$$

La cual se obtiene por definición.

2) $$w(t) + p(t) + c(t) = n - \varepsilon$$

En palabras, en todo tiempo el número total de billetes nuevos marcados menos los billetes irrecuperables son iguales a la suma de los billetes deteriorados, más los billetes aptos que están en inventario, más los que están en circulación.

3) $$p(t) = s(t) + s(t-1) + \ldots + s(t-k+1) = \sum_{i=0}^{k-1} s(t+i-k+1)$$

Esta ecuación resulta del hecho de que el billete usado apto para circular, solamente se mantiene k períodos en inventario.

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (3) en la ecuación (2) es posible obtener una expresión para el número de piezas de billete sujetos a experimento en el circulante como:

4) $$c(t) = n - \sum_{i=1}^{t} \upsilon(i) - \sum_{i=0}^{k-1} s(t+i-k+1) - \varepsilon$$

2.3 Metodología Empleada en Holanda

Holanda es un país relativamente pequeño en extensión territorial lo que posibilita que tenga controles casi absolutos sobre el billete en circulación. En el sistema de emisión de este país, cada billete es registrado en medios magnéticos y se hace un seguimiento por pieza de los flujos de cada uno de ellos. Esto permite conocer a la perfección toda la información necesaria para el modelo descrito en la sección anterior. El número de períodos en que permanece el billete usado, apto para circular, en inventario es de 2 semanas; entonces, la Ec. (3) para este país se puede expresar como:

5) $$p(t) = s(t) + s(t-1)$$

Para estimar la vida media de un lote de billete en circulación [1], - se emite un lote n de billete marcado y durante un período relativamente largo de tiempo T, se analizan todas las variables de interés. La parte de billete que se destruye en un período es simplemente la diferencia observada - entre dos valores consecutivos de c(t); la vida de cada billete que se des-- truye se determina como el período de tiempo que duró en circulación. Por - lo tanto, la vida media para un lote de billete se calcula como:

$$6) \quad VM = \frac{\sum_{t=o}^{T} c(t)}{n-\varepsilon} \quad ó \quad VM = \frac{\sum_{t=1}^{T} [c(t-1) - c(t)] * t}{n - \varepsilon}$$

Donde $c(o) = n-\varepsilon$, se obtiene al final del período T y $c(T)=o$. Dadas las características de Holanda, bastará escoger un período T suficientemente amplio para que el valor de ε sea poco significativo.

2.4 Metodología Empleada en Canadá

Canadá es un país extremadamente extenso por lo que existen agencias - del banco central canadiense en las distintas zonas de importancia económica del país. Estas agencias son prácticamente autónomas en aquellos procesos - relacionados con la emisión de billete, y un experimento diseñado para medir la vida en circulación de un lote de billete presenta características sui generis. En primer lugar, un billete emitido por una agencia no necesariamente regresará a ésta pues puede ser captado por otras para ser destruído; por esto, el valor de ε puede ser relativamente grande a pesar de seleccionar un período amplio de tiempo T. En segundo, no existe un control absoluto sobre los flujos de billete como el holandés y no se tiene control sobre cada pieza individual de billete, no pudiéndose llevar además un registro de las piezas de billete que se re-emiten.

Un experimento para medir la vida media del billete en circulación en Canadá se reporta en [2]. Un lote de billete n se marca y se pone en circulación. Durante un período de tiempo se capta información de la variable $v(t)$ que corresponde a aquellos billetes marcados que se destruyen. Si se observa esta variable se notará un comportamiento como el de la figura siguiente:

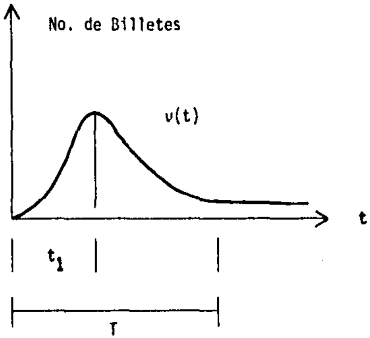

FIGURA 2

en palabras, existe un período t_1 en donde se observa un número creciente de billete marcados que regresan para destrucción; este número decrecerá hasta llegar a un tiempo T donde el regreso de estos billetes es mínimo. A partir de la información sobre $v(t)$ se puede estimar la vida media del billete como:

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.
DIRECCION GENERAL DE INCORPORACION Y REVALIDACION DE ESTUDIOS.

-FAVOR DE LLENAR A MAQUINA.
-ENTREGAR DOS EJEMPLARES DE LA TESIS EN LA BIBLIOTECA CENTRAL DE LA U.N.A.M.
-EXIGIR ACUSE DE RECIBO EN LAS DOS COPIAS.

ESPERANZA CASTILLO ACOSTA	27500528
NOMBRE DEL ALUMNO	No. CTA. DE LA U.N.A.M.
ANALISIS DE METODOLOGIAS PARA ESTIMAR LA DURACION DE LOS BILLETES EN CIRCULACION.	
NOMBRE DE LA TESIS O SEMINARIO	
ANAHUAC	ACTUARIA
UNIVERSIDAD	CARRERA

03 07 86
DIA. MES. AÑO.

SELLO Y FIRMA DE LA BIBILIOTECA

$$7) \quad \widehat{VM} = \sum_{t=1}^{T} \frac{v(t) * t}{w(T)}$$

Es importante mencionar que ésta es solamente una estimación, pues en los experimentos realizados sólo regresan en total el 36% de los billete emitidos y no se toma en cuenta el efecto de mantener billete usado en inventario pues se considera despreciable.

2.5 Metodología Propuesta para México

Una metodología de estimación directa de la vida media para México debe considerar lo siguiente:

a) Las características del sistema de emisión mexicano.

b) La diversidad de condiciones climatológicas, de costumbres y económicas que se observan en el país, las cuales tienen efectos sobre la duración del billete.

c) Los volúmenes de billete que circulan en México, que son muy superiores a los de Holanda.

A continuación se detallará cada uno de estos temas.

2.5.1 El Sistema de Emisión Mexicano

Esquemáticamente, el sistema de emisión de billete en México se presenta en la Figura 3. El Banco de México provee de billetes a sus 10 sucursales(*) establecidas en el país; éstas a su vez lo distribuyen, en sus plazas,

(*) Para propósitos de este documento se considera a la Oficina Centro como una sucursal del Banco de México.

directamente a la banca comercial, y fuera de ellas, a través de un sistema de corresponsales(*) dentro de su zona de jurisdicción. Por último, los corresponsales hacen llegar efectivo a los bancos comerciales de su plaza.

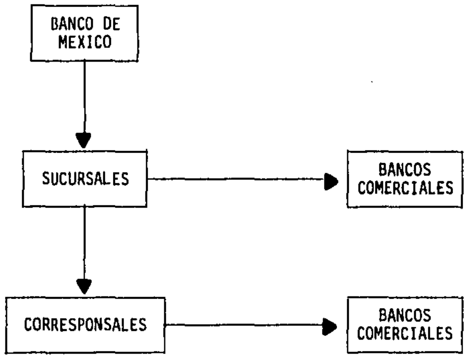

FIGURA 3

Las concentraciones de billete excedente y las de billete deteriorado siguen un camino inverso al descrito.

La tendencia del Banco de México en cuanto a la distribución de efectivo, es que sus sucursales solamente provean billete nuevo y reciban billete para destrucción, quedando en manos de los corresponsales y la banca comercial la realización de los procesos de selección de billete usado y de la re

(*) Existen 75 corresponsales del Banco de México en toda la República.

emisión de billete apto; la destrucción del billete deteriorado la harían las sucursales. Actualmente, las sucursales realizan actividades de proceso de billete usado, distribuyen billete apto e inutilizan el billete deteriorado para concentrarlo al Banco de México, donde se destruye.

Además, no se cuenta con políticas consistentes y homogéneas en el sistema para el manejo de inventarios de billete usado.

2.5.2 Condiciones del País

Como se mencionó, en México se presentan diferentes características que inciden sobre la duración y movilización del billete. Es evidente que en un lugar húmedo el billete tendrá una duración distinta a la de un lugar con clima desértico. Además, la forma como el público maneja el dinero varía aun dentro de una misma zona; la durabilidad de un billete es mayor si se maneja en forma de fajilla a si se maneja en forma de pequeñas "bolas".

Por último, existen zonas del país que son eminentemente pagadoras y otras que son concentradoras de tal forma que las primeras tienen necesidades continuas de efectivo mientras que en las segundas se generan excedentes.

2.5.3 Volúmenes de Billete

La Oficina Centro del Banco de México comprende una zona en la cual se utiliza alrededor de la mitad de todo el billete que circula en México. Dada la magnitud de esta circulación, no sería factible establecer para esta zona una metodología como la empleada en Canadá o en Holanda. Algo similar ocurre con las sucursales de Guadalajara y Monterrey.

2.5.4 Metodologías Propuestas

El primer punto que debe tratarse se refiere a la implantación de políticas en el proceso de billete usado y en la emisión de este billete. Debe asegurarse que existan estas políticas para no causar errores importantes en la estimación de la duración del billete en circulación. Encontrar las políticas adecuadas para el país es motivo de otro estudio.

