PANORAMA GENERAL SOBRE EL ANALISIS DE VARIANZA EN ESTADISTICA MULTIDIMENSIONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO

DE MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA EL ACTUARIO

GUSTAVO JAVIER VALENCIA RAMÍREZ

Cd. Universitaria, D.F. mayo, 1976.

A mis Padres

A Linda

A mis hermanos

R E C O N O C I M I E N T O

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, al Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y al Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas el apoyo prestado, sin el cual, este trabajo no podría haberse realizado. Así como al Dr. Ignacio Méndez por su asesoramientodurante el desarrollo de este trabajo.

SUMARIO Y OBSERVACIONES GENERALES

1. SUMARIO

En estadística univariada y en relación a los modelos lineales, existe la técnica de Análisis de Varianza relacionada con las pruebas de hipótesis. La generalización de esta técnica en el caso multivariado es *MANOVA* (multivariate analysis of variance) sobre la cual trata este trabajo.

Los capítulos de este trabajo consisten brevemente en lo siguiente:

Capítulo I. Introducción.

Capítulo II. Presentación de los principales resultados en cada uno de los modelos del análisis de varianza casos unidimensional y multidimensional.

Capítulo III. Pruebas para verificar las diferentes suposiciones de uno de los modelos presentados en el capítulo II. (*MANOVA* modelo II).

Capítulo IV. Se presentan diferentes criterios para efectuar pruebas de hipótesis en uno de los modelos presentados en el capítulo II (*MANOVA* modelo II).

Capítulo V. Se presentan las propiedades estadísticas de los diferentes criterios descritos en el capítulo anterior.

Se anexan apéndices que contienen las Tablas de Heck, las Tablas de R elaborados por Pillai, una comparación entre diferentes aproximaciones a los percentiles de T_0^2, bibliografías de ejemplos y de programas de computadora para *MANOVA* modelo I.

2. OBSERVACIONES GENERALES.

Como resultado del presente trabajo cabe hacer notar que respecto a los diferentes modelos y criterios de prueba en *MANOVA* no está todo escrito y que es importante seguir investigando en este campo.

Algunos temas para futuras investigaciones podrían ser el modelo II de *MANOVA*, estudiar los criterios de prueba de Gnanadesikan, de Olson y de Pillai en cuanto a sus propiedades de potencia y robustez. Además continuar el trabajo de Olson en cuanto a comparación de todos los criterios de prueba respecto a robustez.

I N D I C E

CAPITULO I. INTRODUCCION.

En los últimos años ha surgido un gran interés por el estudio de la estadística multivariada y en especial de MANOVA (multivariate analysis of variance) debido principalmente a la gran cantidad de aplicaciones de ésta en diversas áreas de estudio. Sin embargo, debido a la actitud de la mayoría de los investigadores en todas las áreas con respecto a sus publicaciones se presenta el problema de que los resultados están muy dispersos, ya que el número de trabajos publicados por cada investigador influye directamente en su sueldo y prestigio, lo que lleva al investigador a partir un resultado (sin importar muchas veces la importancia de éste) en resultados más pequeños los cuales publica en diferentes revistas logrando de esta forma aumentar su contabilidad personal (ver Searle (1973)*), la actitud mencionada anteriormente dificulta grandemente el aprendizaje de cualquier disciplina.

Por la razón mencionada anteriormente se consideró importante presentar un panorama general sobre MANOVA, en el cual se presentan las aportaciones de los diferentes autores en cada tema, indicando en la mayoría de los casos, la importancia y utilidad de éstas respecto a los resultados existentes a la fecha de su publicación. Además dentro de este panorama se describen y comparan los diferentes métodos y resultados existentes en MANOVA. En uno de los apéndices se publica una guía de ejemplos clasificados por área de aplicación y métodos empleados. Por lo anterior, el presente trabajo podrá ser usado como un auxiliar en el aprendizaje y aplicación de MANOVA.

* Searle, S.R. (1973), " On publishing extended abstracts, and reviews". the american Statistician, Vol. 27, pp. 155 - 157.

Para efectuar este trabajo fué necesario revisar, analizar y clasificar aproximadamente 200 artículos sobre el tema, mismos que se encuentran a disposición de los interesados en la biblioteca del IIMAS.

Capítulo II. Diferentes modelos MANOVA.

2.1. INTRODUCCION

Se considerarán en detalle dos modelos el I y II los cuales son generalizaciones de los modelos de efectos fijos y de efectos aleatorios presentados por Eisenhart (1947).

Estos modelos se han tratado en detalle en Roy & Gnanadesikan (1959a), (1959b), (1956), Roy (1954), Roy & Bose (1953).

Notación. A menos que se especifique lo contrario las matrices se denotarán por medio de letras mayúsculas, y los vectores por medio de minúsculas con una barra bajo ellos (ejemplo $\underline{a}$), el Transpuesto de la matriz (o vector) ξ se denotará por ξ'.

La dimensión de la matriz y vector se especificará a continuación de ésta entre paréntesis (ejemplo A(n x m) es una matriz con n renglones y m columnas, a(1 x n) es un vector renglón con n componentes).

Las matrices idéntica y nula (matriz de ceros) se representarán respectivamente por I y 0.

Se presentará primero el modelo I de análisis de varianza (ANOVA) y a continuación el I de análisis de varianza multivariado (MANOVA), después el II de ANOVA y el II de MANOVA esto se hace para exponer los resultados en MANOVA como una generalización de los de ANOVA. En cada caso al final de la presentación de los resultados de ANOVA modelo I, MANOVA Modelo I, ANOVA modelo II, MANOVA modelo II, se dará la bibliografía correspondiente para facilidad de consulta.

2.2. MODELO I DE ANOVA.

Sea $\underline{X}'$ ($1 \times n$) = (X_1, X_2, ..., Xn) un vector renglón dende cada componente es una variable aleatoria observable y tal que $\underline{X}$ se puede expresar como:

$$\underline{X}(n \times 1) = A(n \times n)\, \underline{\beta}(m \times 1) + \underline{\varepsilon}(n \times 1);\ m < n$$

donde i) A ($n \times n$) es la matriz de diseño, cuyos elementos son constantes determinadas por las condiciones en que se hizo cada observación, esto se puede determinar mediante el diseño de un experimento o un esquema de muestra, el rango de A es $r \leq m \leq n$.

ii) $\underline{\beta}$ ($m \times 1$) es vector de parámetros desconocidos.

iii) $\underline{\varepsilon}$ ($n \times 1$) es un vector cuyos elementos son "errores" y que considerado como un conjunto es una muestra aleatoria de tamaño n de la población normal N (0, σ^2), σ^2 es desconocido.

Bajo el modelo anterior es fácil ver (Graybill (1961), Searle (1971)) que $\underline{X}$ ($n \times 1$) es un conjunto de n variables normales independientes, con varianza común σ^2 y medias dadas por:

$$\underline{E(\underline{X})}(n \times 1) = A(n \times m)\, \underline{\beta}(m \times 1)$$

Hay que notar que la suposición sobre normalidad no es necesaria para la solución de los problemas de estimación lineal y que los resultados que se presentarán a continuación son válidos bajo la siguiente suposición:

$\underline{\varepsilon}$ ($n \times 1$) (y por lo tanto $\underline{X}$ ($n \times 1$)) es un conjunto de variables aleatorias no correlacionadas y con varianza común σ^2.

Como $A\ (n \times m)$ es de rango $r \leq m < n$ entonces se puede encontrar una base de A (esto es r columnas de A linealmente independientes) y formar a partir de ésta una matriz $A_I\ (n \times r)$, entonces sin pérdida de generalidad se pueden reenumerar las columnas de $A\ (n \times m)$ y los elementos de $\underline{B}\ (n \times 1)$ para que las columnas de $A_I\ (n \times r)$ sean las primeras r columnas de $A\ (n \times m)$ de donde obtenemos una partición de $A\ (n \times m) = \left[A_I\ (n \times r),\ A_D\ (n \times (m - r))\right]$ y entonces

$$\underline{E(\underline{X})}\ (n \times 1) = \left[A_I,\ A_D\right] \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix}$$

donde $A_I\ (n \times r)$, $A_D\ (n \times (m - r))$; $\underline{B}_I\ (r \times 1)$, $\underline{B}_D\ ((m - r) \times 1)$.

2.2.1. Estimación lineal.

Se busca un estimador lineal insesgado y de varianza mínima para una función lineal de $\underline{B}\ (m \times 1)$ dada, la forma de esta función lineal será $\underline{C}'\ (1 \times m)\ \underline{B}\ (m \times 1)$ y el estimador lineal insesgado de mínima varianza será de la forma $\underline{b}'(1 \times n)\ \underline{X}\ (n \times 1)$.

Al partir A en A_I y A_D se determina una partición de $\underline{B}$ en $\underline{B}_I$ y $\underline{B}_D$ la que a su vez determina una partición de $\underline{C}'$ en $\underline{C}'_I$ y $\underline{C}'_D$. Entonces podemos expresar a $\underline{C}'\underline{B}$ como $\underline{C}'_I\ \underline{B}_I + \underline{C}'_D\ \underline{B}'_D$. Los siguientes resultados son invariantes bajo diferentes particiones de A.

Una condición necesaria y suficiente sobre $\underline{C}'$ para que un estimador lineal insesgado $\underline{a}'\underline{X}$ para $\underline{C}'\ \underline{B}$ exista (en cuyo caso se dirá que $\underline{C}'\underline{B}$ es estimable y la condición sobre $\underline{C}'$ será una condición de estimabilidad) es (ver Roy (1954)):

$$\underline{C}'_D = \underline{C}'_I\ (A'_I\ A_I)^{-1}\ A'_I\ A_D$$

Otra forma de expresar lo anterior es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} A \\ \underline{C}' \end{bmatrix} = \text{Rango (A)}$$

El estimador lineal insesgado de varianza mínima de $\underline{C}'\ \underline{B}$ que es estimable está dado por

$$\underline{C}'_I\ (A'_I A_I)^{-1} A'_I \underline{X}$$

La varianza de este estimador lineal esta dada por

$$\underline{C}'_I\ (A'_I\ A_I)^{-1}\ \underline{C}_I\ \sigma^2$$

un estimador insesgado de σ^2 está dado por

$$\left[\underline{X}'\ \left[I\ (n) - A_I\ (A'_I A_I)^{-1} A'_I \right] \underline{X}\right] (n - r)^{-1}$$

nótese que el estimador lineal de mínimos cuadrados de una función lineal estimable $\underline{C}'\ \underline{B}$ es el mismo que el dado anteriormente.

2.2.2. PRUEBAS DE HIPOTESIS LINEALES.

Se probará la hipótesis

$$\text{Ho:}\quad C\ (s \times m)\ \underline{B}\ (m \times 1) = 0\ (s \times 1)$$

o

$$\text{Ho:}\quad (C_1\ C_2) \begin{bmatrix} B_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix} = 0\ (s \times 1)$$

donde $(C_1\ C_2)$ es la partición de $C\ (s \times m)$ correspondiente a la partición de $\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix}$

contra la alternativa

$$H_A : \quad (C_1 \quad C_2) \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{C}_D \end{bmatrix} = \underline{n} \quad (s \times 1) \neq 0 \; (s \times 1)$$

C (s x m) es una matriz de rango s dada la hipótesis (se determina de acuerdo a lo que se desea probar) y por esto recibe el nombre de la "matriz de la hipótesis". Los resultados que se obtienen a continuación son invariantes respecto a la partición de A (y por lo tanto invariantes a $\underline{B}_I$ y C_1).

Un conjunto de condiciones suficientes para la existencia de una prueba sobre regiones similares es

$$C_2 = C_1 \; (A'_I \; A_I)^{-1} \; A'_I \; A_D$$

notar que C_2 debe estar relacionada con C_1 de la misma forma que $\underline{C}'_D$ con $\underline{C}'_I$. En este caso la hipótesis es susceptible de ser probada (Testable hypothesis) y a la condición anterior sobre C_2 se le conoce como la condición de prueba (Testability condition). Notar que C_I resulta también de rango s.

La estadística F para probar Ho tiene bajo Ho una distribución central F con s y (n - r) grados de libertad y está dada por:

$$F = \frac{(n-r) \; \underline{X}' A_I (A'_I \, A_I)^{-1} \; C'_I \; (C_I \; (A'_I \, A_I)^{-1} \; C'_I)^{-1} \; C_I \; (A'_I \, A_I)^{-1} \; A_I \; \underline{X}}{s \quad \underline{X}' \; (I \; (n) - A_I \; (A'_I \, A_I \;)^{-1} \; A'_I \quad \underline{X}}$$

se usa

$$F = \frac{\sigma^2 \, \chi^2(s)/s}{\sigma^2 \, \chi^2(n-r)/(n-r)}$$

para indicar que el numerador multiplicado por

s/σ^2 se distribuye como χ^2 con s grados de libertad, esta χ^2 es central o no central de acuerdo a que la Ho sea cierta o no. El denominador multiplicado por $(n - r)/ \sigma^2$ se distribuye como una χ^2 central con $(n - r)$ grados de libertad sin importar si Ho es cierta o no.

La forma cuadrática en el numerador es conocida con el nombre de suma de cuadrados debida a la hipótesis Ho y la forma cuadrática en el denominador es conocida como la suma de cuadrados debido al error.

Bajo H_A la estadística F (presentada anteriormente) se distribuye χ^2 no central con s y $(n - r)$ grados de libertad, y el parámetro de no-centralidad es d^2/σ^2 donde

$$d^2 = \underline{n}' \left[C_1 \, (A'_I \; A_I \;)^{-1} \; C'_I \right]^{-1} \underline{n}$$

2.2.3. HIPOTESIS PROBADAS EN FORMA QUASI-INDEPENDIENTE

Suponga que se tienen dos hipótesis Ho_1 y Ho_2 dadas por

$$Ho_1 : \; (C_{11} \; C_{12}) \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix} = 0 \;\; (s_1 \times 1)$$

y

$$Ho : \; (C_{21} \; C_{22}) \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix} = 0 \;\; (s_2 \times 1)$$

contra las respectivas alternativas H_{A1} y H_{A2} tal como se ha indicado en la sección anterior.

Suponga que rango $(C_{11} \; C_{12}) = s_1$ y rango $(C_{21} \; C_{22}) = s_2$ de tal forma que $s_1 + s_2 \leq r \leq m < n$. Entonces para Ho_1 y Ho_2 tenemos respectivamente las siguientes estadísticas F:

$$F = \frac{\sigma^2 \chi^2_1 / s_1}{\sigma^2 \chi^2_o / (n-r)} \quad y \quad F = \frac{\sigma^2 \chi^2_1 / s_1}{\sigma^2 \chi^2_o / (n-r)}$$

donde el denominador de F_1 y F_2 es el mismo que el de F en la sección anterior y los numeradores se obtienen al sustituir en el numerador de F C_1 por C_{11} y C_{21} respectivamente. χ^2_1 y χ^2_2 son independientes de χ^2_o. χ^2_1 y χ^2_2 no son siempre independientes, la condición para que sean independientes es que

$$C_{11} \; (A'_I A_I)^{-1} C_{21} = 0 \; (s_1 \times s_2)$$

El que χ^2_1 y χ^2_2 sean independientes no implica que F_1 y F_2 sean independientes sin embargo simplifica bastante el problema de probar simultáneamente Ho_1 y Ho_2. En esta situación se dice que F_1 y F_2 son quasi-independientes y que Ho_1 y Ho_2 se prueban de una manera quasi-independiente.

Para generalizar esta noción a K hipótesis considere las siguientes K hipótesis:

$$Hoi: \; (C_{i1} \; C_{i2}) \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_D \end{bmatrix} = 0 \; (s_i \times 1) \; ; \; i = 1, 2, \ldots, k$$

donde $(C_{i1} \; C_{i2})$ es una matriz de $(s_i \times m)$ particionada de acuerdo a $\underline{B}$, donde el rango de $(C_{i1} \; C_{i2})$ es s_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) y además $\sum_{i=1}^{K} s_i \leq r \leq m < n$. Un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para probar las k hipótesis en forma quasi-independiente es que

$$C_{i1} \; (A'_I A_I)^{-1} C'_{j1} = 0 \; (s_i \times s_j); \; (i \neq j = 1, \ldots, k)$$

2.2.4. INTERVALOS DE CONFIANZA.

Se observa de la hipótesis alternativa en la sección 2.2.2. que $\underline{n}$ (s x 1) ($\neq$ o) es una desviación de la hipótesis Ho. Con un coeficiente de confianza conjunta $\geq 1 - \alpha$ (para α determinada de antemano) se tienen las siguientes cotas de confianza (ver Roy & Gnanadesikan (1956), (1959a)):

$$(\sigma^2\chi^2)^{1/2} - A \leq \left\{\underline{n}'\left[C_1 \, (A'_I \, A_I)^{-1} \, C'_1\right]^{-1} \underline{n}\right\}^{1/2} \leq \left[\sigma^2 \chi^2\right]^{1/2} + A$$

donde $A = \left[s \, F_\alpha (s, n - r) \dfrac{\sigma^2 \chi_0^2}{(n - r)}\right]^{1/2}$

en estas expresiones $\sigma^2 \chi^2$ y $\sigma^2 \chi_0^2$ son cantidades definidas en la sección 2.2.2. y F_α (s, n - r) es tal que si f se distribuye F (s,n-r) entonces $Pr (f \leq F_\alpha (s, n - r)) = 1 - \alpha$

Ahora si se elimina el elemento i-ésimo de $\underline{n}$ las cotas son

$$\left[\sigma^2 \chi^{(i)2}\right]^{1/2} - A \leq \left\{\underline{n}^{(i)'}\left[C_1^{(i)} \, (A'_I \, A_I)^{-1} \, C_1^{(i)'}\right]^{-1} \underline{n}^{(i)}\right]^{1/2} \leq$$

$$\left[\sigma^2\chi^{(i)2}\right]^{1/2} + A$$

para i = 1, 2, ..., S donde $\underline{n}^{(i)}$, $C_1^{(i)}$ y $\sigma^2 \chi^{(i)2}$ denotan respectivamente al vector $\underline{n}$ sin la componente i - ésima, a la matriz C_1 sin el i - ésimo renglón y a $\sigma^2 \chi^2$ definida en la sección 2.2.2. pero con $C_1^{(i)}$ ((s-1) x r) en vez de C_1 (s x r). De estos intervalos hay s (uno por cada elemento).

Si se eliminan dos elementos de $\underline{n}$ se obtiene en forma análoga:

$$\left[\sigma^2\chi^{(i,j)2}\right]^{1/2} - A \leq \left\{\underline{n}^{(i,j)'} \left[C_1^{(i,j)} \, (A'_I \, A_I)^{-1} \, C_1^{(i,j)'} \right]^{-1} \underline{n}^{(i,j)}\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\sigma^2 \chi^{(i,j)2}\right]^{1/2} + A$$

para $i \neq j$ = 1, 2, ..., s; donde $\underline{n}^{(i,j)}$, $C_1^{(i,j)}$ y $\sigma^2 \chi^{(i,j)2}$ denotan res pectivamente el vector $\underline{n}$ sin las componentes i y j, la matriz C_1 sin los renglones i-ésimo y j-émimo y $\sigma^2 \chi^{(i,j)2}$ definido como en 2.2.2. pero con $C_1^{(i,j)}$ $((s-2) \times r)$ de $C_1(s \times r)$. Hay$\binom{s}{2}$ de este tipo de intervalos.

Siguiendo de esta forma se pueden encontrar intervalos de confianza para cualesquiera elementos de $\underline{n}$.

2.3. MODELO I DE MANOVA*

Sea X (p x n) = ($\underline{X}_1$ $\underline{X}_2$ ... $\underline{X}n$) un conjunto de n vectores columna aleatoria de dimensión (p x 1). Estos vectores son observables y tales que $X(n \times p) = A(n \times m)\ \beta(m \times p) + \mathcal{E}(n \times p)$ .... (i) donde como en el modelo I de ANOVA (ver sección 2.2.) A es la matriz diseño con rango $r\ (\leqslant m \leqslant n)$, $\beta(m \times p)$ es un conjunto de parámetros desconocidos y $\mathcal{E}(n \times p)$ es tal que sus elementos son "errores" y sus hileros constituyen una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal p- variada, no singular N $[0(p \times 1),\quad (p \times p)]$. Además, se supone que $p \leqslant (n-r)$ (esto para asegurar que haya un número suficiente de observaciones para estimar todos los parámetros).

Como el rango de A es $r \leqslant m \leqslant n$, sea A_I (m x r) una matriz formada por vectores columna de A que forman una base de A. Entonces, sin pérdida de generalidad (como en el caso ANOVA modelo I) se puede expresar $A = [A_I\ A_D]$ donde A_D (n x (m - r)) y en consecuencia, expresar $\beta(m \times p) = \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_D \end{bmatrix}$ donde β_I, β_D son matrices de dimensión (r x p) y ((m - r) x p) respectivamente y son la partición de β asociada a la partición de A.

---

* En esta sección 2.3 consultar Roy y Gnanadesikan (1959b), Morrison (1967), Press (1972).

Bajo este modelo $\underline{X}i$ (p x 1) (i = 1,2, ..., n) son n vectores aleatorios independientes con p componentes tales que $\underline{X}i$ se distribuye N (E ($\underline{X}i$), Σ), donde Σ es una matriz de dispersión desconocida, de dimensión (p x p) y para i = 1, 2, ..., n E ($\underline{X}i$) está dada por

$E (X') (n \times p) = A (n \times m) \beta (m \times p)$

que por la partición mencionada anteriormente $(A_I \ A_D) \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_D \end{bmatrix}$

Hay que notar que como en la sección 2.2 la suposición de normalidad no es necesaria para propósitos de estimación lineal.

2.3.1. ESTIMACION LINEAL.

La función lineal $\underline{a}' \beta$ se dice que es estimable si existe una función $\underline{b}' X$ de las observaciones tal que $E (\underline{b}' X') = \underline{a}' \beta$, $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son vectores de dimensión (m x 1) y (n x 1) respectivamente.

Las condiciones y propiedades sobre estimabilidad y repar metrización del modelo pueden consultarse en Graybill (1961) capítulo 11, y en Roy (1957) Press (1972) pag. 211 y 212 y Rao (1965) pag. 222-5 presentan los siguientes resultados:

El estimador por mínimos cuadrados de β es: $\hat{\beta} (m \times p) = (A' A)^{-} A' X$ donde $(A'A)^{-}$ es la inversa generalizada de $(A'A)$ (ver nota). Este estimador coincide con el que se obtiene al minimizar la traza de $(\varepsilon' \varepsilon)$ ó $|\varepsilon' \varepsilon|$ (determinante de $\varepsilon' \varepsilon$).

Un estimador insesgado de Σ basado en $\hat{\beta}$ está dado por:

$$\hat{\Sigma} (p \times p) = \frac{1}{n - m} (X' - A \hat{\beta})' (X' - A \hat{\beta})$$

Los estimadores de máxima verosimilitud bajo la suposición de normalidad son:

$$\hat{\hat{\beta}}\,(m \times p) = (A'A)^{-} A'X$$

y

$$\hat{\hat{\Sigma}}\,(p \times p) = \frac{1}{n}\,(X' - A\hat{\hat{\beta}})'\,(X' - A\hat{\hat{\beta}})$$

nótese que los estimadores de tanto la máxima verosimilitud como los mínimos cuadrados coincide, mientras que los estimadores de Σ difieren por una constante, siendo el estimador de máxima verosimilitud sesgado.

NOTA: Rao (1965) presenta los siguientes resultados sobre inversa generalizada:

a) Dada una matriz S existe una matriz S^{-} llamada inversa generalizada con la propiedad que:

$$S S^{-} S = S \text{ y Traza } (S^{-} S) = \text{rango } S.$$

b) Una solución general de una ecuación consistente $S\beta = Q$ es $S^{-}Q + (I - S^{-}S)Z$ donde Z es arbitraria. Cuando S es cuadrada y no singular $S^{-} = S^{-1}$, la inversa verdadera.

Rao (1965) demuestra que la ecuación normal $(A'A)\beta = A'X$ es consistente y entonces si se encuentra la inversa generalizada de $(A'A)$ una solución particular estará dada por $(A'A)^{-} A'X$, que es el resultado presentado anteriormente.

En la práctica el problema de encontrar $(A'A)^{-}$ se reduce a encontrar la inversa verdadera de cierta matriz (para más detalles ver Rao (1965), Rao & Mitra (1971), Searle (1971)).

2.3.2. PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES.

1. Consistencia. $\hat{\beta}$ y $\hat{\Sigma}$ son consistentes, bajo las suposiciones del modelo, ya que son los estimadores máxima verosimilitud y todas las condiciones de regularidad requeridas para los estimadores máxima verosimilitud se satisfacen (ver en Wald (1969) estas condiciones de regularidad).

2. Insesgamiento. $\hat{\beta} = \hat{\beta}$ y $\hat{\Sigma}$ son insesgados (ver Press (1972) para la demostración).

3. Eficiencia. El estimador de β por mínimos cuadrados $\hat{\beta}$, bajo las suposiciones del modelo, es un estimador lineal, insesgado de varianza mínima. Rao (1965) p. 459 demostró que los estimadores mínimos cuadrados óptimos en el caso multivariado son idénticos a los obtenidos ecuación por ecuación en el caso univariado por medio de mínimos cuadrados, esto es, $\hat{\beta}$ tiene máxima eficiencia, en el sentido de que entre todos los estimadores lineales insesgados, la matriz de covarianzas de $\hat{\beta}$ restada a la matriz de covarianzas de cualquier otro estimador resulta una matriz positiva definida. Además Rao (1967) y (1968) demostró lo siguiente: una condición necesaria y suficiente para que el estimador por mínimos cuadrados de β sea un estimador insesgado de varianza mínima es que la matriz de covarianzas de ε pueda expresarse como: $\Sigma = A \Omega A' + Z \Gamma Z' + \alpha I_{(n)}$
donde Ω (m x m) y Γ son matrices arbitrarias, α es un escalar arbitrario no negativo y Z es una matriz de rango máximo de tal que $Z' A = 0$.

Se puede probar que la matriz de covarianzas dentro de clases es un miembro de esta familia.

4. Ortogonalidad. El espacio de observaciones es ortogonal al espacio de residuos, esto es:

$$A' \hat{\varepsilon} = A' (X' - A \hat{\beta}) = 0, \quad (A \hat{\beta})' (X' - A \hat{\beta}) = 0$$

(ver Press (1972)).

5. Matriz de covarianza y distribución de $\hat{\beta}$.

$$\mathrm{VAR} (\hat{\beta}) = \Sigma \otimes (A' A)^{-1} \equiv \Phi \quad (pm \times pm)$$

($A \otimes B$ es el producto directo entre las matrices A y B)

La distribución de $\hat{\beta}$ es normal con media β y matriz de covarianza Φ

6. Distribución de $\hat{\Sigma}$ (Ver Press (1972) p. 214).

$$(n - m) \hat{\Sigma} \sim W (\Sigma, p, n - m)$$

donde $W (\Sigma, p, n - m)$ es una distribución Wishart central con matriz de escala Σ y $(n - m)$ grados de libertad. ($\Sigma (p \times p)$).

2.3.3. PRUEBA DE HIPOTESIS LINEALES.

La extensión multivariada de la hipótesis lineal general es:

$$Ho: \; C (s \times m) \beta (m \times p) \; M (p \times u) = 0 \; (s \times u)$$

O en forma particionada

$$Ho: \; (C_1 \; C_2) \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_D \end{bmatrix} M = 0$$

contra la alternativa H_A: $C \Theta M = \eta(s \times u) \neq 0$ donde $C = (C_1 \; C_2)$ se determina por la partición de $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_I \\ \Theta_D \end{bmatrix}$ la que se obtiene a la vez de la partición de $A = (A_I \; A_D)$. C_1 y C_2 son matrices de dimensión $(s \times r)$ y $(s \times (m - r))$ respectivamente. C_1 es de rango s.

C y M son matrices determinadas por la hipótesis que se desea probar y para esto se les llama matrices de la hipótesis, estas matrices son tales que el rango $(C) = s \leq r \leq m < n$ y rango $(M) = u \leq p$. $\eta(s \times u)$ es una matriz arbitraria, no especificada, diferente de la matriz nula. Nótese que s puede ser $\leq u$ ó $s > u$.

Es importante notar que la hipótesis Ho de la forma establecida anteriormente no es la hipótesis más general, aunque incluye una gran variedad de hipótesis lineales de las que se presentan en aplicaciones. Es importante notar que con facilidad puede modificarse a $C \Theta M = \gamma$(γ especificada).

La matriz C se refiere a hipótesis sobre los elementos de columnas dadas en la matriz de parámetros mientras que M permite la generación de hipótesis entre los diferentes parámetros de respuesta, esto es, entre diferentes elementos de un renglón de Θ. Esto es M representa las combinaciones lineales de las variables dependientes que se prueban simultáneamente.

Los siguientes resultados son invariantes bajo elección de una base A_I de A (y bajo la consecuente partición de Θ y C).

La condición de prueba es la misma que en la sección 2.2.2:

$$C_2 = C_1 \; (A'_I \; A_I)^{-1} \; A'_I \; A_D$$

La prueba está dada por medio de la siguiente regla de decisión, en la que C max (A) es la raíz característica de mayor tamaño de A: rechace Ho contra H_A si C max $(S_1 S^{-1}) \geq C_\alpha (\mu, s, n - r)$ y acepte (no rechace) Ho contra H_A en otro caso. C max $(S_1 S^{-1})$ es positiva excepto en un conjunto de medida cero y $C_\alpha (\mu, s, n - r)$ se denotará C_α por brevedad. C_α es una constante que depende del nivel de significancia α , de los grados de libertad μ, s y (n - r). El criterio del valor característico máximo se debe a Roy (1957) y se puede aplicar en general, aunque las tablas disponibles para este criterio sólo tienen algunos valores restringidos de los parámetros. Tablas para este criterio fueron preparados por Foster & Rees (1957), Foster (1957; 1958), Heck (1960) y Pillai (1960). Las tablas de Heck se reproducen en el apéndice A. Sobre esta prueba se abundará mas adelante, por ahora sólo se mencionará que es insesgada.

S_1 es una matriz simétrica y cuando menos positiva semi-definida, de rango, casi en todas partes (excepto sobre un conjunto con medida de probabilidad cero) igual a min (μ, s) y se define como:

$$s\, S_1(\mu \times \mu) = M' X A_I (A'_I A_I)^{-1} C'_1 \left[C_1 (A'_I A_I)^{-1} C'_1 \right]^{-1} C_1 (A'_I A_I)^{-1} A'_I X' M \equiv H$$

y S es una matriz ($\mu \times \mu$) simétrica y casi en todas partes definida positiva, de rango μ (necesariamente) y se define como:

$$(m - r)\, S (\mu \times \mu) = M' X (I_{(n)} - A_I (A'_I A_I)^{-1} A'_I) X' M \equiv E$$

Hay que notar que

$$C \max (S_1 S^{-1}) = C \max (H E^{-1})$$

La matriz H se conoce como la matriz de suma de cuadrados y productos debido a la hipótesis y la matriz E es la matriz de suma de cuadrados y productos debido al error.

Como se recordará $C(\alpha)$ es el punto que da una probabilidad α de que $C \max (H E^{-1})$ sea $\leq C(\alpha)$ cuando Ho es cierta. Heck (1960) trabajó con la distribución de la raíz característica máxima de $|H - \lambda (H + E)| = 0$ en vez de con $C \max (H E^{-1})$ y por esta razón la tabla debe consultarse con la estadística de prueba

$$\theta_{s'} = \frac{C_{s'}}{1 + C_{s'}}$$

donde C_s es la máxima raíz de $|H - \lambda E| = 0$ y $s' = \min(s, u)$. Si la hipótesis nula es cierta, los únicos parámetros de la distribución de $\theta_{s'}$ son:

$$s' = \min (s, u)$$

$$m_1 = \frac{|s - u| - 1}{2}$$

$$N = \frac{n - r - u - 1}{2}$$

Morrison (1967) hace notar que frecuentemente se tiene a partir del diseño experimental que $s' = 1$, y entonces la única raíz positiva θ de $H(H+E)^{-1}$ tiene la distribución beta con función de densidad

$$f(\theta) = \frac{1}{B(m_1 + 1, N + 1)} \theta^{m1} (1 - \theta)^N ; 0 \leq \theta \leq 1$$

En este caso los valores críticos de Θ deben determinarse a partir de tablas de la función beta incompleta (Pearson (1934)) o alternativamente a través de la transformación

$$F = \frac{N + 1}{m_1 + 1} \frac{\theta}{1 - \theta}$$

donde F es una variable aleatoria F de Snedecor con $2m_1 + 2$ y $2N + 2$ grados de libertad. La estadística también se puede calcular directamente de la raíz, diferente de cero, $C = \text{Trăza}(H E^{-1})$ como $F = \frac{N + 1}{m_1 + 1} C$

2.3.4. HIPOTESIS PROBADAS EN FORMA QUASI-INDEPENDIENTE.

Se introducirá la noción de hipótesis probadas en forma quasi-independiente como una generalización de lo presentado en la sección 2.2.3.

Para que dos o más hipótesis de la forma Ho: $C \beta M = O$ se prueben simultáneamente en forma quasi-independiente es necesario satisfacer ciertas condiciones, Roy & Gnanadesikan (1959b) establecen para esto un conjunto de condiciones necesarias y suficientes en el caso en que la matriz M es la misma en todas las hipótesis, esto es, sólo varía la matriz C, de tal forma que tenemos:

$$Hoi: \; Ci\,(si \times m)\;\; \beta\,(m \times p)\;\; M\,(p \times u) = O\,(si \times u)$$
$$\text{para } i = 1, 2, \ldots, k$$

contra las respectivas alternativas. El rango de Ci es si y $\sum_{i=1}^{k} si \leq r \leq m < n$, entonces considerando las particiones de Ci y β asociadas a la partición de A, se tiene que $Ci = (Ci_1 \; Ci_2)$ donde $Ci_1\ (si \times r)$ y $Ci_2\ (si \times (m - r))$, entonces la condición necesaria y suficiente para probar simultáneamente las k hipótesis de una manera quasi-independiente es

$$C_{i1}\,(A'_I \;\; A_I\;)^{-1}\;C'_{j1} = O\,(s_i \times s_j); \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots, k)$$

debe notarse que estas condiciones son iguales a la condición establecida en 2.2.3. por Roy & Gnanadesikan (1959a).

El problema de hipótesis que se prueban simultáneamente en análisis multivariado ha sido tratado entre otros por Roy & Bose (1953), Roy (1957) Ramachandran (1956), Gabriel (1968a, 1968b, 1969a, 1969b), Gabriel & Sen (1968), Krishnaiah (1965a, 1965b, 1965c, 1967, 1968, 1969), Krishnaiah & Jayachandran (1968), Miller (1966), Srivastava (1968).

De las referencias anteriores son básicas las siguientes: Krishnaiah (1969) ya que se consideran diferentes pruebas bajo diferentes modelos MANOVA y se consideran algunas propiedades de éstas. En el modelo MANOVA algunos de estos procedimientos son equivalentes a la prueba de la máxima raíz característica de Roy, pruebas de intersección finita de Krishnaiah, T^2 de Hotelling (estas pruebas entre otras se tratan con detalle en el capítulo 3), Gabriel (1969b) es importante ya que presenta los procedimientos disponibles para efectuar comparaciones múltiples sobre variables y efectos de MANOVA además compara estos procedimientos en base a la potencia que tienen para detectar divergencias de las hipótesis, concluyendo de este estudio que la técnica apropiada depende en gran parte de la hipótesis a probarse.

2.3.5. INTERVALOS DE CONFIANZA.

Como la hipótesis alternativa es de la forma:

$$H_A: \quad (C_1 \quad C_2) \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_0 \end{bmatrix} M = \eta \ (s \times u) \neq 0 \ (s \times u)$$

y observando que η (s x u) representa la desviación de Ho, entonces se tiene que (ver Roy y Gnanadesikan (1956)): con un coeficiente de confianza $\geq 1-\alpha$ para α fija, se tienen los siguientes límites de confianza simultáneos:

$$\left[C \max (s S_1)\right]^{1/2} - \left[s C_\alpha \quad C \max S\right]^{1/2} \leq \left[C \max \left[\eta' (C_1 (A_I A'_I)^{-1} C_1')^{-1} \eta\right]\right]^{1/2} \leq \left[C \max (s S_1)\right]^{1/2} + \left[s C_\alpha \quad C \max S\right]^{1/2}$$

y como en el caso univariado se pueden obtener límites de confianza en tér mino de C_α pero para η, S_1 y S truncados como en la sección 2.2.4., y de esta forma obtenemos intervalos de confianza para cualquier renglón, columna o elemento de η.

2.4. MODELO II DE ANOVA.

Sea $\underline{X}'(1 \times n) = (X_1, X_2, \ldots, Xn)$ un conjunto de n variables aleatorias observables tales que

$$\underline{X}(n \times 1) = A(n \times m)\,\underline{\beta}(m \times 1) + \underline{\varepsilon}(n \times 1);\; m < n =$$

$$[A_1 \;\; A_2 \;\; \ldots \;\; A_k] \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_k \end{bmatrix} + \underline{\varepsilon}$$

donde A (n x m) es la matriz de diseño cuyos elementos son constantes determinados al diseñar el experimento, $\underline{\beta}i\,(mi \times 1)$ es una muestra aleatoria de tamaño mi $\left(\sum_{i=1}^{k} mi = m\right)$ de la población $N(\mu i, \sigma i^2)$

(i=1, 2, ..., k) tales que $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\beta}_k \end{bmatrix}$ y de esta partición de $\underline{\beta}$ obtenemos la correspondiente partición de $A = [A_1\, A_2 \;\ldots\; A_k]$. $\underline{\varepsilon}$ y $\underline{\beta}i$ (i=1, 2, ...,K) son mutuamente independientes. $\underline{\varepsilon}(m \times 1)$ es tal que sus elementos son "errores" y constituye una muestra elatoria de tamaño n de la población $N(0, \sigma^2)$. Las varianzas $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$ se denominan componentes de varianza.

Bajo ese modelo Roy & Gnanadesikan (1959a)[1/] presentan los siguientes resultados:

1/ Sobre esta sección consultar también Searle (1971) pp. 376 - 514.

$\underline{X}$ (n x 1) se distribuye N ($\underline{E (\underline{X})}$, Σ) donde $\underline{E (\underline{X})}$ es un vector de dimensión (n x 1) y Σ es una matriz de dimensión (n x n) donde

$$\underline{E (\underline{X})} = A (n \times m) \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \underline{\mu}_2 \\ \vdots \\ \underline{\mu}_k \end{bmatrix}$$

donde $\underline{\mu}_1$ es un vector de dimensión (m x 1) donde todos sus componentes son iguales é iguales a μ_i (i = 1, 2, ..., k).

Y

$$\Sigma (n \times n) = E (\underline{X}\, \underline{X}') - \underline{E (\underline{X})} (\underline{E (\underline{X})})' = E ((A \underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) (A \underline{\beta} + \underline{\varepsilon})') - \underline{E (\underline{X})} (\underline{E (\underline{X})})' = A\, E (\underline{\beta}\, \underline{\beta}') A' + E (\underline{\varepsilon}\, \underline{\varepsilon}') - \underline{E (\underline{X})}$$

$$(\underline{E (X)})' = A\, E (\underline{\beta}\, \underline{\beta}') A' + \sigma^2 I_{(n)} - A\, E (\underline{\beta})\, E (\underline{\beta}') A' =$$

$$A \left[E (\underline{\beta}\, \underline{\beta}') - E (\underline{\beta})\, E (\underline{\beta}') \right] A' + \sigma^2 I_{(n)} = A \operatorname{Var} (\underline{\beta}) A + \sigma^2 I_{(n)}$$

$$= A \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{(m1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{(m2)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \sigma_k^2 I_{(mk)} \end{bmatrix} A' + \sigma^2 I_{(n)}$$

$$= \left[A_1\ A_2 \ldots A_k \right] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{(m1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{(m2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & & \sigma_k^2 I_{(mk)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_k \end{bmatrix} +$$

$$+ \sigma^2 I_{(n)} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2 A_i A'_i + \sigma^2 I_{(n)}$$

Como en las secciones 2.2. y 2.3. hay que observar que para propósitos de estimación las suposiciones de normalidad hechos sobre $\underline{\theta}$ y $\underline{\varepsilon}$ no son necesarias, sin embargo, esta suposición simplifica los problemas relativos a la distribución de las estadísticas que resultan en las pruebas de hipótesis (simultáneas o individuales) y en la estimación por intervalos de confianza.

Roy & Gnanadesikan (1959a) obtienen resultados sobre el modelo II, cuando se tiene K criterios de clasificación para los cuales la matriz de diseño A (n x m) es tal que cada renglón de la submatriz Ai (n x mi) (i = 1, 2, ..., k) tiene un y solamente un elemento no cero, el cual es igual a uno y rango (A) = m - k + 1 (note que en general rango (A) $\leq$ (m - k + 1)).

2.4.1. ESTIMACION LINEAL Y PRUEBAS DE HIPOTESIS LINEALES.

Gnanadesikan (1956) pag. 59 a 63 establece el siguiente lema:

Para el modelo de k clasificaciones restringido que se definión en la sección 2.4, la condición necesaria y suficiente para la estimabilidad de $\underline{C}'$ (1 x m) $\underline{E (\underline{\theta})}$ (m x 1), esto es una función lineal de $\mu_1, \ldots, \mu_k$, es que el coeficiente de μ_1 = coeficiente de μ_2 = ... = coeficiente de μ_k.

Mediante este lema Roy & Gnanadesikan (1959a) establecen que para el modelo anteriormente definido las únicas funciones lineales que son estimables y sobre los cuales se pueden probar hipótesis son $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ y sus múltiplos.

2.4.2. ESTIMACION DE LOS COMPONENTES DE VARIANZA.

Para las pruebas de hipótesis, los intervalos de confianza y la estimación de los componentes de varianza, Roy & Gnanadesikan (1959a) presentan el siguiente resultado que fue demostrado por Carpenter (1950) y Ogowa (1950): lema A): Si $\underline{X}$ (n x 1) se distribuye $N\left[\underline{E}(\underline{X}), \sum (n \times n)\right]$ y $q_i = \underline{X}' Q_i \underline{X}$ (i = 0, 1, ..., k) es una forma cuadrática de rango n_i, $\left(\sum_{i=0}^{k} n_i \leq n\right)$.

Entonces un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que $q_0, q_1, \ldots, q_k$ satisfagan las siguientes condiciones:

i) q_i Se distribuye $\lambda_i \chi^2_{(n_i)}$, donde $\chi^2_{(n_i)}$ denota a la distribución χ^2 central con ni grados de libertad y $\lambda_i = E\left(\frac{q_i}{n_i}\right)$, esto para i = 0, 1, ..., k.

ii) Las q_i's son mutuamente independientes.

está dado por:

α) $Qi \sum Qi = \lambda i \; Qi$ (i = 0, 1, ..., k)

β) $E(\underline{X}')\, Qi\, E(\underline{X}) = 0$ (i = 0, 1, ..., k)

γ) $Qi \sum Qj = 0 \,(n \times n)$ ($i \neq j$ = 0, 1, ..., k)

En el lema anterior: α) asegura para las q i's distribuciones χ^2 (no necesariamente centrales), β) asegura la centralidad de las distribuciones χ^2 anteriores y γ) asegura la independencia de las q i's, mediante i) y ii) del lema anterior se tiene un conjunto de restricciones suficientes para asegurar algunas propiedades buenas de las soluciones de los problemas de estimación puntual, pruebas de hipótesis y estimación por intervalos de confianza.

Estas propiedades se enunciarán mas adelante, para esto Roy & Gnanadesikan

(1959a) demuestran los siguientes resultados:

Lema B) Si $E(\underline{X}(p \times 1)\ \underline{Y}'(1 \times p)) = \mathcal{E}(p \times p)$ entonces $E(\underline{X}'Q\underline{Y})$, donde $Q(p \times p)$ es simétrica, es la traza de $(E\ Q)$.

Corolario: Para el modelo II de ANOVA, se tiene:

$$\lambda i = E\left(\frac{q_i}{m_i}\right) = \frac{1}{m_i} = E\left(\underline{X}'\, Qi\, \underline{X}\right) =$$

$$= \frac{1}{mi}\left[\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2\ (\text{Traza}(Aj\ A'j\ Qi)) + \sigma^2\ \text{Traza}\ Qi\right.$$

para $i = 0, 1, \ldots, k$.

Roy & Gnanadesikan (1959a) presentan el siguiente resultado que básicamente es el mismo que el demostrado por Graybill & Worthom (1956):

Lema c): Bajo el modelo II, si $q_0, q_1, \ldots q_k$ son $(k+1)$ formas cuadráticas, de rangos $n_0, n_1, \ldots, n_k$ respectivamente y tales que satisfacen i) y ii) del lema a), y $\lambda_i = E\left(\frac{q_i}{m_i}\right)$ entonces, el estimador insesgado con varianza mínima estimable de $\sum_{i=0}^{k} \ell_i \lambda_i$ está dada por $\sum_{i=0}^{k} \ell_i \frac{q_i}{m_i}$,
y este estimador es (excepto sobre un conjunto de medida cero) una función que depende únicamente de $q_0, q_1, \ldots, q_k$.

El lema anterior es importante desde el punto de vista estimación, ahora desde el punto de vista de pruebas de hipótesis debe observarse que las hipótesis concernientes a componentes de varianza son usualmente compuestas y que debe obtenerse una prueba sobre regiones similares para estas hipótesis.

Es importante notar que bajo el modelo II, si $q_0, q_1, \ldots, q_k$ satisfacen i) y ii) del lema a) entonces $q_0, \ldots, q_k$ forman un conjunto de estadísticas suficientes para $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (y tambien para $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$) y también satisfacen la condición de completez de Lehmann & Scheffé (1950) y a partir de estas condiciones de suficiencia y completez se sigue de otro resultado de Lehmann & Scheffé (1950) que la clase de todas las pruebas sobre regiones similares para hipótesis sobre los σ^2's serán de la estructura de Neyman y regiones con comportamiento Neyman con respecto a $q_0, q_1, \ldots, q_k$ (sobre regiones similares con estructura Neyman o comportamiento Neyman, referirse a Lehmann (1959) y Roy (1950)).

