323801

1

2 ej

UNIVERSIDAD ANAHUAC

ESCUELA DE ACTUARIA

INCORPORADA A LA U N.A.M.

APLICACION DE LA FUNCION DE MAKEHAM EN LA CONSTRUCCION DE TABLAS DE ROTACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A N :

MARIA LUISA GUADALUPE ACUÑA BARRAGAN

MARIA DOLORES LOBATO HERNANDEZ

MEXICO, D. F. 1986

INDICE

INTRODUCCION

La rotación es uno de los elementos de mayor importancia dentro de los supuestos que determinan el costo de un plan de pensiones. Esto se debe a que es el factor de mayor incidencia entre las causas que originan las deserciones. Es por este motivo y por las características de la curva que describe la rotación que se pretende determinar si es válido el ajuste de esta curva por medio de la Función de Makeham.

Para lograrlo se construyó una tabla con la experiencia de tres compañías, que se ajustó posteriormente con la Función de Makeham, calculando las constantes por dos métodos diferentes.

Los resultados se encuentran al final del estudio y más detalladamente se pueden observar en las Tablas y Gráficas que se encuentran en los Anexos.

I. SUPUESTOS QUE DETERMINAN EL COSTO DE UN PLAN DE PENSIONES

Una de las tareas del Actuario en el campo de las pensiones, al instalar un plan, es hacer una valuación actuarial [1] del plan tomando en cuenta los beneficios que éste proporciona, los datos de los empleados y los supuestos que determinan el costo.

Un plan de pensiones es aplicable a grupos abiertos, lo que significa que puede haber nuevos ingresos que aumentarán el grupo y deserciones que harán que éste disminuya. Las deserciones se deben a tres causas: Muerte, Invalidez y Rotación. Esta última se refiere al abandono del empleo por cualquier motivo diferente a la muerte o invalidez.

Los costos actuariales, que provienen de los datos de los empleados y de supuestos actuariales, son sólo guías del verdadero costo. Por un lado los salarios cambiarán de acuerdo a la economía, y no a la escala asumida por los Actuarios. Y por otro, el rendimiento de la inversión será el resultado de la tasa de interés vigente y no será derivado de la tasa supuesta por los Actuarios.

Así pues, el Actuario adopta varios supuestos para estimar el costo verdadero de un plan de pensiones. Los objetivos que debe buscar al escoger sus hipótesis o supuestos son: que reflejen lo más verazmente la realidad y que éstas sean congruentes entre sí.

Los supuestos principales son: mortalidad, interés, tasa de retiro, retiro por incapacidad, tasa de rotación, tasa de nuevo ingreso, escala de salarios, estado civil y gastos extras. Hay además otros elementos que son de gran utilidad al hacer la valuación, y varían de acuerdo a los

---

1 Valuación actuarial: Proceso que estima el costo real de un plan de pensiones.

cambios que se hagan en los supuestos principales. Estos son: valores presentes, prima única y costo normal.

Mortalidad. Para determinar los supuestos que se refieren a muertes se debe dividir a los participantes en diferentes grupos de mortalidad: empleados activos, pensionados no incapacitados, pensionados por retiro de incapacidad y pensionados por viudez. Para cualquiera de estos grupos es común utilizar tablas de mortalidad con diferencia en el sexo.

La elección de los supuestos actuariales debe ser conservadora o, al menos, adecuada al grupo cubierto.

Interés. Las anualidades llevan supuestas ciertas tasas de interés para efecto de que todo el dinero, durante todo el tiempo, produzca intereses de acuerdo a esa tasa. Es obvio querer mantener un factor de protección y por lo tanto un "spread" entre la tasa asumida y la tasa actual previsible. La suposición de una tasa prudente no significa pérdida para el empleado o para el patrón; el éxito de la inversión se refleja en el crédito y esto reduce las contribuciones subsecuentes.

Si al examinar una valuación actuarial la supuesta tasa de interés es menor que la obtenida entonces serán buenos los resultados de ésta.

Tasa de Retiro. Algunos planes estipulan la edad normal de retiro como obligatoria.

Si el plan preve un retiro anticipado, las reservas deben ser anticipadas también.

Muchos planes, a pesar de establecer la edad normal de retiro, permiten diferirla a una edad máxima de 70 años. Bajo estos planes lo mejor es seguir usando la suposición de una edad normal de retiro. Es decir, no se dará ningún crédito adicional por los años extras trabajados.

Si la experiencia del patrón indica que los retiros a edad avanzada son comunes, puede determinar diferentes tasas de retiro por edad, a medida que ésta aumenta.

Para determinar las tasas graduadas o el promedio para retiro anticipado se incluyen todos los posibles casos como equivalentes a la edad normal por medio de una reducción actuarial.

Retiro por incapacidad. El rigor de la cláusula de incapacidad en el plan (cuándo debe ser permanente o total, qué edad o años de servicio se requieren, qué período de espera tomar, qué tan liberales son los beneficios, etc.) y el grado de cuidado en el inicio y en la subsecuente recuperación son los elementos que determinarán el costo último, que normalmente es muy alto. Es por esto que ninguna o pocas compañías subrayarán el evento de retiro por incapacidad en un plan de pensiones.

Es obvio entonces que cualquier supuesto actuarial como incidencia de incapacidad toma en cuenta un considerable " error probable" . Por el mismo motivo la apreciación de la valuación actuarial sobre la tasa de incapacidad supuesta es, inicialmente, mejor que una opinion individual; debe usarse como un indicador.

Tasa de Nuevo Ingreso. Para la valuación actuarial no se toman en cuenta supuestos sobre nuevos ingresos al plan. Cuando el plan tiene requisitos de elegibilidad de edad y de tiempo de servicio es útil examinar a los que pueden ingresar, pero para incluirlos en los costos no solamente se preverían las estipulaciones del plan sino que se efectuaría una contribución.

Escala de Salarios. Existen planes de pensiones con beneficios en montos cerrados. Tales planes ocupan una fórmula de beneficios que es independiente de los salarios. La mayoría de los planes, por otro lado, usan una fórmula directamente relacionada con los salarios.

Cuando existe una fórmula separada para servicios pasados y futuros se usará para servicios pasados el salario que haya en la fecha del plan, y los beneficios futuros se calcularán con la escala de salarios futuros de los empleados.

Es conveniente asumir un incremento de salarios a medida que pasa el tiempo y aumenta la edad. La experiencia demuestra que la tasa de incremento de salarios sube hasta establecerse antes de la edad 60, y tiende a bajar más adelante.

La suposición del incremento de salarios tiene gran influencia en los costos y, a menos que se use cuando los beneficios se apoyan en alguna base final o salarios más altos, las contribuciones requeridas estarán sujetas a un aumento.

Estado Civil. A menos que el plan cubra viudez, el estado civil no tiene consecuencia en la valuación, aunque las personas casadas tienen, en general, menor mortalidad que las solteras.

Gastos Extras. Se incluyen aquí gastos, impuestos y comisiones, además de una cuenta para gastos futuros.

Actualmente los gastos intervienen tan poco en una valuación que no requieren de mayor atención.

Tasa de Rotación. En las valuaciones actuariales es importante saber, al igual que en mortalidad, si la tasa supuesta es muy alta. Si se usara la pura experiencia sin ningún ajuste, el resultado de la valuación sería sospechoso, ya que en ocasiones no se puede hacer uso de los datos proporcionados por la experiencia debido a que no se tiene información suficiente o ésta no es confiable; es por esto que se pretende usar la Función de Makeham, de la que se hablara posteriormente, para ajustar esta información y así poder obtener un resultado más confiable.

Cuando una persona cambia de empleo después de un año en el plan, libera el crédito de servicio sólo por un año; cuando una persona lo hace después de 10 años en el plan, libera poco más de 10 veces ese valor. Como habrá mayor número de gente en el primer caso es obvio que las tasas actuariales basadas en estos números bajan considerablemente los costos.

La Ley de Makeham es una de las leyes más famosas de mortalidad. De esta ley se obtiene una función que describe de una manera muy cercana a la realidad la curva de supervivencia.