En segundo lugar, es importante discutir brevemente sobre las características que deberían utilizarse para distinguir a un lote de billetes sujeto a experimentación. Estas características deben ser invisibles para el público y fáciles de detectar. Las comúnmente empleadas son el número de serie, el cual es fácil de reconocer en forma manual mediante floreos, y marcas magnéticas o fluorescentes que se introducen en alguna de las tintas empleadas en la fabricación del billete y que pueden reconocerse manual o automáticamente con la ayuda de equipos no muy sofisticados.

De acuerdo a lo indicado en las secciones anteriores, las condiciones del país motivan a que sea necesario establecer diversas metodologías de estimación. Para esto, se han identificado tres casos específicos que se discutirán a continuación.

2.5.4.1 Sucursal Pequeña Aislada

Este tipo de sucursal tiene una emisión de billete relativamente pequeño y se encuentra geográficamente aislada de otras por lo que no es ni concentradora ni pagadora. Para realizar un estudio de estimación directa de la duración de un billete en circulación en una zona de este tipo se puede utilizar la metodología empleada en Canadá y descrita al principio de este capítulo.

2.5.4.2 Sucursales Concentradoras y Pagadoras.

Como se mencionó, una sucursal concentradora recibe billete de otras zonas además de la propia, y una pagadora emite efectivo sin recibirlo posteriormente. Antes de proponer una metodología de estimación es necesario encontrar cómo se relacionan estas sucursales; para ello se propone marcar billetes que se emitan en sucursales pagadoras e identificarlos en las concentradoras correspondientes.

Una vez realizado esto, y si la magnitud del número de piezas de billete deteriorado que son captadas por una sucursal concentradora es relativamente pequeña, se puede utilizar la metodología canadiense emitiendo billete marcado a través de las sucursales pagadoras e identificándolo por medio de la concentradora respectiva.

Si el número de billetes deteriorados es relativamente alto, se puede usar la metodología que se expondrá en seguida.

2.5.4.3 Sucursal que Maneja Volúmenes Grandes.

Se mencionó que en la Oficina Centro se emite y capta alrededor del 50% del billete del país. El utilizar una metodología como la empleada en Canadá es prácticamente imposible dados los volúmenes de piezas que habría que procesar para encontrar billetes marcados. Bajo estas condiciones, una metodología de estimación directa para la zona centro u otras zonas donde -

se manejan volúmenes grandes de billetes tiene que basarse en muestreos del billete deteriorado. La teoría estadística necesaria para efectuar los muestreos en el caso en cuestión será desarrollada a continuación.

2.5.5 Consideraciones Teóricas

Un lote de billete marcado deteriorado es retirado de la circulación - acompañado de billete no marcado. Como ya se mencionó, por propósitos prácticos, esto se realiza en puntos discretos del tiempo. Sea T el número de períodos en donde se lleva a cabo el experimento. Supóngase que en cada período de tiempo (t=1,2,...,T) se retira un volumen grande de billete deteriorado, denotado por r_t, y que en ese volumen una proporción p_t es constituída por billete marcado, denotado por ν_t, esto es $p_t = \frac{\nu_t}{r_t}$. Si se tomara una muestra de tamaño m_t de ese volumen, la probabilidad de que un número x_t de billete de esa muestra sean billetes marcados se puede calcular mediante la conocida distribución binomial, con media $p_t\ m_t$ y varianza $m_t\ p_t\ (1-p_t)$; ya que los volúmenes de billete deteriorado que se manejan en cada tiempo t son muy grandes — del orden de 10^5 piezas diarias — y que la muestra tomada sería relativamente pequeña, los resultados de cada muestreo se pueden considerar prácticamente independientes entre sí.

Ahora bien, es fácil probar que el número de billetes marcados deteriorados puede ser estimado de la muestra a través de:

$$.8) \qquad \hat{\nu}_t = \frac{x_t}{m_t}\ r_t$$

Entonces, un estimador muestral de la vida media del billete está dado por:

$$9)\qquad \widehat{VM} = (n-\varepsilon)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_t}{m_t} \cdot r_t \cdot t$$

donde n es el número total de billete marcado emitido y ε el billete irrecuperable.

A diferencia de aquellas metodologías donde no se realizan muestreos y se conoce con precisión el número de piezas marcadas recuperadas al final del período T, al llevarse a cabo el muestreo se pierde esta información y el valor de ε no puede calcularse directamente. En otras palabras, ε se convierte en una variable aleatoria, lo cual complica el análisis de la expresión anotada en la Ecuación (9). Sin embargo, para paliar estos efectos, se pueden realizar dos consideraciones. En la primera, se puede obtener de datos históricos cuál es el porcentaje de billete irrecuperable y considerar a ε en la Ecuación (9) como constante para valores suficientemente grandes de T. Entonces, y bajo el supuesto de independencia entre los muestreos, es posible calcular expresiones para la media y la varianza del estimador de la Ecuación (9) como sigue:

$$10)\qquad E\,(\widehat{VM}) = (n-\varepsilon)^{-1} \sum_{t=1}^{T} p_t\, r_t \cdot t = (n-\varepsilon)^{-1} \sum_{t=1}^{T} v_t \cdot t$$

$$11)\qquad Var\,(\widehat{VM}) = (n-\varepsilon)^{-2} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{r_t}{m_t} \cdot t\right)^2 m_t\, p_t\, (1-p_t)$$

La segunda consideración es la siguiente. Nótese que:

$$12) \quad E\left(\sum_{t=1}^{T} \frac{x_t}{m_t} r_t\right) = \sum_{t=1}^{T} \nu_t = n-\varepsilon$$

Entonces, la vida media del billete podría ser estimada alternativamente a través de:

$$13) \quad \widehat{VM} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{x_t}{m_t} \cdot r_t \cdot t}{\sum_{t=1}^{T} \frac{x_t}{m_t} \cdot r_t}$$

2.5.6 Consideraciones Prácticas

En la práctica se puede conocer r_t y ejercer control sobre n, m_t y T. Sin embargo, no se conoce p_t y es dudoso que el lote de billete marcado regrese en su totalidad a pesar de realizar el experimento durante un período largo T.

De las consideraciones teóricas realizadas en la sección anterior se puede ver en la Ecuación (11) que la varianza del estimador de la vida media será reducida si n es grande — contribución cuadrática — o si cada m_t lo es también. En la práctica se puede lograr lo primero con relativa facilidad y lo segundo dependerá de los recursos disponibles. También se puede observar que aquellos términos de la sumatoria con p_t relativamente pequeños contribuyen en menor medida a la varianza.

Por último, el estimador de la Ecuación (13) es lo suficientemente complejo para sugerir su análisis a través de técnicas de simulación computacional.

2.6 Sumario

En este capítulo se revisaron algunas metodologías de estimación de la duración del billete y se propusieron, en forma general, métodos para realizar esta estimación en el país.

La implantación de metodologías de estimación directa en México no es una tarea fácil de lograr. Sin embargo, es necesario tener estimaciones de la duración del billete pues sin ellas sería imposible planear las necesidades de producción. En el siguiente capítulo se propondrá y analizará un método de estimación indirecta que provee cifras "razonables" sin necesidad de llevar a cabo pruebas de campo.

3. METODOLOGIA DE ESTIMACION INDIRECTA

3.1 Base Teórica

Supóngase que un banco central solamente emite billete nuevo y recibe billete para destrucción. Sean e(t) y r(t) las cantidades de billete que se emiten y recuperan, respectivamente, en un tiempo dado. La expresión para el número de billetes en circulación en términos de estas variables es simplemente:

$$1) \quad c(t) = \sum_{i=0}^{t} e(i) - \sum_{i=0}^{t} r(i)$$

Para propósitos de ilustración supóngase además que todo el billete tiene una duración constante d. Bajo este supuesto se tiene que:

$$2) \quad r(t) = e(t-d), \quad \forall\, t > d$$

o sea, la emisión en un cierto punto en el tiempo (t-d) es recuperada totalmente d períodos después.

La expresión $\sum_{i=0}^{t} e(i)$ puede descomponerse en:

$$3) \quad \sum_{i=0}^{t} e(i) = \sum_{i=0}^{t-d} e(i) + \sum_{i=t-d+1}^{t} e(i)$$

De la Ecuación (2) se tiene que:

$$4) \quad \sum_{i=0}^{t-d} e(i) = \sum_{i=0}^{t} r(i)$$

Por lo que reemplazando las Ecs. (3) y (4) en la Ec. (1) se obtiene:

$$5)\quad c(t) = \sum_{i=t-d+1}^{t} e(i)$$

Entonces, bajo los supuestos enunciados anteriormente, si se conoce el nivel de circulante en un tiempo dado y las emisiones realizadas de un billete, y se desea conocer la duración de éste en circulación, bastará acumular en forma retrospectiva un número de emisiones que iguale al nivel observado del circulante. Este número es la duración del billete.

Si se relajan las suposiciones referidas en cuanto a la forma en que el banco central emite y retira billete y a la duración del billete en circulación, se llega a una situación en la cual el billete emitido a un mismo tiempo no tiene por qué ser retirado de una sola vez. De hecho, el retiro de billete sigue una distribución como la graficada en la Fig. 2 del capítulo anterior.

