2, , 10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"DETERMINACION DEL RADIO DE DRENE"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

DAVID GARRIDO CORTEZ

1 9 8 7

C O N T E N I D O

I N T R O D U C C I O N

La imperiosa necésidad de poder optimisar los diversos procesos que involucran el flujo de fluidos en medios porosos, dió la pauta de trabajo a un grupo de investigadores para poder darse a la tarea de calcular el radio de drene o radio de influencia de un pozo productor de hidrocarburos, desde el punto de vista práctico, se puede considerar que el radio de drene de un pozo, es la distancia de éste tal que no interfiera el volumen a ser recuperado por el pozo vecino, ni quede lo suficientemente lejos, de tal manera que algún volumen de hidrocarburos no sea afectado.

Investigadores como Muskat, Brownscombe y Kern, Miller, Dyes y Hutchinson, Chatas, etc., dieron origen a los métodos tradicionales para el cálculo del radio de drene, pero debido a que estos métodos requieren del conocimiento de un número de variables que son difíciles de conocer con precisión, el M.I. Carlos Balderas Joers en el año de 1981, en su tesis de grado, bajo la dirección del físico Candelario Pérez R., propone un nuevo método en el que no se requiere del conocimiento del tiempo de estabilización y de la permeabilidad promedio de la formación productora, variable en las cuales se basan en muchos los métodos tradicionales, por lo que presenta mayor facilidad de aplicación, sobre todo en el campo.

El conocimiento del radio de drene o radio de influencia de los pozos productores, es de suma importancia para el Ingeniero Petrolero, pues le permitirá establecer cual es la capacidad de flujo de la estructura productora de hidrocarburos, el número adecuado de pozos productores que se deben perforar para poder explotar en forma satisfactoria el volumen de hidrocarburos asociados en el yacimiento, a qué distancia se deben perforar dichos pozos productores uno del otro para obtener una recuperación eficiente etc., es por eso que cuando se perfora un pozo y se descubre que es productor y está asociado un volumen de hidrocarburos tal que es económicamente explotable, el Ingeniero Petrolero se dará a la tarea de calcular el radio de drene.

Para un yacimiento teórico, homogéneo, isotrópico y de espesor constante, el área de influencia asociada a cada pozo productor en este tipo de yacimientos es circular y el radio correspondiente a esta área es a lo que se define como radio de drene o radio de influencia de un pozo.

Con mucha frecuencia, por la carencia de información en campos nuevos que almacenan hidrocarburos, éstos se desarrollan de acuerdo a datos o estimaciones hechas a campos vecinos ya desarrollados o cuando se trata de formaciones productoras, se utilizan datos ya obtenidos de formaciones semejantes a la que se está por explotar, por lo-que podemos hacer notar que para poder estimar el radio de drene de un pozo utilizando cualquier método analítico, --únicamente se debe utilizar la información obtenida del pozo de interés y no de pozos vecinos o semejantes a éste. -ya que el radio de drene es único para cada caso.

Por todo cuanto se ha expuesto anteriormente, se puede hacer notar que el conocimiento del radio de drene -o radio de influencia de un pozo productor es de suma im--portancia, ya que permitirá estimar el número adecuado de-pozos necesarios para recuperar el mayor volumen de hidro-carburos asociados a la formación productora.

Los investigadores mencionados anteriormente, --han desarrollado una expresión matemática aplicada a un método analítico para calcular el radio de drene, pero de --acuerdo a las bases que han utilizado para este fin, la mayoría de estas expresiones o métodos analíticos conducen a resultados similares entre sí, debido principalmente a que los investigadores utilizan los mismos conceptos propues--tos por Muskat.

El objetivo primordial de este trabajo, es el de presentar un esquema general de los métodos propuestos por estos investigadores, que tienen la finalidad de calcular-el radio de drene o radio de influencia de un pozo productor de un yacimiento de hidrocarburos.

C A P I T U L O   I

CONCEPTOS BASICOS.

Tal y como lo expresa el título de esta capítulo, en esta sección se pretende dar los puntos básicos y teo-- ricos en los cuales se basaron algunos investigadores para desarrollar sus métodos para calcular el radio de área de influencia de un pozo.

El objetivo de dar a conocer las principales su- posiciones y los puntos básicos en los que se basaron es-- tos investigadores es para que comprendamos los principios de sus métodos.

Tomando en cuenta de que los yacimientos petrolí feros son una estructura físicamente compleja, debido a -- que está constituído de un cuerpo poroso y permeable que - se encuentra impregnado de fluidos saturantes que al verse afectados por un gradiente de presión, éstos se mueven de- una región de alta presión a una de más baja presión, por- lo que se dice que estos fluidos toman un estado dinámico.

La complejidad en sí del yacimiento, tanto de la estructura como de los fluidos contenidos en él, no permi- te sujetar su comportamiento a un análisis matemático rigu roso, por lo que para poder desarrollar expresiones matemá ticas que nos permitan conocer el flujo de fluidos dentro- del medio poroso es necesario realizar ciertas considera-- ciones sobre las propiedades físicas del medio que se en--

cuentra saturado por los hidrocarburos y poderlo conducir a un modelo ideal, cuyo comportamiento a nivel macroscópico, sea similar al comportamiento real del sistema.

Para facilitar el desarrollo de expresiones matemáticas que nos sean útiles para conocer el comportamiento aproximado del movimiento de los fluidos dentro del yacimiento, se tienen que hacer algunas suposiciones respecto a dicho yacimiento, generalmente se considera que éste es un sistema infinito, homogéneo, isotrópico y de espesor constante, cuyos poros conectados están ocupados por un fluido en una sola fase de compresibilidad pequeña y constante.

Al analizar los trabajos de investigación desarrollados para describir el flujo de fluidos en un medio poroso, se ha demostrado que los investigadores se han basado en tres principios físicos fundamentales para poder explicar el flujo de fluidos a través del medio poroso y que son:

1° Una ley de movimiento: Generalmente se utiliza la ley de Darcy.

2° Una ley de conservación de masa: Basada en el principio de continuidad.

3° Una ley o ecuación de estado: Que está dada en función del fluido presente en el sitema.

A continuación se describen estos principios:

LEY DE DARCY.

Las principales fuerzas que intervienen en el movimiento de los fluidos en un yacimiento de hidrocarburos son las de presión, expansión, gravedad, viscosidad y capilaridad. La fuerza de inercia, que opone un cuerpo a cambiar su estado de reposo o de movimiento, es muy pequeña comparada con las anteriores en el caso de flujo en régimen laminar, que es el que ocurre generalmente en los yacimientos, por lo que no se toma en cuenta.

Para poder explicar las fuerzas que intervienen en el movimiento de los fluidos, en el siguiente desarrollo se consideran las fuerzas correspondientes a un volumen de fluido dv.

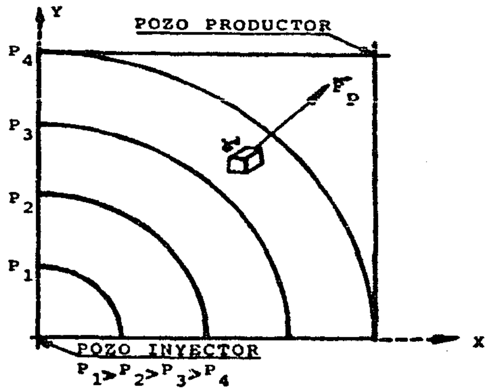


FIG.I.1 FUERZA DE PRESION $\vec{F}_p$

En la figura I.1 se muestra esquemáticamente $\vec{Fp}$ la cual se debe al gradiente de presión, actúa perpendicularmente a las superficies isobáricas, cuyas trazas son -- las curvas de la figura, es decir, la fuerza de presión $\vec{Fp}$ es la fuerza en cada punto y en cada curva isobárica.

De un análisis dimensional se demuestra que:

$$\vec{Fp} = - \nabla p \quad dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I.1)$$

donde el signo menos se utiliza para obtener $\vec{Fp}$ positiva - en la dirección en que disminuye la presión p.

La componente de $\vec{Fp}$ en la dirección x está dada- por:

$$\vec{Fp}_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad dv \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I.2)$$

FUERZA DE SEGREGACION GRAVITACIONAL, $\vec{Fs}_g$

FUERZA DE EMPUJE, $\vec{Fe}$.

La fuerza $\vec{Fe}$ es debido al principio de flotación de Arquímides y esta dada por:

$$\vec{Fe} = \vec{k} \rho g \quad dv \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido desalojado, el gas es - el fluido que recibirá un mayor empuje vertical hacia arriba; porque es el que desaloja a un fluido mucho más denso- que él, que puede ser el aceite o el agua.

FUERZA DE GRAVEDAD, $\vec{Fg}$

Esta es la fuerza más conocida, su expresión es:

$$\overrightarrow{Fg} = - \overrightarrow{k} \rho g \; dv \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I.4)$$

donde el signo menos indica que está dirigida hacia abajo y ρ es la densidad del fluido sobre el que se ejerce $\overrightarrow{Fg}$. La fuerza de segregación gravitacional es la suma de las dos anteriores.

$$\overrightarrow{Fsg} = \overrightarrow{Fe} + \overrightarrow{Fg} = \overrightarrow{k} \; (\rho_1 - \rho_2) \; g \; dv \; . \; . \; . (I.5)$$

En los casos en que se tienen condiciones muy favorables de segregación gravitacional (alta permeabilidad vertical, baja viscosidad del aceite, gran espesor, gran relieve estructural, o fuerte echado del yacimiento), la eficiencia de recuperación de aceite es muy alto, pudiendo ser superior al 80% del volumen original de aceite (N).

FUERZA DE VISCOSIDAD, $\overrightarrow{F_\mu}$

A partir de las leyes de flujo capilar se demuestra que $F_\mu = - \frac{\mu}{K} \; v \; dv \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (I.6)$.
donde el signo menos indica que $\overrightarrow{F_\mu}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen sentidos opuestos; es decir, F_μ se opone al movimiento. En esta ecuación k es la permeabilidad efectiva al fluido de viscosidad μ .

La expresión para clacular $\overrightarrow{F_\mu}$ también se puede demostrar a partir de análisis dimensional μ (F T L^{-2}), sabiendo que esta fuerza depende además de $\overrightarrow{v}$ y k .

Ahora se puede entender porque un aceite de baja viscosidad favorece la actuación de $\overrightarrow{Fsg}$, al oponer menor resistencia al movimiento, por supuesto también favorece a $\overrightarrow{Fp}$.

FUERZA DE CAPILARIDAD, $\overrightarrow{Fc}$.

La presión capilar se define como:

$$Pc = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (I.7)$$

Donde dv = Area x h

Además como FUERZA = Presión x Area y considerando área = dv/h donde h es la altura que sube el fluido en el capilar, como se muestra en la figura I.2, $\overrightarrow{Fc}$ queda como sigue:

$$\overrightarrow{Fc} = \frac{2\sigma \cos \theta}{rh} \, dv \quad \ldots\ldots\ldots (I.8)$$

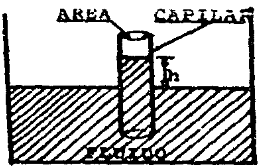


FIG. I.2 CAPILARIDAD

La ley de Darcy es una ecuación de movimiento de tipo empírico, obtenida con base a experimentos desarrollados por el investigador al cual debe el nombre dicha ecuación, estos experimentos se realizaron haciendo atravezar un flujo de agua a través de un empacamiento de arena.

La suma de todas la fuerzas que actúan sobre el elemento dv da una resultante $\overrightarrow{F_R}$, a la cual se opone (y es igual) la fuerza de inercia. Como ésta es muy pequeña, en la mayor parte de los casos de flujo de fluidos en medios porosos, (flujo en régimen laminar) entonces se puede despreciar, resultando así la siguiente aproximación:

$$\overrightarrow{Fp} + \overrightarrow{Fsg} + \overrightarrow{F_\mu} + \overrightarrow{Fc} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\text{I.9})$$

Substituyendo en la Ecuación I.9 las ecuaciones I.1, I.5, I.6, I.8, nos queda:

$$\left(-\nabla p + \vec{k}(\rho_1 - \rho_2)g - \frac{\mu}{k}\vec{v} + \frac{2\sigma \cos e}{rh}\right)dv = 0$$

despejando $\vec{v}$

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\left[\nabla p - \vec{k}(\rho_1 - \rho_2)g - \frac{2\sigma \cos e}{rh}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I.10})$$

Esta ecuación I.10 es la forma más general de la ecuación de Darcy, que es una de las ecuaciones fundamentales de la Ingeniería de yacimientos e implica que el flujo es laminar.

Los dos últimos términos de la ecuación I.10 representan los efectos gravitacionales y capilares, respectivamente, sobre la velocidad del fluido. Así por ejemplo

$$\vec{v} = - \frac{k}{\mu} \nabla p \quad \text{.......................(I.11)}$$

Representa la relación $\vec{v}$ y ∇p para flujo en régimen laminar, sin tomar en cuenta dichos efectos.

Donde: $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g$

la ecuación: $v_r = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}$ ....(I.12)

es un caso particular de la Ec. I.11 además de no considerar los efectos gravitacionales ni los capilares, supone que el flujo es radial, por lo que es aplicable para estudiar el movimiento de fluidos en la vecindad de los pozos.

Para el caso de flujo lineal, en la dirección x, la ecuación correspondiente es:

$$v_x = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Un valor promedio de v_x, para un medio poroso - de longitud ∇L, está dado por:

$$v = - \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{\Delta L}$$

Donde Δp es la diferencia de presión entre la entrada y la salida del medio poroso. Si éste tiene una — sección transversal A (Figura I.3), el gasto que pasa a través del medio es:

$$q = \vec{v}_x A = -\frac{kA}{\mu}\frac{\Delta p}{\Delta L}$$

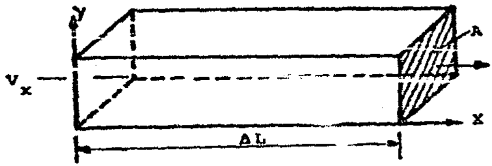


FIG.I.3 MEDIO POROSO

La ley de Darcy fue desarrollada tomando como base un sistema lineal, pero se ha hecho extensiva a sistemas radiales en cuyo caso se expresa como:

$$q = \frac{2\pi khr}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{rw}$$

LEY DE LA CONSERVACION DE MASA.

Este principio físico establece que cualquier cantidad física se conserva; es decir, nada se crea ni se destruye. Por lo anterior a esta ley también se le conoce como ley de la continuidad.