William Makeham en su ley (1860) supone que la muerte es consecuencia de dos causas coexistentes: el azar (muerte por accidente) y la deterioración, que es la creciente inhabilidad para sobreponerse a la destrucción. Esta ley se expresa de la siguiente forma:

$$\mu_x = A + Bd^x$$

donde:

μ_x = La fuerza de mortalidad a edad x,

A = El azar, que es constante y

Bd^x = La deterioración, que crece en progresión geométrica.

De μ_x es posible obtener una expresión para l_x, que es el número de sobrevivientes a edad x. [2]

$$l_x = ka^x b^{d^x}$$

donde k, a, b y d son las llamadas constantes de Makeham.

Dicha función se ha aplicado también en la descripción de otros fenómenos, tales como las probabilidades de contraer matrimonio y la de trabajar. Estos fenómenos son duales, y se les llama así porque sólo admiten dos posibles estados. Como ejemplo podemos tomar el de supervivencia, es decir, una persona está viva o no lo está, pero no existe un estado intermedio.

Ya que la rotación puede incluírse dentro de los fenómenos duales el objetivo de este estudio es determinar si la función de Makeham, con los parámetros adecuados, se puede aplicar en la caracterización de la estructura por edades en el comportamiento de la rotación.

La rotación está en función de edad y antigüedad, pero si se toman en cuenta ambas el cálculo, haciendo uso de

2 La demostración se omite por no ser propósito principal de esta Tesis.

conmutados, se vuelve muy complicado, por lo que se selecciona una de las dos variables. En esta ocasión se tomó la edad por ser de más fácil manejo.

La importancia de ajustar una función a la curva que describe este fenómeno se debe a que:

1. Las tablas de rotación permiten determinar la estabilidad de los empleados en una empresa, por lo que son de gran utilidad en las valuaciones de pensiones, en el cálculo de primas de antigüedad y, en general, de beneficios para los empleados.

2. Es necesario conocer los valores de la curva para todas las edades dado que las tablas no siempre proporcionan datos para todas ellas.

3. Los usuarios obtendrán uniformidad en el manejo de la curva.

Para poder determinar la validez de la Función de Makeham en la construcción de tablas de rotación es necesario hacer una comparación entre los datos obtenidos de una tabla basada en la experiencia observada y los de una tabla basada en el ajuste de la función utilizando las constantes apropiadas. Estas constantes pueden obtenerse por medio de diferentes métodos, dos de los cuales se mostrarán más adelante.

II. CONSTRUCCION DE UNA TABLA DE ROTACION CON BASE EN LA EXPERIENCIA

Para construir una tabla de rotación se debe disponer de los datos estadísticos de varios años de experiencia de una o más compañías:

edad	año 1		año 2		. . .	año n	
15	$l_{15,1}$	$d_{15,1}$	$l_{15,2}$	$d_{15,2}$	. . .	$l_{15,n}$	$d_{15,n}$
16	$l_{16,1}$	$d_{16,1}$	$l_{16,2}$	$d_{16,2}$	. . .	$l_{16,n}$	$d_{16,n}$
.	.		.			.	
.	.		.		.	.	
.	.		.			.	
55	$l_{55,1}$	$d_{55,1}$	$l_{55,2}$	$d_{55,2}$	. . .	$l_{55,n}$	$d_{55,n}$

donde:

- $l_{x,n}$ es el número de empleados activos de edad x en el año n, y
- $d_{x,n}$ es el número de empleados de edad x que salieron por rotación en el año n.

A partir de estos datos se obtiene un indice de rotación $q_{x,n}$ que es la probabilidad de que una persona de edad x salga por rotacion en el año n, y se define como:

$$q_{x,n} = \frac{d_{x,n}}{l_{x,n}}$$

con lo que se logran n diferentes columnas, una por cada año:

edad	año 1	año 2	. . .	año n
15	$q_{15,1}$	$q_{15,2}$	. . .	$q_{15,n}$
16	$q_{16,1}$	$q_{16,2}$	. . .	$q_{16,n}$
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
55	$q_{55,1}$	$q_{55,2}$	. . .	$q_{55,n}$

Para condensar la información de esta tabla en una sola columna se obtiene una q_x única por edad que es el promedio ponderado de las $q_{x,i}$ con base en las l_x , y se define como:

$$q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_{x,i}\, q_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} l_{x,i}}$$

como:

$$q_{x,i} = \frac{d_{x,i}}{l_{x,i}}$$

entonces:

$$q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_{x,i}}{\sum_{i=1}^{n} l_{x,i}}$$

De esta forma se tiene ya una tabla de rotación con base en la experiencia.

Lo ideal en el cálculo de Pensiones sería tener una tabla de rotación para cada compañía construída con su propia experiencia. En la práctica esto no es posible, ya que no se cuenta con datos suficientes de todas las compañías, por lo que puede reunirse la información de varias compañías en una sola tabla sumando los datos uno a uno.

Para este caso particular se usaron las estadisticas de tres compañías. Condensando la información de las tres se llegó a la Tabla 1.[3]

Los indices anuales de rotación se pueden observar en la Tabla 2, éstos pueden también encontrarse en las Gráficas 1, 2, 3, 4 y 5.[4]

3 Todas las Tablas se localizan en el Anexo I.

4 Todas las Gráficas se localizan en el Anexo II.

A manera de ejemplo:

$$q_{27,5} = \frac{d_{27,5}}{l_{27,5}} = \frac{142}{750} = 0.1893333$$

Por último se obtuvo el índice ponderado de rotación por edades q_x, que aparece en la Tabla 3 y en la Gráfica 6.

Ejemplo:

$$q_{27} = \frac{\sum_{i=1}^{5} d_{27,i}}{\sum_{i=1}^{5} l_{27,i}} = \frac{578}{2953} = 0.1957331$$

Esta última es la Tabla de rotación con base en la experiencia de las tres compañías.

Puede observarse de antemano que la curva que describen los índices de rotación anuales tiene cierta similitud a la de supervivencia, misma que se acentúa marcadamente en la gráfica de los índices ponderados, donde los valores iniciales son altos; entre los 20 y 26 años la curva se estabiliza, y posteriormente toma una pendiente negativa y decrece hasta que alcanza el valor cero a edad 55, que es la última.

III. CONSTRUCCION DE UNA TABLA DE ROTACION UTILIZANDO LA FUNCION DE MAKEHAM

Una vez que se cuenta con una tabla construída con base en la experiencia se puede Makehamizar ajustándola mediante el uso de las constantes adecuadas. En este trabajo se dan dos formas de encontrar dichas constantes:

1. Método de los grupos no superpuestos, y
2. Método de los cuatro valores equidistantes.

Una vez obtenidas las constantes es posible calcular, con ayuda de éstas, los valores estimados de q_x.

METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS

Se separan los datos acumulados en cuatro grupos de observaciones sucesivas (Y_x) con un número igual de valores observados por grupo.

Primer grupo:

X:	0	1	2 . . .	m-1
Y_x:	Y_0	Y_1	Y_2 . . .	Y_{m-1}

Segundo grupo:

X:	m	m+1	m+2 . . .	2m-1
Y_x:	Y_m	Y_{m+1}	Y_{m+2} . . .	Y_{2m-1}

Tercer grupo:

X:	$2m$	$2m+1$	$2m+2$	. . .	$3m-1$
Y_x:	Y_{2m}	Y_{2m+1}	Y_{2m+2}	. . .	Y_{3m-1}

Cuarto grupo:

X:	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	. . .	$4m-1$
Y_x:	Y_{3m}	Y_{3m+1}	Y_{3m+2}	. . .	Y_{4m-1}

Se determinan las sumas de los logaritmos decimales de Y_x para cada grupo, denotándolas por S_0, S_1, S_2 y S_3.