Sin embargo, es posible obtener estimaciones burdas de la duración de un billete siguiendo el método apuntado anteriormente. Las estimaciones pueden mejorarse notablemente si se toman en cuenta otros factores como se mostrará a continuación.

3.2 Caso Real

En la Figura 1 se muestran los resultados de estimar el número de períodos (meses) en circulación del billete de $500, desde enero de 1982 a diciembre de 1984, utilizando para ello la fórmula de la Ecuación (5). Nótese las variaciones que existen entre cada uno de los períodos, la caída relativamente grande en la duración del billete que se presenta entre los meses finales de 1982 y el primer semestre de 1983, y la recuperación en los valores de la duración en los períodos siguientes.

FIGURA 1

Este comportamiento de la duración del billete no es razonable. Por el contrario se debería observar:

a) Una estabilidad en la duración del billete durante períodos cortos de tiempo, y,

b) Un decrecimiento en esta duración en períodos largos.

De hecho si no existieran fenómenos económicos que aumentan la velocidad de circulación de una denominación, se debería observar solamente el primer comportamiento.

En el ejemplo en cuestión, existen otras causas, controlables y no controlables, que afectan el cálculo de la duración del billete a través de la ecuación citada.

En la siguiente sección se propone un método de optimización que produce resultados "razonables" haciendo suposiciones simples sobre la duración del billete.

3.3 Modelo de Optimización.

El modelo de optimización propuesto para estimar la duración del billete en circulación tiene como característica fundamental la incorporación de un patrón o distribución del tiempo que permanece un billete en circulación. Además, por su propia construcción, los resultados que arroja el modelo son estables y decrecientes, y solamente utiliza información sobre las emisiones de billete nuevo realizadas y el nivel del circulante.

En forma más detallada, supóngase que el nivel de circulante observado en un tiempo t, denotado por c_t, está constituído por la suma de las emisiones realizadas durante n períodos anteriores, incluyendo el actual. Esto es igual a lo expuesto en la sección teórica de este capítulo; sin embargo, cada emisión de billete, denotada por e_t, es multiplicada por un factor ----- z_i (i=1,...,n) que representa la proporción de esa emisión que aún permanece en circulación. En términos matemáticos este razonamiento se puede expresar como:

6) $$c_t = z_1 e_t + z_2 e_{t-1} + \ldots + z_n e_{t-n+1}$$

Además, supóngase que el proceso tiene una estabilidad tal que las proporciones tienen una vigencia durante un número m de períodos; o en términos matemáticos:

$$
\begin{aligned}
7)\quad c_{t-1} &= z_1\, e_{t-1} + z_2\, e_{t-2} + \ldots + z_n\, e_{t-n} \\
c_{t-2} &= z_1\, e_{t-2} + z_2\, e_{t-3} + \ldots + z_n\, e_{t-n-1} \\
&\vdots \\
c_{t-m} &= z_1\, e_{t-m} + z_2\, e_{t-m-1} + \ldots + z_n\, e_{t-n-m+1}
\end{aligned}
$$

Nótese que $o \leq z_i \leq 1$ y que n se debe escoger de tal forma que sea mayor a lo que se estima sea la duración del billete.

Es importante analizar detalladamente las relaciones entre estas variables para mejor entender este capítulo.

En la Figura 2 se presentan 3 curvas; en la curva (a) se muestra el comportamiento de los retiros de billete, como ya ha sido expuesto en la Figura 2 del capítulo anterior. La curva (b) es la integral de la gráfica (a) y corresponde al número total de billetes retirados. La recta (c) es el número total de billetes emitidos al tiempo t=o. Entonces, para un tiempo dado t, la diferencia entre dos valores de la recta (c) y la curva (b) representa el número de billetes que fueron emitidos en t=o y que aún permanecen en circulación en t. Esta diferencia se muestra en la Figura 3, para todos los períodos, normalizada por el número total de billetes emitidos.

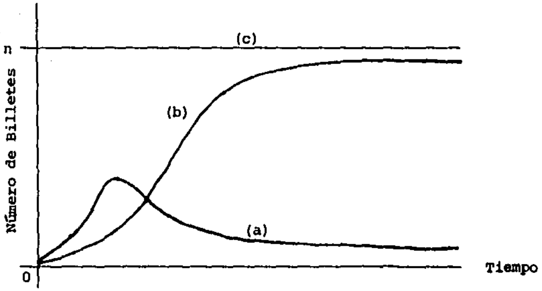

FIGURA 2

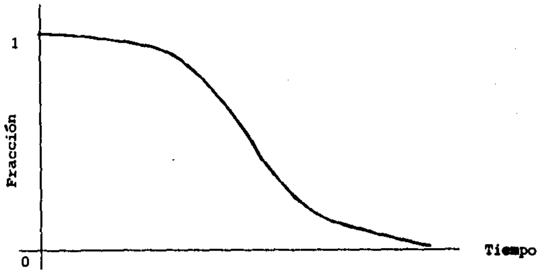

FIGURA 3

Ahora bien, el valor que se obtiene de la circulación en un tiempo dado se puede concebir como la suma de aquellas cantidades de billete, que aún se mantienen en circulación, de emisiones realizadas en tiempos anteriores. Es fácil probar que si cada emisión se comporta como la curva de la Figura 3, se cumple que $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$. Además, bajo el supuesto de estabilidad en el comportamiento de los retiros de billete, esto es, que los retiros tienen distribuciones como la de la curva (a) — la cual puede interpretarse como una función de densidad probabilística denotada por $g(t;\theta)$ — se cumple que:

$$8) \quad z_i = 1 - G(t;\theta) \ , \quad i = 1,2,\dots,n$$

donde $G(t;\theta)$ corresponde a la distribución acumulada de $g(t;\theta)$, y θ es un conjunto de parámetros de la distribución.

El sistema de ecuaciones (6), (7) y (8) por lo general no tiene solución. En casos como éste, es común tratar de suavizar las restricciones de tal forma que se encuentre una solución aproximada al problema. Una forma de lograrlo es proporcionada por la Teoría de Optimización y en este caso concreto se utiliza un planteamiento de minimización cuadrática con restricciones no-lineales. Este planteamiento es el siguiente:

$$P : \min_{(z;\theta)} \quad F(z;\theta) = \sum_{j=t-m}^{t} \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} z_i \, e_{j-i+1}\right)^2$$

sujeto a:

$$z_i = 1 - G(t;\theta) \ , \quad i = 1,2,\dots,n$$

En palabras, para una función acumulada de probabilidad G, se busca encontrar el valor de los parámetros θ y proporciones z para los cuales la suma de las diferencias observadas en cada una de las ecuaciones (6) y (7) es mínima en un sentido cuadrático. Una vez encontrados estos valores, se puede calcular la vida media del billete utilizando la fórmula:

$$9) \qquad VM = \sum_{i=1}^{n} i(z_{n-i+1} - z_{n-i+2})$$

donde $\quad z_{n+1} = o.$

Para un conjunto de valores observados de emisión y circulación de billete se pueden escoger diferentes familias de distribuciones de probabilidad. Entre éstas se seleccionaría aquélla que proporcione el valor más pequeño de la función objetivo.

Varias aplicaciones de la metodología aquí descrita se tratarán en la siguiente sección.

3.4 Aplicación de la Metodología

El método descrito en la sección anterior fue programado utilizando rutinas del paquete GRG2 (ver Anexo 1). Fue probado con datos reales de emisión y circulación de billete de varias denominaciones, usando diferentes funciones de probabilidad. Es útil comentar brevemente sobre las funciones escogidas. En primer lugar, se buscaron funciones parametrizables y unimodales; en segundo lugar, se aprovechó la experiencia que en este sentido reportan los canadienses en [2]; y, en tercero, de las funciones escogidas — normal, log-normal y Weibull — se encontró que la distribución normal consistentemente - proporcionaba valores menores de la función objetivo. Otro punto de interés es el relacionado con el tamaño de m, el número de períodos en los cuales se consideran estables las distribuciones de los retiros de billete. Experimentalmente se fijó un valor relativamente pequeño de este parámetro y fue agrandado cuidando que la contribución a la función objetivo se mantuviera dentro de límites razonables — no más de 10% de diferencia entre los valores observados de la circulación y los calculados a través de sustituir los valores de z en las ecuaciones (6) y (7) para las emisiones observadas. Los principales resultados se anexan al cuerpo de esta tesis (ver Anexo 2).

Para finalizar este capítulo, se presenta en la Figura 4 el comportamiento del número de períodos en circulación del billete de $500 obtenido con la metodología propuesta. Si se compara con la curva de la Figura 1, se puede - notar que el método analizado arroja resultados más acordes a las características mencionadas en la sección 3.2. Además, las desviaciones que se obtienen al aproximar las ecuaciones (6) y (7) con los valores óptimos encontrados para z son menores al 5% del valor de las circulaciones respectivas, para valores de m iguales a 6 meses y de n de 20 meses.