El principio de conservación de masa se puede -

expresar simplemente como:

(Cantidad de masa que entra a una región) + (cantidad de masa que sale de la región) + (cantidad de masa introducida por fuentes y sumideros a la región) es igual al (cambio del contenido de masa dentro de la región)

ECUACION DE ESTADO

Una ecuación de estado trata de representar el comportamiento de un fluido que es sometido a diferentes condiciones de presión y temperatura. La Ecuación de estado seleccionada deberá de estar de acuerdo con las características propias del fluido almacenado dentro del sistema.

En nuestro caso, se considerará la expresión que corresponde a un fluido en una sola fase de compresibilidad pequeña y constante y cuyo flujo se realiza en condiciones isotérmicas.

ECUACION DE CONTINUIDAD

Considérese la región R de volumen V de un medio poroso de porosidad ϕ. a través de la cual un fluido de densidad ρ y velocidad aparente $\vec{v}$ (ver figura I.4).

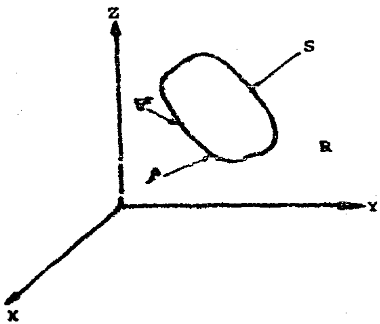


FIG.I.4 DE UNA REGION

Sea s la superficie que limita a la región R y supóngase que s y $\vec{v}$ poseen las propiedades requeridas para que se cumpla el teorema de la divergencia. En la región R, considerando un intervalo de tiempo .

Fluido neto que entra (-F)= Acumulación neta de fluido (H) . . . . (I.13)

Donde (F) es el fluido neto que sale y (-H) es la disminución neta de fluido, respectivamente. El signo menos que afecta a F en la ecuación I.13 se debe a que, en el teorema de la divergencia, si la componente de la velocidad ($v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$, donde n es la componente de $\vec{v}$ en la dirección normal hacia afuera de s, en cada punto consi derado) es positiva, el fluido está saliendo de la región R , a través de la superficie S.

El flujo neto de masa hacia afuera de R, por unidad de superficie, por unidad de tiempo, es $\rho\, \mathcal{V}_n$ $\left[\frac{m}{L^3}\ \frac{L}{T}\right]$ donde $\mathcal{V}_n$ es la componente de la velocidad aparente, perpendicular a S en cada punto, y, m, L, T representan masa, longitud y tiempo respectivamente. El flujo neto de masa hacia afuera de R por unidad de tiempo es $\iint \rho\, \mathcal{V}_n ds$; por consiguiente:

$$F = \Delta t \iint \rho\, \mathcal{V}_n\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ I.14\ )$$

El contenido de fluido en un elemento de volumen es $\phi\, \rho\, dv \left[\frac{m}{L^3}\ L^3\right] = \phi\, \rho\, dv\ (m)$. El contenido de fluido en la región R al tiempo t es $\left[\iiint_V \phi\, \rho\, dv\right]_t$

En forma similar, el contenido de fluido en al tiempo t + Δt es $\left[\iiint_V \phi\, \rho\, dv\right]_{t+\Delta t}$

$$H = \left[\iiint_V \phi\, \rho\, dv\right]_{t+\Delta t} - \left[\iiint_V \phi\, \rho\, dv\right]_t \ldots (\ I.15\ )$$

Por otra parte, aplicando el teorema de la divergencia:

$$\iint_S \rho\, \mathcal{V}_n\, ds = \iiint_V \nabla \cdot (\rho\, \vec{U})\, dv \ldots\ldots (\ I.16\ )$$

Sustituyendo las ecuaciones I.14 a I.16 en la ecuación I.13, dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ se obtiene:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \phi \rho \, dv \quad \ldots (\text{I.17})$$

Aplicando la regla de Leibnitz extendida a integrales triples:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \phi \rho \, dv = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \, dv$$

De esta manera:

$$- \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dv = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) dv \ldots$$

o bien:

$$\iiint_V \left[\nabla \cdot (\rho \vec{U}) - \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \right] dv = 0$$

Puesto que **R** es una región arbitraria, finalmente se obtiene:

$$- \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I.18})$$

que es la forma más general de la ecuación de continuidad.

LEY DE MOVIMIENTO

Es una relación de la velocidad con el gradiente de presión, la más conocida, la cual se utiliza en el desarrollo de la ecuación de difusión, es la siguiente forma de la ley de Darcy.

$$= - \frac{k}{\mu} \nabla p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I.19})$$

En la que se desprecian los efectos gravitacionales y los capilares; se considera que el flujo es isotérmico y en régimen laminar.

ECUACION DE ESTADO

Las ecuaciones de estado expresan la variación de la densidad de un fluido como función de presión y temperatura. La ecuación de estado que se utiliza para obtener la ecuación de difusión es la que corresponde a un fluido ligeramente compresible, que fluye a temperatura constante.

La compresibilidad C se define como:

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \qquad \text{(I.20)}$$

de donde, considerando c constante, que es una suposición razonable pero fluidos ligeramente compresibles e integrando, se tiene:

$$\int_{P_0}^{P} C \, dp = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho} \, d\rho$$

$$C = (P - P_0) = \ln\rho - \ln\rho_0$$

por la propiedad de los logarítmos tenemos

$$C (P - P_0) = \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

sacando antilogaritmos

$$e^{c(p - p_o)} = \frac{\rho}{\rho_o}$$

despejando ρ nos queda

$$\rho = \rho_o \, e^{c(p - p_o)} \qquad \text{......................(I.21)}$$

de donde ρ_o es la densidad del fluido a la presión de referencia P_o.

ECUACION DE DIFUSION

De las Ecuaciones I.18 y I.19, suponiendo constantes k y μ, y considerando un medio poroso incompresible:

$$\nabla \cdot (\rho \nabla p) = \frac{\phi \mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \qquad \text{...........(I.22)}$$

pero, aplicando la regla de la cadena y la Ec. I.20

$$\nabla \rho = \frac{d\rho}{dp} \nabla p = C \rho \nabla p$$

sustituyendo este resultado en la Ec.(I.22) se tiene:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi \mu C}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{.........(I.23)}$$

De la ecuación (I.21)

$$\nabla^2 \rho = C \rho (\nabla^2 p + C |\nabla p|^2)$$

y

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c\,\rho\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

Substituyendo estas expresiones en la Ec.(I.23)

$$\nabla^2 p + c|\nabla p|^2 = \frac{\phi \mu c}{k}\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

Como se trata de un fluido ligeramente compresible, para - gradientes de presión pequeños se puede escribir finalmente

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c}{k}\,\frac{\partial p}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{I.24})$$

que es la ecuación de difusión en forma vectorial.

Escribiendo la ecuación I.24 en coordenadas ci-- líndricas, suponiendo que no existe variación vertical de- la presión ni tampoco con el ángulo θ, se obtiene la forma más conocida de la ecuación de difusión. Esta es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k}\,\frac{\partial p}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{I.25})$$

la Ec. de difusión es una ecuación diferencial que describe el flujo de fluidos dentro de un medio poroso.

Por medio de esta expresión es posible conocer - la variación de la presión en el espacio y en el tiempo, - dentro de un sistema roca-fluido.

La ecuación I.25 que se encuentra escrita en -- coordenadas cilíndricas, también la podemos expresar en -- coordenadas cartecianas como sigue:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

En resumen, las suposiciones que se hacen durante el desarrollo matemático para la obtención de la ecuación I.25 son las siguientes:

a) Flujo radial hacia el pozo.

b) Todo el intervalo productor está disparado.

c) Medio poroso homogéneo e isotrópico.

d) Porosidad y permeabilidad constante (independiente de la presión).

e) Fluido de compresibilidad pequeña y constante.

f) Viscosidad del fluido constante.

g) Gradientes de presión pequeños.

h) Fuerzas gravitacionales despreciables.

SOLUCION A LA ECUACION DE DIFUSION

Se presenta el desarrollo de la solución a la ecuación de difusión en forma radial, en la cual entra otras suposiciones, se considera que se tiene un fluido ligeramente compresible y de compresibilidad constante.

Esta solución se considera para un yacimiento infinito con gasto constante en el pozo y presión inicial uniforme.

El problema que se presenta es el de resolver la siguiente ecuación de difusión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k}\ \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{.......(I.26)}$$

con las condiciones siguientes:

(i) $p(r,0) = p_i$, $r \geq 0$ (condición inicial)

(ii) $\left(r\, \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{rw} = \frac{q\mu}{2\pi kh}$, $t > 0$ (condición de frontera interna).

(iii) $\lim\limits_{r \to \infty} p(r,t) = p_i$, $t \geq 0$ (condición de frontera externa).

La condición (ii) puede ser aproximada por:

(ii) $\lim\limits_{r \to 0} r\, \frac{\partial p}{\partial r} = -\ \frac{q\mu}{2\pi kh}$

con la cual, para fines prácticos, se obtiene la misma solución que con la condición (ii). Utilizando la aproximación anterior se facilita bastante el problema planteado.

La solución de la ecuación de difusión, no es sencilla si se quieren aplicar métodos directos, por lo que es necesario recurrir al auxilio de la transformada de Boltzman. Esto nos permite transformar la ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria.

La transformada de Boltzman es definida como:

$$Y = \frac{\phi \mu C r^2}{4\ kt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ I.27\ )$$

De la ecuación I.27 se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{2y}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ I.28\ )$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{y}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ I.29\ )$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad ; \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

pero

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{\partial y}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{2y}{r^2} + \frac{4y^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{y^2}$$

Substituyendo $\partial P/\partial r$, $\partial^2 P/\partial r^2$ y $\partial P/\partial t$ en la Ec. I.26, simplificando y usando el signo de derivadas ordinarias - puesto que P queda únicamente en función de Y :

$$Y \frac{d^2p}{dy^2} + (1 + Y)\frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{.............} (I.30)$$

Para obtener una solución particular de esta ecuación es necesario fijar ciertas condiciones, ya sea iniciales o de frontera, de tal forma que caractericen la condición física real del sistema en estudio.

Una condición de frontera que se puede establecer es cuando la frontera externa está a una distancia lo suficientemente alejada del punto donde el fluido es extraído o inyectado y se puede establecer como:

$$(\text{iv}) \lim_{y \to 0} p(y) = p_i$$

En el caso de que se trata aquí, se requiere de un gasto constante en el pozo, tomando como base las condiciones que se muestran en la Fig. (I.4), la ecuación de Darcy se puede expresar como:

$$(\text{v}) \lim 2Y \frac{dp}{dy} = \frac{q\mu}{2\pi kh}$$

la cual será una condición de frontera. A esta condición también se le conoce como "aproximación o solución por medio de la línea fuente".

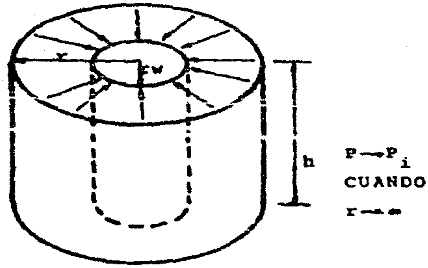


FIG.I.5 COMPORTAMIENTO DEL FLUJO DE UN FLUIDO A UN POZO.

Haciendo $\frac{dp}{dy} = p'$, la ecuación e se puede escribir como:

$$Y \frac{dp'}{dy} + (1 + Y)\, p' = 0$$

de donde:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dy}{y} = - dy$$

T A B L A I. 1

VALORES DE LA INTEGRAL EXPONENCIAL, −Ei(−x)

−Ei(−x); 0.000   0.209, interval −0.001

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	$+\infty$	6.332	5.639	5.235	4.948	4.726	4.545	4.392	4.259	4.142
0.01	4.038	3.944	3.858	3.779	3.705	3.637	3.574	3.514	3.458	3.405
0.02	3.355	3.307	3.261	3.218	3.176	3.137	3.098	3.062	3.028	2.992
0.03	2.959	2.927	2.897	2.867	2.838	2.810	2.783	2.756	2.731	2.706
0.04	2.681	2.658	2.634	2.612	2.590	2.568	2.547	2.527	2.507	2.487
0.05	2.468	2.449	2.431	2.413	2.395	2.377	2.360	2.344	2.327	2.311
0.06	2.295	2.279	2.264	2.249	2.235	2.220	2.206	2.192	2.178	2.164
0.07	2.151	2.138	2.125	2.112	2.099	2.087	2.074	2.062	2.050	2.039
0.08	2.027	2.015	2.004	1.993	1.982	1.971	1.960	1.950	1.939	1.929
0.09	1.919	1.909	1.899	1.889	1.879	1.869	1.860	1.850	1.841	1.832
0.10	1.823	1.814	1.805	1.796	1.788	1.779	1.770	1.762	1.754	1.745
0.11	1.737	1.729	1.721	1.713	1.705	1.697	1.689	1.682	1.674	1.667
0.12	1.660	1.652	1.645	1.638	1.631	1.623	1.616	1.609	1.603	1.596
0.13	1.589	1.582	1.576	1.569	1.562	1.556	1.549	1.543	1.537	1.530
0.14	1.524	1.518	1.512	1.506	1.500	1.494	1.488	1.482	1.476	1.470
0.15	1.464	1.459	1.453	1.447	1.442	1.436	1.431	1.425	1.420	1.415
0.16	1.409	1.404	1.399	1.393	1.388	1.383	1.378	1.373	1.368	1.363
0.17	1.358	1.353	1.348	1.343	1.338	1.333	1.329	1.324	1.319	1.314
0.18	1.310	1.305	1.301	1.296	1.291	1.287	1.282	1.278	1.274	1.269
0.19	1.265	1.261	1.256	1.252	1.248	1.243	1.239	1.235	1.231	1.227
0.20	1.223	1.219	1.215	1.210	1.206	1.202	1.198	1.195	1.191	1.187

T A B L A I.1
(Continuación)