Las hipótesis que usualmente se prueban son Hoi: $\sigma i^2 = 0$ contra las respectivas alternativas $H_{Ai}: \sigma_i^2 > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), Roy & Gnanadesikan (1959a) demuestran que las hipótesis anteriores son equivalentes a $H'_{0i}: \lambda_i = \lambda_0$ contra $H'_{Ai}: \lambda_i > \lambda_0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Para cada i se puede probar, bajo el modelo II, H'_{0i} contra H'_{Ai} tomando como región crítica la región:

$$F_i = \frac{q_i / n_i}{q_0 / n_0} > F_{\alpha, n_i, n_0}$$

donde F_i bajo H'_{io} tiene una distribución F central con n_i, n_o grados de libertad y F_{α}, n_1, n_2 es el percentil, de orden $1 - \alpha$, de la distribución de F anterior. Además hacen notar que las regiones críticas para las hipótesis H_{oi} bajo el modelo II consideradas en forma individual son idénticas con aquellas que se obtienen bajo el modelo I. Las regiones críticas bajo los modelos I y II son de la misma naturaleza aun si se consideran las hipótesis simultáneas Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2 = 0$ contra H_{Ai}: al menos una $\sigma_i^2 > 0$, las que son equivalentes a $H'_{0i}: \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \ldots = \frac{\lambda_k}{\lambda_0} = 1$ contra H'_{Ai}: al menos una $\frac{\lambda_i}{\lambda_0} > 1$. La región crítica de la prueba simultánea obtenida por el principio de unión intersección (ver Roy (1953)) es: $F_1 > a_1$, $F_2 > a_2$, ... , $F_k > a_k$ .....(1) donde $F_i = \frac{q_i/m_i}{q_0/m_0}$. Las F'_{is} (ver sección 2.2.3.) son razones de varianzas quasi-independientes y las $a_{i's}$ son tales que la región determinada en(1) es de tamaño α (para α preasignada)

2.4.3. ESTIMACIONES POR INTERVALOS DE CONFIANZA SIMULTANEOS.

Si se toman las $q_{i's}$ como $\underline{X}' A_I (A'_I A_I)^{-1} C'_{i1} \left[C_{i1} (A'_I A_I)^{-1} C_{i1} \right]^{-1} C_{i1}$ $(A'_I A_I)^{-1} A'_I \underline{X}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ (donde las A_I y C_{i1} se definieron en las secciones 2.4., 2.4.2., 2.2.3) y a q_0 como

$$\underline{X}' \ (I (n) - A_I (A'_I A_I)^{-1} A'_I) \ \underline{X}$$

donde las sumas de cuadrados con que se definieron las $q_i{}'_s$ tienen n_i grados de libertad. Si se aplican las condiciones α, β, γ de la sección 2.4.1, a estas $q_i{}'_s$, se puede verificar que $q_0, q_1, \ldots, q_k$ satisfacen β de tal forma que la centralidad de la distribución está asegurada para cada q_i (i = 0, 1, ..., k). Es posible verificar que q_0 siempre satisface α y γ, de donde q_0 se distribuye $\sigma^2 \chi^2_{(no)}$ donde $\chi^2_{(no)}$ es la distribución central χ^2 con n_o grados de libertad, además q_0 es independiente de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ y entonces q_0 es un estimador insesgado uniformemente de varianza mínima de σ^2.

Al aplicar las condiciones α y γ a $q_1, q_2, \ldots, q_k$ se obtienen $(q_1, \ldots, q_k)$ en la siguiente forma:

$$C_{i1} \ (A'_I \ A_I)^{-1} \ C'_{i1} = \frac{1}{\gamma_i} \left[I(m_i - 1) + J \ (m_i - i) \times (m_i - 1) \right]$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$

donde J (p x q) es una matriz cuyos elementos son unos y

$$C_{i1} \ (A'_I A_I)^{-1} C'_{j1} = 0 \ ((m_i - 1) \ \times \ (mj - 1))$$

para $i \neq j = 1, 2, \ldots, k$.

Cuando las $q_{i's}$ estan dadas de la forma anterior y satisfacen las restricciones i) y ii) de la sección 2.4.2 se pueden encontrar constantes $\chi^2_{1\alpha_j(nj)}$ y $\chi^2_{2\alpha_j(nj)}$ para $j = 0, 1, \ldots, k$ tal que los intervalos simultáneos.

iii) $\chi^2_{1\alpha_j}(nj) \leq \frac{q_j}{\lambda_j} \leq \chi^2_{2\alpha_j}(nj)$; ($j = 0, 1, \ldots, k$)

tengan un coeficiente de confianza conjunto de $(1 - \alpha) = \prod_{j=0}^{k}(1-\alpha_j)$, donde $P(\chi^2_{1\alpha_j}(nj) \leq \chi^2_{(nj)} \leq \chi^2_{2\alpha_j}(nj)) = 1 - \alpha_j$ y $\chi^2_{(nj)}$ es una variable χ^2 central con nj grados de libertad ($j = 0, 1, \ldots, k$).

A partir de iii) se pueden obtener con un coeficiente de confianza de $(1 - \alpha)$ los siguientes intervalos de confianza simultáneos:

$$C_{1\alpha_j} q_j \leq \lambda_j \leq C_{2\alpha_j} q_j \; ; \; (j = 0, 1, \ldots, k)$$

donde $C_{1\alpha_j} = \left[\chi^2_{2\alpha_j(nj)}\right]^{-1}$ y $C_{2\alpha_j} = \left[\chi^2_{1\alpha_j(nj)}\right]^{-1}$

para $j = 0, 1, \ldots, k$.

A partir de los intervalos de confianza simultáneos anteriores Roy & Gnanadesikan (1959a) obtienen para los componentes de varianza los siguientes intervalos de confianza simultáneos con coeficiente de confianza de $(1 - \alpha)$.

$$C_{1\alpha_0} q_0 \leq \sigma^2 \leq C_{2\alpha_0} q_0$$

$$\frac{1}{r_1}\left[C_{1\alpha_1} q_1 - C_{2\alpha_0} q_0\right] \leq \sigma_1^2 \leq \frac{1}{r_1}\left[C_{2\alpha_1} q_1 - C_{1\alpha_0} q_0\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{1}{r_k}\left[C_{1\alpha_k} q_k - C_{2\alpha_0} q_0\right] \leq \sigma_k^2 \leq \frac{1}{r_k}\left[C_{2\alpha_k} q_k - C_{1\alpha_0} q_0\right]$$

Para evitar casos triviales los $C_{1\alpha_j}$ y los $C_{2\alpha_j}$ deben ser tales que todas las cotas anteriores sean no negativas.

Cuando las q_i's satisfacen las restricciones i) y ii) de la sección 2.4.2. entonces para i = 1, 2, ..., k, $F_i = \frac{q_i/(n_i\lambda_i)}{q_o/(n_o\lambda_o)}$ son quasi-independientes en el sentido de la sección 2.2.3, y cada una tiene una distribución F con ni y no grados de libertad. Como la distribución conjunta de est s F'_{is} quasi-independientes es conocida (ver Gn nadesikan (1956) y R mach ndr n (1956)) entonces es posible determinar constantes F_{i1}, F_{i2}, para i = 1, 2, ..., k, tales que los intervalos simultáneos:

$$F_{j1} \leq \frac{q_j/(m_j\lambda_j)}{q_o/(m_o\lambda_o)} \leq F_{j2} \quad ; \quad (j=1,2,\ldots,K)$$

tengan una probabilidad conjunta (1 - α), para una α predeterminada. De los intervalos simultáneos anteriores se obtienen los siguientes intervalos de confianza simultáneos:

$$\frac{1}{r_j}\left[\frac{m_o}{m_j F_{j2}} \quad \frac{q_j}{q_o} - 1\right] \leq \frac{\sigma_j^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{r_j}\left[\frac{m_o}{m_j F_{j1}} \quad \frac{q_j}{q_o} - 1\right] \quad ; (j=1,2,\ldots,K)$$

con una confianza de (1 - α). De nuevo para evitar trivialidades los límites deben ser no negativos.

2.5. MODELO II DE MANOVA.

Sea X (p x n) = $\left[\underline{X}_1\ \underline{X}_2 \ldots \underline{X}n\right]$ un conjunto de n vectores (con p componentes cada uno) aleatorios y observables tales que

X'(n x p) = A (n x m) ξ (m x p) + ε (n x p); m < n donde A es la matriz diseño (o del diseño) de rango r $\leq$ m < n y donde

i) $\xi'(p \times m) = \left[\underline{\xi}_1'\ \underline{\xi}_2' \cdots \underline{\xi}_k'\right]$ y $\underline{\xi}_i\,(m_i \times p)$

es una muestra aleatoria de tamaño m_i de la población normal p - variada, no singular, N$\left[\mu i \quad (p \times 1)\ ,\ \Sigma i \quad (p \times p)\right]$; i = 1, 2, ..., k.

Además $\mathcal{E}(n \times p)$ y las ξ_i's son mutuamente independientes.

ii) $\mathcal{E}(n \times p)$, cuyos elementos son "errores", es una muestra aleatoria de tamaño n de la población p - variada, no singular $N(0(p \times 1), \Sigma(p \times p))$, además $p \leq (n - r)$.

Roy & Gnanadesikan (1959b) presentan resultados sobre estimación puntual, pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para el modelo II de MANOVA en el caso en que $\Sigma_i(p \times p) = \sigma_i^2 \Sigma(p \times p)$ ya que esta es una restricción muy fuerte los resultados no se presentan en esta obra y los interesados deberán consultar el trabajo citado. (En el trabajo de Roy & Gnanadesikan (1959b) aparece la nota de que por haberse escrito y enviado a la revista para su publicación en 1957 a la fecha de la publicación se había avanzado en la investigación del tema logrando eliminar la restricción anterior, sólo que no se menciona ningún dato bibliográfico sobre dicha investigación razón por la cual no se presenta en este trabajo).

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION:

Eisenhart (1947).

Roy (1954)

Roy & Bose (1953)

Roy & Gnanadesikan (1956)

Roy & Gnanadesikan (1959a)

Roy & Gnanadesikan (1959b)

MODELO I DE ANOVA

Graybill (1961)

Searle (1971)

Roy (1954)

Roy & Gnanadesikan (1956)

Roy & Gnanadesikan (1959a)

MODELO I DE MANOVA

Foster (1957)

Foster (1958)

Foster & Rees (1957)

Gabriel (1968 a)

Gabriel (1968b)

Gabriel (1969a)

Gabriel (1969b)

Gabriel & Sen (1968)

Graybill (1961)

Heck (1960)

Krishnaiah (1965a)

Krishnaiah (1965b)

Krishnaiah (1965c)

Krishnaiah (1967)

Krishnaiah (1968)

Krishnaiah (1969)

Krishnaiah & Jayachandran (1968)

Miller (1966)

Morrison (1967)

Pearson (1934)

Pillai (1960)

Press (1972)

Ramachandran (1956)

Rao (1965)

Rao (1967)

Rao (1968)

Rao & Mitra (1971)

Rose & Bose (1953)

Roy (1957)

Roy & Gnanadesikan (1956)

Roy & Gnanadesikan (1959a)

Roy & Gnanadesikan (1959b)

Srivastava (1968)

Wald (1969)

<u>MODELO II DE ANOVA</u>

Carpenter (1950)

Gnanadesikan (1956)

Graybill & Hultquist (1961)

Graybill & Worthom (1956)

Lehmann & Scheffé (1950)

Ogawa (1950)

Ramachandran (1956)

Roy (1956)

Roy (1953)

Roy & Gnanadesikan (1959 a)

Searle (1971)

MODELO II DE MANOVA

Roy y Gnanadesikan (1959b)

Capítulo III.- Pruebas sobre las suposiciones de MANOVA Modelo I.

3.1.- Introducción.- Como se vió en el capítulo II sección 2.3, el modelo I de MANOVA tiene las siguientes consideraciones sobre los errores, asi la matriz $\mathcal{E}$ (nxp) es una muestra aleatoria de tamaño n de una población N $[o(px1), \Sigma(pxp)]$ esto implica que se cumplen las siguientes suposiciones: i) normalidad, ii) independencia entre renglones de $\mathcal{E}$, iii) homoscedasticidad o sea la igualdad de matrices de varianza covarianza para cada renglón de $\mathcal{E}$ que corresponde a cada observación multivariada.

Si alguna suposición falla, pero es posible aplicar alguna transformación a los datos para corregirla se indicará en este capítulo. En caso de no ser posible corregir esta falla mediante alguna transformación, entonces se tendrá que usar la prueba más robusta en ese caso. La comparación por robustez de las pruebas de hipótesis en MANOVA modelo I se lleva a cabo en el capítulo V.

3.2.- Normalidad.- Los efectos que pueda tener la falla de las hipótesis de normalidad sobre los métodos de MANOVA no son hasta la fecha claramente entendidos y al analizar datos con varios componentes (multiresponse data) el desarrollo de métodos estadísticos que sean robustos a esta divergencia distribucional esta en una etapa rudimentaria, es por esto que es importante y útil tener procedimientos para comprobar que tan razonable es la suposición de normalidad para un conjunto de datos. Si se dispone de estos procedimientos, el verificar la normalidad será útil en el análisis de los datos ya que tal vez alguna transformación de los datos que aproxime su dis tribución a la normal o tal vez indique modificaciones apropiadas de los modelos y métodos para analizar los datos.

La clase de distribuciones multivariadas no normales que se han considerado como alternativas a la distribución normal no es muy rica, la mayoría de las alternativas (que son gamma y lognormal multivariadas) son tales que tienen propiedades análogas a la de la normal (esto es que todas las marginales pertenezcan a la misma clase), los datos reales desde luego no siempre se ajustan a este tipo de no normalidad.

En análisis multivariado es necesaria una gran variedad de técnicos para detectar no normalidad ya que hay una gran variedad de formas en que la hipótesis de normalidad falla. El desarrollo de varias técnicas y la obtención de la experiencia en y con estas técnicas es muy importante.

3.2.1. Técnicas univariadas para evaluar normalidad marginal.

En la práctica, menciona Andrews et al. (1973), el análisis multivariado de los datos necesita ser aumentado por medio de análisis de subconjuntos de respuestas, estos análisis incluyen análisis univariado de cada una de las variables originales.

Aunque normalidad marginal no implica normalidad conjunta, la presencia de muchos tipos de no normalidad a menudo se refleja en las distribuciones marginales y entonces un primer paso al estudiar normalidad en observaciones con multi ples respuestas es estudiar que tan razonable es la normalidad marginal para los datos en cada una de las variables. Para este propósito se dispone de varios métodos que son:

i) Pruebas de cocientes de verosimilitud asociadas con transformaciones para mejorar la normalidad univariada (Andrews et al. (1973)).

ii) Pruebas de asimetría y Kurtosis (ver Pearson & Hartley (1966), Mardia (1970)).

iii) Pruebas "omnibus" (omnibus tests) para normalidad (ver prueba W de Shapiro & Wilk (1965a); prueba D de D'Agostino (1971); y prueba basada en distancias de Andrews et al. (1972)).

iv) Representación gráfica de probabilidades normales (Press (1972) pp. 263).

A continuación se presentarán estas pruebas:

i) Pruebas de cocientes de verosimilitud asociados con transformaciones para mejorar la normalidad univariada (Andrews et al. (1974)).

Box & Cox (1964) han propuesto métodos para estimar una transformación del tipo translación potencia $(X + \xi)^{-1}$ de una variable X de tal modo que la distribución de la variable que resulte se aproxime mas a la distribución normal. Una de las aproximaciones que sugieren Box & Cox (1964) es estimar ξ y λ por máxima verosimilitud usando las observaciones sobre x. El logaritmo de la función de verosimilitud, $\mathcal{L}_{max}(\hat{\xi},\hat{\lambda})$, (que inicialmente se maximizo respecto a la media y la varianza para ξ y λ dados) se maximiza respecto a ξ y λ para obtener el estimador de máxima verosimilitud de ξ y λ (sean estos $\hat{\xi}$ y $\hat{\lambda}$). A continuación se usa la teoría asintótica aproximada que Box & Cox (1964) propusieron para dar una región de confianza del 100 (1-α)% para ξ y λ , dada por:

$$\mathcal{L}_{max}(\hat{\xi},\hat{\lambda}) - \mathcal{L}_{max}(\xi,\lambda) \leq \frac{1}{2}\chi^2_{2}(\alpha)$$

donde $\chi^2_{2(\alpha)}$ es el percentil 100 α % de una χ^2 con 2 grados de libertad. Una transformación para lograr que la distribución de X sea normal consiste en no rechazar (al 100 α % nivel de significancia) la hipótesis de normalidad si la anterior región de confianza se traslapa con la recta λ =1.

ii) Pruebas de asimetría y Kurtosis (Pearson & Hartley (1966), Mardia (1970)).

Los métodos de asimetría y Kurtosis brindan medidas directas sobre la separación de normalidad de tal forma que pruebas que se basan en ellas tienen una ventaja sobre las otras.

D'Agostino & Pearson (1973) han trabajado también en el tema y han obtenido una prueba basada en las dos medidas que propone Mardia (1970). El trabajo de Mardia (1970) se esboza brevemente a continuación.

La medida de asimetría correspondiente a $\beta_{1,p}$ (la medida teórica) basada en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ esta dada por:

$$b_{1,p} = \sum_{r,s,t} \sum_{r',s',t'} S^{rr'} S^{ss'} S^{tt'} M_{111}^{(rst)} M_{111}^{(r's't')}$$

donde

$$S^{-1} = \{ S^{ij} \} \quad y \quad M_{111}^{(rst)} = \frac{1}{n} \sum (X_{ri} - \bar{X}_r)(X_{si} - \bar{X}_s)(X_{ti} - \bar{X}_t)$$

y S es la matriz muestral de covarianzas. La distribución asintótica de $\frac{n\, b_{1,p}}{6}$ es una χ^2 con p (p+1) (p+2) si $P \leq 7$ y si $p > 7$ entonces $\left(\frac{n\, b_{1,p}}{3}\right)^{1/2}$ se distribuye $N\left[\{p(p+1)(p+2)-3\}/3,\ 1\right]$

La medida de Kurtosis correspondiente a $\beta_{2,p}$ esta dada a partir de la muestra aleatoria $X_1, \ldots,$ Xn por

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ (X_i - \bar{X})' S^{-1} (X_i - \bar{X}) \right\}^2$$

y utilizando el teorema central del límite

$$\left[b_{2,p} - \{ p(p+2)(n-1)/(n+1) \} \right] / \{ 8p(p+2)/n \}^{1/2}$$

se distribuye asintóticamente N (0,1).

Con los resultados anteriores Mardia (1970) propone que para probar normalidad se pruebe que $\beta_{1,p} = 0$ y $\beta_{2,p} = p(p+2)$ en forma separada. Para probar $\beta_{1,p} = 0$ se utiliza el resultado.

$$\frac{n\, b_{1,p}}{6} \sim \chi^2_{(r)}$$

donde $r = p(p+1)(p+2)/6$

Y para probar $\beta_{2,p} = p(p+2)$ se puede utilizar que

$$B = (b_{2,p} - \beta_{2,p}) / \{8p(p+2)/n\}^{1/2}$$

Se distribuye asintóticamente N (0,1) cuando $H_0: \beta_{2,p} = p(p+2)$ sea cierta.

Mardía muestra la efectividad de su prueba mediante dos ejemplos.

iii) Pruebas "omnibus" (omnibus tests) para normalidad.

a) Prueba W de Shapiro & Wilk (1965) en una representación gráfica de la probabilidad, se puede considerar la regresión de las observaciones ordenadas sobre los valores esperados de las estadísticas de orden de la versión estandarizada de la distribución hipotética (la representación gráfica tiende a ser una recta si la hipótesis es cierta), entonces un posible método para probar suposiciones distribucionales es por medio de un procedimiento de tipo análisis de varianza.

Usando mínimos cuadrados generalizados (las variables ordenadas estan correlacionadas). Se pueden ajustar modelos lineales o de orden mayor y se puede ajustar un cociente del tipo F para evaluar que tan adecuado es el ajuste. Esta aproximación ya se ha estudiado y aunque se obtuvieron algunos resultados, el procedimiento esta sujeto a que la selección de modelos de orden grande es prácticamente arbitraria, sin embargo se sigue investigando este camino.

Otro camino que se ha investigado por Shapiro & Wilk (1956 C) es comparar la pendiente al cuadrado de la representación gráfica de la regresión lineal, que bajo la hipótesis de normalidad es un estimador de la varianza poblacional multiplicada por una constante.

Este procedimiento puede usarse con encuestas incompletas.

Como una alternativa a las anteriores Shapiro & Wilk (1965 b) proponen para muestras completas que la pendiente al cuadrado pueda compararse con la suma muestral de cuadrados que es simétrica respecto a la media, es independiente de la ordenación y es fácilmente computable. Esta alternativa se menciona brevemente a continuación (para detalles ver Shapiro & Wilk (1965 a):

Sea $Y' = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un vector de observaciones aleatorias, el objetivo es derivar una prueba para la hipótesis de que Y es una muestra de una población normal con media μ y varianza σ^2 ambas desconocidas. Sean $m' = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ el vector de valores esperados de estadísticas ordenados N (0,1) y $V = (v_{ij})$ la correspondiente matriz de varianza covarianza.

Entonces los estimadores por mínimos cuadrados generalizados estan dados por:

$$\hat{\mu} = \frac{m' V^{-1} (m 1' - 1 m') V^{-1} y}{1' V^{-1} 1 \, m' V^{-1} m - (1' V^{-1} m)^2}$$

y $$\hat{\sigma} = \frac{1' V^{-1} (1 m' - m 1') V^{-1} y}{1 V^{-1} 1 \, m' V^{-1} m - (1 - V^{-1} m)^2}$$

Donde 1 es un vector columna de unos.

Entonces si $S^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ se tiene que:

$$W = \frac{R^2 \hat{\sigma}^2}{c^2 S^2} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{(a' y)^2}{S^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

donde $R^2 = m' V^{-1} m$

$C^2 = m' V^{-1} V^{-1} m$

$$a' = (a_1, \ldots, a_n) = \frac{m' V^{-1}}{(m' V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

Y $$b = \frac{R^2 \hat{\sigma}}{C}$$

Note que b es el mejor estimador lineal, insesgado de la pendiente de la regresión lineal de las observaciones ordenadas (Y_i) sobre los valores esperados (m_i) de la estadística adecuada de la N (0,1). La constante C se define de tal forma que los coeficientes lineales esten normalizados. Además si realmente se muestrea de una población normal entonces el numerador (b^2) y el denominador (S^2) de W son ambos, excepto por una constante, estimadores de la misma cantidad (σ^2). Para poblaciones no normales en general b^2 y S^2 no estiman lo mismo. Los coeficientes $\{a_i\}$ son los coefificientes "mejores, lineales e insesgados" ("best linear unbiased coefficients") tabulados por Sarhon & Greenberg (1956).

A continuación se mencionan algunas propiedades de W que se demuestran en Shapiro & Wilk (1965a):

1) W es invariante respecto a translaciones y transformaciones de escala.

2) W tiene una distribución que solo depende del tamaño de muestra n, para muestras extraídas de una población normal.

3) $E(W^r) = (E(b^{2r}))/E(S^{2r}); \ \forall r$

4) el valor máximo de W es 1.

5) el valor mínimo de W es $na_1^2/(u-1)$

6) Los momentos de orden 1/2 y 1 de W estan dados por

$$E(W^{1/2}) = \frac{R^2\,\Gamma\{\frac{1}{2}(n-1)\}}{C\,\Gamma(\frac{1}{2}n)\sqrt{2}}$$

$$E(W) = \frac{R^2(R^2+1)}{C^2(n-1)}$$

donde R^2 y C se definieron anteriormente

7) Una distribución conjunta que involucra W se define por

$$h(\omega,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2}) = K\,\omega^{-\frac{1}{2}}(1-\omega)^{\frac{1}{2}(n-4)}\cos^{(n-4)}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-3}$$

sobre una región T sobre la que las θ_i's y ω

no son independientes, y donde K es una constante.

8) Para n = 3, la densidad de W es

$$\frac{3}{\pi}(1-\omega)^{-\frac{1}{2}}\,\omega^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad \frac{3}{4} \leq \omega \leq 1$$

Resumiendo, el objeto de la prueba W es proveer una estadística para evaluar la suposición de normalidad en una muestra completa. Se ha demostrado que la estadística W es una medida efectiva de normalidad aun para muestras pequeñas ($n < 20$).

Shapiro & Wilk (1965a) comparan la prueba W contra otras pruebas y encuentran que la prueba W es mejor, los resultados de este estudio aparecen en Shapiro & Wilk (1964).

c) Prueba D de D'Agostino. (D'Agostino (1971)): La prueba es una prueba "omnibus" apropiada para detectar desviaciones de la normalidad debidas a asimetría y Kurtosis.

Como se vió anteriormente Shapiro & Wilk (1965a) presentaran una prueba de normalidad basada en una estadística W que es el mejor estimador lineal insesgado del cociente entre la desviación estandar poblacional y la varianza muestral, la prueba puede usarse con tamaños de muestra de 3 a 50. Shapiro & Wilk no extendieron su estudio a muestras de tamaño mayor a 50 ya que por varias razones dicha extensión no es posible, entre esas razones está el encontrar los pesos adecuados para las obser vaciones ordenadas para el numerador de W, ya que cada tamaño de muestra requiere un nuevo conjunto de pesos. Pero aun si el anterior problema se resolviera quedaría el problema de encontrar la distribución nula apropiada para W.

D'Agostino presenta una nueva prueba de normalidad aplicable a muestras de tamaño mayor o igual a 50. Esta prueba no requiere tablas de pesos y para estos tamaños de muestra la distribución nula de D puede aproximarse por medio de la expansión de Cornish-Fisher utilizando momentos hasta de orden 4°. La prueba basada en la estadística D es excepto por una constante la razón de Downton (1966) que es un estimador lineal insesgado de la desviación estandar normal entre la desviación estandar muestral.

Si $X_1, \ldots, X_n$ representa una muestra aleatoria de tamaño n y sean $X_{1,n}, \ldots, X_{n,n}$ las observaciones ordenadas, la estadística está dada por:

$$D = \frac{T}{n^2 S}$$

donde

$$T = \sum_{i=1}^{n} \{ i - \tfrac{1}{2}(n+1) \} X_{i,n}$$

y

$$S^2 = \frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad ; \quad (\bar{X} \text{ es la media muestral}).$$

El estimador insesgado original de la desviación estandar de la normal propuesto por Downtow (1966) es $2\sqrt{\pi}\, T / \{n(n-1)\}$, entonces, excepto por una constante, D es igual al cociente entre el estandar de Downton y la desviación estandar muestral.

Si la muestra se extrajo de una distribución normal el valor esperado de D y la desviación estandar asintótica son:

$$E(D) = \frac{(n-1)}{2\sqrt{(2n\pi)}} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \doteq \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-1}$$

y la desviación estandar asintótica (dea):

$$\text{dea}(D) = \frac{0.02998598}{\sqrt{n}}$$

Una variable que esta estandarizada aproximadamente y que posee asintóticamente media cero y varianza uno es:

$$Y = \frac{D - \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-1}}{\text{dea}(D)}$$

En el trabajo de D'Agostino (1971), se analiza la prueba asociada a D en cuanto a potencia, este estudio se hizo por medio de simulación. En el mismo trabajo también se presenta la distribución asintótica nula de D.

iv) Representación gráfica de probabilidades normales.

En la práctica es común graficar una muestra de observaciones (en la mayoría de los casos mediciones) sobre papel normal antes de empezar cualquier análisis estadístico formal. La suposición de normalidad esta presente en la mayoría de las técnicas mas poderosas para el análisis de variables continuas y la gráfica sobre papel normal provee una guia visual de gran utilidad para determinar que tanto la muestra disponible cumple con esta suposición.

Una asimetría marcada (tal que sugiera una transformación de los datos), se muestra por medio de una curvatura en la gráfica y la presencia de Kurtosis es también facilmente distinguible.

Para mas detalles sobre esta técnica ver Healy (1975), Press (1972), Wilk & Gnanadesikan (1968). Estos métodos no dan una regla de decisión para la normalidad, unicamente de modo subjetivo se investiga el grado de "cercanía" de los datos a la normalidad.

Tukey (1962) ha sugerido un conjunto de métodos numéricos, equivalentes a la representación gráfica, para la primer etapa en el proceso de análisis de los datos.

3.2.2. Técnicas multivariadas para evaluar normalidad conjunta.

Las pruebas de la sección anterior son sensibles a algunas formas de no normalidad en el caso multivariado que resultan en no normalidad en las distribuciones marginales. En la práctica, dicen Andrews et al. (1973), la no normalidad marginal esta presente siempre que no normalidad conjunta este presente excepto tal vez en casos raros o patológicos. Sin embargo hay necesidad de pruebas que explícitamente ex ploren la naturaleza multivariada de los datos.

Algunos métodos que permiten satisfacer esta necesidad son:

i) Pruebas de razón de verosimilitud asociadas con transformaciones para aumentar normalidad.

Andrews et al. (1971) extendieron las técnicas de Box & Cox (1964) presentadas en la sección anterior al caso multivariado. A continuación se menciona brevemente este método (para detalles ver Andrews et al.,(1971)):

Suponga que $\Lambda = \{ \lambda \}$ es una familia paramétrica de transformaciones tales que los datos transformados $\underline{Y}^{(\lambda)}$ pueden expresarse por medio de un modelo simple normal multivariado. Este modelo proporciona una distribución, para $\underline{Y}$, que depende de los parámetros de la transformación $\underline{\lambda}$ y de los parámetros del modelo normal multivariado. Si las transformaciones Λ son invertibles, puede encontrarse una función de verosimilitud logaritmica de todos los parámetros. La función se maximiza facilmente sobre los parámetros del modelo normal usando el método de máxima verosimilitud.

Esta función maximizada, L max ($\underline{\lambda}$), depende sólo de $\underline{\lambda}$. Andrews et al. (1973) recomienda que aun cuando hay sólo dos variables involucradas para evitar cálculos engorrosos y poder efectuar parte del análisis en forma gráfica las transformaciones deben ser transformaciones potencia de cada variable separadamente sin involucrar parámetros de traslación.

Para la familia de transformaciones potencia, la transformación lineal $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)' = \underline{1}$ ($\underline{1}$ un vector de unos) es la única transformación consistente con la hipótesis de que los datos se distribuyen normalmente. Una prueba de razón de verosimilitud de la hipótesis $\underline{\lambda} = \underline{1}$ puede basarse en la distribución de

$$2\left(L_{max}(\hat{\underline{\lambda}}) - L_{max}(\underline{1})\right)$$

que es asintóticamente aproximada por medio de una $\chi^2_{(p)}$ donde $\hat{\underline{\lambda}}$ es el valor de $\underline{\lambda}$ que maximiza Lmax$(\underline{\lambda})$

y

$$L\max(\underline{\lambda}) = -\frac{n}{2}\log|\hat{\Sigma}| + \left\{\sum_{j=1}^{p}(\lambda_j - 1)\sum_{i=1}^{n}\log y_{ij}\right\}$$

con $Y(n \times p) = (y_{ij})$; $y_{ij} > 0$ $(i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, p)$

$$\hat{\underline{\mu}} = \frac{1}{n} Y^{(\lambda)'} \cdot \underline{1}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\left(Y^{(\lambda)} - \underline{1}\cdot\hat{\underline{\mu}}'\right)'\left(Y^{(\lambda)} - \underline{1}\cdot\hat{\underline{\mu}}'\right)$$

Este método no sólo indica cuando los datos no son normales sino que además sugiere transformaciones de los datos para mejorar la normalidad.

ii) Pruebas basadas en densidades multivariadas. Las pruebas clásicas de bondad de ajuste, tales como χ^2 y Kolmogorov-Smirnov pertenecen a esta clase. Sin embargo las dificultades e inconvenientes de estas pruebas en el caso univariado se ven magnificados en el caso multivariado y por lo tanto severamente limitadas para los propósitos de esta sección. (Para discusión sobre estas pruebas ver Andrews et al. (1972)).

Se han propuesto algunas pruebas que estan basadas, cuando menos indirectamente, en las distancias entre puntos cercanos en un espacio p dimensional. Dos de estos son los propuestos por Weiss (1958) y Anderson (1966), estas pruebas no han tenido gran aplicación. Una tercer prueba que trata de ser mas sensible a diferencias locales de la densidad por medio de una busqueda explícita del comportamiento de las distancias entre puntos cercanos es la propuesta por Andrews et al. (1972).

iii) Métodos basados en radios y ángulos.

El primer paso en la presentación del método (ver Andrews et al. (1973)) es obtener los residuales:

$$\underline{z}_i = S^{-\frac{1}{2}} (\underline{y}_i - \underline{\bar{y}}) \; ; \; i = 1, \ldots, n$$

donde $\underline{Y}_i$ denotan observaciones, $\underline{\bar{Y}}$ y S son respectivamente el vector muestral de medios y la matriz de covarianzas, y $S^{-\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada simétrica de S^{-1} (ver Press (1972), pag. 36 y Andrews et al. (1973), Wonnacott&Wonnacott (1979)). Los radios al cuadrado, o longitudes al cuadrado de las $\underline{z}_i$:

$$r_i^2 = \underline{z}_i' \underline{z}_i = (\underline{y}_i - \underline{\bar{y}})' S^{-1} (\underline{y}_i - \underline{\bar{y}})$$

se distribuyen aproximadamente como una χ^2 con p grados de libertad en el caso normal p-variado.

En el caso bivariado el ángulo θ_i que hace $\underline{z}_i$ con el eje de las abscisas se distribuye aproximadamente como una uniforme en el intervalo $(0,2\pi)$. Las

r_{ij}^2 y las θ_{ij} son aproximadamente independientes para n grande, la dependencia entra, entre otras cosas, por los estimadores del vector de medios y de la matriz de covarianzas.

Para tamaños de muestras grandes se espera (ver Andrews et al. (1973), (1972)) que esta dependencia no tenga efectos graves.

Se sabe que la distribución marginal exacta de las r_{ij}^2 es un múltiplo (constante) de una distribución Beta, pero aun para tamaños de muestra "pequeños" (esto es, n= 20 ó 25 en el caso bivariado) la diferencia entre usar una Beta o una χ^2 es insignificante (ver Gnanadesikan & Kettenring (1972)).

Algunos autores como Healy (1968), Kessel & Fukunaga (1972) han sugerido métodos para determinar normalidad basados exclusivamente en los radios al cuadrado. Andrews et al. (1973) proponen un método basado en radios y ángulos.

Este último método esta basado en graficación y tiene el mismo espíritu que los métodos mencionados anteriormente de representaciones gráficas de las probabilidades.

Pruebas multivariadas de normalidad que "buscan" en todas las proyecciones unidimensionales y utilizan el principio de la unión-intersección de Roy (1953) han sido trabajados por Mukovitch & Afifi (1973) y Aitkin (1972).

3.2.3. Normalidad Direccional.

El análisis marginal de cada una de las variables originales considera las proyecciones de los datos sobre cada eje de coordenados. Es interesante usar estas proyecciones y algunas otras para que entre estas se consideren aquellas que es posible que exhiban ciertos tipos de no normalidad.

Un método que sigue esta línea de trabajo es el presentado por Andrews et al. (1971), (1973), que consiste en estimar transformaciones que aumenten la normalidad direccional (por direcciones). Especificamente los residuos

$$\underline{z}_i = S^{-\frac{1}{2}} (\underline{y}_i - \bar{\underline{y}})$$

se obtienen. Cualquier característica de las observaciones $\underline{Y}_i$ se reflejará como la correspondiente característica de l s $\underline{z}_i$, y la dirección de cualquier conjunto de puntos no normal, si esta presente, se identificará, tal vez, al estudiar la siguiente suma normalizada:

$$\underline{d}_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \underline{z}_i}{\left\| \sum_{i=1}^{n} w_i \underline{z}_i \right\|}; \quad W_i = \| \underline{z}_i \|^\alpha$$

donde $\| \underline{X} \|$ es la norma euclideana de $\underline{X}$ y α es una constante que debe elegirse de acuerdo a las siguientes consideraciones:

El vector $\underline{d}_\alpha$ provee una parametrización de las direcciones en el espacio de las $\underline{z}$'s (y por lo tanto, en el espacio de las $\underline{y}$'s) en terminos del parámetro α. Si $\alpha = 1$, $\underline{d}_\alpha$ es sensible principalmente a aquellas $\underline{Y}$'s que estan lejos de $\bar{\underline{Y}}$, mientras que si $\alpha = -1$, $\underline{d}_\alpha$ es función solo de la orien tación de l s $\underline{z}_i$'s . En general si $\alpha > 0$ el vector $\underline{d}_\alpha$ apuntará (o tenderá a apuntar) hacia cualquier agrupamiento de observaciones alejado de la media, mientras que para $\alpha < 0$ el vector $\underline{d}_\alpha$ apuntará hacia cualquier agrupamiento anormal de datos cercano al centro de gravedad de los datos.

Para una α específica el vector $\underline{d}_\alpha$ corresponde al vector $\underline{d}^*_\alpha = S^{-1/2}\,\underline{d}_\alpha$ en el espacio de las observaciones originales. Las longitudes de las proyecciones de las observaciones originales sobre el espacio unidimensional especificado por la "dirección" $\underline{d}^*_\alpha$ constituye una muestra univariada que puede ser estudiada por medio de cualquier prueba univariada de normalidad (sección 3.2.1).

3.3. Independencia.

Press (1972) menciona que si los resultados en el caso univariado se pueden utilizar como guía, entonces debe esperarse que una violación con consecuencias graves en las hipótesis del modelo lineal general sea la violación de la suposición de independencia de errores. (En el caso multivariado: la violación de la suposición de independencia de renglones de $\mathcal{E}$).

Si los errores estan fuertemente correlacionados (como se podría determinar al graficar los residuales para cada ecuación en la forma reducida) los estimadores de los elementos del vector de medios pueden ser extremadamente ineficientes por tener varianzas grandes. Este problema puede minimizarse por medio de la determinación de la naturaleza de la correlación, esto puede hacerse por medio de análi sis de residuales (sobre detalles de análisis de residuales ver Draper & Smith (1966), Anscombe (1961), Anscombe & Tukey (1963)), y corregirse al estimar los parámetros por medio de mínimos cuadrados generalizados (sobre mínimos cuadrados generalizados ver Press (1972), Aitken (1935), Searle (1971), Rao (1965)).

3.4. Heteroscedasticidad.

Se pueden presentar dos casos de heteroscedasticidad: univariada y multivariada. A continuación se tratan brevemente estos:

a) Heteroscedasticidad univariada.- En algunos casos los vectores de "errores" tienen componentes con varianzas diferentes (heteroscedasticidad). En este caso, si se puede establecer alguna relación simple entre las varianzas de los componentes (tal como $Var(e_\alpha) = \sigma_\alpha^2 = k x_\alpha$, donde K es una constante y x_α es la observación α-ésima de la variable independiente en una regresión lineal simple) se podrá usar mínimos cuadrados generalizados y se resolverá el problema. (ver Press (1972), pp. 263-264).

   Sin embargo en algunos casos no es posible hacer lo anterior y es necesaria alguna transformación de los datos (para transformaciones de datos ver Press (1972), pp. 264-265, Andrews et al. (1971), Scheffé (1959), pp. 84, 365-368, Bartlett (1947), Curtis (1943), Dolby (1963), Box & Cox (1964))

b) Heteroscedasticidad multivariada.- En este caso heteroscedasticidad implica desigualdad de matrices de varianza covarianza, la que origina el problema Behrens-Fisher.

Las pruebas de hipótesis en multivariado que involucran varianzas y covarianzas son generalmente extensiones naturales de las pruebas univariadas. A continuación se presentan brevemente algunas pruebas de la hipótesis de homoscedasticidad (homoscedasticity) o igualdad de matrices de varianzas covarianzas en el caso multivariado. Para probar cuando esta suposición es correcta, aun en forma aproximada, es necesario usar resultados asintóticos. Press (1972) hace notar que al ser las pruebas de igualdad de varianza en el caso univariado extremadamente sensibles a fallas en la hipótesis de normalidad, no debe sorprender la misma sensibilidad en el caso multivariado.

A continuación se presenta esta prueba (Press (1972), pp. 176-8) en el caso paramétrico:

Sean $\underline{X}_1(i), \ldots, \underline{X}_{N_i}(i)$; Ni observaciones p-variadas independientes de N ($\underline{\theta}_i$, Σ_i), i=1,...,K. Se desea probar la hipótesis:

$$H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_K$$

Como la matriz de covarianzas muestrales de cada población es una estadística suficiente para cada matriz de covarianzas poblacionales, se define

$$V_i = \sum_{\alpha=1}^{N_i} \left[\underline{X}_\alpha(i) - \bar{\underline{X}}(i)\right]\left[\underline{X}_\alpha(i) - \bar{\underline{X}}(i)\right]'$$

V_i (pxp)

para i= 1,2,...,K, donde la barra sobre $\underline{X}$ (i) denota la media muestral de los $\underline{X}_\alpha(i)'s$.

Sea $N = \sum_{i=1}^{K} N_i$.

Se puede checar que la prueba basada en la estadística que se obtiene del cociente de verosimilitud (al reemplazar las estimaciones máxima verosimilitud por estimadores insesgados) puede basarse en la estadística:

$$\mathcal{M} = c + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{N_i - 1}{2} \right) \log |V_i| - (N-k) \log \left| \sum_{i=1}^{k} V_i \right|$$

donde

$$c = \frac{p}{2} (N-k) \log (N-k) - \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{2} (N_i - 1) \log (N_i - 1)$$

esto es, $e^{\mathcal{M}}$ es el cociente de verosimilitud modificado por estimadores insesgados. Esta prueba fué sugerida por Bartlett (1937); una prueba alternativa basada en los procedimientos de prueba unión-intersección Roy (1953) esta dada por Roy (1957) capítulo 11.

Se rechaza H_0 si $\mathcal{M}$ es menor que una constante que se determina para cualquier nivel de significancia preasignado utilizando la distribución de $\mathcal{M}$ bajo H_0.

Para p=1, la prueba de Ho se basa en una distribución F de Snedecor. Para $p > 1$ la distribución es mas complicada:

se definen las siguientes constantes:

$$a = 1 - \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N_i - 1} - \frac{1}{N-k} \right) \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)} \cdot$$

$$b = \frac{p(p+1)}{48\, a^2} \left[(p-1)(p+2) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(N_i - 1)^2} - \frac{1}{(N-k)^2} \right) + \right.$$
$$\left. - \; 6\,(K-1) \quad (1-a)^2 \right]$$

Box (1949) encontró una buena aproximación a la distribución de $\mathcal{M}$ bajo Ho, la que esta dada por

$$P_r \{ -a\mathcal{M} \leq t \} = P_r \{ \chi^2(f) \leq t \} +$$

$$+ b\left[P_r\{\chi^2(f+4) \leq z\} - P_r\{\chi^2(f) \leq z\}\right] +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(N-k)^3}\right)$$

donde $f = (\frac{p}{2})\ (p+1)\ (k-1)$.

y χ^2 (s) es una χ^2 con s grados de libertad. Esto es para muestras grandes es aproximadamente cierto que

$$D[-a\,\Lambda] = D\left[\chi^2\left((\tfrac{p}{2})(p+1)(k-1)\right)\right]$$

donde $D[X]$ denota la distribución de X.

Si se encuentra que las matrices de covarianzas no son iguales, entonces muchos de los modelos multivariados no se aplican. Sin embargo es aun posible probar igualdad de vectores de medias y a este problema se le conoce como el problema Behrens-Fisher. Ver sobre este problema Bennet (1951), Anderson (1963), Press (1967). Estos métodos son extensiones multivariadas de el procedimiento presentado por Scheffé (1943) en el caso univariado para resolver el problema Behrens-Fisher. Bennett directamente extendió el resultado scheffé al caso de dos poblaciones multivariadas, Anderson extendió el trabajo de Bennett a K poblaciones y Press extendió el procedimiento a matrices de covarianza tales como la matriz de covarianza dentro de clases. (ver Press (1972)).

En el caso no paramétrico (ver Puri & Sen (1971)). Se trata el problema de probar estadísticamente la homogeneidad de varias matrices de disperción usando estadísticas ordenadas por rango (Rank order statistics). En el caso no paramétrico la formulación de la hipótesis de invarianza requiere distribuciones idén ticas, y eso, a su vez, requiere igualdad u homogeneidad de parámetros de localización. En el caso paramétrico el problema de igualdad de matrices de covarianza no tiene nada que ver con igualdad de parámetros de localización. Es por esto que en el caso no paramétrico se consideran los siguientes problemas:

i) Pruebas de homogeneidad de matrices de dispersión suponiendo igualdad de parámetros de localización.

ii) Pruebas de homogeneidad de matrices de dispersión sin asumir igualdad de parámetros de localización.

iii) El problema de probar en forma simultánea la homogeneidad de parámetros de localización y la homogeneidad de matrices de dispersión.

En el caso paramétrico, como se vio anteriormente, las pruebas de homogeneidad de matrices de dispersión estan basadas en las matrices de covarianzas muestrales (ver por ejemplo Anderson (1958), capítulo 10 y Press (1972), capítulo 7), sin embargo en el caso no paramétrico la matriz de covarianzas muestrales no se considera una estadística apropiada ya que es sensible a observaciones "alejadas" (outliers), depende de la existencia de los momentos de la distribución original y puede no mantener su suficiencia u optimalidad en el caso de distribuciones no normales.

A continuación se presentan brevemente los resultados de Puri & Sen (1971):

Sean $\underline{X}_{\alpha}^{(k)}\ (1 \times p) = (X_{1\alpha}^{(k)}, \ldots, X_{p\alpha}^{(k)})\ ;\ \alpha = 1, \ldots, n_k,\ n_k$

vectores aleatorios, independientes e identicamente distribuidos con una función de distribución absolutamente continua $F^{(k)}(\underline{X})$,

para $K=1,\ldots c$ (≥ 2); estas c muestras se suponen mutuamente independientes. Sea $N=\sum_{k=1}^{c} n_k$ y suponga que para toda N se cumplen las siguientes desigualdades:

$$0<\lambda_0\leq\lambda_N^{(k)}=\frac{n_k}{N}\leq 1-\lambda_0<1 \quad ; (k=1,\ldots,c)$$

para alguna λ_0 fija, tal que $\lambda_0\leq\frac{1}{c}$.

Sean $F_i^{(k)}(x)$ y $F^k_{(i,j)}(x,y)$ la función de distribución marginal de $X_i^{(k)}$ y $(X_{i\alpha}^{(k)}, X_{j\alpha}^{(k)})$ respectivamente para $i<j=1,\ldots,p$ y $k=1,\ldots,c$.

