UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS.

ANUALIDADES CIERTAS CON BASIC Y SU DESARROLLO MATEMATICO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O .

PRESENTA:

JAVIER TORRES CANTU

México, D. F. 1987.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

P R O L O G O

El objetivo de ésta tesis es la de facilitar, el estudio de las Anualidades Ciertas.

Cada tipo de Anualidad se estudia en forma individual, para que las personas que necesitan utilizar una de ellas en particular, pueda directamente consultarla.

Debemos tener presente, que la Base del tema que nos ocupa es la progresión geométrica y por lo mismo, esta desarrollada al principio.

Para deducir las fórmulas correspondientes a las Anualidades nos auxiliamos con la línea del tiempo, en esa forma identificamosel momento que le toca a cada pago, iniciamos del primero al último pago.

En la actualidad debido a los avances en la tecnología de las computadoras, nos evitamos el uso de los libros de las tablas financieras, en las que encontraremos determinadas tasas, que muchas veces no corresponden a los requeridos como ejemplo con décimos de porcentaje o muy altas. Teniendo dos alternativas para el ejemplo de dichas computadoras, para el cálculo de datos financieros son:

1.- Utilizar un lenguaje computación como el Basic, elaborando los programas en forma sencilla y acorde a los requerimientos particulares de los casos.
2.- Utilizar paquetes recomendados por los fabricantes, para satisfacer las necesidades propias del usuario.

Como esto último es muy extenso, por la cantidad de paquetes existentes en el mercado, no es conveniente, en esta ocasión, profundizar en su estudio.

No debemos olvidar que una de las ventajas, es la velocidad de Respuesta y su facilidad en el uso múltiple de estos equipos.

Cabe notar que normalmente el desarrollo matemático financiero, que localizamos en los libros especializados en esta materia, nos encontramos problemática siguiente:

El desarrollo de las fórmulas, está restringido a los pasos inicial y final normalmente, originando que el consultor de la obra, que no esta familiarizado con las fórmulas sufra cierto descontrol.

También nos encontramos con el problema que al desarrollar un tema, tenemos que consultar diferentes partes de esos libros ó el peor de los casos consultar más de uno.

P R O G R E S I O N E S

Este concepto es importante para el trabajo realizado, ya que se ocupa con mucha frecuencia, para poder llegar a una simplificación de la Suma de las Anualidades, obteniendo la Fórmula que facilita su cálculo.

Hay dos tipos de progresiones que nos van a interesar y son:

PROGRESION ARITMETICA

PROGRESION GEOMETRICA

PROGRESION ARITMETICA.

Sabemos que es una sucesión de números llamados términos, en la diferencia que existe entre dos números seguidos, permanece constante, le llamamos razón.

Al primer término le denominamos con la letra $\underline{a}$, la razón con $\underline{r}$ y a $\underline{n}$ el número términos.

Se forma de la manera siguiente:

a, a+r, a+2r, a+3r, a+4r, , , , , , , , , , , a+(n-1)r

Nos interesa saber la suma de todos los términos que consta, y último término de la progresión.

El último término como vemos es:

$I = a+(n-1)r$

La suma es de la forma siguiente:

S = a + a + r + a + 2r + a + 3r ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,a+(n-1)r

Para simplificar ésta suma, haremos los siguientes pasos.

El primer término lo sumamos al último término dándonos

$$a + a + (n-1)\ r = I + a$$

El segundo término lo sumanos con el penúltimo témino y nos da

$$a + r + a + (n-2)\ r = a + (n-1)\ r = a + I$$

Esta suma continúa sucesivamente como son n términos, y como la suma es por parejas, entonces las sumas son n/2

La suma es igual a

$$S = \frac{(a + I)\ n}{2}$$

PROGRESION GEOMETRICA

Sabemos que es una sucesión de números llamados términos, en la que el cociente que existe entre dos números seguidos, permanece constante, le llamamos razón.

Igual a la progresión anterior, $\underline{a}$ es el primer término, $\underline{r}$ es la razón, y $\underline{n}$ el número de términos.

Se forma de la manera siguiente:

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ,,,,,,,,,,,,,,,,,ar^{n-1}$$

La suma es de la forma siguiente:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$$

Para poder simplificar ésta suma, se realizará la operación siguiente:

$$S - Sr = S(1 - r)$$

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$$

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots\ldots\ldots ar^{n-1} + ar^n$$

El resultado es:

$$S(1-r) = a - ar^n = a(1 - r^n)$$

$$S = a(1 - r^n)/(1 - r) = (r^n - 1)/(r - 1)$$

A N U A L I D A D E S

Cuando se tiene una serie de pagos de dinero periódicos y se realizan en tanto exista una situación dada, la llamaremos una Anualidad.

Los intervalos de tiempo entre cada uno de los pagos pueden ser:

MENORES DE UN AÑO

IGUALES A UN AÑO

MAYORES DE UN AÑO

Es requisito que éstos intervalos de tiempo sean iguales.

Ejemplos de éstos pagos son:

Pago de la renta de un departamento, los pagos se efectuan mensualmente.

El pago de la pensión a una Viuda, éstos se efectuan mensualmente.

El pago de las colegiaturas de los hijos, se pueden realizar mensualmente, trimestralmente, semestral, según sea el caso.

Todas las Anualidades cáen dentro de dos grupos que clasificamos de la forma siguiente:

ANUALIDADES CONTIGENTES

ANUALIDADES CIERTAS

Las contigentes se identifican porque la serie de pagos está sujeta a algún evento fortuito, tanto al comenzar como para finalizarlos.

Las ciertas se identificañ porque son independientes de cualquier evento fortuito, durante el tiempo que se estableció. Son el objeto de nuestro trabajo.

De las Anualidades ciertas, haremos la siguiente clasificación.

La primera clasificación es cuando comienza el primer pago.

Anualidades Vencidas.

El primer pago se efectua después de transcurrido el primer periodo de tiempo, cada uno de los pagos se hace después de transcurrido su periodo de tiempo correspondiente.

Anualidades Anticipadas.

El primer pago se efectua al principio, cada uno de los pagos se realiza al principio del periodo correspondiente.

Anualidades Diferidas.

El primer pago se efectua después de transcurridos m periòdos, los demás pagos se efectuan en su periodo correspondiente.

De la clasificación a partir del primer pago, nace una nueva subclasificación, con nuevas características que hace que se distingan de las demás.

Anualidades Perpetuas.

Los pagos se realizan en forma indefinida, por ejemplo la renta de un terreno.

Anualidades Variables.

Los pagos son distintos, si éstos van siendo mayores, se les denominará crecientes, si es al contrario se les llamará decrecientes.

Anualidades Pagaderas p-veces al año.

Valuada a una tasa de interés anual efectiva.

Anualidades Pagaderas p-veces al año, con tasa nominal.

ANUALIDADES VENCIDAS

Esta anualidad se caracteriza en que el primer pago se efectúa después de transcurrir el primer período, cada uno de ellos, se realizará después de transcurrido el período correspondiente.

Empezamos con VALOR PRESENTE.

0	1	2		n-1	n
	R	R		R	R

El primer pago tiene un valor presente de

$$A = R\,(1+i)^{-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un valor presente de

$$A = R\,(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un valor presente de

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3}$$

Y los n primeros pagos tienen un valor presente de

$$A = R\,(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2} + R\,(1+i)^{-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R\,(1+i)^{-n}$$

Factorizamos $R\,(1+i)^{-1}$ y resulta

$$A = R(1+i)^{-1}\left[1+(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{-(n-1)}\right]$$

Identificamos que lo que está dentro del paréntesis es una progresión geométrica, siendo los elementos.

El primer término es 1

La razón es $(1+i)^{-1}$

El número de términos es n

Sustituímos en la fórmula de la progresión, resulta

$$A = R\,(1+i)^{-1}\,\frac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{\left(1-(1+i)^{-1}\right)}$$

Simplificamos y obtenemos la fórmula de

VALOR PRESENTE

$$A = R\,\frac{\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{i}$$

Continuemos con el monto

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & & n-1 & n \\ \hline & R & R & & R & R \end{array}$$

El primer pago tiene un monto

$$S = R\,(1+i)^{n-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto

$$S = R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto

$$S = R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} + R\,(1+i)^{n-3}$$

Y los n primeros pagos tienen un monto

$$S = R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R$$

Los ordenamos en forma ascendente

$$S = R + R(1+i)^{1} + R(1+i)^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + R(1+i)^{n-1}$$

Factorizamos R

$$S = R\left[1 + (1+i)^{1} + (1+i)^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right]$$

Lo que está dentro del paréntesis lo identificamos que se trata de una progresión geométrica, los elementos son:

Primer término es	1
La razón es	(1+i)
El número de términos es	n

Sustituímos en la fórmula de la progresión geométrica y nos queda

$$S = \frac{R\left(1 - (1+i)^{n}\right)}{\left(1 - (1+i)\right)}$$

Simplificamos, tendremos la fórmula del monto

$$S = \frac{R\left((1+i)^{n} - 1\right)}{i}$$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Como sabemos este tipo de Anualidades se identifican porque el primer pago se realiza al momento de iniciar el primer período y cada uno de los pagos se efectúa antes de comenzar el período correspondiente.