Primer grupo:

$$S_0 = \sum_{x=0}^{m-1} (\log k + x \log a + d^x \log b)$$

$$= \sum_{x=0}^{m-1} \log k + \sum_{x=0}^{m-1} x \log a + \sum_{x=0}^{m-1} d^x \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{(m-1)+1} - 1}{d-1} \right] \log b$$

$$S_0 = m \log k + \left[\frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^m - 1}{d-1} \right] \log b \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Segundo grupo:

$$S_1 = \sum_{x=m}^{2m-1} (\log k + x \log a + d^x \log b)$$

$$= \sum_{x=m}^{2m-1} \log k + \sum_{x=m}^{2m-1} x \log a + \sum_{x=m}^{2m-1} d^x \log b$$

$$= m \log k + \left[\sum_{x=0}^{2m-1} x - \sum_{x=0}^{m-1} x \right] \log a + \left[\sum_{x=0}^{2m-1} d^x - \sum_{x=0}^{m-1} d^x \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{2m(2m-1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{2m} - 1}{d-1} - \frac{d^m - 1}{d-1} \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{3m^2 - m}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{2m} - d^m}{d - 1} \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{2m^2 + m^2 - m}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^m (d^m - 1)}{d - 1} \right] \log b$$

$$S_1 = m \log k + \left[m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^m (d^m - 1)}{d - 1} \right] \log b \quad . . \quad (2)$$

Tercer grupo:

$$S_2 = \sum_{x=2m}^{3m-1} (\log k + x \log a + d^x \log b)$$

$$= \sum_{x=2m}^{3m-1} \log k + \sum_{x=2m}^{3m-1} x \log a + \sum_{x=2m}^{3m-1} d^x \log b$$

$$= m\log k + \left[\sum_{x=0}^{3m-1} x - \sum_{x=0}^{2m-1} x\right]\log a + \left[\sum_{x=0}^{3m-1} d^x - \sum_{x=0}^{2m-1} d^x\right]\log b$$

$$= m\log k + \left[\frac{3m(3m-1)}{2} - \frac{2m(2m-1)}{2}\right]\log a + \left[\frac{d^{3m}-1}{d-1} - \frac{d^{2m}-1}{d-1}\right]\log b$$

$$= m\log k + \left[\frac{9m^2 - 3m - 4m^2 + 2m}{2}\right]\log a + \left[\frac{d^{3m} - 1 - d^{2m} + 1}{d-1}\right]\log b$$

$$= m\log k + \left[\frac{5m^2 - m}{2}\right]\log a + \left[\frac{d^{3m} - d^{2m}}{d-1}\right]\log b$$

$$= m\log k + \left[\frac{4m^2}{2} + \frac{m^2 - m}{2}\right]\log a + \left[\frac{d^{2m}(d^m - 1)}{d-1}\right]\log b$$

$$S_2 = m\log k + \left[2m^2 + \frac{m(m-1)}{2}\right]\log a + \left[\frac{d^{2m}(d^m-1)}{d-1}\right]\log b \quad \ldots (3)$$

<u>Cuarto grupo:</u>

$$S_3 = \sum_{x=3m}^{4m-1} (\log k + x\log a + d^x \log b)$$

$$= \sum_{x=3m}^{4m-1} \log k + \sum_{x=3m}^{4m-1} x\log a + \sum_{x=3m}^{4m-1} d^x \log b$$

$$= m\log k + \left[\sum_{x=0}^{4m-1} x - \sum_{x=0}^{3m-1} x\right]\log a + \left[\sum_{x=0}^{4m-1} d^x - \sum_{x=0}^{3m-1} d^x\right]\log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{4m(4m-1)}{2} - \frac{3m(3m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{4m}-1}{d-1} - \frac{d^{3m}-1}{d-1} \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{16m^2 - 4m - 9m^2 + 3m}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{4m} - 1 - d^{3m} + 1}{d-1} \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{7m^2 - m}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{4m} - d^{3m}}{d-1} \right] \log b$$

$$= m \log k + \left[\frac{6m^2}{2} + \frac{m^2 - m}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{3m}(d^m - 1)}{d-1} \right] \log b$$

$$S_3 = m \log k + \left[3m^2 + \frac{m(m-1)}{2} \right] \log a + \left[\frac{d^{3m}(d^m - 1)}{d - 1} \right] \log b \quad . . . (4)$$

Se determinan las primeras diferencias:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0$$

$$= m^2 \log a + \left[\frac{d^{2m} - d^m - d^m + 1}{d-1} \right] \log b$$

$$\Delta S_0 = m^2 \log a + \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + \left[\frac{d^{2m}(d^m - 1)}{d-1} - \frac{d^m(d^m - 1)}{d-1} \right] \log b$$

$$= m^2 \log a + \frac{d^m(d^{2m} - 2d^m + 1)}{d-1} \log b$$

$$\Delta S_1 = m^2 \log a + \frac{d^m(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \qquad . \quad . \quad . \qquad (6)$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2$$

$$= m^2 \log a + \left[\frac{d^{4m} - d^{3m} - d^{3m} + d^{2m}}{d-1} \right] \log b$$

$$\Delta S_2 = m^2 \log a + \frac{d^{2m}(d^m - 1)^2}{d-1} \log b \qquad . \quad . \quad . \qquad (7)$$

Se determinan las segundas diferencias:

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0$$

$$= \frac{(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \qquad . \quad . \quad . \qquad (8)$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1$$

$$= \frac{d^m(d^m - 1)^3}{d-1} \log b \qquad . \quad . \quad . \qquad (9)$$

De donde:

$$d^m = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

De (8):

$$\log b = \frac{d-1}{(d^m - 1)^3} \Delta^2 S_0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

De (5) y (8):

$$m^2 \log a = \Delta S_0 - \frac{(d^m - 1)^2}{d-1} \log b$$

$$= \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^m - 1} \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Siendo:

$$\Delta S_j = S_{j+1} - S_j$$

$$\Delta^2 S_j = \Delta S_{j+1} - \Delta S_j$$

Quedando por determinar k, lo que se hace imponiendo la condición de mínimos cuadrados para:

$$Q = \sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x - ka^x b^{d^x})^2$$

Entonces:

$$Q = (Y_0 - ka^0 b^{d^0})^2 + (Y_1 - kab^d)^2 + \ldots + (Y_{4m-1} - ka^{4m-1} b^{d^{4m-1}})^2$$

$$\frac{dQ}{dk} = 2(Y_0 - ka^0 b^{d^0})(-a^0 b^{d^0}) + 2(Y_1 - kab^d)(-ab^d) + \ldots +$$

$$+ 2(Y_{4m-1} - ka^{4m-1} b^{d^{4m-1}})(-a^{4m-1} b^{d^{4m-1}})$$

$$\frac{dQ}{dk} = -2 \sum_{x=0}^{4m-1} Y_x V_x + 2k \sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2$$

donde:

$$V_x = a^x b^{d^x}$$

Igualando a cero y despejando k:

$$2k \sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2 = 2 \sum_{x=0}^{4m-1} Y_x V_x$$

$$\Longrightarrow \qquad k = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} Y_x\ V_x}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^{\ 2}}$$

O equivalentemente:

$$kV_x = Y_x \qquad \Longrightarrow \qquad 2kY_x\ V_x = 2Y_x^{\ 2}$$

Entonces:

$$Q = \sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x - ka^x b^{d^x})^2$$

$$= \sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x - kV_x)^2$$

$$= \sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x^{\ 2} - 2kY_x\ V_x + k^2 V_x^{\ 2})$$

$$= \sum_{x=0}^{4m-1} (Y_x^{\ 2} - 2Y_x^{\ 2} + k^2 V_x^{\ 2})$$

$$Q = \sum_{x=0}^{4m-1} (k^2\ V_X^{\ 2} - Y_X^{\ 2}) = 0$$

$$\sum_{x=0}^{4m-1} k^2 V_x^2 = \sum_{x=0}^{4m-1} Y_x^{\ 2}$$

$$\Longrightarrow \qquad k^2 = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} Y_x^2}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2} \qquad . \quad . \quad . \quad . \qquad (13)$$

Observación:

$$Y_x^2 = (kV_x)^2 = k(kV_x)\,V_x = kY_x\,V_x$$

(13) se puede expresar:

$$k^2 = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} kY_x\,V_x}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2}$$

$$\frac{k^2}{k} = \frac{k \sum_{x=0}^{4m-1} Y_x\,V_x}{k \sum_{x=0}^{4m-1} V_x^2} \quad ,$$

$$\Longrightarrow \qquad k = \frac{\sum_{x=0}^{4m-1} Y_x \, V_x}{\sum_{x=0}^{4m-1} V_x^{\,2}}$$