La formulación de las hipótesis estadísticas mencionadas en i), ii) y iii) se da a continuación:

Primero considerando el caso de matrices de covarianza, suponiendo igualdad de parámetros de localización, en este caso la hipótesis es

$$H_0^{(1)}: F^{(1)}(\underline{X})=F^{(2)}(\underline{X})=\cdots=F^{(c)}(\underline{X})$$

Esta hipótesis implica que $\Theta^{(1)}=\ldots=\Theta^{(c)}$, donde $\Theta^{(k)}$ es la matriz de dispersión de los "funcionales de grado" (grade functionals) de la K-ésima muestra ($K=1,\ldots,c$). Contra el conjunto de alternativas en que $\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(c)}$ no sean todas iguales.

La funcional de grado de $X_{i\alpha}^{(k)}$ se define por medio de $Y_{i\alpha}$ donde

$$Y_{i\alpha}^{(k)}=J_{(i)}\left[H_{(i)}\left(X_{i\alpha}^{(k)}\right)\right] ; i=1,\ldots,p; k=1,\ldots,c$$

$$H_{(i)}(x)=\sum_{k=1}^{c}\lambda_N^{(k)}F_{(i)}^{(k)}(x)$$

Y Ji (u) (i=1,...,p) es alguna función absolutamente continua de u, definida en el intervalo abierto (0,1), y Ji (u) se normaliza de la siguiente manera

$$\int_0^1 J_{(i)}(u)\,du = 0 \;, \quad \int_0^1 J_{(i)}^2(u)\,du = 1 \;;\; i=1,\ldots,p$$

El propósito de introducir las matrices de dispersión anteriores es trabajar con una clase de matrices de dispersión que sean invariantes bajo ciertas transformaciones de las variables, que sean menos sensibles a observaciones "alejadas" y al mismo tiempo que sean medidas informativas.

En particular si $J_{(i)}(u)$ es monótona en u $(0 < u < 1)$ $\forall$ i = 1,...,p, entonces $\Theta^{(k)}$, K =1,...,c será invariante bajo transformaciones monótonas de las variables coordenadas.

Las alternativas de $Ho^{(1)}$ son todas las maneras en que la igualdad de las $\Theta^{(k)}$'s no sea cierta.

Considerando la hipótesis de las matrices de dispersión sin suponer la identidad de los parámetros de localización:

En este caso escriba $F^{(k)}(\underline{X}) = Fo^{(k)}(\underline{X} - \underline{\partial}^{(k)})$... (*) para k = 1,...,c, donde $\underline{\partial}^{(k)} = (\partial_1^{(k)},\ldots, \partial_p^{(k)})$; (k = 1, ...,c) son c vectores reales de p componentes cada uno.

En este caso

$$H_o^{(2)} : F_o^{(1)}(\underline{X}) = \cdots = F_o^{(c)}(\underline{X})$$

contra un tipo similar al caso anterior de alternativas que involucran a las $\Theta^{(k)}/_{\delta}$, donde desde luego en la definición de las $\Theta^{(k)}/_{\delta}$ en vez de usar $F^{(k)}$'s se usan $Fo^{(k)}$'s (ver Puri & Sen (1971)).

Finalmente se considera la hipótesis de que ambas, las matrices de localización y dispersión, sean las mismas, esto es:

$$Ho^{(3)} : F^{(1)}(\underline{X}) = \ldots = F^{(c)}(\underline{X})$$

donde $F^{(k)}(\underline{X})$ $(K = 1,\ldots,c)$ esta dada en (*) y se prueba contra las alternativas de que cuando menos una de las siguientes igualdades no sea cierta.

$$\Theta^{(1)} = \ldots = \Theta^{(c)} \quad ; \quad \underline{\partial}^{(1)} = \ldots = \underline{\partial}^{(c)}$$

A continuación se presenta en forma concisa la prueba de $H_o^{(1)}$ basada en permutaciones. Para las otras pruebas referirse al Puri & Sen (1971).

Reuniendo las $N = \sum_{K=1}^{c} n_K$ observaciones $X_\alpha^{(k)}$, $\alpha = 1,\ldots,$ k; $k = 1,\ldots,c$ en una muestra combinada y denotar el punto muestral por medio de la matriz

$$Z'_N(p \times N) = (\underline{X}_1^{(1)}, \ldots, \underline{X}_{N_c}^{(c)})$$

y el espacio muestral por $\mathcal{Z}_N$. Bajo $Ho^{(1)}$ la distribución conjunta de Z_N permanece invariante bajo el grupo finito de $N!$ permutaciones de los N columnas de z'_N. Entonces si se condicio na con z_N, todos los $N!$ puntos muestrales generados por estas $N!$ permutaciones de las N columanss de Z'_N tienen cada una la probabilidad condicional $(N!)^{-1}$. Ahora arreglando los elementos de cada renglón de Z'_N en orden creciente (en magnitud) obtenemos la matriz

$$R_N\ (p\times N) = \begin{pmatrix} R_{11}^{(1)} & \cdots & R_{1m_1}^{(1)} & \cdots & R_{1m_c}^{(c)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ R_{p1}^{(1)} & \cdots & R_{pm_1}^{(1)} & \cdots & R_{pm_c}^{(c)} \end{pmatrix}$$

Para toda i (= 1,...,p), reemplazando los rangos α (=1,...,N) en el i-ésimo renglón de R_N por un conjunto de registros generales $\{E_{N,\alpha}^{(i)} = J_{N(i)}(\alpha/(N+1)),\ \alpha = 1,\ldots,N\}$ se obtiene la correspondiente matriz de registros:

$$E_N\ (p\times N) = \begin{pmatrix} E_{N,R_{11}^{(1)}}^{(1)} & \cdots & E_{N,R_{1m_1}^{(1)}}^{(1)} & \cdots & E_{N,R_{1m_c}^{(c)}}^{(1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ E_{N,R_{p1}^{(1)}}^{(p)} & \cdots & E_{N,R_{pm_1}^{(1)}}^{(p)} & \cdots & E_{N,R_{pm_c}^{(c)}}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Con las matrices anteriores se obtienen las siguientes estadísticas:

$$S_{N,ij}^{(k)} = \frac{1}{m_k - 1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{m_k} E_{N,R_{i\alpha}^{(k)}}^{(i)} E_{N,R_{j\alpha}^{(k)}}^{(j)} - \frac{1}{m_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{m_k} E_{N,R_{i\alpha}^{(k)}}^{(i)}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\sum_{\alpha=1}^{m} E_{N,R_{j\alpha}^{(k)}}^{(j)}\right]\right\};\quad i\leq j = 1,\ldots,p;\quad k=1,\ldots,c$$

$$S_{N,ij}^{*} = \frac{1}{N-1}\left\{\sum_{k=1}^{c}\sum_{\alpha=1}^{m_k} E_{N,R_{i\alpha}^{(k)}}^{(i)} E_{N,R_{j\alpha}^{(k)}}^{(j)} - N\,\bar{E}_N^{(i)}\bar{E}_N^{(j)}\right\}$$

donde

$$\bar{E}_N^{(i)} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{c}\sum_{\alpha=1}^{m_k} E_{N,R_{i\alpha}^{(k)}}^{(i)}$$

ademas se define

$$v_{ij,i'j'}(R_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{c} \sum_{\alpha=1}^{n_k} E_{N,R_{i\alpha}^{(k)}}^{(i)} E_{N,R_{j\alpha}^{(k)}}^{(j)} E_{N,R_{i'\alpha}^{(k)}}^{(i')} E_{N,R_{j'\alpha}^{(k)}}^{(j')} - S_{N,ij}^{*} S_{N,i'j'}^{*}$$

para toda i,i',j,j' = 1,..., p.

Y $V_N(R_N) = ((v_{rs}(R_N)))$ r,s = 1,..., p (p+1) /2

Entonces se considera la estadística

$$\mathcal{L}_N = \sum_{k=1}^{c} n_k \left[S_N^{(k)} - S_N^{*}\right] \left(V_N(R_N)\right)^{-1} \left[S_N^{(k)} - S_N^{*}\right]'$$

Y entonces se rechaza $H_0^{(1)}$ si $\mathcal{L}_N \geq \mathcal{L}_{N,\epsilon}$

donde $\mathcal{L}_{N,\epsilon}$ se escoge de tal forma que

$$P_r\{\mathcal{L}_N \geq \mathcal{L}_{N,\epsilon} \mid H_0^{(1)}\} = \epsilon \text{ , donde } 0 < \epsilon < 1$$

es el nivel de significancia de la prueba. En muestras "pequeñas" se puede evaluar $\mathcal{L}_{N,\epsilon}$ utilizando la distribución exacta (basada en las permutaciones) de $\mathcal{L}_N$ (ver para detalles Puri & Sen (1971)), mientras que para muestras "grandes",

Puri & Sen (1971) demuestran que $\mathcal{L}_{N,\epsilon}$ converge en probabilidad a $\chi^2_{\epsilon,h}$ donde $\chi^2_{\epsilon,r}$ es el punto 100 $(1-\epsilon)$% de una distribución χ^2 con r grados de libertad y h = (c-1) p (p+1)/2.

BIBLIOGRAFIA

Introducción:

Press (1972)

Normalidad:

Aitkin (1972)

Anderson (1966)

Andrews, Gnanadesikan & Warner (1971)
Andrews, Gnanadesikan & Warner (1972)
Andrews, Gnanadesikan & Warner (1973)

Box & Cox (1964)

D'Agostino (1971)

D'Agostino & Pearson (1973)

Downton (1966)

Gnanadesikan & Kettenring (1972)

Healy (1968)
Healy (1975)

Mardia (1970)

Mulkovitch & Afifi (1973)

Press (1972)

Roy (1953)

Sarhan & Greenberg (1956)

Shapiro & Wilk (1964)
Shapiro & Wilk (1965a)
Shapiro & Wilk (1965b)
Shapiro & Wilk (1965c)
Shapiro, Wilk & Cheu (1968)

Tukey (1962)

Weiss (1958)

Wilk & Gnanadesikan (1968)

Independencia:

Aitken (1935)

Anscombe (1961)
Anscombe & Tukey (1963)

Draper & Smith (1966)

Press (1972)

Rao (1971)

Searle (1971)

Heteroscedasticidad:

Anderson (1958)
Anderson (1963)

Andrews, Gnanadesikan & Warner (1971)

Bartlett (1937)
Bartlett (1947)

Bennett (1951)

Bishop (1939)

Box (1949)

Box & Cox (1964)

Curtis (1943)

Dolby (1963)

Federer (1951)

Korin (1969)
Korin (1972)

Krishnaiah (1968)

Kshirsagar, a.m. (1972)

Morrison (1967)

Plackett (1947)

Press (1967)

Press (1972)

Puri & Sen (1971)

Roy (1953)
Roy (1957)

Scheffé (1943)
Scheffé (1959)

Wilks (1946)

Capítulo IV Diferentes criterios para efectuar pruebas de hipótesis en MANOVA.

4.1. INTRODUCCION

En ANOVA, el criterio de prueba óptimo es generalmente una prueba F de la razón de varianzas muestrales (ver Press (1972), Scheffé (1959)), sin embargo en el caso multivariado se han propuesto criterios alternativos para probar la misma hipótesis y estos criterios no siempre conducen a las mismas decisiones en el caso p dimensional. (Si $p = 1$ conducen a la misma decisión).

Uno de estos criterios es el mencionado en la sección 2.3.3., el cual fué propuesto por Roy (1945), (1953). Algunos criterios son los propuestos por: Hotelling (1951) basado en Lawley (1938), Wilks (1932), Pillai (1955) basado en ideas de Bartlett (1939), Gnanadesikan et al., (1965) y Roy et al., (1971).

En las secciones siguientes se mencionan brevemente algunos de estos criterios y se utilizará la notación de la sección 2.3.3.

4.2. La Traza de Hotelling - Lawley.

Lawley (1938) consideró una estadística, que era una generalización de la prueba F, para probar significancia en MANOVA. La estadística To^2 fué introducida por Hotelling (1947), (1951) como una medida multivariada de dispersión relacionada con el problema de probar la precisión de miras para bombarderos.

La estadística T_o^2, ha recibido en la literatura especializada diferentes nombres como son la traza de Hotelling - Lawley (por ejem. Olson (1974), Smith et al., (1962)), T_o^2 de Hotelling ó T_o^2 generalizada de Hotelling (ejem. Pillai (1955), Pillai & Samson (1959), Constantine (1966), Tiku (1971), Troskie (1971), Mc Keon (1974)).

La estadística T_o^2 es la generalización en MANOVA de la estadística T^2 también propuesta por Hotelling (ver Press (1972), Anderson (1968), Kshirsagar (1972)) y de la cual solo se dará la definición: sea $\underline{u}$ un vector aleatorio con p componentes que se distribuye según una normal multivariada no singular, p variada con matriz de covarianzas Σ. Sea D una matríz simétrica definida positiva con distribución independiente Wishart con $f\,(> p)$ grados de libertad. Si la matríz en la distribución de D es Σ entonces a la variable $\underline{u}'\left(\frac{D}{f}\right)^{-1}\underline{u}$ se le conoce como la T^2 de Hotelling con f grados de libertad.

Es importante observar que T^2 se obtiene a partir de $\underline{u}'\,\Sigma\,\underline{u}$ reemplazando a Σ por su estimador insesgado $\frac{D}{f}$ que se distribuye independientemente de $\underline{u}$, en particular si p = 1 la T de Hotelling coincide con la τ de "Student" con f grados de libertad, es por esto que la T es la generalización en el análisis multivariado de la τ de "Student".

La T_o^2 se define (ver Press (1972), Morrison (1967)): a) T_o^2 = Traza (HE^{-1}); (notación sección 2.3.3.) Expresiones equivalentes a a) son:

b) $T_o^2 = c\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ donde λ_i son las $s\,(\leq p)$ raíces características (positivas) de $(H\,E^{-1})$ en el caso en que se pruebe independencia entre componentes.

c) $T_o^2 = C \sum_{i=1}^{s} \lambda_i$, donde $\lambda_i = \frac{\theta_i}{1-\theta_i}$ y θ_i es una raíz característica de R. Donde R se construye como se muestra a continuación (Troskie (1971)): sea $\underline{X}$ (p x 1) un vector aleatorio distribuido de acuerdo a una distribución normal multivariada $N(\mu, \Sigma)$. Sea $\underline{X}_{(1)},\ldots,\underline{X}_{(n)}$, $(N > p)$ una muestra aleatoria de N observaciones de $N(\mu,\Sigma)$ y sea $A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\underline{X}_{(\alpha)} - \bar{\underline{X}})(\underline{X}_{\alpha} - \bar{\underline{X}})'$, una matríz Wishart. Sea $\underline{X}$ particionado de la siguiente manera

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{X}^{(1)} \\ \underline{X}^{(2)} \end{bmatrix}$$

donde $\underline{X}^{(1)}(q \times 1), \underline{X}^{(2)}(r \times 1)$ con $q \leq r$, $q + r = p$.

Se particiona A de acuerdo a la partición de $\underline{X}$ y se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

donde $A_{11}\ (q \times q)$, $A_{12}\ (q \times r)$, $A_{22}\ (r \times r)$ y $A_{21}\ (r \times q)$

Entonces se define

$$R = A_{11}^{-\frac{1}{2}} A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} A_{11}^{-1/2} . \quad (R\ (q \times q)).$$

R fué definida por Khatri (1964) como una medida de la correlación entre los conjuntos $\underline{X}^{(1)}$ y $\underline{X}^{(2)}$. A R se le conoce como la matríz generalizada de correlación múltiple (ver Troskie (1971)).

Ademas $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_s < 1$; $s \leq p$ y C es una constante.

d) $To^2 = c$ Traza $R\,(I-R)^{-1}$; donde c es una constante y la matriz R (qxq) se definió en el inciso anterior.

La constante c mencionada anteriormente es una constante dependiente de los grados de libertad de la matríz de la que se obtuvieron las raíces características.

Pillai & Samson (1959) proponen la estadística $U^{(s)}$ que es la suma de los s ($\leq$ p) raíces características de (HE^{-1}) y por lo tanto es un múltiplo de To^2. En Pillai & Samson (1959) se dan expresiones para los momentos de $U^{(s)}$ para $s = 2$, 3, y 4 y hacen notar que se pueden obtener los momentos de $U^{(s)}$ a partir de los de $V^{(s)}$ (estadística propuesta por Pillai (1955)), la que se tratará mas adelante en este capítulo.

La distribución exacta de To^2 ha sido trabajada entre otros por Constantine (1966), Pillai & Jayachandran (1967), Pillai & Young (1971), Troskie (1971), a continuación se presentan brevemente estos resultados.

La distribución de To^2 es muy complicada en general, por ejemplo el caso p = 2, Press (1972) pag. 126 presenta su densidad en la que se involucra la función beta incompleta.

Si se utiliza la expresión b) de To^2 (la que se utiliza al probar independencia entre componentes) Troskie (1971) presenta los siguientes resultados:

Si los conjuntos $\underline{X}^{(1)}$ y $\underline{X}^{(2)}$ son independientes R tiene una distribución beta multivariada del tipo I y si $\underline{X}^{(1)}$ y $\underline{X}^{(2)}$ no son independientes la distribución de R es intratable (Troskie (1969)).

La función de distribución conjunta de las raíces características de R; $(\theta_1,\ldots,\theta_s)$ se conoce y esta dada por Constantine (1963), esta es (ver notación inciso c)):

$$h(\theta_1,\ldots,\theta_s) = \left(\pi^{\frac{1}{2}s^2} / \Gamma_s(\tfrac{1}{2}s)\right) \beta_1\left(R, \tfrac{1}{2}r, \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}r\right) \cdot$$

$$\cdot\ |(I-P)|^{\frac{1}{2}m}\, \alpha_s(R)\ {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m; \tfrac{1}{2}r; P, R\right);$$

donde

$$0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_s < 1$$

$$\beta_1\left(R, \tfrac{1}{2}r, \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}r\right) = \left(\Gamma_s\left(\tfrac{1}{2}m\right) / \left(\Gamma_s\left(\tfrac{1}{2}r\right)\Gamma_s\left(\tfrac{1}{2}(m-r)\right)\right)\right) \cdot$$

$$\cdot\ |R|^{\frac{1}{2}(r-s-1)}\ |I-R|^{\frac{1}{2}(m-r-s-1)};$$

$$m = N-1$$

$\alpha_s(R) = \prod_{i>j}(\theta_i - \theta_j)$, $P(s \times s)$ es una matríz con elementos $(\rho_1^2, \ldots, \rho_s^2)$ en la diagonal y ceros en otra parte. El coeficiente Gamma $\Gamma_s(a)$ y la función hipergeométrica Fi se definen en James (1964).

Las ρ_i^2's son las raíces características de la ecuación:

$$|\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}' - \rho^2\Sigma_{11}| = 0$$

donde $\Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22}\end{bmatrix}$ de acuerdo a la partición de $\underline{X}$.

La función de densidad de $U^{(s)}$ esta dada por (Troskie (1971)):

$$\Gamma_s(\tfrac{1}{2}m)/\Gamma_s(\tfrac{1}{2}(u-r))\Gamma(\tfrac{1}{2}rs)\,|I-P|^{\frac{1}{2}m}\,\cdot$$

$$\cdot\, U^{\frac{1}{2}rs-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum\sum_{d=0}^{k}\sum_{\partial}\left((-1)^{k+d}\,U^{k}(\tfrac{1}{2}m)_k\,\cdot\right.$$

$$\cdot\,(\tfrac{1}{2}m)_\partial\,(\tfrac{1}{2}r)_k\;a_{k,\partial}\;{}_k(I)\;C_\partial(P)/k!\,(\tfrac{1}{2}rs)_k(\tfrac{1}{2}r)_\partial C_\partial(I)$$

para $|U|<1$ y donde $a_{k,\partial}$ ha sido definido por Constantine (1966) como

$$C_k(I+A)/C_k(I) = \sum_{d=0}^{k}\sum_{\partial} a_{k,\partial}\,C_\partial(A)/C_\partial(I).$$

donde

$$\partial = (\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_s)\;;\;\partial_1 \geq \partial_2 \geq \cdots \geq \partial_s \geq 0.$$

Ck (B) es el polinomio por zonas (zonal polynomial) evaluado en la matriz B. (ver sección 2 de Constantine (1966)).

La distribución exacta de To^2 (esto es cuando la matriz de no centralidad de H es cero) ha sido obtenida por Hotelling (1951) en el caso p=2.

Davis (1968) ha demostrado que la densidad de To^2 satisface una ecuación diferencial lineal ordinaria, homogenea de orden p. La distribución no nula ha sido trabajada (como se mencionó anteriormente) por Constantine (1966), (1963), Troskie (1971) usando polinomios por zonas y funciones hipergeométricas con argumentos matriciales (sin embargo estos resultados sólo son válidos en el caso $|U^{(s)}| < 1$). Pillai & Jayachandran (1967) han obtenido la distribución nula de $U^{(2)}$ usando polinomios por zonas hasta de sexto grado. Pillai (1971) al hacer una revisión somera sobre el tema (de donde se obtuvieron en su mayoría los anteriores datos) menciona que no hay expresiones explícitas para la distribución exacta de $U^{(p)}$ (o de To^2) para $p > 2$, $0 < U^{(p)} < \infty$), excepto la obtenida para $U^{(3)}$ por medio de series por Pillai & Chang (1968) utilizando transformación de variables. En Pillai (1971) se presenta un método para encontrar U (p) por medio de la transformación inversa de Laplace y se obtienen distribuciones para p=3 y valores de $n(=(s-p-1)/2$, y s se define en la sección 2.3.3) = 0,1,2,3,4 y 5, p=4 y n = 0,1,2.

Se ha trabajado también con aproximaciones a la distribución de To^2: Tiku (1971) obtiene una aproximación por medio de la distribución χ^2, otra aproximación por medio de la χ^2 se presenta entre otros en Anderson (1958), Morrison (1967), Press (1972). (En Anderson (1958), capítulo 8 se presenta el desarrollo de esta aproximación). Cuando la hipótesis nula es cierta (ver sección 2.3.3) se tiene que NTo^2 tiende a distribuirse según una χ^2 con us grados de libertad según el tamaño de nuestra tienda a infinito (recuerde que s es el rango de la matriz C y u es el rango de M, ver sección 2.3.). Este resultado asintótico es sencillo de calcular y da buenos resultados. Otra aproximación asintótica es la obtenida por McKeon (1974) donde se aproxima a la distribución F de Snedecor de dos maneras diferentes, las dos fáciles de calcular. Pillai & Sampson (1959) y Hughes & Saw (1972) proponen otras aproximaciones usando la F de Snedecor.

Una aproximación a la distribución nula de $U^{(p)}$ se propuso en Pillai (1954), (1955) y se estudió en Pillai & Samson (1959). Ito (1956) obtuvo una expansión para la distribución no nula de To^2 la que después Ito (1960) extendió al caso no nulo. Otros que han estudiado las distribuciones asintóticas de To^2 son Sugiura & Fujikoshi (1969), Davis (1970a), Muirhead (1970), Siotani (1971), Lee (1971), Muirhead (1972) y Waal (1975).

Este último presenta los resultados de entre otros Sugiura & Fujikoshi (1969), Siotani (1971).

Una expansión asintótica hasta de orden C^{-1} ha sido obtenida por Siotani (1957) e Ito (1960), después se obtuvo esta expresión hasta orden C^{-2} por Siotani (1971) usando técnicas de perturbación (perturbation Techniques) y por Hayakawa (1970) usando sumas ponderadas de polinomios generalizados de Laguerre. (Detalles sobre estos polinomios en Waal (1975), Capítulo 1). Muirhead (1972) obtuvo una expresión con más términos basado en la técnicas utilizadas por Siotani y Hayakawa.

La región de rechazo correspondiente a este procedimiento de prueba, a un nivel α (predeterminado) de confianza, esto es la regla de decisión, es rechazar Ho si el valor calculado de $NTo^2 =$ N Traza (HE^{-1}) es mayor o igual a $\chi^2_\alpha(us)$, donde $\chi^2_\alpha(us)$ es el percentil de orden $1-\alpha$ de una χ^2 con us grados de libertad.

4.3. Criterio de Wilks, razón de verosimilitud (likelihood ratio criterion).

En el caso univariado (ver Kshirsagar (1972)) hay situaciones donde se construye, a partir de observaciones muestrales, una estadística H con distribución $\chi^2 \sigma^2$ con f_2 grados de libertad (esto es $\frac{H}{\sigma^2}$ se distribuye $\chi^2(f_2)$), y una estadística independiente v que tiene una distribución χ^2 no central con f_1, grados de libertad. A partir de estas se construye el criterio $F = \frac{f_2 V}{f_1 H}$ que se usa para probar la hipótesis de que el parámetro de no centralidad de v es cero.

La hipótesis nula se rechaza, a un nivel de significancia α, si el valor observado de F es mayor que el punto 100 α% de la distribución de F correspondiente. El parámetros σ^2, que es desconocido, no entra en la distribución de F y esto se logra por la forma en que F se define.

El criterio de Wilks (que también es conocido como criterio Λ de Wilks, razón de verosimilitud, criterio W) tiene el mismo papel en análisis multivariado que el que tiene F en análisis univariado. (En Kshirsagar (1964) se expone el papel de el criterio de Wilks en análisis multivariado).

En análisis multivariado es posible construir a partir de observaciones muestrales p-variadas dos matrices A y B tal que A se distribuya según una distribución Wishart con matriz de escala Σ, m-q grados de libertad (A (pxp)) a esto lo denotaremos W (Σ,p,n-q) (ver Kshirsaga (1972) y Press (1972)) y B (pxp), independiente de A y con una distribución W (Σ,p, q) si y sólo si una cierta hipótesis Ho es cierta, de otra forma B se distribuye como una Wishart no central. Σ es en la mayoría de los casos desconocida al igual que σ^2 en el caso univariado.

Como A y B son matrices no se puede pensar en su cociente como en el caso univariado, Wilks (1932) propone el criterio:

$$\Lambda = \frac{|A|}{|A+B|}$$

para probar Ho. a Λ se le conoce como el criterio de Wilks. Para poder utilizar este criterio es necesario conocer su distribución y puntos percentuales.

En ocasiones q, los grados de libertad en que B se basa, es menor que p (el número de variables) y entonces B no puede tener una densidad Wishart, en estos casos B tiene una distribución p seudo Wishart (ver Kshirsagar (1972), capítulo 3), esto es, B se distribuye igual que $\sum_{r=1}^{q} \underline{Z}_{(r)} \underline{Z}'_{(r)}$, donde $\underline{Z}$ (r) (r=1,2,...,q) son independientes e idénticamente distribuidos según una normal p variada con matriz de varianza-covarianza Σ. Las medias de $\underline{Z}$ (r) son cero si y sólo si Ho es cierta.

Los parámetros de la Λ de Wilks son:n (los grados de libertad de A+B), p (el orden de AyB) y q (los grados de libertad de B).

En análisis univariado u (la que se menciona al principio de esta sección) corresponde a lo que se conoce como la suma de cuadrados del error y v (referido anteriormente) es la suma de cuadrados de la hipótesis. En análisis multivariado A es llamada la matriz de sumas de cuadrados y productos debidos al error (y de acuerdo a la notación de la sección 2.2.3: la matriz A es la matriz E). B es la matriz de sumas de cuadrados y productos debidos a la hipótesis (de acuerdo a la notación de la sección (2.2.3) B=H). De ahora en adelante en esta sección utilizaremos para uniformidad del trabajo la notación de la sección 2.3.3.

La distribución de $\frac{|E|}{|E+H|}$ = determinante de E $(E+H)^{-1}$ se conoce como la distribución Λ (n,p,q) de Wilks. Cuando la hipótesis Ho es falsa la distribución de $\frac{|E|}{|E+H|}$ depende de E (Z (r)) y se conoce como la distribución no nula de la Λ de Wilks.

Las matrices E, H y sus grados de libertad pueden ser presentados en una tabla de análisis de varianza multivariada (ver Kshirsagar (1972), capítulo 8).

ORIGEN	GRADOS DE LIBERTAD	MATRIZ DE SUMAS DE CUADRADOS Y PRODUCTOS
Hipótesis Ho.	q	H
Error	n-q	E
Total	n	H+E

La Λ de Wilks es entonces el cociente entre el determinante de la matriz debida al error y la matriz total (hipótesis y error). El criterio hubiera sido $\frac{|H|}{|E|}$ si se hubiera generalizado directamente del análisis de varianza univariado, pero $\frac{|E|}{|E+H|}$ es más fácil de tratar y además esta relacionado con el criterio de razón de verosimilitud.

Wilks (1935) obtuvó una expresión para la distribución exacta de la de Wilks, ésta es muy restringida ya que sólo funciona cuando $p \leq 4$ y los grados de libertad tienen valores muy restringidos. Bartlett (1938) obtuvo una aproximación asintótica por medio de la distribución χ^2 con pq grados de libertad (esta aproximación se expresará con mas detalle en esta sección). Wald & Brooker (1941) obtuvieron una expresión asintótica, misma que Rao (1948) modificó para obtener una aproximación que tuviera una convergencia más rápida. Box (1949) dió aproximaciones asintóticas a funciones que incluyen la aproximación de Rao como un caso especial. Rao (1951) dió una segunda aproximación a la distribución de Λ, misma que se detalla más adelante. Rao (1952) obtiene otra expresión asintótica de la distribución de Λ, la cual se expresa por medio de funciones beta.

Schatzoff (1966) dió un método para obtener la distribución exacta de Λ pero no obtuvo expresamente ni la función de densidad, ni la de distribución. En Pillai & Gupta (1969) se obtienen en forma explícita, expresiones de las funciones de densidad y distribución para valores de $p > 6$, mediante un método mas sencillo que el de Schatzoff. Además Consul (1966a) obtuvo una expresión para la función de distribución de Λ en el caso en que $p > 4$, esta expresión esta en términos de series, mientras que, Pillai & Gupta (1969) obtuvieron la expresión con sumas finitas. Mathai & Rathie (1971) obtuvieron una expresión asintótica para la distribución nula de Λ, esta expresión es sencilla y precisa.

El trabajo de Pillai, Al-Ani & Jouris (1969) trata el caso no central o no nulo, en este trabajo se expresan las funciones de densidad en término de las funciones G de Meijers (1946) y en el caso p=2 las funciones de densidad y distribución se obtienen en forma explícita. Pillai & Al-Ani (1967) obtuvieron la densidad no nula en el caso en que p=2,3 y 4 utilizando transformados de Mellin (ver consul (1966a), (1967a), (1967C)) y Jouris (1968) demostró por inducción que la función G se puede expresar en forma diferente que la que se dió en Pillai & Al-Ani (1967) con lo que se originó el trabajo de Pillai, Al Ani y Jouris. Otros trabajos sobre la distribución no nula, son los de Posten & Bargmann (1964) y Gupta (1971) quien obtienen expresiones en forma explícita para la distribución no nula en el caso en que p= 2, 3, 4 y 5 y una expresión general para cualquier p. Además Gupta (1971) examina en forma numérica la aproximación sugerida por Posten & Bargmann (1964) y se encontró que en la mayoría de los casos es excelente. Expresiones asintóticas de la distribución no nula pueden encontrarse en Sugiura & Fujikoshi (1969) y Kshirsagar (1972).

A continuación se presentarán en forma concisa algunos de los resultados antes mencionados. Kshirsagar (1972) presenta los siguientes resultados:

1) La distribución de la Λ de Wilks con parámetros n,p,q ($\Lambda(n,p,q)$) en el caso en que $p < q$ es igual a la distribución de $\prod_{i=1}^{p} t_{ii}^2$, donde t_{11}^2, $t_{22}^2, \ldots$, t_{pp}^2 son variables aleatorias, independientes, donde

$$t_{ii}^2 \sim B\left((n-q+1-i)/2,\ q/2\right);\ (i=1,2,\ldots,p)$$

donde $B(\alpha,\beta)$ es una función de distribución beta con parámetros α y β.

Algunos autores (por ejemplo Consul (1966b), Pillai (1969)) han tratado de encontrar a partir del resultado anterior una expresión explícita para la función de densidad de $\Lambda(n,p,q)$.

Han considerado $\ln \Lambda = \sum_{1}^{p} \ln \tau_{ii}^2$ y estudiado la convolución de las variables independientes $\ln \tau_{ii}^2$. La función de densidad resultante ha sido complicada y de poco uso.

En el caso $p > q$ se tiene que la distribución de $\Lambda(n,p,q)$ es la distribución de $\prod_{i=1}^{q} \tau_{ii}^{*2}$, donde $\tau_{11}^{*2}, \ldots, \tau_{qq}^{*2}$ son variables aleatorias, independientes, donde

$$t_{ii}^{*2} \sim B\left((n - p+1 - i)/2,\ p/2\right) \; ; \; (i = 1, 2, \ldots, q).$$

A partir de los resultados anteriores se ve que la distribución de $\Lambda(n,p,q)$ cuando $p > q$ se puede obtener a partir de la de $\Lambda(n, p,q)$ cuando $p \lesseqgtr q$ simplemente intercambiando p por q.

Kshirsagar (1972) presenta además la siguiente expresión:

$$\text{a)}\quad E\left(\Lambda^h\right) = \prod_{i=1}^{p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}+h\right)} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{n-q+1-i}{2}+h\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1-i}{2}\right)} \right\}$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma valuada en α. Con esta expresión se pueden obtener los momentos de Λ. Como cada τ_{ii}^2 varia en el intervalo (0,1) (ver Kshirsagar (1972)) entonces Λ varia en el intervalo (0,1). En general, los momentos de una distribución no determinan la distribución en forma única. Sin embargo, bajo ciertas condiciones los momentos determinan una distribución en forma única. Una condición de estas es que el rango sea finito o acotado.

Kshirsagar (1972) demuestra que los momentos de Λ (n,p,q) no se al teran si se cambia p por q.

En la expresión a) si se pone $h = -m\sqrt{-1}\,\tau$ se obtiene.

$$\prod_{i=1}^{p}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{2}-m\sqrt{-1}\,\tau\right)}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n-q+1-i}{2}-m\sqrt{-1}\,\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1-i}{2}\right)}\right\}=$$

$$=E\left(\Lambda^{-m\sqrt{-1}\,\tau}\right)=E\left\{\exp\left[\sqrt{-1}\,\tau\,(-m\ln\Lambda)\right]\right\}$$

= la función característica de $-m\ln\Lambda$ con t en su argumento.

Este resultado es válido para todo $T \in R$, sólo si las funciones gamma involucradas existen. Si esto ocurre entonces se puede expander la función Gamma usando que

$$\log\Gamma(x+h)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x+h-\tfrac{1}{2}\right)\log x-x+$$
$$-\sum_{r=1}^{k}(-1)^{r}\frac{B_{r+1}(h)}{r(r+1)x^{r}}+R_{k+1}(x),$$

donde $R_{k+1}(x)=0\left(x^{-(k+1)}\right)$ y Br (h) son polinomíos Bernoulli, y 0 (y) es tal que $\lim_{y\to 0}\frac{o(y)}{y}=o$. Expandiendo la función característi ca de $-m\ln\Lambda$ hasta términos de orden $0\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y escogiendo la constante m adecuadamente, Bartlett (1938) derivó el siguiente resul tado, al que se conoce como la aproximación de Bartlett:

$-\left\{n-\frac{1}{2}(p+q+1)\right\}\ln\Lambda$ se distribuya aproximadamente como una X^2 con pq grados de libertad. Para aplicar este resultado a la prueba de hipótesis ρ = 0 se tiene:

Se rechaza la hipótesis Ho. si $(-m\ln\Lambda)$, donde $m = n - (p+q+1)/2$, es mayor que el valor resultante con el punto 100 α % de la distribu ción X^2 con pq grados de libertad.

La anterior aproximación es suficientemente buena para propósitos prácticos si u es "moderadamente grande". La aproximación de Bartlett, dice Kshirsagar (1972), es tan buena que difícilmente es una aproximación es un resultado exacto.

Box (1949) expandió la función característica hasta términos de orden n^{-6} y dió la siguiente extensión del resultado de Bartlett, cuando se necesita mayor aproximación:

$$\Pr(-m\, n\, \Lambda \leq u) = C_{pq}(u) + \frac{r_2}{m^2}\left\{C_{pq+4}(u) - C_{pq}(u)\right\} + \frac{1}{m^4}\left[r_4\left\{C_{pq+8}(u) - C_{pq}(u)\right\}\right] - r_2^2\left\{C_{pq+4}(u) - C_{pq}(u)\right\}\right] + O(n^{-6})$$

donde $C_f(u)$ es la función de distribución de una X^2 con f grados de libertad, esto es:

$$C_f(u) = \int_0^u \chi_f^2(v)\, dv$$

Y

$$r_2 = pq\,(p^2 + q^2 - 5)/48$$

$$r_4 = \frac{r_2^2}{2} + \frac{pq}{1920}\left[3p^4 + 3q^4 + 10p^2q^2 - 50(p^2+q^2) + (159)\right].$$

Rao (1951) dió una aproximación diferente, que consiste en que:

$$\frac{ms + 2\lambda}{2r} \quad \frac{1 - \Lambda^{1/s}}{\Lambda^{1/s}}$$

tiene una distribución F con 2r y $(ms+2\lambda)$ grados de libertad, donde $m = n - (p+q\pm1)/2$ y $r = pq/2$, $\lambda = -(pq-2)/4$, $s = (p^2q^2-4)^{1/2} \;/\; (p^2+q^2-5)^{1/2}$. Ito (1961) presenta con algunas modificaciones el resultado de Rao (1952).

Schatzoff (1966) y Pillai & Gupta (1969) han tabulado los puntos percentiles de la distribución Λ de Wilks. Schatzoff preparó un programa de computadora para obtener la convolución de las variables $\ln t_{ii}^2$, en forma recursiva, para obtener la distribución de Λ. Las tablas de Schatzoff y Pillai & Gupta se incluyen en Pearson (1971). Estas tablas no dan los percentiles de la distribución de la Λ de Wilks en forma directa. Estas tablas dan valores del factor de conversión $C_\alpha(p,q,m)$, como se indica con la notación, este factor depende de α el nivel de significancia, p, q y $M = m - p - + 1$. La siguiente fórmula se utiliza para encontrar el punto exacto $100\alpha\%$ de la distribución de $W = -m \ln \Lambda(n,p,q)$:

$W_\alpha(n,p,q) = C_\alpha(p,q,m) \cdot X^2(pq)(\alpha)$, donde $W_\alpha(n,p,q)$ es el punto $100\alpha\%$ de una distribución X^2 con (pq) grados de libertad. Las tablas de Pearson dan valores de $C_\alpha(p,q,m)$ para valores de $\alpha = 0.01$ y 0.05, aunque las tablas originales dan valores de α = 0.10, 0.05, 0.025, 0.01 y 0.005. Como $\Lambda(n,p,q)$ y $\Lambda(n,p,q)$ tienen la misma distribución entonces $C_\alpha(p,q,\ ) = C_\alpha(q,p,\ )$.

La hipótesis nula Ho. se rechaza al nivel de significancia α si el valor observado de $W = -m \ln \Lambda(n,p,q)$ es mayor que $W_\alpha(n,p,q)$, donde $m = n - (p+q+1)/2$. El factor de conversión $C_\alpha(p,q,m)$ es siempre mayor que uno. En consecuencia si $W < \chi^2_{(pq)}(\alpha)$ entonces $W < C_\alpha(p,q,m)\, X^2(pq)(\alpha) = W_\alpha(n,p,q)$, y Ho no se rechazará, en este caso no es necesario referirse a las tablas C y la aproximación de Bartlett basada en $X^2(pq)(\alpha)$ es suficiente. Si $W > X^2(pq)(\alpha)$ puede ser que $W < W_\alpha(n,p,q)$, o sea que, la prueba de Bartlett puede rechazar Ho y de acuerdo a la prueba exacta no hay evidencia contra Ho. Entonces para mayor precisión debe utilizarse $W_\alpha(n,p,q)$ siempre que $W > X^2(pq)(\alpha)$.

4.4 Criterio de Roy.

Al criterio que utiliza como estadística de prueba la raíz característica de mayor tamaño (la máxima) se le conoce como el criterio de Roy. Se le da este nombre en base a el principio heurístico para construcción de funciones de prueba que en 1953 Roy presentó. Roy (1953), (1954), (1957) propone el criterio de la raíz máxima y el de la raíz mínima, siendo el primero el mas conocido y sobre el que mas se ha trabajado.

Este trabajo presenta principalmente resultados sobre la raíz máxima. En la sección 2.3.3 ya se ha tratado someramente este criterio. En la sección 2.3.3 se dió la forma de la región crítica utilizando esta estadística y para determinar dicha región se utilizarón las tablas de Heck (1960), en las que se tabularón los porcentiles de la distribución de la raíz característica mayor o máxima. A continuación se presentarán en forma breve los trabajos sobre la distribución de las raíces características.

Se denota a la raíz máxima por: cs (ver Ito (1961)), θs (ver Pillai (1955)), ℓ_s (ver Khatri & Pillai (1968)), λ_1 (ver Sugiyama (1967), Chmax (HE-1) (ver Smith Etal. (1962)).

Pillai (1955), (1965a), (1965b), (1967a), (1967b), (1964), Pillai & Bantegui (1959), Pillai & Mijares (1959), James (1960) presentan la distribución conjunta de las $s \leq p$ raices características no cero θ_i donde $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_s < 1$. La forma de esta distribución conjunta se obtuvó en forma simultánea por Roy (1939), Hsu (1939), Fisher (1939), Girshick (1939). La distribución tiene la forma:

$$p(\theta_1,\ldots,\theta_s) = C(s,m,n)\prod_{i=1}^{s}\theta_i^{m}(1-\theta_i)^{n}\prod_{i>j}(\theta_i-\theta_j),$$

$$0 < \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_s < 1$$

donde

$$C(s,m,n) = \frac{\pi^{s/2}\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(2m+2n+s+i+2)\right\}}{\prod_{i=1}^{s}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(2m+i+1)\right\}\Gamma\left\{\frac{1}{2}(2n+i+1)\right\}\Gamma\left(\frac{1}{2}i\right)}$$

donde m y n se interpretan en forma di erente dependiendo de la hipó tesis que se prueba por ejemplo (ver Pillai (1955)):

i) En el caso que se pruebe la igualdad de matrices de dispersión de dos poblaciones normales p - variadas (n_1 y n_2 son los tamaños de muestra de cada población) se tiene que:

$$m = \frac{1}{2}(n_1 - p - 2) \text{ y } n = \frac{1}{2}(n_2 - p - 2)$$

ii) En el caso de probar la igualdad de vectores de medias p - dimensionales en ℓ poblaciones normales p-variadas:

$$m = \frac{1}{2}(|\ell-p-1|-1), \quad n = \frac{1}{2}(N-\ell-p-1)$$

donde N es la suma de los ℓ tamaños de muestra.

iii) En el caso de probar independencia entre un conjunto con p-com ponentes y un conjunto con q componentes en una población normal (p+q) - variada, con $p < q$. (K es el tamaño de muestra):

$$m = \frac{1}{2}(q-p-1) \text{ y } n = \frac{1}{2}(K-p-q-2)$$

iv) En el caso de probar hipótesis de la forma Ho: $C \xi M = 0$ en el modelo general para MANOVA, entonces (ver sección 2.3.3 y Morrison (1967)):

$$m = \frac{|s-u|-1}{2} \quad \text{y} \quad n = \frac{m-r-u-1}{2}$$

Bantegui (1958) obtuvo la distribución de la máxima raíz característica, utilizando la distribución conjunta anterior, en el caso en que s = 6, misma que presentan Pillai & Bantegui (1959). En este último trabajo además tabulan percentiles para esta distribución.

James (1960) basandose en la distribución conjunta presentada anteriormente y utilizando polinomios por zonas y teoría de representación de un grupo lineal (representation Theory of the linear group) obtiene una expresión generalizada de la distribución conjunta.

Expresiones exactas de la función de distribución de Cs para s=2,3 y 4 estan dadas en Roy (1957), pag. 55, junto con indicaciones hacerca de aproximaciones para valores grandes de s.

En 1964, Pillai basado en la distribución conjunta de las s raices características (expresión anterior) presenta la función de densidad conjunta de la mayor de s raices características en la siguiente forma, en la que se utilizan determinantes para expresarla en forma breve:

$$P_r(\theta_s < x) = c(s,m,n) \begin{vmatrix} \int_0^x \theta_s^{m+s-1}(1-\theta_s)^n d\theta_s & \cdots & \int_0^x \theta_s^{m}(1-\theta_s)^n d\theta_s \\ \vdots & & \\ \int_0^{\theta_s} \theta_1^{m+s-1}(1-\theta_1)^n d\theta_1 & \cdots & \int_0^{\theta_s} \theta_1^{m}(1-\theta_1)^n d\theta_1 \end{vmatrix}$$

donde c (s,m,n) se definió anteriormente.

Tratando de resolver la dificultad que representa integrar cada una de las s! integrales múltiples en la forma anterior, Pillai (1954), (1956b) sugirió una fórmula de reducción y dió expresiones exactas para la función de distribución de Cs en términos de funciones beta incompletas o funciones de funciones beta incompletas, para valores de s (enteros) de 2 a 10.