Nos interesa calcular lo siguiente:

EL MONTO Y EL VALOR PRESENTE

Empezaremos con el MONTO

M O N T O

Es la cantidad de dinero que se va incrementando a un interés al transcurrir los períodos

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \qquad\qquad\qquad\qquad & n-1 & n \\ \hline R & R & R & & R & 0 \end{array}$$

El primer pago tendrá un monto igual a

$$S = R\,(1+i)^{n}$$

Los dos primeros pagos tendrán un monto igual a

$$S = R\,(1+i)^{n} + R\,(1+i)^{n-1}$$

Los tres primeros pagos tendrán un monto igual a

$$S = R\,(1+i)^{n} + R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2}$$

Y todos los pagos tendrán un monto igual a

$$S = R\,(1+i)^{n} + R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} \;\ldots\ldots\ldots\; R(1+i)$$

Cambiamos en forma ascendente la suma nos queda

$$S = R(1+i) + R(1+i)^{1} + R(1+i)^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{n}$$

Factorizamos $R(1+i)$, resulta

$$S-R(1+i)\left[1+(1+i)+(1+i)^{2}+(1+i)^{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right]$$

Lo que tenemos dentro del paréntesis $\left[\;\right]$ se identifica como una Progresión Geométrica, que tiene como elementos los siguientes:

El primer término	1
La razón	$(1+i)$
Número de términos	n

Sustituímos de acuerdo con la fórmula de la progresión geométrica

$$S = R(1+i)\frac{(1-(1+i)^{n})}{(1-(1+i))}$$

Simplificando las operaciones nos queda

La fórmula de <u>M O N T O</u> es

$$S = R(1+i)\frac{((1+i)^{n}-1)}{i}$$

VALOR PRESENTE

Cada uno de los pagos lo retornamos al inicio de las operaciones

0	1	2	n−1	n
R	R	R	R	0

El primer pago tendrá un valor presente

$$A = R$$

Los dos primeros pagos tendrán un valor presente

$$A = R + R(1+i)^{-1}$$

Los tres primeros pagos tendrán un valor presente

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2}$$

Y todos los pagos tendrán un valor presente

$$A = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{-(n-1)}$$

Factorizamos R resulta es

$$A=R\left[1+(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{(n-1)}\right]$$

Identificamos dentro del paréntesis $[\ ]$ una progresión geométrica, los elementos resultan

Primer término es	1
La razón es	$(1+i)^{-1}$
Número de términos	n

Aplicamos la fórmula de progresión geométrica

$$A = R\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{(1-(1+i)^{-1})}$$

Simplificamos las operaciones, nos queda

La fórmula de VALOR PRESENTE

$$A = R(1+i)\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

ANUALIDADES DIFERIDAS

Diferimiento es un lapso de tiempo en donde no se realizan pagos, veremos dos casos:

1.- Después de transcurridos m pariodos, se efectúa el primer pago.

2.- Se realiza el primer pago después de transcurrido el primer periodo hasta los n pagos, después de hacer el último pago, se deja transcurrir m periodos.

Obtendremos del caso 1, el Valor Presente, con la siguiente linea de tiempo:

R R R . . . . R

0 1 2 3 . . . . . . m m+1 m+2 m+3 m+n

Primer pago tiene un valor presente diferido de:

$$A = R(1+i)^{-(m+1)}$$

Los dos primeros pagos tienen un valor presente diferido de:

$$A = R(1+i)^{-(m+1)} + R(1+i)^{-(m+2)}$$

Los tres primeros pagos tienen un valor presente diferido de:

$$A = R(1+i)^{-(m+1)} + R(1+i)^{-(m+2)} + R(1+i)^{-(m+3)}$$

Y todos los n pagos tienen un valor presente diferido de:

$$A = R(1+i)^{-(m+1)} + R(1+i)^{-(m+2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + R(1+i)^{-(m+n)})$$

Factorizamos $R(1+i)^{-(m+1)}$ y nos resulta:

$$A = R(1+i)^{-(m+1)} (1 + (1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} \ldots\ldots (1+i)^{-(n-1)})$$

Vemos que se trata de una progresión geométrica, con los siguientes elementos:

Primer Término es	1
La Razón es	$(1+i)^{-1}$
El Número de Términos es	n

Sustituyendo en la Fórmula respectiva:

$$A = R\,(1+i)^{-(m+1)} \frac{(1-(1+i)^{-n})}{(1-(1+i)^{-1})}$$

Simplificando el cociente, nos da el Valor Presente de una Anualidad Diferida.

$$A = \frac{R\,(1+i)^{-m}\,(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Para el monto de este caso, el tiempo del diferimiento antes de los pagos, no tiene ningún efecto, por este motivo analizaremos el caso 2, donde los pagos se hacen al principio y después se difiere, veremos el caso del monto diferido de una Anualidad Vencida.

La línea del tiempo que le corresponde es la siguiente:

```
     R    R     R ..........R
_____________________________________________________________
0    1    2     3           n . . . . . . . . . . . . . . n+m
```

Es pagadera n periodos y después diferida m periodos.

El primer pago tiene un monto diferido de:

$$S = R\,(1+i)^{n+m-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto diferido de:

$$S = R\,(1+i)^{n+m-1} + R\,(1+i)^{n+m-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto diferido de:

$$S = R(1+i)^{n+m-1} + R(1+i)^{n+m-2} + R(1+i)^{n+m-3}$$

Los n primeros pagos tienen un monto de::

$$S = R(1+i)^{n+m-1} + R(1+i)^{n+m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{m}$$

Ordenamos de menor a mayor y nos resulta:

$$S = R(1+i)^{m} + R(1+i)^{m+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{m+n-1}$$

factorizamos $R(1+i)^{m}$ y nos queda lo siguiente:

$$S = R(1+i)^{m}\left(1 + (1+i) + (1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right)$$

Vemos que se trata de una progresión geométrica con los elementos siguientes:

Primer Término	1
La Razón es	$(1+i)$
Número de Términos es	n

Sustituyendo en la fórmula respectiva:

$$S = \frac{R(1+i)^{m}\left(1-(1+i)^{n}\right)}{1-(1+i)}$$

Simplificando el cociente nos resulta:

$$S = \frac{R(1+i)^{m}\left((1+i)^{n}-1\right)}{i}$$

Es la fórmula del Monto de una Anualidad Diferida.

Para el Valor Presente, en caso 2, el diferimiento después de los pagos, no tiene ningún efecto.

ANUALIDADES PERPETUAS

Tienen como principal característica, que sus pagos no tienen fín, que no existe un número limitado de pagos.

Para poder determinar la situación del Valor Presente y el Monto de éste tipo de Anualidad, establecemos un número n el número de pagos.

Obtendremos su Valor Presente

0 1 2 3 4

____________________________ . . . .

R R R R

El primer pago tiene un Valor presente

$$A = R\,(1+i)^{-1}$$

Los dos primeros pagos tienen

$$A = R\,(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen

$$A = R\,(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2} + R\,(1+i)^{-3}$$

Y todos los pagos tendrán un valor presente

$$A = R\,(1+i)^{-1} + R\,(1+i)^{-2} + \ldots\ldots\ldots + R\,(1+i)^{-n}$$

Factorizamos $R\,(1+i)^{-1}$ y nos resulta

$$A = R\,(1=i)^{-1}\left[1 + (1+i)^{-1} \ldots (1+i)^{-n}\right]$$

Identificamos que tiene una progresión geométrica, identificamos como elementos

Primer Término es 1

La razón es $(1+i)^{-1}$

El númnero de términos es n

Sustituímos en la fórmula de progresión geométrica

$$A= R\,(1+i)^{-1}\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-1}}$$

Realizamos las operaciones respectivas, la fórmula de Valor presente

$$A= \frac{R\,(1-(1+i)^{-n})}{i}$$

Si hacemos n tender a ∞ , entonces como sabemos que el número de periodos (n) tiende hacer un número muy grande, y cuando más crezca resulta que:

$$(1+i)^{-n} = \frac{1}{(1+i)^{n}}$$

Esta expresión se acerca mucho a cero, y la tomamos como cero

La formula de Valor Presente es:

$$A = \frac{R\,(1-0)}{i} = \frac{R}{i}$$

Continuemos ahora con el M O N T O

La gráfica del M O N T O es

0 1 2 3 4

R R R R R

El primer pago tiene un monto de

$S = R\,(1+i)^{n-1}$

Los dos primeros pagos tienen un monto de

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto de

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3}$$

Y todos los pagos tienen un monto de

$$S = R \quad 1 + (1+i)^{1} + R(1+i)^{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + R(1+i)\ R$$

Factorizamos R y resulta

$$S = R\left[1 + (1+i)^{1} + (1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right]$$

Lo que está dentro del paréntesis $[\ ]$ lo identificamos como una progresión geométrica, identificamos los elementos que son:

Primer Término	1
La razón es	$(1+i)$
El número de términos es	n

Sustituimos en la fórmula de la progresión geométrica y nos queda

$$S = \frac{R\left((1+i)^{n}\right)}{(1-(1+i))}$$

Simplificamos tendremos la fórmuladel M O N T O

$$S = \frac{R\left((1+i)^{n} - 1\right)}{i}$$

Como tenemos que n tiende hacer muy grande, que ya no existe un número limitado de periodos.

La expresión $(1+i)^{n}$ --------------a infinito

Por esto no se calcula el monto, de éste tipo de anualidad.

ANUALIDADES VARIABLES

Este tipo de anualidades se caracteriza principalmente, que entre cada uno de los pagos, no se paga lo mismo, casi siempre existirá una relación matemática entre ellos.

Si tiene un aumento con respecto al pago anterior, a este tipo de anualidadess le llamaremos creciente. Si de lo contrario va disminuyendo el pago se le denominará Anualidad decreciente.