-Ei(-x), 0.00 x 2.09, interval =0.01

0.0	+∞	4.038	3.335	2.959	2.681	2.468	2.295	2.151	2.027	1.919
0.1	1.823	1.737	1.660	1.589	1.524	1.464	1.409	1.358	1.309	1.265
0.2	1.223	1.183	1.145	1.110	1.076	1.044	1.014	0.985	0.957	0.931
0.3	0.906	0.882	0.858	0.836	0.815	0.794	0.774	0.755	0.737	0.719
0.4	0.702	0.686	0.670	0.655	0.640	0.625	0.611	0.598	0.585	0.572
0.5	0.560	0.548	0.536	0.525	0.514	0.503	0.493	0.483	0.473	0.464
0.6	0.454	0.445	0.437	0.428	0.420	0.412	0.404	0.396	0.388	0.381
0.7	0.374	0.367	0.360	0.353	0.347	0.340	0.334	0.328	0.322	0.316
0.8	0.311	0.305	0.300	0.295	0.289	0.284	0.279	0.274	0.269	0.265
0.9	0.260	0.256	0.251	0.247	0.243	0.239	0.235	0.231	0.227	0.223
1.0	0.219	0.216	0.212	0.209	0.205	0.202	0.198	0.195	0.192	0.189
1.1	0.186	0.183	0.180	0.177	0.174	0.172	0.169	0.166	0.164	0.161
1.2	0.158	0.156	0.153	0.151	0.149	0.146	0.144	0.142	0.140	0.138
1.3	0.135	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.124	0.122	0.120	0.118
1.4	0.116	0.114	0.113	0.111	0.109	0.108	0.106	0.105	0.103	0.102
1.5	0.1000	0.0985	0.0971	0.0957	0.0943	0.0929	0.0915	0.0902	0.0889	0.0876
1.6	0.0863	0.0851	0.0838	0.0826	0.0814	0.0802	0.0791	0.0780	0.768	0.0757
1.7	0.0747	0.0736	0.0725	0.0715	0.0705	0.0695	0.0685	0.0675	0.0666	0.0656
1.8	0.0647	0.0638	0.0629	0.0620	0.0612	0.0603	0.0595	0.0586	0.0578	0.0570
1.9	0.0562	0.0554	0.0546	0.0539	0.0531	0.0524	0.0517	0.0510	0.0503	0.0496
2.0	0.0489	0.0482	0.0476	0.0469	0.0463	0.456	0.0450	0.0444	0.0438	0.0432

T A B L A   I.1

2.0 x 10.9, interval=0,1

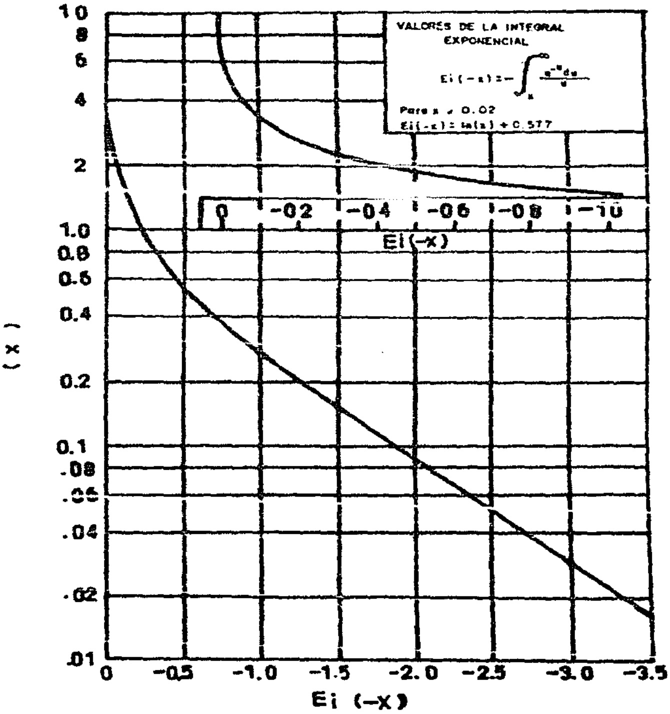
(Continuación)

x	0	1	2	3	4
2	4.89x10-2	4.26x10-2	3.72x10-2	3.25x10-2	2.84x10-2
3	1.30x10-2	1.15x10-2	1.01x10-2	8.94x10-3	7.89x10-3
4	3.78x10-3	3.35x10-3	2.97x10-3	2.64x10-3	2.34x10-3
5	1.15x10-3	1.02x10-3	9.08x10-4	8.09x10-4	7.19x10-4
6	3.60x10-4	3.21x10-4	2.86x10-4	2.55x10-4	2.28x10-4
7	1.15x10-4	1.03x10-4	9.22x10-5	8.24x10-5	7.36x10-5
8	3.77x10-5	3.37x10-5	3.02x10-5	2.70x10-5	2.42x10-5
9	1.24x10-5	1.11x10-5	9.99x10-6	8.95x10-6	8.02x10-6
10	4.15x10-6	3.73x10-6	3.34x10-6	3.00x10-6	2.68x10-6

x	5	6	7	8	9
2	2.49x10-2	2.19x10-2	1.92x10-2	1.69x10-2	1.48x10-2
3	6.87x10-3	6.16x10-3	5.45x10-3	4.82x10-3	4.27x10-2
4	2.07x10-3	1.84x10-3	1.64x10-3	1.45x10-3	1.29x10-3
5	6.41x10-4	5.71x10-4	5.09x10-4	4.53x10-4	4.04x10-4
6	2.03x10-4	1.82x10-4	1.62x10-4	1.45x10-4	1.29x10-4
7	6.58x10-5	5.89x10-5	5.26x10-5	4.71x10-5	4.21x10-5
8	2.16x10-5	1.94x10-5	1.73x10-5	1.55x10-5	1.39x10-5
9	7.18x10-6	6.44x10-6	5.77x10-6	5.17x10-6	4.64x10-6
10	2.41x10-6	2.16x10-6	1.94x10-6	1.74x10-6	1.55x10-6

FIGURA I-6 INTEGRAL EXPONENCIAL Ei

x	-Ei(-x)
0	00
0.0001	8.723
0.001	6.332
0.005	4.726
0.010	4.038
0.05	2.468
0.10	1.823
0.20	1.223
0.30	0.906
0.40	0.702
0.60	0.454
0.80	0.311
1.00	0.219
2.00	0.0489
3.00	0.0130
4.00	0.00378
5.00	1.15×10^{-3}
6.00	3.60×10^{-4}
8.00	3.77×10^{-5}
10.00	4.15×10^{-6}
10.90	1.56×10^{-6}



Integrando:

$$\ln p' + \ln y = - y = c_1$$

O bien:

$$\ln \left(\frac{p'Y}{c_2}\right) = - y \quad ; \quad c_1 = \ln c_2$$

$$\frac{p'\ Y}{c2} = e^{-Y} \quad \therefore \quad p = \frac{dp}{dy} = c_2 \frac{e^{-Y}}{Y} \quad \text{.........(I.31)}$$

De la ecuación (v) y I.31:

$$\lim_{y \to 0} 2c_2 e^{-Y} = - \frac{q\mu}{2\pi kh}$$

Por tanto:

$$c_2 = - \frac{q\mu}{4\pi kh}$$

Substituyendo esta ecuación en la ecuación I.31:

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{q\mu}{4\pi kh} \frac{e^{-Y}}{Y}$$

Integrando esta ecuación y utilizando la condición (iv) se obtiene:

$$p = p_i - \frac{q\mu}{4\pi kh} \int_{\alpha}^{Y} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = p_i - \frac{q\mu}{4\pi kh} \mathrm{Ei}\ (-Y)$$

(α variable muda)

$$p = p_i - \frac{q\mu}{4\pi kh} \mathrm{Ei} \left(- \frac{\phi\mu C r^2}{4kt} \right) \text{........(I.32)}$$

de donde, por definición:

$$Ei\ (-\ Y) = \int_{\alpha}^{Y} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\ d\alpha$$

es la función integral exponencial, la cual se presenta - gráficamente en la tabla I.1 Fig. I.6. Para valores del- argumento menores de 0.0025 la función puede aproximarse- por:

$$Ei\ (-Y) \approx \ln Y + 0.5772$$

La ecuación I.32 es la solución de la ecuación- I.32, se le conoce como solución fuente lineal continua.

Por medio de la ecuación I.32 se puede conocer- la variación de la presión en cualquier punto y a cual--- quier tiempo para un sistema radial infinito que se en--- cuentra fluyendo aún gasto constante.

Cuando el sistema es sometido a un ritmo varia- ble de extracción y se desea conocer el cambio de la pre- sión con respecto al tiempo y al espacio, se recurre al - auxilio de los principios de superposición, tanto en el - tiempo como en el espacio.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION.

Existen dos principios básicos de superposición. Dichos principios están basados en su forma más simple, - en que cualquier combinación lineal de dos o más solucio- nes de una ecuación diferencial lineal, es también una --

solución de la ecuación diferencial para diferentes condiciones de frontera.

El proceso consiste en aplicar la ecuación I.32, a cada una de las diferentes etapas del proceso y superponer los efectos causados por cada una de ellas. Físicamente representa que en vez de considerar un sólo pozo, se consideran varios pozos actuando en el mismo lugar, cada uno de ellos con un comportamientio independiente de los demás. Este efecto se conoce como"superposición en tiempo".

Aplicando lo anterior para cuando se tiene un proceso de "n" etapas, como se muestra en la figura I.6, se puede escribir lo siguiente:

$$\Delta p = - \frac{\mu B}{4 \pi kh} \sum_{i=1}^{n} (q_i - q_{i-1}) \, Ei \left(- \frac{\phi \mu C r^2}{4k (t - t_{i-1})} \right)$$

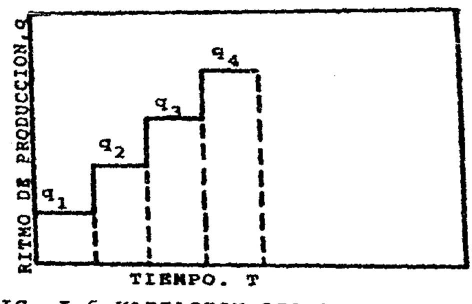


FIG. I.6 VARIACION DEL RITMO DE PRODUCCION CONTRA EL TIEMPO PARA UN PROCESO DE n ETAPAS que es válido para $q_o = 0$

El otro efecto, "superposición en espacio", toma en cuenta los disturbios ocasionados por pozos localizados en áreas vecinas y que actúan simultáneamente con el pozo productor.

En el desarrollo de este trabajo sólo se tomará en cuenta el principio de superposición en tiempo.

ANALISIS DEL PULSO ESCALON.

El pulso escalón es el estímulo más elemental para producir perturbación en el pozo y se puede generar cerrando el pozo productor. Al efectuar esta operación el gasto del pozo cambia desde un valor determinado hasta alcanzar un valor cero, como se muestra en la figura I.7

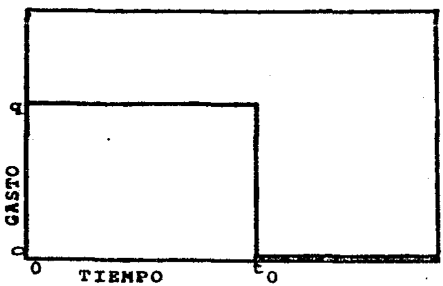


FIG.I.7 ESQUEMA REPRESENTATIVO DE UN PULSO ESCALOR

Aplicando el principio de superposición en este proceso se tiene lo siguiente:

$$p = p_i - \frac{qB\mu}{4\pi kh}\left(-Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4kt}\right) + Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4k\Delta t}\right)\right) \quad (I.34)$$

donde Δt es el tiempo transcurrido a partir del instante en que el pozo es cerrado, y t es el tiempo total.

Si se supone que el pozo es cerrado en el tiempo t_o, como se muestra en la figura I.7, se tiene:

$$t = t_o + \Delta t$$

por lo que la ecuación (I.34) se puede escribir como:

$$p = p_i - \frac{qB\mu}{4\pi kh}\left(-Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4k(t+\Delta t_o)}\right) + Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4k\Delta t}\right)\right)$$

En ingeniería de yacimientos, el proceso de cerrar y registrar la variación de la presión a diferentes tiempos se conoce como "prueba de incremento de presión". Debido a que este tipo de pruebas se realiza una vez que el pozo ha estado produciendo durante un tiempo relativamente largo, se tiene que t_o es mucho mayor que Δt, con lo cual puede hacerse la aproximación:

$$t_o + \Delta t \approx t_o$$

por lo que la ecuación I.34 se puede escribir como:

$$p = p_i - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \left(Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4kt_o}\right) + Ei\left(-\frac{\phi\mu Cr^2}{4k\Delta t}\right)\right) \ldots (I.35)$$

Por medio de la expresión I.35 se puede conocer la forma en que se propaga el pulso generado al cerrar el pozo; es decir, que por medio de la ecuación anterior se puede conocer la presión a cualquier distancia y a cualquier tiempo cuando se tiene un sistema radial de flujo.

VELOCIDAD DE PROPAGACION DEL PULSO ESCALON:

Para el desarrollo del método propuesto por el M.I. Carlos Balderas Joers, es necesario obtener una expresión para la velocidad de propagación de la perturbación producida al cerrar el pozo, de ahí que esta sección esté dedicada a este problema.

¿Cómo se puede determinar el tiempo en que la perturbación llega a un punto situado a una distancia determinada? La manera más sencilla de dar respuesta a esta pregunta consiste en colocar un detector de presión en ese punto y observar las variaciones de presión con el tiempo. Como toda perturbación que se propaga tiene la propiedad de transmitir energía, el tiempo de llegada es aquel en el que la potencia registrada por el detector es máxima.

Ahora bien, la energía recibida por un elemento del fluido en contacto con el detector, en un tiempo $d\Delta t$ está dado por:

$$dw = - p\ dv \quad \text{(I.36)}$$

Además, para un proceso isotérmico, se tiene que:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p}\, dp \quad \text{(I.37)}$$

y de la definición de la compresibilidad, c, tenemos:

$$\frac{\partial v}{\partial p} = - Cv \quad \text{(I.38)}$$

Sustituyendo las ecuaciones I.37 y I.38 en la ecuación II.3 se llega a:

$$dw - Cpv\ dp \quad \text{(I.39)}$$

donde c es una constante:

En consecuencia, la potencia está dada por:

$$p = \frac{dw}{d\Delta t}$$

de donde finalmente:

$$p = C\ \frac{dp}{d\Delta t} \quad \text{(I.40)}$$

de donde se ve que la potencia máxima se alcanza cuando $dp/d\Delta t$ es máxima.

En la figura I.8 se presenta una gráfica que describe el comportamiento de la presión con el tiempo, para un detector colocado a una distancia r del pozo.