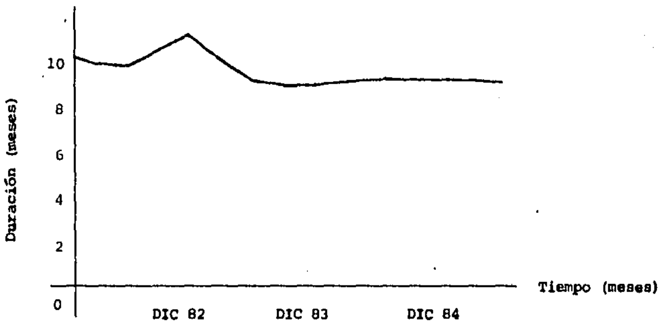

FIGURA 4

4. EXTENSIONES

4.1 Metodologías de Estimación Directa

4.1.1 Aplicación

Estas metodologías proveen estimaciones más exactas del comportamiento del billete en circulación y, por lo mismo, son económicamente más costosas que las metodologías de estimación indirecta. Además, permiten la identificación simultánea de billetes de la misma denominación, pero de características físicas diferentes. Esta propiedad es la que hace atractiva la implantación de métodos directos para evaluar las ventajas que proporciona fabricar billetes en distintos materiales.

Para analizar las propiedades en circulación de dos billetes de la misma denominación de distintas características físicas, bastaría con emitir lotes iguales de estos billetes, debidamente mezclados, y evaluar su duración de acuerdo a las metodologías descritas en este estudio.

Si se toma la decisión de utilizar la metodología basada en muestreos, sería necesario evaluar económica y operativamente el tamaño de las variables controlables, denotadas en el Capítulo 2 por n, m_i y T.

Se remarca la importancia que reviste el identificar las características de cada una de las zonas cubiertas por las sucursales del Banco de México. Bien pudiera suceder que, acorde a las diferencias en climas y costumbres, fuera ventajoso emitir billete de características apropiadas para cada lugar.

4.1.2 Aspectos Teóricos

En el segundo capítulo se plantean varios problemas estadísticos importantes desde un punto de vista teórico. Aquí se recalcan dos para conveniencia del lector. El primero se refiere a conocer las propiedades de un estimador de la vida media en el cual no se utiliza el valor del total de las piezas retiradas $(n - \epsilon)$ sino un estimador de éste. En el segundo, el supuesto de independencia entre cada uno de los muestreos es válido debido a las magnitudes de billete deteriorado que se reciben; sería interesante investigar un problema similar en donde el supuesto citado no fuera válido.

4.2 Metodología de Estimación Indirecta

4.2.1 Aplicación

Esta metodología es fundamental para propósitos de planeación, en donde no se requiere conocer con tanta exactitud la duración del billete en circulación. Puede ser mejorada si se le incluyen efectos causados por variaciones estacionales en la emisión que afectan el proceso de selección de billete - (ver Anexo 3).

Una característica de esta metodología es que indirectamente proporciona una estimación de la distribución de los retiros de billete deteriorado y, como su ejecución es relativamente simple, puede efectuarse un monitoreo periódico de la distribución citada para detectar cambios importantes en la duración de los billetes en circulación.

4.2.2 Aspectos Teóricos

La metodología matemática posee dos parámetros, denotados por m y n, que podrían ser analizados desde un punto de vista estadístico. El primero - de ellos, el número de períodos en que se considera estable la distribución de los retiros de billete podría ser fijado de acuerdo a las discrepancias que - se observan en las distribuciones que se obtienen para varios modelos de m. Para el segundo, el número máximo de períodos que transcurren entre la emisión de un billete y su retiro (n), podrían desarrollarse pruebas estadísticas para detectar cuál es el primer valor para n en dónde se puede considerar a z_n estadísticamente insignificante.

4.3 Políticas de Inventarios y de Re-emisión

Este tema ya ha sido tratado anteriormente, pero se reitera dada su importancia en los resultados que arrojan o pudieran arrojar las metodologías - discutidas en el estudio. Es necesaria la definición e implantación de políticas homogéneas de manejos de inventarios de billete usado y de re-emisión - de este billete.

5. CONCLUSIONES

Las principales contribuciones de esta tesis se pueden sumarizar brevemente como sigue:

a) Se identifican y estudian globalmente metodologías de estimación directa de la durabilidad de un billete en circulación, adecuadas a las características del sistema de emisión mexicano.

b) Se desarrolla la base estadística para una metodología de estimación directa basada en muestreos. Se encuentran en este desarrollo varios problemas interesantes desde un punto de vista teórico.

c) Se propone, y prueba exhaustivamente, una metodología matemática de estimación indirecta de la duración de un billete en circulación. Esta metodología se utiliza actualmente en el Banco de México para efectos de planeación de la emisión.

d) Se identifica una serie de estudios, relacionados con el tema, que podrían ser realizados en el futuro.

REFERENCIAS

[1] P. Koeze. The Life-Length of Bank Notes (J nuary 1980).

[2] A.H. Gillieson. Research into the Extensior of the Life Bank Notes (August 1977).

BIBLIOGRAFIA

1. J. Aitchison and J.A.C. Brown. The Lognormal Distribution, University of Cambridge, Department of Applied Economics (1966).

2. W. Feller. An Introduction to Probability Theo / and its Applications. Third Edition Vol. I, New York, John Wiley and Sons (1957).

3. H. Freeman. Introducción a la Inferencia Estadística. México, - Trillas (1979).

4. P.L. Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Washington State University, Departamento de Matemáticas. Fondo Educativo Interamericano (1973).

A N E X O   1

PRINCIPALES PROGRAMAS UTILIZADOS PARA LA EJECUCION DEL MODELO MATEMATICO DESCRITO EN EL CAPITULO 3 DE ESTE TRABAJO. SE PROGRAMARON LAS DISTRIBUCIONES NORMAL, LOG NORMAL Y WEIBULL (NO SE INCLUYEN PROGRAMAS AUXILIARES).

SUBRUTINA COMUN


```
C*****************************************************************
C*****************************************************************
C.... ESTA SUBRUTINA LEE LA INFORMACION NECESARIA PARA EL PAQUETE
C.... DE PROGRAMACION NO LINEAL GRG2, CORRESPONDIENTE AL PROBLEMA
C.... DE VIDA MEDIA DEL BILLETE.
C*****************************************************************
C*****************************************************************
C
      SUBROUTINE LEE
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION CIRC(150),EMIS(-18:150)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,NULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEN
C
C
      IF (IFLAG .EQ. 0) THEN
            WRITE(6,1060)
            READ(5,1010) NDAT
            NDATI = NDAT + 19
            WRITE(6,1040) NDATI
            READ(5,1010) (EMIS(I),I = -18,NDAT)
            WRITE(6,1050) NDAT
            READ(5,1010) (CIRC(I),I = 1,NDAT)
      ENDIF
C
C
      IFLAG = IFLAG + 1
      WRITE(6,1014)
      READ(9,1010) DEN
      WRITE(6,1000)
      READ(9,1010) NULTIS
      WRITE(6,1015)
      READ(9,1010) IMES,IANIO
      WRITE(6,1020)
      READ(9,1010) NEMIS
      WRITE(6,1030)
      READ(9,1010) NCIRC
C
C
 1000 FORMAT(2X,'DE EL NUM. DEL ULTIMO VALOR CONSIDERADO')
 1010 FORMAT()
 1014 FORMAT(2X,'DE LA DENOMINACION DEL BILLETE QUE SE VA A ANALIZAR')
 1015 FORMAT(2X,'DE LA FECHA CORRESPONDIENTE AL NUMERO ANTERIOR',/,
     &2X,'CON FORMATO   NUM.DE MES, NUM. DE ANIO',
     &'.','AMBOS DE DOS CIFRAS')
 1020 FORMAT(2X,'DE EL NUM. DE EMISIONES ANTERIORES CONSIDERADO')
 1030 FORMAT(2X,'DE EL NUM. DE CIRCULACIONES ANTERIORES CONSIDERADO')
 1040 FORMAT(2X,'DE EL VALOR DE LAS',I4,' EMISIONES')
 1050 FORMAT(2X,'DE EL VALOR DE LAS',I4,' CIRCULACIONES')
 1060 FORMAT(2X,'DE EL NUMERO DE DATOS DE CIRCULACION EN FORMATO LIBRE')
C
C
      RETURN
      END
```