En Pillai (1964) se obtiene una aproximación a la distribución de la máxima raíz característica θ_s en el caso en que s=7, y además se presentan tablas para los percentiles de esta distribución. A continuación se presenta esta distribución para dar una idea de la simplificación efectuada.

$$P_r(\theta_7 \leq x) = k\{-a_0 I_0(m+6) + a_1 I_0(m+5) + -a_2 I_0(m+4) + a_3 I_0(m+3) - a_4 I_0(m+2) + b_0 I(m) + + b_1 I(m+1) - b_2 I(m+2) + b_3 I(m+3)\}$$

donde

$$k = \frac{\Gamma(m+n+5)}{45\,\Gamma(m+4)\,\Gamma(n+4)}$$

$$a_0 = 3(2m+2n+9)(2m+2n+11)(2m+2n+13)(m+n+5)(m+n+6)$$

$$a_1 = 15(2m+2n+9)(2m+2n+11)(2m+2n+13)(m+3)(m+n+5)$$

$$a_2 = 15(2m+2n+9)(2m+2n+11)(m+3)(4m^2+4mn+34m+ +11n+61)$$

$$a_3 = \frac{A_1 B_1}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}$$

$$A_1 = (m+2)(m+3)(m+4)(2m+7)(2m+2n+7)(2m+2n+9)(2m+2n+11)$$

$$B_1 = (m+n)\left[4m^2(m+n)+60m^2+2mn+30m+105\right]+269m^2-mn+225(m+1)$$

$$a_4 = \{3(2m+2n+5)(2m+2n+7)(2m+2n+9)(m+2)(m+3)^2(m+4)(2m+5)\cdot$$

$$\cdot(2m+7)\}(2(2m+3)(2n+5))^{-1}$$

$$b_0 = 3(m+1)(m+2)(m+3)(2m+3)(2m+5)(2m+7)$$

$$b_1 = \frac{A_2 B_2}{2(2m+3)(2n+5)}$$

$$A_2 = 3(2m+2n+9)(m+1)(m+2)(m+3)(2m+5)(2m+7)$$

$$B_2 = 4m^4+(8n+56)m^3+(4n^2+88n+299)m^2+(32n^2+336n+736)m+$$

$$+24n^2+288n+570.$$

$$b_2 = \frac{A_3 B_3}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}$$

$$A_3 = (2m+2n+9)(m+n+5)(2m+2n+11)(m+1)(m+2)(m+3)(2m+3)\cdot$$

$$\cdot(2m+7)$$

$$B_3 = 4m^4+(8n+72)m^3+(4n^2+94n+461)m^2+(22n^2+305n+1173)m+$$

$$+60n^2+390n+1080.$$

$$b_3 = \frac{A_4\ B_4}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}$$

$$A_4 = (2m+2n+9)(2m+2n+11)^2(2m+2n+13)(m+n+5)(m+n+6)$$

$$B_4 = (m+1)(m+2)^2(m+3)(2m+3)(2m+5)$$

$$I_0(K) = x^k(1-x)^{n+1}$$

$$y$$

$$\int_0^x \theta^i(1-\theta)^n\,d\theta = I(i).$$

Es importante notar que esta forma simplificada sólo es válida para s=7 y no es de cálculo fácil.

En Pillai (1965a) se obtiene una expresión general que aproxima la función de distribución de Cs (una expresión para valores pares de s y otra para valores impares). Sugiyama & Fukytami (1966) presentan los elementos de probabililidad de λ_s , la menor raíz característica y λ_1 , la mayor raíz característica. Las funciones de distribución de λ_1 , y λ_s estan expresadas en términos de series de funciones beta incomplet s y no es fácil calcularlas. Sugiyama (1967) reproduce las funciones de distribución de λ_1 y λ_s, y además, presenta los siguientes resultados:

1) Si U_1 y U_2 son dos matrices independientes, U_1 se distribuye W (s, n_1, Σ) y U se distribuye W $(s, n2, \Sigma)$, donde $n_1, n_2 \geq s$. Entonces el elemento de probabilidad de la raíz característica mayor λ_1 y de la menor λ_s de la ecuación.

$$|U_1 - \lambda (U_1 + U_2)| = 0$$

estan dadas respectivamente por:

$$\{\Gamma_s((s+1)/2)\Gamma_s((n_1+n_2)/2)/\Gamma_s(n_2/2)\Gamma_s((n_1+s+1)/2)\}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha}\{(sn_1/2+k)((-n_2+s+1)/2)_\alpha (n_1/2)_\alpha\cdot$$
$$\cdot((n_1+p+1)/2)_\alpha^{-1}\} C_\alpha(I_s)\, K!^{-1}\lambda_1^{sn_1/2+k-1}\, d\lambda_1$$

y

$$\{\Gamma_s((s+1)/2)\Gamma_s((n_1+n_2)/2)/\Gamma_s(n_1/2)\Gamma_s((n_2+s+1)/2)$$

$$\cdot \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \{ (s m_2/2 + k)((-m_2+s+1)/2)_\alpha (m_2/2)_\alpha \cdot$$

$$\cdot ((m_2+s+1)/2)_\alpha^{-1} \} C_k(I_s) K!^{-1} (1-\lambda_s)^{s m_2/2+k-1} d\lambda_s$$

donde Is es la matriz con unos en sus componentes y de dimensión (pxp), $C_\alpha(\text{Is}) = 2^K (s/2)_\alpha$, α es la partición ($k_1, \ldots, Ks$) $K_1 \geq \ldots \geq Ks \geq 0$, del entero K en no mas de s partes,

$$(a)_\alpha = \prod_{i=1}^{s} (a - \tfrac{1}{2}(i-1))_{k_i} , \quad \alpha = (k_1, \ldots, k_s)$$

y

$$(j)_{k_i} = j(j+1) \cdots (j+k_i-1) , \quad (\alpha_0)_0 = 1$$

Notar que H cumple con las condiciones de U_1 y E con las de U_2.

Sugiyama llama a la matriz $(U_1+U_2)^{-1/2} \; U_1 \; (U_1+U_2)^{-1/2}$ la matriz generalizada B.

Otros resultados de Sugiyama (1967):

2) La función de distribución de la raíz máxima λ_1 y la de la raíz mínima λ_s de la estadística generalizada B se dan como sigue:

$$P_r(\lambda_1 < x) = \{ \Gamma_s((s+1)/2) \Gamma_s((m_1+m_2)/2) / \Gamma_s(m_2/2) \cdot$$

$$\cdot \Gamma_s((m_1+s+1)/2) \} \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \{ ((-m_2+s+1)/2)_\alpha (m_1/2)_\alpha$$

$$\cdot ((m_1+s+1)/2)_\alpha^{-1} \} C_\alpha(I_s) \; K!^{-1} x^{(s m_1/2)+k}$$

Y

$$P_r(\lambda_s < x) = 1 - P_r(\lambda_s > x) =$$

$$= 1 - \{ \Gamma_s((s+1)/2)\, \Gamma_s((m_1+m_2)/2)\, \Gamma_s(m_1/2)\, \cdot$$

$$\Gamma_s((m_2+s+1)/2))^{-1} \} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \{ ((-m_1+s+1)/2)_{\alpha} (m_2/2)_{\alpha} \cdot$$

$$\cdot\, ((m_2+s+1)/2)_{\alpha}^{-1} \} C_{\alpha}(I_s)\, k!^{-1}\, (1-x)^{(s m_2/2)+k}$$

3) El h- ésimo momento de las raices características λ_1 y λ_s son:

$$E(\lambda_1{}^h) = \{ \Gamma_s((s+1)/2)\, \Gamma_s((m_1+m_2)/2)\, \Gamma_s(m_2/2)\, \cdot$$

$$\cdot\, \Gamma_s((m_1+s+1)/2))^{-1} \} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \{ ((-m_2+s+1)/2)_{\alpha} (m_1/2)_{\alpha} \cdot$$

$$\cdot\, ((m_1+s+1)/2)_{\alpha}^{-1} \} C_{\alpha}(I_s)\, k!^{-1} (s m_1/2 + k)/(s m_1/2 + k + h)$$

$$E((1-\lambda_s)^h) = \{ \Gamma_s((s+1)/2)\, \Gamma_s((m_1+m_2)/2)\, \Gamma_s(m_1/2)\, \cdot$$

$$\cdot\, \Gamma_s((m_2+s+1)/2))^{-1} \} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \{ ((-m_1+s+1)/2)_{\alpha} (m_2/2)_{\alpha} \cdot$$

$$\cdot\, ((m_2+s+1)/2)_{\alpha}^{-1} \} C_{\alpha}(I_s)\, k!^{-1} ((s m_2/2)+k)/(s m_2/2+k+$$

K hatri & Pillai (1968) obtuvieron la función de distribución de la máxima raíz característica la cual se obtiene por medio de series y tabularon las constantes involucradas en estas series.

Sugiyama (1970) encuentra las funciones de distribución conjunta y distribución de la razón de las raices características máxima (λ_1) y mínima (λ_s), cuando la matriz de covarianzas poblacionales es escalar, esto es, de la forma $\Sigma = \sigma^2 I$.

Davis (1972) demuestra que las distribuciones marginales de las raices características forman un sistema completo de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, lineales, ordinarias y que las series de potencias de Sugiyama & Fukutomi (1966) son soluciones en las singularidades regulares 0 y 1.

Foster & Rees (1957) prepararon tablas de los percentiles de la distribución de θ_s bajo Ho. Ellos tabularon los percentiles 80, 85, 90 y 99% de la distribución de la raíz característica máxima. Foster (1957) (1958) extendió las tablas de Foster & Rees para valores de s = 3 y 4. Pillai (1954), (1956a), (1957), (1960) tabuló los percentiles 95 y 99% de la distribución de θ_s para s=2 y s=5 usando su fórmula de aproximación. Sen (1957) calculó los percentiles 95 y 99% usando s=3, Ventura (1957) para s=4, ambos siguiendo el método seguido por Pillai. Pillai & Bantegui (1959) obtuvieron los percentiles 95 y 99% para s=6. Los percentiles anteriores se obtuvieron para valores de m iguales a 0, 1,2,3,4, y n variando entre 5 a 1000. Jacildo (1959) extendió las tablas para s=2 y 3 y valores de m= 5, 7, 10 y 15, en el mismo rango de valores de n (5 a 1000).

Pillai (1960) publicó todos los percentiles 95 y 99% para s= 2,3,4, 5, y 6. Pillai (1964) obtuvo los percentiles para s=7 y valores de m=0, 1,...5, 7,10 y valores de n entre 5 y 1000. Heck (1960) obtuvo los percentiles 95,97.5 y 99% para s=2,3,4,5, $m = -\frac{1}{2}$ 0, 1, 2, ..., 10 y n ≥ 5.

Pillai (1965a) obtuvo los percentiles 95 y 99% para s=8,9 y 10, y para valores de m = 0,1,...,5, 7, 10 y 15 y n entre 5 y 1000. Pillai (1967a) obtiene los percentiles 95 y 99% para s= 14, 16, 18 y 20 y valores de m = 0, 1, ..., 5, 7, 10, 15 y n = 5, 10, 15,.., 30, 40 60, 80, 100, 130, 160, 200, 300, 500 y 1000. En Pillai (1967a) menciona además que ya ha encontrado los valores de los percentiles para valores de s de 11 a 20 aunque no ha publicado este resultado. Además menciona que aunque los percentiles 95 y 99% se han obtenido para toda s entre 2 y 20 (como se ha indicado anteriormente) percentiles para valores (enteros) intermedios de s pueden obtenerse de las tablas de Pillai (apéndice B) por medio de interpolación lineal con precisión de una unidad en el tercer dígito significativo.

Las Tablas de Foster & Rees (1957), Foster (1957), (1958) y Pillai (1960) estan publicadas en Pearson (1971).

Las distribuciones nula y no nula han sido investigadas tambien por Hayakowa (1967), Waal (1969), Pillai & Sugiyama (1969), Fukutomi (1967) y Krishnaiah & Chong (1970), Waal (1975).

La distribución de raices características de matrices aleatorias ha recibido atención de físicos ver Rao (1972), Wigner (1967), Mehta (1967), Porter (1965). La matriz que han considerado no es del tipo Wishart, pero su elemento (i,j) - ésimo es una variable normal con media cero y varianza igual a 2 si i=j e igual a 1 si $i \neq j$.

Con la raiz característica mayor es posible construir intervalos sobre funciones paramétricas que sean medidas del alejamiento de la hipótesis nula. Sobre estos intervalos ver Roy & Gnanadesikan (1959b) y Smith et al., (1962).

4.5 Criterio de Pillai - Bartlett.

Pillai propone en (1953) y (1954) el siguiente criterio (basado en ideas de Bartlett (1939)):

v = traza de $H\,(H+E)^{-1}$

donde H y E se definen en la sección 2.3.3 y se han utilizado a lo largo de este capítulo.

En Pillai (1955), (1968), Khatri & Pillai (1965), (1968), Pillai & Jayachandran (1967), Murhead (1970) se denota a la estadística V por medio de $V^{(s)}$, donde s es el número de raíces características no cero de $H\,(H+E)^{-1}$. Mientras que en Lee (1971), Olson (1974) se utiliza V. En Roy et al., (1971) se utiliza D para denotar esta estadística y en Waal (1975) se utiliza W.

Utilizando la notación de la sección anterior

$$V^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \theta_i \, .$$

Pillai (1953), (1954) demostró que la distribución de $V^{(s)}$ puede aproximarse por medio de una beta Tipo I dada por

$$p\,(V^{(s)}) = C'\left\{V^{(s)}\right\}^{s(2m+s+1)/2\,-\,1} \left(1 - V^{(s)}/s\right)^{s(2m+s+1)}$$

para $0 < V^{(s)} < 1$

donde $$C' = \frac{1}{\beta\left\{\frac{1}{2}\,s(2n+s+1),\ \frac{1}{2}\,s(2m+s+1)\right\}}$$

m y n toman diferentes valores dependiendo la hipótesis que se pruebe (ver sección anterior y Pillai (1955)).

En Pillai (1954) se demostró que la aproximación anterior a la distribución de $V^{(s)}$ es satisfactoria para usos prácticos si $m + n \geq 30$ y $s=2$ o cuando s aumenta por una unidad entonces $m + n$ aumenta en 10 unidades (ver tambien Pillai (1955)).

Pillai (1954), (1956 b) obtuvo los cuatro primeros momentos de la distribución de $V^{(s)}$ en el caso s=2, 3 y 4. Pillai (1957) tabuló aproximaciones a los percentiles de la distribución de $V^{(s)}$ para varios valores de los parámetros m y n. En Pillai & Mijares (1957) utilizando la expresión obtenidad por Roy-Hsu-Fisher-Girshick en (1939) de la distribución conjunta de las raíces características (ver sección anterior) se obtiene la función generatriz de momentos de $V^{(s)}$. Esta función generatriz ha sido trabajada anteriormente por Pillai (1954), (1956b) y por James (1964), a continuación se presenta el resultado de Pillai & Mijares:

$$E\left(e^{TV^{(s)}}\right) = C(s,m,n) \begin{vmatrix} \int_0^1 \theta_s^{m+s-1}(1-\theta_s)^n e^{T\theta_s} d\theta_s & \cdots & \int_0^1 \theta_s^{m}(1-\theta_s)^n e^{T\theta_s} d\theta_s \\ \vdots & & \\ \int_0^{\theta_2} \theta_1^{m+s-1}(1-\theta_1)^n e^{T\theta_1} d\theta_1 & \cdots & \int_0^{\theta_2} \theta_1^{m}(1-\theta_1)^n e^{T\theta_1} d\theta_1 \end{vmatrix}$$

donde C(s,m,n) se definió en la sección anterior.

Diferenciando sucesivamente la función generatriz anterior -(ver Aitken (1956), Mijares (1958)) con respecto a t y haciendo t=0 después de cada diferenciación y denotando al seudo determinante (ver Pillai & Mijares (1959)) en la expresión anterior por:

$$U(m+s-1, m+s-2, \ldots, m; n; T)$$

Entonces:

$$E\left(V^{(s)}\right) = C(s,m,n)\, U(s, s-2, s-3, \ldots, 1, 0)$$

$$E\left[\left(V^{(s)}\right)^2\right] = c(s,m,n)\left[U(s+1, s+2, s-3, \ldots, 1, 0) + \right.$$

$$\left. + \; U(s, s-1, s-3, \ldots, 1, 0)\right]$$

$$E\left[\left(V^{(s)}\right)^3\right] = c(s,m,n)\left[U(s+2, s-2, s-3, \ldots, 1, 0) + \right.$$

$$\left. + \; 2\,U(s+1, s-1, s-3, \ldots, 1, 0) + U(s, s-1, s-2, s-4, \ldots, 1, 0)\right]$$

$$E\left[\left(V^{(s)}\right)^4\right] = c(s,m,n)\left[U(s+3, s-2, s-3, \ldots, 1, 0) + \right.$$

$$+ \; 3\,U(s+2, s-1, s-3, \ldots, 1, 0) + 3\,U(s+1, s-1, s-2, s-4, \ldots, 1, 0) +$$

$$\left. + \; U(s, s-1, s-2, s-3, s-5, \ldots, 1, 0)\right].$$

Pillai & Mijares (1959) hacen notar que este método puede extenderse a cualquier número de diferenciaciones.

En Khatri & Pillai (1965) se obtienen los dos primeros momentos de la distribución no-central, de $V^{(s)}$ en el caso en que q (los grados de libertad de E, ver sección 4.3) sea mayor o igual a p (las observaciones son p-variadas) y da una forma para obtener esos momentos en el caso en que $q < p$.

Pillai & Jayachandran (1967) obtienen la distribución exacta no central de $V^{(s)}$ en los casos en que s=2 y se pruebe la hipótesis ii) ó la hipótesis iii) de la sección 4.4.

Khatri & Pillai (1967), (1968), obtuvieron los momentos de la distribución no central de $V^{(s)}$, para cualquier s, en el caso lineal, esto es, cuando hay sólo una raíz poblacional diferente de cero y en el caso de estar en un plano (planar case), esto es, el caso de sólo haya dos raices poblacionales diferentes de cero. Sólo dos momentos (los primeros) se considerarán en el caso "planar", mientras que en el caso lineal se obtuvieron los primero cuatro.

En Pillai (1968) se considera la función generatriz de momentos de $V^{(s)}$ en el caso no central y se obtienen resultados que facilitan la obtención de los momentos de $V^{(s)}$.

Muirhead (1970) obtiene una expansión asintótica de la distribución de la V de Pillai, la forma de esta expresión es muy complicada.

En Pillai & Jayachandran (1970) se propone un método para obtener la función de distribución exacta de $V^{(s)}$. El método extiende los resultados de Nanda (1950) quien derivó la función de distribución en los casos m = o, s = 2. En Pillai & Jayachandran (1970) se propone el método para obtener la función de distribución cuando s = 3, m sea menor o igual que 3 (m es entero) y s = 4 con m = 0 y 1. Expresiones explícitas de los casos anteriores pueden encontrarse en Pillai (1972c).

Troskie (1971) en el caso de probar independencia entre componentes de un vector (para notación ver sección 4.2, inciso C), expresa a $V^{(s)}$ de la siguiente forma

$$V^{(s)} = \text{Traza } R$$

obtiene la función de densidad central de $V^{(s)}$ para valores de $V^{(s)}$ entre 0 y 1, en términos de funciones hipergeométricas con argumentos matriciales (esto es, Troskie se basa en resultados de James (1964) y Constantine (1963).

En Lee (1971) se deriva una expresión asintótica para la función de distribución de $V^{(s)}$ en el caso general y se obtiene una aproximación asintótica de los percentiles de la distribución de V en el caso nulo.

Davis (1968), (1970b), (1972) ha demostrado que la función de distribución nula de la V de Pillai satisface cierto sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarios de orden p.

Waal (1975) da expresiones para la función de distribución central de $V^{(s)}$ en la pg. 65 y de la función de distribución asintótica central en las páginas 70-72. Además presenta el resultado de Pillai (1968) sobre la función característica de $V^{(s)}$ en el caso de probar independencia (pág. 85-87).

La región crítica de esta prueba es de la forma

$$C : V \geq \lambda$$

donde λ se fija de acuerdo a

$$Pr\ (C \mid Ho) = \alpha \quad .$$

4.6 Otros criterios de Prueba.

Como se habrá notado los criterios de prueba anteriores se basan en raices características de funciones de las matrices H y E. Hay otros criterios no tan "populares", estos son a) $W^{(s)}$ b) $H^{(s)}$, c) $R^{(s)}$; d) $T^{(s)}$, e) U, f) S. Los cuatro primeros propuestos y estudiados en Pillai (1955) y estudiados mas tarde en Troskie (1971). Gnanadesikan etal., (1964) y Roy etal., (1971) estudian el criterio Gnanadesikan (U). Olson (1973), (1974) trata la estadística S, la cual introduce como un análogo a la estadística U de Gnanadesikan. A esta última estadística se le llamará en este trabajo la estadística de Olson.

4.6.1 Las estadísticas $W^{(s)}$, $H^{(s)}$, $R^{(s)}$, $T^{(s)}$ de Pillai y Q de Troskie.

Pillai (1955) dice que el criterio W de Wilks es la potencia s-ésima de una media geométrica, mientras que To^2 y $V^{(s)}$ son s veces las medias aritméticas y entonces sugiere las siguientes estadísticas basadas en la media harmonica (ver notación en la sección 4.4):

$$H^{(s)} = s \left\{ \sum_{i=1}^{s} (1-\theta_i)^{-1} \right\}^{-1}$$

$$R^{(s)} = s\left\{ s\sum_{i=1}^{s}\theta_i^{-1}\right\}^{-1}$$

$$T^{(s)} = s\left\{ \sum_{i=1}^{s}\lambda_i^{-1}\right\}^{-1}; \quad \lambda_i = \frac{\theta_i}{1-\theta_i} \quad (i=1,\ldots,s)$$

Pillai (1955) como se mencionó anteriormente en la sección 4.5, presenta una aproximación a la función de distribución de $V^{(s)}$ por medio de funciones de distribución Beta Tipo I.

La estadística $W^{(s)}$ se define por medio de la estadística $V^{(s)}$ de Pillai (sección 4.5) de la manera siguiente:

$$W^{(s)} = 1 - \frac{V^{(s)}}{s}$$

entonces Pillai (1955) obtiene una aproximación a la función de distribución de $W^{(s)}$ basándose en la de $V^{(s)}$. La función de distribución aproximada de $W^{(s)}$ esta dada por:

$$p\,(W^{(s)}) = c'\{w^{(s)}\}^{a-1}\,(1-w^{(s)})^{b-1}\,;\; 0 < w^{(s)} < 1$$

donde

$$c' = \left\{ s^{s(2m+s+1)/2}\,\beta\left\{\tfrac{1}{2}s(2m+s+1), \tfrac{1}{2}s(2n+s+1)\right\}\right\}^{-1}$$

$$a = s(2m+s+1)/2$$

$$b = s(2n+s+1)/2$$

La m y n se varían de acuerdo a la hipótesis que se pruebe, ver sección 4.4 . Como esta aproximación se basa en la aproximación para la distribución de $V^{(s)}$, la aproximación de $W^{(s)}$

es satisfactoria en los mismos casos que la distribución de $V^{(s)}$.

La región de rechazo con esta estadística es de la forma

$$C: \; W^{(s)} \leq \lambda$$

donde λ se fija de acuerdo a

$$\Pr(C \mid Ho) = \alpha .$$

Considerando la estadística $U^{(s)} = To^2/c$ (ver sección 4.2). La distribución aproximada de $U^{(s)}$ se ha demostrado (Pillai (1954), Pillai (1954a)) que es Beta del tipo II, esto es de la forma

$$f(U^{(s)}) = k\{U^{(s)}\}^{s(2m+s+1)/2-1}\left[1+U^{(s)}/s\right]^{-(s(2m+2n+s+1)/2+1)}$$

para $0 < U^{(s)} < \infty$,

donde

$$K = \{s^{s(2m+s+1)/2}\,\beta\,\{\tfrac{1}{2}s(2m+s+1,\, 4n+1\}\}^{-1}$$

En Pillai (1955) se demuestra que

$$U^{(\;)} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\theta_i}{(1-\theta_i)} = \sum_{i=1}^{s}(1-\theta_i)^{-1} - s$$

y entonces

$$H^{(s)} = \left(1 + \frac{U^{(s)}}{s}\right)^{-1}$$

usando estra transformación y la función de distribución aproximada de $U^{(s)}$ se tiene que:

$$p(H^{(s)}) = \{H^{(s)}\}^{sm} (1-H^{(s)})^{s(2m+s+1)/2-1} \left[\beta\{sm+1, \tfrac{1}{2}s(2m+s+1)\}\right]^{-1}$$

para valores de $H^{(s)}$ entre cero y uno.

Pillai (1955) hace notar que para que la aproximación anterior sea válida m+s debe cumplir las condiciones establecidas en 4.5 para m+n (m y n se definen y tomar valores como se especifica en la sección 4.5).

Si se hace la transformación $\theta_i' = (1-\theta_i)$; $(i = 1, \ldots, s)$, la función de distribución de las θ_i''s que resulte de la forma dada por Roy-Hsu-Fisher-Girshick en 1939 y presentada en la sección 4.4, tendrá la misma forma que la función de distribución conjunta de l s θ_i''s con m y n intercambiadas.

Se tendrá $0 < \theta_s' \leq \cdots \leq \theta_1' < 1$. Entonces si se empieza con la distribución de l s θ_i''s se obtendrá que (ver Pillai (1955)) la distribución aproximada de $U'^{(s)}$ donde

$$U'^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\theta_i'}{(1-\theta_i')}$$

tiene la misma forma que la distribución aproximada de $U^{(s)}$ dada anteriormente, solo que m y n estaran intercambiadas.

Además, Pillai (1955) demuestra que.

$$R^{(s)} = \left(1 + \frac{U'^{(s)}}{s}\right)^{-1}$$

y con esta transformación obtiene la distribución aproximada de $R^{(s)}$, la que es de la forma:

$$p(R^{(s)}) = \{R^{(s)}\}^{sm} (1-R^{(s)})^{s(2m+s+1)/2-1} \left[\beta\{sm+1, \tfrac{1}{2}s(2m+s+1)\right]$$

con $0 < R^{(s)} < 1$.

Para que la aproximación tenga validez m+n debe satisfacer las condiciones establecidas para m+n en el caso de $V^{(s)}$ (sección 4.5). Debe notarse la semejanza entre las distribuciones aproximados de $V^{(s)}$ y $W^{(s)}$ y entre las de $H^{(s)}$ y $R^{(s)}$, una se obtiene de la otra al intercambiar n por m.

Pillai (1955) demuestra además que

$$T^{(s)} = \frac{R^{(s)}}{1 - R^{(s)}}$$

y de la distribución aproximada de $R^{(s)}$ obtiene la de $T^{(s)}$:

$$p\,(T^{(s)}) = \frac{\{T^{(s)}\}^{sm}}{(1+T^{(s)})^{s(2m+2n+s+1)/2+1}\,\beta\{sm+1, \tfrac{1}{2}s(2n+s+1)\}}$$

para $0 < T^{(s)} < \infty$. Para que esta aproximación sea válida debe satisfacer las condiciones de la distribución de $R^{(s)}$.

Troskie (1971), menciona las estadísticas $H^{(s)}$, $R^{(s)}$ y $T^{(s)}$ y la forma en que estan asociados a la estadística $U = \frac{To^2}{c}$ (Lawley-Hotelling, sección 4.2), y a la estadística $Q = \text{traza } (I-R)\, R^{-1}$; donde la matríz R se define en la sección 4.2. A la estadística Q se le llamará la estadística de Troskie. Las relaciones entre las estadísticas $H^{(s)}$, $R^{(s)}$ y $T^{(s)}$ con las estadísticas V y Q están dadas por:

$$H^{(s)} = \left(1 + \frac{U}{s}\right)^{-1}$$

$$R^{(s)} = \left(1 + \frac{Q}{s}\right)^{-1}$$

$$T^{(s)} = \frac{s}{Q}$$

Troskie (1971) trata las distribuciones nulas de U (como se mencionó en la sección 4.2) y de Q usando coeficientes Gamma y funciones hipergeométricas definidas y usadas por James (1964) y Constantine (1963).

Estas expresiones son bastante complicadas. Troskie (1971) no trata explícitamente las distribuciones de $H^{(s)}$, $R^{(s)}$ y $T^{(s)}$ ya que éstas pueden obtenerse a partir de las de U y Q.

Las regiones críticas para las estadísticas $H^{(s)}$, $R^{(s)}$, $T^{(s)}$ y Q están dadas por:

$$C_1 : R^{(s)} > \lambda_1 \quad ; \quad C_2 : H^{(s)} > \lambda_2$$

$$C_3 : H^{(s)} > \lambda_2 \quad ; \quad C_4 : Q < \lambda_4$$

Donde las λ_i's se fijan de acuerdo a

$\Pr (Ci \mid Ho) = \alpha \quad (i = 1, 2, 3, 4).$

Troskie (1971) hace notar que la estadística Q es muy sensible respecto a valores pequeños de algunas o todas las raíces características y que por esto sólo puede usarse con ciertas alternativas restringidas de la hipótesis nula. Por ejemplo se podría usar para grandes desviaciones de la hipótesis nula cuando las raíces características poblacionales son todas diferentes de cero.

4.6.2. <u>Las estadísticas U de Gnanadesikan y S de Olson.</u>

La estadística U de Gnanadesikan se define en Gnanadesikan etal., (1965) y Roy etal., (1971) páginas 72 a 77, de acuerdo a:

U = producto de las s mayores raices de $H\,(H+E)^{-1}$.

La estadística S de Olson se definió en Olson (1973) como una analogía a la U de G anadesikan se define:

S = producto de las s mayores raices de HE^{-1}

La estadística U se ha estudiado por medio de simulaciones en computadora, los resultados de este estudio se presentan en Roy etal., (1971). La estadística S también sólo ha sido estudiada en Olson (1973) y (1974) por medio de simulaciones en computadora. Ya que los estudios anteriores tratan sobre potencia y robustes de las pruebas se mencionarán en el siguiente capítulo con más detalle.

La región crítica de U está dada por

$C\colon\ U \geq \lambda$

donde λ se determina de acuerdo a

$Pr\,(c \mid Ho) = \alpha$

La región crítica de S es de la forma:

$$C\colon\ S > \lambda$$

y λ se determina por medio de

$$Pr\,(c \mid Ho) = \alpha$$

BIBLIOGRAFIA

4.1.- INTRODUCCION

Bartlett (1939)

Gnanadesikan, Snyder & Yao (1965)

Hotelling (1951)

Lawley (1938)

Pillai (1955)

Press (1972)

Roy (1945)
Roy (1953)

Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971)

Scheffé (1959)

4.2.- La Traza de Hotelling - Lawley

Anderson (1958)

Constantine (1963)
Constantine (1966)

Davis (1968)
Davis (1970a)

Hayakawa (1970)

Hotelling (1947)
Hotelling (1951)

Hughes & Saw (1972)

Ito (1956)
Ito (1960)

James (1964)

Khatri (1964)

Kshirsaga (1972)

Lawley (1938)

Mckeon (1974)

Morrison (1967)

Muirhead (1970)

Muirhead (1972)

Olson (1974)

Pillai (1954)
Pillai (1955)
Pillai (1971)

Pillai & Chong (1968)

Pillai & Jayachandran (1967)

Pillai & Samson (1959)

Pillai & Young (1971)

Press (1972)

Siotani (1957)
Siotani (1971)

Smith, Gnanadesikan & Hughes (1962)

Sugiura & Fujikoshi (1969)

Tiku (1971)

Troskie (1971)

Waal (1975)

4.3 Criterio de Wilks

Bartlett (1938)

Box (1949)

Consul (1966a)
Consul (1966b)
Consul (1967a)

Consul (1967b)

Gupta (1971)

Jouris (1968)

Kshirsagar (1964)

Kshirsagar (1972)

Mathai & Rathie (1971)

Meijers (1946)

Pearson (1971)

Pillai (1969)

Pillai & Al-Ani (1967)

Pillai & Gupta (1969)

Pillai, Al-Ani & Jouris (1969)

Posten & Bargmann (1964)

Press (1972)

Rao (1948)
Rao (1951)
Rao (1952)

Schatzoff (1966)

Sugiura & Fujikoshi (1969)

Wald & Brooker (1941)

Wilks (1932)
Wilks (1935)

4.4.- Criterio de Roy

Bantegui (1958)

Davis (1972)

Fisher (1939)

Foster (1957)
Foster (1958)

Foster & Rees (1957)

Fukutomi (1966)
Fukutomi (1967)

Girshick (1939)

Hayakawa (1967)

Heck (1960)

Ito (1961)

Jacildo (1959)

James (1960)

Khatri & Pillai (1968)

Krishnaiah & Chong (1970)

Mehta (1967)

Morrison (1967)

Pearson (1971)

Pillai (1954)
Pillai (1955)
Pillai (1956a)
Pillai (956b)
Pillai (1957)
Pillai (1960)
Pillai (1964)
Pillai (1965a)
Pillai (1965b)
Pillai (1967a)
Pillai (1967b)

Pillai & Bantegui (1959)

Pillai & Mijares (1959)

Pillai & Sugiyama (1969)

Porter (1965)

Rao (1972)

Roy (1939)
Roy (1953)
Roy (1954)
Roy (1957)

Roy & Gnanadesikan (1959b)

Sen (1957)

Smith, Gnanadesikan & Hughes (1962)

Sugiyama (1967)
Sugiyama (1970)

Sugiyama & Fukutomi (1966)

Ventura (1957)

Waal (1969)
Waal (1975)

Wigner (1967)

4.5.- Criterio de Pillai - Bartlett

Aitken (1956)

Barlett (1939)

Constantine (1963)

Davis (1968)
Davis (1970b)

Davis (1972)

Fisher (1939)

Girshick (1939)

Hsu (1939)

James (1964)

Khatri & Pillai (1965)
Khatri & Pillai (1967)
Khatri & Pillai (1968)

Lee (1971)

Mijares (1958)

Murhead (1970)

Nanda (1950)

Olson (1974)

Pillai (1953).

Pillai (1954)

Pillai (1955)

Pillai (1956b)

Pillai (1957)

Pillai (1967c)

Pillai (1968)

Pillai & Jayachandran (1967)
Pillai & Jayachandran (1970)

Pillai & Mijares (1959)

Roy (1939)

Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971)

Troskie (1971)

Waal (1975)

4.6.1.- Las estadísticas $W^{(1)}$, $H^{(1)}$, $R^{(1)}$, $T^{(1)}$ de Pillai y Q de Troskie.

Constantine (1963)

Fisher (1939)

Girshick (1939)

Hsu (1939)

James (1964)

Pillai (954)
Pillai (1954a)
Pillai (1955)

Roy (1939)

Troskie (1971)

4.6.2.- Las estadísticas U de Guanadesikan y S de Olson.

Gnanadesikan, Snyder & Yao (1965)

Olson (1973)

Olson (1974)

Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971).

CAPITULO V.- Propiedades de los diferentes criterios de Prueba en MANOVA modelo I.

5.1 Introducción.

En el capítulo dos se planteó un modelo, el I de MANOVA, y la forma de probar hipótesis sobre los parámetros. El modelo está basado en varias suposiciones (normalidad, independencia, heteroscedasticidad). En el capítulo tres se dieron métodos para probar las hipótesis del modelo I de MANOVA (aunque se mencionarán las del modelo I de ANOVA también). En el capítulo cuatro se presentan diez criterios de prueba para utlizarse en MANOVA modelo I. Sería conveniente saber cual de esos diez criterios es el que debe usarse, por ser el que mejor resultados produzca. Si todos las suposiciones del modelo I de MANOVA se cumplen se debería usar el criterio más potente, mientras que si alguna o algunas suposiciones fallan deberá usarse el más robusto. En este capítulo se presentarán algunos estudios sobre la potencia o robustes de los criterios presentados en el capítulo anterior. También se presentan algunos resultados sobre admisibilidad, invarianza e insesgamiento.

En esta capítulo se utiliza la siguiente nomenclatura para referirse a las diferentes pruebas: To^2 Lawley-Hotelling, U_o la estadística que Pillai propuso y que es proporcional a To^2 -- ($U_o = \frac{To^2}{c}$), W la estadística de Wilks, R la estadística de Roy (R = máxima raíz característica de HE^{-1}, donde las matrices H y E se definen en la sección 2.3.3.), V la estadística de Pillai (sección 4.5), Q la estadística de Troskie, U la estadística de Olson, y por $H^{(s)}$, $T^{(s)}$, $R^{(s)}$ y $W^{(s)}$ las estadísticas propuestas por Pillai y presentadas en la sección 4.6.1.).

5.2 Propiedades de las pruebas presentadas en el capítulo IV.

Anderson (1958) menciona que Naranjan (1956) demostró que W es insesgada y que Roy (1953) establece (sin demostrar) algunas propiedades de R, como es el que sea invariante ante algunos tipos de transformación.

En Pillai (1955) se presentan los siguientes resultados sobre estadísticas que se basan en raíces características en análisis multivariado: a) las raíces características muestrales son invariantes bajo ciertas clases de transformaciones lineales, b) la distribución de las raíces características muestrales cuando la hipótesis por ser probada es cierta, involucra como parámetros a los grados de libertad y en el caso en que la hipótesis a ser probada no sea cierta involucra como únicos parámetros a un conjunto de las raíces poblacionales (con una importancia física muy grande). Los resultados anteriores se prueban en Roy (1953) y en Roy & Bose (1953). Pillai (1953) dice que una estadística o una prueba basada en ésta, para que tenga las propiedades anteriores debe ser función de las raíces características muestrales.

En Pillai (1955) se presentan los siguientes resultados: la estadística To^2 tiene las propiedades a) y b) mencionadas en el párrafo anterior, además se dispone de expresiones de la función de distribución (ver sección 4.2) y es insesgada. La estadística R tiene las propiedades a) y b), hay expresiones para la función de distribución o al menos para ciertos percentiles de ésta (ver sección 4.4), además es insesgada y hay posibilidades de obtener, por medio de inversión, intervalos de confianza apropiados (ver sección 4.4). Sobre las estadísticas $W^{(s)}$, $H^{(s)}$, $R^{(s)}$ y $T^{(s)}$ dice que tienen las propiedades a) y b) y como se mostró en la sección 4.6.1. hay expresiones para la función de distribución de estas estadísticas.

Roy & Mikhail (1961) demuestran que To^2 es insesgada.

Ghosh (1964) demuestra que To^2 y R son admisibles. Cuando s=1, todos los criterios presentados en el capítulo anterior son iguales y admisibles, ver Stein (1956), su prueba se basa en una generalización de un resultado de Lehmann y Birnbaum (ver Birnbaum (1955)). Ghosh (1964) usa el método de Stein para probar la admisibilidad de To^2 y R contra alternativas irrestrictas, la prueba que hizo Ghosh tiene las mismas limitaciones que la de Stein, ya que la superioridad de To^2 y R se establece para valores grandes de los parámetros en las hipótesis alternativas y será útil el resultado de Ghosh si se restringe el dominio de las alternativas (para más detalles ver Ghosh (1964)).

En Schwartz (1964) se demuestra que V es admisible utilizando también el método de Stein (1956) de donde tiene las mismas restricciones que las pruebas de Ghosh (1964).

Kiejer & Schwartz (1965) demuestran admisibilidad de algunas pruebas invariantes en el caso de MANOVA y en el caso de probar independencia entre componentes, las pruebas To^2, V y W (ver detalles en Kiejer & Schwartz). Además demuestran que W y V son insesgadas.

En Roy et al., (1971) se demostró la admisibilidad de R, W, To^2 y V.

<u>En resumen:</u> Roy (1953), Roy & Bose (1953) y Pillai (1953), -- (1955) demuestran que las estadísticas basadas en raíces características muestrales son invariantes bajo cierta clase de transformaciones lineales.

Prueba basada en la estadística.	Quienes han demostrado las propiedades de: insesgamiento	admisibilidad
W	Naraian (1950) Kiejer & Schwartz (1965).	Kiejer & Schwartz (1965), Roy et al., (1971).
R	Roy (1953) Pillai (1955)	Ghosh (1964) Roy et al.,(1971)
To^2	Pillai (1955) Roy & Mikhail (1961)	Ghosh (1964) Kiejer & Schwartz (1965). Roy et al., (1971).
V	Kiejer & Schwartz (1965)!	Schwartz (1964) Kiejer & Schwartz (1965). Roy et al.,(1971)

5.3 Potencia de las pruebas.

Roy (1953) menciona que R tiene su función potencia monótona - creciente.

Pillai (1955) menciona que To^2 tiene función potencia monótona creciente.

Roy & Mikhail (1961) demuestran que la estadística de prueba - R al utilizarse en MANOVA o al probar independencia entre componentes, tiene una función potencia monótona creciente en cada uno de los parámetros de no centralidad, este resultado lo había establecido Roy (1953) sin demostrarlo. Lo anterior proporciona un resultado más fuerte que el que se hubiera obtenido por medio del Teorema de Anderson (Anderson (1955)), el que implica que la función potencia aumenta cuando todas las raíces características se aumentan simultaneamente en la misma proporción.

Das Gupta, Anderson & Mudholkar (1964) dan condiciones suficientes sobre un criterio de prueba para que la función potencia sea monótona creciente de cada uno de los parámetros. En base a estas condiciones (basadas en que la región de aceptación sea convexa en un cierto espacio) demuestran que R, To^2 y W tienen funciones potencia monótonas crecientes en cada - uno de sus parámetros.

Anderson & Das Gupta (1964) obtienen condiciones suficientes para que procedimientos invariantes de prueba posean funciones de potencia monótonas crecientes en cada uno de los parámetros.

Las estadísticas To^2 y R satisfacen estas condiciones. Estas condiciones son las mismas que las dadas en Roy & Mikhail - (1961). Anderson & Das Gupta dicen que Roy & Mikhail (1961) sólo demostraron que To^2 es insesgada, mientras que dijeron que tenía una función potencia monótona creciente.

Mikhail (1965) estudia la potencia de W en el caso p=2 (aunque el método se puede extender a otros valores de p), cuando hay colinealidad se recomienda continuar la investigación.

Pillai & Jayachandran (1967) comparan cuatro criterios de - prueba, usando para éllo técnicas de simulación en computadora. Los criterios de prueba que se comparan son R, W, V y - To^2 a traves de Uo.

Las comparaciones se hicieron con s=2 y en el caso de que se estuvieran probando las siguientes hipótesis: i) la independencia entre un conjunto con p componentes y otro con q componentes en una población normal (p+q) variada y, ii) la - igualdad de vectores de medias en l poblaciones normales p variadas con matriz de covarianzas iguales. Pillai & Jayachandran mencionan que la potencia de R es menor que la de Uo, V ó W y por esto sólo analiza con detalle la potencia de estos últimos (para detalles ver Pillai & Jayachandran (1967)), concluyendo que los tres criterios son buenos para probar - las hipótesis i) o ii). Para valores pequeños de los parámetros de desviación, las diferencias en cuanto a potencia de las pruebas son pequeñas. Sin embargo si se consideran desviaciones grandes también, V tiene una potencia mayor que el resto de los criterios (en el caso de probar las hipótesis - i) o ii)) si los valores de los parámetros estan "cerca" -- unos de otros. En el caso en que los valores de los paráme-- tros sean grandes y separados entre sí y el valor de n (esta n se define en la sección 4.4) es grande entonces la prueba basada en U_0 tiene mayor potencia que las demás pruebas (en el caso de probar las hipótesis i) o ii)).

Si los valores de n no son grandes y los de los parámetros son grandes y separados entre sí entonces en el caso de probar la hipótesis ii) W tiene mayor potencia que V. Con tamaños de muestra grandes la potencia de los criterios Uo, V y W es casi la misma.

Gabriel (1968) considera procedimientos de prueba simultá-- neos en MANOVA que se basan en las raíces características de HE^{-1}, estas estadísticas incluyen a los siguientes R, To^2, V y W. Compara las propiedades de todos los procedimientos considerados y demuestra que R es preferible a todos los demás ya que para un nivel de significancia dado proporciona la mayor potencia para hipótesis basadas en una función de una - combinación. (ver Gabriel (1968)).

Troskie (1971) dice de la estadística Q es muy sensible respecto a valores pequeños de algunas (o todas) las raíces -- características y que sólo puede usarse contra ciertas alternativas restringidas de la hipótesis nula. Troskie efectúa - comparaciones de las funciones potencia de las estadísticas W, R, Uo y V refiriéndose a los trabajos hechos sobre este -

respecto por Pillai & Jayachandran (1967), (1968).

Troskie menciona que cuando los valores de las correlaciones - canónicas poblacionales estan alejadas unas de otras y el tamaño de muestra es grande, entonces la potencia de Uo es mayor que la de V y W. Sobre la estadística Q, menciona Troskie, en 1971, que esta investigando su potencia.

En Roy et al., (1971) se presentan los resultados siguientes: demostración de que la función potencia es monótona creciente en el caso de To^2, W y R. Además en Roy et al., (1971) se presentan los resultados obtenidos en un estudio sobre la potencia de los criterios basados en las estadísticas R, W, To^2, V y U.

El estudio se efectuó utilizando la técnica Monte Carlo. Las indicaciones generales de este estudio son que la potencia de las diferentes pruebas se puede ordenar de la misma forma en que a continuación se ordenan las estadísticas correspondientes.

$$V \geqslant U \geqslant W \geqslant To^2 \geqslant R.$$

Sin embargo, hacer notar los autores, parece que hay excepciones a la ordenación anterior (detalles en Roy et al., (1971) capítulo V).

Holloway & Dunn (1967) usaron técnicas Monte Carlo en la investigación de la potencia de To^2 en el caso de dos poblaciones.

Sotres et al., (1972) describen un algoritivo para efectuar - análisis de varianza y covarianza.

Dicho algoritmo se implementó en un programa para computadora. En este programa se obtienen las estadísticas W de Wilks, To^2 de Lawley-Hotelling y la de Heck. Sotres et al,, utilizan como criterio de prueba la estadística.

$$\frac{R}{1+R}$$

a la que llaman estadística de Heck y en la que R es la estadística de Roy. De esta estadística Heck (1960) tabuló percentiles. (Las tablas de Heck se presentan en el apéndice A).

Debe notarse que utilizar la estadística de Heck y la de Roy es completamente equivalente, por lo tanto en este trabajo se utilizará la estadística R.

Sotres et al., por medio de simulaciones Monte Carlo estudian la potencia de las pruebas W, To^2 y R. Concluyendo de este estudio que las potencias de las tres pruebas.

Se puede ordenar de la siguiente manera:

$$To^2 \geq R \geq W$$

sin embargo se observó que To^2 tuvo un nivel de significancia mayor que el esperado.

Fujikoshi (1973) menciona y demuestra de una manera diferente a la utilizada por Das Gupta etal., (1964) que R y W tienen - funciones potencia monótonas crecientes, resultado que ya se conocía. La importancia de este trabajo estriba en la formulación, que es sencilla, de las condiciones necesarias para que una prueba tenga función potencia monótona creciente.

Morrison & Bhoj (1973) derivan la función de distribución no central de W para probar hipótesis sobre el vector de medias de una población normal multivariada cuando un subconjunto de variables no tiene observaciones sobre algunas unidades muestrales. Obtiene la precisión de la prueba al compararla con la potencia conocida cuando la muestra esta completa. Su investigación sobre la potencia de la prueba sustenta el uso de la prueba con datos perdidos sobre la prueba usual To^2.

Eaton & Perlman (1974) trabajan sobre las funciones de potencia de R y To^2 obteniendo que las funciones son monótonas crecientes. Refinan los resultados anteriores.