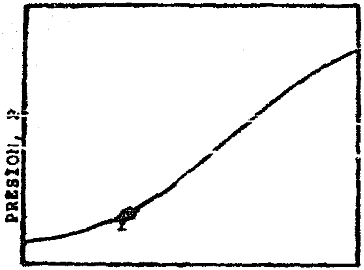


FIG.I.8 COMPORTAMIENTO DE LA PRESION CON EL TIEMPO PARA UN OBSERVADOR SITUADO A UNA DISTANCIA r=R

Al principio, la presión crece lentamente, a un ritmo ascendente, hasta alcanzar el máximo ritmo de cambio lo cual ocurre en el tiempo correspondiente al punto de inflexión marcado con la letra I. Después de esto, la presión sigue creciendo, pero a un ritmo descendente. En este proceso, el arribo de la perturbación está asociado con el tiempo de respuesta máximo, o sea el correspondiente al punto I.

El tiempo de arribo de la perturbación se puede apreciar mejor en la figura I.9

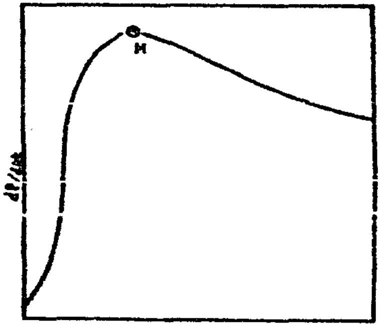


FIG.I.9 FORMA EN QUE VARIA EL RITMO DE CAMBIO DE LA PRESION.

de donde se ha graficado el tiempo transcurrido contra la derivada de la presión con respecto al tiempo.

Obviamente, el tiempo de llegada de la perturbación es el correspondiente al punto máximo M.

Por las razones expuestas en esta sección, se infiere que, para obtener por medios analíticos el tiempo de arribo de la perturbación basta con diferenciar la ecuación I.35 dos veces con respecto al tiempo de cierre e igualar con cero, como sigue:

Al diferenciar la primera vez, se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta t} = \frac{\partial p_i}{\partial \Delta t} - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta t} \left(- Ei \left(- \frac{\phi \mu C r^2}{4kto}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \Delta t} \left(Ei \left(\frac{-\phi \mu C r^2}{4k\Delta t}\right)\right)\right.$$

simplificando y haciendo operaciones vemos que:

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta t} = - \frac{qB\mu}{4\pi kh} \left(\frac{\partial}{\partial \Delta t} \left(Ei \left(- \frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}\right)\right)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I.41})$$

Por otro lado se sabe que, por definición:

$$-Ei\ (-Y) = \int_{Y}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\ du$$

y derivando con respecto al tiempo de cierre, se tiene:

$$\frac{\partial Ei\ (-Y)}{\partial \Delta t} = - \frac{\partial}{\partial \Delta t} \int_{Y}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\ du$$

Así mismo, aplicando la relación que existe entre la deri vada y la integral, sustituyendo límites y aplicando la - regla de la cadena, se ve que:

$$\frac{\partial Ei\ (-Y)}{\partial \Delta t} = \frac{dEi\ (-Y)}{dy} \frac{\partial Y}{\partial \Delta t}$$

$$= - \left(\frac{e^{-\infty}}{\infty} \frac{\partial y}{\partial \Delta t} - \frac{e^{-Y}}{Y} \frac{dy}{d\Delta t}\right)$$

substituyendo el valor de "y" mostrado en la ecuación II.
3.0 se tiene que:

$$\frac{\partial Ei\ (-Y)}{\partial \Delta t} = \frac{e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}}}{\frac{\phi \mu C r^2}{4k\ \Delta t}} \left(- \frac{\phi \mu C r^2}{4k(\Delta t)^2}\right)$$

simplificando, finalmente se tiene que:

$$\frac{\partial Ei\ (-Y)}{\partial \Delta t} = - \frac{1}{\Delta t}\ e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}}$$

substituyendo esta expresión en I.41 se ve que:

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta t} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{1}{\Delta t} e^{\frac{-\phi \mu C r^2}{4k\Delta t}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ I.42\ )$$

y diferenciando nuevamente:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial (\Delta t)^2} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \left(\frac{1}{\Delta t} \frac{\phi \mu C r^2}{4k(\Delta t)^2} e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}} - \frac{1}{(\Delta t)^2} e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}} \right)$$

haciendo operaciones:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial (\Delta t)^2} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \left(\frac{1}{(\Delta t)^3} \frac{\phi \mu C r^2}{4k} e^{\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}} - \frac{1}{(\Delta t)^2} e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}} \right)$$

al colocar $(\Delta t)^3$ como factor común, la expresión anterior se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial(\Delta t)^2} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{1}{(\Delta t)^3} \left(\left(\frac{\phi\mu Cr^2}{4k} - \Delta t \right) e^{-\frac{\phi\mu Cr^2}{4k\Delta t}} \right)$$

igualando esta expresión con cero, se obtiene el tiempo de arribo de la perturbación, el cual se puede expresar como:

$$\Delta t = \frac{\phi\mu Cr^2}{4k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.43)$$

Esta expresión indica que la perturbación se propaga de manera tal que el área barrida por el frente de avance, es proporcional al tiempo transcurrido. Esta misma expresión fue obtenida por Muskat siguiendo un procedimiento completamente diferente.

Despejando la distancia radial y derivando nuevamente con respecto al tiempo, se encuentra la velocidad de propagación, v. la cual se puede expresar como:

$$v = \frac{dr}{d\Delta t} = \left(\frac{k}{\phi\mu C\Delta t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I.44)$$

C A P I T U L O   II

METODOS TRADICIONALES.

Existe un número limitado de métodos que se han desarrollado con la finalidad de evaluar el volumen de hidrocarburos que está siendo afectado por un pozo productor.

Las diferentes expresiones matemáticas que se han presentado en la literatura especializada, están basadas en la definición, un tanto arbitraria que han utilizado los investigadores para describir el radio de drene.

En este capítulo se pretende dar un breve análisis de los métodos tradicionales que se han desarrollado con la finalidad de evaluar el radio de drene de un pozo productor.

METODO DE MUSKAT.

Muskat es uno de los primeros investigadores que se propuso encontrar una solución al problema de evaluar el radio de drene de un pozo productor.

Por su parte el autor para poder desarrollar su método, propone una serie de suposiciones con el objetivo de poder representar el sistema de flujo en un medio poroso. Las principales consideraciones que toma en cuenta Muskat, es el de considerar que el medio poroso está representado por un sistema homogéneo, isotrópico y de espe sor constante que contiene un volumen total de aceite a - una presión constante P_i, hasta un instante de hacer producir a la formación.

El autor representa este volumen de hidrocarburos por:

$$Q = \pi \phi h \; (r_e^2 - r_w^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ II.1 })$$

Otras suposiciones importantes que considera para el desarrollo de su método, son las de representar el flujo de fluidos en el medio poroso por una serie continua de flujos en regímenes permanentes y que cada volumen de fluidos que se produce del yacimiento está representado por:

$$Q_{rem} = \pi \phi h C(p_i - p_w)\left(\frac{r_e^2 - r_w^2}{2 \ln re/rw} - r_w^2\right) \ldots (\text{II.2})$$

En magnitud r_w es muy pequeña en comparación con r_e, por lo que $r_e^2 - r_w^2$ tiende al valor de r_e^2 y substituyendo este valor en la ecuación (II.2) obtenemos la siguiente expresión:

$$Q_{rem} = \pi \phi h C(p_i - p_w)\left(\frac{r_e^2}{2 \ln \frac{re}{rw}} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ II.3 })$$

Al extraer un volumen de fluidos del yacimiento se crea un perfil de presiones que se representa por:

$$q = \frac{2\pi kh(p_i - p_w)}{\ln \frac{re}{rw}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ II.4})$$

Esto indica que en la vecindad del pozo productor, la presión que se registra es menor a P_i, y que se tiene hacia el pozo un flujo radial tipo Darcy. Al parecer este nivel de presión, en la ecuación (II.4) se indica que en ese momento se tiene el primer régimen permanente del sistema.

Debido a que se supone que el volumen de fluidos producidos se realiza a un gasto constante, el tiempo necesario para alcanzar el primer régimen permanente estará representado por:

$$t = \frac{Q_{rem}}{q} \quad \text{(II.5)}$$

Substituyendo las ecuaciones (II.3 y II.4) en la ecuación (II.5) se tiene:

$$t = \frac{\dfrac{\pi \phi h C \, (p_i - p_w) \, r_e^2}{2 \ln \left(\dfrac{r_e}{r_w} \right)}}{\dfrac{2 \pi k h \, (p_i - p_w)}{\ln \dfrac{r_e}{r_w}}} \quad \text{(II.6)}$$

simplificando términos semejantes y reagrupando, se llega a la expresión

$$t = \frac{\phi C \mu r_e^2}{4k} \quad \text{(II.7)}$$

de donde despejando r_e se puede obtener el radio de drene, quedando la expresión de la siguiente manera:

$$r_e = 2 \left(\frac{kt}{\phi C \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{.....................(II.8)}$$

Analizando esta expresión se puede observar que- es un parámetro que está creciendo continuamente con el tiempo.

Hay que recordar, que el desarrollo de esta ecuación está basada principalmente en suponer que el sistema- está sometido a un gasto constante de extracción y en re-- presentar aquel por un conjunto discontínuo de flujos que- van desde un estado altamente transitorio a un estado per- manente.

METODO DE BROWNSCOMBE Y KERN.

Estos autores, a través de una serie de soluciones gráficas a problemas con flujo radial, encontraron una expresión matemática para el tiempo en el cual se alcanza- lo que denominan "estado de equilibrio". Esta expresión es:

$$t_s = \frac{\phi \mu C \, r_e^2}{3.18 \, k} \quad \text{.....................(II.10)}$$

donde r_e es el radio de drene, por lo que despejando de la ecuación anterior, se obtiene la expresión siguiente:

$$r_e = \left(\frac{t_s \, 3.18 \, k}{\phi \mu C} \right) \quad \text{..................(II.11)}$$

Analizando la ecuación II.11, podemos observar - que r_e aumenta en tanto que ts aumenta. Brownscombe y -- Kern establecen que ts es el tiempo necesario para alcan-- zar un estado de euqilibrio, estado en el cual los cambios de presión con respecto al tiempo, permanecen constantes - para todo yacimiento infinito. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, definen este tiempo ts como el tiempo - requerido para que el yacimiento sometido a un gasto de -- producción constante, alcance el estado de equilibrio en - el cual los cambios de presión con el tiempo son menores - del 2%.

METODO DE MILLER, DYES Y HUTCHINSON.

Estos investigadores utilizan el método propuesto por Brownscombe y Kern y además, presentaron una rela-- ción para el caso de flujo de fluidos en dos fases. En - el desarrollo de estas expresiones los investigadores suponen que el fluido es homogéneo y compresible en todo el medio poroso y que en el yacimiento, en un punto alejado del pozo, la presión es casi constante, por lo que las varia-- bles que son función de la presión, tales como, μ_o, μ_g, P, ρ, y s, deben considerarse constantes, así mismo, suponer una saturación de fluidos constantes a través de todo el - yacimiento y, por lo tanto, las permeabilidades relativas- a las fases fluyendo; es decir, kro y krg deben ser cons-- tantes.

Bajo estas consideraciones, presentan las siguientes expresiones para la estimación del tiempo de estabilización para los casos de una y dos fases fluyendo en el yacimiento.

Para una fase:

$$t_s = \frac{f C \mu r_e^2}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.12)$$

de donde podemos despejar re y así poder obtener el radio de drene:

$$r_e = \left(\frac{t_s\, k}{f\, C \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.13)$$

Para un sistema donde se encuentran los fluidos en dos fases, ts se presenta como:

$$t_s = \frac{50 f C_t \mu_1 r_e^2}{k \left(\frac{d_1 + dg R}{F\ dt} \right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.14)$$

por lo que:

$$r_e = \left(\frac{t_s\ k \left(\frac{d_1 + dg\ R}{F\ dt} \right)}{50\ f\ C_t\ \mu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II.15)$$

en ambos casos de una y dos fases de los fluidos ts es el tiempo, en días, requerido para obtener el estado permanente del sistema.

En la práctica se ha visto que el término:

$$\frac{d_1 + dg\ R}{F\ dt} = 1$$

es muy cercano a la unidad.

METODO DE CHATAS.

Chatas utiliza los mismos conceptos que Muskat en el desarrollo de su trabajo, respecto al tiempo de estabilización y desarrolla dos ecuaciones, una para radial y otra para flujo lineal.

La expresión que desarrolla para flujo radial es:

$$t = \frac{\phi C \mu r_e^2}{4k} \quad \text{(II.16)}$$

que es igual a la que presenta Muskat; es decir, a la ecuación II.7, en tanto que para flujo lineal encontró la siguiente expresión:

$$t = \frac{\phi \mu C x^2}{2k} \quad \text{(II.17)}$$

donde la variable x representa la distancia o longitud de influencia o mejor dicho el radio de drene.

Por lo que despejando de las ecuaciones II.16 y II.17, podemos obtner el radio de drene para flujo radial y flujo lineal respectivamente, quedando para flujo radial el radio de drene de la manera siguiente:

$$r_e = \left(\frac{t\ 4\ k}{\phi C \mu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(II.18)}$$

y para flujo lineal:

$$x = \left(\frac{2tk}{\phi \mu C} \right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.20)$$

METODO DE TEK, GROVE Y POETTMANN.

Estos autores encaminan su trabajo a estudiar el comportamiento de pozos con flujo de gas natural y determinan ecuaciones que permiten estimar lo que denominan "índice de prueba; así como una expresión para calcular el radio de drene y otro para el radio efectivo del pozo.

Para efectos de este trabajo, la expresión que desarrollaron se basa en la siguiente definición: "el radio de drene para un pozo de gas, es aquella distancia más allá de lo cual ningún gas natural fluye hacia el pozo productor:

La ecuación que proponen estos autores es la siguiente:

$$r_e = 0.0704 \left(\frac{4kt}{\phi \mu B} \right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.21)$$

donde:

$$B = \frac{14.65}{P_o} \left(1 - \frac{P_o}{Z_o} \left(\frac{\partial Z}{\partial P} \right)_o \right) \ldots\ldots (II.22)$$

Como se puede ver, estas ecuaciones tienen mucha semejanza con las expresiones desarrolladas por los --

autores ya mencionados, para el caso de flujo de aceite — en un medio poroso. Donde el parámetro B involucra a las propiedades del gas.