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16 40 11
TESIS*VIMED(1).LEE(51)

```
C****************************************************************************
C****************************************************************************
C.... ESTE ES EL PROGRAMA PRINCIPAL DEL MODELO DE PROGRAMACION NO
C.... LINEAL PARA LA ESTIMACION DE LA VIDA MEDIA DEL BILLETE.
C.... LLAMA AL PAQUETE GRG2 PARA RESOLVER EL MODELO
C****************************************************************************
C****************************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      LOGICAL INPRNT,OTPRNT
      REAL*8 Z(8000)
      INTEGER IZ(8000)
      REAL FZ(8000)
      EQUIVALENCE(Z(1),FZ(1),IZ(1))
      DIMENSION BLVAR(2),BUVAR(2),BLCON(3),BUCON(3),RAMCON(3)
      DIMENSION RAMVAR(3),X(2),FCNS(3),RMULTS(2),REDGR(2)
      DIMENSION DEFAUL(19),CIRC(150),EMIS(-18:150),W(0:21)
      INTEGER INBIND(3),NONBAS(3)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,NULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEM
      COMMON/PROP/W,GI,U,GE
C
      REAL*8 TTITLE(10)
      IFLAG = 0
C
C
1     CALL LEE
C
C
      DO 50 I = 1,19
      DEFAUL(I) = 1.0
50    CONTINUE
      INPRNT = .FALSE.
      OTPRNT = .FALSE.
      NCORE = 4300
      NNVARS = 2
      NFUN = 3
      MAXBAS = 3
      MAXHES = 2
      NNOBJ = 3
      BLVAR(1) = 0.000
      BLVAR(2) = 0.100
      BUVAR(1) = 100.0
      BUVAR(2) = 100.0
      BLCON(1) = 0.100
      BLCON(2) = 0.000
      BLCON(3) = 0.000
      BUCON(1) = 20.00
      BUCON(2) = 0.020
      BUCON(3) = 1000000.
      X(1) = 8.0
      X(2) = 0.01
2     CALL GRGSUB(INPRNT,OTPRNT,NCORE,NNVARS,NFUN,MAXBAS,
     1 MAXHES,NNOBJ,TTITLE,BLVAR,BUVAR,BLCON,BUCON,DEFAUL,EPNEWT,EPINIT,
     2 EPSTOP,EPSPIV,PPHIEP,NNSTOP,IITLIM,LLMSER,IIPR,IIPN4,IIPN5,
     3 IIPN6,IIPER,IIDUMP,IIQUAD,LDERIV,MMODCG,
     4 RAMCON,RAMVAR,X,FCNS,INBIND,RMULTS,NONBAS,REDGR,
     5 NBIND,NNONB,INFORM,Z,IZ,FZ,20)
C
C
      WRITE(6,1029) INFORM
      IF(INFORM .GE. 0) THEN
            WRITE(6,1030) X(1),X(2)
            WRITE(6,1024) GI
```

SUPUESTO NORMAL


```
                WRITE(6,1020) U,GE
                WRITE(6,1031)
                READ(5,1023) NSIG
      ELSE
                NSIG = 0
      ENDIF
      IF(NSIG .EQ. 1) THEN
                WRITE(6,1032)
                READ(5,1023) X(1),X(2)
                GO TO 2
      ELSE
      ENDIF
C
C
      WRITE(10,1028)
      WRITE(10,1021) DEN
      WRITE(10,1022) IMES,IANIO
      WRITE(10,1024) GI
      WRITE(10,1025)
      WRITE(10,1026) (W(I),I = 1,20)
      WRITE(10,1020) U,GE
      WRITE(6,1027)
      READ(9,1023) NCORR
C
C
      IF( NCORR .EQ.1 ) GO TO 1
C
C
 1020 FORMAT(2X,'LA MEDIA ES   ',F7.3,/,2X,'LA DESV.STANDAR ES   ',F7.3
     C,///)
 1021 FORMAT(2X,'DENOMINACION DEL BILLETE  ',F10.2)
 1022 FORMAT(2X,'RESULTADOS CON DATOS HASTA  ',I2,'-','19',I2)
 1023 FORMAT()
 1024 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO ES ',F10.3)
 1025 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LAS W(I) ES ')
 1026 FORMAT(5(2X,F6.4),/)
 1027 FORMAT(2X,'DESEA REALIZAR UNA NUEVA CORRIDA  DE  SI=1,NO=0')
 1028 FORMAT(8X,'SUPUESTO  NORMAL',//)
 1029 FORMAT(2X,'EL VALOR DE INFORM ES  ',I1)
 1030 FORMAT(2X,'EL PUNTO EVALUADO (X(1),X(2)) ES   ',2X,F8.3,2X,F8.3)
 1031 FORMAT(2X,'DESEA DAR UN NUEVO PUNTO INICIAL  , SI=1,NO=0')
 1032 FORMAT(2X,'DE UN NUEVO PUNTO INICIAL  X(1),X(2),EN FORMATO LIBRE')
C
C
      STOP
      END
```

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16 50 24
TESIS*VIMED(1).MAIN(33)

```
      SUBROUTINE GCOMP(G,X)
C**********************************************************************
C**********************************************************************
C.... ESTA SUBRUTINA EVALUA LA FUNCION OBJETIVO QUE CONSISTE
C.... EN CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE EL VALOR DEL CIRCULANTE
C.... INDICADO Y LA SUMA DE LAS EMISIONES PONDERADAS CON UN
C.... COEFICIENTE QUE SIGUE UNA TENDENCIA DECRECIENTE SEGUN
C.... EL MES (OBTENIDO COMO 1-FUNCION DE DISTRIBUCION NORMAL)
C**********************************************************************
C**********************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION G(3),X(2),P(20)
      DIMENSION CIRC(150),EMIS(-10:150),W(0:21)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,MULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEN
      COMMON/PROP/W,GI,U,GE
C
C
C     CALCULO DE W(I) Y DE P(I)
C
      DO 10 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      IF(X(2) .LE. 0.0) P(I) = 0.0
      IF(X(2) .LE. 0.0) GO TO 10
      W(I) = QNORM(XI,X(1),X(2))
   10 CONTINUE
      P(1) = 1. - W(1)
      DO 11 I = 2,20
   11 P(I) = W(I-1) - W(I)
C
C     CALCULO DE LA MEDIA
C
      U = 0.0
      DO 14 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      U = U + XI*P(I)
   14 CONTINUE
C
C     RESTRICCION DE LA DESVIACION ESTANDAR
C
      G(1) = 0.0
      DO 15 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      G(1) = G(1) + ((XI-U)**2) * P(I)
   15 CONTINUE
      G(2) = W(20)
C
C     DEFINICION DE LA FUNCION OBJETIVO
C
      G(3) = 0.0
      DO 20 I = MULTIS-NCIRC+1,MULTIS
      S = 0.0
      DO 30 J = 1,NEMIS
   30 S = S + W(J)*EMIS(I-J+1)
   20 G(3) = G(3) + ((CIRC(I)-S)/CIRC(I))**2
      G(3) = G(3)*10000.
      GI = (G(3)/6.)**.5
      GE = G(1)**.5
      RETURN
      END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16 53 15
TESIS*VIMED(1).GCOMP(30)
```

SUBRUTINA DE STAT-PACK


```
      FUNCTION QNORM(X,XM,XD)                                        QNO
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*4 A(7)                                                    N.
      DATA (A(I),I=1,7)/.430638E-4,.2765672E-3,.1520143E-3,.92705272E-2,
     1.42282012E-1,.705230784E-1,1.D/
C*********************************************************************
C     TO COMPUTE A RATIONAL FUNCTION APPROXIMATION TO THE NORMAL
C     DISTRIBUTION
C*********************************************************************
      X = (X-XM)/XD
      Y=ABS(X)/1.41421356                                            QNO
      QNORM=0.D                                                      QNO
      DO 1 I=1,7
      QNORM=QNORM*Y+A(I)                                             QNO
      CALL OVERFL(INDCT)                                             QNO
      IF(INDCT.EQ.1) GO TO 3                                         QNO
    1 CONTINUE
      QNORM=.5*(((( 1.D/QNORM)**2)**2)**2)**2)                       QNO
    2 IF(X.GT.0.D) QNORM=1.D-QNORM                                   QNO
      QNORM = 1.D - QNORM
      RETURN
    3 QNORM=0.D                                                      QNO
      GO TO 2                                                        QNO
      END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16 55 23
TESIS*VIMED(1).QNORM(19)
```

```
@PACK,P VIMED.
@PACK,P PAQUETES*GRG2.
@MAP ,VIMED.MAIN
IN VIMED.MAIN
IN VIMED.LEE
IN VIMED.GCOMP
IN VIMED.QNORM
LIB VIMED.
LIB PAQUETES*GRG2.
LIB SYS$*FTNLIB.
END
```