METODO DE LOS CUATRO VALORES EQUIDISTANTES

Si se quiere ajustar una tabla particular por medio de la Ley de Makeham, los valores de las constantes pueden ser obtenidos haciendo uso de cuatro valores acumulados cualesquiera, siempre que sean equidistantes. Así,

$$\left.\begin{aligned}
\log Y_x &= \log k + x \log a + d^{x} \log b \\
\log Y_{x+t} &= \log k + (x+t) \log a + d^{x+t} \log b \\
\log Y_{x+2t} &= \log k + (x+2t) \log a + d^{x+2t} \log b \\
\log Y_{x+3t} &= \log k + (x+3t) \log a + d^{x+3t} \log b
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

Sacando primeras y segundas diferencias de ambos lados de estas ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta \log Y_x &= t \log a + d^{x} (d^{t} - 1) \log b \\
\Delta \log Y_{x+t} &= t \log a + d^{x+t} (d^{t} - 1) \log b \\
\Delta \log Y_{x+2t} &= t \log a + d^{x+2t} (d^{t} - 1) \log b
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 \log Y_x &= d^x \ (d^t - 1)^2 \ \log b \\ \Delta^2 \log Y_{x+t} &= d^{x+t} (d^t - 1)^2 \ \log b \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (16)$$

De donde:

$$d^t = \frac{\Delta^2 \log Y_{x+t}}{\Delta^2 \log Y_x}$$

ó $$t \log d = \log(\Delta^2 \log Y_{x+t}) - \log(\Delta^2 \log Y_x) \quad . \ . \ . \quad (17)$$

Ya que los valores del lado derecho de la ecuación (17) se pueden obtener de los datos originales, es posible entonces encontrar el log d. Sustituyendo el valor de d en la ecuación (16), se llega al valor de log b; y procediendo similarmente en sucesión con las ecuaciones (15) y (14), se obtendrán los valores de las otras dos constantes.

IV. DESCRIPCION DE LA APLICACION DEL MODELO AL CASO REAL

A continuación se encuentra el desarrollo manual del cálculo de las constantes de Makeham, y a partir de éstas la estimación de algunos índices de rotación.

Se hace esto con fines ilustrativos ya que el cálculo manual de todos resultaría excesivamente largo. Es por esto que los datos que aparecen en los Anexos fueron calculados por medio de un programa elaborado en APL que fue corrido en una computadora IBM 4341.

Aplicando el método de los grupos no superpuestos a las q_x observadas, que son 41, los grupos se formaron con 10 observaciones, quedando la última sin usarse.

El siguiente cuadro muestra los grupos de observaciones, sus logaritmos decimales y las sumas de cada grupo.

	X	Y_x	$\log Y_x$	
	0	0.25735	-0.58947	
	1	0.51303	-0.28985	
	2	0.77040	-0.11327	
	3	1.02146	0.00922	
	4	1.26928	0.10355	
GRUPO I	5	1.50630	0.17791	$S_0 = 0.57441$
	6	1.74660	0.24219	
	7	1.98353	0.29743	
	8	2.21974	0.34630	
	9	2.45690	0.39038	

	X	Y_x	$\log Y_x$	
	10	2.69403	0.43040	
	11	2.91831	0.46513	
	12	3.11605	0.49360	
	13	3.29086	0.51731	
	14	3.44268	0.53689	
GRUPO II	15	3.57953	0.55382	$S_1 = 5.33872$
	16	3.70172	0.56840	
	17	3.80465	0.58031	
	18	3.90361	0.59146	
	19	3.99358	0.60136	

	X	Y_x	$\log Y_x$	
	20	4.07540	0.61017	
	21	4.14765	0.61780	
	22	4.23150	0.62649	
	23	4.29893	0.63336	
	24	4.35928	0.63941	
GRUPO III	25	4.41122	0.64455	$S_2 = 6.39036$
	26	4.45672	0.64901	
	27	4.49892	0.65310	
	28	4.53571	0.65664	
	29	4.56869	0.65979	

	X	Y_x	$\log Y_x$	
	30	4.59531	0.66321	
	31	4.61803	0.66445	
	32	4.63382	0.66593	
	33	4.64957	0.66741	
	34	4.66121	0.66849	
GRUPO IV	35	4.66987	0.66930	$S_3 = 6.67851$
	36	4.67643	0.66991	
	37	4.67876	0.67013	
	38	4.68023	0.67026	
	39	4.68023	0.67026	

Se muestra a continuación el desarrollo final del método, que consiste en el cálculo de las primeras y segundas diferencias, a partir de las cuales se hicieron las sustituciones necesarias, con las que finalmente se obtuvo el valor de las constantes.

Sabemos que:

$$S_0 = 0.57441 = 10 \log k + 45 \log a + \frac{d^{10} - 1}{d - 1} \log b$$

$$S_1 = 5.33872 = 10 \log k + 145 \log a + \frac{d^{10}(d^{10} - 1)}{d - 1} \log b$$

$$S_2 = 6.39036 = 10 \log k + 245 \log a + \frac{d^{20}(d^{10} - 1)}{d - 1} \log b$$

$$S_3 = 6.67851 = 10 \log k + 345 \log a + \frac{d^{30}(d^{10} - 1)}{d - 1} \log b$$

Primeras diferencias:

$$\Delta S_0 = S_1 - S_0$$

$$= 4.76430 = 100 \log a + \frac{(d^{10} - 1)^2}{d - 1} \log b$$

$$\Delta S_1 = S_2 - S_1$$

$$= 1.05164 = 100 \log a + \frac{d^{10}(d^{10}-1)^2}{d-1} \log b$$

$$\Delta S_2 = S_3 - S_2$$

$$= 0.28814 = 100 \log a + \frac{d^{20}(d^{10}-1)^2}{d-1} \log b$$

Segundas diferencias:

$$\Delta^2 S_0 = \Delta S_1 - \Delta S_0$$

$$= -3.71266 = \frac{(d^{10}-1)^3}{d-1} \log b$$

$$\Delta^2 S_1 = \Delta S_2 - \Delta S_1$$

$$= -0.76349 = \frac{d^{10}(d^{10}-1)^3}{d-1} \log b$$

Determinación de d:

$$d^{10} = \frac{\Delta^2 S_1}{\Delta^2 S_0}$$

$$d = \sqrt[10]{\frac{-0.76349}{-3.71266}} = 0.85371$$

Determinación de b:

$$\log b = \frac{d-1}{(d^{10}-1)^3}\,\Delta^2 S_0$$

$$= \frac{-0.14628}{-0.50123}(-3.71266) = -1.08354$$

$$b = 0.08249$$

Determinación de a:

$$100 \log a = \Delta S_0 - \frac{\Delta^2 S_0}{d^{10}-1}$$

$$\log a = \left[4.76430 - \frac{-3.71266}{-0.79435} \right] \frac{1}{100} = \frac{0.09048}{100} = 0.00090$$

$$a = 1.00208$$

Determinación de k:

$$k = \frac{\sum_{x=0}^{39} Y_x V_x}{\sum_{x=0}^{39} V_x^2} \quad , \qquad \text{donde} \qquad V_x = a^x b^{d^x}$$

$$k = \frac{125.61460}{28.64085} = 4.38585$$

En seguida se calcularon los valores ajustados utilizando las constantes antes determinadas por medio de la fórmula:

$$Y_x = ka^x b^{d^x}$$

Ejemplos:[5]

$$Y_0 = 4.38585\,(1.00208^0)\,(0.08249^{0.85371^0})$$

$$= 0.03618$$

$$Y_1 = 4.38585\,(1.00208^1)\,(0.08249^{0.85371^1})$$

$$= 0.52229$$

$$Y_{15} = 4.38585\,(1.00208^{15})(0.08249^{0.85371^{15}})$$

$$= 3.58574$$

(5) $Y_x = q_{x+15}$

$$Y_{20} = 4.38585\,(1.00208^{20})\,(0.08249^{0.85371^{20}})$$

$$= 4.11460$$

El resto de las Y_x aparecen en la Tabla 4 y los valores desacumulados en la Tabla 5, mismos que se pueden observar en la Gráfica 7.