Lo clasificaremos en tres tipos que son:

1.- Si entre cada pago existe una diferencia que es constante será de tipo progresión aritmética.

2.- Si entre cada pago existe un cociente que es constante, será de tipo geométrico.

3.- Si entre cada pago tienen otro tipo de relación matemática se les llamará variable.

Comenzamos con la de tipo PROGRESION ARITMETICA

La anualidad que vamos a trabajar es creciente, a la cantidad que vamos incrementar la denotaremos con la letra Q

Calcularemos el VALOR PRESENTE de la anualidad

El primer pago tiene un valor presente

$$A = R(1+i)^{-1}$$

El primer y segundo pago tienen un valor presente de

$$A = R(1+i)^{-1} + (R+Q)(1+i)^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un valor presente de

$$A = R(1+i)^{-1} + (R+Q)(1+i)^{-2} + (R+2Q)(1+i)^{-3}$$

Los n pagos tienen un valor presente de

$$A = R(1+i)^{-1} + (R+Q)(1+i)^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (R+(n-1)Q)(1+i)^{-n}$$

Como observamos que entre cada uno de los pagos existe una diferencia constante, en este caso es Q

Necesitamos llevar expresión a una fórmula que represente a la suma de Valor Presente.

Desarrollando ésta expresión nos queda

$$A=R(1+i)^{-1}+R(1+i)^{-2}+Q(1+i)^{-2}+R(1+i)^{-3}+2Q(1+i)^{-3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+R(1+i)^{-1}+(n-1)Q(1+i)^{-n}$$

Para facilitar las operaciones, llamaremos AR a los términos que tengan a la R, y los AQ a los que tienen Q, establezcamos lo siguiente:

$$A = AR + AQ$$

Entonces tendremos lo siguiente:

$$AR=R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ R(1+i)^{-n}$$

$$AQ = Q(1+i)^{-2} + 2Q(1+i)^{-3} +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(n-1)Q(1+i)^{-n}$$

Simplificaremos primero con AR

Factorizamos $R(1+i)^{-1}$

$$AR = R(1+i)^{-1}\left[1+(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} +\ldots\ldots\ldots(1+i)^{-(n-1)}\right]$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica lo que está dentro del paréntesis [ ] y tiene como elementos lo siguiente:

Primer Término es el	1
La razón es	$(1+i)^{-1}$
El número de Términos	n

Sustituimos en la fórmula de la progesión geométrica y resulta

$$AR = \frac{R(1+i)^{-1}\,(1-(1+i)^{-n})}{(1-(1+i)^{-1})}$$

Simplificamos el cociente de ésta expresión, resulta:

$$AR = \frac{R\left(1 - (1+i)^{-n}\right.}{i}$$

Ahora reduzcamos AQ, haremos la siguiente operación:

$$AQ - AQ(1+i)^{-1} = AQ - \frac{AQ}{(1+i)} = \frac{AQ\,(1+i) - AQ}{(1+i)} = \frac{AQi}{(1+i)}$$

$$AQ = Q(1+i)^{-2} + 2Q(1+i)^{-3} \ldots\ldots\ldots (n-1)Q(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-1}\,AQ = \qquad Q(1+i)^{-3} \ldots\ldots\ldots (n-2)Q(1+i)^{-n} + (n-1)Q(1+i)^{-n-1}$$

$$AQ - AQ(1+i)^{-1} = Q(1+i)^{-2} + Q(1+i)^{-3} \ldots\ldots Q(1+i)^{-n} + Q(1+i)^{-n-1} \quad -nQ(1+i)^{-n-1}$$

$$\frac{AQi}{(1+i)} = Q(1+i)^{-2} + Q(1+i)^{-3} \ldots\ldots + Q(1+i)^{-n} + Q(1+i)^{-n-1} \quad -nQ(1+i)^{-n-1}$$

$$AQi = Q(\,1+i\,)^{-1} + Q\,(\,1+i\,)^{-2} + \ldots Q(1+i)^{-n} \; -nQ(1+i)^{-n}$$

Factorizemos $Q\,(\,1+i\,)^{-1}$

$$AQi = Q(1+i)^{-1}\left[\,1+(1+i)^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{-(n-1)} \qquad -nQ(1+i)^{-n}\right]$$

Lo que está dentro del paréntesis [ ] identificamos que se trata de una progresión geométrica, teniendo como elementos los siguientes:

Primer Término es	1
La razón es	$(1+i)^{-1}$
El número de Términos es	n

Sustituyendo en la fórmula de progresión geométrica, nos queda

$$AQi = Q\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} - nQ\,(1+i)^{-n}$$

Simplificando el cociente nos resulta

$$AQi = Q\,\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} - nQ(1+i)^{-n}$$

$$AQ = \frac{Q(1-(1+i)^{-n}}{i^{2}} - \frac{nQ(1+i)^{-n}}{i}$$

Sustituimos en A = AR - AQ, para obtener el Valor Presente

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{Q(1-(1+i)^{-n})}{i^{2}} - \frac{nQ(1+i)^{-n}}{i}$$

La gráfica de éste tipo de anualidad es la siguiente:

0	1	2	3		n
	R	R+Q	R+2Q		R+(n-1)Q

M O N T O

El monto de una Anualidad Creciente con la modalidad de progresión aritmética.

0	1	2	3		n-2	n
	R	R+Q	R+2Q		R+(n-3)Q	R+(n-1)Q

El primer pago tiene un monto de

$$S = R * (1+i)^{n-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto de

$$S = R(1+i)^{n-1} + (R+Q)(1+i)^{n-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto de

$$S = R(1+i)^{n-1} + (R+Q)(1+i)^{n-2} + (R+2Q)(1+i)^{n-3}$$

Los n pagos tienen un monto de

$$S = R(1+i)^{n-1} + (R+Q)(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots R+(n-1)Q$$

Desarrollamos los paréntesis, que se pueden hacer en este momento.

$$S=R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + Q(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots +R+(n-1)Q$$

Para facilitar los desarrollos, separamos los elementos que R con SR, y los que tienen Q con SQ. Entonces nos quedará

$$S = SR + SQ$$

Comenzamos con SR, nos resulta lo siguiente:

$$SR = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots +R$$

Lo ordenamos en forma ascendente.

$$SR = R + R(1+i) + R(1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots +R(1+i)^{n-1}$$

Factorizamos R

$$SR = R\left[1 + (1+i)^{1} + (1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right]$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La razón es	$(1+i)$
El número de Términos	n

Sustituyendo en la fórmula respectiva

$$SR = \frac{R\left(1-(1+i)^{n}\right)}{1-(1+i)}$$

Simplificamos el cociente y nos queda

$$SR = \frac{R\left((1+i)^{n}-1\right)}{i}$$

Continuemos ahora con SQ

$$SQ = Q(1+i)^{n-2} + 2Q(1+i)^{n-3} + 3Q(1+i)^{n-4} + \qquad +(n-1)Q$$

Lo ordenamos en forma ascendente

$$SQ = (n-1)Q + (n-2)Q(1+i) + \ldots\ldots\ldots\ldots Q(1+i)^{n-2}$$

Para poder simplificar hagamos la siguiente operación

$$SQ - SQ(1+i) = -SQi$$

$$SQ(1+i) = (n-1)Q(1+i) + (n-2)(Q)(1+i)^{2} + \ldots\ldots + Q(1+i)^{n-1}$$

Multiplicamos por -1 a esta igualdad

$$SQi = -nQ + Q + Q(1+i) + Q(1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots Q(1+i)^{n-1}$$

Factorizamos la Q, nos resulta

$$SQi = -nQ + Q\left[1 + (1+i) + (1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (1+i)^{n-1}\right]$$

Identificamos lo que está dentro del paréntesis [ ] se trata de una progresión geométrica, con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La razón es	(1 + i)
Número de Términos	n

Sustituyendo en la fórmula respectiva

$$SQi = -nQ + \frac{Q(\,1-(\,1+i\,)^{n}\,)}{1-(\,1+i\,)}$$

Simplificando el cociente y despejando la i, nos resulta

$$SQ = \frac{-nQ}{i} + \frac{Q(\,(\,1+i\,)^{n}-1\,)}{i^{2}}$$

La fórmula de Monto de una anualidad creciente con modalidad de progresión aritmética, nos resulta:

$$S = \frac{R(\,(\,1+i\,)^{n}-1\,)}{i} + \frac{Q(\,(\,1+i\,)^{n}-1\,)}{i^{2}} - \frac{nQ}{i}$$

Anualidad creciente con la modalidad de progresión geométrica.

Comenzamos con Valor Presente

La gráfica es la siguiente:

0	1	2	3		n
	R	RQ	RQ^{2}		RQ^{n-1}

El primer pago tiene un valor presente de:

$$A = R(\,1+i\,)^{-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un valor presente de:

$$A = R(\,1+i\,)^{-1} + RQ(\,1+i\,)^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un valor presente de:

$$A = R(1+i)^{-1} + RQ(1+i)^{-2} + RQ^{2}(1+i)^{-3}$$

Los n pagos tienen un valor presente de:

$$A = R(1+i)^{-1} + RQ(1+i)^{-2} + RQ^{2}(1+i)^{-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots RQ^{n-1}(1+i)^{-n}$$

Factorizamos $R(1+i)^{-1}$ y nos resulta:

$$A = R(1+i)^{-1}\left[1 + Q(1+i)^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Q^{n-1}(1+i)^{-(n-1)} \right]$$

Identificamos lo que está dentro del paréntesis $[\;]$ como una progresión geométrica, con los siguientes elementos:

Primer elemento	1
La razón es	$Q(1+i)^{-1}$
El número de términos	n

Sustituímos en la fórmula respectiva, nos queda:

$$A = R(1+i)^{-1} \frac{\left(1-Q^{n}(1+i)^{-n}\right)}{1-(1+i)^{-1}Q}$$

Simplificando el cociente nos resulta:

$$A = \frac{R\left(1-Q^{n}(1+i)^{-n}\right)}{1+i-Q}$$

Esta es la fórmula de una Anualidad Creciente con Valor Presente, con la modalidad de Progresión Geométrica.