5.4 Robustez de las Pruebas.

Ito & Schull (1964) estudia la robustez de To^2, en MANOVA, cuando las matrices de varianza-covarianza no son iguales. Si la suposición de heteroscedasticidad es violada se puede ejecutar la prueba con el mismo criterio de prueba que si la suposición no se violara, pero las funciones de distribución nula y no nula son diferentes de las que se obtendrán si la suposición fuera verdadera.

En Ito & Schull (1964) se consideran sólo distribuciones asintóticas. En este trabajo se denota a To^2 por $\hat{T}o^2$, si la suposición de heteroscedasticidad es falsa.

Encuentran una aproximación a la distribución de To^2, esta aproximación es CX^2 (f) donde C es una constante y X^2 (f) es una X^2 con f grados de libertad.

Los valores de C y f se determinan a partir de los dos primeros momentos de la distribución asintótica de To^2.

En Ito & Schull se dan expresiones para C y f en los casos nulo y no nulo. Además los autores encuentran que en el caso de 2 muestras de igual tamaño, la prueba basada en To^2 se comporta muy satisfactoriamente respecto a la violación de la suposición de igualdad de matrices de varianza-covarianza, ya que no muestra efectos ni en el nivel de significancia ni en la potencia para valores grandes de N (tamaño de muestra). Ito & Schull mencionan después de un estudio numérico en la computadora que en el caso de K muestras y si todos los tamaños de muestra son iguales la prueba basada en To^2 no se ve afectada ni en el nivel de significancia ni en la potencia siempre y cuando no sea muy grande la desigualdad entre las matrices de varianza-covarianza, pero en el caso en que los tamaños de muestra sean desiguales se ven afectados fuertemente el nivel de significancia y la potencia de la prueba.

Ito (1969) estudia los efectos que sobre algunos criterios de prueba en MANOVA producen las siguientes situaciones: i) las observaciones son independientes pero no se distribuyen normalmente. Trata sólo el caso de muestras "grandes", estos es, trata el problema asintóticamente. Al caracterizar una distribución multivariada no normal, Ito específica sólo los primeros cuatro momentos y menciona que se puede encontrar indicios asintóticos del efecto de no normalidad de algunos criterios de prueba en términos de los cumulantes tercero y cuarto de las distribuciones originales.

Las pruebas Uo y W se investigan en el caso de no normalidad y se encuentra que son asintóticamente equivalentes y que - los efectos de no normalidad sobre los cumulantes tercero y cuarto en las dos pruebas son del mismo orden. En las dos - pruebas no se afecta el nivel de significancia. La prueba Uo se afecta en el caso de heteroscedasticidad. Ito concluye que cuando los tamaños de muestra son grandes, el efecto de violación a la suposición denormalidad es pequeño al probar hipótesis sobre sectores de medias, pero es peligroso al probar hipótesis sobre matrices de dispercíón, como demostró Scheffé (1959) en el caso univariado.

Mardia (1971) menciona que Arnold (1964) y Hopkins & Clay - (1963) estudiaron el efecto de no normalidad sobre la To^2 de Hotelling. En Mardia (1971) siguiendo la idea de Box & Watson (1962) se estudia el efecto de no normalidad sobre pruebas de hipótesis en multivariado. En este trabajo se encuentra que el tratamiento análitico de Box & Watson (1962) se aplica sólo a la estadística V de Pillai (sección 4.5). Mardia obtiene una prueba aleatorizada basada en la estadística V de Pillai (esta estadística es proporcional a la estadística generalizada basada en distancias de Mahalanobis). Sobre la prueba anterior Mardia dice que debe usarse siempre que se sospeche no normalidad extrema. Se demuestra que V es robusto en el caso de no normalidad. La aproximación de Mardia es diferente a la de Ito (1969) ya que sus resultados se aplican a muestras moderadamente grandes.

Korin (1972) llevó a cabo un estudio sobre la robustes de To^2, W y R.

Este estudio se llevó a cabo utilizando técnicas Monte Carlo. Korin concluye de este estudio que no hay gran diferencia entre estas pruebas, aunque R exhibió alejamientos del nivel de significancia prefijado.

Olson (1974) utiliza técnicas Monte Carlo para estudiar las pruebas R, To^2, W, V, U y S en el modelo I de MANOVA cuando algunas suposiciones fallan. Olson menciona que ninguna prueba en MANOVA es uniformemente más poderosa y pueden usarse comparaciones en las potencias de las pruebas para seleccionar una prueba en una situación particular. A partir de estudios anteriores en que se comparaba potencia de diferentes pruebas en MANOVA se encontró que R tiene mayor potencia que las otras pruebas cuando las diferencias entre grupos está concentrada en una dimensión canónica, mientras que las otras pruebas tienen mayor potencia que R cuando la no centralidad no está muy concentrada en una sola raíz (*). Este resultado no es sorprendente debido a que R es la única estadística que se basa en una sola raíz característica. Además las pruebas pueden ordenarse en términos de sus potencias de la siguiente manera $R \geqslant To^2 \geqslant W \geqslant V \geqslant U$ cuando sólo hay una raíz de no centralidad (*) diferente de cero, pero la situación cambia a $U \geqslant V \geqslant W \geqslant To^2 \geqslant R$ en la situación no colineal, con la excepción de que V tiende a tener mayor potencia que U cuando los grados de libertad de E aumentan. En general alejamientos de

(*) Ver Olson (1974).

la normalidad debidos a Kurtosis tiene efectos relativamente suaves sobre el nivel de significancia de las pruebas en MANOVA, aunque los efectos son más fuertes para R, U y S bajo ciertas condiciones. Las potencias de todas las pruebas se afectan bajo Kurtosis aunque el efecto es mayor en U y S en una estructura concentrada (rango uno) de no centralidad y para R en una estructura difusa.

Heterogeneidad de matrices de covarianza es en general la violación más seria. Los niveles de significancia se elevan excesivamente para R, T y W, mientras que V se afecta en menor grado. Los criterios U y S se muestran conservadores si p (la dimensión) es menor o igual que cuatro, pero se ven afectados cuando p es mayor que 4.

A partir del estudio Monte Carlo, Olson afirma que las estadísticas de diagnóstico, como son el criterio M de homoscedasticidad de Box (1949) y el criterio de Mardia para asimetría y Kurtosis (Mardia (1970)) ofrecen poca ayuda para determinar cuando las fallas en las suposiciones son peligrosas.

La prueba R que produce un número excesivo de rechazos bajo Kurtosis y heterogeneidad de matrices de covarianzas deben desecharse ya que se tienden a comportar como R en este caso. La prueba V se comporta bien ante violaciones a la suposición de heteroscedasticidad aunque el nivel significancia sube un poco. Como protección general contra violaciones de las suposiciones de normalidad y heteroscedasticidad, Olson recomienda la prueba V como la más robusta de las pruebas MANOVA y con una potencia adecuada contra las alternativas.

El trabajo de Olson es fundamental en el tema.

Otro estudio sobre robustes de To^2 es el efectuado por Mardia (1975).

Kshirsagar (1972) menciona que hasta la fecha en que escribió el libro (y en realidad hasta la fecha en que se escribe este trabajo) no hay una teoria adecuada que permita escoger una estadística entre las presentadas en el capítulo 4 para efectuar una prueba. Kshirsagar recomienda basado en la facilidad en que puede usarse la W de Wilks debido a la aproximación de Bartlett, ya que otros criterios necesitan utilizar tablas especiales de sus percentiles. Además como se ha visto hasta aquí la prueba de Wilks es insesgada, invariante, admisible, cumple con la propiedad b) establecida en la sección 5.2 y la función potencia de W es monótona creciente. Por las propiedades anteriores. Kshirsagar prefiere la prueba basada en la estadística W de Wilks.

BIBLIOGRAFIA

SECCION 5.2

Anderson (1958).

Birnbaum (1955).

Ghosh (1964).

Kiejer & Schwartz (1965)'

Naraian (1950).

Pillai (1953).

Pillai (1955).

Roy (1953).

Roy & Bose (1953).

Roy & Mikhail (1961).

Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971).

Schwartz (1964).

Stein (1956).

SECCION 5.3

Anderson (1955).

Anderson & Das Gupta (1964).

Das Gupta, Anderson & Mudholkar (1964).

Eaton & Perlman (1974).

Fujikoshi (1973).

Gabriel (1968).

Mikhail (1965).

Morrison & Bhoj (1973).

Pillai (1955).

Pillai & Jayachandran (1967).

Pillai & Jayachandran (1968).

Roy (1953).

Roy & Mikhail (1961).

Roy et al., (1972).

Troskie (1971).

<u>SECCION 5.4</u>

Arnold (1964).

Box & Watson (1962).

Hopkins & Clay (1963).

Ito (1969).

Ito & Schull (1964).

Korin (1972).

Kshirsagar (1972).

Mardia (1971).

Mardia (1975).

Olson (1974)

Scheffé (1959).

Apéndice A: Tablas de Heck. (Obtenidas de Heck (1960). Ver sección 2.3.3).

CHART I

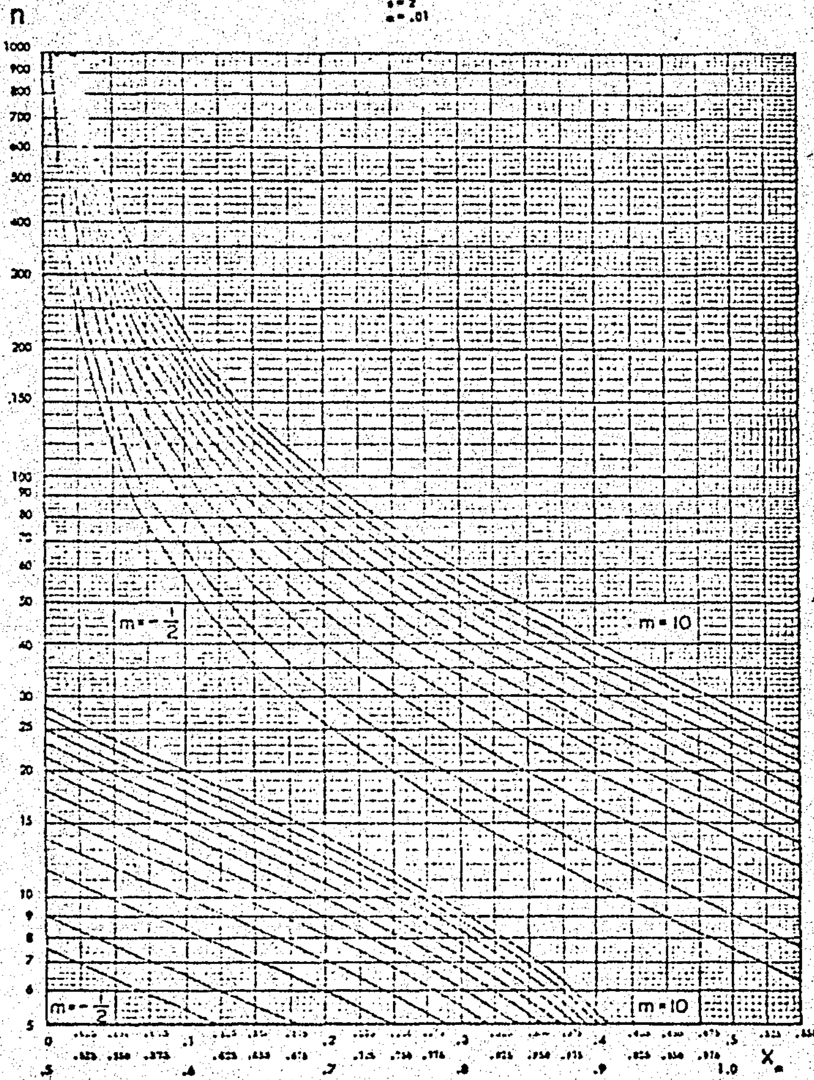

n
m = -1/2
m = 10
m = -1/2
m = 10
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
150
100
90
80
70
60
50
40
30
25
20
15
10
9
8
7
6
5
0
.1
.2
.3
.4
.5
.5
.6
.7
.8
.9
1.0
X

CHART II

$s = 2$
$\alpha = .025$

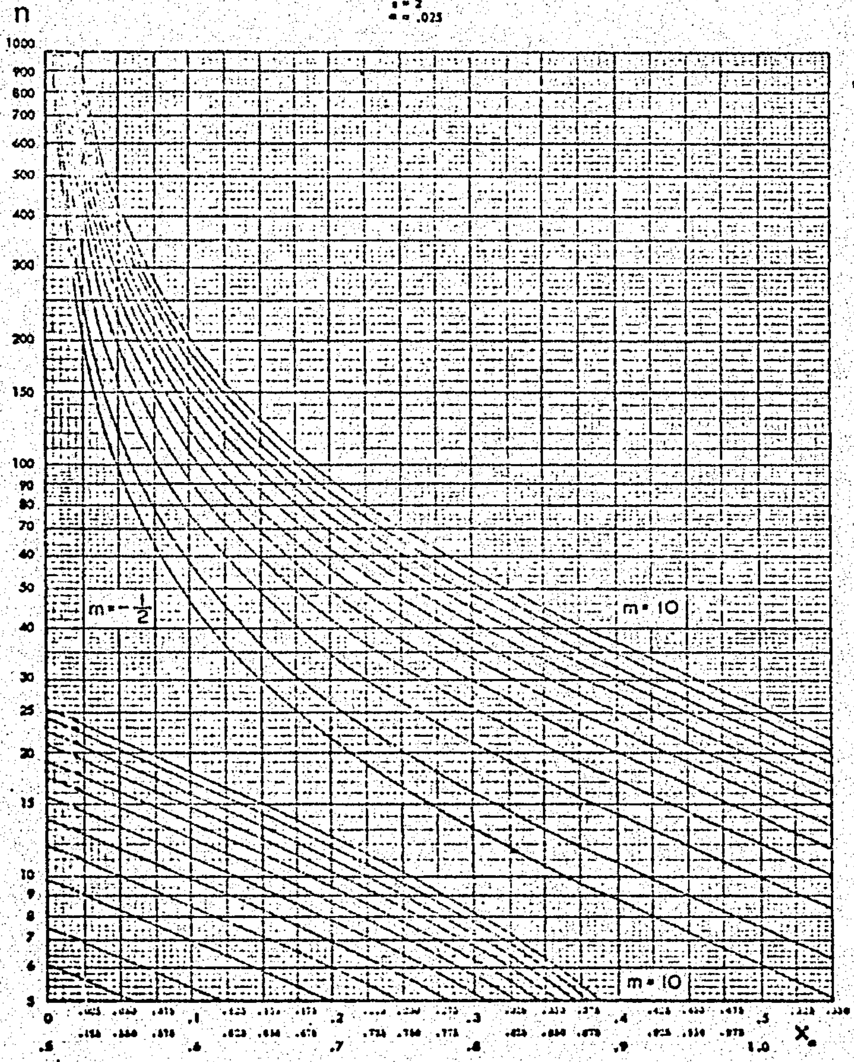


CHART III

a = 2
α = .05

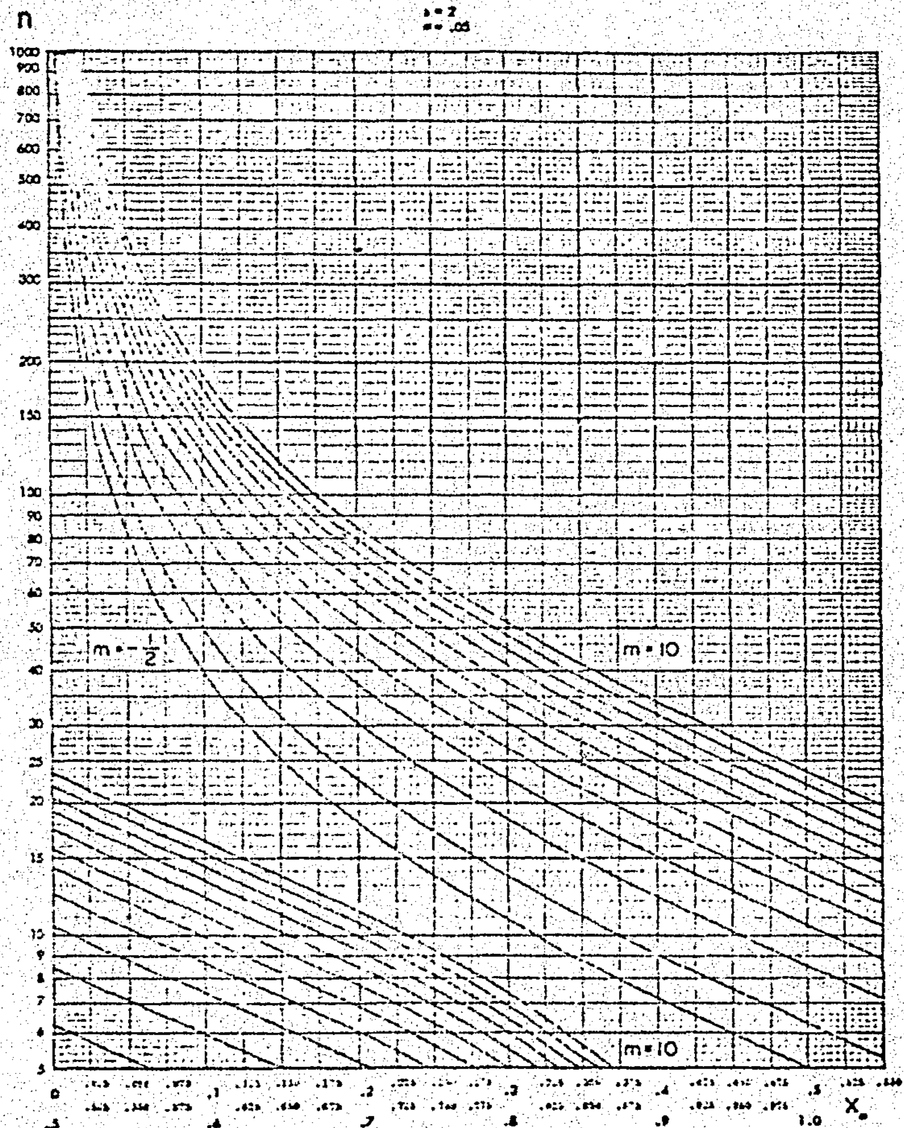


CHART IV

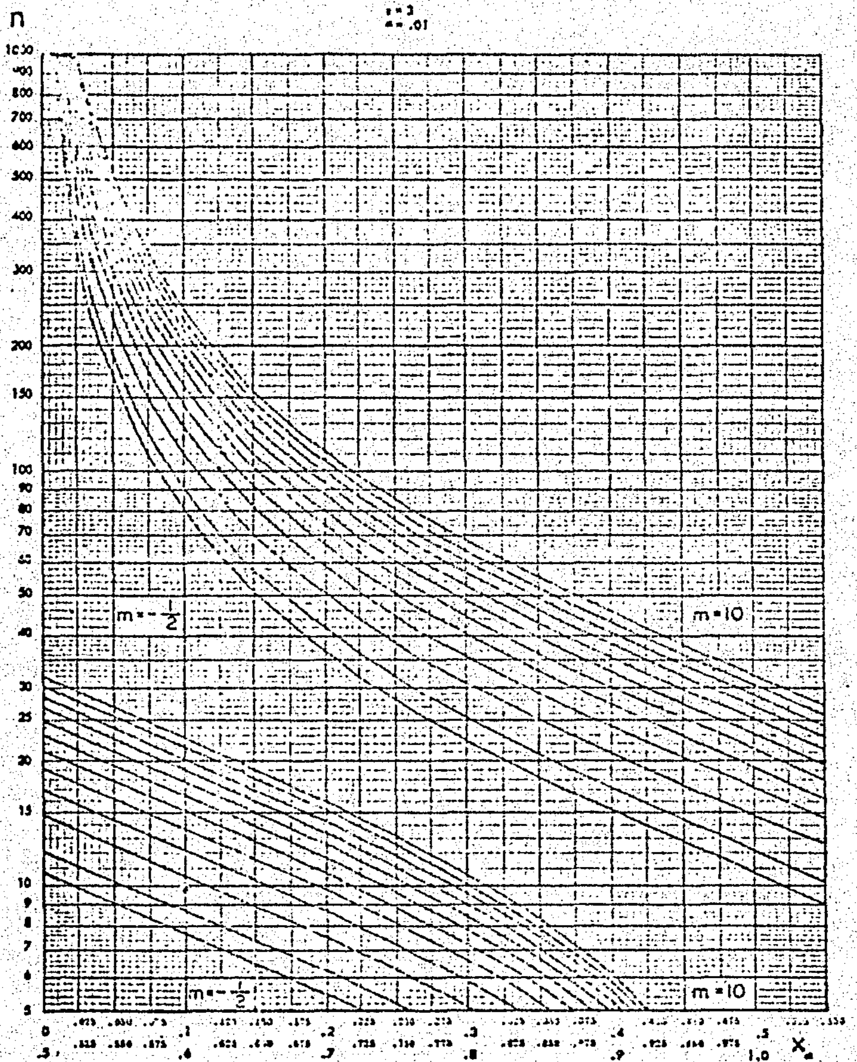


CHART V

$s = 3$
$\alpha = .025$

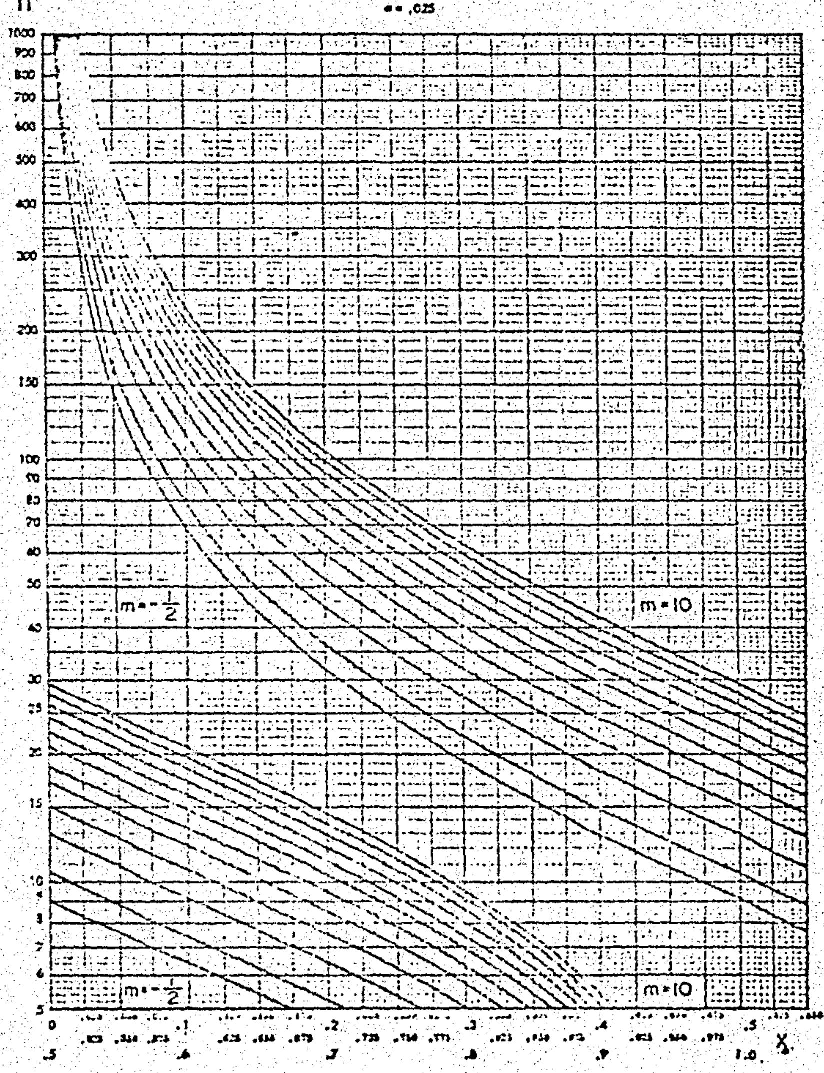


CHART VI

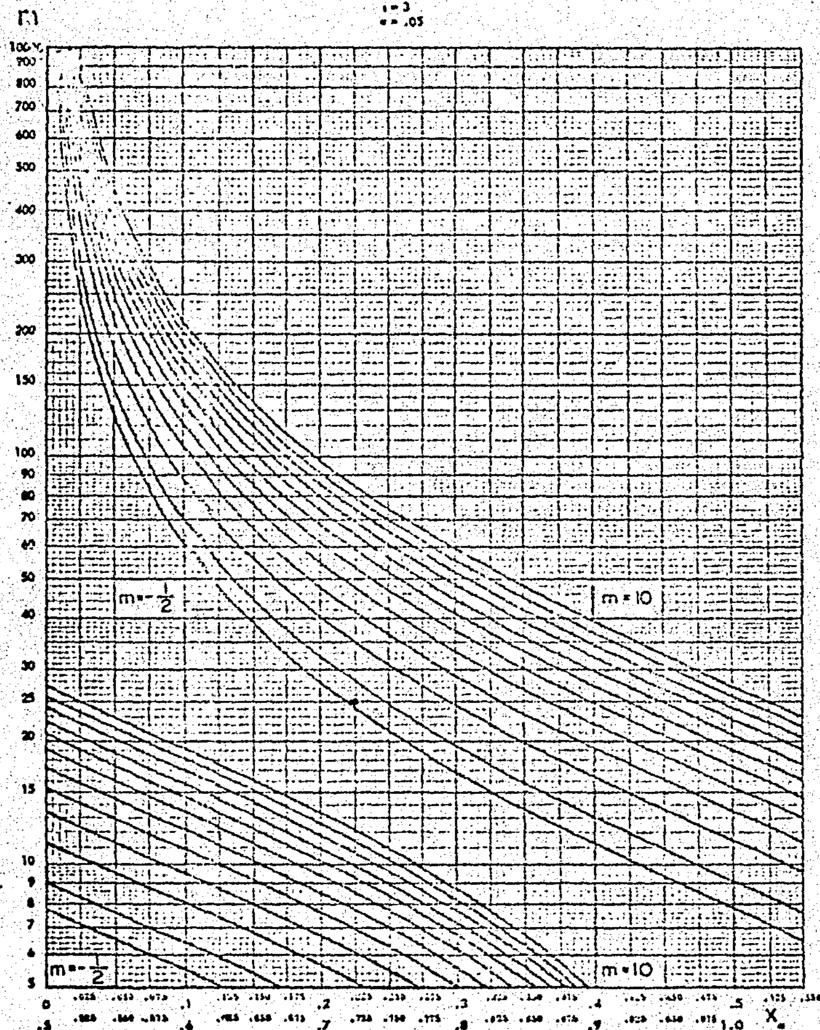


CHART VII

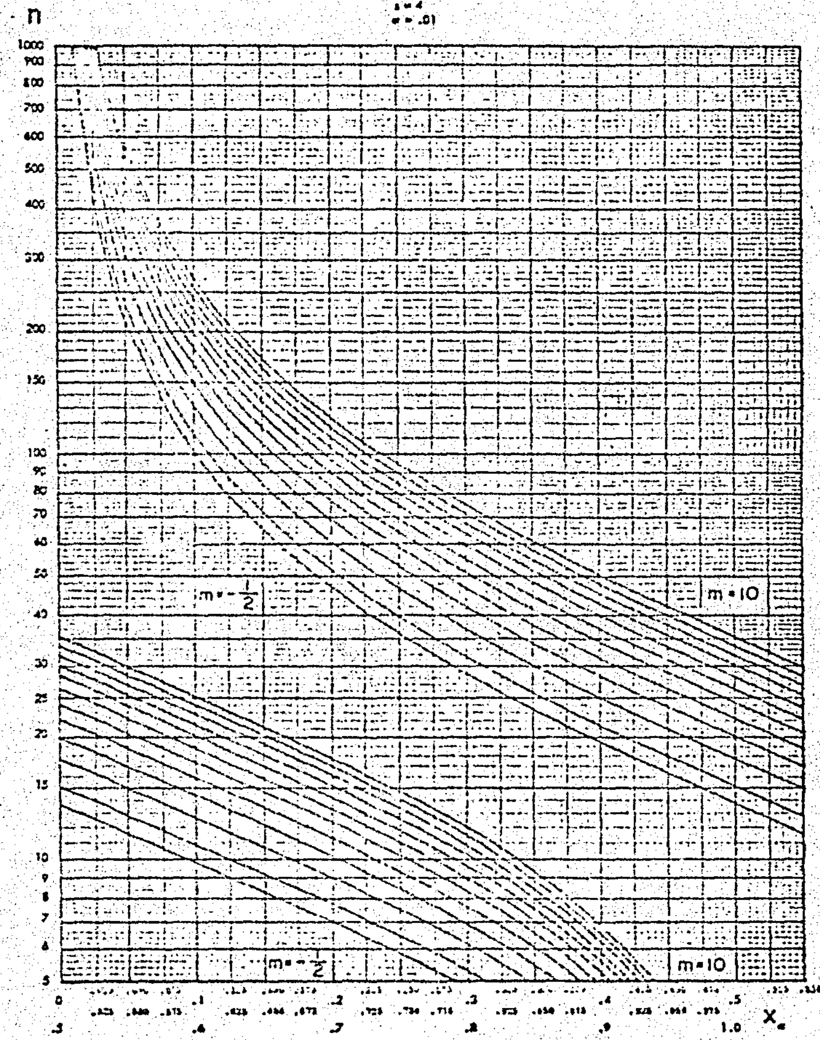


CHART VIII

$s = 4$
$\alpha = .025$

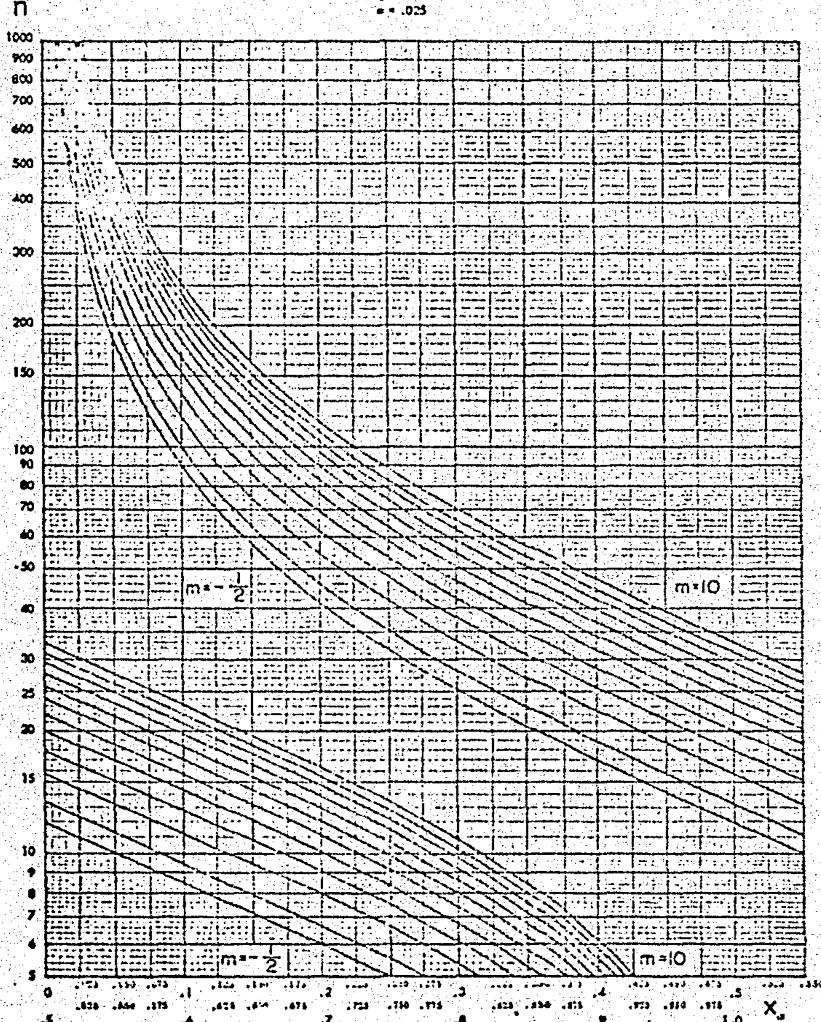


CHART IX

$s = 4$
$w = .05$

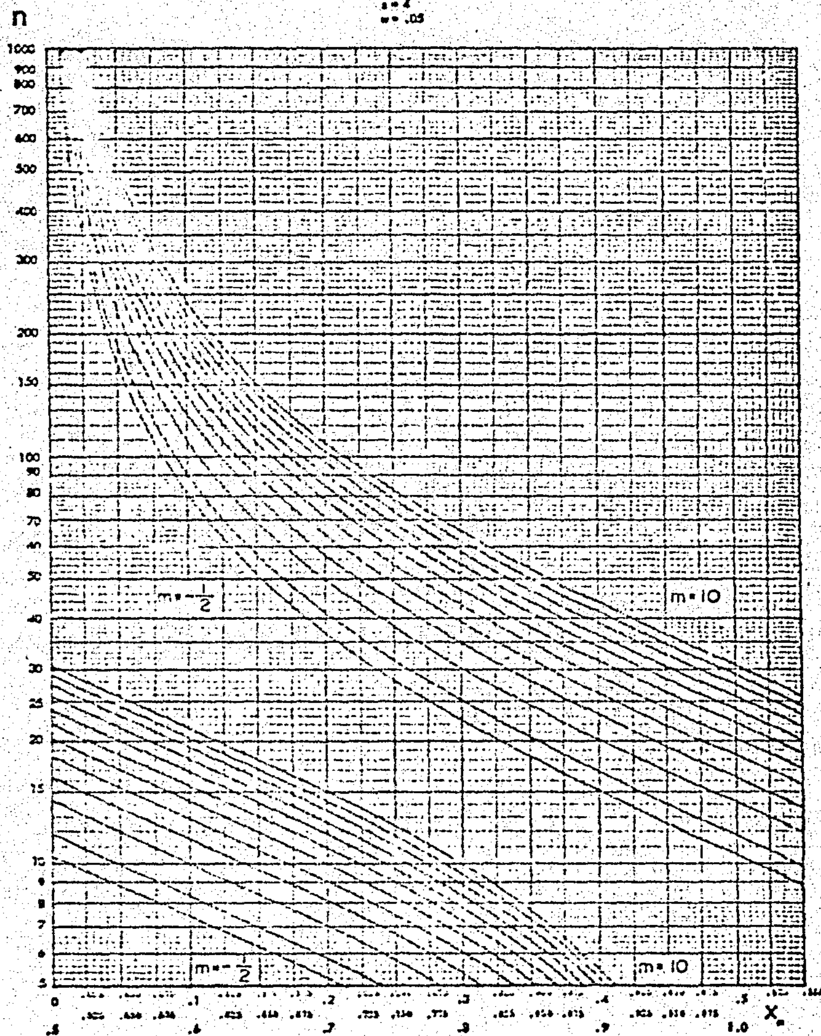


CHART X

$s = 5$
$\alpha = .01$

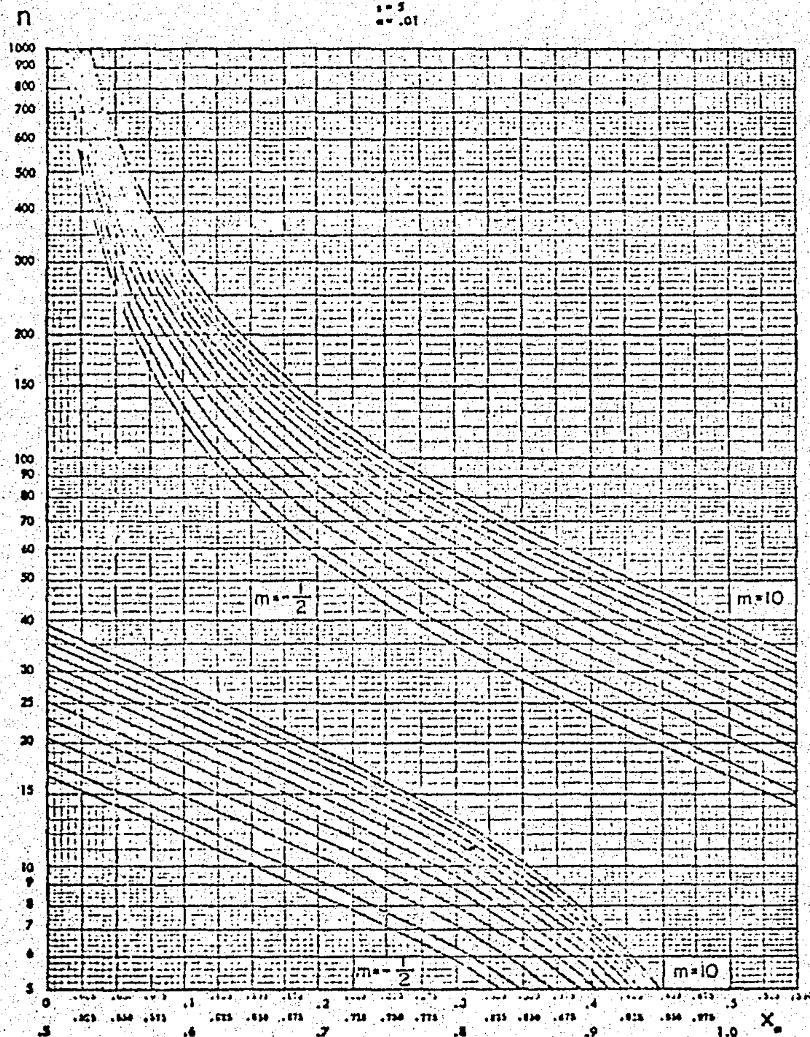


CHART XI

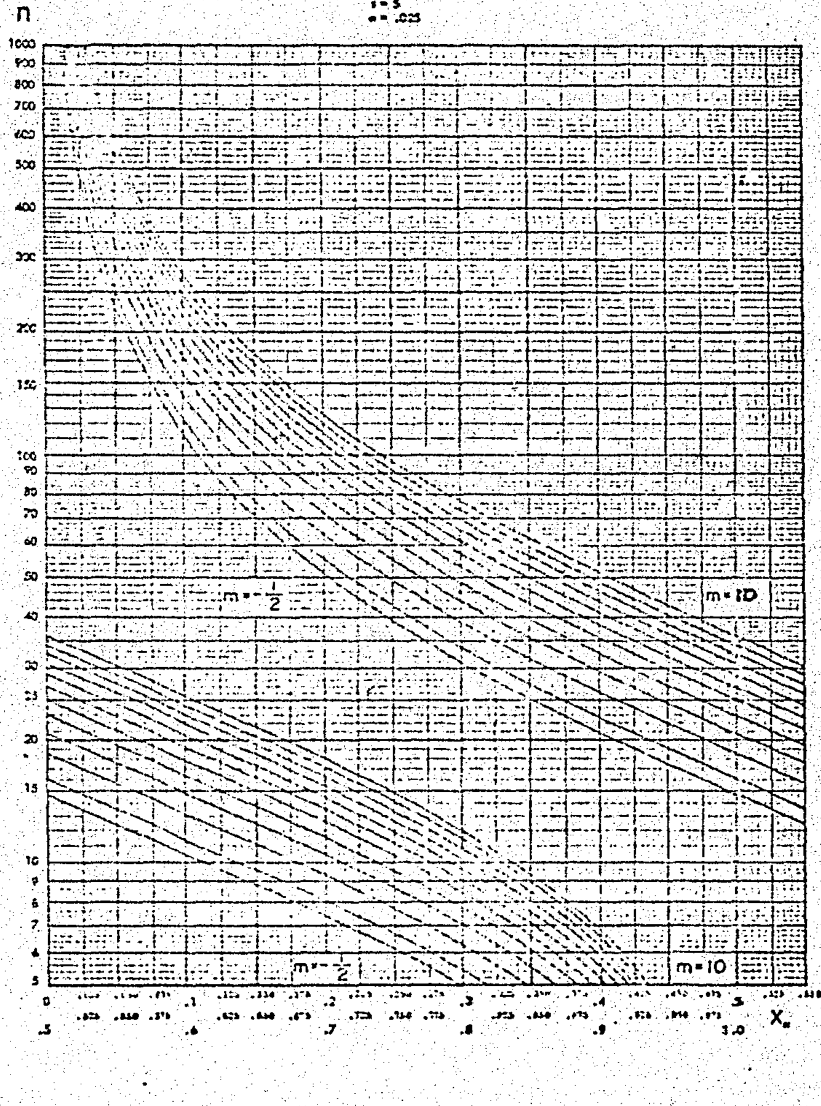
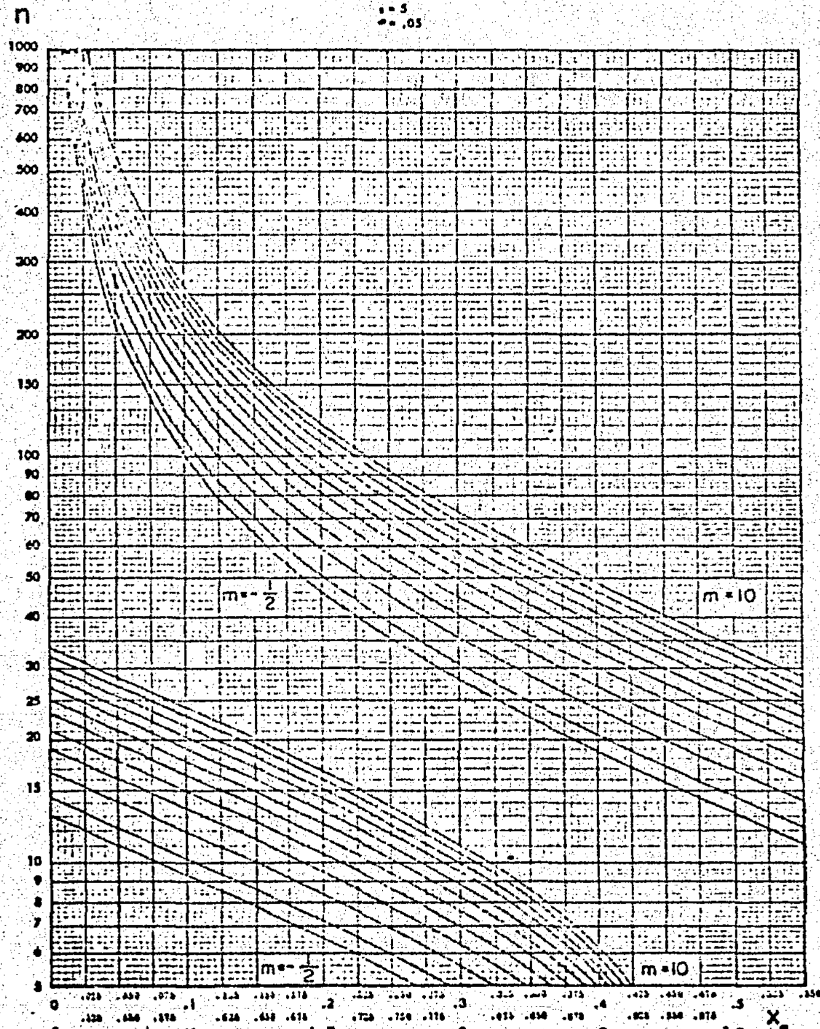


CHART XII

s = 5
α = .05



Apéndice B: Tablas para R. (Se reproducen las tablas que presenta Bock (1975)).