Aplicando el método de los cuatro valores equidistantes tenemos:

$$\log Y_5 = 0.17791 = \log k + 5 \log a + d^5 \log b \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\log Y_{16} = 0.56840 = \log k + 16 \log a + d^{16} \log b$$

$$\log Y_{27} = 0.65310 = \log k + 27 \log a + d^{27} \log b$$

$$\log Y_{38} = 0.67026 = \log k + 38 \log a + d^{38} \log b$$

Primeras y segundas diferencias:

$$\Delta \log Y_5 = 0.39049 = 11 \log a + d^5 (d^{11} - 1) \log b \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\Delta \log Y_{16} = 0.08470 = 11 \log a + d^{16} (d^{11} - 1) \log b$$

$$\Delta \log Y_{27} = 0.01715 = 11 \log a + d^{27} (d^{11} - 1) \log b$$

$$\Delta^2 \log Y_5 = -0.30578 = d^5 (d^{11} - 1)^2 \log b \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\Delta^2 \log Y_{16} = -0.06754 = d^{16} (d^{11} - 1)^2 \log b.$$

De donde:

$$d^{11} = \frac{\Delta^2 \log Y_{16}}{\Delta^2 \log Y_5} = \frac{-0.06754}{-0.30578}$$

$$d^{11} = 0.22089$$

$$d = 0.87172$$

De (3):

$$\log b = \frac{-0.30578}{d^5 (d^{11} - 1)^2} = \frac{-0.30578}{(0.87172)^5 \ (0.87172^{11} - 1)^2}$$

$$\log b = -1.00074$$

$$b = 0.09982$$

De (2):

$$\log a = \frac{0.39049 - d^5 (d^{11} - 1) \log b}{11}$$

$$= \frac{0.39049 - 0.87172^5 \ (0.87172^{11} - 1)(-1.00074)}{11}$$

$$\log a = -0.00018$$

$$a = 0.99958$$

De (1)

$$\log k = 0.17791 - 5 \log a - d^5 \log b$$

$$= 0.17791 - 5(-0.00018) - 0.87172^5 (-1.00074)$$

$$\log k = 0.68257$$

$$k = 4.81478$$

Cálculo de los valores ajustados:

$$Y_x = ka^x b^{d^x}$$

Ejemplos:

$$Y_0 = 4.81478\,(0.99958)^0\,(0.09982^{0.87172^0}) = 0.48065$$

$$Y_1 = 4.81478\,(0.99958)^1\,(0.09982^{0.87172^1}) = 0.64568$$

$$Y_{15} = 4.81478\,(0.99958)^{15}(0.09982^{0.87172^{15}}) = 3.56623$$

$$Y_{20} = 4.81478\,(0.99958)^{20}(0.09982^{0.87172^{20}}) = 4.11811$$

El resto de las Y_x aparecen en la Tabla 6 y los valores desacumulados en la Tabla 7, mismos que se pueden observar en la Gráfica 8.

V. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Es conveniente señalar algunas características importantes de la curva que describe la rotación antes de analizar los resultados del ajuste.

Es claro a la vista que esta curva (Gráfica 1) tiene un comportamiento muy parecido al de la curva de supervivencia, ya que las tasas más altas de rotación se encuentran precisamente en las primeras edades y van disminuyendo a medida que la edad aumenta hasta llegar a cero.

El hecho de que las tasas altas se registren en el inicio de la curva se debe a que la población joven puede arriesgarse más para lograr sus ambiciones, ya sea porque no tiene obligaciones económicas fuertes por ser la mayoría solteros, o porque tienen mayores oportunidades a medida que aumentan sus conocimientos y su experiencia y esta situación le permite cambiar su lugar de residencia.

Otro factor que contribuye también en gran parte es que las mujeres dejen de trabajar al casarse.

Conforme aumenta la edad, las obligaciones crecen y los empleados buscan el término de los años requeridos para su jubilación. Esto origina mayor estabilidad en los empleos.

En este estudio en particular no se tomó en cuenta la diferencia de sexo y ocupación, por lo que cabe hacer notar que un análisis más extenso puede efectuarse haciendo uso de estos factores.

Al hacer una observación global de las gráficas se puede afirmar que los datos estimados con el modelo ajustan de una manera casi perfecta con los datos observados.

Haciendo un análisis más detallado se obtienen los siguientes resultados.

Al comparar en la Gráfica 7 y las Tablas 4 y 5 los índices de rotación observados y los estimados calculados por el método de los grupos no superpuestos se encuentra una gran similitud entre ellos para las edades 28 a 45, mientras que para las edades iniciales (esto es de 15 a 27 años) se ve que difieren.

Para obtener una mejor aproximación, esta parte de la curva puede ser ajustada mediante algún otro método. Sin embargo, ya que el mayor volumen de la población económicamente activa se encuentra entre edades 28 y 45 consideramos que es suficiente con este ajuste.

En la Gráfica 8 y las Tablas 6 y 7 aparecen los índices de rotación observados y los estimados mediante el método de los cuatro valores equidistantes, de los cuales se pueden hacer las mismas observaciones que para el método de los grupos no superpuestos.

La diferencia obtenida en los parámetros por estos dos métodos es muy pequeña, por lo que los valores ajustados son muy aproximados. Es, entonces, indiferente el uso de cualquiera de los dos métodos para el cálculo de las constantes.

Es importante en la elección de la muestra tomar en cuenta el giro de la empresa, ya que la rotación también depende del tipo de actividad que se desarrolle. Como ejemplo se puede observar que es diferente el índice de rotación de un empleado que trabaja en oficinas al de un obrero que trabaja en construcciones.

Los resultados obtenidos son de carácter técnico, ya que se basan en una muestra representativa del fenómeno estudiado. Se puede hacer otro estudio. Este reduciría las limitaciones que la muestra tuviera mediante el uso de alguna técnica de muestreo y de pruebas de hipótesis. Se obtendría entonces un resultado preciso y científico.

Con todo esto podemos afirmar que la Función de Makeham, con los parámetros adecuados es válida, para este estudio en particular, en la caracterización de la estructura por edades en el comportamiento de la rotación, con lo que en adelante se tendrán datos más confiables y uniformes para todas las edades. Además de que se podrá contar con una mejor herramienta en la estimación del costo de un plan de pensiones.

ANEXO I

ROTACION DE TRES COMPAÑIAS CON BASE EN 5 AÑOS DE EXPERIENCIA

EDAD	AÑO I		AÑO II		AÑO III		AÑO IV		AÑO V	
X	lx	dx	lx	dx	lx	dx	lx	dx	lx	dx
15	115	31	97	24	82	22	197	49	53	14
16	196	52	30	8	0	0	302	75	0	0
17	203	52	0	0	156	40	0	0	14	4
18	600	151	428	107	530	134	497	124	311	78
19	728	179	527	132	642	158	639	160	450	111
20	403	97	602	150	650	156	532	133	602	144
21	1015	237	953	238	728	170	747	187	731	171
22	821	189	614	153	1044	240	952	238	950	218
23	950	216	1023	256	1523	347	852	213	639	146
24	732	165	789	197	428	97	939	235	810	183
25	1050	236	1044	261	953	214	1639	410	834	188
26	1038	218	698	174	842	177	946	236	1024	215
27	440	78	521	109	610	116	632	133	750	142
28	152	25	650	122	721	119	429	81	565	93
29	321	48	401	62	539	81	1042	160	839	126
30	650	88	643	89	657	89	728	101	632	86
31	438	55	328	39	497	62	1056	126	431	54
32	170	20	210	19	306	35	1098	99	839	97
33	952	105	1305	110	1402	154	1526	128	1434	158
34	631	64	697	50	756	77	842	61	931	95
35	429	42	502	32	653	63	952	60	715	69
36	572	51	725	40	421	37	639	35	411	37
37	634	53	700	59	756	63	892	75	417	35
38	630	50	597	24	1201	95	326	13	301	24
39	951	69	828	27	1603	117	450	15	261	19
40	302	21	370	10	601	41	298	8	104	7
41	529	33	632	13	901	57	497	10	210	13
42	611	36	702	13	1218	72	847	15	390	23
43	329	17	410	5	903	48	611	8	329	17
44	562	26	610	6	721	33	428	4	590	27
45	426	17	539	4	615	25	728	5	810	32
46	639	21	429	3	675	22	784	5	642	21
47	728	20	814	4	639	17	1097	5	521	14
48	326	7	136	1	650	9	472	2	521	11
49	210	3	194	1	327	5	143	0	329	5
50	328	4	152	0	140	2	280	1	139	2
51	410	4	230	0	328	3	302	1	102	1
52	153	1	86	0	59	0	71	0	60	0
53	321	1	143	0	136	0	43	0	38	0
54	110	0	50	0	32	0	28	0	24	0
55	94	0	76	0	116	0	4	0	36	0