Anualidad Creciente con la modalidad de progresión geométrica para obtener el M O N T O

La gráfica es la siguiente:

0	1	2	3	n
	R	RQ	RQ^{2}	RQ^{n-1}

El primer pago tiene un monto de:

$$S = R(1+i)^{n-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto de:

$$S = R(1+i)^{n-1} + RQ(1+i)^{n-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto de:

$$S = R(1+i)^{n-1} + RQ(1+i)^{n-2} + RQ^{2}(1+i)^{n-3}$$

Los n pagos tienen un monto de:

$$S = R(1+i)^{n-1} + RQ(1+i)^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + RQ^{n-1}$$

Cambiamos el órden en forma ascendente con respecto a $(1+i)$

$$S = RQ^{n-1} + RQ^{n-2}(1+i)^{1} + RQ^{n-3}(1+i)^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{n-1}$$

Factorizamos RQ^{n-1} y nos resulta:

$$S = RQ^{n-1}\left[1 + Q^{-1}(1+i) + Q^{-2}(1+i)^{2} \ldots\ldots Q^{-(n-1)}(1+i)^{n-1}\right]$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica que tiene como elementos:

Primer Término es	1
La razón es	$Q^{-1}(1+i)$
El número de términos es	n

Sustituimos en la fórmula respectiva

$$S = RQ^{n-1}\,\frac{\left(1 - Q^{-n}(1+i)^{n}\right)}{1 - Q^{-1}(1+i)}$$

Al simplificar el cociente nos resulta:

$$S = \frac{R\left((1+i)^{n} - Q^{n} \right)}{(1+i) - Q}$$

Introduciendo dentro del paréntesis Q^{n}, nos queda:

$$S = R\,\frac{\left((1+i)^{n} - Q^{n} \right)}{(1+i) - Q}$$

Es la fórmula de Anualidad Creciente para el Monto de la modalidad de Progresión Geométrica.

Para las Anualidades Decrecientes, haremos los siguientes cambios:

Anualidad Decreciente con la modalidad de progresión aritmética, la razón es negativa, para éste caso -Q , sustituímos en la fórmula correspondiente y encontramos lo que buscamos.

VALOR PRESENTE

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{(-Q)\,(1-(1+i)^{-n})}{i^{2}} \frac{-n(-Q)(1+i)^{-n}}{i}$$

Aplicando la regla de los signos, nos resulta:

$$A = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{i} - \frac{Q(1-(1+i)^{n})}{i^{2}} + \frac{nQ\,(1+i)^{-n}}{i}$$

M O N T O .

$$S = \frac{R(\,(1+i)^{n}-1)}{i} + \frac{(-Q)(\,(1+i)^{n}-1)}{i^{2}} \quad \frac{-n(-Q)}{i}$$

Aplicando la regla de los signos, nos resulta:

$$S = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - Q\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i^{2}} + \frac{nQ}{i}$$

Para las anualidades decrecientes, haremos los siguientes cambios: Anualidad Decreciente de modelo Progresión Geométrica, la razón es de exponente negativo Q^{-1}, sustituímos en la fórmula correspondiente y encontraremos lo que buscamos.

VALOR PRESENTE

$$A = R\,\frac{1-(Q^{-1})^{n}(1+i)^{-n}}{1+i-Q^{-1}}$$

Aplicando la regla de los exponentes:

$$A = R\,\frac{1-Q^{-n}(1+i)^{-n}}{1+i-Q^{-1}}$$

M O N T O .

$$S = R\,\frac{(1+i)^{n}-(Q^{-1})^{n}}{(1+i)-Q^{-1}}$$

Aplicando la regla de los exponentes:

$$S = R\,\frac{(1+i)^{n}-Q^{-n}}{(1+i)-Q^{-1}}$$

ANUALIDADES VARIABLES

Cuando existe una serie de pagos diferentes, pero existe alguna relación matemática entre ellos, existe la necesidad de Calcular su Valor Presente como el Monto.

Los pagos los representamos en la siguiente forma:

$R1,\ R2,\ R3, \ldots\ldots R_n$

Los pagos los representamos en la forma siguiente:

$R1, R2, R3, R4, \ldots\ldots Rn$

La linea del tiempo del Valor presente nos resulta:

	R1	R2	R3	R4	Rn
0	1	2	3	4	n

El primer pago tiene un valor presente

$$A = R1\,(1+i)^{-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un valor presente

$$A = R1\,(1+i)^{-1} + R2\,(1+i)^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un valor presente

$$A = R1\,(1+i)^{-1} + R2\,(1+i)^{-2} + R3\,(1+i)^{-3}$$

Los n primeros pagos tienen un valor presente

$$A = R1\,(1+i)^{-1} + R2\,(1+i)^{-2} + R3\,(1+i)^{-3} \ldots\ldots Rn(1+i)^{-n}$$

Realizamos los siguientes cambios de rotación

$R1 = U1,\ R2 = U2,\ R3 = U3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ Rn = Un$

$V = (1+i)^{-1},\ V^{2} = (1+i)^{-2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ V^{n} = (1+i)^{-n}$

Establecemos lo siguiente:

$U1=U1, U2=(1+D)U1, U3=(1+D)^{2}U1, \ldots\ldots\ldots Un=(1+D)^{n-1}U1, Un+1=(1+D)^{n}U1$

Sustituímos estos valores en la suma de valor presente

$$A = VU1 + V^{2}U2 + V^{3}U3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + V^{n}Un$$

Hacemos la otra sustitución

$$A = VU1 + V^{2}(1+D)U1 + V^{3}(1+D)^{2}U1 + \ldots\ldots V^{n}(1+D)^{n-1}U1$$

Factorizamos VU1, nos resulta

$$A = VU1(1 + V(1+D) + V^{2}(1+D)^{2} + \ldots\ldots\ldots V^{n-1}(1+D)^{n-1})$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica con los siguientes elementos:

Primer Término	1
La Razón es	V (1+D)
El número de términos es	n

Sustituímos en la fórmula respectiva

$$A = \frac{VU1\,(1 - V^{n}(1+D)^{n})}{1 - V(1+D)}$$

$$A = \frac{V\,(U1 - V^{n}(1+D)^{n}U1)}{1 - V(1+D)}$$

Como sabemos que $Un+1 = (1+D)^{n}\, U1$ lo sustituímos

$$A = \frac{V\,(U1 - V^{n}\, U+1)}{1 - V(1+D)}$$

Como $V = (1+i)^{-1}$ lo sustituímos

$$A = \frac{(1+i)^{-1}\,(U1 - V^{n}\, U\, n+1)}{1 - (1+i)^{-1}\,(1+D)}$$

Realizamos las operaciones correspondientes:

$$A = \frac{(1+i)^{-1}\,(U1 - V^{n}\, Un+1)}{1 - \dfrac{(1+D)}{1+i}}$$

$$A = \frac{(1+i)^{-1}\,(U1 - V^{n}\, Un+1)}{\dfrac{(1+i) - (1+D)}{(i+1)}}$$

Simplificando nos resulta:

$$A = \frac{U1 - V^{n}\, Un+1}{i-D}$$

Subimos (1-D) al numerador:

$$A = (i-D)^{-1}\,(U1 - V^{n}\, Un + 1)$$

Desarrollamos el binomio

$$A = (i^{-1} - Di^{-2} + D^{2} i^{-3} - \ldots\ldots\ldots\ldots)\,(U1 - V^{n}\, U\, n + 1)$$

Efectuamos el producto:

$$A = \frac{U1 - V^{n}\, Un{+}1}{i} - \frac{D\,U\,1 - D\,U\,n+1\,V^{n}}{i^{2}} + \frac{D^{2}\,U1 - D^{2}\,U\,n{+}1V^{n}}{i^{3}} - \ldots$$

TABLA DE DIFERENCIAS

	D	D^2
U 1		
	U2 − U1 = DU1	
U 2		AU2 − AU1 = D^2 U1
	U3 − U2 = DU2	
U 3		AU3 − AU2 = D^2 U2
	U4 − U3 = DU3	
U 4		AU4 − AU3 = D^2 U3
	U5 − U4 = DU4	
U 5		AU5 − AU4 = D^2 U4
	U6 − U5 = DU5	
U 6		AU6 − AU5 = D^2 U5
	U7 − U6 = DU6	
U 7		AU7 − AU6 = D^2 U6
	U7 − U8 = DU7	
U 8		AU8 − AU9 = D^2 U7
	U9 − U8 = DU8	
U 9		
.		
.		
U n		
	Un+1-Un = AUn	
Un+1		

Un ejemplo de esto es cuando tenemos los siguientes pagos que son:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n^2$$