Pillai (como se indicó en la sección 4.4) tabuló los percéntiles de la distribución nula de R. Obtuvo los percéntiles 95 y 99% (0.05 y 0.01) de la estadística.

$$a = \frac{\theta_s}{1 + \theta_s}$$

donde θ_s es la mayor raíz característica positiva de HE^{-1}, Los percéntiles se obtienen en términos de los parámetros (ver sección 2.3.3).

$$s' = \min(s, u)$$

$$m_1 = \frac{|s - u| - 1}{2}$$

$$N = \frac{n - r - u - 1}{2}$$

En este apéndice los percéntiles obtenidos por Pillai se presentan como una estadística F generaliza (Bock (1975)).

$$F_o = \frac{t}{r}\,\theta_s$$

donde

$r = |s - u| + 1$

$s' = \min(s, u)$

$t = n - r - u + 1$

$r' = 1$ Upper 5% points

s \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
1	161.00	200.00	225.00	234.00	239.00	242.00	244.00	246.00	249.00	250.00
2	18.50	19.00	19.20	19.30	19.40	19.40	19.40	19.40	19.50	19.50
3	10.10	9.55	9.12	8.94	8.85	8.79	8.74	8.69	8.65	8.61
4	7.71	6.94	6.39	6.16	6.04	5.96	5.91	5.84	5.79	5.74
5	6.61	5.79	5.19	4.95	4.82	4.74	4.68	4.60	4.54	4.49
6	5.99	5.14	4.53	4.28	4.15	4.06	4.00	3.92	3.86	3.80
7	5.59	4.74	4.12	3.87	3.73	3.64	3.57	3.49	3.43	3.37
8	5.32	4.46	3.84	3.58	3.44	3.35	3.28	3.20	3.13	3.07
9	5.12	4.26	3.63	3.37	3.23	3.14	3.07	2.99	2.92	2.85
10	4.96	4.10	3.48	3.22	3.07	2.98	2.91	2.83	2.75	2.69
11	4.84	3.98	3.36	3.09	2.95	2.85	2.79	2.70	2.63	2.56
12	4.75	3.89	3.26	3.00	2.85	2.75	2.69	2.60	2.52	2.46
13	4.67	3.81	3.18	2.92	2.77	2.67	2.60	2.51	2.44	2.37
14	4.60	3.74	3.11	2.85	2.70	2.60	2.53	2.44	2.37	2.30
15	4.54	3.68	3.06	2.79	2.64	2.54	2.48	2.38	2.31	2.24
16	4.49	3.63	3.01	2.74	2.59	2.49	2.42	2.33	2.25	2.18
17	4.45	3.59	2.96	2.70	2.55	2.45	2.38	2.29	2.21	2.14
18	4.41	3.55	2.93	2.66	2.51	2.41	2.34	2.25	2.17	2.10
19	4.38	3.52	2.90	2.63	2.48	2.38	2.31	2.21	2.13	2.06
20	4.35	3.49	2.87	2.60	2.45	2.35	2.28	2.18	2.10	2.03
22	4.30	3.44	2.82	2.55	2.40	2.30	2.23	2.13	2.05	1.97
24	4.26	3.40	2.78	2.51	2.36	2.25	2.18	2.09	2.00	1.93
26	4.23	3.37	2.74	2.47	2.32	2.22	2.15	2.05	1.97	1.89
28	4.20	3.34	2.71	2.45	2.29	2.19	2.12	2.02	1.93	1.86
30	4.17	3.32	2.69	2.42	2.27	2.16	2.09	1.99	1.91	1.83
32	4.15	3.29	2.67	2.40	2.24	2.14	2.07	1.97	1.88	1.81
34	4.13	3.28	2.65	2.38	2.23	2.12	2.05	1.95	1.86	1.79
36	4.11	3.26	2.63	2.36	2.21	2.11	2.03	1.93	1.85	1.77
38	4.10	3.24	2.62	2.35	2.19	2.09	2.02	1.92	1.83	1.75
40	4.08	3.23	2.61	2.34	2.18	2.08	2.00	1.90	1.81	1.73
42	4.07	3.22	2.59	2.32	2.17	2.06	1.99	1.89	1.80	1.72
44	4.06	3.21	2.58	2.31	2.16	2.05	1.98	1.88	1.79	1.71
46	4.05	3.20	2.57	2.30	2.15	2.04	1.97	1.87	1.78	1.70
48	4.04	3.19	2.57	2.29	2.14	2.03	1.96	1.86	1.77	1.69
50	4.03	3.18	2.56	2.29	2.13	2.03	1.95	1.85	1.76	1.68
55	4.02	3.16	2.54	2.27	2.11	2.01	1.93	1.83	1.74	1.66
60	4.00	3.15	2.53	2.25	2.10	1.99	1.92	1.82	1.72	1.64
65	3.99	3.14	2.51	2.24	2.08	1.98	1.90	1.80	1.71	1.62
70	3.98	3.13	2.50	2.23	2.07	1.97	1.89	1.79	1.70	1.61
80	3.96	3.11	2.49	2.21	2.06	1.95	1.88	1.77	1.68	1.59
90	3.95	3.10	2.47	2.20	2.04	1.94	1.86	1.76	1.66	1.57
100	3.94	3.09	2.46	2.19	2.03	1.93	1.85	1.75	1.65	1.56
125	3.92	3.07	2.44	2.17	2.01	1.91	1.83	1.72	1.63	1.54
150	3.90	3.06	2.43	2.16	2.00	1.89	1.82	1.71	1.61	1.52
200	3.89	3.04	2.42	2.14	1.98	1.88	1.80	1.69	1.60	1.50
300	3.87	3.03	2.40	2.13	1.97	1.86	1.78	1.68	1.58	1.48
500	3.86	3.01	2.39	2.12	1.96	1.85	1.77	1.66	1.56	1.47
1,000	3.85	3.00	2.38	2.11	1.95	1.84	1.76	1.65	1.55	1.46
2,000	3.84	3.00	2.37	2.10	1.94	1.83	1.75	1.64	1.54	1.44

$s = 1$ Upper 1% points

r \ r':	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
1†	405.00	500.00	563.00	586.00	598.00	606.00	611.00	617.00	622.00	627.00
2	98.50	99.00	99.20	99.30	99.40	99.40	99.40	99.40	99.50	99.50
3	34.10	30.80	28.70	27.90	27.50	27.20	27.10	26.80	26.60	26.50
4	21.20	18.00	16.00	15.20	14.80	14.50	14.40	14.20	14.00	13.80
5	16.30	13.30	11.40	10.70	10.30	10.10	9.89	9.68	9.51	9.36
6	13.70	10.90	9.15	8.47	8.10	7.87	7.72	7.52	7.35	7.21
7	12.20	9.55	7.85	7.19	6.84	6.62	6.47	6.27	6.11	5.97
8	11.30	8.65	7.01	6.37	6.03	5.81	5.67	5.48	5.32	5.18
9	10.60	8.02	6.42	5.80	5.47	5.26	5.11	4.92	4.77	4.63
10	10.00	7.56	5.99	5.39	5.06	4.85	4.71	4.52	4.36	4.23
11	9.65	7.21	5.67	5.07	4.74	4.54	4.40	4.21	4.06	3.92
12	9.33	6.93	5.41	4.82	4.50	4.30	4.16	3.97	3.82	3.68
13	9.07	6.70	5.21	4.62	4.30	4.10	3.96	3.78	3.62	3.49
14	8.86	6.51	5.04	4.46	4.14	3.94	3.80	3.62	3.46	3.33
15	8.68	6.36	4.89	4.32	4.00	3.80	3.67	3.49	3.33	3.19
16	8.53	6.23	4.77	4.20	3.89	3.69	3.55	3.37	3.22	3.08
17	8.40	6.11	4.67	4.10	3.79	3.59	3.46	3.27	3.12	2.98
18	8.29	6.01	4.58	4.01	3.71	3.51	3.37	3.19	3.03	2.90
19	8.18	5.93	4.50	3.94	3.63	3.43	3.30	3.12	2.96	2.82
20	8.10	5.85	4.43	3.87	3.56	3.37	3.23	3.05	2.90	2.76
22	7.95	5.72	4.31	3.76	3.45	3.26	3.12	2.94	2.78	2.65
24	7.82	5.61	4.22	3.67	3.36	3.17	3.03	2.85	2.70	2.56
26	7.72	5.53	4.14	3.59	3.29	3.09	2.96	2.78	2.62	2.48
28	7.64	5.45	4.07	3.53	3.23	3.03	2.90	2.72	2.56	2.42
30	7.56	5.39	4.02	3.47	3.17	2.98	2.84	2.66	2.51	2.37
32	7.50	5.34	3.97	3.43	3.13	2.93	2.80	2.62	2.46	2.32
34	7.44	5.29	3.93	3.39	3.09	2.89	2.76	2.58	2.42	2.28
36	7.40	5.25	3.89	3.35	3.05	2.86	2.72	2.54	2.38	2.24
38	7.35	5.21	3.86	3.32	3.02	2.83	2.69	2.51	2.35	2.21
40	7.31	5.18	3.83	3.29	2.99	2.80	2.66	2.48	2.33	2.18
42	7.28	5.15	3.80	3.27	2.97	2.78	2.64	2.46	2.30	2.16
44	7.25	5.12	3.78	3.24	2.95	2.75	2.62	2.44	2.28	2.13
46	7.22	5.10	3.76	3.22	2.93	2.73	2.60	2.42	2.26	2.11
48	7.19	5.08	3.74	3.20	2.91	2.72	2.58	2.40	2.24	2.10
50	7.17	5.06	3.72	3.19	2.89	2.70	2.56	2.38	2.22	2.08
55	7.12	5.01	3.68	3.15	2.85	2.66	2.53	2.34	2.18	2.04
60	7.08	4.98	3.65	3.12	2.82	2.63	2.50	2.31	2.15	2.01
65	7.04	4.95	3.62	3.09	2.80	2.61	2.47	2.29	2.13	1.98
70	7.01	4.92	3.60	3.07	2.78	2.59	2.45	2.27	2.11	1.97
80	6.96	4.88	3.56	3.04	2.74	2.55	2.42	2.23	2.07	1.92
90	6.93	4.85	3.54	3.01	2.72	2.52	2.39	2.21	2.04	1.90
100	6.90	4.82	3.51	2.99	2.69	2.50	2.37	2.19	2.02	1.87
125	6.84	4.78	3.47	2.95	2.66	2.47	2.33	2.15	1.98	1.83
150	6.81	4.75	3.45	2.92	2.63	2.44	2.31	2.12	1.96	1.81
200	6.76	4.71	3.41	2.89	2.60	2.41	2.27	2.09	1.93	1.77
300	6.72	4.68	3.38	2.86	2.57	2.38	2.24	2.06	1.89	1.74
500	6.69	4.65	3.36	2.84	2.55	2.36	2.22	2.04	1.87	1.72
000	6.66	4.63	3.34	2.82	2.53	2.34	2.20	2.02	1.85	1.70
000	6.63	4.61	3.32	2.80	2.51	2.32	2.18	2.00	1.83	1.68

† Entries in this row should be multiplied by 10.

$s = 2$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	12.23	7.78	5.59	4.81	4.40	4.15	3.98	3.76	3.58	3.42
14	11.87	7.54	5.39	4.62	4.22	3.98	3.81	3.59	3.41	3.25
16	11.50	7.29	5.19	4.44	4.05	3.80	3.63	3.42	3.24	3.08
18	11.14	7.05	4.99	4.25	3.87	3.62	3.46	3.25	3.07	2.91
20	10.78	6.81	4.79	4.07	3.69	3.45	3.29	3.08	2.90	2.74
25	10.24	6.44	4.49	3.79	3.42	3.19	3.03	2.82	2.64	2.48
30	9.95	6.24	4.33	3.64	3.27	3.04	2.88	2.68	2.50	2.34
35	9.74	6.10	4.22	3.53	3.17	2.94	2.78	2.58	2.40	2.24
40	9.59	6.00	4.14	3.46	3.10	2.87	2.71	2.51	2.33	2.17
45	9.48	5.93	4.07	3.40	3.04	2.81	2.66	2.45	2.27	2.11
50	9.39	5.87	4.03	3.35	3.00	2.77	2.61	2.41	2.23	2.07
60	9.27	5.78	3.95	3.29	2.93	2.71	2.55	2.35	2.17	2.00
70	9.19	5.72	3.91	3.25	2.89	2.67	2.51	2.31	2.13	1.96
80	9.12	5.68	3.87	3.21	2.86	2.63	2.48	2.27	2.09	1.93
90	9.07	5.65	3.84	3.19	2.83	2.61	2.45	2.25	2.07	1.90
100	9.04	5.62	3.83	3.17	2.82	2.59	2.44	2.23	2.05	1.89
150	8.91	5.53	3.75	3.10	2.75	2.53	2.37	2.17	1.98	1.82
200	8.84	5.49	3.72	3.07	2.72	2.50	2.34	2.14	1.95	1.78
300	8.79	5.45	3.69	3.04	2.69	2.47	2.31	2.11	1.92	1.75
500	8.74	5.42	3.66	3.02	2.67	2.45	2.29	2.09	1.90	1.73
1,000	8.71	5.39	3.64	3.00	2.65	2.43	2.27	2.07	1.88	1.71
2,000	8.69	5.38	3.63	2.99	2.64	2.42	2.27	2.06	1.87	1.70

$s = 2$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	20.36	12.57	8.75	7.40	6.70	6.27	5.98	5.61	5.30	5.03
14	19.50	12.01	8.31	7.01	6.33	5.91	5.63	5.27	4.96	4.70
16	18.63	11.45	7.88	6.61	5.96	5.55	5.28	4.92	4.62	4.37
18	17.77	10.89	7.44	6.22	5.59	5.19	4.92	4.58	4.29	4.04
20	16.90	10.32	7.00	5.83	5.21	4.83	4.57	4.24	3.95	3.71
25	15.64	9.50	6.37	5.26	4.67	4.31	4.06	3.74	3.46	3.23
30	14.98	9.07	6.04	4.96	4.39	4.04	3.79	3.48	3.21	2.97
35	14.52	8.77	5.81	4.75	4.20	3.85	3.61	3.30	3.03	2.80
40	14.20	8.56	5.65	4.61	4.06	3.72	3.48	3.17	2.91	2.68
45	13.96	8.40	5.53	4.50	3.96	3.62	3.39	3.08	2.82	2.59
50	13.77	8.28	5.44	4.42	3.88	3.54	3.31	3.01	2.75	2.51
60	13.50	8.10	5.30	4.30	3.77	3.43	3.20	2.90	2.64	2.41
70	13.33	7.99	5.22	4.22	3.69	3.36	3.13	2.83	2.57	2.34
80	13.17	7.89	5.14	4.15	3.63	3.30	3.07	2.77	2.51	2.28
90	13.08	7.83	5.10	4.11	3.59	3.26	3.04	2.74	2.48	2.25
100	13.01	7.78	5.06	4.08	3.56	3.23	3.01	2.71	2.45	2.22
150	12.74	7.60	4.92	3.96	3.45	3.12	2.90	2.60	2.34	2.11
200	12.61	7.52	4.86	3.90	3.39	3.07	2.85	2.55	2.30	2.06
300	12.49	7.44	4.80	3.85	3.34	3.02	2.80	2.51	2.25	2.01
500	12.40	7.38	4.76	3.81	3.31	2.99	2.76	2.47	2.21	1.98
1,000	12.32	7.33	4.72	3.78	3.27	2.95	2.73	2.44	2.18	1.95
2,000	12.29	7.31	4.70	3.76	3.26	2.94	2.72	2.43	2.17	1.93

$s' = 3$ Upper 5% points

r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	20.28	12.12	8.08	6.69	5.98	5.54	5.25	4.88	4.57	4.31
4	19.55	11.66	7.74	6.39	5.70	5.28	4.99	4.63	4.32	4.06
6	18.82	11.20	7.40	6.09	5.42	5.01	4.73	4.37	4.08	3.82
8	18.09	10.74	7.06	5.79	5.14	4.74	4.47	4.12	3.83	3.58
0	17.36	10.29	6.72	5.49	4.86	4.47	4.21	3.87	3.59	3.34
5	16.28	9.60	6.22	5.05	4.44	4.07	3.82	3.49	3.22	2.98
0	15.69	9.23	5.95	4.81	4.22	3.85	3.61	3.29	3.02	2.78
5	15.28	8.97	5.76	4.64	4.06	3.70	3.46	3.14	2.88	2.64
0	14.98	8.78	5.62	4.52	3.95	3.59	3.35	3.04	2.77	2.54
5	14.76	8.64	5.52	4.43	3.86	3.51	3.27	2.96	2.70	2.47
0	14.59	8.53	5.44	4.36	3.80	3.45	3.21	2.90	2.64	2.41
0	14.34	8.37	5.32	4.25	3.70	3.35	3.12	2.81	2.55	2.32
0	14.17	8.27	5.25	4.19	3.64	3.30	3.06	2.76	2.49	2.26
0	14.03	8.18	5.18	4.13	3.58	3.24	3.01	2.70	2.44	2.21
0	13.94	8.12	5.14	4.10	3.55	3.21	2.98	2.67	2.41	2.18
0	13.88	8.08	5.11	4.07	3.52	3.19	2.95	2.65	2.39	2.15
0	13.62	7.92	4.99	3.96	3.42	3.09	2.86	2.56	2.30	2.06
0	13.50	7.84	4.93	3.91	3.38	3.04	2.81	2.51	2.25	2.02
0	13.38	7.77	4.88	3.86	3.33	3.00	2.77	2.47	2.21	1.98
0	13.29	7.71	4.84	3.83	3.30	2.97	2.74	2.44	2.18	1.94
0	13.22	7.66	4.80	3.80	3.27	2.94	2.71	2.42	2.15	1.92
0	13.19	7.64	4.79	3.78	3.26	2.93	2.70	2.40	2.14	1.90

$s' = 3$ Upper 1% points

r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	31.94	18.81	12.30	10.08	8.94	8.25	7.79	7.19	6.70	6.28
14	30.35	17.83	11.61	9.48	8.39	7.73	7.28	6.71	6.24	5.83
16	28.76	16.85	10.92	8.88	7.84	7.21	6.78	6.23	5.77	5.38
18	27.17	15.88	10.22	8.28	7.29	6.68	6.27	5.75	5.31	4.93
20	25.59	14.90	9.53	7.69	6.74	6.16	5.77	5.26	4.84	4.48
25	23.28	13.48	8.53	6.82	5.94	5.40	5.04	4.57	4.17	3.83
30	22.08	12.74	8.01	6.37	5.53	5.01	4.66	4.21	3.83	3.50
35	21.26	12.23	7.65	6.07	5.25	4.75	4.40	3.96	3.59	3.27
40	20.69	11.88	7.41	5.86	5.06	4.56	4.23	3.79	3.42	3.10
45	20.26	11.62	7.22	5.70	4.91	4.42	4.09	3.66	3.30	2.98
50	19.92	11.41	7.08	5.57	4.80	4.32	3.99	3.57	3.20	2.89
60	19.43	11.11	6.87	5.39	4.63	4.16	3.84	3.42	3.06	2.75
70	19.12	10.92	6.74	5.28	4.53	4.06	3.74	3.33	2.98	2.66
80	18.85	10.75	6.62	5.18	4.44	3.98	3.66	3.25	2.90	2.59
90	18.69	10.65	6.55	5.12	4.38	3.92	3.61	3.20	2.85	2.54
00	18.56	10.57	6.49	5.07	4.34	3.88	3.57	3.16	2.81	2.50
50	18.08	10.28	6.29	4.90	4.18	3.73	3.42	3.02	2.67	2.37
00	17.85	10.14	6.19	4.82	4.10	3.66	3.35	2.95	2.61	2.30
00	17.64	10.01	6.10	4.74	4.03	3.59	3.29	2.89	2.55	2.24
00	17.48	9.91	6.03	4.68	3.98	3.54	3.24	2.84	2.50	2.19
00	17.34	9.83	5.98	4.63	3.93	3.50	3.20	2.80	2.46	2.16
00	17.28	9.79	5.95	4.61	3.91	3.48	3.18	2.78	2.45	2.14

$s' = 4$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	29.37	16.97	10.80	8.70	7.64	7.00	6.57	6.02	5.57	5.19
14	28.15	16.23	10.29	8.27	7.25	6.63	6.21	5.68	5.24	4.87
16	26.94	15.50	9.78	7.84	6.86	6.26	5.85	5.34	4.92	4.56
18	25.72	14.76	9.28	7.41	6.46	5.89	5.50	5.00	4.59	4.24
20	24.51	14.03	8.77	6.98	6.07	5.51	5.14	4.66	4.27	3.93
25	22.70	12.94	8.02	6.34	5.49	4.96	4.61	4.16	3.78	3.46
30	21.72	12.34	7.61	6.00	5.17	4.67	4.32	3.89	3.52	3.20
35	21.04	11.93	7.33	5.76	4.95	4.46	4.12	3.70	3.33	3.02
40	20.56	11.64	7.13	5.59	4.80	4.31	3.98	3.56	3.20	2.90
45	20.19	11.42	6.98	5.46	4.68	4.20	3.87	3.46	3.10	2.80
50	19.90	11.25	6.86	5.36	4.59	4.11	3.79	3.38	3.03	2.72
60	19.49	10.99	6.69	5.21	4.45	3.99	3.67	3.26	2.91	2.61
70	19.22	10.83	6.58	5.12	4.37	3.90	3.59	3.18	2.84	2.54
80	18.98	10.69	6.48	5.03	4.29	3.83	3.52	3.12	2.78	2.47
90	18.84	10.60	6.42	4.98	4.24	3.79	3.48	3.08	2.74	2.44
100	18.73	10.53	6.37	4.94	4.21	3.75	3.44	3.05	2.70	2.40
150	18.31	10.28	6.20	4.79	4.07	3.63	3.32	2.92	2.59	2.29
200	18.10	10.15	6.11	4.72	4.01	3.56	3.26	2.87	2.53	2.23
300	17.92	10.04	6.04	4.66	3.95	3.51	3.20	2.82	2.48	2.18
500	17.77	9.96	5.98	4.61	3.90	3.46	3.16	2.77	2.44	2.14
1,000	17.65	9.88	5.93	4.57	3.86	3.42	3.13	2.74	2.40	2.10
2,000	17.60	9.85	5.91	4.55	3.84	3.41	3.11	2.72	2.39	2.09

$s' = 4$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	44.96	25.74	16.19	12.95	11.32	10.33	9.66	8.82	8.12	7.53
14	42.46	24.26	15.19	12.12	10.57	9.62	8.99	8.19	7.52	6.96
16	39.96	22.77	14.19	11.29	9.82	8.92	8.32	7.56	6.92	6.39
18	37.46	21.28	13.20	10.46	9.07	8.22	7.65	6.93	6.33	5.82
20	34.95	19.80	12.20	9.62	8.31	7.52	6.98	6.30	5.73	5.24
25	31.33	17.65	10.77	8.42	7.23	6.51	6.01	5.39	4.87	4.42
30	29.47	16.54	10.03	7.81	6.68	5.99	5.52	4.93	4.43	4.00
35	28.19	15.79	9.53	7.40	6.31	5.64	5.19	4.61	4.13	3.71
40	27.30	15.26	9.18	7.11	6.05	5.40	4.96	4.39	3.92	3.51
45	26.64	14.87	8.92	6.89	5.85	5.21	4.78	4.23	3.76	3.36
50	26.12	14.56	8.72	6.72	5.70	5.07	4.65	4.10	3.64	3.24
60	25.37	14.12	8.42	6.48	5.48	4.87	4.45	3.92	3.47	3.08
70	24.90	13.84	8.24	6.33	5.34	4.74	4.33	3.80	3.36	2.97
80	24.48	13.59	8.08	6.19	5.22	4.63	4.22	3.70	3.26	2.87
90	24.23	13.45	7.98	6.11	5.15	4.56	4.16	3.64	3.20	2.82
100	24.03	13.33	7.90	6.04	5.09	4.50	4.10	3.59	3.16	2.77
150	23.30	12.89	7.62	5.81	4.88	4.31	3.91	3.41	2.98	2.60
200	22.95	12.69	7.48	5.69	4.78	4.21	3.83	3.33	2.90	2.52
300	22.63	12.50	7.36	5.59	4.68	4.13	3.74	3.25	2.83	2.45
500	22.38	12.35	7.26	5.51	4.61	4.06	3.68	3.19	2.77	2.39
1,000	22.18	12.23	7.18	5.45	4.55	4.00	3.63	3.14	2.72	2.35
2,000	22.08	12.17	7.14	5.42	4.53	3.98	3.60	3.12	2.70	2.33

	$s' = 5$									Upper 5% points
r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
	39.52	22.33	13.76	10.88	9.42	8.54	7.95	7.21	6.59	6.07
	37.70	21.26	13.06	10.30	8.90	8.06	7.49	6.78	6.18	5.68
	35.87	20.19	12.36	9.71	8.38	7.57	7.03	6.34	5.77	5.29
	34.05	19.12	11.65	9.13	7.86	7.08	6.57	5.91	5.36	4.90
	32.23	18.05	10.95	8.55	7.34	6.60	6.10	5.48	4.96	4.51
	29.53	16.47	9.91	7.69	6.57	5.88	5.42	4.83	4.35	3.93
	28.06	15.61	9.35	7.23	6.15	5.49	5.05	4.49	4.02	3.62
	27.05	15.01	8.96	6.90	5.86	5.22	4.79	4.25	3.79	3.40
	26.33	14.60	8.68	6.68	5.66	5.03	4.61	4.08	3.63	3.24
	25.79	14.28	8.47	6.50	5.50	4.89	4.48	3.95	3.50	3.12
	25.37	14.03	8.31	6.37	5.38	4.78	4.37	3.85	3.41	3.03
	24.75	13.66	8.07	6.17	5.20	4.61	4.21	3.70	3.27	2.89
	24.35	13.43	7.92	6.05	5.09	4.51	4.11	3.60	3.18	2.80
	24.00	13.23	7.79	5.94	4.99	4.42	4.02	3.52	3.10	2.73
	23.79	13.11	7.71	5.87	4.93	4.36	3.97	3.47	3.05	2.68
	23.62	13.00	7.64	5.82	4.88	4.31	3.93	3.43	3.01	2.64
	23.00	12.64	7.40	5.62	4.71	4.15	3.77	3.28	2.86	2.50
	22.70	12.46	7.29	5.52	4.62	4.07	3.69	3.21	2.80	2.43
	22.42	12.30	7.18	5.44	4.54	4.00	3.62	3.14	2.73	2.37
	22.21	12.18	7.10	5.37	4.48	3.94	3.57	3.09	2.68	2.32
	22.03	12.07	7.03	5.31	4.43	3.89	3.52	3.05	2.64	2.28
	21.95	12.03	7.00	5.29	4.41	3.87	3.50	3.03	2.62	2.26

	$s' = 5$									Upper 1% points
r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	59.47	33.41	20.42	16.05	13.85	12.52	11.63	10.50	9.58	8.80
4	55.86	31.32	19.08	14.96	12.88	11.62	10.78	9.72	8.84	8.10
6	52.26	29.23	17.74	13.86	11.91	10.72	9.93	8.93	8.10	7.40
8	48.66	27.15	16.39	12.77	10.93	9.83	9.08	8.14	7.36	6.70
0	45.05	25.06	15.05	11.67	9.96	8.93	8.23	7.35	6.62	6.01
5	39.86	22.05	13.12	10.10	8.57	7.64	7.02	6.22	5.56	5.00
0	37.20	20.52	12.14	9.30	7.86	6.99	6.40	5.65	5.03	4.50
5	35.38	19.47	11.46	8.76	7.38	6.54	5.98	5.26	4.66	4.15
0	34.12	18.74	11.00	8.38	7.05	6.24	5.69	4.99	4.41	3.91
5	33.18	18.20	10.65	8.10	6.80	6.01	5.47	4.79	4.22	3.73
0	32.45	17.78	10.39	7.88	6.61	5.83	5.31	4.64	4.07	3.59
0	31.39	17.16	10.00	7.57	6.33	5.57	5.06	4.41	3.86	3.39
0	30.72	16.78	9.76	7.37	6.15	5.41	4.91	4.27	3.73	3.26
0	30.14	16.44	9.54	7.19	6.00	5.27	4.78	4.15	3.61	3.15
0	29.79	16.24	9.41	7.09	5.91	5.19	4.70	4.07	3.54	3.08
0	29.50	16.08	9.31	7.01	5.83	5.12	4.63	4.01	3.49	3.03
0	28.47	15.49	8.93	6.70	5.57	4.87	4.40	3.79	3.28	2.83
0	27.98	15.20	8.75	6.56	5.44	4.75	4.29	3.69	3.18	2.74
0	27.53	14.94	8.59	6.43	5.32	4.64	4.18	3.59	3.09	2.65
0	27.18	14.75	8.46	6.32	5.23	4.56	4.11	3.52	3.02	2.58
0	26.90	14.58	8.36	6.24	5.16	4.49	4.04	3.46	2.97	2.53
0	26.77	14.51	8.31	6.20	5.12	4.46	4.01	3.43	2.94	2.50

$s' = 6$ Upper 5% points

t	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	50.73	28.22	16.99	13.22	11.32	10.18	9.41	8.45	7.65	6.99
14	48.18	26.76	16.06	12.46	10.66	9.57	8.83	7.91	7.15	6.52
16	45.63	25.29	15.13	11.71	9.99	8.95	8.26	7.38	6.66	6.05
18	43.09	23.83	14.20	10.96	9.33	8.34	7.68	6.85	6.16	5.58
20	40.54	22.37	13.27	10.21	8.67	7.73	7.10	6.31	5.66	5.10
25	36.77	20.20	11.90	9.10	7.69	6.83	6.25	5.53	4.92	4.41
30	34.73	19.04	11.16	8.50	7.16	6.34	5.80	5.10	4.52	4.03
35	33.32	18.23	10.65	8.09	6.79	6.01	5.48	4.81	4.25	3.77
40	32.33	17.66	10.28	7.80	6.54	5.77	5.25	4.60	4.05	3.58
45	31.58	17.23	10.01	7.58	6.34	5.59	5.08	4.44	3.90	3.44
50	30.99	16.89	9.80	7.40	6.19	5.45	4.95	4.32	3.79	3.33
60	30.13	16.40	9.49	7.15	5.97	5.24	4.76	4.14	3.62	3.17
70	29.58	16.08	9.29	6.99	5.82	5.11	4.63	4.02	3.51	3.07
80	29.10	15.81	9.11	6.85	5.70	5.00	4.53	3.92	3.41	2.97
90	28.81	15.64	9.01	6.76	5.62	4.93	4.46	3.86	3.36	2.92
100	28.57	15.50	8.92	6.69	5.56	4.87	4.41	3.81	3.31	2.87
150	27.71	15.01	8.61	6.44	5.34	4.67	4.21	3.63	3.14	2.71
200	27.30	14.77	8.46	6.32	5.23	4.57	4.12	3.54	3.05	2.63
300	26.92	14.56	8.32	6.21	5.14	4.48	4.03	3.46	2.98	2.55
500	26.63	14.39	8.22	6.13	5.06	4.41	3.97	3.40	2.92	2.50
1,000	26.38	14.25	8.13	6.05	5.00	4.35	3.91	3.35	2.87	2.45
2,000	26.27	14.18	8.09	6.02	4.97	4.32	3.89	3.32	2.85	2.43

$s' = 6$ Upper 1% points

t	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	75.49	41.82	25.02	19.39	16.56	14.85	13.71	12.27	11.08	10.09
14	70.59	39.04	23.29	18.00	15.34	13.74	12.67	11.31	10.20	9.26
16	65.70	36.26	21.55	16.61	14.13	12.63	11.62	10.36	9.31	8.43
18	60.80	33.48	19.81	15.22	12.91	11.52	10.58	9.40	8.43	7.60
20	55.91	30.69	18.08	13.83	11.70	10.40	9.54	8.44	7.54	6.78
25	48.87	26.70	15.58	11.84	9.96	8.81	8.05	7.08	6.27	5.59
30	45.29	24.67	14.33	10.84	9.08	8.01	7.30	6.39	5.64	4.99
35	42.85	23.29	13.47	10.16	8.48	7.47	6.79	5.92	5.20	4.59
40	41.17	22.34	12.88	9.69	8.07	7.09	6.43	5.60	4.90	4.31
45	39.91	21.62	12.43	9.33	7.77	6.81	6.17	5.36	4.68	4.10
50	38.93	21.07	12.09	9.06	7.53	6.60	5.97	5.17	4.50	3.93
60	37.51	20.27	11.60	8.67	7.19	6.28	5.68	4.90	4.25	3.70
70	36.63	19.77	11.29	8.42	6.97	6.09	5.49	4.73	4.10	3.55
80	35.85	19.33	11.01	8.21	6.78	5.92	5.33	4.59	3.96	3.42
90	35.38	19.06	10.85	8.08	6.67	5.81	5.24	4.50	3.88	3.34
100	35.00	18.85	10.72	7.97	6.58	5.73	5.16	4.43	3.81	3.28
150	33.63	18.07	10.24	7.59	6.25	5.43	4.87	4.17	3.57	3.05
200	32.97	17.71	10.02	7.41	6.09	5.29	4.74	4.04	3.45	2.94
300	32.38	17.37	9.81	7.25	5.95	5.16	4.62	3.93	3.35	2.84
500	31.93	17.11	9.65	7.12	5.84	5.06	4.52	3.84	3.27	2.76
1,000	31.55	16.90	9.52	7.02	5.75	4.97	4.44	3.77	3.20	2.70
2,000	31.37	16.80	9.46	6.97	5.71	4.93	4.41	3.74	3.17	2.67

$s' = 7$ Upper 5% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	62.95	34.62	20.47	15.73	13.35	11.91	10.95	9.75	8.75	7.92
14	59.57	32.71	19.29	14.79	12.53	11.17	10.25	9.11	8.15	7.37
16	56.19	30.80	18.10	13.85	11.71	10.42	9.55	8.47	7.56	6.81
18	52.81	28.89	16.92	12.90	10.89	9.67	8.85	7.83	6.97	6.26
20	49.44	26.98	15.74	11.96	10.06	8.92	8.15	7.18	6.38	5.71
25	44.44	24.15	13.99	10.57	8.85	7.81	7.12	6.24	5.51	4.89
30	41.75	22.63	13.05	9.83	8.20	7.22	6.56	5.73	5.04	4.45
35	39.88	21.58	12.40	9.31	7.75	6.81	6.18	5.38	4.71	4.14
40	38.56	20.83	11.94	8.95	7.44	6.52	5.91	5.13	4.48	3.93
45	37.56	20.27	11.59	8.67	7.20	6.30	5.70	4.94	4.31	3.76
50	36.78	19.83	11.32	8.46	7.01	6.13	5.54	4.79	4.17	3.63
60	35.63	19.19	10.93	8.14	6.74	5.88	5.31	4.58	3.97	3.45
70	34.92	18.79	10.68	7.95	6.57	5.73	5.16	4.44	3.84	3.33
80	34.29	18.43	10.46	7.77	6.41	5.59	5.03	4.32	3.73	3.22
90	33.92	18.22	10.33	7.67	6.32	5.50	4.95	4.25	3.66	3.16
00	33.60	18.04	10.22	7.58	6.25	5.43	4.89	4.19	3.61	3.10
50	32.43	17.40	9.83	7.27	5.97	5.19	4.65	3.98	3.41	2.91
00	31.95	17.10	9.63	7.12	5.84	5.07	4.54	3.87	3.31	2.82
00	31.42	16.81	9.46	6.98	5.72	4.96	4.44	3.78	3.22	2.73
00	31.03	16.59	9.33	6.87	5.63	4.87	4.36	3.70	3.15	2.67
00	30.71	16.41	9.21	6.78	5.55	4.80	4.29	3.64	3.09	2.61
00	30.58	16.33	9.16	6.74	5.52	4.77	4.26	3.61	3.07	2.59

$s' = 7$ Upper 1% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	93.02	50.98	30.00	22.97	19.45	17.32	15.90	14.12	12.65	11.42
14	86.65	47.41	27.82	21.26	17.97	15.98	14.65	12.98	11.61	10.46
16	80.28	43.85	25.64	19.55	16.48	14.64	13.40	11.85	10.57	9.49
18	73.90	40.28	23.47	17.83	15.00	13.29	12.15	10.71	9.53	8.53
20	67.53	36.71	21.29	16.12	13.52	11.95	10.90	9.58	8.48	7.56
25	58.39	31.60	18.18	13.67	11.40	10.03	9.11	7.95	7.00	6.18
30	53.78	29.02	16.61	12.44	10.34	9.07	8.22	7.14	6.25	5.50
35	50.63	27.26	15.54	11.61	9.62	8.42	7.61	6.59	5.75	5.03
40	48.46	26.05	14.81	11.03	9.12	7.97	7.19	6.21	5.40	4.70
45	46.84	25.15	14.26	10.60	8.75	7.64	6.88	5.93	5.14	4.46
50	45.58	24.45	13.84	10.27	8.47	7.38	6.64	5.71	4.94	4.28
60	43.76	23.43	13.23	9.79	8.05	7.00	6.29	5.40	4.65	4.01
70	42.63	22.80	12.85	9.49	7.80	6.77	6.08	5.20	4.47	3.84
80	41.63	22.25	12.51	9.23	7.57	6.56	5.89	5.03	4.31	3.69
90	41.04	21.92	12.31	9.07	7.44	6.44	5.77	4.92	4.21	3.60
00	40.55	21.64	12.14	8.94	7.33	6.34	5.68	4.84	4.13	3.53
50	38.80	20.67	11.56	8.48	6.93	5.98	5.35	4.54	3.85	3.27
00	37.96	20.21	11.28	8.27	6.74	5.82	5.19	4.39	3.71	3.14
00	37.21	19.78	11.02	8.07	6.57	5.66	5.05	4.26	3.60	3.03
00	36.63	19.46	10.83	7.92	6.44	5.54	4.93	4.16	3.51	2.94
00	36.15	19.19	10.67	7.79	6.33	5.44	4.84	4.08	3.43	2.87
0	35.92	19.07	10.59	7.73	6.28	5.40	4.80	4.04	3.40	2.83

$s' = 8$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	76.34	41.58	24.22	18.41	15.51	13.74	12.57	11.10	9.90	8.88
14	71.99	39.16	22.75	17.26	14.51	12.85	11.74	10.34	9.21	8.24
16	67.65	36.73	21.28	16.11	13.52	11.95	10.90	9.59	8.52	7.60
18	63.30	34.31	19.81	14.96	12.53	11.05	10.07	8.83	7.82	6.96
20	58.95	31.88	18.35	13.81	11.53	10.15	9.24	8.08	7.13	6.32
25	52.53	28.31	16.18	12.11	10.07	8.83	8.01	6.97	6.11	5.38
30	49.09	26.39	15.02	11.21	9.29	8.13	7.35	6.37	5.56	4.87
35	46.70	25.06	14.21	10.58	8.75	7.64	6.89	5.96	5.18	4.52
40	45.00	24.12	13.65	10.13	8.36	7.30	6.57	5.67	4.91	4.27
45	43.74	23.42	13.22	9.80	8.08	7.03	6.33	5.45	4.71	4.09
50	42.77	22.86	12.89	9.54	7.85	6.83	6.14	5.28	4.55	3.94
60	41.29	22.60	12.40	9.16	7.52	6.53	5.87	5.02	4.32	3.72
70	40.37	21.55	12.10	8.92	7.32	6.35	5.69	4.87	4.17	3.58
80	39.56	21.10	11.83	8.71	7.13	6.18	5.54	4.72	4.04	3.46
90	39.08	20.83	11.67	8.58	7.02	6.08	5.45	4.64	3.97	3.39
100	38.68	20.61	11.53	8.47	6.93	6.00	5.37	4.57	3.90	3.33
150	37.23	19.80	11.50	8.10	6.61	5.70	5.09	4.32	3.67	3.11
200	36.56	19.42	10.82	7.91	6.45	5.56	4.96	4.20	3.56	3.01
300	35.94	19.06	10.60	7.75	6.31	5.43	4.84	4.09	3.46	2.91
500	35.42	18.79	10.43	7.62	6.19	5.33	4.75	4.00	3.38	2.83
1,000	35.01	18.56	10.30	7.51	6.10	5.25	4.67	3.93	3.31	2.77
2,000	34.84	18.46	10.24	7.46	6.06	5.21	4.63	3.90	3.28	2.74

$s' = 8$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	112.06	60.90	35.34	26.80	22.52	19.94	18.22	16.05	14.28	12.79
14	104.03	56.45	32.68	24.73	20.75	18.35	16.74	14.73	13.07	11.68
16	96.00	52.01	30.02	22.66	18.98	16.75	15.27	13.40	11.87	10.58
18	87.97	47.56	27.36	20.60	17.21	15.16	13.79	12.08	10.66	9.47
20	79.94	43.12	24.70	18.53	15.43	13.57	12.32	10.75	9.46	8.37
25	68.44	36.76	20.90	15.58	12.91	11.30	10.22	8.86	7.74	6.79
30	62.66	33.57	18.99	14.11	11.65	10.17	9.17	7.92	6.88	6.00
35	58.72	31.39	17.70	13.10	10.79	9.40	8.46	7.28	6.30	5.47
40	56.01	29.90	16.81	12.42	10.20	8.87	7.97	6.84	5.90	5.10
45	53.98	28.78	16.14	11.90	9.77	8.47	7.61	6.51	5.60	4.83
50	52.42	27.92	15.63	11.51	9.43	8.17	7.33	6.26	5.37	4.62
60	50.16	26.67	14.89	10.93	8.94	7.73	6.92	5.90	5.04	4.31
70	48.75	25.90	14.43	10.58	8.64	7.46	6.67	5.67	4.83	4.12
80	47.51	25.21	14.02	10.26	8.37	7.22	6.45	5.47	4.65	3.95
90	46.77	24.81	13.78	10.08	8.21	7.08	6.32	5.35	4.55	3.85
100	46.16	24.47	13.58	9.92	8.08	6.96	6.21	5.25	4.46	3.77
150	43.99	23.28	12.88	9.38	7.61	6.54	5.82	4.90	4.14	3.48
200	42.96	22.71	12.54	9.12	7.39	6.34	5.64	4.74	3.99	3.34
300	42.02	22.19	12.24	8.88	7.19	6.16	5.47	4.59	3.85	3.21
500	41.30	21.80	12.00	8.70	7.04	6.02	5.34	4.47	3.74	3.11
1,000	40.70	21.47	11.81	8.55	6.91	5.91	5.24	4.38	3.66	3.03
2,000	40.43	21.32	11.71	8.48	6.85	5.86	5.19	4.33	3.62	2.99

$s' = 9$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	90.90	49.05	28.22	21.28	17.78	15.68	14.29	12.52	11.08	9.90
14	85.44	46.05	26.44	19.90	16.60	14.62	13.31	11.65	10.29	9.16
16	79.97	43.06	24.66	18.52	15.42	13.56	12.33	10.77	9.49	8.43
18	74.51	40.07	22.88	17.14	14.25	12.51	11.35	9.89	8.69	7.70
20	69.05	37.07	21.10	15.76	13.07	11.45	10.37	9.01	7.89	6.96
25	61.02	32.67	18.48	13.72	11.34	9.89	8.93	7.72	6.72	5.88
30	56.75	30.31	17.07	12.64	10.41	9.06	8.16	7.03	6.09	5.30
35	53.78	28.67	16.10	11.89	9.77	8.49	7.63	6.55	5.66	4.90
40	51.67	27.53	15.42	11.36	9.32	8.09	7.26	6.22	5.35	4.62
45	50.10	26.66	14.90	10.96	8.98	7.78	6.98	5.96	5.12	4.41
50	48.88	25.98	14.50	10.65	8.71	7.54	6.76	5.77	4.94	4.24
60	47.07	24.99	13.92	10.20	8.33	7.19	6.43	5.47	4.68	4.00
70	45.96	24.37	13.55	9.91	8.08	6.98	6.23	5.29	4.51	3.84
80	44.98	23.82	13.22	9.66	7.87	6.78	6.05	5.13	4.36	3.70
90	44.38	23.49	13.02	9.51	7.74	6.66	5.94	5.03	4.27	3.62
100	43.87	23.21	12.86	9.38	7.63	6.57	5.85	4.95	4.20	3.56
150	42.06	22.23	12.28	8.93	7.24	6.22	5.54	4.67	3.94	3.31
200	41.26	21.77	11.99	8.71	7.06	6.06	5.38	4.53	3.81	3.19
300	40.39	21.32	11.74	8.52	6.89	5.91	5.24	4.40	3.69	3.08
500	39.82	20.99	11.54	8.37	6.76	5.79	5.13	4.30	3.60	3.00
,000	39.29	20.71	11.38	8.24	6.65	5.69	5.04	4.22	3.53	2.93
,000	39.09	20.59	11.30	8.18	6.60	5.65	5.00	4.18	3.49	2.89

$s' = 9$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	132.59	71.56	41.07	30.88	25.77	22.70	20.65	18.08	15.96	14.22
14	122.72	66.15	37.87	28.43	23.69	20.84	18.94	16.55	14.59	12.96
16	112.85	60.73	34.68	25.98	21.61	18.98	17.23	15.02	13.21	11.70
18	102.98	55.32	31.49	23.52	19.53	17.12	15.51	13.50	11.83	10.45
20	93.12	49.91	28.30	21.07	17.44	15.26	13.80	11.97	10.46	9.19
25	79.01	42.18	23.74	17.58	14.48	12.61	11.36	9.79	8.50	7.41
30	71.94	38.31	21.47	15.84	13.00	11.30	10.15	8.71	7.52	6.52
35	67.13	35.68	19.91	14.65	12.00	10.40	9.33	7.98	6.86	5.92
40	63.83	33.88	18.87	13.84	11.32	9.79	8.77	7.48	6.41	5.51
45	61.36	32.53	18.08	13.24	10.80	9.33	8.35	7.10	6.07	5.20
50	59.45	31.48	17.47	12.77	10.41	8.93	8.02	6.82	5.81	4.96
60	56.70	29.98	16.59	12.10	9.84	8.47	7.56	6.40	5.44	4.62
70	54.99	29.05	16.05	11.68	9.49	8.16	7.27	6.14	5.21	4.41
80	53.48	28.23	15.56	11.32	9.17	7.88	7.01	5.91	5.00	4.22
90	52.59	27.74	15.28	11.10	8.99	7.72	6.86	5.78	4.88	4.11
100	51.85	27.34	15.04	10.92	8.84	7.58	6.74	5.67	4.78	4.02
150	49.21	25.90	14.20	10.28	8.30	7.10	6.29	5.27	4.42	3.69
200	47.97	25.22	13.81	9.97	8.04	6.87	6.08	5.08	4.25	3.53
300	46.83	24.60	13.44	9.70	7.81	6.66	5.89	4.91	4.10	3.39
500	45.96	24.12	13.17	9.49	7.63	6.50	5.75	4.78	3.98	3.28
,000	45.23	23.73	12.94	9.31	7.48	6.37	5.62	4.67	3.88	3.19
,000	44.91	23.55	12.83	9.23	7.41	6.31	5.57	4.62	3.83	3.15

$s' = 10$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	106.38	57.09	32.50	24.32	20.21	17.73	16.06	14.01	12.32	11.06
14	99.72	53.46	30.38	22.68	18.83	16.50	14.94	13.01	11.41	10.20
16	93.06	49.84	28.25	21.06	17.45	15.27	13.81	12.00	10.50	9.35
18	86.41	46.21	26.13	19.42	16.07	14.04	12.68	10.99	9.60	8.49
20	79.75	42.58	24.00	17.79	14.68	12.81	11.55	9.98	8.69	7.63
25	69.95	37.25	20.88	15.40	12.65	11.00	9.89	8.50	7.35	6.39
30	64.72	34.40	19.21	14.12	11.57	10.04	9.01	7.71	6.64	5.74
35	61.12	32.43	18.06	13.24	10.83	9.37	8.39	7.16	6.15	5.29
40	58.61	31.05	17.25	12.62	10.30	8.90	7.96	6.78	5.80	4.98
45	56.70	30.01	16.64	12.15	9.90	8.55	7.64	6.49	5.54	4.74
50	55.19	29.19	16.16	11.79	9.59	8.27	7.38	6.26	5.33	4.55
60	53.02	28.00	15.46	11.26	9.15	7.87	7.01	5.93	5.04	4.28
70	51.65	27.25	15.02	10.92	8.86	7.62	6.78	5.73	4.85	4.10
80	50.44	26.59	14.63	10.62	8.61	7.39	6.57	5.54	4.68	3.95
90	49.71	26.19	14.40	10.45	8.46	7.26	6.45	5.43	4.58	3.86
100	49.10	25.86	14.21	10.30	8.33	7.15	6.35	5.34	4.50	3.78
150	46.90	24.68	13.52	9.77	7.89	6.75	5.98	5.01	4.20	3.51
200	45.92	24.11	13.18	9.52	7.67	6.55	5.80	4.85	4.06	3.38
300	44.94	23.59	12.88	9.29	7.48	6.38	5.64	4.71	3.93	3.25
500	44.25	23.20	12.65	9.11	7.33	6.24	5.52	4.60	3.83	3.16
1,000	43.62	22.86	12.45	8.96	7.20	6.13	5.41	4.50	3.74	3.08
2,000	43.32	22.71	12.37	8.89	7.14	6.08	5.37	4.46	3.70	3.04