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16 57 20
TESIS*VIMED(1).MAPEA(12)

```
C*******************************************************************
C*******************************************************************
C.... ESTE ES EL PROGRAMA PRINCIPAL DEL MODELO DE PROGRAMACION NO
C.... LINEAL PARA LA ESTIMACION DE LA VIDA MEDIA DEL BILLETE.
C.... LLAMA AL PAQUETE GRG2 PARA RESOLVER EL MODELO
C*******************************************************************
C*******************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      LOGICAL INPRNT,OTPRNT
      REAL*8 Z(4000)
      INTEGER IZ(8000)
      REAL FZ(8000)
      EQUIVALENCE(Z(1),FZ(1),IZ(1))
      DIMENSION BLVAR(2),BUVAR(2),BLCON(3),BUCON(3),RAMCON(3)
      DIMENSION RAMVAR(3),X(2),FCNS(3),FMULTS(2),REDGR(2)
      DIMENSION DEFAUL(19),CIRC(150),EMIS(-18 150),W(0 21)
      INTEGER INBIND(3),NONBAS(3)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,MULTI1,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEN
      COMMON/PROP/W,SI,U,GE
C
      REAL*8 TTITLE(19)
      IFLAG = 0
C
C
1     CALL LEE
C
C
      DO 50 I = 1,19
      DEFAUL(I) = 1.0
50    CONTINUE
      INPRNT = 'FALSE'
      OTPRNT = 'FALSE'
      NCORE = 4000
      NNVARS = 2
      NFUN = 3
      MAXBAS = 3
      MAXHES = 2
      NNOBJ = 3
      BLVAR(1) = 0.000
      BLVAR(2) = 0.100
      BUVAR(1) = 100.0
      BUVAR(2) = 100.0
      BLCON(1) = 0.100
      BLCON(2) = 0.001
      BLCON(3) = 0.020
      BUCON(1) = 20.00
      BUCON(2) = 0.020
      BUCON(3) = 1000000.
      X(1) = 8.1
      X(2) = 1.0
2     CALL GRGSUB(INPRNT,OTPRNT,NCORE,NNVARS,NFUN,MAXBAS,
     1 MAXHES,NNOBJ,TTITLE,BLVAR,BUVAR,BLCON,BUCON,DEFAUL,FPNENT,FPINIT,
     2 FPSTOP,FPSPIV,PPHIEP,NNSTOP,IITLIM,LLMSER,IIPR,IIPN4,IIPN5,
     3 IIPN6,IIPER,IIDUMP,IIQUAD,LDERIV,MMODCG,
     4 RAMCON,RAMVAR,X,FCNS,INBIND,RMULTS,NONBAS,REDGR,
     5 NBIND,NNONB,INFORM,Z,IZ,FZ,20)
C
C
      WRITE(6,1029) INFORM
      IF(INFORM .GE. 0) THEN
                 WRITE(6,1030) X(1),X(2)
                 WRITE(6,1028) GI
```

```
                WRITE(6,1020) U,GE
                WRITE(6,1031)
                READ(5,1023) NSIG
          ELSE
                NSIG = 0
          ENDIF
          IF(NSIG .EQ. 1) THEN
                WRITE(6,1032)
                READ(5,1023) X(1),X(2)
                GO TO 2
          ELSE
          ENDIF
C
C
          WRITE(22,1028)
          WRITE(22,1021) DEN
          WRITE(22,1022) IMES,IANIO
          WRITE(22,1024) B1
          WRITE(22,1025)
          WRITE(22,1026) (W(I),I = 1,20)
          WRITE(22,1020) U,GE
          WRITE(6,1027)
          READ(5,1023) NCORR
C
C
          IF ( NCORR .EQ.1 ) GO TO 1
C
C
 1020 FORMAT(2X,'LA MEDIA ES  ',F7.3,/,2X,'LA DESV.STANDAR ES  ',F7.3
     6,////)
 1021 FORMAT(2X,'DENOMINACION DEL BILLETE  ',F10.2)
 1022 FORMAT(2X,'RESULTADOS CON DATOS HASTA  'I2,'-','19',I2)
 1023 FORMAT()
 1024 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO ES ',F10.3)
 1025 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LAS W(I) ES ')
 1026 FORMAT(5(2X,F6.4),/)
 1027 FORMAT(2X,'DESEA REALIZAR UNA NUEVA CORRIDA  DE  SI=1,NO=0')
 1028 FORMAT(8X,'SUPUESTO  LOG-NORMAL',//)
 1029 FORMAT(2X,'EL VALOR DE INFORM ES  ',I1)
 1030 FORMAT(2X,'EL PUNTO EVALUADO (X(1),X(2)) ES  ',2X,F8.3,2X,F8.3)
 1031 FORMAT(2X,'DESEA DAR UN NUEVO PUNTO INICIAL , SI=1,NO=0')
 1032 FORMAT(2X,'DE UN NUEVO PUNTO INICIAL  X(1),X(2),EN FORMATO LIBRE')
C
C
          DEBUGSUBCHK
          END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 16.58.11
TESIS*VINCO(1).MAIN(13)
```

```
      SUBROUTINE GCOMP(G,X)
C*******************************************************************
C*******************************************************************
C.... ESTA SUBRUTINA EVALUA LA FUNCION OBJETIVO QUE CONSISTE
C.... EN CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE EL VALOR DEL CIRCULANTE
C.... INDICADO Y LA SUMA DE LAS EMISIONES PONDERADAS CON UN
C.... COEFICIENTE QUE SIGUE UNA TENDENCIA DECRECIENTE SEGUN
C.... EL MES (OBTENIDO COMO 1-FUNCION DE DISTRIBUCION LOG-NORMAL)
C*******************************************************************
C*******************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION G(3),X(2),P(20)
      DIMENSION CIRC(150),EMIS(-10:150),W(0:21)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,NULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEN
      COMMON/PROP/W,GI,U,GE
C
C
C     CALCULO DE W(I) Y P(I)
C
      U = 0.0
      G(1) = 0.0
      XI = 20.
      CALL ALOGNO(XI,X(1),X(2),P)
      W(0) = 1.
      DO 10 I = 1,20
      W(I) = W(I-1)-P(I)
   10 CONTINUE
C
C     CALCULO DE LA MEDIA
C
      DO 15 I=1,20
      XI = FLOAT(I)
      U = U + XI*P(I)
   15 CONTINUE
C
C     RESTRICCION DE LA VARIANZA
C
      DO 16 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      G(1) = G(1) +((XI-U)**2) * P(I)
   16 CONTINUE
      G(2) = W(20)
C
C     DEFINICION DE LA FUNCION OBJETIVO
C
      G(3) = 0.0
      DO 20 I = NULTIS-NCIRC+1,NULTIS
      S = 0.0
      DO 30 J = 1,NEMIS
   30 S = S + W(J)*EMIS(I-J+1)
   20 G(3) = G(3) + ((CIRC(I)-S)/CIRC(I))**2
      G(3) = G(3)*10000.
      GI = (G(3)/6.)**.5
      GE = (G(1)**.5)
      RETURN
      END
```

END ENSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 17 01 25
TESIS*VIMEDI(1).GCOMPL(55)

```
      SUBROUTINE ALOGNO(IT,XM,XD,P)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C
C***********************************************************************
C DISTRIBUCION LOG-NORMAL
C***********************************************************************
C
C
      DIMENSION P(20)
      F = 1.
      IT = IFIX(T)
      DO 20 I = 1,IT
      XI = FLOAT(I)
      A = (ALOG(XI)-XM)**2
      B = -(A/(2*(XD**2)))
      C = EXP(B)
      IF(XD .LT. 0.) P(I) = 0.
      IF(XD .LT. 0.) GO TO 20
      P(I) = (F*C)/(XI*XD*(6.283185**.5))
   20 CONTINUE
      RETURN
      END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 17 03 07
TESIS*VIMEO(1).LOGNOR(46)
```

```
@PACK,P VIMED.
@PACK,P PAQUETES*GRG2.
@MAP    ,VIMED.MAINL
IN VIMED.MAINL
IN VIMED.&COMPL
LIB VIMED.
LIB PAQUETES*GRG2.
LIB SYS$*FTNLIB.
END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 17 07 28
TESIS*VIMED(1).MAPEAL(0)
```

```
C*****************************************************************************
C*****************************************************************************
C.... ESTE ES EL PROGRAMA PRINCIPAL DEL MODELO DE PROGRAMACION NO
C.... LINEAL PARA LA ESTIMACION DE LA VIDA MEDIA DEL BILLETE.
C.... LLAMA AL PAQUETE GRG2 PARA RESOLVER EL MODELO
C*****************************************************************************
C*****************************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      LOGICAL INPRNT,OTPRNT
      REAL*8 Z(8000)
      INTEGER IZ(16000)
      REAL FZ(16000)
      EQUIVALENCE(Z(1),FZ(1),IZ(1))
      DIMENSION BLVAR(2),BUVAR(2),BLCON(4),BUCON(4),RAMCON(4)
      DIMENSION RAMVAR(4),X(2),FCNS(4),RMULTS(2),REDGR(2)
      DIMENSION DEFAUL(19),CIRC(150),EMIS(-18:150),WIO,21)
      INTEGER INBIND(4),NONBAS(4)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,NULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,BER
      COMMON/PROP/W,GI,GE,GG
C
      REAL*8 TITLE(19)
      IFLAG = 0
C
C
  1   CALL LEE
C
C
      DO 50 I = 1,19
      DEFAUL(I) = 1.0
 50   CONTINUE
      INPRNT = 'FALSE'
      OTPRNT = 'FALSE'
      NCORE = 8000
      NNVARS = 2
      NFUN = 4
      MAXBAS = 4
      MAXMES = 2
      NNOBJ = 4
      BLVAR(1) = 0.010
      BLVAR(2) = 2.000
      BUVAR(1) = 30.30
      BUVAR(2) = 100.0
      BLCON(1) = 0.000
      BLCON(2) = 0.100
      BLCON(3) = 0.001
      BLCON(4) = 0.000
      BUCON(1) = 100.0
      BUCON(2) = 20.00
      BUCON(3) = 0.020
      BUCON(4) = 1000000.
      X(1) = 2.00
      X(2) = 10.0
  2   CALL GRGSUB(INPRNT,OTPRNT,NCORE,NNVARS,NFUN,MAXBAS,
     1 MAXMES,NNOBJ,TITLE,BLVAR,BUVAR,BLCON,BUCON,DEFAUL,FPNEWT,FPINIT,
     2 FPSTOP,FPSPIV,PPHIEP,NNSTOP,IITLIM,LLMSER,IIPR,IIPN4,IIPN5,
     3 IIPN6,IIPER,IIDUMP,IIQUAD,LDERIV,MMODCG,
     4 RAMCON,RAMVAR,X,FCNS,INBIND,RMULTS,NONBAS,REDGR,
     5 NBIND,NNONB,INFORM,Z,IZ,FZ,20)
C
C
      WRITE(6,1029) INFORM
      IF(INFORM .GT. 0) THEN
```

```
                  WRITE(6,1030) X(1),X(2)
                  WRITE(6,1024) GI
                  WRITE(6,1020) GG,GE
                  WRITE(6,1031)
                  READ(5,1023) NSIG
          ELSE
                  NSIG = 0
          ENDIF
          IF(NSIG .EQ. 1) THEN
                  WRITE(6,1032)
                  READ(5,1023) X(1),X(2)
                  GO TO 2
          ELSE
          ENDIF
C
C
          WRITE(22,1028)
          WRITE(22,1021) DEN
          WRITE(22,1022) IMES,IANIO
          WRITE(22,1024) GI
          WRITE(22,1025)
          WRITE(22,1026) (W(I),I = 1,20)
          WRITE(22,1020) GG,GE
          WRITE(6,1027)
          READ(5,1023) NCORR
C
C
          IF ( NCORR .EQ.1 ) GO TO 1
C
C
 1020 FORMAT(2X,'LA MEDIA ES  ',F7.3,/,2X,'LA DESV.STANDAR ES  ',F7.3
     &,///)
 1021 FORMAT(2X,'DENOMINACION DEL BILLETE  ',F10.2)
 1022 FORMAT(2X,'RESULTADOS CON DATOS HASTA  ',I2,'-',' 19',I2)
 1023 FORMAT()
 1024 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO ES ',F10.3)
 1025 FORMAT(2X,'EL VALOR DE LAS W(I) ES ')
 1026 FORMAT(5(2X,F6.4),/)
 1027 FORMAT(2X,'DESEA REALIZAR UNA NUEVA CORRIDA  DE  SI=1,NO=0')
 1028 FORMAT(8X,'SUPUESTO  WEIBULL',///)
 1029 FORMAT(2X,'EL VALOR DE INFORM ES  ',I2)
 1030 FORMAT(2X,'EL PUNTO EVALUADO  X(1),X(2) ES ',2X,F8.3,2X,F8.3)
 1031 FORMAT(2X,'DESEA DAR UN NUEVO PUNTO INICIAL , SI=1,NO=0')
 1032 FORMAT(2X,'DE UN NUEVO PUNTO INICIAL  X(1),X(2),EN FORMATO LIBRE')
C
C
          DEBUGSUBCHK
          END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 198? AT 17 09 38
TESIS*VINEDI(1).MAINW(41)
```

```
      SUBROUTINE GCOMP(G,X)
C*****************************************************************
C*****************************************************************
C.... ESTA SUBRUTINA EVALUA LA FUNCION OBJETIVO QUE CONSISTE
C.... EN CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE EL VALOR DEL CIRCULANTE
C.... INDICADO Y LA SUMA DE LAS EMISIONES PONDERADAS CON UN
C.... COEFICIENTE QUE SIGUE UNA TENDENCIA DECRECIENTE SEGUN
C.... EL MES (OBTENIDO COMO 1-FUNCION DE DISTRIBUCION WEIBULL)
C*****************************************************************
C*****************************************************************
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION G(4),X(2),P(20)
      DIMENSION CIRC(150),EMIS(-10:150),W(0:21)
      COMMON/CIREMI/EMIS,CIRC,NULTIS,NCIRC,NEMIS,IFLAG,IMES,IANIO,DEN
      COMMON/PROP/W,GI,GE,GG
C
C
C     CALCULO DE W(I) Y P(I)
C
      G(1) = 0.0
      G(2) = 0.0
      XI = 20.
      CALL WEIBUL(XI,X(1),X(2),P)
      DO 10 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      IF(X(2) .LE. 0.) RETURN
      A = XI/X(2)
      IF(A .LT. 0.) RETURN
      C = -(A**X(1))
      W(I) = EXP(C)
   10 CONTINUE
C
C     RESTRICCION DE LA MEDIA
C
      DO 15 I=1,20
      XI = FLOAT(I)
      G(1) = G(1) + XI*P(I)
   15 CONTINUE
C
C     RESTRICCION DE LE VARIANZA
C
      DO 16 I = 1,20
      XI = FLOAT(I)
      G(2) = G(2) +((XI-G(1))**2) * P(I)
   16 CONTINUE
      G(3) = W(20)
C
C     DEFINICION DE LA FUNCION OBJETIVO
C
      G(4) = 0.0
      DO 20 I = NULTIS-NCIRC+1,NULTIS
      S = 0.0
      DO 30 J = 1,NEMIS
   30 S = S + W(J)*EMIS(I-J+1)
   20 G(4) = G(4) + ((CIRC(I)-S)/CIRC(I))**2
      G(4) = G(4)*10000.
      GI = (G(4)/6.)**.5
      GE = (G(2))**.5
      GG = G(1)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE WEIBUL(T,XM,XD,P)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C
C*********************************************************************
C DISTRIBUCION  WEIBULL
C*********************************************************************
C
C
      DIMENSION  P(20)
      II = IFIX(T)
      DO 10 I = 1,II
      XI = FLOAT(I)
      IF(XD .LE. 0) THEN
           P(I) = 0.
           GO TO 10
      ELSE
           A = XI/XD
      ENDIF
      IF (A .LT. 0) THEN
           P(I) = 0.
           GO TO 10
      ELSE
      IF(XM .LT. 0.0) THEN
           P(I) = 0.0
           GO TO 10
      ELSE
           B = -(A**XM)
      ENDIF
      ENDIF
      C =  EXP(B)
      D =  (A**(XM-1))*C
      P(I) = (XM/XD)*D
   10 CONTINUE
      RETURN
      END

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 17 14 54
TESIS*WIMED(1).WEIBUL2(22)
```

```
@PACK,P VIMED.
@PACK,P PAQUETES*GRG2.
@MAP ,VIMED.MAINW
IN VIMED.MAINW
IN VIMED.LEE
IN VIMED.GCOMPW
IN VIMED.WEIBUL2
LIB VIMED.
LIB PAQUETES*GRG2.
LIB SYS$*FTNLIB.
END
```

END ONSITE PRINTOUT ON NOVEMBER 12, 1985 AT 17.19.28
TESIS*VIMED(1).MAPEAW(11)

A N E X O 2

VALOR PROMEDIO DE LA FUNCION OBJETIVO

SUPUESTO	D E N O M I N A C I O N			
	500.	1 000.	5 000.	10 000.
NORMAL*	2.95	3.01	5.77	8.83
LOG NORMAL	3.02	4.06	7.20	12.45
WEIBULL	2.98	3.31	7.17	12.51

* Valor promedio menor de la función objetivo para todas las denominaciones.

DENOMINACION: $500

SUPUESTO		JUN 85	MAR 85	DIC 84	SEP 84	JUN 84	MAR 84	DIC 83	SEP 83	JUN 83	MAR 83	DIC 82	SEP 82
		P E R I O D O											
NORMAL	VIDA MEDIA	9.07	9.32	9.35	9.24	9.28	9.33	9.01	8.89	9.19	10.07	11.33	10.81
	DESVIACION ESTANDAR	2.14	0.76	1.38	2.94	2.47	0.47	4.47	4.47	4.47	4.47	2.54	0.39
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.65	3.88	2.79	1.56	2.14	2.41	2.18	1.55	4.60	7.41	4.13	4.09
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	8.77	9.02	8.96	8.87	8.90	8.92	8.81	8.60	8.74	10.10	11.11	10.69
	DESVIACION ESTANDAR	3.57	3.54	3.54	3.56	3.55	3.55	3.57	3.59	3.57	3.36	3.15	3.24
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.70	3.96	2.87	1.46	2.15	2.41	2.26	1.99	3.90	9.23	4.90	4.67
WEIBULL	VIDA MEDIA	8.65	8.86	8.81	8.47	8.53	8.52	8.40	8.32	8.51	9.63	10.78	10.37
	DESVIACION ESTANDAR	3.47	4.30	3.84	4.32	4.32	4.32	4.33	4.34	4.32	4.18	3.19	4.05
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.76	3.96	2.98	1.51	2.26	2.53	2.05	1.68	4.06	8.00	4.29	3.51