LA TABLA DE DIFERENCIAS

		D	D^2			D	D^2
U1	1			U11	121		
		3				23	
U2	4		2	U12	144		2
		5				25	
U3	9		2	U13	169		2
		7				27	
U4	16		2	U14	196		2
		9				29	
U5	25		2	U15	225		2
		11				31	
U6	36		2	U16	256		2
		13				33	
U7	49		2	U17	289		2
		15				35	
U8	64		2	U18	324		2
		17				37	
U9	81		2	U19	361		2
		19				39	
U10	100		2	U20	400		2
		21				41	
				U21	441		

$$A = \frac{U1 - V^{20}\ U21}{i} - \frac{DU1 - V^{20}\ DU21}{i^2} + \frac{D^2 U1 - V^{20} D^2 U21}{i^3}$$

$$D^3 = 0$$

En la tabla identificamos

$U1 = 1 \qquad U21 = 441 \qquad AU1 = 3 \qquad AU21 = 43$

$A^2 U1 = A^2 U21 = 2$

Sustituímos

$$A = \frac{1 - 441\ V^{20}}{.04} - \frac{3 - 43\ V^{20}}{.0016} + \frac{2 - 2V^{20}}{.000064}$$

$A = 1590.69$

ANUALIDADES PAGADERAS

P-VECES AL AÑO

Es una Anualidad con la siguientes características

Con tasa Nominal de Interés $i^{(m)}$

Convertible m veces al año

Renta Anual Unitaria

Cada pago será de 1/p

La tasa como es nominal y convertible m veces al año, la denotaremos de la siguiente manera:

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

Caso 1.- Es cuando m = p

La gráfica de ésta anualidad es:

0	1/p	1/p	1/p	1/p
	1/p	2/p	1	N

Primer pago tiene un valor presente de:

$$A = 1/p\ (1+i')^{1}$$

Los dos primeros pagos tienen un Valor Presente

$$A = 1/p\ (1+i')^{-1} + 1/p\ (1+i')^{-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un Valor Presente

$$A = 1/p\,(1+i')^{-1} + 1/p\,(1+i')^{-2} + 1/p\,(1+i')^{-3}$$

El primer año tendrá un valor presente de:

$$A = 1/p\,(1+i')^{-1} + 1/p\,(1+i')^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots 1/p\,(1+i')^{-m}$$

Los n años tendrá un valor presente de:

$$A = 1/p\,(1+i')^{-1} + 1/p\,(1+i')^{-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1/p\,(1+i')^{-mn}$$

Factorizamos $1/p\,(1+i')^{-1}$

$$A = 1/p\,(1+i)^{-1}\,(1 + (1+i')^{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots /p(1+i')^{-(mn-1)})$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica, con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La Razón es	$(1+i')^{-1}$
El Número de Términos	mn

Sustituimos en la fórmula respectiva

$$A = 1/p\,(1+i')^{-1}\,\frac{(1 - (1+i')^{-mn})}{(1 \quad (1+i')^{-1})}$$

Simplificando el cociente nos resulta

$$A = 1/p\,\frac{(1 - (1+i')^{-mn})}{i'}$$

Gráfica del Monto

0	1/p	1/p	1/p	1/p	1/p
	1/p	2/p	3/p	1	N

El primer pago tiene un monto de

$$S = 1/p\ (1+i')^{mn-1}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto de

$$S = 1/p\ (1+i')^{mn-1} + 1/p\ (1+i')^{mn-2}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto de

$$S = 1/p\ (1+i')^{mn-1} + 1/p\ (1+i')^{mn-2} + (1+i')^{mn-3}$$

El primer año tiene un monto de

$$S = 1/p\ (1+i')^{mn-1} + 1/p\ (1+i')^{mn-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots 1/p(1+i')^{mn-m}$$

Los n años tienen un monto de

$$S = 1/p\ (1+i')^{mn-1} + 1/p\ (1+i')^{mn-2} \ldots\ldots\ldots\ldots 1/p$$

Lo ordenamos en forma ascendente

$$S = 1/p + 1/p(1+i') + 1/p(1+i')^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots 1/p(1+i')^{mn-1}$$

Factorizamos 1/p

$$S = 1/p\ (\ 1 + 1\ p\ (1+i') + 1\ p(1+i')^{2} \ldots\ldots\ldots\ldots 1\ p(1+i')^{mn-1}\ )$$

Se identifica una progresión geométrica con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La Razón es	(1+i′)
El Número de Términos	mn

Sustituimos en la fórmula respectiva

$$S = 1/p \; \frac{\left(1 - (1+i')^{mn} \right)}{1 - (1+i')}$$

Reduciendo el cociente nos resulta

$$S = 1/p \; \frac{\left((1+i')^{mn} - 1 \right)}{i'}$$

Es la fórmula del monto de éste tipo de Anualidad.

Caso II

P mayor que M, siendo $P/M = k$ k es entero positivo

Buscaremos un pago X, tal que sea equivalente a los k pagos que se realizarán en cada Intervalo.

La tasa efectiva , la denotaremos

$$i' = \frac{i^{(m)}}{m}$$

El pago será de la forma siguiente:

$$X = 1/p \left[(1+i')^{1-1/k} (1+i')^{1-2/k} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +1 \right]$$

Lo ordenaremos en forma ascendente.

$$X = 1/p \left[1 + (1+i')^{1/k} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1+i')^{(k-1)/k} \right]$$

Como se trata de una progresión geométrica, identificamos los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La razón es	$(1+i')^{1/k}$
El número de términos	k

Sustituyendo en la fórmula respectiva:

$$X = \frac{1/p \left(1 - (1+i')^{k/k} \right)}{\left(1 - (1+i')^{1/k} \right)}$$

Simplificando las operaciones, nos resulta:

$$X = \frac{1}{P}\left(\frac{-i'}{(1-(1+i')^{1/k})}\right)$$

Como p = mk, lo sustituimos

$$X = \frac{1}{mk\left((1+i')^{1/k}-1\right)}\left(i'\right)$$

Sustituimos $i^{(k)} = k\left((1+i')^{1/k}-1\right)$ nos resulta

$$X = \frac{i'}{i'^{(k)}}\ \frac{1}{m}$$

Como X es el pago y éste coincide con la convertibilidad de la tasa de interés, es el caso I m = p

$$A = \frac{i'}{i'(k)}\ \frac{1}{m}\ \frac{\left(1-(1+i')^{-mn}\right)}{i'}$$

Es el valor presente de éste tipo de Anualidad.

Para el Monto haremos lo mismo

$$S = \frac{i'}{i'(k)}\ \frac{1}{m}\ \left(\frac{(1+i')^{mn}-1}{i'}\right)$$

Caso III

En dónde m es mayor que p, siendo $m/p = k$ k es entero positivo

Igual al anterior caso buscaremos un pago X (supuesto) análogo, el cual se realizará coincidiéndo con la convertibilidad de la tasa.

Este pago deberá cumplir con la siguiente ecuación de valor.

$$X\left((1+i')^{k-1} + (1+i')^{k-2} + \dots\dots\dots\dots 1\right) = 1/p$$

Los ordenamos de mayor a menor, nos resulta:

$$X\left(1 + (1+i)^{1} + (1+i)^{2} \dots\dots\dots\dots (1+i)^{k-1}\right) = 1/p$$

Se tiene una progresión geométrica con los siguientes elementos:

Primer Término	1
La Razón es	(1+i)
Número de Términos es	k

Sustituimos en la fórmula respectiva

$$X \frac{\left(1 - (1+i)^{k} \right)}{\left(1 - (1+i) \right)} = 1/p$$

simplificamos el cociente

$$X \left((1+i')^{k} - 1 \right) i' = 1/p$$

Despejamos a X, y nos queda

$$X = 1/p \left(\frac{i}{(1+i)^{k} - 1} \right)$$

Como X es el pago y éste coincide con la convertibilidad de la tasa de interés, es el caso I $m = p$

Sustituimos unicamente, encontramos las fórmulas respectivas

El Valor Presente es:

$$A = 1/p \left(\frac{i'}{\left((1+i')^{k} - 1 \right)} \right) \left(\frac{1 - (1+i')^{-mn}}{i'} \right)$$

El Monto es:

$$S = 1/p \left(\frac{i'}{\left((1+i')^{k} - 1 \right)} \right) \left(\frac{(1+i')^{mn} - 1}{i'} \right)$$

Donde $i' = \frac{i^{(m)}}{m}$

ANUALIDADES PAGADERAS

P-VECES AL AÑO

Es una Anualidad con las siguientes características:

Valuada a una tasa de interés anual efectiva
Pagos p- veces al año
Renta anual unitaria
Cada pago será 1/p

La gráfica de ésta Anualidad en Valor Presente

0	1/p	1/p	.....1/p	1/p
	1/p	2/p	1	n

El primer pago tendrá un Valor Presente de:

$$A = 1/p \,(1+i)^{-1/p}$$

Los dos primeros pagos tendrán un Valor Presente de:

$$A = 1/p \,(1+i)^{-1/p} + 1/p \,(1+i)^{-2/p}$$

Los tres primeros pagos tendrán un Valor Presente de :

$$A = 1/p(1+i)^{-1/p} + (1+i)^{-2/p} + 1/p\ (1+i)^{-3/p}$$

Los n periodos tendrán un Valor Presente de:

$$A = 1/p\ (1+i)^{-1/p} + 1/p\ (1+i)^{-2/p} + \ldots .1/p(1+i)^{-np/p}$$

Factorizamos $1/p\ (\ 1+i\ )^{-1/p}$

$$A = 1/p\ (1+i)^{-1/p} \left(\ 1\ + (1+i)^{-1/p} + (1+i)^{-2/p} \ldots ..(1+i)^{-(n-1)p/p}\ \right)$$