TABLA 1

INDICES ANUALES DE ROTACION POR EDADES

EDAD	AÑO I	AÑO II	AÑO III	AÑO IV	AÑO V
15	0.26957	0.24742	0.26829	0.24873	0.26415
16	0.26531	0.26667	--	0.24834	--
17	0.25616	--	0.25641	--	0.28571
18	0.25167	0.25000	0.25283	0.24950	0.25080
19	0.24588	0.25047	0.24611	0.25039	0.24667
20	0.24069	0.24917	0.24000	0.25000	0.23920
21	0.23350	0.24974	0.23352	0.25033	0.23393
22	0.23021	0.24919	0.22989	0.25000	0.22947
23	0.22737	0.25024	0.22784	0.25000	0.22848
24	0.22541	0.24968	0.22664	0.25027	0.22593
25	0.22476	0.25000	0.22455	0.25015	0.22542
26	0.21002	0.24928	0.21021	0.24947	0.20996
27	0.17727	0.20921	0.19016	0.21044	0.18933
28	0.16447	0.18769	0.16505	0.18881	0.16460
29	0.14953	0.15461	0.15028	0.15355	0.15018
30	0.13538	0.13841	0.13546	0.13874	0.13608
31	0.12557	0.11890	0.12475	0.11932	0.12529
32	0.11765	0.09048	0.11438	0.09016	0.11561
33	0.11029	0.08429	0.10984	0.08388	0.11018
34	0.10143	0.07174	0.10185	0.07245	0.10204
35	0.09790	0.06375	0.09648	0.06303	0.09650
36	0.08916	0.05517	0.08789	0.05477	0.09002
37	0.08360	0.08429	0.08333	0.08408	0.08393
38	0.07937	0.04020	0.07910	0.03988	0.07973
39	0.07256	0.03261	0.07299	0.03333	0.07280
40	0.06954	0.02703	0.06822	0.02685	0.06731
41	0.06238	0.02057	0.06326	0.02012	0.06190
42	0.05892	0.01852	0.05911	0.01771	0.05897
43	0.05167	0.01220	0.05316	0.01309	0.05167
44	0.04626	0.00984	0.04577	0.00935	0.04576
45	0.03991	0.00742	0.04065	0.00687	0.03951
46	0.03286	0.00699	0.03259	0.00638	0.03271
47	0.02747	0.00491	0.02660	0.00456	0.02687
48	0.02147	0.00735	0.01385	0.00424	0.02111
49	0.01429	0.00515	0.01529	0.00000	0.01520
50	0.01220	0.00000	0.01429	0.00357	0.01439
51	0.00976	0.00000	0.00915	0.00331	0.00980
52	0.00654	--	--	--	--
53	0.00312	--	--	--	--
54	0.00000	--	--	--	--
55	0.00000	--	--	--	--

TABLA 2

INDICE PONDERADO DE ROTACION POR EDADES

EDAD x	Σ lx	Σ dx	INDICE qx
15	544	140	0.25735
16	528	135	0.25568
17	373	96	0.25737
18	2366	594	0.25106
19	2986	740	0.24782
20	2789	680	0.24381
21	4174	1003	0.24030
22	4381	1038	0.23693
23	4987	1178	0.23621
24	3698	877	0.23716
25	5520	1309	0.23714
26	4548	1020	0.22427
27	2953	578	0.19573
28	2517	440	0.17481
29	3142	477	0.15181
30	3310	453	0.13686
31	2750	336	0.12218
32	2623	270	0.10294
33	6619	655	0.09896
34	3857	347	0.08997
35	3251	266	0.08182
36	2768	200	0.07225
37	3399	285	0.08385
38	3055	206	0.06743
39	4093	247	0.06035
40	1675	87	0.05194
41	2769	126	0.04550
42	3768	159	0.04220
43	2582	95	0.03679
44	2911	96	0.03298
45	3118	83	0.02662
46	3169	72	0.02272
47	3799	60	0.01579
48	2105	30	0.01425
49	1203	14	0.01164
50	1039	9	0.00866
51	1372	9	0.00656
52	429	1	0.00233
53	681	1	0.00147
54	244	--	--
55	326	--	--

TABLA 3

INDICES DE ROTACION ESTIMADOS
MEDIANTE EL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS

DATOS ACUMULADOS

EDAD	INDICES OBSERVADOS	INDICES ESTIMADOS
15	0.25735	0.36179
16	0.51303	0.52225
17	0.77041	0.71468
18	1.02146	0.93442
19	1.26929	1.17511
20	1.51310	1.42949
21	1.75340	1.69032
22	1.99033	1.95092
23	2.22655	2.20563
24	2.46370	2.44998
25	2.70084	2.68070
26	2.92511	2.89567
27	3.12085	3.09371
28	3.29566	3.27446
29	3.44747	3.43815
30	3.58433	3.58544
31	3.70651	3.71730
32	3.80945	3.83486
33	3.90840	3.93936
34	3.99837	4.03204
35	4.08019	4.11414
36	4.15245	4.18683
37	4.23629	4.25119
38	4.30372	4.30822
39	4.36407	4.35884
40	4.41601	4.40387
41	4.46152	4.44403
42	4.50371	4.47996
43	4.54051	4.51224
44	4.57348	4.54136
45	4.60010	4.56776
46	4.62282	4.59181
47	4.63862	4.61384
48	4.65287	4.63415
49	4.66451	4.65297
50	4.67317	4.67051
51	4.67973	4.68697
52	4.68206	4.70249
53	4.68353	4.71722
54	4.68353	4.73127
55	4.68353	4.74473

a=1.00208
b=0.08249
d=0.85371
k=4.38585

TABLA 4

INDICES DE ROTACION ESTIMADOS MEDIANTE EL METODO DE LOS GRUPOS NO SUPERPUESTOS

DATOS DESACUMULADOS

EDAD	INDICES OBSERVADOS	INDICES ESTIMADOS
15	0.25735	0.36179
16	0.25568	0.16046
17	0.25737	0.19243
18	0.25106	0.21975
19	0.24782	0.24068
20	0.24381	0.25439
21	0.24030	0.26083
22	0.23693	0.26060
23	0.23621	0.25471
24	0.23716	0.24435
25	0.23714	0.23072
26	0.22427	0.21497
27	0.19573	0.19805
28	0.17481	0.18075
29	0.15181	0.16369
30	0.13686	0.14729
31	0.12218	0.13186
32	0.10294	0.11756
33	0.09896	0.10450
34	0.08997	0.09269
35	0.08182	0.08210
36	0.07225	0.07268
37	0.08385	0.06436
38	0.06743	0.05704
39	0.06035	0.05062
40	0.05194	0.04503
41	0.04550	0.04016
42	0.04220	0.03593
43	0.03679	0.03228
44	0.03298	0.02912
45	0.02662	0.02640
46	0.02272	0.02405
47	0.01579	0.02204
48	0.01425	0.02030
49	0.01164	0.01882
50	0.00866	0.01755
51	0.00656	0.01646
52	0.00233	0.01552
53	0.00147	0.01473
54	0.00000	0.01405
55	0.00000	0.01347