METODO DE JONES.

Jones presenta dos definiciones en su trabajo de investigación, una para el radio de drene de un pozo, el cual presenta como aquel punto donde el cambio en presión es menor o igual al uno por ciento", y otra para el tiempo de estabilización o tiempo de viaje, como también lo denomina y que define como: " el tiempo necesario para que un disturbio en la presión sea perceptible a una distancia r alejada del pozo".

La presión que Jones desarrolló y que presenta en su trabajo es:

$$r_e = 4\left(\frac{kt}{\phi C \mu}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(II.23)}$$

Rearreglando esta ecuación obtiene el tiempo de viaje:

$$t_t = \frac{\phi \mu C r^2}{16\ k} \qquad \text{(II.24)}$$

Esta expresión la desarrollo tomando como base la analogía que existe entre el flujo de calor en una placa semi-infinita y el flujo de fluidos en un sistema lineal.

El principio en el cual está basada esta deduc-- ción, establece que si una placa se encuentra a una temperatura constante y, posteriormente, ésta se incrementa a - través de uno de los extremos, la distribución o cambio de temperatura con respecto a la distancia está dada por:

$$T - T_o = (T_1 - T_o)\ (1 - \text{erf}\ \frac{Y}{(4 \alpha t)^{\frac{1}{2}}}) \quad \ldots (\text{II.25})$$

Esta ecuación tiene gran semejanza a la utilizada para el flujo de un fluido presurisado dentro de un núcleo lineal. Esta expresión es como sigue:

$$P - P_o = (P_1 - P_o)\ (1 - \text{erf}\ (\frac{\phi \mu C x^2}{4kt})^{\frac{1}{2}}\ ) \ldots\ldots (\text{II.26})$$

Utilizando la definición que propone para el radio de drene y la ecuación II.26 concluye que:

$$x = 4\ (\frac{kt}{\phi \mu C})^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II.27})$$

Que es una ecuación muy semejante a la expresión III.23, ya que el valor radial r es reemplazada por el - valor lineal x.

Jones, en su artículo de prueba de límite de yacimientos, hace uso de una función y que define como:

$$Y = \left(\frac{dp}{dt} \right)$$

y las funciones que presenta como soluciones para un yacimiento infinito son:

$$Y_{infinito} = \frac{\mu}{4 \pi kht} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{II.28})$$

$$Y_{infinito} = \frac{1}{\pi h(r_e^2 - r_w^2)\ C\phi} \quad \ldots\ldots(\text{II.29})$$

La expresión se puede expresar como:

$$Y_{finito} = \frac{1}{N_c}$$

de donde

$$N_c = \pi h(r_e^2 - r_w^2)\ C\phi$$

es el volumen poroso conectado asociado al pozo, lo que indica que la solución que se dá para un yacimiento finito, es inversamente proporcional al volumen poroso asociado al pozo.

C A P I T U L O   III

METODO PROPUESTO POR C. BALDERAS.

El método propuesto por este autor no requiere del conocimiento explícito de los parámetros de tiempo de estabilización y de la permeabilidad promedio de la formación productora como en los métodos vistos anteriormente, lo cual representa por sí solo una ventaja desde el punto de vista de facilidad para determinar el radio de drene de un pozo productor de hidrocarburos.

DETERMINACION DE LA PERMEABILIDAD.

La ecuación $\Delta t = \dfrac{\phi \mu C r^2}{4k}$

indica la forma en la cual se propaga la perturbación generada al cerrar el pozo que ha estado produciendo durante un tiempo relativamente largo, esta expresión permite obtener el tiempo Δt necesario para que el pulso generado recorra una distancia r alejada del pozo. Como podemos ver más adelante, esta ecuación es fundamental para la determinación del radio de drene.

Como podemos observar de la ecuación anterior, uno de los parámetros que intervienen, es la permeabilidad promedio de la formación, por lo que es necesario considerar algún método para que permita su determinación. A continuación se presenta una técnica desarrollada que es de gran utilidad para los fines que persigue este método.

Tomando como punto de partida la ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial \Delta t} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{1}{\Delta t} e^{-\frac{\phi \mu C r^2}{4k \Delta t}}$$

Se observa que cuando la distancia es muy pequeña, es decir, cuando se aproxima a cero, la función exponencial se aproxima a la unidad, de tal manera que la presión se convierte en una función del tiempo solamente. Por lo tanto, las mediciones de la variación de la presión hechas en el pozo se pueden representar por:

$$\frac{dp}{d\,t} = \frac{qB\mu}{4\pi kh} \frac{1}{\Delta t} \quad \text{......................(III.1)}$$

invirtiendo esta ecuación y haciendo que

$$\frac{d\Delta t}{dp} = \Delta t'$$

se tiene lo siguiente:

$$\Delta t' = \frac{4\pi kh \Delta t}{qB\mu} \quad \text{......................(III.2)}$$

Esta ecuación indica que si se grafica $\Delta t'$ contra Δt se debe obtener una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es proporcional a la permeabilidad promedio de la formación, es decir, que se puede expresar como:

$$m = \frac{4\pi kh}{qB\mu}$$

tal como se muestra en la figura III.1

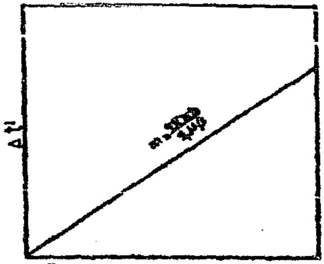


FIG. III.1 GRAFICA QUE PERMITE DETERMINAR LA PERMEABILIDAD DE LA FORMACION

VARIACION DE LA PRESION EN UN POZO.

Cuando un pozo ha estado en producción por un tiempo relativamente largo y luego es cerrado, el comportamiento típico de la presión de fondo es como se muestra en la fig. III.2.

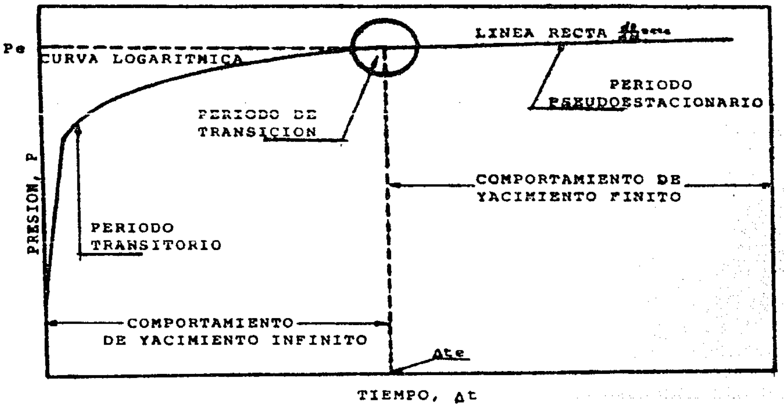


FIG. III.2 COMPORTAMIENTO TIPICO DE LA VARIACION DE LA PRESION EN FUNCION DEL TIEMPO DE CIERRE EN UN POZO PRODUCTOR DE ACEITE.

La variación de la presión con el tiempo se puede describir en términos de tres períodos consecuntivos. Durante la etapa inicial de cierre del pozo productor, se dice que el pozo se encuentra en un período transitorio. En esta etapa, el sistema se comporta como si fuera un yacimiento infinito y la presión se incrementa rápidamente de acuerdo a una función logarítmica. Después de un período de tiempo suficientemente largo, el sistema llega a un período conocido como "período pseudoestacionario o cuasiestacionario". Durante esta etapa, la presión varía muy lentamente en todas partes del yacimiento y se observa que se mantiene una relación lineal con el tiempo, es decir, que durante esta etapa, el yacimiento se comporta como si fuera un yacimiento finito y donde los efectos de frontera han llegado a las vecindades del pozo.

Entre estos dos períodos hay un estado conocido como "período de transición". Este período se puede considerar como el final del período pseudoestacionario. Este período ha sido ilustrado en la Fig. II.2, indicándose con un círculo cuyo centro tiene por coordenadas (Δt_e, P_e), donde se supone que termina la parte curva y se inicia la parte recta de la curva que representa la variación de la presión con respecto al tiempo.

El tiempo que se requiere para alcanzar este último período se denomina tiempo de estabilización. En la literatura relacionada con el radio de drene o límite de yacimientos se han desarrollado algunas expresiones para tratar de evaluar este parámetro, pero todas estas ecuaciones han quedado como función del radio de drene, el cual para estos casos es supuesto.

El compartimiento de la presión también se puede escribir en términos de la variable $\Delta t'$ anteriormente definida como la derivada del tiempo con respecto a la presión.

Durante el comportamiento del yacimiento como si fuera infinito, se satisface la III.2, en cambio para la segunda etapa, el yacimiento limitado, esta derivada es constante y su valor se obtiene al substituir Δt por Δt_e en la ecuación III.2, esto es:

$$\Delta t' = Cte. = \Delta t'e$$

$$\Delta t'e = \frac{4\pi kh\,\Delta t_e}{qB\mu} \quad \text{.....................(III.3)}$$

En consecuencia, una gráfica de $\Delta t'$ contra Δt es como se ilustra en la figura III.3

DETERMINACION DEL RADIO DE DRENE.

Para el establecimiento de una técnica para determinar el radio de drene es necesario dar una definición precisa de lo que este concepto de radio de drene significa. Por lo ya visto anteriormente, intuitivamente podemos decir que el radio de drene se asocia con el volumen de hidrocarburos asociados al pozo productor, de ahí que algunos autores lo denominen como radio de influencia del pozo productor. Una consideración básica para el establecimiento de una definición precisa del radio de drene es la de que los fluidos del yacimiento localizados a una distancia mayor que la del radio de drene, no "sienten" o no se ven afectados por los cambios de presión que ocurren en el pozo productor. Para poder establecer una definición cuantitativa a partir de estas ideas, debe tenerse presente que cuando el pozo se cierra, se produce una perturbación que avanza con una velocidad decreciente con respecto a la distancia que recorra, de acuerdo con la ecuación I.44. El pulso se amortigua con la distancia y, finalmente, se hace imperceptible. La distancia recorrida por el pulso en este tiempo es, precisamente el radio de drene del pozo productor. En la práctica, esta distancia recorrida por el pulso, no se puede medir directamente, ya que las observaciones del comportamiento del pulso generado sólo se hacen en el pozo de interés en el cual se generó dicho pulso. Sin embargo, a través de mediciones hechas en el pozo, es posible determinar el tiempo en el que el pulso llega al límite de la zona de influencia, pues coincide con el tiempo en que el yacimiento pasa del comportamiento infinito al comportamiento finito. En consecuencia, se puede establecer la siguiente definición: "radio de drene es la distancia que recorre el pulso en un tiempo igual al necesario para que se inicie el comportamiento finito".

Sea Δt_e el tiempo requerido para que se inicie el comportamiento finito. La distancia que el pulso recorre en ese tiempo, es decir, el radio de drene, de acuerdo con la ecuación I.41 está dado por:

$$r_e^2 = \frac{4k\,\Delta t_e}{\phi \mu C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III.4})$$

Despejando la permeabilidad de la Formación, k, de la ecuación (III.3) y substituyendo en la ec. (III.4) se llega a obtener la siguiente ecuación:

$$r_e^2 = \frac{qB\,\Delta t_e}{\pi h C \phi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{III.5})$$

Que es la ecuación fundamental en el que se basa el método propuesto por C. BALDERAS para determinar el radio de drene de un pozo productor de hidrocarburos.

Como se puede ver en el método propuesto, la determinación del radio de drene no requiere del conocimiento explícito de la permeabilidad de la formación, ni del tiempo de estabilización.

Los valores de las variables que intervienen en esta ecuación, como son el gasto del pozo, el factor de volumen del aceite, el espesor de la formación productora, así como su porosidad y la compresibilidad total del sistema se determinan por los métodos tradicionales y el valor de $\Delta t'_e$ se obtiene de una gráfica como la mostrada en la figura (III.3)

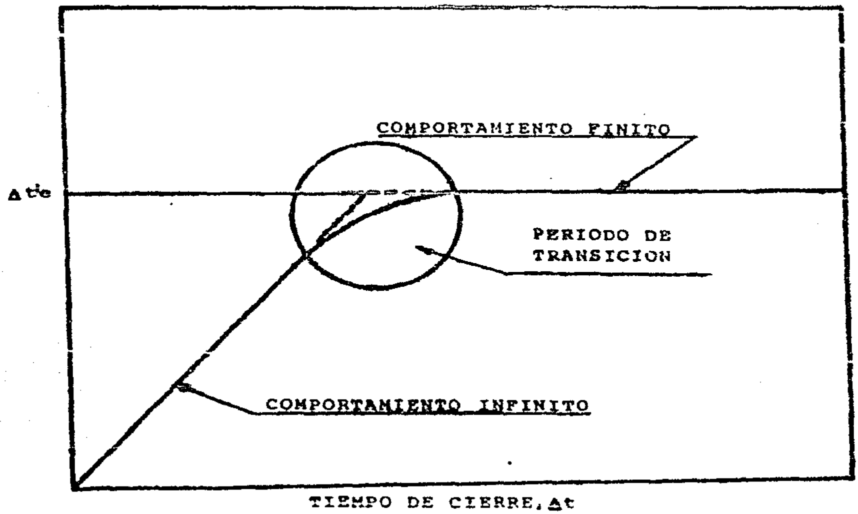


FIG. III.3 GRAFICA QUE REPRESENTA EL COMPORTAMIENTO TIPICO DE LA VARIACION DE $\Delta t'$ CONTRA Δt.

C A P I T U L O   IV

APLICACION DEL METODO.

Con la finalidad de poder demostrar que tiene -- aplicación en el campo el método propuesto por C. Balderas, a continuación se presentan algunos ejemplos, en los cua-- les se puede observar la forma en que fue aplicada la teo- ría y poder constatar la validez de este método y la con-- fiabilidad de sus resultados.

SISTEMA DE UNIDADES.

En las fórmulas matemáticas desarrolladas para - este método, se han utilizado unidades correspondientes al sistema Darcy. Sin embargo para facilitar la aplicación de estas ecuaciones en el campo es conveniente utilizar unida des prácticas de campo que corresponden al sistema métrico. A continuación se hace mención de las variables usadas en- las diferentes ecuaciones, con sus correspondientes unida- des de Darcy y de campo.