Dentro del paréntesis, identificamos una progresión geométrica con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La Razón es	$(\ 1 + i\ )^{-1/p}$
El Número de Términos es	np

Sustituyendo en la fórmula respectiva

$$A = 1/p\ (\ 1+i\ )^{-1/p} \frac{(\ 1 - (1+i)^{-n}\ )}{1 - \ (1+i)^{-1/p}}$$

Multiplicamos por 1 ó sea $(1+i)^{1/p}\ /\ (\ 1 + i\ )^{1/p}$

Nos queda lo siguiente:

$$A = 1/p\ \frac{(\ 1 - (1+i)^{-n}\ )}{(1+i)^{1/p} - 1}$$

Establecemos la siguiente notación

$$i^{(p)} = p\left((1+i)^{1/p} - 1 \right)$$

Sustituimos nos resulta $A = \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i^{(p)}}$

Multiplicando por uno sea i/i, resulta $A = \dfrac{i(1 - (1+i)^{-n})}{i^{(p)}\left(\quad i \quad\right)}$

Gráfica del monto

0	1/p	1/p	...........1/p	1/p
	1/p	2/p	p/p	n

El primer pago tiene un monto de:

$$A = 1/p\,(1+i)^{n-1/p}$$

Los dos primeros pagos tienen un monto de:

$$A = 1/p(1+i)^{n-1/p} + 1/p\,(1+i)^{n-2/p}$$

Los tres primeros pagos tienen un monto de:

$$A = 1/p\,(1+i)^{n-1/p} + 1/p\,(1+i)^{n-2/p} + 1/p(1+i)^{n-3/p}$$

Los n periodos pagos tendrán un monto de:

$$A = 1/p(1+i)^{n-1/p} + 1/p(1+i)^{n-2/p} + \ldots\ldots\ldots\ldots 1/p$$

Los ordenamos en forma ascendente.

$$A=1/p+1/p\,(1+i)^{1/p}+ \dots\dots\dots 1/p(1+i)^{n-1/p})$$

Factorizamos 1/p nos resulta:

$$A=1/p(1+(1+i)^{1/p}+(1+i)^{2/p} \dots\dots\dots (1+i)^{(np-1)p})$$

Dentro del paréntesis, identificamos una progresión geométrica con los elementos siguientes:

Primer Término es	1
La Razón es	$(1+i)^{1/p}$
El Número de Términos	np

Sustituyendo en la fórmula respectiva

$$S = 1/p\,\frac{(1-(1+i)^{n})}{1-(1+i)^{1/p}}$$

Se multiplica por $-1/-1 = 1$

$$S = 1/p\,\frac{((1+i)^{n}-1)}{(1+i)^{1/p}-1}$$

Como hemos establecido $i^{(p)} = p\,((1+i)^{1/p}-1)$

Sustituimos nos resulta $S = \dfrac{(1+i)^{n}-1}{i^{(p)}}$

Multiplicamos por uno sea i/i, resulta

$$S = \frac{i}{i^{(p)}}\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

B A S I C

A continuación describiremos brevemente algunas instrucciones útiles en la elaboración de programas en el lenguaje Basic, a fín de resolver los problemas relativos a los tópicos de Anualidades Ciertas, ya sea anticipadas o vencidas, con la ayuda del computador.

INSTRUMENTOS ELEMENTALES

PRINT

Sirve para colocar letreros en el programa y describir el objetivo del mismo, los letreros irán entre comillas; sirve también para

Ejemplo:

```
100 PRINT   " Anualidades Anticipadas "

110 PRINT

120 PRINT   " Anualidades Vencidas "

130 PRINT

140 PRINT   " Cálculo del Monto de Anualidades "

150 END
```

Note que antes de la instrucción PRINT aparece un número que va en forma ascendente e indica al ordenador que se trata de instrucciones de ejecución diferida mismas que se ejecutaran en el momento que se introduce la instrucción RUN. Al mismo tiempo, este número de secuencia le indica el orden en que serán ejecutadas las instrucciones.

Las anteriores instrucciones ocasionarán que el ordenador despliegue tres letreros especiales de la forma siguiente:

```
Anualidades Anticipadas

Anualidades Vencidas

Cálculo del Monto de Anualidades
```

INPUT

Sirve para introducir desde el teclado ó de un archivo de datos los valores asignados a las variables ya sea numéricas o alfanuméricas; puede acompañarse con un letrero para indicar la descripción de la variable y darle mayor claridad al programa.

VARIABLES NUMERICAS Y ALFANUMERICAS

Las variables pueden tener una longitud de dos caracteres siendo el primero en caracter numérico y el segundo en alfanumérico; en caso de que una variable se describa con más caracteres, éstos no serán considerados por el ordenador salvo en casos especiales.

En caso de que el tercer caracter de un nombre de variable % se indicará el ordenador que se trate de una variable numérica entera; si el tercer caracter es $ este indicará que se trata de una variable alfabética o cadena de caracteres alfanuméricos; en cual-

Ejemplo:

```
200 INPUT   " LA RENTA ES $   ";R

210 PRINT

220 INPUT   " LA TASA DE INTERES ES   ";I

230 PRINT

240 INPUT   " EL NUMERO DE PERIODOS ES   ";N
```

Note que entre el número de la variable y el letrero aparece un punto y coma que sirve para indicar al ordenador la separación entre uno y otro elemento.

La ejecución de la secuencia anterior ocasionará que el ordenador despliegue en la pantalla el primer letrero; esto es:

LA RENTA ES $?

Hasta que se introduzca el valor asignado a la variable renta no continuará la ejecución del programa; es decir espera el valor de la variable R, para poder continuar.

De igual forma ocurre con las siguientes INPUT.

REM

Esta instrucción sirve para documentar un programa con letreros que no aparecen al ejecutar un programa. El letrero puede o no ir entre comillas, en caso de optar por la supresión de comillas no deberá contener el caracter: mismo que sirve para indicar al ordenador la terminación de una instrucción, cuando se introducen varias instrucciones en un mismo renglón.

Ejemplo:

```
300 REM PROGRAMA DE ANUALIDADES  :  PRINT

310 PRINT " ANUALIDADES VENCIDAS "
```

Las anteriores instrucciones ocasionaran que el ordenador deje una línea en blanco, para después escribir el letrero : ANUALIDADES VENCIDAS.

LET

Sirve para asignar a una variable un valor ya sea como una constante o determinarlo por una expresión matemática.

Ejemplo:

```
350 LET  A = R * ( 1 + I )
```

Nota: En la asignación de valores puede omitirse el LET.

Los símbolos utilizados en las expresiones matemáticas son las siguientes:

S I M B O L O S	I N D I C A
+	SUMA
-	RESTA
*	MULTIPLICACION
/	DIVISION
^	EXPONENCIACION
<	MENOR QUE
>	MAYOR QUE
>=	MAYOR O IGUAL QUE
<=	MENOR O IGUAL QUE

El ordenador tiene secuencia de prioridadessobre las operaciones matemáticas, primero exponenciación, después multiplicación o división, tomando el órden de aparición de izquierda a derecha y después suma o resta para por último ejecutar los operadores lógicos.

El uso de paréntesis en una expresión sirve para indicar un órden distinto al antes mencionado.

Ejemplo:

Para indicar la expresión $A = R (1+I)^{-n} /I$, se deberá escribir en BASIC, la siguiente expresión:

270 A = R * (1 + I)^(- N) / I

Para la expresión $M = R (1+I) ((1+I)^{n} - 1)/I$, la correspondiente expresión en BASIC será:

280 M = R * (1+I) * ((1+I)^N - 1) / I

DIM

Sirve para dimensionar una variable, pueden dimensionarse varias variables en una misma instrucción. Con esta instrucción se indicará a la máquina, que reserve espacio para las dimensiones de la variable, pudiéndose tratar de un vector o una matriz.

10 DIM A (100)

Indica que la variable A es un vector de 101 coordenadas.

END

Esta instrucción sirve para indicar la finalización de un programa

FOR . . . . NEXT

Sirve para ejecutar repetidas veces una secuencia de instrucciones mientras que una variable sea menor a un valor específico. La secuencia de instrucciones termina generalmente con un NEXT.

Ejemplo:

100 FOR I = 1 TO 10

110 PRINT

```
120 PRINT I

130 PRINT

140 NEXT I
```

La sucesión de la secuencia anterior ocasionará un listado de números del 1 al 10 separados por dos renglones.

IF . . . . THEN

Sirve para bifucar la ejecución de un programa dependiéndo del valor de una instrucción lógica.

Ejemplo:

```
200 IF  A < 10   THEN GOTO 100
```

GOTO

Esta instrucción indica al ordenador la siguiente instrucción a ser ejecutada. En la expresión anterior, si A es menor que 10 entonces la instrucción que será ejecutada a continuación será la etiquetada con el número 100.

FUNCIONES

Existen en el ordenador funciones intrínsecas que pueden ser invocadas sin una definición previa y que requieren de uno o más parámetros.

A continuación se describen algunos de ellos.

EXPRESION	SIGNIFICADO
ABS (A)	VALOR ABSOLUTO DE A
LOG (A)	LOGARITMO DE A
SQR (A)	RAIZ CUADRADA DE A
SIN (A)	SENO DE A
TAN (A)	TANGENTE DE A

LIST

Sirve para listar en pantalla un programa o secuencia de instrucciones.