$s' = 10$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	155.00	82.99	47.17	35.20	29.21	25.61	23.21	20.19	17.73	15.79
14	143.04	76.52	43.40	32.34	26.80	23.46	21.24	18.45	16.17	14.36
16	131.07	70.05	39.63	29.47	24.38	21.32	19.28	16.71	14.61	12.92
18	119.11	63.57	35.86	26.60	21.97	19.17	17.31	14.97	13.05	11.49
20	107.15	57.10	32.09	23.74	19.55	17.03	15.34	13.23	11.49	10.06
25	90.10	47.86	26.72	19.66	16.11	13.98	12.55	10.75	9.28	8.04
30	81.62	43.26	24.05	17.63	14.41	12.46	11.16	9.53	8.18	7.05
35	75.86	40.13	22.24	16.26	13.25	11.44	10.22	8.70	7.44	6.38
40	71.90	37.99	21.00	15.32	12.46	10.74	9.58	8.13	6.93	5.92
45	68.96	36.39	20.07	14.61	11.87	10.21	9.11	7.71	6.55	5.58
50	66.68	35.15	19.36	14.07	11.41	9.81	8.74	7.38	6.26	5.31
60	63.40	33.37	18.33	13.29	10.76	9.23	8.21	6.91	5.84	4.93
70	61.36	32.27	17.69	12.81	10.35	8.87	7.88	6.62	5.58	4.70
80	59.55	31.29	17.13	12.38	9.99	8.55	7.58	6.36	5.35	4.49
90	58.49	30.72	16.79	12.13	9.78	8.37	7.41	6.21	5.22	4.37
100	57.61	30.24	16.52	11.92	9.61	8.21	7.27	6.09	5.10	4.26
150	54.47	28.54	15.54	11.18	8.99	7.66	6.77	5.64	4.70	3.90
200	52.99	27.74	15.08	10.83	8.69	7.40	6.53	5.43	4.51	3.73
300	51.64	27.01	14.66	10.51	8.42	7.16	6.31	5.24	4.34	3.57
500	50.61	26.45	14.33	10.27	8.22	6.98	6.15	5.09	4.21	3.45
1,000	49.75	25.98	14.07	10.07	8.05	6.83	6.01	4.97	4.10	3.35
2,000	49.36	25.77	13.94	9.97	7.97	6.76	5.94	4.91	4.05	3.30

$s' = 11$ — Upper 5% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	122.70	65.58	37.03	27.50	22.73	19.86	17.95	15.55	13.58	11.94
4	114.77	61.28	34.54	25.60	21.14	18.45	16.65	14.40	12.56	11.02
6	106.84	56.97	32.04	23.71	19.54	17.04	15.36	13.26	11.54	10.10
8	98.92	52.67	29.54	21.82	17.95	15.62	14.07	12.12	10.52	9.18
0	90.99	48.37	27.05	19.93	16.36	14.21	12.78	10.98	9.50	8.26
5	79.32	42.04	23.38	17.15	14.02	12.14	10.88	9.30	8.00	6.90
0	73.10	38.66	21.43	15.66	12.77	11.03	9.87	8.40	7.20	6.18
5	68.79	36.33	20.08	14.64	11.91	10.27	9.17	7.79	6.65	5.68
0	65.76	34.69	19.13	13.92	11.31	9.73	8.68	7.35	6.26	5.33
5	63.48	33.45	18.41	13.38	10.85	9.33	8.31	7.03	5.96	5.07
0	61.70	32.48	17.85	12.96	10.50	9.01	8.02	6.77	5.73	4.86
0	59.12	31.08	17.04	12.34	9.98	8.55	7.60	6.40	5.40	4.56
0	57.49	30.19	16.53	11.95	9.65	8.26	7.33	6.16	5.19	4.37
0	56.02	29.41	16.07	11.61	9.36	8.01	7.10	5.95	5.00	4.19
0	55.15	28.94	15.80	11.40	9.19	7.85	6.96	5.83	4.89	4.09
0	54.43	28.55	15.58	11.23	9.05	7.73	6.84	5.73	4.80	4.01
0	51.86	27.15	14.77	10.62	8.53	7.27	6.42	5.35	4.47	3.70
0	50.63	26.48	14.38	10.33	8.29	7.05	6.23	5.18	4.31	3.56
0	49.49	25.87	14.03	10.06	8.06	6.85	6.04	5.02	4.16	3.42
0	48.62	25.40	13.76	9.85	7.89	6.70	5.90	4.89	4.05	3.32
0	47.90	25.00	13.53	9.68	7.74	6.57	5.78	4.78	3.95	3.23
0	47.56	24.82	13.42	9.60	7.68	6.51	5.73	4.74	3.91	3.19

$s' = 11$ — Upper 1% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	178.29	95.18	53.65	39.78	32.84	28.67	25.88	22.40	19.54	17.15
4	164.18	87.55	49.26	36.47	30.07	26.22	23.65	20.43	17.79	15.58
6	150.07	79.93	44.87	33.16	27.29	23.77	21.42	18.47	16.05	14.02
8	135.96	72.30	40.48	29.85	24.52	21.32	19.18	16.50	14.30	12.46
0	121.85	64.67	36.09	26.54	21.75	18.87	16.95	14.54	12.56	10.90
5	101.72	53.81	29.84	21.83	17.81	15.39	13.78	11.75	10.08	8.68
0	91.71	48.41	26.74	19.49	15.86	13.67	12.21	10.37	8.86	7.58
5	84.91	44.74	24.64	17.91	14.54	12.51	11.15	9.44	8.03	6.84
0	80.26	42.23	23.20	16.83	13.63	11.71	10.42	8.80	7.46	6.33
5	76.78	40.36	22.13	16.03	12.96	11.12	9.88	8.33	7.04	5.96
0	74.10	38.92	21.30	15.40	12.44	10.66	9.46	7.96	6.72	5.67
0	70.25	36.84	20.11	14.51	11.70	10.00	8.87	7.43	6.25	5.25
0	67.85	35.55	19.37	13.96	11.24	9.59	8.49	7.11	5.96	4.99
0	65.73	34.41	18.72	13.47	10.83	9.23	8.17	6.82	5.70	4.76
0	64.48	33.74	18.34	13.18	10.59	9.02	7.97	6.65	5.55	4.62
0	63.45	33.18	18.02	12.94	10.39	8.85	7.81	6.51	5.43	4.51
0	59.78	31.21	16.89	12.09	9.68	8.22	7.25	6.01	4.99	4.11
0	58.04	30.27	16.35	11.69	9.35	7.93	6.98	5.78	4.78	3.92
0	56.45	29.42	15.87	11.33	9.04	7.66	6.73	5.56	4.58	3.75
0	55.25	28.77	15.50	11.05	8.81	7.46	6.55	5.40	4.44	3.61
0	54.25	28.23	15.19	10.82	8.62	7.29	6.39	5.26	4.31	3.50
0	53.77	27.98	15.05	10.71	8.53	7.21	6.32	5.20	4.26	3.44

$s' = 12$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	140.51	74.66	41.84	30.88	25.40	22.11	19.91	17.16	14.90	13.01
14	131.11	69.61	38.94	28.70	23.58	20.50	18.45	15.87	13.76	11.99
16	121.72	64.56	36.04	26.53	21.76	18.90	16.98	14.59	12.62	10.97
18	112.32	59.51	33.15	24.35	19.94	17.29	15.52	13.30	11.48	9.95
20	102.93	54.47	30.25	22.17	18.12	15.68	14.05	12.01	10.34	8.93
25	89.13	47.05	26.00	18.97	15.44	13.32	11.90	10.13	8.66	7.44
30	81.80	43.10	23.73	17.26	14.02	12.07	10.76	9.12	7.77	6.64
35	76.73	40.37	22.17	16.09	13.04	11.20	9.97	8.43	7.16	6.08
40	73.17	38.45	21.07	15.26	12.35	10.59	9.42	7.94	6.72	5.70
45	70.48	37.00	20.24	14.64	11.83	10.13	9.00	7.57	6.40	5.40
50	68.39	35.88	19.60	14.15	11.42	9.77	8.67	7.29	6.14	5.17
60	65.34	34.23	18.66	13.45	10.83	9.25	8.20	6.87	5.77	4.84
70	63.42	33.20	18.07	13.00	10.46	8.93	7.90	6.61	5.54	4.63
80	61.71	32.28	17.54	12.61	10.13	8.64	7.63	6.37	5.33	4.44
90	60.69	31.73	17.23	12.37	9.93	8.46	7.48	6.23	5.20	4.33
100	59.85	31.28	16.97	12.18	9.77	8.32	7.34	6.12	5.10	4.24
150	56.83	29.65	16.04	11.48	9.18	7.80	6.87	5.70	4.73	3.90
200	55.38	28.87	15.59	11.14	8.90	7.56	6.65	5.51	4.55	3.74
300	54.05	28.16	15.18	10.83	8.65	7.33	6.44	5.32	4.39	3.59
500	53.03	27.61	14.87	10.60	8.45	7.15	6.28	5.18	4.27	3.48
1,000	52.18	27.15	14.60	10.40	8.29	7.01	6.15	5.06	4.16	3.37
2,000	51.80	26.93	14.48	10.31	8.21	6.94	6.09	5.00	4.10	3.32

$s' = 12$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	203.70	108.13	60.51	44.61	36.66	31.88	28.69	24.70	21.42	18.69
14	187.13	99.26	55.45	40.82	33.51	29.10	26.17	22.50	19.48	16.96
16	170.57	90.39	50.39	37.04	30.35	26.33	23.66	20.30	17.54	15.24
18	154.01	81.52	45.33	33.25	27.20	23.56	21.14	18.10	15.60	13.51
20	137.44	72.65	40.27	29.46	24.05	20.79	18.62	15.90	13.66	11.78
25	113.90	60.02	33.08	24.08	19.57	16.86	15.05	12.77	10.90	9.33
30	102.26	53.77	29.52	21.42	17.36	14.92	13.29	11.24	9.55	8.13
35	94.34	49.52	27.11	19.62	15.87	13.60	12.09	10.19	8.63	7.31
40	88.90	46.62	25.46	18.39	14.84	12.71	11.28	9.48	8.00	6.76
45	84.86	44.46	24.23	17.47	14.08	12.04	10.67	8.96	7.54	6.34
50	81.74	42.79	23.29	16.77	13.50	11.53	10.21	8.55	7.18	6.02
60	77.26	40.39	21.93	15.75	12.65	10.79	9.54	7.96	6.66	5.56
70	74.49	38.90	21.09	15.13	12.13	10.33	9.12	7.60	6.34	5.28
80	72.04	37.59	20.34	14.57	11.67	9.92	8.75	7.28	6.06	5.03
90	70.59	36.81	19.90	14.24	11.40	9.69	8.54	7.09	5.90	4.88
100	69.39	36.17	19.54	13.97	11.18	9.49	8.36	6.94	5.76	4.76
150	65.13	33.89	18.25	13.01	10.38	8.79	7.73	6.38	5.27	4.32
200	63.12	32.82	17.64	12.56	10.00	8.46	7.43	6.12	5.04	4.11
300	61.29	31.84	17.09	12.14	9.66	8.16	7.16	5.88	4.83	3.92
500	59.89	31.09	16.66	11.83	9.40	7.93	6.95	5.70	4.67	3.78
1,000	58.73	30.47	16.31	11.57	9.18	7.74	6.77	5.55	4.53	3.65
2,000	58.19	30.18	16.15	11.45	9.08	7.65	6.69	5.48	4.47	3.59

$s = 13$ Upper 5% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	159.15	84.25	46.91	34.44	28.21	24.46	21.96	18.84	16.27	14.13
4	148.21	78.41	43.58	31.96	26.14	22.65	20.32	17.40	15.00	13.00
6	137.28	72.56	40.26	29.47	24.08	20.84	18.67	15.96	13.74	11.88
8	126.34	66.71	36.93	26.99	22.01	19.02	17.02	14.53	12.47	10.75
0	115.41	60.86	33.60	24.50	19.95	17.21	15.38	13.09	11.21	9.63
5	99.36	52.27	28.72	20.86	16.92	14.55	12.96	10.98	9.35	7.98
0	90.83	47.70	26.12	18.92	15.31	13.13	11.68	9.86	8.36	7.10
5	84.94	44.55	24.33	17.58	14.19	12.16	10.79	9.08	7.68	6.49
0	80.81	42.33	23.07	16.64	13.41	11.47	10.17	8.54	7.20	6.07
5	77.69	40.66	22.13	15.93	12.83	10.96	9.71	8.13	6.84	5.75
0	75.26	39.36	21.39	15.38	12.37	10.55	9.34	7.81	6.56	5.49
0	71.71	37.46	20.31	14.58	11.70	9.97	8.81	7.35	6.15	5.13
0	69.49	36.27	19.63	14.07	11.28	9.60	8.47	7.06	5.89	4.90
0	67.52	35.21	19.03	13.62	10.91	9.27	8.18	6.80	5.66	4.69
0	66.34	34.58	18.68	13.36	10.69	9.08	8.00	6.64	5.52	4.57
0	65.36	34.05	18.38	13.14	10.50	8.92	7.85	6.51	5.41	4.47
0	61.84	32.17	17.31	12.34	9.84	8.34	7.33	6.05	5.00	4.10
	60.17	31.28	16.81	11.96	9.53	8.06	7.07	5.83	4.80	3.92
	58.64	30.45	16.34	11.61	9.24	7.81	6.84	5.63	4.62	3.76
0	57.45	29.82	15.98	11.35	9.01	7.61	6.67	5.48	4.48	3.64
	56.46	29.29	15.68	11.12	8.83	7.44	6.52	5.34	4.37	3.25
	56.01	29.04	15.54	11.02	8.74	7.37	6.45	5.28	4.32	3.48

$s = 13$ Upper 1% points

	r: 1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
	230.29	121.82	67.74	49.69	40.66	35.24	31.62	27.09	23.38	20.27
	211.17	111.62	61.97	45.40	37.10	32.13	28.80	24.64	21.23	18.38
	192.06	101.41	56.20	41.11	33.55	29.02	25.98	22.19	19.09	16.48
	172.94	91.21	50.43	36.81	30.00	25.91	23.17	19.75	16.94	14.59
	153.83	81.01	44.65	32.52	26.44	22.79	20.35	17.30	14.79	12.69
	126.62	66.50	36.46	26.43	21.40	18.38	16.36	13.83	11.75	10.01
	113.14	59.33	32.41	23.42	18.92	16.21	14.39	12.13	10.26	8.69
	104.03	54.46	29.67	21.39	17.23	14.74	13.07	10.97	9.25	7.80
	97.82	51.14	27.79	20.00	16.09	13.73	12.16	10.18	8.56	7.19
	93.18	48.67	26.40	18.96	15.23	12.99	11.49	9.60	8.04	6.73
	89.58	46.76	25.33	18.17	14.58	12.41	10.96	9.15	7.65	6.39
	84.45	44.02	23.79	17.02	13.63	11.59	10.22	8.50	7.08	5.89
	81.26	42.32	22.83	16.32	13.05	11.08	9.76	8.10	6.73	5.58
	78.43	40.82	21.99	15.69	12.53	10.63	9.35	7.75	6.42	5.30
	76.77	39.93	21.49	15.32	12.23	10.36	9.11	7.54	6.24	5.14
	75.40	39.20	21.08	15.02	11.98	10.14	8.91	7.37	6.09	5.01
	70.53	36.61	19.62	13.94	11.08	9.36	8.21	6.76	5.55	4.53
	68.22	35.38	18.93	13.43	10.66	9.00	7.88	6.47	5.30	4.30
	66.13	34.26	18.31	12.96	10.28	8.66	7.58	6.21	5.07	4.10
	64.53	33.41	17.83	12.61	9.99	8.41	7.35	6.01	4.89	3.94
	63.19	32.70	17.43	12.32	9.75	8.19	7.15	5.84	4.75	3.45
	62.59	32.38	17.25	12.18	9.63	8.10	7.07	5.76	4.68	3.75

$s' = 14$ — Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	178.72	94.38	52.24	38.18	31.15	26.92	24.11	20.57	17.68	15.27
14	166.15	87.68	48.45	35.37	28.83	24.89	22.27	18.98	16.29	14.04
16	153.59	80.97	44.67	32.56	26.50	22.86	20.43	17.39	14.89	12.81
18	141.03	74.27	40.89	29.75	24.18	20.83	18.59	15.79	13.49	11.57
20	128.47	67.56	37.10	26.94	21.85	18.79	16.75	14.20	12.10	10.34
25	110.03	57.71	31.55	22.82	18.44	15.81	14.06	11.86	10.05	8.53
30	100.24	52.48	28.60	20.63	16.63	14.23	12.63	10.62	8.96	7.57
35	93.47	48.87	26.57	19.12	15.39	13.14	11.64	9.76	8.21	6.91
40	88.72	46.33	25.14	18.06	14.51	12.38	10.95	9.16	7.68	6.44
45	85.14	44.42	24.06	17.26	13.85	11.80	10.43	8.71	7.29	6.09
50	82.33	42.93	23.22	16.64	13.34	11.35	10.02	8.35	6.98	5.82
60	78.25	40.76	22.00	15.73	12.59	10.70	9.43	7.84	6.53	5.42
70	75.69	39.40	21.24	15.16	12.12	10.29	9.06	7.52	6.24	5.17
80	73.42	38.19	20.55	14.66	11.70	9.92	8.73	7.23	5.99	4.94
90	72.07	37.47	20.15	14.36	11.45	9.70	8.53	7.06	5.84	4.81
100	70.95	36.87	19.81	14.11	11.25	9.52	8.37	6.91	5.71	4.70
150	66.92	34.73	18.60	13.21	10.51	8.88	7.78	6.41	5.27	4.30
200	65.00	33.70	18.03	12.79	10.15	8.57	7.50	6.16	5.05	4.11
300	63.24	32.76	17.50	12.39	9.83	8.28	7.25	5.94	4.85	3.93
500	61.88	32.04	17.09	12.09	9.58	8.07	7.05	5.77	4.70	3.79
1,000	60.75	31.43	16.75	11.84	9.37	7.88	6.88	5.62	4.58	3.68
2,000	60.22	31.16	16.60	11.72	9.28	7.80	6.81	5.56	4.52	3.63

$s' = 14$ — Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	258.50	136.31	75.35	55.03	44.85	38.75	34.68	29.58	25.39	21.91
14	236.62	124.68	68.82	50.20	40.87	35.28	31.54	26.87	23.03	19.84
16	214.74	113.05	62.29	45.37	36.90	31.81	28.42	24.16	20.68	17.77
18	192.85	101.41	55.76	40.54	32.92	28.34	25.28	21.46	18.32	15.70
20	170.97	89.78	49.23	35.71	28.94	24.87	22.15	18.75	15.96	13.63
25	139.86	73.25	39.96	28.86	23.29	19.95	17.72	14.92	12.62	10.69
30	124.49	65.10	35.40	25.49	20.52	17.53	15.54	13.04	10.98	9.26
35	114.08	59.57	32.31	23.20	18.64	15.90	14.07	11.77	9.88	8.29
40	107.00	55.80	30.20	21.65	17.36	14.79	13.06	10.90	9.12	7.62
45	101.71	53.00	28.63	20.49	16.41	13.96	12.32	10.26	8.56	7.13
50	97.62	50.83	27.42	19.60	15.68	13.32	11.74	9.76	8.13	6.75
60	91.77	47.73	25.69	18.32	14.63	12.40	10.92	9.05	7.51	6.21
70	88.16	45.81	24.61	17.53	13.98	11.84	10.41	8.61	7.13	5.87
80	84.96	44.11	23.66	16.83	13.40	11.34	9.96	8.22	6.79	5.58
90	83.08	43.11	23.10	16.42	13.06	11.04	9.69	7.99	6.59	5.40
100	81.52	42.28	22.64	16.08	12.79	10.80	9.47	7.80	6.42	5.26
150	75.98	39.34	21.00	14.87	11.79	9.94	8.70	7.13	5.84	4.74
200	73.36	37.96	20.23	14.30	11.33	9.53	8.33	6.82	5.56	4.50
300	70.99	36.70	19.53	13.79	10.90	9.16	8.00	6.53	5.31	4.28
500	69.17	35.74	18.99	13.39	10.58	8.88	7.74	6.31	5.12	4.11
1,000	67.66	34.93	18.55	13.06	10.31	8.65	7.53	6.13	4.96	3.97
2,000	66.97	34.57	18.34	12.91	10.18	8.54	7.44	6.04	4.89	3.90

$s' = 15$ Upper 5% points

r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	199.51	105.05	57.84	42.10	34.22	29.49	26.33	22.38	19.15	16.45
4	185.18	97.43	53.57	38.95	31.63	27.23	24.29	20.62	17.61	15.10
6	170.85	89.80	49.30	35.79	29.03	24.97	22.25	18.86	16.08	23.76
8	156.53	82.18	45.03	32.64	26.43	22.70	20.22	17.10	14.55	12.42
0	142.20	74.55	40.76	29.48	23.83	20.44	18.18	15.34	13.02	11.07
5	121.15	63.37	34.49	24.85	20.02	17.12	15.19	12.76	10.77	9.10
0	109.95	57.43	31.17	22.40	18.01	15.37	13.60	11.39	9.58	8.05
5	102.23	53.33	28.87	20.70	16.61	14.15	12.51	10.45	8.76	7.33
0	96.83	50.45	27.26	19.52	15.64	13.30	11.74	9.79	8.18	6.83
5	92.75	48.29	26.05	18.62	14.90	12.66	11.17	9.29	7.74	6.44
0	89.56	46.60	25.10	17.93	14.33	12.16	10.72	8.90	7.41	6.15
0	84.94	44.14	23.73	16.91	13.50	11.44	10.06	8.33	6.91	5.71
0	82.03	42.60	22.87	16.28	12.97	10.98	9.65	7.98	6.60	5.44
0	79.44	41.22	22.10	15.71	12.51	10.58	9.29	7.66	6.33	5.19
0	77.90	40.41	21.64	15.37	12.23	10.33	9.07	7.48	6.16	5.05
0	76.62	39.73	21.27	15.10	12.00	10.14	8.89	7.32	6.02	4.93
0	72.05	37.30	19.91	14.10	11.18	9.42	8.24	6.76	5.54	4.50
0	69.87	36.14	19.26	13.62	10.78	9.08	7.93	6.49	5.30	4.29
0	67.87	35.08	18.67	13.18	10.42	8.76	7.65	6.25	5.09	4.10
0	66.32	34.26	18.21	12.84	10.15	8.52	7.43	6.06	4.92	3.95
0	65.03	33.58	17.83	12.56	9.91	8.32	7.23	5.90	4.78	3.83
0	64.43	33.26	17.65	12.43	9.81	8.23	7.17	5.83	4.72	3.77

$s' = 15$ Upper 1% points

r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
2	288.10	151.52	83.36	60.62	49.24	42.40	37.85	32.14	27.48	23.59
4	263.26	138.37	76.02	55.22	44.82	38.56	34.39	29.17	24.90	21.34
6	238.43	125.22	68.68	49.82	40.39	34.71	30.93	26.20	22.32	19.08
8	213.59	112.07	61.35	44.43	35.96	30.87	27.47	23.22	19.74	16.83
0	188.76	98.92	54.01	39.03	31.53	27.02	24.02	20.25	17.16	14.58
5	153.52	80.26	43.61	31.38	25.25	21.57	19.12	16.04	13.51	11.40
0	136.20	71.07	38.49	27.62	22.17	18.90	16.72	13.98	11.72	9.84
5	124.46	64.85	35.03	25.08	20.09	17.09	15.09	12.58	10.52	8.79
0	116.45	60.60	32.67	23.35	18.67	15.86	13.99	11.63	9.70	8.07
5	110.48	57.44	30.92	22.06	17.62	14.95	13.17	10.93	9.08	7.54
0	105.87	55.01	29.57	21.07	16.81	14.25	12.53	10.38	8.62	7.13
0	99.27	51.52	27.63	19.64	15.64	13.24	11.63	9.61	7.94	6.54
0	95.20	49.36	26.43	18.77	14.92	12.61	11.07	9.13	7.52	6.17
0	91.59	47.45	25.37	17.99	14.29	12.06	10.57	8.70	7.16	5.85
0	89.46	46.33	24.74	17.53	13.91	11.74	10.28	8.45	6.94	5.66
0	87.71	45.40	24.23	17.16	13.61	11.47	10.04	8.24	6.76	5.51
0	81.47	42.11	22.40	15.62	12.51	10.52	9.19	7.51	6.13	4.95
0	78.53	40.55	21.54	15.18	11.99	10.07	8.79	7.17	5.83	4.69
0	75.87	39.14	20.76	14.61	11.53	9.67	8.42	6.85	5.56	4.45
0	73.82	38.06	20.16	14.17	11.17	9.36	8.14	6.61	5.35	4.27
[illegible]	72.12	37.16	19.66	13.81	10.87	9.10	7.91	6.42	5.17	4.12
[illegible]	71.34	36.75	19.43	13.64	10.73	8.98	7.81	6.32	5.10	4.05

$s' = 16$										Upper 5% points
t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	221.49	116.25	63.71	46.19	37.42	32.16	28.65	24.26	20.66	17.65
14	205.24	107.65	58.92	42.67	34.54	29.66	26.40	22.32	18.99	16.20
16	189.00	99.05	54.13	39.15	31.65	27.15	24.15	20.39	17.31	14.74
18	172.75	90.45	49.34	35.63	28.77	24.65	21.90	18.46	15.64	13.28
20	156.51	81.85	44.56	32.12	25.89	22.15	19.65	16.52	13.96	11.82
25	132.67	69.24	37.53	26.96	21.66	18.48	16.35	13.69	11.51	9.68
30	120.01	62.55	33.81	24.22	19.42	16.53	14.61	12.19	10.21	8.55
35	111.28	57.93	31.25	22.34	17.88	15.19	13.40	11.16	9.31	7.76
40	105.17	54.70	29.45	21.02	16.79	14.25	12.56	10.43	8.68	7.22
45	100.57	52.26	28.09	20.02	15.98	13.55	11.92	9.89	8.21	6.80
50	96.97	50.36	27.03	19.25	15.34	13.00	11.43	9.46	7.84	6.48
60	91.76	47.59	25.50	18.12	14.42	12.19	10.71	8.84	7.30	6.01
70	88.48	45.86	24.53	17.41	13.84	11.69	10.26	8.45	6.97	5.71
80	85.56	44.31	23.67	16.78	13.32	11.24	9.85	8.11	6.67	5.45
90	83.83	43.40	23.16	16.41	13.02	10.98	9.61	7.90	6.49	5.29
100	82.39	42.63	22.74	16.10	12.76	10.76	9.42	7.73	6.34	5.16
150	77.23	39.91	21.23	14.98	11.85	9.97	8.71	7.12	5.81	4.70
200	74.76	38.60	20.50	14.45	11.42	9.59	8.37	6.83	5.55	4.47
300	72.51	37.41	19.84	13.97	11.02	9.24	8.06	6.56	5.32	4.27
500	70.77	36.49	19.33	13.59	10.71	8.98	7.82	6.35	5.14	4.11
1,000	69.32	35.72	18.90	13.28	10.46	8.75	7.62	6.18	4.99	3.97
2,000	68.65	35.37	18.71	13.14	10.34	8.65	7.52	6.10	4.92	3.91

$s' = 16$										Upper 1% points
t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	319.31	167.51	91.73	66.45	53.81	46.21	41.16	34.83	29.64	25.31
14	291.37	152.75	83.54	60.45	48.91	41.97	37.36	31.57	26.83	22.87
16	263.43	137.99	75.36	54.46	44.01	37.73	33.55	28.31	24.02	20.43
18	235.48	123.23	67.17	48.47	39.12	33.49	29.75	25.06	21.21	18.00
20	207.54	108.47	58.99	42.48	34.22	29.25	25.94	21.80	18.40	15.56
25	167.90	87.54	47.38	33.99	27.28	23.25	20.56	17.19	14.43	12.11
30	148.40	77.25	41.69	29.82	23.88	20.31	17.93	14.94	12.49	10.43
35	135.19	70.29	37.84	27.01	21.58	18.32	16.15	13.42	11.17	9.29
40	126.17	65.54	35.21	25.09	20.02	16.97	14.93	12.38	10.28	8.52
45	119.48	62.01	33.26	23.66	18.86	15.96	14.03	11.61	9.62	7.95
50	114.34	59.29	31.76	22.57	17.96	15.19	13.34	11.02	9.11	7.50
60	106.94	55.40	29.61	21.00	16.68	14.08	12.35	10.17	8.38	6.87
70	102.37	52.99	28.28	20.02	15.89	13.40	11.74	9.65	7.93	6.48
80	98.32	50.85	27.10	19.17	15.19	12.80	11.19	9.19	7.53	6.13
90	95.95	49.60	26.41	18.66	14.78	12.44	10.88	8.91	7.30	5.93
100	93.99	48.57	25.84	18.25	14.44	12.15	10.62	8.69	7.10	5.76
150	87.02	44.89	23.81	16.77	13.23	11.11	9.68	7.89	6.42	5.16
200	83.73	43.16	22.86	16.07	12.67	10.62	9.24	7.52	6.09	4.88
300	80.75	41.59	21.99	15.44	12.15	10.17	8.85	7.18	5.80	4.63
500	78.47	40.39	21.33	14.96	11.76	9.83	8.54	6.92	5.57	4.43
1,000	76.58	39.39	20.78	14.55	11.43	9.55	8.29	6.70	5.39	4.27
2,000	75.71	38.94	20.53	14.37	11.28	9.42	8.17	6.60	5.30	4.19

$s' = 17$ Upper 5% points

v \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	244.40	127.99	69.85	50.46	40.77	34.93	31.05	26.20	22.22	18.90
14	226.15	118.35	64.52	46.56	37.58	32.18	28.58	24.09	20.40	17.32
16	207.90	108.72	59.18	42.66	34.39	29.42	26.11	21.97	18.58	15.74
18	189.65	99.09	53.84	38.75	31.20	26.67	23.64	19.86	16.76	14.16
20	171.41	89.45	48.51	34.85	28.02	23.91	21.17	17.75	14.93	12.58
25	144.64	75.33	40.69	29.13	23.35	19.87	17.55	14.65	12.26	10.27
30	130.45	67.84	36.55	26.10	20.88	17.74	15.64	13.01	10.85	9.05
35	120.66	62.68	33.69	24.02	19.17	16.26	14.32	11.88	9.88	8.20
40	113.80	59.06	31.69	22.55	17.98	15.23	13.39	11.09	9.20	7.61
45	108.64	56.34	30.18	21.45	17.08	14.45	12.70	10.50	8.68	7.17
50	104.60	54.21	29.01	20.60	16.38	13.85	12.15	10.03	8.28	6.82
60	98.74	51.12	27.30	19.35	15.36	12.97	11.37	9.36	7.70	6.31
70	95.06	49.18	26.23	18.56	14.72	12.41	10.87	8.93	7.33	5.99
80	91.78	47.46	25.23	17.87	14.16	11.92	10.43	8.56	7.01	5.71
90	89.84	46.43	24.71	17.45	13.82	11.63	10.17	8.33	6.82	5.54
100	88.23	45.58	24.24	17.11	13.54	11.39	9.95	8.14	6.66	5.40
150	81.46	42.54	22.56	15.88	12.54	10.52	9.17	7.48	6.08	4.90
200	79.71	41.08	21.76	15.30	12.06	10.11	8.80	7.16	5.80	4.66
300	77.18	39.75	21.02	14.76	11.62	9.73	8.46	6.87	5.55	4.43
500	75.24	38.73	20.45	14.34	11.28	9.43	8.20	6.64	5.36	4.26
000	73.61	37.87	19.98	14.00	11.00	9.19	7.98	6.46	5.19	4.12
000	72.86	37.48	19.76	13.84	10.87	9.08	7.88	6.37	5.12	4.05

$s' = 17$ Upper 1% points

v \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	351.98	184.23	100.48	72.54	58.57	50.19	44.60	37.59	31.86	27.08
14	320.74	167.78	91.40	65.92	53.18	45.54	40.43	34.04	28.82	24.45
16	289.50	151.32	82.32	59.30	47.79	40.88	36.27	30.50	25.77	21.82
18	258.26	134.87	73.24	52.68	42.40	36.22	32.11	26.95	22.72	19.19
20	227.02	118.41	64.16	46.06	37.00	31.57	27.94	23.40	19.67	16.56
25	182.72	95.09	51.30	36.69	29.37	24.98	22.05	18.38	15.37	12.85
30	160.97	83.64	44.99	32.09	25.64	21.76	19.17	15.93	13.26	11.04
35	146.25	75.90	40.73	28.99	23.12	19.58	17.23	14.27	11.85	9.81
40	136.22	70.62	37.82	26.88	21.40	18.10	15.90	13.15	10.88	8.98
45	128.76	66.70	35.67	25.31	20.12	17.01	14.92	12.31	10.17	8.36
50	123.01	63.68	34.01	24.10	19.14	16.16	14.17	11.67	9.61	7.89
60	114.78	59.36	31.63	22.38	17.74	14.95	13.09	10.75	8.83	7.21
70	109.69	56.68	30.16	21.31	16.87	14.20	12.42	10.18	8.34	6.79
80	105.19	54.32	28.86	20.36	16.10	13.54	11.83	9.68	7.91	6.42
90	102.55	52.93	28.10	19.81	15.65	13.15	11.48	9.38	7.66	6.20
100	100.38	51.79	27.47	19.35	15.28	12.83	11.20	9.14	7.45	6.02
150	92.63	47.71	25.24	17.73	13.96	11.70	10.18	8.28	6.71	5.38
200	88.98	45.79	24.18	16.96	13.34	11.16	9.70	7.87	6.36	5.08
300	85.67	44.05	23.23	16.27	12.78	10.68	9.27	7.50	6.04	4.80
500	83.13	42.72	22.50	15.74	12.35	10.31	8.94	7.22	5.80	4.59
000	81.03	41.62	21.89	15.30	11.99	10.00	8.67	6.99	5.60	4.42
000	80.06	41.11	21.62	15.10	11.83	9.86	8.54	6.88	5.51	4.34

$s' = 18$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	268.48	140.27	76.26	54.90	44.23	37.82	33.54	28.20	23.83	20.30
14	248.09	129.54	70.35	50.60	40.73	34.80	30.84	25.90	21.85	18.57
16	227.70	118.81	64.44	46.29	37.23	31.78	28.14	23.60	19.88	16.85
18	207.31	108.09	58.53	41.99	33.72	28.76	25.44	21.30	17.91	15.12
20	186.92	97.36	52.61	37.69	30.22	25.74	22.74	19.00	15.93	13.39
25	157.04	81.64	41.95	31.38	25.09	21.31	18.79	15.63	13.04	10.88
30	141.21	73.31	39.37	28.04	22.38	18.97	16.70	13.85	11.51	9.56
35	130.29	67.57	36.21	25.74	20.51	17.36	15.26	12.62	10.46	8.65
40	122.65	63.55	34.00	24.13	19.20	16.23	14.25	11.76	9.72	8.01
45	116.90	60.52	32.33	22.92	18.21	15.38	13.49	11.12	9.17	7.53
50	112.40	58.16	31.03	21.98	17.44	14.72	12.89	10.61	8.74	7.16
60	105.88	54.73	29.14	20.60	16.33	13.75	12.03	9.88	8.11	6.62
70	101.78	52.57	27.96	19.74	15.62	13.15	11.49	9.42	7.71	6.27
80	98.14	50.66	26.91	18.97	15.00	12.61	11.01	9.01	7.36	5.97
90	95.98	49.52	26.28	18.52	14.63	12.29	10.73	8.77	7.15	5.79
100	94.19	48.58	25.76	18.14	14.32	12.03	10.49	8.57	6.98	5.64
150	87.76	45.20	23.90	16.79	13.22	11.08	9.64	7.84	6.35	5.10
200	84.68	43.58	23.02	16.15	12.70	10.63	9.24	7.50	6.06	4.84
300	81.87	42.11	22.20	15.55	12.22	10.21	8.87	7.18	5.79	4.60
500	79.71	40.97	21.58	15.10	11.85	9.89	8.58	6.94	5.58	4.42
1,000	77.90	40.02	21.06	14.72	11.54	9.63	8.35	6.73	5.40	4.27
2,000	77.07	39.58	20.82	14.54	11.40	9.50	8.24	6.64	5.32	4.19

$s' = 18$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	386.24	201.76	109.61	78.91	63.52	54.30	48.14	40.46	34.15	28.99
14	351.51	183.51	99.59	71.62	57.61	49.22	43.60	36.60	30.86	26.14
16	316.77	165.26	89.57	64.34	51.70	44.13	39.07	32.75	27.57	23.30
18	282.03	147.01	79.55	57.06	45.80	39.04	34.53	28.90	24.27	20.45
20	247.29	128.76	69.53	49.78	39.89	33.96	30.00	25.04	20.98	17.61
25	198.08	102.91	55.34	39.47	31.53	26.76	23.58	19.60	16.33	13.60
30	173.94	90.24	48.39	34.43	27.45	23.25	20.45	16.94	14.06	11.65
35	157.62	81.67	43.70	31.03	24.69	20.88	18.33	15.15	12.53	10.34
40	146.51	75.84	40.51	28.72	22.81	19.27	16.90	13.93	11.49	9.45
45	138.25	71.51	38.14	27.00	21.42	18.07	15.83	13.03	10.72	8.79
50	131.90	68.18	36.31	25.68	20.35	17.15	15.01	12.33	10.13	8.28
60	122.78	63.40	33.70	23.78	18.82	15.83	13.84	11.33	9.28	7.55
70	117.15	60.45	32.08	22.61	17.87	15.02	13.11	10.72	8.75	7.10
80	112.17	57.84	30.66	21.58	17.03	14.30	12.47	10.18	8.29	6.70
90	109.25	56.31	29.82	20.97	16.54	13.88	12.10	9.86	8.02	6.47
100	106.85	55.05	29.13	20.47	16.14	13.53	11.79	9.60	7.80	6.28
150	98.29	50.56	26.67	18.70	14.70	12.29	10.68	8.67	7.00	5.59
200	94.26	48.44	25.52	17.86	14.02	11.71	10.17	8.23	6.62	5.27
300	90.59	46.53	24.47	17.10	13.41	11.19	9.70	7.83	6.28	4.98
500	87.80	45.06	23.67	16.53	12.94	10.78	9.34	7.53	6.02	4.75
1,000	85.48	43.85	23.01	16.04	12.55	10.45	9.04	7.27	5.81	4.57
2,000	84.42	43.29	22.70	15.83	12.38	10.30	8.91	7.16	5.71	4.48

$s' = 19$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	293.50	153.07	82.91	59.54	47.83	40.82	36.13	30.27	25.48	21.48
14	270.88	141.19	76.40	54.81	43.99	37.52	33.19	27.77	23.35	19.65
16	248.26	129.31	69.89	50.08	40.16	34.22	30.25	25.28	21.22	17.82
18	225.63	117.44	63.37	45.35	36.33	30.92	27.31	22.79	19.09	16.00
20	203.01	105.56	56.86	40.62	32.50	27.62	24.37	20.29	16.96	14.17
25	169.86	88.16	47.32	33.70	26.88	22.79	20.06	16.64	13.84	11.49
30	152.30	78.95	42.28	30.04	23.92	20.24	17.79	14.71	12.19	10.08
35	140.20	72.59	38.80	27.52	21.87	18.48	16.22	13.38	11.05	9.11
40	131.71	68.15	36.36	25.75	20.44	17.25	15.12	12.45	10.26	8.42
45	125.34	64.81	34.53	24.42	19.37	16.33	14.30	11.75	9.66	7.91
50	120.38	62.20	33.10	23.39	18.52	15.60	13.65	11.21	9.19	7.51
60	113.15	58.41	31.02	21.88	17.31	14.55	12.72	10.41	8.52	6.93
70	108.62	56.03	29.72	20.94	16.54	13.90	12.13	9.91	8.09	6.56
80	104.59	53.91	28.56	20.10	15.86	13.31	11.61	9.47	7.71	6.23
90	102.20	52.66	27.87	19.60	15.46	12.96	11.30	9.21	7.49	6.04
100	100.21	51.61	27.30	19.19	15.12	12.67	11.04	8.99	7.30	5.88
150	93.09	47.88	25.26	17.71	13.92	11.64	10.12	8.21	6.63	5.30
200	89.71	46.10	24.29	17.00	13.35	11.15	9.68	7.83	6.31	5.02
300	86.60	44.47	23.39	16.35	12.82	10.70	9.28	7.49	6.02	4.77
500	84.20	43.22	22.71	15.86	12.42	10.35	8.97	7.23	5.79	4.58
000	82.20	42.17	22.13	15.44	12.08	10.06	8.71	7.01	5.60	4.41
000	81.28	41.69	21.87	15.25	11.93	9.93	8.59	6.91	5.52	4.34

$s' = 19$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	422.14	220.07	119.15	85.49	68.66	58.56	51.83	43.42	36.51	30.77
14	383.69	199.93	108.14	77.52	62.21	53.03	46.90	39.25	32.96	27.74
16	345.25	179.78	97.12	69.55	55.76	47.49	41.97	35.08	29.42	24.71
18	306.81	159.64	86.11	61.59	49.32	41.96	37.05	30.91	25.87	21.68
20	268.36	139.49	75.10	53.62	42.87	36.42	32.12	26.74	22.32	18.64
25	213.94	110.98	59.52	42.35	33.76	28.60	25.16	20.85	17.32	14.36
30	187.31	97.04	51.90	36.84	29.31	24.78	21.76	17.98	14.88	12.28
35	169.31	87.61	46.76	33.13	26.30	22.20	19.47	16.04	13.23	10.88
40	157.07	81.20	43.26	30.60	24.26	20.45	17.91	14.73	12.12	9.92
45	147.98	76.44	40.66	28.72	22.75	19.16	16.76	13.75	11.29	9.22
50	140.98	72.77	38.66	27.28	21.58	18.16	15.87	13.00	10.65	8.67
60	130.95	67.53	35.80	25.22	19.91	16.73	14.60	11.93	9.74	7.90
70	124.77	64.29	34.04	23.94	18.89	15.85	13.82	11.27	9.18	7.42
80	119.29	61.42	32.48	22.82	17.98	15.07	13.12	10.68	8.68	6.99
90	116.08	59.74	31.56	22.16	17.44	14.61	12.72	10.34	8.39	6.74
100	113.43	58.36	30.81	21.61	17.00	14.23	12.38	10.06	8.15	6.54
150	104.00	53.43	28.13	19.68	15.44	12.90	11.19	9.06	7.29	5.81
200	99.57	51.11	26.86	18.77	14.71	12.27	10.63	8.58	6.89	5.46
300	95.56	49.01	25.72	17.94	14.04	11.70	10.13	8.16	6.53	5.15
500	92.49	47.41	24.85	17.31	13.54	11.26	9.74	7.83	6.25	4.91
000	89.93	46.07	24.12	16.79	13.11	10.90	9.42	7.56	6.02	4.72
000	88.77	45.46	23.79	16.55	12.92	10.74	9.27	7.43	5.91	4.62

$s' = 20$ Upper 5% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	319.69	166.41	89.85	64.33	51.56	43.91	38.79	32.41	27.17	22.97
14	294.70	153.33	82.70	59.17	47.38	40.33	35.60	29.71	24.88	20.99
16	269.71	140.24	75.56	54.00	43.20	36.74	32.42	27.02	22.59	19.00
18	244.71	127.15	68.41	48.83	39.03	33.15	29.23	24.32	20.30	17.01
20	219.72	114.06	61.26	43.66	34.85	29.57	26.04	21.62	18.01	15.02
25	183.11	94.89	50.80	36.09	28.73	24.32	21.37	17.68	14.65	12.13
30	163.75	84.75	45.27	32.09	25.50	21.54	18.90	15.60	12.88	10.61
35	150.40	77.77	41.45	29.34	23.27	19.63	17.20	14.16	11.66	9.57
40	141.07	72.88	38.79	27.41	21.72	18.30	16.01	13.15	10.81	8.84
45	134.05	69.20	36.78	25.96	20.55	17.29	15.12	12.40	10.16	8.29
50	128.56	66.33	35.21	24.83	19.63	16.51	14.42	11.81	9.66	7.86
60	120.59	62.16	32.94	23.19	18.30	15.37	13.41	10.95	8.93	7.24
70	115.60	59.55	31.51	22.16	17.47	14.65	12.77	10.42	8.48	6.85
80	111.15	57.22	30.25	21.24	16.73	14.02	12.21	9.94	8.07	6.50
90	108.52	55.84	29.49	20.70	16.29	13.64	11.87	9.65	7.83	6.29
100	106.33	54.70	28.87	20.25	15.93	13.33	11.60	9.42	7.63	6.12
150	98.49	50.60	26.63	18.63	14.62	12.21	10.60	8.58	6.91	5.51
200	94.76	48.64	25.57	17.86	14.00	11.68	10.13	8.18	6.57	5.21
300	91.34	46.85	24.59	17.16	13.43	11.19	9.69	7.81	6.25	4.94
500	88.70	45.47	23.84	16.61	12.99	10.81	9.36	7.52	6.01	4.73
1,000	86.50	44.32	23.21	16.16	12.63	10.50	9.08	7.29	5.81	4.56
2,000	85.49	43.79	22.92	15.95	12.46	10.35	8.95	7.18	5.72	4.48

$s' = 20$ Upper 1% points

t \ r:	1	2	4	6	8	10	12	16	22	32
12	459.41	239.10	129.04	92.34	73.99	62.97	55.63	46.45	38.92	32.81
14	417.11	216.98	117.00	83.65	66.98	56.97	50.30	41.96	35.12	29.54
16	374.82	194.86	104.95	74.97	59.97	50.97	44.97	37.46	31.31	26.28
18	332.52	172.74	92.91	66.28	52.96	44.97	39.64	32.97	27.51	23.01
20	290.22	150.62	80.86	57.60	45.96	38.97	34.31	28.48	23.70	19.75
25	230.38	119.33	63.83	45.31	36.05	30.49	26.78	22.13	18.33	15.14
30	201.14	104.05	55.51	39.32	31.22	26.35	23.11	19.04	15.71	12.92
35	181.39	93.72	49.90	35.28	27.96	23.57	20.63	16.96	13.95	11.43
40	167.95	86.70	46.08	32.53	25.75	21.67	18.95	15.55	12.75	10.41
45	157.97	81.49	43.25	30.49	24.10	20.27	17.71	14.50	11.86	9.66
50	150.29	77.48	41.07	28.92	22.84	19.19	16.75	13.69	11.18	9.08
60	139.29	71.74	37.95	26.68	21.03	17.64	15.38	12.54	10.21	8.25
70	132.51	68.20	36.03	25.29	19.92	16.69	14.53	11.83	9.60	7.74
80	126.50	65.06	34.33	24.07	18.93	15.85	13.78	11.20	9.07	7.28
90	122.99	63.22	33.33	23.35	18.36	15.35	13.35	10.83	8.76	7.02
100	120.09	61.71	32.51	22.76	17.88	14.95	12.99	10.53	8.50	6.80
150	109.78	56.33	29.59	20.66	16.19	13.50	11.71	9.45	7.59	6.02
200	104.93	53.80	28.22	19.68	15.40	12.82	11.10	8.94	7.16	5.66
300	100.53	51.51	26.98	18.78	14.68	12.21	10.56	8.49	6.77	5.33
500	97.17	49.75	26.03	18.10	14.13	11.74	10.14	8.13	6.48	5.07
1,000	94.39	48.30	25.24	17.54	13.67	11.35	9.80	7.84	6.23	4.86
2,000	93.11	47.63	24.88	17.28	13.46	11.17	9.64	7.71	6.12	4.77

Apéndice C: Comparación entre diferentes aproximaciones a los percéntiles de To^2. (Obtenido de Iτo (1961).