Variable	Sistema Darcy	Unidades de Campo
B	cm^3/cm^3	m^3/m^3
c	$cm^3/cm^3/atm$	$m^3/m^3/kg/cm^2$
h	cm	m
k	Darcy	milidarcy
P	atm	kg/cm^2
q	cm^3/seg	$m^3/día$
r	cm	m
t	seg	hora
ϕ	fracción	fracción
	centipoices	centipoices

Utilizando las unidades prácticas de campo en la siguiente ecuación:

$$r_e^2 = \frac{qB\Delta t'_e}{\pi hC\phi}$$

que tiene unidades del sistema Darcy tendremos:

Cambio de Unidades.

$$q\left(\frac{\cancel{m^3}}{\cancel{día}}\right)\frac{\cancel{día}}{86400\ seg}\ \frac{1x10^6\ cm^3}{\cancel{m^3}}$$

$$q\left(11.57407407\ \frac{cm^3}{seg}\right) = q\left(\frac{m^3}{día}\right)$$

$$B\left(\frac{m^3}{m^3}\right) = B\left(\frac{cm^3}{cm^3}\right)$$

$$t\ (\ horas\ ) = t\ (\ 3600\ seg)$$

$$h\ (m) = h\ (\ 100\ cm\ )$$

$$c\ (\ cm^3/cm^3/atm) = c\ (m^3/m^3/kg/cm^2)$$

$$r\ (m) = r\ (100\ cm)$$

Sustituyendo las nuevas unidades en la ecuación anterior - obtendremos.

$$r_e^2\ (\ 100\ cm\ )^2 = \frac{(11.57407403)\ q\ B\ \Delta t'e\ (3600)}{3.1415\ \ h\ (100)\ \phi}$$

realizando las operaciones correspondientes tendremos

$$r_e^2 = \frac{0.0132629119 \; c \; B \, \Delta t'e}{\phi \; c \, h} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (IV.1)$$

DETERMINACION DEL PARAMETRO t'e.

La variable $\Delta t'e$ se define gráficamente en la figura (III.3) y para su determinación se requiere de un procedimiento sencillo.

Para el cálculo de esta variable se requiere como información inicial, los datos de presión de fondo cerrado y los tiempos de cierre obtenidos durante la prueba de incremento de presión de dicho pozo o pozos de interés, y mediante un procedimiento sencillo se llegará a una serie de datos tabulados y posteriormente a un par de gráficas mediante las cuales se podrá calcular la variable $\Delta t'e$, como se mostrará mas adelante.

Es de singular importancia hacer notar que, debido a que la diferenciación es una operación matemática que introduce lo que se conoce como ruido o dispersión de datos en el procedimiento de cálculo se establece una técnica de ajuste llamado promedio móvil, con la finalidad de suavisar la última gráfica generada y así poder compenzar el efecto perturbador del ruido o la dispersión de los resultados obtenidos.

La descripción de la tabla (IV.1) es de la manera siguiente:

La primer columna presenta el tiempo de cierre -- en la cual se efectuó la medición de presión de fondo cerrado, la cual se presenta en la columna dos, la tercer columna representa el tiempo medio o la parte media de un incremento de tiempo. la columna cuarta es el intervalo de tiempo entre un tiempo de cierre y otro, la columna quinta muestra los incrementos de presión obtenidos para cada uno de - los pozos de tiempo, la columna sexta no es otra cosa que - el valor de la raíz cuadrada de los datos contenidos en la- columna tercera, la columna séptima muestra la raíz cuadrada de los valores obtenidos al dividir la columna cuarta entre la columna quinta y finalmente la columna octava es la- aplicación del promedio móvil a la columna séptima.

Pasos a seguir para elaborar la tabla (IV.1)

Columna 1°. Información de campo (tiempo de cie-- rre) t (hrs)

Columna 2°. Información de campo (presión de fondo de pozo cerrado) P (kg/cm^2).

Columna 3°. Tiempo medio de columna (1)

$$TM = \frac{T\ (n)\ +\ T\ (n+1)}{2}$$

Columna 4°. $DT = T\ (n+1)\ -\ T\ (n)$

el valor de T se obtiene de la 1a. - columna.

Columna 5a. DP = P (n+1) - P (n)

el valor de P lo obtenemos de la -- 2a columna.

Columna 6a. es la raíz cuadrada de los valores-tabulados en la columna 3.

$$(6) = \sqrt{(3)}$$

Columna 7a. es la raíz cuadrada de los valores-obtenidos al dividir la columna (4) entre la columna (5).

$$(7) = \sqrt{(4)/(5)} = \cos\theta.$$

Columna 8a. Promedio Móvil = P.M.

$$PM = (8) = \frac{(\cos\theta\ (n) + \cos\theta\ (n+1) + \cos\theta\ (n-1))}{3}$$

Como podemos observar, la elaboración de la Tabla (IV.1), utilizando el procedimiento anterior es muy -- sencillo. Con los valores de la tabla (IV.1) se generan - dos gráficas. En la primer gráfica por su estructura de -- tiempo Vs Presión, muestra el comportamiento de la presión de fondo cerrado contra el tiempo de cierre, observando la gráfica se puede ver el comportamiento típico de una curva de incremento de presión.

La segunda gráfica muestra la variación que se - tiene cuando se grafican los valores correspondientes de - $(TM)^{\frac{1}{2}}$ y $(\Delta t'e)^{\frac{1}{2}}$, a partir de esta gráfica se puede estimar el valor de $\Delta t'e$.

Con la finalidad de poder obtener de una manera rápida y exacta el valor de la variable $\Delta t'e$, se puede realizar un programa de cómputo, que desarrolle las ocho columnas de la tabla (IV.1) y las dos gráficas necesarias para obtener $\Delta t'e$.

ANALISIS DE LAS GRAFICAS DE $\Delta t\acute{e}$ vs Δt.

La construcción y el análisis de la gráfica $\Delta t\acute{e}$ versos Δt es una de las etapas de mayor importancia del método propuesto por C. Balderas.

Mediante el análisis de esta gráfica, nos permite estimar el valor de $\Delta t'e$, al prolongar la parte horizontal mediante una línea recta hasta cortar el eje de las ordenadas. Así mismo, con la parte inicial de la curva, se puede determinar la permeabilidad promedio de la formación productora, mediante la ecuación siguiente:

$$m = \frac{4\pi kh}{q B \mu}$$

Al comparar el juego de gráficas que se construyeron para los cuatro casos reales de campo, se pudo observar que no todas ellas tienen la misma configuración de la curva en su parte inicial, por lo que se pueden dividir en tres grupos; el primero de ellos se ajusta de una manera perfecta a la teoría desarrollada por C. Balderas.

En este primer caso se puede observar que, en la primera etapa de la curva, a los puntos calculados se les- puede ajustar una recta, con una cierta pendiente que pasa por el origen; esto nos dá la pauta para pensar que en el- yacimiento existe cierta homogeneidad. Además, la parte - final de la curva se hace horizontal, indicando con esto.- que el tiempo de cierre fue suficiente para que los efec-- tos del período pseudoestacionario se manifestaran.

Segundo grupo, en este grupo se caracteriza por- que se presenta una cierta concavidad hacia arriba en la - parte inicial de la curva, es decir, que la pendiente de - la curva crece contínuamente antes de hacerse horizontal.- Este compartimiento indica que la vecindad del pozo sufre- un marcado efecto de daño a la formación, ejemplo de esto- es el pozo 2, al cual se le detectó un factor de daño --- igual a diez, es decir, s=10. Gran parte de este daño se- debe a que son pozos de gran espesor y actualmente se en-- cuentran parcialmente penetrados y la teoría en que se ba- sa este método está desarrollada suponiendo flujo radial.

Para poder comprender más ampliamente este fenó- meno del daño a la formación, a continuación se presenta - un breve resumen del mismo. Durante la perforación, termi nación o producción de un pozo, es posible que una zona de permeabilidad alterada pueda desarrollarse alrededor de -- las paredes del agujero. Para medir estos efectos, Van --

Everdingen y Hurst, en dos publicaciones separadas, introdujeron el concepto del factor de daño. Ellos señalaron que las presiones medidas en un pozo frecuentemente no se ajustaban a las soluciones ideales, calculadas para el problema bajo consideración, aunque la información real parecía ser paralela a las soluciones teóricas. Ellos propusieron que la diferencia era caída adicional de presión causada por restricciones al flujo cercanas al pozo; Van Everdingen y Hurst, pensaron que esta caída de presión era resultado de una película infinitesimal en la superficie de la cara de la arena del pozo. Este efecto es representado por un factor de daño, s, el cual está relacionado con la caída de presión debido al daño, ΔPs por

$$\Delta Ps = \frac{141.2 q \mu B}{kh} \cdot s$$

$$(-5 < s < \infty).$$

Las unidades de la ecuación son las unidades Inglesas de campo: b /día, psi , pie, md. La figura (x) muestra e ilustra la distribución de presión en un yacimiento con pozo dañado.

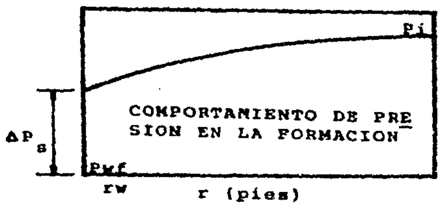


FIG. (x) COMPORTAMIENTO DE PRESION EN UN POZO DAÑADO

Everdingen y Hurst, en dos publicaciones separadas, introdujeron el concepto del factor de daño. Ellos señalaron - que las presiones medidas en un pozo frecuentemente no se- ajustaban a las soluciones ideales, calculadas para el problema bajo consideración, aunque la información real parecía ser paralela a las soluciones teóricas. Ellos propusieron que la diferencia era caída adicional de presión -- causada por restricciones al flujo cercanas al pozo; Van - Everdingen y Hurst, pensaron que esta caída de presión era resultado de una película infinitesimal en la superficie - de la cara de la arena del pozo. Este efecto es representado por un factor de daño, s, el cual está relacionado con la caída de presión debido al daño, ΔPs por

$$\Delta Ps = \frac{141.2 q \mu B}{kh} s$$

$$(-5 < s < \infty).$$

Las unidades de la ecuación son las unidades Inglesas de campo: b /día, psi , pie, md. La figura (x) -- muestra e ilustra la distribución de presión en un yacimiento con pozo dañado.

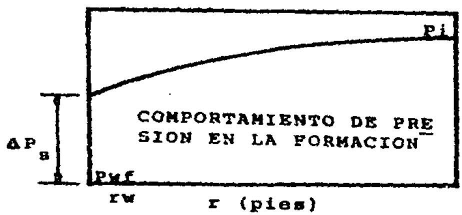


FIG. (x) COMPORTAMIENTO DE PRESION EN UN POZO DAÑADO

Puesto que el espesor de la zona dañada se considera que es infinitesimal, toda la caída de presión causada por el daño ocurre en la cara de la arena.

Un factor de daño positivo indica que la permeabilidad cercana a la pared del agujero ha sido reducida, mientras que un factor de daño negativo indica únicamente en la permeabilidad y finalmente, un factor de daño de cero indica que no hay cambio en la permeabilidad.

Finalmente, en el tercero y último de los grupos: podemos observar un comportamiento contrario al presentado en el grupo anterior, es decir, que en este caso se presenta una concavidad hacia abajo, lo que indica con este comportamiento que la pendiente de la recta, en la etapa inicial de la curva, disminuye contínuamente, lo que representa un beneficio a la formación en la vecindad del pozo. Este comportamiento tiene una explicación, ya que el pozo 4 pertenece a una región donde los pozos son fracturados hidraúlicamente antes de hacerlos producir.

Independientemente de las características de cada uno de los grupos ya antes mencionados, lo realmente relevante, desde el punto de vista de estudio, es que en todos los casos tomados a prueba, se puede observar la porción horizontal de la curva, lo que confirma la validez del método presentado por C. Balderas.

DESARROLLO DE LOS EJERCICIOS.

A continuación se presenta el desarrollo y resultados obtenidos de cuatro pozos a los cuales se les aplicó el método de C. Balderas, para calcular el radio de drene -correspondiente a cada uno de ellos.

La Información de laboratorio y de campo utilizada en el cálculo del radio de drene para los cuatro pozos -es la siguiente:

POZO No	GASTO $m^3/$ día	B m^3/m^3	ϕ Fracción	C $10^4 (kg/cm^2)^{-1}$	h m
1	10.0	1.232	0.080	1.39	75
2	15.2	1.235	0.070	2.14	100
3	692.0	1.700	0.064	1.21	67
4	11.0	1.233	0.090	2.14	80

Como podemos ver, los datos anteriores se encuentran en el sistema métrico, ésto es con el objeto de poder-aplicar el método propuesto por C. Balderas, a los cuatro -ejemplos propuestos.

Las tablas IV.1 a IV.4 presentan la información-requerida para la estimación del parámetro Δt_e correspondiente a cada uno de los pozos, la elaboración de éstas se-lleva acabo de acuerdo al método anteriormente expuesto.

Las gráficas IV.1A a IV.4A son únicamente la-representación del comportamiento de la presión cuando un -

pozo productor es cerrado, por lo que son la presión contra el tiempo de cierre, y se elaboran con la información de las columnas 1 y 2 de las tablas IV.1 a IV.4 respectivamente.

Las gráficas IV.1B a IV.4B se han desarrollado de la información obtenida en las tablas iniciales y de las columnas 6 y 7.

Posteriormente de desarrollar tablas y gráfica para cada uno de los pozos y con los datos obtenidos de laboratorio correspondiente a cada uno de ellos, se aplica la ecuación III.5 y la ecuación siguiente:

$$m = \frac{4\pi kh}{qB\mu}$$

para obtener los resultados que se muestran a continuación:

POZO No	$\Delta' te$ hrs/kg/cm^2	r_e m	k md
1	182.25	189	2.8
2	64.00	103	1.6
3	5.52	407	1314
4	251.86	171	3.3

APLICACION DE LOS METODOS TRADICIONALES

Con la finalidad de poder establecer un análisis cuantitativo entre los resultados obtenidos aplicando el método C. Balderas y los métodos tradicionales, se llevó acabo la aplicación de estos últimos.

Para poder llevar acabo el análisis cuantitativo, se utilizó como datos comunes para todos los métodos tradicionales los utilizados y algunos obtenidos por C. Balderas. El objetivo principal de este análisis es el de poder comparar y constatar cuan confiable puede ser el nuevo método expuesto por C. Balderas con respecto a los ya existentes.