a=1.00208
b=0.08249
d=0.85371
k=4.38585

TABLA 5

INDICES DE ROTACION ESTIMADOS MEDIANTE EL METODO DE LOS CUATRO VALORES EQUIDISTANTES

DATOS ACUMULADOS

EDAD	INDICES OBSERVADOS	INDICES ESTIMADOS
15	0.25735	0.48061
16	0.51303	0.64564
17	0.77041	0.83507
18	1.02146	1.04495
19	1.26929	1.27044
20	1.51310	1.50627
21	1.75340	1.74720
22	1.99033	1.98835
23	2.22655	2.22545
24	2.46370	2.45495
25	2.70084	2.67408
26	2.92511	2.88086
27	3.12085	3.07394
28	3.29566	3.25260
29	3.44747	3.41662
30	3.58433	3.56613
31	3.70651	3.70160
32	3.80945	3.82367
33	3.90840	3.93315
34	3.99837	4.03092
35	4.08019	4.11791
36	4.15245	4.19504
37	4.23629	4.26323
38	4.30372	4.32334
39	4.36407	4.37619
40	4.41601	4.42256
41	4.46152	4.46313
42	4.50371	4.49857
43	4.54051	4.52944
44	4.57348	4.55628
45	4.60010	4.57956
46	4.62282	4.59970
47	4.63862	4.61708
48	4.65287	4.63204
49	4.66451	4.64486
50	4.67317	4.65582
51	4.67973	4.66514
52	4.68206	4.67303
53	4.68353	4.67967
54	4.68353	4.68521
55	4.68353	4.68979

a=0.99958
b=0.09982
d=0.87172
k=4.81478

TABLA 6

INDICES DE ROTACION ESTIMADOS
MEDIANTE EL METODO DE LOS CUATRO VALORES EQUIDISTANTES.

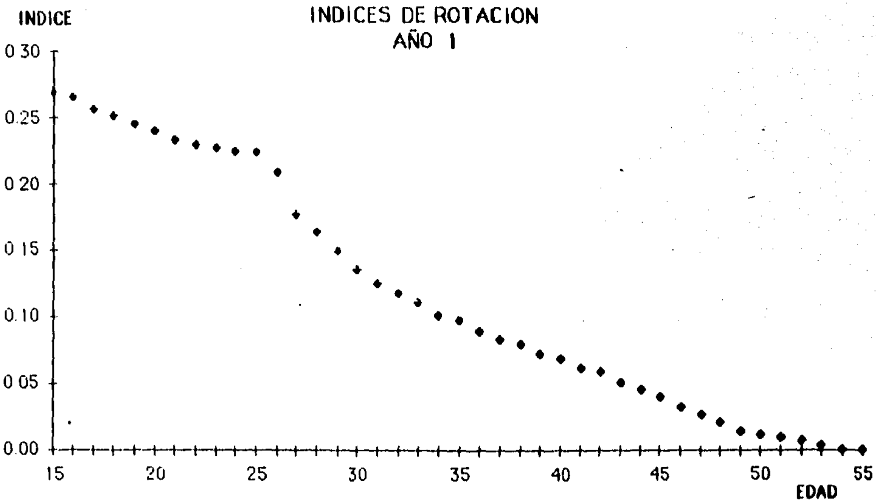
DATOS DESACUMULADOS

EDAD	INDICES OBSERVADOS	INDICES ESTIMADOS
15	0.25735	0.48061
16	0.25568	0.16503
17	0.25737	0.18942
18	0.25106	0.20988
19	0.24782	0.22549
20	0.24381	0.23583
21	0.24030	0.24093
22	0.23693	0.24115
23	0.23621	0.23709
24	0.23716	0.22950
25	0.23714	0.21914
26	0.22427	0.20677
27	0.19573	0.19308
28	0.17481	0.17867
29	0.15181	0.16401
30	0.13686	0.14951
31	0.12218	0.13546
32	0.10294	0.12207
33	0.09896	0.10948
34	0.08997	0.09777
35	0.08182	0.08699
36	0.07225	0.07713
37	0.08385	0.06819
38	0.06743	0.06011
39	0.06035	0.05285
40	0.05194	0.04636
41	0.04550	0.04058
42	0.04220	0.03543
43	0.03679	0.03087
44	0.03298	0.02684
45	0.02662	0.02328
46	0.02272	0.02014
47	0.01579	0.01738
48	0.01425	0.01496
49	0.01164	0.01283
50	0.00866	0.01096
51	0.00656	0.00932
52	0.00233	0.00789
53	0.00147	0.00664
54	0.00000	0.00554
55	0.00000	0.00458