DENOMINACION: $500

SUPUESTO		PERIODO										
		JUN 82	MAR 82	DIC 81	SEP 81	JUN 81	MAR 81	DIC 80	SEP 80	JUN 80	MAR 80	DIC 79
NORMAL	VIDA MEDIA	9.99	10.01	10.10	10.46	10.37	10.17	9.65	9.68	10.14	10.02	10.01
	DESVIACION ESTANDAR	0.78	0.32	4.46	1.99	1.86	0.37	4.47	2.50	3.77	0.81	0.91
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	2.96	6.98	3.67	0.63	1.69	4.38	3.34	1.55	1.68	0.52	0.00
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	10.16	9.73	10.12	10.17	10.36	9.79	9.56	9.71	9.72	9.82	9.82
	DESVIACION ESTANDAR	2.39	3.42	3.35	3.34	2.37	3.41	3.45	2.72	3.43	3.41	3.41
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.95	5.34	4.02	0.96	1.78	3.17	3.64	1.30	1.11	0.71	0.00
WEIBULL	VIDA MEDIA	9.81	9.37	9.99	9.80	9.95	9.70	9.14	9.30	9.60	9.72	9.61
	DESVIACION ESTANDAR	3.34	4.22	3.31	4.15	3.31	3.34	4.25	3.39	4.02	3.35	3.99
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	4.63	4.87	3.85	1.24	2.27	3.14	3.49	2.05	1.48	0.87	0.01

DENOMINACION: $1,000

SUPUESTO		PERIODO											
		JUN 85	MAR 85	DIC 84	SEP 84	JUN 84	MAR 84	DIC 83	SEP 83	JUN 83	MAR 83	DIC 82	SEP 82
NORMAL	VIDA MEDIA	11.62	12.87	12.50	12.50	12.82	13.80	14.25	14.87	16.74	17.46	19.61	17.61
	DESVIACION ESTANDAR	0.49	1.19	3.46	3.47	3.32	0.64	1.69	2.41	0.85	1.27	0.49	1.21
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.16	3.54	2.83	2.71	1.39	1.82	1.94	3.46	2.71	6.68	2.47	5.59
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	11.18	12.80	12.50	12.41	12.79	13.80	14.05	14.85	16.33	16.39	16.39	16.39
	DESVIACION ESTANDAR	3.14	1.99	2.81	2.84	2.74	1.81	2.37	2.11	1.58	1.59	1.59	1.59
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.00	4.12	3.32	2.85	1.56	3.19	1.77	3.79	3.41	8.66	11.80	8.77
WEIBULL	VIDA MEDIA	10.88	12.17	12.15	12.16	12.48	13.29	13.91	14.64	16.16	17.43	18.17	17.48
	DESVIACION ESTANDAR	3.94	2.92	3.61	3.61	3.52	2.64	3.04	2.76	1.72	1.52	1.13	1.50
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	4.51	4.29	2.76	2.67	1.35	3.86	2.22	3.08	3.12	6.49	4.30	5.75

DENOMINACION: $1,000

SUPUESTO		JUN 82	MAR 82	DIC 81	SEP 81	JUN 81	MAR 81	DIC 80	SEP 80	JUN 80	MAR 80	DIC 79	SEP 79
NORMAL	VIDA MEDIA	15.95	15.32	15.38	15.75	15.40	14.80	14.24	13.78	13.09	11.81	11.72	11.52
	DESVIACION ESTANDAR	1.93	2.20	2.18	2.01	2.17	2.44	0.43	1.56	0.65	3.77	3.81	3.66
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.78	2.01	1.87	2.59	3.28	2.55	1.61	2.82	5.12	2.98	1.39	0.00
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	15.93	15.29	15.33	15.77	15.42	14.81	14.48	14.07	12.39	11.82	11.68	11.32
	DESVIACION ESTANDAR	1.75	1.97	1.96	1.80	1.92	2.13	1.65	2.36	2.84	2.98	3.02	3.10
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.85	2.05	1.88	2.67	3.32	3.09	3.37	6.29	5.98	2.85	1.93	0.00
WEIBULL	VIDA MEDIA	15.73	15.11	15.21	15.49	15.08	14.50	14.05	13.36	12.04	11.43	11.37	11.10
	DESVIACION ESTANDAR	2.31	2.58	2.54	2.42	2.59	2.82	2.42	2.62	3.65	3.81	3.83	3.46
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.67	2.01	1.87	2.40	3.29	2.09	3.40	3.34	6.65	2.99	1.36	0.01

DENOMINACION: $5,000

SUPUESTO		PERIODO													
		JUN 85	MAR 85	DIC 84	SEP 84	JUN 84	MAR 84	DIC 83	SEP 83	JUN 83	MAR 83	DIC 82	SEP 82	JUN 82	MAR 82
NORMAL	VIDA MEDIA	8.95	9.70	12.05	13.87	15.62	15.61	15.43	13.49	10.95	13.54	13.55	11.38	8.90	7.33
	DESVIACION ESTANDAR	1.03	0.46	0.75	2.85	2.07	2.07	2.16	1.07	0.32	0.50	0.50	0.48	0.32	1.38
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	4.31	13.96	4.24	7.57	5.45	4.50	5.06	6.15	3.47	3.92	5.53	11.08	5.60	0.00
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	9.40	10.31	12.17	13.45	15.67	15.59	15.37	14.05	11.65	13.62	14.32	12.86	10.08	8.47
	DESVIACION ESTANDAR	2.48	2.84	2.11	2.55	1.84	1.86	1.94	2.37	2.19	2.50	1.70	2.71	2.40	3.61
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	4.94	11.93	5.83	7.98	5.86	4.67	5.44	8.41	4.28	11.90	6.42	14.56	8.51	0.00
WEIBULL	VIDA MEDIA	9.18	9.97	11.85	13.87	15.26	15.43	15.32	13.40	10.84	13.00	14.30	12.56	10.19	8.72
	DESVIACION ESTANDAR	3.40	3.32	2.99	3.06	2.51	2.35	2.49	2.61	3.20	2.71	2.35	2.84	3.28	4.14
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	5.33	11.56	6.66	7.21	4.99	4.65	4.41	7.08	7.64	11.68	7.16	13.70	8.24	0.01

DENOMINACION: $10,000

SUPUESTO		PERIODO									
		JUN 85	MAR 85	DIC 84	SEP 84	JUN 84	MAR 84	DIC 83	SEP 83	JUN 83	MAR 83
NORMAL	VIDA MEDIA	11.91	13.46	15.89	19.60	18.19	17.16	16.64	14.07	11.68	17.48
	DESVIACION ESTANDAR	1.31	0.50	0.32	0.40	0.97	1.40	0.48	0.32	0.47	0.50
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.40	5.77	10.01	6.94	11.99	6.18	4.91	5.41	3.72	13.43
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	11.91	13.74	15.56	16.39	16.39	16.39	16.39	14.63	12.45	16.39
	DESVIACION ESTANDAR	2.15	1.82	1.88	1.59	1.59	1.59	1.59	1.61	2.08	1.59
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	3.72	9.05	9.80	15.79	16.08	8.66	5.42	6.25	4.74	13.61
WEIBULL	VIDA MEDIA	10.59	13.14	16.29	10.40	18.00	17.02	16.47	14.58	10.08	9.45
	DESVIACION ESTANDAR	3.22	2.67	2.07	3.24	1.23	1.72	1.98	2.27	3.30	3.39
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	8.09	10.20	9.79	32.97	11.36	5.73	5.12	6.42	16.27	20.45

DENOMINACION: $10,000

SUPUESTO		P E R I O D O								
		DIC 82	SEP 82	JUN 82	MAR 82	DIC 81	SEP 81	JUN 81	MAR 81	DIC 80
NORMAL	VIDA MEDIA	19.60	17.89	19.60	19.60	19.26	17.05	14.13	13.15	12.77
	DESVIACION ESTANDAR	0.40	0.32	0.40	0.40	0.44	0.32	0.34	1.17	1.65
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	23.20	34.03	10.57	6.94	5.87	4.53	8.23	2.70	0.00
LOG NORMAL	VIDA MEDIA	16.39	16.39	16.39	16.39	16.39	16.39	14.24	12.93	12.14
	DESVIACION ESTANDAR	1.59	1.59	1.59	1.59	1.59	1.59	1.72	1.97	2.84
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	25.46	35.78	32.77	20.82	10.94	4.72	10.42	2.56	0.00
WEIBULL	VIDA MEDIA	18.17	18.17	18.17	18.17	18.17	16.29	13.62	11.88	11.66
	DESVIACION ESTANDAR	1.13	1.13	1.13	1.13	1.13	1.66	2.55	3.69	3.56
	VALOR DE LA FUNCION OBJETIVO	23.76	28.72	20.96	10.79	6.24	5.46	11.94	3.33	0.01

A N E X O 3

GENERALIZACION DEL MODELO DE PROGRAMACION MATEMATICA

En la tercera sección de este informe se presenta un modelo de programación matemática que puede ser utilizado para estimar la vida media del billete en circulación. Este modelo es relativamente simple pues considera que los retiros de billete se comportan de acuerdo a una sola distribución probabilística. En la práctica esto no sucede: existen patrones estacionales en la demanda de billete que inciden en el proceso de billete usado y en su re-emisión por lo que el comportamiento de un billete emitido en diciembre, por ejemplo, es diferente al emitido en marzo.

El modelo desarrollado puede ser generalizado fácilmente para considerar estas variaciones estacionales. En vez de considerar una sola distribución - se puede utilizar una familia de distribuciones; en este esquema las variables denotadas por "z" en el modelo original, serían bidimensionales. No debe entenderse por esto que habría una explosión en el número de variables necesarias en el nuevo modelo pues los meses con variaciones estacionales marcadas pueden agruparse en tres:

a) Noviembre y diciembre.

b) Enero y febrero.

c) El resto de los meses.