No todos los métodos expuestos en este trabajo fue posible aplicarlos, pues algunos requieren mayor cantidad de información que la que disponemos para este análisis, y los resultados obtenidos con los métodos aplicables son los siguientes.

Radio de drene calculado por medio de los diferentes Métodos tradicionales.

METODO	POZOS (re. cm).				UNIDADES
	1	2	3	4	
MUSKAT	18896	10415	38776	17148	cm
CHATAS	18896	10415	38776	17148	cm
JONE	18901	10415	38775	17148	cm
C. BALDERAS	18900	10300	40700	17100	cm
BROWNSCOBE Y KEN	16848	9286	34573	15289	cm

Comparando los resultados obtenidos por los métodos tradicionales y el resultado obtenido por el método expuesto por C. Balderas se puede observar que son prácticamente los mismos y las diferencias que existan son mínimas. por lo que podemos concluir que el método C. Balderas tiene un alto grado de confiabilidad en la aplicación de campo. Pero podemos observar que el método que más se desvia en sus valores con respecto a los demás es el de Brownscobe y Ken, y esto es a consecuencia de la expresión obtenida en su método que fue desarrollado a base de solucionesgráficas.

T A B L A IV.1

INFORMACION REQUERIDA PARA LA ESTIMACION DE $\Delta t'e$ CORRESPONDIENTE AL:

$$TM=\frac{T(n)+T(n+1)}{2}$$

(1) TIEMPO DE CIE RRE.	(2) PRESION DE POZO CERRADO	(3) TIEMPO MEDIO	(4) ΔT(1)	(5) ΔP(2)	(6) $\sqrt{TM}$	(7) cose $\sqrt{4/5}$	(8) $PM=\frac{(cose(n)+cose}{3}\frac{(n+1)+cose(n-1)}{3}$
.00	76.400						
		5.00	10.00	2.00	2.24	2.24	
10.00	78.400						
		15.00	10.00	2.00	3.87	2.24	2.69
20.00	80.400						
		20.65	1.30	.10	4.54	3.61	5.30
21.30	80.500						
		26.35	10.10	.10	5.13	10.05	5.37
31.40	80.600						
		31.70	.60	.10	5.63	2.45	5.99
32.00	80.700						
		35.00	6.00	.20	5.92	5.48	5.00
38.00	80.900						
		43.00	10.00	.20	6.56	7.07	7.16
48.00	81.100						
		52.00	8.00	.10	7.21	8.94	7.70
56.00	81.200						
		61.00	10.00	.20	7.81	7.07	7.92
66.00	81.400						
		72.00	12.00	.20	8.49	7.75	8.59
78.00	81.600						
		84.00	12.00	.10	9.17	10.95	10.71
90.00	81.700						
		99.00	18.00	.10	9.95	13.42	11.78
108.00	81.800						
		114.00	12.00	.10	10.68	10.95	11.54
120.00	81.900						
		130.50	21.00	.20	11.42	10.25	10.23

(Continuación)

TIEMPO DE CIERRE.	PRESION DE POZO CERRADO	TIEMPO MEDIO	ΔT(1)	ΔP(2)	TM	cóse 4/5	$PM=\frac{cose(n)+cose(n+1)+cose(n-1)}{3}$
141.00	82.100						
		154.50	27.00	.30	12.43	9.49	10.66
168.00	82.400						
		183.00	30.00	.20	13.53	12.25	12.41
198.00	82.600						
		210.00	24.00	.10,	14.49	15.49	13.57
222.00	82.700						
		243.00	42.00	.25	15.59	12.96	13.45
264.00	82.950						
		276.00	24.00	.17	16.61	11.88	13.72
288.00	83.120						
		300.00	24.00	.09	17.32	16.33	13.55
312.00	83.210						
		336.00	48.00	.31	18.33	12.44	13.67
360.00	83.520						
		384.00	48.00	.32	19.60	12.25	13.39
408.00	83.840						
		420.00,	24.00	.10	20.49	15.49	13.46
432.00	83.940						
		456.00	48.00	.30	21.35	12.65	13.40
480.00	84.240						
		504.00	48.00	.33	22.45	12.06	13.53
528.00	84.570						
		552.00	48.00	.19	23.49	15.89	13.68
576.00	84.760						
		600.00	48.00	.28	24.49	13.09	13.62
624.00	85.040						
		648.00	48.00	.34	25.46	11.88	13.49
672.00	85.380						
		696.00	48.00	.20	26.38	15.49	
720.00	85.580						

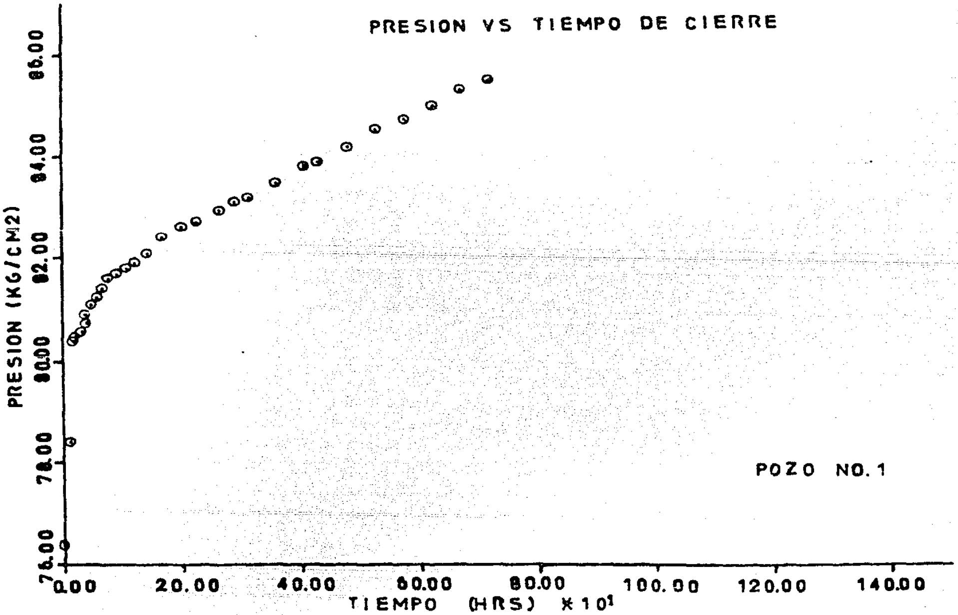


FIG. IV.1A CURVA DE INCREMENTO DE PRESION CORRESPONDIENTE AL POZO No.1

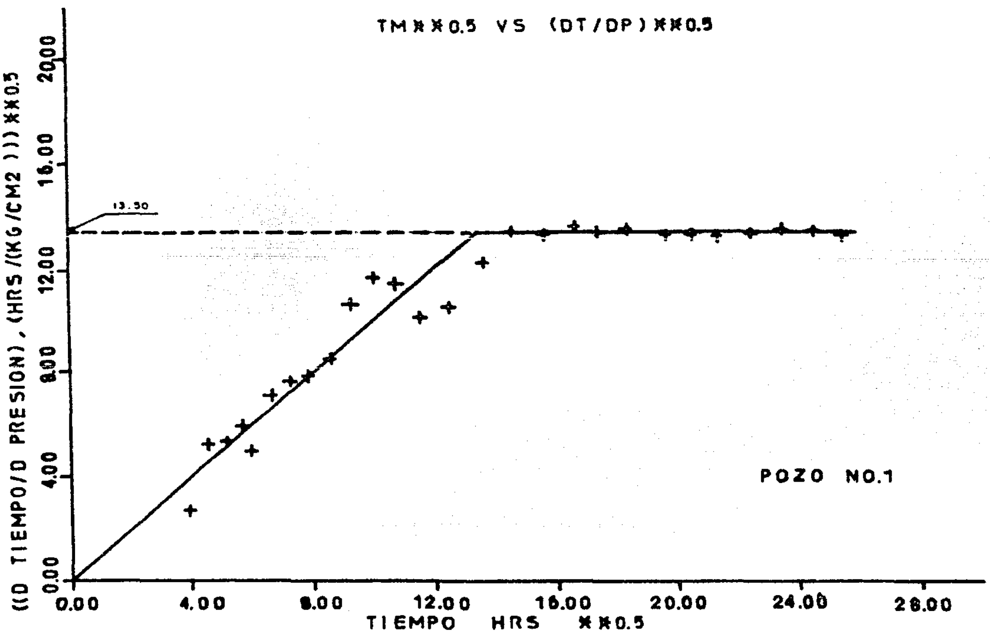


FIG. IV.1B CURVA PARA DETERMINAR EL VALOR DE $(\Delta t'_e)^{0.5}$ CORRESPONDIENTE AL POZO No. 1.

T A B L A   IV. 2

INFORMACION REQUERIDA PARA LA ESTIMACION DE Δt'e CORRESPONDIENTE AL:

P O Z O   No. 2

TIEMPO HRS	PRESION KG/CM^2	T M	D T	D P	TM++0.5	(DT/DP) ++0.5	PROM. MOVIL
.00	71.700						
		2.00	4.00	4.90	1.41	.90	
4.00	76.600						
		6.00	4.00	.80	2.45	2.24	2.10
8.00	77.400						
		11.00	6.00	.60	3.32	3.16	2.95
14.00	78.000						
		17.00	6.00	.50	4.12	3.46	3.70
20.00	78.500						
		25.00	10.00	.50	5.00	4.47	4.47
30.00	79.000						
		36.00	12.00	.40	6.00	5.48	4.53
42.00	79.400						
		46.00	8.00	.60	6.78	3.65	4.87
50.00	80.000						
		56.00	12.00	.40	7.48	5.48	5.62
62.00	80.400						
		68.00	12.00	.20	8.25	7.75	6.99
74.00	80.600						
		80.00	12.00	.20	8.94	7.75	7.75
86.00	80.800						
		92.00	12.00	.20	9.59	7.75	8.24
98.00	81.000						
		106.50	17.00	.20	10.32	9.22	7.79
115.00	81.200						
		119.50	9.00	.22	10.93	6.40	7.72
124.00	81.420						
		130.00	12.00	.21	11.40	7.56	7.74
136.00	81.630						
		142.00	12.00	.14	11.92	9.26	8.19

(Continuación)

POZO No. 2

TIEMPO HRS	PRESION KG/CM^2	T M	D T	D P	TM++0.5	(DT/DP) ++0.5	PROM. MOVIL
148.00	81.770						
		160.00	24.00	.40	12.65	7.75	8.25
172.00	82.170						
		184.00	24.00	.40	13.56	7.75	8.15
196.00	82.570						
		202.00	12.00	.15	14.21	8.94	7.97
208.00	82.720						
		214.00	12.00	.23	14.63	7.22	8.11
220.00	82.950						
		229.00	18.00	.27	15.13	8.16	
238.00	83.220						

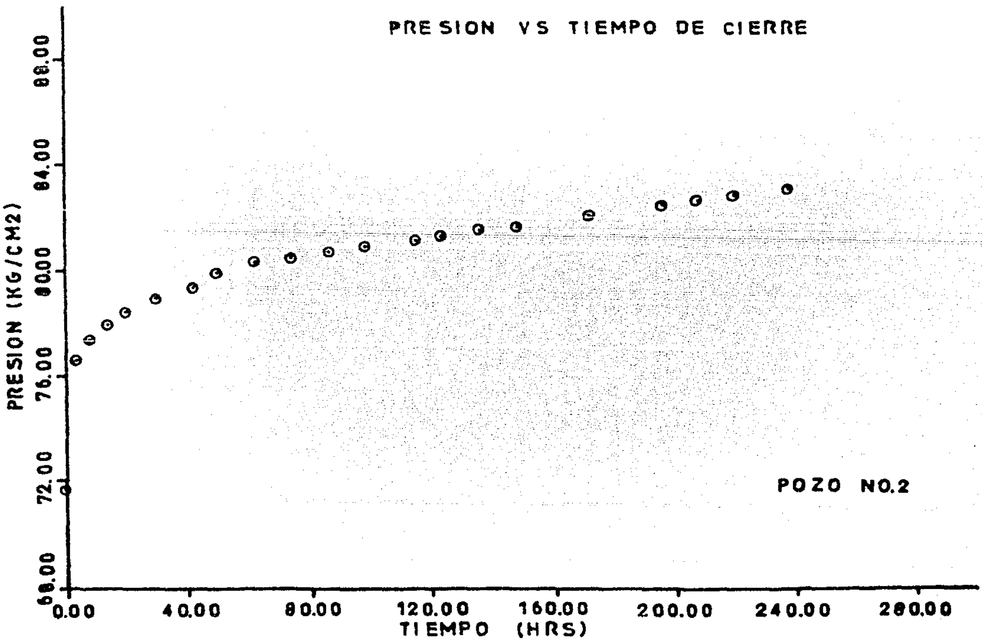


FIG. IV. 2A CURVA DE INCREMENTO DE PRESION CORRESPONDIENTE AL POZO No.2

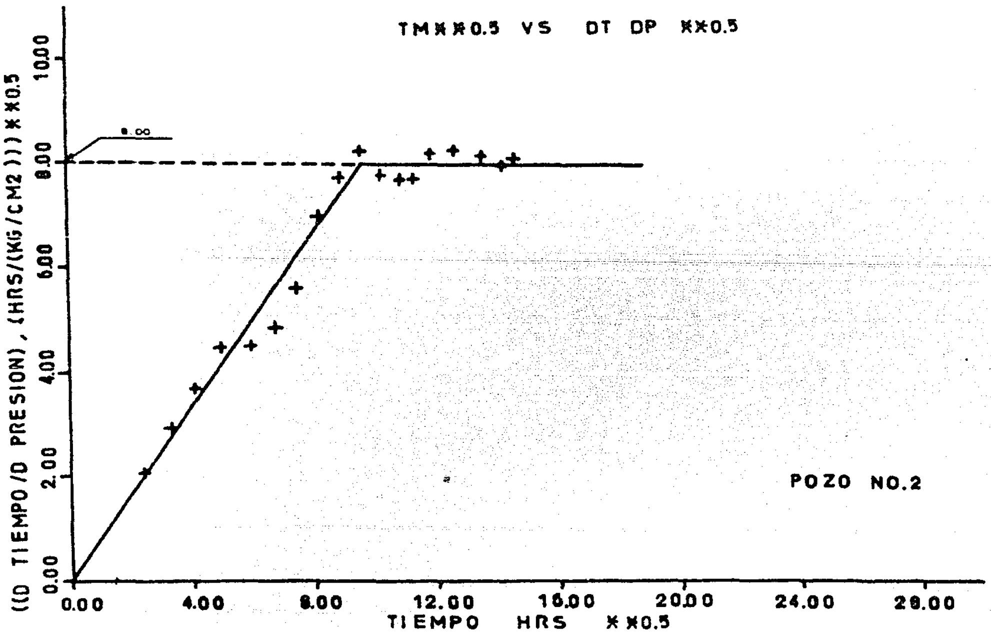


FIG. IV.2B CURVA PARA DETERMINAR EL VALOR DE $(\Delta t'_e)^{0.5}$ CORRESPONDIENTE AL POZO No.2

T A B L A IV.3

INFORMACION REQUERIDA PARA LA ESTIMACION DE $\Delta t'e$ CORRESPONDIENTE AL:

POZO No. 7

TIEMPO HRS	PRESION KG/CM^2	T M	D T	D P	TM++0.5	(DT/DP) ++0.5	PROM. MOVIL
.00	200.900						
		.13	.25	30.40	.35	.09	
.25	231.300						
		.38	.25	22.00	.61	.11	.12
.50	253.300						
		.63	.25	10.00	.79	.16	.21
.75	263.300						
		.83	.17	1.30	.91	.36	.39
.92	264.600						
		.96	.08	.20	.98	.64	.99
1.00	264.800						
		1.25	.50	.13	1.12	1.96	1.65
1.50	264.930						
		1.75	.50	.09	1.32	2.36	2.27
2.00	265.020						
		2.25	.50	.08	1.50	2.50	2.33
2.50	265.100						
		2.75	.50	.11	1.66	2.13	2.38
3.00	265.210						
		3.25	.50	.08	1.80	2.50	2.38
3.50	265.290						
		3.75	.50	.08	1.94	2.50	
4.00	265.370						

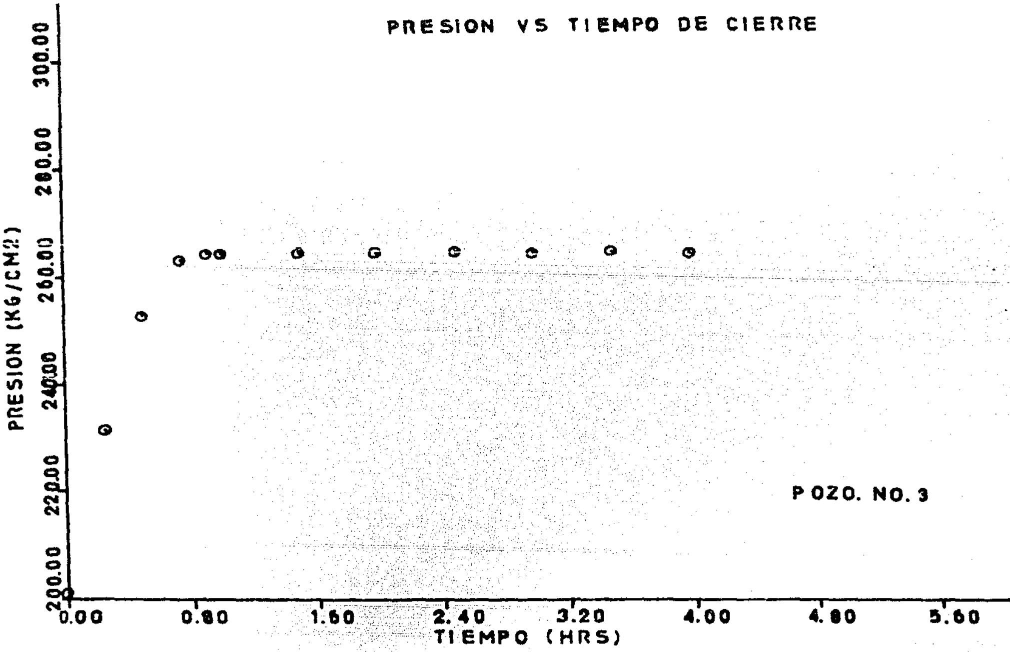


FIG. IV.3A CURVA DE INCREMENTO DE PRESION CORRESPONDIENTE AL POZO No. 3

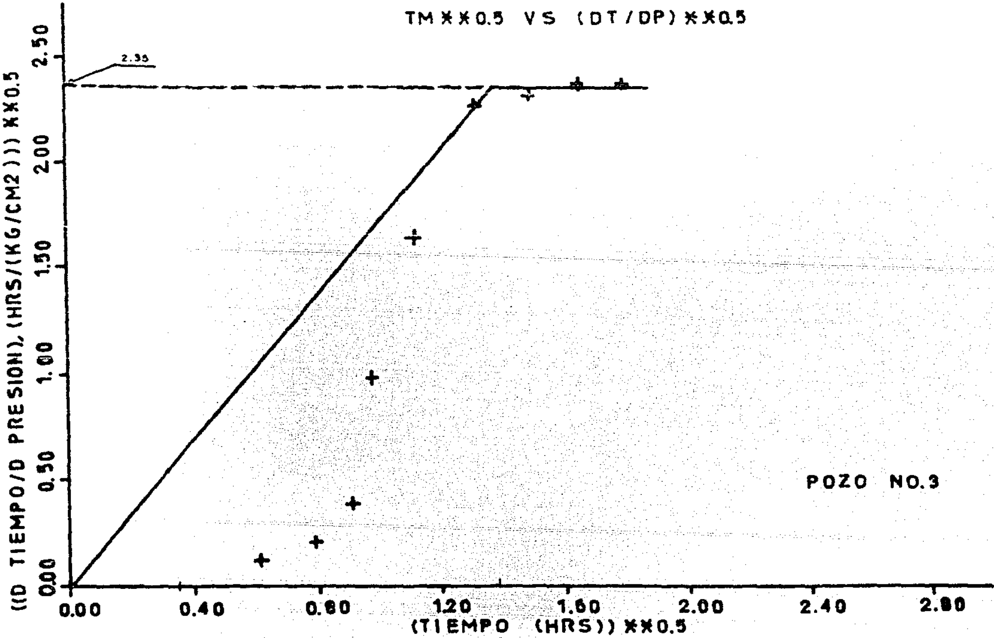


FIG. IV.3B CURVA PARA DETERMINAR EL VALOR DE $(\Delta t'_c)^{0.5}$ CORRESPONDIENTE AL POZO No.3

T A B L A IV.4

INFORMACION REQUERIDA PARA LA ESTIMACION DE Δt_b CORRESPONDIENTE AL:

P O Z O No. 11

TIEMPO HRS	PRESION KG/CM^2	T M	D T	D P	TM++0.5	(DT/DP) ++0.5	PROM. MOVIL
.00	122.200						
		1.00	2.00	.20	1.00	3.16	
2.00	122.400						
		7.00	10.00	.20	2.65	7.07	6.10
12.00	122.600						
		18.50	13.00	.20	4.30	8.06	6.10
25.00	122.800						
		25.50	1.00	.10	5.05	3.16	5.85
26.00	122.900						
		30.00	8.00	.20	5.48	6.32	6.14
34.00	123.100						
		54.00	40.00	.50	7.35	8.94	8.25
74.00	123.600						
		83.00	18.00	.20	9.11	9.49	9.99
92.00	123.800						
		112.00	40.00	.30	10.58	11.55	11.09
132.00	124.100						
		147.00	30.00	.20	12.12	12.25	13.12
162.00	124.300						
		222.50	121.00	.50	14.92	15.56	16.02
283.00	124.800						
		344.50	123.00	.30	18.56	20.25	15.59
406.00	125.100						
		409.00	6.00	.05	20.22	10.95	15.23
412.00	125.150						
		422.50	21.00	.10	20.55	14.49	15.52
433.00	125.250						
		491.00	116.00	.26	22.16	21.12	
549.00	125.510						

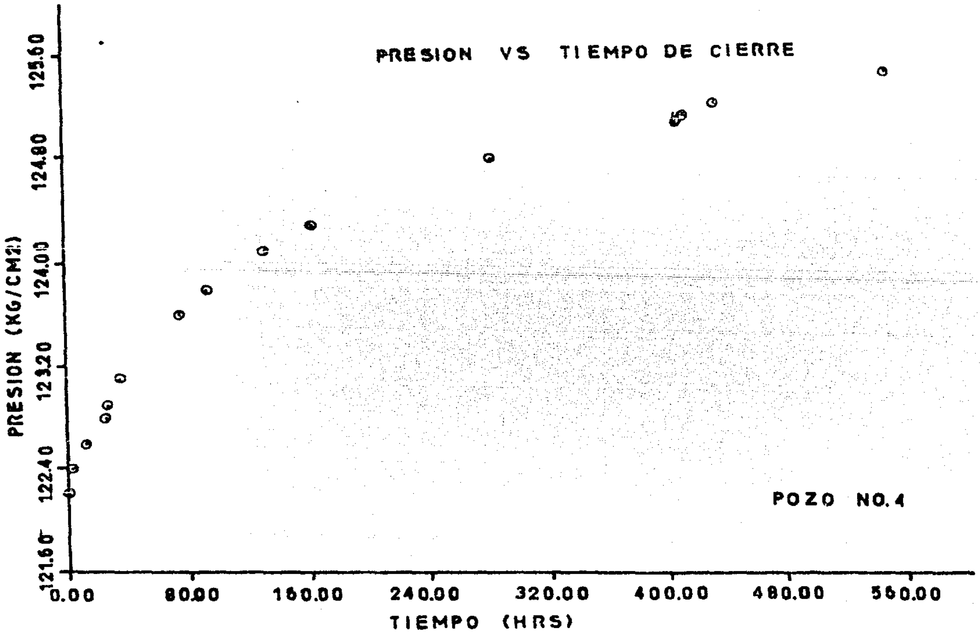


FIG. IV.4A CURVA DE INCREMENTO DE PRESION CORRESPONDIENTE AL POZO No. 4

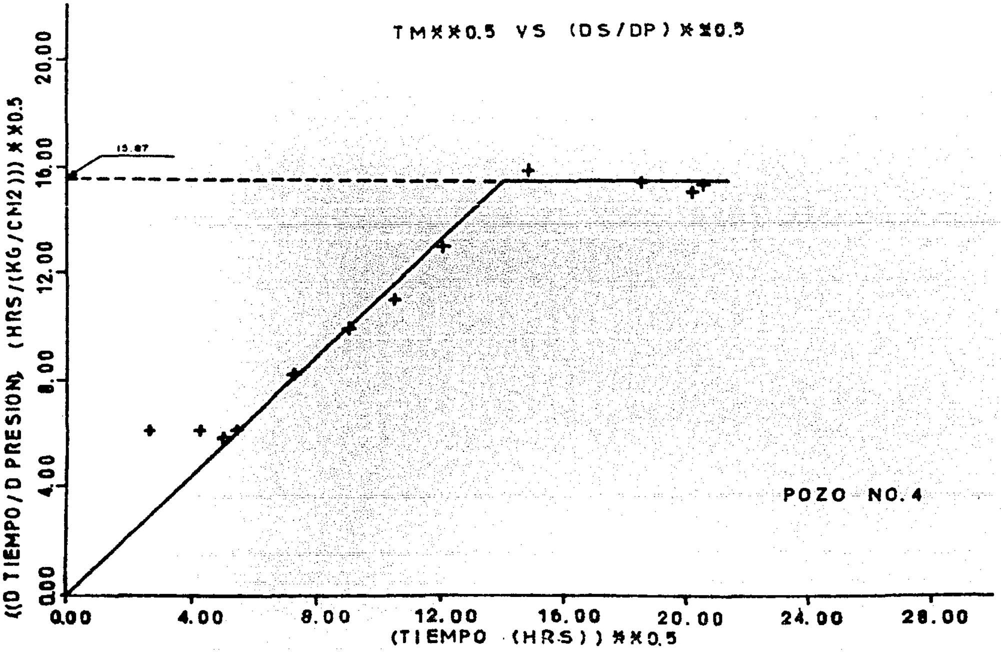


FIG. IV.4B CURVA PARA DETERMINAR EL VALOR DE $(\Delta t'_e)^{0.5}$ CORRESPONDIENTE AL POAZO No.4

CONCLUCIONES

El radio de drene es la herramienta primordial para poder establecer el volumen de hidrocarburos que se encuentra asociado a un pozo productor.

La importancia de calcular el radio de drene - de cada pozo productor, se ve reflejado en el mejor arreglo de estos en el desarrollo de campos productores. Con el cálculo del radio de drene podemos establecer la distancia que debe existir entre un pozo productor y otro,- para poder obtener una mejor recuperación de hidrocarburos del yacimiento que se está explotando.

Ofrece mayores ventajas el método propuesto -- por C. Balderas que los métodos tradicionales al compli cados, pues el método C. Balderas no utiliza para su desarrollo las variables de tiempo de estabilización y permeabilidad que son variables difíciles de calcular con - exactitud por la complejidad del sistema roca-fluidos y- que son parte fundamental para aplicar los métodos tradicionales.

NOMENCLATURA

c —	Compresibilidad
dv—	diferencial de volumen
Ei—	Integral Exponencial
F —	Fuerza
F_c	Fuerza de capilaridad
F_e	Fuerza de empuje
F_g	Fuerza de gravedad
F_p	Fuerza de presión
F_{sg}	Fuerza de segregación gravitacional
F	Fuerza de viscosidad
g	Constante de gravedad
h	haltura o Espesor
k	permeabilidad
K_c	Volumen poroso conectado
P	Presión
P_c	Presión capilar
P_i	Presión inicial
P_w	Presión de pozo fluyendo
q	gasto
Q	Volumen de Aceite antes de producir el pozo
r	radio
R	Región
e	radio de drene
S	Superficie limitante de una región
t_s	tiempo de estabilización
υ	velocidad
∇P	Gradiente de presión
μ	viscosidad
ρ	densidad

BIBLIOGRAFIA

— PRINCIPIOS DE MECANICA DE YACIMIENTOS.
Apuntes de la Facultad de Ingeniería.
Rafael Rodríguez Nieto.

— EVALUACION DE LA PRODUCCION.
Apuntes de la Facultad de Ingeniería.
Rafael Rodríguez Nieto.

— UN NUEVO METODO PARA CALCULAR EL RADIO DE DRENE
Tesis para alcanzar el grado de Maestro en Ingeniería, 1981, Carlos Balderas Joers.

— COMPORTAMIENTO DE YACIMIENTOS.
Apuntes de la Facultad de Ingeniería.
Francisco Garaicochea Petrirena.