Ejemplo:

LIST 100, 300

SAVE

Sirve para guardar en diskette un programa y así poder recuperarlo posteriormente evitando con ello el volver a teclear las instrucciones cada ocasión que se requiera ejecutar el programa.

LOAD

Sirve para recuperar de disco un archivo o programa; es decir para cargarlo a memoria.

Tanto SAVE como LOAD requieren de la especificación de un nombre de programa ya sea para guardarlo con su nombre o llamarlo a memoria.

```
60 REM ** PARA EL VALOR PRESENTE **

65 DIM A ( 100 )

70 REM **PARA EL MONTO **

75 DIM M ( 100 )

80 REM ** NUMERO DE PRIODOS **

85 DIM N  ( 100 )

100 PRINT " ANUALIDADES ANTICIPADAS "

110 PRINT

120 PRINT " PARA CALCULAR LO SIGUIENTE "

130 PRINT
```

```
140 PRINT " VALOR PRESENTE "

150 PRINT

160 PRINT " MONTO "

170 PRINT

180 PRINT " DADOS LOS DATOS SIGUIENTES "

190 PRINT

200 INPUT  " LA RENTA ES DE $";R

210 PRINT

220 INPUT  " LA TASA ES %";I

230 PRINT

240 INPUT  " EL NUMERO DE PRIODOS ";N

244 PRINT  " PERIODO #, VALOR PRESENTE, MONTO "

245 FOR J = 1 TO N

250 PRINT

260 REM  ** LA FORMULA VALOR PRESENTE **

270 LET a ( J ) = R * ( 1 + I ) * (1- ( 1 + I )↑ (-J) ) /I

280 REM  ** LA FORMULA DEL MONTO **

290 LET M (J) = R * (1+I) * ( (1+I)↑ J - 1 ) / I

296 REM  ** PARA EL NUMERO DE PERIODOS **

298 LET N (J) = J

300 PRINT

310 PRINT

320 PRINT N (J) ;"----$ ";A (J); "----------$ ";M (J)

330 NEXT J

340 INPUT  " DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO "; A$
```

```
350 IF A$ = "SI" THEN 100
360 PRINT
370 PRINT  " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "
380 END
R U N
```

```
                    ANUALIDADES ANTICIPADAS POR PERIODOS
                    PARA CALCULAR LO SIGUIENTE:
                    VALOR PRESENTE
                    MONTO
                    DADOS LOS DATOS SIGUIENTES:
                    LA RENTA ES $ 2000
                    LA TASA ES % .0753
                    EL NUMERO DE PERIODOS ES 8
```

PERIODO #	VALOR PRESENTE	MONTO
1	$ 2000.0002	$ 2150.6003
2	$ 3859.9461	$ 4463.14023
3	$ 5589.64579	$ 6949.81472
4	$ 7189.21986	$ 9623.73581
5	$ 8694.15035	$ 12499.0031
6	$ 10085.3254	$ 15590.3657
7	$ 11379.806	$ 18915.3637
8	$ 12582.2381	$ 22490.2987

```
DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO   NO
```

ESPERO HABERTE SIDO UTIL

Para cualquier tipo de Anualidad, podemos hacer sus programas a partir de los que hemos hecho, por ejemplo para ANUALIDADES VENCIDAS, para obtener el valor presente y el Monto, haremos las siguientes modificaciones.

El TITULO cambia, por ser otra anualidad

```
100 PRINT " ANUALIDAD VENCIDA "
```

LAS FORMULAS, por ser otro tipo de anualidad

```
270 LET A = R * ( 1 - (1+I)↑ ( -N ) ) / I

290 LET M = R * ( ( 1+I )↑ N - 1 ) / I
```

Por la instrucción LOAD, llamamos al programa " Anticipadas " y realizamos las modificaciones:

```
LOAD " ANTICIPADAS "
```

EL PROGRAMA COMPLETO, resulta:

```
100 PRINT " ANUALIDADES VENCIDAS "

110 PRINT

120 PRINT " PARA CALCULAR LO SIGUIENTE "

130 PRINT

140 PRINT " VALOR PRESENTE "

150 PRINT

160 PRINT " MONTO "

170 PRINT

180 PRINT " DADOS LOS DATOS SIGUIENTES "

190 PRINT
```

```
200 INPUT " LA RENTA ES $ ";R

210 PRINT

220 INPUT  " LA TASA ES % ";I

230 PRINT

240 INPUT  " EL NUMERO DE PERIODOS ES ";N

250 PRINT

260 REM  ** LA FORMULA DE VALOR PRESENTE **

270 LET  A = R * ( 1 - ( 1+I )↑ ( -N ) ) / I

280 REM  ** LA FORMULA DE MONTO **

290 LET  M = R *( ( 1+I )↑ N - 1 ) / I

300 PRINT  " VALOR PRESENTE ES $ ";A

310 PRINT

320 PRINT  " EL MONTO ES $ ";M

330 PRINT

340 INPUT  " DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO ";A$

350 IF A$ = " SI " THEN 100

360 PRINT

370 PRINT  " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "

380 END

R U N

                    ANUALIDADES VENCIDAS

                    PARA CALCULAR LO SIGUIENTE

                    VALOR PRESENTE

                    MONTO
```

```
LA RENTA ES DE ¿ 15000

LA TASA ES DE % ¿ .0876

EL VALOR PRESENTE  $ 139302.564

EL MONTO $ 747,038.685

DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO ¿ NO

ESPERO HABERTE SIDO UTIL
```

Para que obtengamos el programa de Anualidades por periodos para calcular el VALOR PRESENTE y el MONTO en cada uno de los periodos, se tendrán que hacer las siguientes modificaciones al programa que hicimos al ANUALIDADES ANTICIPADAS por PERIODOS.

En este caso encontraremos a las ANUALIDADES VENCIDAS por PERIODOS, realizando las siguientes modificaciones.

EL TITULO, cambia por ser otra anualidad

```
100  " ANUALIDAD VENCIDA "
```

LAS FORMULAS, cambian también por ser otra anualidad

```
270 LET A (J) = R * ( 1 - ( 1+I )↑ ( -J) ) / I

290 LET M (J) = R * ( ( 1+I )↑ J - 1 ) / I
```

Llamamos al programa de Anualidades Anticipadas por Periodos por la instrucción LOAD " Anticipadas "

El programa completo, quedará como sigue:

```
60  REM  ** PARA EL VALOR PRESENTE **

65 DIM A ( 100 )

70 REM  ** PARA EL MONTO **

75 DIM M ( 100 )

80 REM  ** NUMERO DE PERIODOS **

85 DIM M ( 100 )

100 PRINT  " ANUALIDADES VENCIDAS "

110 PRINT
```

```
120 PRINT  " PARA CALCULAR LO SIGUIENTE "

130 PRINT

140 PRINT  " VALOR PRESENTE "

150 PRINT

160 PRINT  " M O N T O "

170 PRINT

180 PRINT  " DADOS LOS DATOS SIGUIENTES "

190 PRINT

200 INPUT  " LA RENTA ES DE $ ";R

210 PRINT

220 INPUT  " LA TASA ES % ";I

230 PRINT

240 INPUT  " EL NUMERO DE PERIODOS ";N

244 PRINT  "   PERIODO #      VALOR PRESENTE        MONTO

245 FOR  J = 1 TO N

250 PRINT

260 REM  ** LA FORMULA VALOR PRESENTE **

270 LET A (J) = R * ( 1 - ( I+1 )↑ ( -J ) ) / I

280 REM  ** LA FORMULA DEL MONTO **

290 LET  M (J) = R * ( ( 1+J )↑ J - 1 ) / I

296 REM  ** PARA EL NUMERO DE PERIODOS **

298 LET  N (J) = J

300 PRINT

310 PRINT

320 PRINT N (J) ;" --- $ ";A (J); " -----$ ";M (J)

330 NEXT J
```

```
340 INPUT  " DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO ";A$
350 IF A$ = " SI " THEN 100
360 PRINT
370 PRINT  " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "
380 END
R U N
```

```
                ANUALIDADES VENCIDAS POR PERIODOS
                PARA CALCULAR LO SIGUIENTE:
                VALOR PRESENTE
                DADOS LOS DATOS SIGUIENTES:
                LA RENTA ES $ ¿ 5000,
                LA TASA ES  % ¿ .045
                EL NUMERO DE PERIODOS ES # ¿ 10
```

PERIODO #	VALOR PRESENTE	MONTO
1	$ 4784.68	$ 4999.99
2	$ 9363.33	$ 10225
3	$ 13744.82	$ 15685.20
4	$ 17937.62	$ 21390.95
5	$ 21949.88	$ 27353.54
6	$ 25789.36	$ 33584.45
7	$ 29463.50	$ 40095.75
8	$ 32979.43	$ 46900.06
9	$ 36343.95	$ 54010.57
10	$ 39563.59	$ 61441.04

DESEAS CONTINUAR, CONTESTA SI/NO ¿ NO

ESPERO HABERTE SIDO UTIL

Como hemos visto teniendo los dos primeros programas de Anualidades.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

ANUALIDADES ANTICIPADAS POR PERIODOS

Llamamos por medio de la Instrucción LOAD

LOAD " NOMBRE DEL PROGRAMA "

Al aparecer en la pantalla, haremos las modificaciones para la Anualidad que deseemos calcular.

Regularmente serán los renglones siguientes:

```
100 PRINT  " NOMBRE DE LA ANUALIDAD "

270 LET A ( LA FORMULA DEL VALOR PRESENTE )

290 LET M ( LA FORMULA DEL MONTO )
```

Como tuvimos la precaución de dejar la numeración de los renglones de 10 en 10 podemos hacer otras modificaciones al programa, si es necesario.