Table 1a. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=2$*

m	n	5% points: From exact c.d.f. (Hotelling & Grubbs)	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
3	13	18.86	18.07	—	18.46
3	23	15.67	15.27	—	15.59
3	33	14.62	14.36	—	14.59
3	43	14.10	13.89	—	14.09
3	63	13.58	13.38	—	13.59
9	43	33.05	32.68	33.04	32.98
9	63	31.63	31.39	31.64	31.61
10	43	36.05	35.65	36.21	36.02
11	23	44.32	43.38	—	44.09
11	33	40.77	40.23	—	40.70
11	43	39.03	38.61	39.00	39.00
13	43	44.94	44.46	44.94	44.94

Table 1b. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=2$*

m	n	1% points: From exact c.d.f. (Hotelling & Grubbs)	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
3	13	29.52	26.65	—	28.16
3	23	22.67	21.41	—	22.44
3	33	20.59	19.87	—	20.52
3	43	19.60	19.05	—	19.57
3	63	18.65	18.30	—	18.63
9	43	41.70	40.85	41.72	41.54
9	63	39.28	38.84	39.29	39.25
10	43	45.16	44.25	45.54	45.07
11	23	57.87	55.55	—	57.14
11	33	51.58	50.36	—	51.34
11	43	48.59	47.64	48.59	48.49
13	43	55.38	54.31	55.38	55.26

Table 2a. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=3$ and $m=4$*

n	5% points			1% points		
	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
34	—	—	25.31	—	—	33.15
44	—	—	24.24	—	—	31.37
54	—	—	23.59	—	—	30.31
64	22.88	23.17	23.16	28.95	29.66	29.61
74	22.61	22.92	22.85	28.62	29.15	29.11
84	22.44	22.61	22.62	28.36	28.66	28.74
94	22.31	22.44	22.41	28.15	28.46	28.46
104	22.18	22.30	22.30	27.93	28.23	28.23
124	22.00	22.05	22.09	27.61	27.90	27.89
164	21.76	21.83	21.82	27.26	27.45	27.46
204	21.62	21.66	21.66	27.09	27.19	27.21
∞	—	—	21.03	—	—	26.22

Table 2b. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=3$ and $m=14$*

n	5% points			1% points		
	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)	From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
34	70.58	72.08	71.76	83.71	87.04	86.25
44	67.45	68.51	68.34	79.11	81.49	81.10
54	65.50	66.37	66.28	76.41	78.25	78.03
64	64.32	64.96	64.91	74.75	76.16	76.01
74	63.43	63.92	63.93	73.58	74.67	74.57
84	62.86	63.17	63.20	72.85	73.58	73.50
94	62.38	62.60	62.63	72.19	72.72	72.67
104	61.95	62.16	62.17	71.61	72.01	72.01
124	61.21	61.49	61.49	70.59	71.03	71.02
164	60.47	60.48	60.65	69.54	69.50	69.80
204	60.12	60.16	60.14	68.99	69.03	69.07
∞	—	—	58.13	—	—	66.21

Table 3a. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=4$ and $m=5$*

n	5% points: From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)	1% points: From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
35	37.94	39.27	38.99	46.69	49.46	48.82
45	36.36	37.22	37.10	44.29	46.26	45.96
55	35.28	36.01	35.96	42.90	44.38	44.24
65	34.72	35.25	35.20	42.11	43.19	43.11
75	34.29	34.72	34.66	41.48	42.35	42.30
85	33.95	34.28	34.25	40.96	41.74	41.69
95	33.67	33.95	33.93	40.51	41.26	31.23
105	33.43	33.70	33.68	40.12	40.88	40.85
125	33.14	33.33	33.30	39.75	40.30	40.30
165	32.74	32.81	32.82	39.19	39.58	39.60
205	32.45	32.55	32.54	38.85	39.14	39.19
∞	—	—	31.41	—	—	37.57

Table 3b. *Comparison of Approximations to the Upper Percentage Points of T_0^2 when $p=4$ and $m=15$*

n	5% points: From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)	1% points: From approx. c.d.f. (Pillai)	From β_1 & β_2 (Pillai & Samson)	From asymp. series (Ito)
35	98.42	100.70	99.95	113.61	118.83	117.23
45	93.83	95.09	93.97	107.42	110.61	109.87
55	88.61*	91.74	91.08	103.46	105.88	105.47
65	89.25*	89.57	89.12	100.75	102.77	102.55
75	87.90	88.05	87.71	99.68	100.58	100.48
85	86.19	86.96	86.65	98.26	99.03	98.93
95	85.83	86.05	85.82	97.00	97.76	97.73
105	85.00	85.37	85.15	95.91	96.79	96.78
125	84.23	84.31	84.15	94.98	95.31	95.35
165	83.14	83.00	82.89	93.62	93.56	93.58
205	82.37	82.21	82.13	92.62	92.50	92.53
∞	—	—	79.08	—	—	88.38

*These results seem to be in error.

Apéndice D: Bibliografía de ejemplos por secciones.

1.- Capítulo II

a) Sección ANOVA modelo I.

Graybill (1961).

Scheffé (1959).

Searle (1959).

b) Sección ANOVA modelo II.

Searle (1971).

c) Sección MANOVA modelo I.

i) Anderson (1950). Se utiliza la estadística de Wilks. El ejemplo es en Biología.

ii) Cole & Grizzle (1966). Utiliza las estadísticas ω (de Wilks) y R (de Roy).

El ejemplo es en Biología.

iii) Dempster (1963). Utiliza la estadística ω (de Wilks). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

iv) Foster (1957). Utiliza la estadística R (de Roy). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

v) Gabriel (1968 b). Utiliza la estadística R (de Roy). El ejemplo es en Biología.

vi) Mardia (1971). Utiliza la estadística V (de Pillai). El ejemplo es en Biología.

vii) Morrison (1967). Utiliza la estadística R (de Roy). Los ejemplos son en Biología, medicina, bioquímica y sociología.

viii) Mudholkar, Davidson & Subbaiah (1974). Utilizan las estadísticas W (de Wilks), R (de Roy) y To^2 (Lawley-Hotelling). El ejemplo es en psicología.

ix) Pillai & Samson (1959). Utilizan la estadística U_o ($= C\ T_o^2$, donde C es una constante y T_o^2 es la estadística de Lawley-Hotelling). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

x) Press (1972). Utiliza las estadísticas W (de Wilks), R (de Roy) y T_o^2 (de Lawley-Hotelling). El ejemplo es en Lingüística.

xi) Roy & Gnanadesikan (1957). Utiliza la estadística R (de Roy). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

xii) Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971). Utilizan las estadísticas W (de Wilks), T_o^2 (de Lawley-Hotelling), y R (de Roy). El ejemplo es en Química.

xiii) Shapiro & Wilk (1965). Utiliza la estadística W (de Wilks). Los ejemplos son uno en química y otro utilizando mediciones antropométricas.

xiv) Smith, Gnanadesikan & Hughes (1962), utilizan las estadísticas W (de Wilks), T_o^2 (de Lawley-Hotelling) y R (de Roy). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

2.- Capítulo III.

Sección sobre normalidad.

Andrews, Gnanadesikan & Warner (1973).

Gnanadesikan (1968).

Healy (1975).

3.- Capítulo IV.

a) Estadística T_o^2 de Lawley-Hotelling.

i) Mudholkar, Davidson & Subbaiah (1974). El ejemplo es en Psicología.

ii) Pillai & Samson (1959). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

iii) Press (1972). El ejemplo es en Lingüística.

iv) Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971). El ejemplo es en Química.

v) Tiku (1971). El ejemplo es con mediciones antropométricas.

b) La estadística W de Wilks.

i) Anderson (1958). El ejemplo es en Biología.

ii) Cole & Grizzle (1966). Ejemplo en Biología.

iii) Dempster (1963). Ejemplo con mediciones antropométricas.

iv) Mudholkar, Davidson & Subbaiah (1974). Ejemplo en Psicología.

v) Press (1972). Ejemplo en Lingüística.

vi) Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971). Ejemplo en Química.

vii) Shapiro & Wilks (1965). Los ejemplo son uno en Química y otro con mediciones antropométricas.

c) La estadística R de Roy.

i) Cole & Grizzle (1966). Ejemplo en Biología.

ii) Foster (1957). Ejemplo con mediciones antropométricas.

iii) Gabriel (1969). Ejemplo en Biología.

iv) Morrison (1967). Ejemplos en Biología, medicina, bioquími ca y sociología.

v) Mudholkar, Davidson & Subbaiah (1974). Ejemplo en Psicología.

vi) Press (1972). Ejemplo en Lingüística.

vii) Roy & Gnanadesikan (1957). Ejemplo con mediciones antropométricas.

viii) Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971). Ejemplo en Química.

d) La estadística V de Pillai.

Mardia (1971). Ejemplo en Biología.

4.- Capítulo V.

Mardia (1971). Robustes de V (Pillai). Ejemplo en Biología.

Apéndice E: Bibliografía de programas para MANOVA (Modelo I).

1.- Blackith & Reyment (1971).

2.- Bock (1963).

3.- Bock (1965).

4.- Clyde, Cramer & Sherin (1966).

5.- Cooley & Lohnes (1962).

6.- Hemmerle, Corney & Johnson (1964).

7.- Jolayne Service.

8.- Nelder (1966).

9.- Olson (1973).

10.- Press (1972), apéndice A.

11.- Roy, Gnanadesikan & Srivastava (1971).

BIBLIOGRAFIA

- Aitken, A. C. (1935): " On Least Squares and Linear Combination of Observations". Proccedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 55, pp. 42-48.

- Aitken, A. C. (1956): "Determinants and Matrices". Oliver & Boyd ltd., Edinburgh, Great Britain.

- Aitken, M. A. (1972): "A class of tests for multivariate normality based on linear functions of order statistics". Unpublished manuscript.

- Anderson, T. W. (1955): "The integral of a symmetrical unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalites". Proc. Amer. Math. Soc., 6, pp. 170-176.

- Anderson, T. W (1958): "An Introduction to Multivariate Statistical Analysis". Wiley and sons.

- Anderson, T. W. (1963): "Asymptotic theory for principal component analysis". Ann. Math. Statist. Vol. 34, pp. 122-148.

- Anderson, T. W. (1966): "Some nonparametric multivariate procedures based on statistically equivalente blocks". Multivariate analysis (Ed. P. R. Krishnaiah), pp. 5-27 Academic Press New York.

- Anderson, T. W. & T. Das Gupta, S. (1964); "Monotonicity of the power funtions of some tests of independence between two sets of viariates". Ann Math. Statist., 35, pp. 206-8'.

- Andrews, D. F., Gnanadesikan, R. & Warner, J. L. (1971) "Transformations of multivariate data". Biometrics, 27, pp. 825-40.

- Andrews, D. F., Gnandesikan, R. & Warner, J. L. (1972): "Methods for assessing multivariate normality". Unpublished memorandum.

- Andrews, D. F. Gnanadesikan, R. & Warner, J. L. (1973): "Methods for assessing multivariate normality", Multivariate analysis III, edited by P. R. Krishnaiah, Academic Press New York.

- Anscombe, F. J. (1961): "Examination of residuals". Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on mathematical statistics and Probability, Vol. 1, pp. 1-36.

- Anscombe, F. J. & Tukey, J. W. (1963): "The examination and analysis of residuals". Technometrics, 5, pp. 141-160.

- Arnold, H. J. (1964): Permutation support for multivariate techniques". Biometrika, 51, pp. 65-70.

- Blackith, R. E. & Reyment, R. A. (1971): "Multivariate Morphometrics". Academic Press, London and New York.

- Bantegui, C. G. (1958): "On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis". Unpublished thesis, the statistical center, Unversity of the Philippines.

- Bartlett, M. S. (1937): "Properties of sufficiency and statistical tests". Proc. Roy. Soc., A, 160, 268-282.

- Bartlett, M. S. (1938): "Further aspects of the theory of multiple regression". Proc. camb. phil. Soc., 34, pp. 33-40.

- Batlett, M. S. (1939): "A note on tests of significance in multivariate analysis", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 35, pp. 180-5.

- Bartlett, M. S. (1947): "The use of transformations", Biometrics, 3, 39.

- Bartlett, M. S. (1954): "A note on the multiplying factors for various chi-squared Aproximations". Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 16, pp. 296-298.

- Bennett, B. M. (1951): "Note on a solution of the Generalized Beherens-Fisher Problem," Ann. Inst. Math. Satist., Vol. 2, pp. 87-90.

- Birnbaum, A. (1955): "Characterizations of complete classes of test of some multiparametric hypotheses, with applications to likelihood ratio test." Ann. math. statist., 26, pp. 21-36.

- Bishop. D. J. (1939): "On a comprehensive tes of the homogenecity of variances and covariance in multivariate problems". Biometrika, 31, pp. 31-55.

- Bock, R. D. (1963): "Programming Univariate and multivariate analysis of variance". Technometrics, 5, pp. 95-117.

- Bock, R. D. (1965): "A computer program for univariate and multivariate analisis of variance". Proceeding of the IBM scientific computing symposium on statistics; october (1963).

- Bock, R. D. (1975): "Multivariate statistical methods in Behavioral Research". Mc Graw-Hill Book Company.

- Box, G. E. P. (1949): "A General Distribution theory for a class of likelihood ratio criteria". Biometrika, Vol. 36, pp. 317-346.

- Box, G. E. P. & Cox, D. R. (1964): "An analysis of transformations", J. R. Statist. Soc. B, 26, pp. 211-52.

- Box, G, E. P. & Watson, G. S. (1962): "Robustness to nonnormality of regression tests". Biometrika, 49, pp. 93-106.

- Carpenter, O. (1950): "Note on the extension of craig's theorem to non-central variates", Ann. Math. StaT. , Vol, 21, pp. 455-457.

- Clyde, Cramer & Sherin (1966): "multivariate Statistical Programs". Biometric Laboratory, University of Miami Florida.

- Cole, J. W. L. & Grizzle, J. E. (1966): "Applications of Multivariate analysis of variance to Repeated Measurements experiments". Biometrics pp. 810-828.

- Constantine, A. G. (1963): "Some noncentral distribution problems in multivariate analysis". Ann. Math.Statist., 34. pp. 7270-85.

- Constantine, A. G. (1966): "The Distribution of Hottelling's Generalized To^2". Ann. Math. Statist., 37, pp. 215-225.

- Consul, P. C. (1966a): "On some inverce Mellin integral transforms". Academie Royale Des Science de Belgique, 52, pp. 547-561.

- Consul, P. C. (1966b): "Exact distributions of the likelihood ratio". Ann. Mat. Statis., 37, pp. 13-19.

- Consul, P. C. (1967a): "On the exact distributions of likelihood ratio criteria for Testing independence of sets of variates under the null hypothesis". Ann. Math. Statist. 38, pp. 1160-1169.

- Consul, P. C. (1967b): "On the exact distribution of the W criterion for testing sphericity in a p-variate normal distribution". Ann. Math. Statist., 38, pp. 1170-1174.

- Cooley, W. W. & Lohenes, P. R. (1962): "Multivariate Procedures for the Behavioral Sciences". John Wiley and sons. New York.

- Curtis, J. H. (1943): "On transformations used in the analysis of variance". Ann. Math. Statist., 14, 107.

- Davis, A. W. (1968): "A system of linear dipperential equations for the distribution of Hotelling's generalized to^2". Ann. Math. Statis., 39, 815-832.

- Davis, A. W. (1970a): "Exact distribution of Hotelling's generalized to^2". Biometri ka, 57, pp. 187-191.

- Davis, A. W. (1970c): "On the null distribution of the sum of the roots of a multivariate beta distribution". Ann. Math. Statist. 41, pp. 1157-1162.

- Davis, A. W. (1972): "On the marginal distributions of the Latent roots or the multivariate Beta matrix". Ann. Math Statist, 43, pp. 1664-1670.

- D'Agostino, R. B. (1971): "An omnibus test of normality for moderate and large size samples", Biometrika, 58, 341-8.

- D'Agostino, R. & Pearson, E. S. (1973): "Tests for departure from normality. Empirical results for the distribution of b_2 and b_1". Biometrika, 60, 613-622.

- Das Gupta, S., Anderson, T. W. & Mudholkar, G. (1964): "Monotonicity of the power function of some tests of the multivariate linear hypothesis". Ann. Math. Statist., 35, pp. 200-205.

- Dempster, A. P. (1963): "Stepwise multivariate analysis of variance based on principal variables". Biometrics, pp. 478-490.

- Dolby, J. L. (1963): "A quick method for choosing a transformation". Technometrics 5, 317.

- Downton, F. (1966): "Linear estimates with polynomial coefficients". Biometrika, 53, 129-41.

- Draper, N. & Smith, H. (1966): "Applied regression analysis". Willey and sons.

- Eaton, M. N. & Perlman, M. D. (1974): "A Monotonicity property of the power functions of some invariant test for MANOVA". Ann. of statist., 2, pp. 1022-1028.

- Eisenhart, C. (1947): "The assumptions underlying the analysis of variance", Biometrics, 3, pp. 1.

- Federer, W. T. (1951): "Testing Proportionality of covariance matrices" Ann. Math. Statist., 22, 102.

- Fisher, R. A. (1939): "The sampling distribution of some statistics obtained from non-linar equations". Ann. Eugenics, 9, pp. 238-249.

- Foster, F. G. (1957): "Upper percentage points of the Generalized Beta Distribution II", Biometrka, 44, pp. 441-453.

- Foster, F. G. (1958): "Upper percentage points of the Generalized Beta distribution III", Biometrika, 45, p. 492-503.

- Foster, F. G. and Rees, D. D. (1957): "Upper percentage ponts of the Generalized Beta Distribution I", Briometrika, 44, pp. 237-247.

- Fujikoshi, Y. (1973): "Monotonicity of the power functions of some tests in general MANOVA models". Ann. of statis., 1, pp. 388-391.

- Fukutomi, K. (1967): "On the destributions of the extreme characteristic roots of the matrices in multivariate analysis", Rep. stat. App. Res., JUSE, 14, pp. 8.

- Gabriel, K. R. (1968a): "Simultaneos test procedures in multivariate analysis of variance, Biometrika, 55, p. 489-504.

- Gabriel, K. R. (1968b): "Simultaneaus test procedures in multivariate analysis of variance". Biometrika, 55, p. 489-504.

- Gabriel, K. R. (1969a): "Simultaneus test procedures-some theory of multiple comparisons", Ann. Math. Stat., 40, p. 224-250.

- Gabriel, K. R. (1969b): "A comparison of some methods of simultaneons inference in MANOVA", multivariate analysis II (P. R. Krishnaiah, ed.) Academic Press, New York.

- Gabriel, K. R. and sen, P. K. (1968): "Simultaneos test procedures for one-way ANOVA and MANOVA based on rank scores". Sankhya, series A, 30 pp. 303-312.

- Ghosh, M. N. (1964): "On the admissibility of some tests of MANOVA". Ann. Math. Statist., 35, pp. 789-794.

- Girshick, M. A. (1939): "On the sampling theory of roots of determinantal equations". Ann. Math. Statist., 10, pp. 203-224.

- Gnanadesikan, R. (1956); "Contributions to multivariate analysis including univariate and multivariate componentes analysis and factor analysis" Institute of statistis, University of North Carolina mimeo, series No. 158.

- Gnanadesikan, R. (1968): "Graphical Methods for informal inference in multivariate data analysis" Bulletin de L'Institute international de statistique, tome XLV, 4e Livraison, pp. 195-206.

- Gnanadesikan, R. L. Snyder, M. & Yao, Y. (1965): "Efficiency comparisons of certain Multivariate analysis of variance test procedures". Paper presented at the Central Regional Meeting of the Institute of Mathematical Statistics, Chicago, December 1964. Abstract in Ann. Math. Statist., 36, pp. 356-7.

- Graybill, F. A. (1964): "An Introductions to linear statistical Models" Vol. 1, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

- Graybill, F. A. & Hultquist, R. A. (1961): "Theorems concerning Eisenhart's Model II". Ann. Math. Statist. 32, 261.

- Graybill, F. A. and Worthom, A. W. (1956): "A Note on uniformly best unbiased estimators for variance components". J. Amer. Stat. Ann., Vol. 51, pp. 266-268.

- Gnanadesikan, R. & Kettenring, J. R. (1972): "Robust estimates residuals and outlier detection with multiresponse data". Biometrics 28, pp. 81-124.

- Gupta, A. K. (1971): "Noncentral distribution of Wilks' statistic in MANOVA". Ann. Math. statist, 42, pp. 1254-1261.

- Hayakawa, T. (1967): "On the distribution of the maximun latent root of a positive definite symmetric random matrix" Ann, Inst. Stat, -- Math., 18.

- Healy, J.R. (1975): "Multivariate normal plotting" Applied stat. -- pp. 157-161.

- Heck, D.L. (1960): "Charts of some upper percentage points of the - Distribution of the largest characteristic root", Ann. Math. Stat., 31, pp. 625-642.

- Hemmerle, W.J., Carney, E.J. & Johnson, A.F. (1964): "AARDVARK --- (analysis of variance system)", Reference Manual, Numerical analy--- sis, Programming series, No. 1, Statistical Laboratory, Iowa state - University, Ames, Iowa.

- Holloway, L.N. & Dunn, O.J. (1967): "The robustness of Hotelling's - T^2 ". JASA, 62, pp. 124-36.

- Hopking, J.W. & Clay, P.P.F. (1963): "Some empirical distributions - of bivariate T^2 and homoscedasticity criterion M under unequal va--- riance and leptokurtosis". JASA, 58, pp. 1048-53.

- Hotelling, H. (1947): "Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bomb-sights", pp. 11-184, Mc Graw-Hill, -- New York.

- Hotelling,, H. (1951): "A Generalized T test and Measure of Multiva- riate Dispersion:, in Jerzy Neyman, ed., Proceedings of the second - Berkeley Symposium on Matematical statistics and probability, berke- ley: "University of California Press, , Berkeley: -- "University of California Press, pp. 23-41.

- Hsu, P.L. (1939): "On the distribution of roots of certain determi-- nantal equations". Ann,Eugenics, 9, pp. 250-258.

- Hughes, D.T. & Saw, J.G. (1972): "Aproximating percentage points of - Hotelling's To^2 statistic". Biometrika, 59, pp. 224-6.

- Ito, K.(1956): "Asymtotic formulae for the distribution of Hotelling ' s generalized To^2 statistic". Ann. Math. Statist., 27, pp. 1091-- 1105.

- Ito, k (1960): "Asymptotic formulae for the distribution of Hote---- lling's generalized To^2 statistic II". Ann. Math. Statist., 31, -- 1148-1153.

- Ito, K. (1961): "On multivariate analysis of variance tests. "Bulle- tin de L'institute International de statistique. tome XXXVIII, 4o. Livraison, 88-98.

- Ito, K. (1969): "On the effect of heteroscedasticity and normality -- upon some Multivariate test procedures". Krishnaiah, P.R. (ed), Multivariate analysis, 2, New York, Academic Press Inc., pp. 87-120.

- Ito, K. & Schull, W.J. (1964): "On the robustness of the To^2 test in multivariate analysis of variance when variance-covariance matrices - are not equal". Biometrika, 51, pp. 71-82.

- James, A.T. (1960): "The Distribution of the latents roots of the --- covariance matrix". Ann.Math.Statis., 31, pp. 151-158.

- James, A.T. (1964): " Distributions of matrix variates and latent --- roots derived from normal samples", Ann.Math. Statist., 35, pp. 475-- 501.

- Khatri, C.G. (1964): "Distribution of the "Generalized" multiple co-- rrelation matrix in the dual case". Ann. Math. Statist., 35, - - -- pp. 1801-6.

- Khatri, C.G. & Pillai, K.C.S. (1965): "Some results on the non-cen--- tral multivariate Beta distribution and moments of traces of two ma-- trices". Ann. Math. Statist., 36, pp. 1511-1520.

- Khatri, C.G. & Pillai, K.C.S. (1967): "On the moments of traces of -- two matricce in multivariate analysis". Ann. Inst. Statist. Math., - 19, pp. 143-156.

- Khatri, C.G. & Pillai, K.C.S. (1968): "On the non-central distribu--- tions of two test criteria in multivariate analysis of variance". --- Ann.Math. Statist, 39, pp. 215-226.

- Kiefer, J. & Schwartz, R. (1965): "Admissible Bayes character of --- T^2, and other Fully invariant tests for classical multivariate normal problems". Ann. Math. Statist., 36, pp. 747-770.

- Korin, B.P. (1969): " On testing the equality of K covariance matri--- ces". Biometrika, 56, pp. 216-8.

- Korin, B.P. (1972): "Some comments on the criterion M and the homoscedasticity multivariate analysis of variance tests T^2, W and R". Biometrika, 59, pp. 215.

- Krishnaiah, P.R. (1965a): "On the simultaneous ANOVA and MANOVA --- tests". Ann. Inst. Statis. Math., 17, P. 35-53.

- Krishnaiah, P.R. (1965c): "On a multivariate generalization of the -- simultaneos analysis of variance test". Ann. Inst. Statist Math., --- 17, p. 167-173.

- Krishnaiah, P.R. (1965c): "Simultaneous tests for equality of variance test". Ann. Inst. Statist Math., 17, p. 167-173.

- Krishnaiah, P.R. (1965c): "Simultaneous tests for equality of variances against certain alternatives".
  , Austral. J. Statist., 7, p. 105-106.
  Correcciones: Austral. J. statist., 10, p. 43.

- Krishnaih, P.R. (1967): "Simultaneous tests for multiple comparisons of growth curves. ARL 67-0199, Aerospace Res. Labs., Wright-Patterson air Force Base, Ohio.

- Krishnaiah, P.R. (1968): "Simultaneous tests for the equality of covariance matrices against certain alternatives". Ann. Math. Statist., -- 39, P. 1303-1309.

- Krishnaiah, P.R. (1969): "Simultaneous test procedures under General Manova Models", Multivariate analysis II, (P. R. Krishaiah, ed.), - Academic Press, New York.

- Krishnaiah, P.R. & Chang. T.C. (1970): "On the exact distributions of the traces of S_1 $(S_1+S_2)^{-1}$ and S_1 S_2^{-1} "Proyect No. 7071, Aerospace Research Laboratorios, U.S. Air Force.

- Krishnaiah, P.R. and Jayachandran K. (1968): "Simultaneous tests and multiple decision procedures for multi-response growth curves", --- (abstract) Ann. Math. Statist., 39.

- Kshirsagar, A.M. (1964): "Wilks criterion" J. Indian stat. assoc., - 2, pp. 1.

- Kshirsaga A.M.: "Multivariate analysis", Marcel Dekker, Inc. N.Y. -- (1972).

- Lawley, D.N. (1938): "A generalization of Fisher's Z test". Biometrika 30, pp. 180-7. Corrections in Biometrika, 30, (January 1439) pp. - 467-9.

- Lee, Y. (1971): "Asymptotic formulae for the distribution of a multivariate test statistic: power comparisons of centain multivariate --- tests". Biometrika 58, pp. 647-651.

- Lee, Y.S. (1972): "Some results on the distribution of Wilks's likelihood-ratio criterion". Biometrika, 95, pp. 649-664.

- Lehmann, E' (1959): "Testing statistical Hypothesis", New York, John Wiley and sons, Inc., pp. 130-134.

- Lehmann, E. and Scheffé H. (1950): "Completeness, similar regions and unbiased estimation, Part I", Sankh ya, Vol. 10, pp. 305-340.

- Malkovitch, J.F. & Afifi, A.A. (1973): "On test for multivariate normality". JASA, 68, pp. 176-179.

- MARDIA, K.U. (1970): "Measures of Multivariate Skewness and kurtosis with applications", Biometrika, 57,519-530.

- Mardia, K.V. (1971): "The effect of normality on some multivariate -- tests and robustness to normality in the linear model". Biometrika, 58, pp. 105-121.

- Mardia, K.V. (1975): "Assessment of Multinormality and the Robustness of Hotelling's T^2 test". app. statist., 24, pp. 163-171.

- Mathai, A.M. & Rathie, P.N. (1971): "The exact distribution of wilks' criterion". Ann. Math. Statist., 42, pp. 1010-1019.

- Mc Keon, J.J. (1974): "F approximations to the distribution of Hote-- lling's To^2". Biometrika, 61, pp. 381.

- Mehta, M.L. (1967): "Random Matrices and the statistical theory of -- Energy Levels", academic Press, New York.

- Meijer, C.S. (1946): "On the G Function. II, III, IV". Nederl. Akod. Wetensch. Proc., 49, pp. 344-356, 457-469, 632-641.

- Mijares T.A. (1958): "On the distribution of the sum of six roots of a matrix in multivariate analysis". Unpublished M.S. thesis submitted in march, 1958 to the University of the Philippines graduate school.

- Mikhail, N.N. (1965): "A comparison of tests of the wilks Lawley hypo thesis in multivariate analysis". Biometrika, 52, pp. 149-156.

- Miller, R.G. (1966): "Simultaneous Statistical inference", Mc-Graw-- Hill, New York.

- Morrison, D.F. (1967): "Multivariate statistical methods", Mc-Graw-- Hill Book company, New York, Cap. 5.

- Morrison, D.F. & Bhoj, D.S. (1973): "Power of the likelihood ratio - test on the mean vector of the multivariatemor distribution with mi- ssing observations". Biometrika, 60, pp. 365-368.

- Mudholkar, G.S., Davidson, M.L. & Subbaiah, P. (1974): "Extended li- near hypotheses and simultaneous tests in multivariate analysis of - variance". Biometrika 61,pp. 467-477.

- Muirhead, R.J. (1970): "Asymptotic distributions of some multivaria- te tests". Ann. Math. Statist 41, pp. 1002-1010.

- Muirhead, R.J. (1972): "The asymptotic noncentral distribution of -- Hotelling's generalized To^2". Ann. Math. Statist., 43, pp. 1671-1677.

- Nanda, D.N. (1950): "Distribution of the sum of roots of a determinan tal Equation with a condition". Ann, Math. Statist., 21, pp. 432-9.

- Naraian, R.D. (1950): "On the completely uhbiased character of tests of independence in multivariate normal systems". Ann. Math. Statist., 21, pp. 293-298.

- Nelder, J.A. (1966): "General statistical Program (GENSTAT IV), --- User's Guide (1966). "Waite Inst., Glen Osmond, S. Australia.

- Ogawa, J. (1950): "On the independence of quadratic forms in a non--- central normal system", Osaka Math. Journal, Vol. 2, pp. 151-159.

- Olson, CH.L. (1973): "A Monte Carlo Investigation of the Robustness - of Multivariate analysis of variance". Unpublished Ph. D., dissertation, University of Toronto, june.

- Olson CH.L. (1974): "Comparative Robustness of six tests in multiva-- riate analysis of variance:, JASA, 69, pp. 894-93.

- PEARSON, K. (1934): " Tables of the incomplete Beta-Function, cambri- dge University Press for the Biometrika Trustees, cambridge.

- Pearson, E.S. (1971): "Tables for multivariate analysis", Biometrika, London.

- Pearson, E.S. & Hortley, H.O. (1966): "Biometrika Tables for statisti cians", Vol. I, pp. 67-9, 207-8, Cambridge Univ. Press.

- Pillai, K.C.S. (1953): "On the distribution of the sum of the roots of a determinantal equation", (abstract) Ann. Math. Stat., 24, p.495.

- Pillai, K.C.S. (1954): "On some distribution problems in multivaria- te analysis". Mimeographed series No. 88, Institute of statistics, - University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina.

- Pillai, K.C.S. (1954a): "On the distribution of Hotelling's generali zed T test". (Abstract) Ann. Math. Stat., 25, p. 412.

- Pillai, K.C.S. (1955): "Some New test criteria in Multivariate ana-- lysis". Ann. Math. Statist., 26, pp. 117-21.

- Pillai, K.C.S. (1956a): "On the distribution of the largest or the - smallest root of a matrix in multivariate analysis" Biometrika, 43, pp. 122-71.

- Pillai, K.C.S. (1956c): "Some results useful in multivariate analy-- sis". Ann. Math. Statist., 27, pp. 1106-14.

- Pillai, K.C.S. (1957): "Concise tables for statisticians" The statis tical center, University of the Phillippines.

- Pillai, K.C.S. (1960): "Statistical tables for tests of multivariate Hypotheses". Manila: statistical center, University of the Phillippi- nes.

- Pillai, K.C.S. (1964): "On the distribution of the largest of seven - roots of a matrix multivariate analysis". Biometrika, 51, pp. 270-5.

- Pillai, K.C.S. (1965a): "On the distribution of the largest caracte-- ristic root of a matrix in multivariate analysis". Biometrika, 52,--- pp. 405-414.

- Pillai, K.C.S. (1965c): "On elementary symmetric functions of the -- roots of two matrices in multivariate analysis". Biometrika, 52, pp. 499-50.

- Pillai, K.C.S. (1967a): "Upper percentage points of the largest root of a matrix in multivariate analysis". Biometrika, 54, pp. 189-194.

- Pillai, K.C.S. (1967c): "Power comparisons of tests of two multivaria te hypothesis based on four criteria". Biometrika, 54, pp. 195-210.

- Pillai, K.C.S. (1967c): "On the exact Distribution of Pillai's $V^{(s)}$ criterion". Mimeographed series No. 115, Departament of statistics,- Purdue University, August 1967.

- Pillai, K.C.S. (1968): "On the moment generating function of - - -- Pillai's $V^{(s)}$ criterion". Ann. Math. Statist., 39, pp. 877-880.

- Pillai, K.C.S. (1969): " On the exact distribution of wilks's crite-- rion". Biometrika, 56, pp. 109.

- Pillai, K.C.S. (1969): "On the exact distribution of wilks's crite--- rion". Biometrika, 56, pp. 109.

- Pillai, K.C.S. (1971): "On the exact distribution of Hotelling's Gene ralized To^2". Jornal of Multivariate analysis, 1, pp. 90-107.

- Pillai, K.C.S. & Al-ani, S. (1967): "On the distributions of some --- functions of the roots of a covariance matrix and the non-central -- Wilks' ". Mimeograph series No. 125, Departament of Statistics, Pur-- due Univ.

- Pillai, K.C.S., Al-Ani, S. & Jouris, G.M. (1969): "On the distributi- ons of the ratios of the roots of a covariance matrix and Wilk's cri- terion for tests of three hypotheses". Ann. Math. Statist., 40, pp. 2033-2040.

- Pillai, K.C.S. & Bantegui, C.G. (1959): " On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis". Biometri ka, 46, pp. 122-127.

- Pillai, K.C.S. & Chang, T.C. (1968): "On the distributions of Hote-- lling's To^2 for three latent roots and the smallest root of a cova-- riance matrix". Mimeo series No. 147, Departament of statistics, -- Purdue University, Lafayette, Indiana.

- Pillai, K.C.S. & Jayachandran, K. (1967): "Power comparisons of tests of two multivariate hypotheses based on four criteria" Biometrika, -- 54, pp. 195-210.

- Pillai, K.C.S. & Jayachandran, K. (1968): "Power comparisons of test, of two multivariate hypotheses based on four criteria". Biometrika, 55, pp. 335, 342.

- Pillai, K.C.S. & Jayachandran, K. (1970): "The exact distributions -- of Pillai's $V^{(s)}$ criterion". JASA, 65, pp. 447, 454.

- Pillai, K.C.S. & Mijares, T. (1959): "On the moments of the trace of a matrix and approximations to its distribution". Ann. Math. Statist. 30, pp. 1135-1139.

- Pillai, K.C.S. & Samson P. (1959): "On Hotelling's Generalization of T^2". Biometrika, 46, pp. 160-5.

- Pillai, K.C.S. & Sugiyama, T. (1969): "Noncentral distributions of -- the largest latent roots of three matrices in multivariate analysis". Ann. Inst. Stats. Math., 21, pp. 321.

- Porter, C.S. (ed) (1965): "Statistical theories of spectral fluctuations". academic press, Nwe York.

- Posten, H.O. & Bargmann, R.E. (1964): "Power of the likelihool ratio test of the general linear hypothesis in multivariate analysis". --- Biometrika, 51, pp. 467-476.

- Press, S.J. (1967): "Structured Multivariate Behrens-Fisher Problems" Sankhya, serie A, Vol. 29, parte 1, pp. 41-48.

- Press, S.J. (1972): "Applied Multivariate analysis". Holt, Rinehart - and Winston Inc. New York.

- Puri, M.L. & Sen, P.L. (1971): "Non-parametric methods in multivariate analysis". Wiley and sons, pp. 377-399.

- Ramachandran, K.Y. (1956): "On the simultaneus analysis of variance - test". Ann. Math. Stat., 27, pp. 521-528.

- Rao, C.R. (1948): "Test of significance in multivariate analysis". -- Biometrika, 35, pp. 58-79.

- Rao, C.R. (1951): "An asymptotic expansion of the distribution of -- wilks's criterion". Bull. Inst. Inter, Stat., 33, pp. 177.

- Rao, C.R. (1952): "Advanced statistical methods in Biometric Research" New York: wiley.

- Rao, C.R. (1965): "Linear statistical inference and its applications". New York: John Wiley and sons. Third edition.

- Rao, C.R. (1967): "Least squares theory Using and estimated Dispersions matrix and its applications to mesurements of signals", Procedings of the 5Th. Berkeley symposium on mathematical statistics and Probability, Vol. 1, Berkeley: University of California Press, pp. 355-372.

- Rao, C.R. (1968): "A note on a Previons lemma in the theroy of Least squares and some further results", sankhya, series A, vol. 30, pp. 245-252.

- Rao, C.R. (1972): "Recent Trends of research work in multivariate analysis". Biometrics, 28, pp. 3-22.

- Rao, C.R. & Mitra, S.K.: "Generalized inverse of matrices and its applications". John wiley 1971.

- Roy, S.N. (1939): "P-statistics and some generalizations of the maximum, the minimum and any intermediate of the p-statistics on the null hypothesis", sankhya, 7, pp. 133-158.

- Roy, S.N. (1945): "The individual sampling Distribution of the Maximum, the minimun and any intermediate of the p-statistics on the Null-Hypothesis". Sankya, 7, parte 2, pp. 133-58.

- Roy, S.N. (1950): "Univariate, and multivariate analysis as problems in testing of composite hypotheses I". Sankhya, Vol. 10, pp. 29-80.

- Roy, S.N. (1953): "On a heuristic method of test construction and its uses in multivariate analysis", Ann. Math. Stat., Vol. 24, pp. 220-238.

- Roy, S.N. (1954): "A report on some aspects of multivariate analysis". institute of statistics, University of North Carolina, mimeo, series, No. 121.

- Roy, S.N. and Gnanadesikan, R. (1956): "Further contributions to multivariate confidence Bounds", institute of statistics, University of North Carolina, Mimeo, Series, No. 155, also Biometrika, 44, (1957), pp. 399.

- Roy, S.N. (1957): "Some aspects of multivariate analysis". John Wiley & sons, Inc. New York.

- Roy, S.N. and Bose, C. (1953): "Simultaneus confidence interval estimation", Ann. Math. Stat., 24, P. 513.

- Roy, S.N. & Gnanadesikan, R. (1957): "Funther contributions to multivariate confidence Bounds". Biometrics, 44, pp. 399-410.

- Roy, S.N. and Gnanadesikan, R. (1959a): "Some contributions to ANOVA in one on more dimensions: I" Ann. Math. Stat. 30, pp. 304.

- Roy, S.N. and Gnanadesikan, R. (1959b):"Some contributions to ANOVA in one or more dimensions: II", Ann. Math. Stat., 30, p. 318.

- Roy, S.N., Gnanadesikan, R. & Srivastava, J.N. (1971): "Analysis and - Design of certain Quantitative Multiresponse Experiments". Oxford: Per gamon Press Ltd.

- Roy, S.N. & Mikhail, W.F. (1961): "On the monoton character of the po-wer functions of two multivarite tests". Ann. Math. Statist, 32, pp. 1145-1151.

- Schwarts, R.E. (1964): "Properties of a test in MANOVA". (abstrac) -- Ann. Math. Statist., 35, pp. 939-40.

- Schatzoff, M. (1966): "Exact distribution of wilks's likelihood-ratio criterion". "Biometrika, 53, pp. 347-58.

- Scheffé, H. (1943): "On solutions of the behrens-Fisher Problem Based on the t-Distribution". Ann. Math. Statist. Vol. 14, pp. 35-44.

- Scheffé, H. (1959): "The analysis of variance". Wiley and sons.

- Searle, S.R. (1971): "Linear Models", John Wiley sons inc. New York.

- Sen, P. (1957): "On a multivariate test criterion and its applica---- tions. Unpublished thesis. the statistical center, University of the Philippines.

- Shapiro, S.A. & Wilk, M.B. (1964): "A comparative study of various -- tests for normality. Unpublished manuscript. Invited paper, amer. -- stat. assoc. Annual Meeting Chicago, Illionis, December 1964.

- Shapiro, S.A. & Wilk, M.B. (1965a): An analysis of variance test for normality (complete samples). Biometrika, 52, pp. 591-611.

- Shapiro, S.A. & Wilk, M.B. (1965b): "Testing the normality of several samples, unpublished manuscript.

- Shapiro, S.A. & Wilk, M.B. (1965c): "An analysis of variance test for normality (incomplet samples)": unpublished manuscript.

- Shapiro, S.S., Wilk, M.B. & Chen H.J. (1968): "A comparative study of various tests for normality". J. am. statist. Ass., 63, 1343-92.

- Sharnan, A.E. & Breenberg, B.G. (1956): "Estimation of location and - scale parameters by order statistics from singly and double censored samples. Part I.", Ann. Math. Stat., 27, pp. 427-51.

- Siotani, M. (1957): "Note on the utilization of the generalized ---- student ratio in the analysis of variance or dispersion". Ann. Inst. statist. Math., 9, pp. 157-171.

- Siotani, M. (1971): "An asymptotic expansion of the nonnull distribution of Hotelling's generalized T_0^2 -statistic". Ann. Math. Statist., 42, pp. 560-571.

- Smith, H. Gnanadesikan, R., Hughes, J.B. (1962): "Multivariate analysis of variance (MANOVA)", Biometrics, 18, p. 22.41.

- Sotres Ramos, D.A., Mexas, A.G. y Méndez I. (1972):"Algoritmo para -- análisis de covarianza multivariado y un estudio mediante simulación de la potencia de las pruebas multivariadas de Lawley, Heck y Wilks". Agrociencia, Serie A, 10,pp. 79-90.

- Srivastava, J.N. (1968): "Some estudies on intersection tests in multivariate analysis of variance". 2nd. symposium on multivariate analysis, Dayton, Ohio. Academic Press.

- Stein, C. (1956): "The admisibility of Hotelling's T^2-test" Ann. --- Math. Statist., 27, pp. 616-623.

- Sugiyama, T. (1967): "Distribution of the largest latent root and the smallest latent root of the generalized B statistic and F statistic - in multivariate analysis". Ann, Math. Statis., 38, pp. 1152-1159.

- Sugiura, N. (1969): "Asymptotic expansions of distributions of the -- likelihood ratio criteria for covariance matrix". Ann. Math. Statistc. 40, pp. 2051-2063.

- Sugiura, N. & Fujikoshi, Y. (1969): "Asymptotic expansions of the -- non-null distributions of the likelihood ratio criterio for multi---- variate linear hypothesis and independence". Ann. Math. Statist, --- 40, pp. 942-952.

- Sugiyama, T. & Fukutomi, K. (1966): "On the distribution of the extreme characteristic roots of the matrices in multivariate analysis". Reports of statistical applications on research union of Japanese --- scientist and engineers, 13. Rep. statist. appl. Ress. Un. Japan. Sci. Eng. (1967), 14, pp. 156-160.

- Tiku, M.L. (1971): "A note on the distribution of Hotelling's generalized T_0^2" Biometrika, 58, pp. 237-441.

- Troskie, C.G. (1971): "The distributions of some test criteria in multivariate analysis". Ann. Math. Statist. 42, pp. 1752.

- Ventura, S.R. (1957): "On the extreme roots of a matrix in multivariate analysis and associated tests". Unpublished Thesis. The statistical center. University of the Philippines.

- Waal D.J. (1969): "On the non-central distribution of the largest canonical correlation coefficient". South african statist. J., 3, ---- p. 91.

- Waal, D.J. (1975): "Parametric multivariate analysis". Part. 2. University of North Carolina at chapel Hill.

- Wald, A. (1969): "Note on the consistency of the maximum Likelihood - estimate", Ann. of Math. Stat., 20, pp. 595.

- Weiss, L. (1958): "A test of fit for multivariate distributions". Ann. Math. Statist., 29, pp. 595-9.

- Wigner, E.P. (1967): "Random matrices in physics". Siam Rev. 9, pp. - 1-23.

- Wilks, S.S. (1932): "Certain Generalizations in the analysis of Va--- riance", Biometrika, 24, pp. 471-94.

- Wilks, S.S. (1935): "On the independence of K sets of normally distri buted variables". Econometrica, 3, pp. 309-26.

- Wilks, S.S. (1946): "Sample criteria for testing equality of means, - equality of variances, and equalite of covariances in a Normal Multivariate Distribution". Ann. Math. Statist. Vol. 17, pp. 257.

- Wilks, M.B. & Gnanadesikan, R. (1968): "Probability Plotting methods for the analysis of data". Biometrika, 55, pp. 1-17.

- Wonnacott, R.J. & Wonnacott, T.H. (1970): "Econometrics", Wiley & ---- Sons, pp. 318-335.