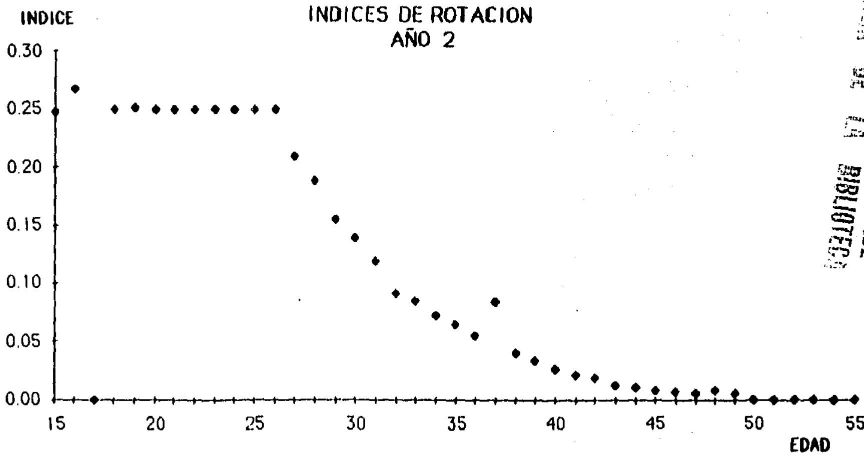
a=0.99958
b=0.09982
d=0.87172
k=4.81478

TABLA 7

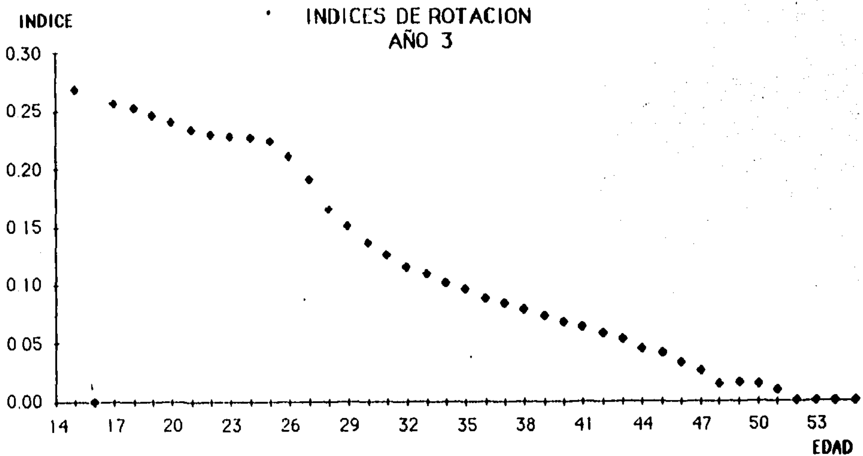
ANEXO II


INDICES DE ROTACION
AÑO 1
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD

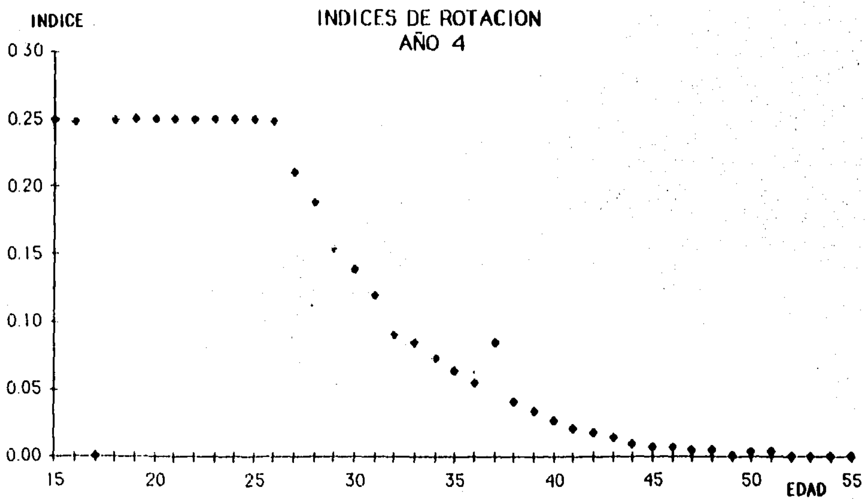
GRAFICA I


INDICES DE ROTACION
AÑO 2
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD

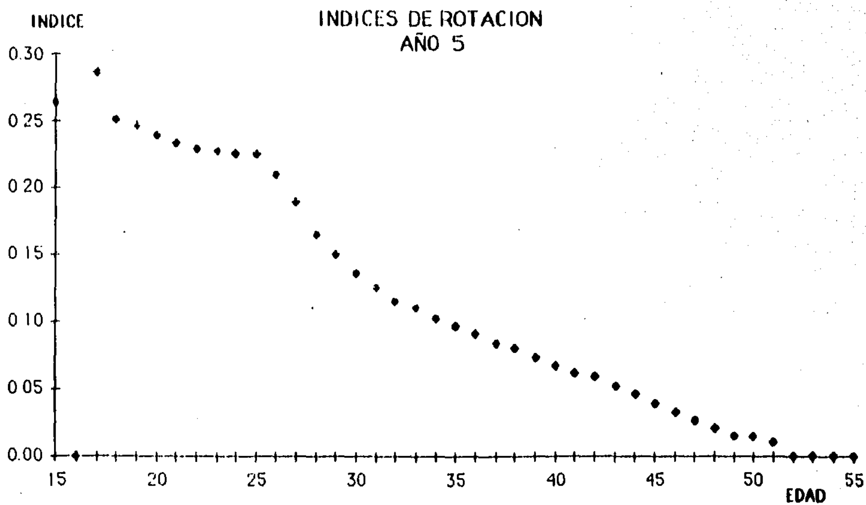
GRAFICA 2


INDICES DE ROTACION
AÑO 3
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
14
17
20
23
26
29
32
35
38
41
44
47
50
53
EDAD

GRAFICA 3

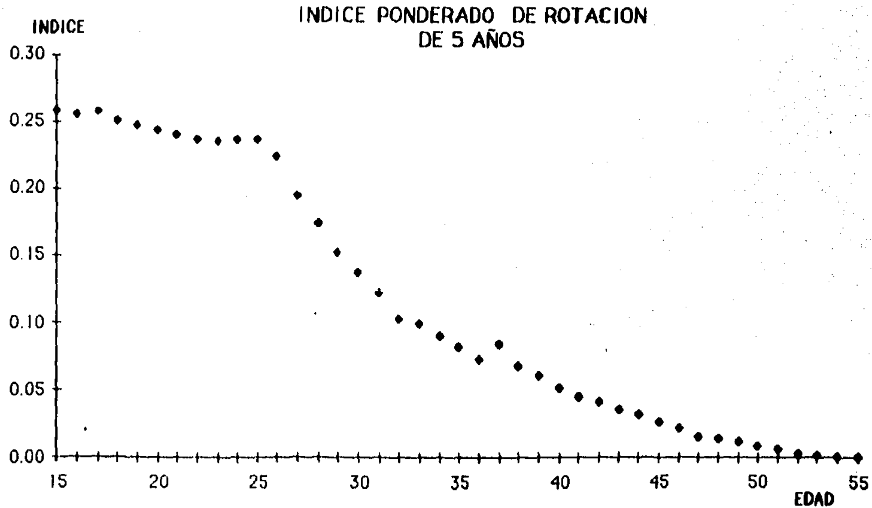

INDICES DE ROTACION
AÑO 4
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD

GRAFICA 4

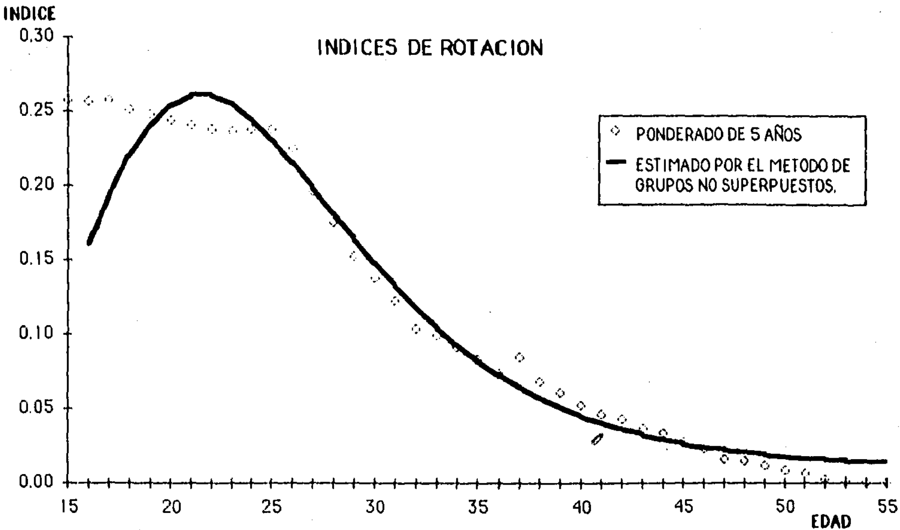


INDICE
INDICES DE ROTACION
AÑO 5
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD

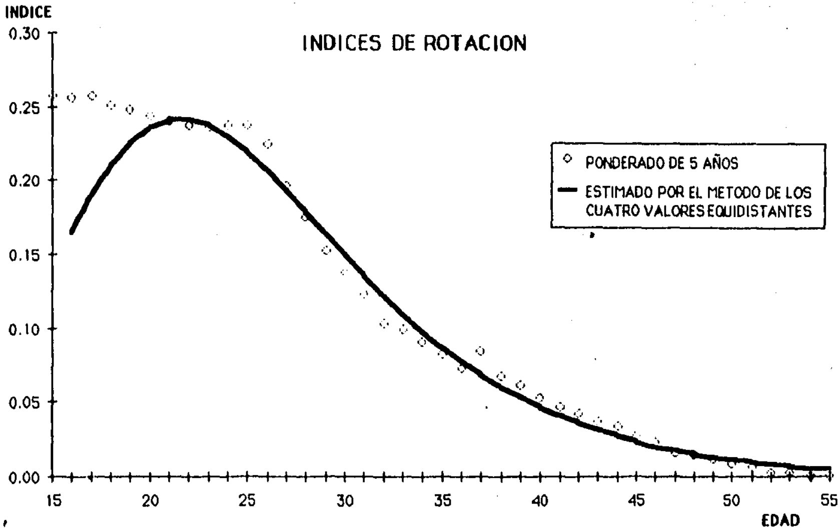
GRAFICA 5


INDICE PONDERADO DE ROTACION
DE 5 AÑOS
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD

GRAFICA 6


INDICES DE ROTACION
INDICE
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD
PONDERADO DE 5 AÑOS
ESTIMADO POR EL METODO DE GRUPOS NO SUPERPUESTOS.

GRAFICA 7


INDICE
INDICES DE ROTACION
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
15
20
25
30
35
40
45
50
55
EDAD
PONDERADO DE 5 AÑOS
ESTIMADO POR EL METODO DE LOS CUATRO VALORES EQUIDISTANTES

GRAFICA 8

BIBLIOGRAFIA

- Concepts of actuarial soundness in pension plans
  Dorrance C. Bronson
  Pension Research Council

- La función de Makeham en el estudio de la población económicamente activa
  Eduardo García García
  Tesis profesional. Universidad Anáhuac

- Life contingencies
  Chester Wallace Jordan, Jr.
  Society of Actuaries

- Fundamentals of private pensions
  Dan M. Mc. Gill
  Pension Research Council

- Life contingencies
  E. F. Spurgeon
  Cambridge. University Press