DESPEJE DE LA

R, N, I

De una Anualidad existe la necesidad de encontrar un elemento dados los demás elementos.

Por ejemplo:

La fórmula del Valor Presente de una Anualidad Vencida.

$$A = \frac{R\left(1 - (1 + I)^{-N}\right)}{I}$$

Para hallar R, con despejarla de la fórmula:

$$R = \frac{A\ I}{1 - (1 + I)^{-N}}$$

```
]LIST

100  PRINT " P R O G R A M A "
110  PRINT
120  PRINT " PARA ENCONTRAR LA RENTA "
130  PRINT
140  PRINT " DE UNA ANUALIDAD "
150  PRINT
160  INPUT "LA ANUALIDAD VENCIDA CONTESTA SI/NO ";A$
170  IF A$ = "SI" THEN A1 = 0: GOTO 190
180 A1 = 1
190  INPUT "SE TRATA DE MONTO, CONTESTA SI/NO ";A$
200  IF A$ = "SI" THEN A2 = 0: GOTO 220
210 A2 = 1
220  INPUT " LA TASA DE INTERES ES ";I
230  PRINT
240  INPUT " EL NUMERO DE PERIODOS ";N
250  PRINT
260  IF A2 = 1 THEN 290
270  INPUT " EL MONTO ES DE $ ";S
280  GOTO 300
290  INPUT " EL VALOR PRESENTE ES $";A
300  IF A1 = 0 AND A2 = 1 THEN 340
310  IF A1 = 0 AND A2 = 0 THEN 360
320  IF A1 = 1 AND A2 = 0 THEN 380
330  IF A1 = 1 AND A2 = 1 THEN 400
340 R = (A * I) / (1 - (1 + I) ^ ( - N))
350  GOTO 410
360 R = (S * I) / ((1 + I) ^ N - 1)
370  GOTO 410
380 R = (S * I) / ((1 + I) * ((1 + I) ^ N - 1))
390  GOTO 410
400 R = (A * I) / ((1 + I) * (1 - (1 + I) ^ ( - N)))
410  PRINT " LA RENTA ES DE $ ";R
420  INPUT " DESEAS CALCULAR OTRA RENTA CONTESTA SI/NO ";A$
430  IF A$ = "SI" THEN  GOTO 160
440  PRINT
450  PRINT "ESPERO HABER SIDO UTIL "
460  END
```

```
]RUN
 P R O G R A M A

 PARA ENCONTRAR LA RENTA

 DE UNA ANUALIDAD

LA ANUALIDAD VENCIDA CONTESTA SI/NO SI
SE TRATA DE MONTO, CONTESTA SI/NO NO
 LA TASA DE INTERES ES .05

 EL NUMERO DE PERIODOS 60

 EL VALOR PRESENTE ES $189292.8953
 LA RENTA ES DE $ 10000

 DESEAS CALCULAR OTRA RENTA CONTESTA SI/NO SI

LA ANUALIDAD VENCIDA CONTESTA SI/NO SI
SE TRATA DE MONTO, CONTESTA SI/NO SI
 LA TASA DE INTERES ES .07

 EL NUMERO DE PERIODOS 20

 EL MONTO ES DE $ 102480.74
 LA RENTA ES DE $ 2499.80505

 DESEAS CALCULAR OTRA RENTA CONTESTA SI/NO SI

LA ANUALIDAD VENCIDA CONTESTA SI/NO NO
SE TRATA DE MONTO, CONTESTA SI/NO NO
 LA TASA DE INTERES ES .08

 EL NUMERO DE PERIODOS 4

 EL VALOR PRESENTE ES $1788.55
 LA RENTA ES DE $ 500.00042

 DESEAS CALCULAR OTRA RENTA CONTESTA SI/NO SI

LA ANUALIDAD VENCIDA CONTESTA SI/NO NO
SE TRATA DE MONTO, CONTESTA SI/NO SI
 LA TASA DE INTERES ES .08

 EL NUMERO DE PERIODOS 4

 EL MONTO ES DE $ 2433.39
 LA RENTA ES DE $ 499.999899

 DESEAS CALCULAR OTRA RENTA CONTESTA SI/NO NO

 ESPERO HABER SIDO UTIL
```

Para el caso de anualidades variables donde la renta no puede ser despejada, utilizaremos el algoritmo de bisección.

Este algoritmo funciona para cualquier tipo de anualidad, modificando las expresiones donde ya sea el monto o el valor presente.

L A T A S A

I

Para poder encontrar la tasa de una Anualidad Cierta, ya que esta no puede despejarse, se requiere realizar un algoritmo por aproximaciones, para que un programa de computación pueda encontrar la tasa buscada.

De una Anualidad, tendremos todos los datos por conocidos, menos la tasa, el valor de la Anualidad, este caso lo denominaremos A.

Establecemos una tasa inicial I, y tendrá la Anualidad un Valor TB, se establecerá también un incremento o decremento para la tasa, según sea el caso K.

Y se pondrá una condición, para poder aceptar, si la tasa inicial se pueda aceptar como buena, que es la siguiente:

VALOR ABSOLUTO (TB-A) menor o igual a .001

Con la tasa inicial, puede suceder solamente una de éstas tres cosas:

1.- Que cumpla con la condición inicial.

2.- Que la tasa inicial resulte menor que la tasa buscada.

3.- Que la tasa inicial resulte mayor que la tasa buscada.

Si sucede el primer caso, hemos encontrado la tasa buscada, en este caso sería igual a la tasa Inicial.

Si resulta el segundo caso, nos vemos en la necesidad de incrementar la tasa inicial, será de la forma:

$$J = I + K$$

Al igual que la tasa inicial, pueden suceder los tres casos.

El valor tasa J, de la Anualidad, la denominaremos TJ y tiene como condición, para hacer aceptada.

VALOR ABSOLUTO (TJ-A) menor o igual a .001

1.- Si es primer caso, hemos encontrado la tasa buscada.

2.- Si es segundo caso, incrementaremos nuevamente la tasa.

3.- Si es el tercer caso, donde la tasa es mayor que la tasa buscada.

Establecemos una tercera tasa, que será L, tendrá un valor TL, la anualidad con esta tasa. Esta tasa tendrá la forma:

$$L = (I + J) / 2$$

Y tiene una condición, para ser aceptada.

VALOR ABSOLUTO (TL - A) menor o igual a .001

A partir de este momento la máquina, solamente, va tomando los dos extremos, más cercanos a la tasa buscada, y esta operación se realiza las veces que sean necesarias para encontrar la tasa.

Y en el tercer caso de la tasa Inicial, se hará igual que en la tasa menor, solamente decrementará la tasa.

```
]LIST

10  INPUT " VALOR PRESENTE $ ";A
20  INPUT " LA RENTA ES    $ ";R
30  INPUT " EL NUMERO DE PERIODOS #";N
40 I = .10: REM  TASA INICIAL
50 K = .01: REM  INCREMENTO A LA TASA
60 TB = (R * (1 - (1 + I) ^ ( - N))) / I
70  IF  ABS (TB - A) <  = .00001 THEN 230
80 T = 0
90  IF (TB > A) THEN S = 1: GOTO 94
92 S =  - 1
94 T = T + 1
96 J = I + (S * T * K)
98  IF J = 0 THEN 94
100 TJ = (R * (1 - (1 + J) ^ ( - N))) / J
110  IF S =  - 1 THEN 130
120  IF (TJ > A) THEN 94
125  GOTO 140
130  IF (TJ < A) THEN 94
140 L = (I + J) / 2
145  IF L = 0 THEN L = L + .001
150 TL = (R * (1 - (1 + L) ^ ( - N))) / L
160  IF (TL > A) THEN 190
170  IF S = 1 THEN J = L: GOTO 210
180 I = L: GOTO 210
190  IF S = 1 THEN I = L: GOTO 210
200 J = L
210  IF  ABS (I - J) < .00001 THEN 230
220  GOTO 140
230 I =  INT (I * 10000) / 100
235  PRINT " LA TASA DE INTERES ";I;"%"
240  PRINT " DESEAS CALCULAR`OTRA TASA "
250  INPUT " CONTESTA SI/NO ";A$
270  IF A$ = "SI" THEN  PRINT : PRINT : GOTO 10
280  PRINT " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "
290  END
```

```
RUN

 VALOR PRESENTE $ 19.84791020
 LA RENTA ES    $ 1
 EL NUMERO DE PERIODOS #100
 LA TASA DE INTERES 5%
 DESEAS CALCULAR OTRA TASA
 CONTESTA SI/NO SI

 VALOR PRESENTE $ 10.80997795
 LA RENTA ES    $ 1
 EL NUMERO DE PERIODOS #26
 LA TASA DE INTERES 8%
 DESEAS CALCULAR OTRA TASA
 CONTESTA SI/NO SI

 VALOR PRESENTE $ 39.60168667
 LA RENTA ES    $ 1
 EL NUMERO DE PERIODOS #55
 LA TASA DE INTERES 1.25%
 DESEAS CALCULAR OTRA TASA
 CONTESTA SI/NO SI

 VALOR PRESENTE $ 96.06686539
 LA RENTA ES    $ 1
 EL NUMERO DE PERIODOS #110
 LA TASA DE INTERES .25%
 DESEAS CALCULAR OTRA TASA
 CONTESTA SI/NO SI

 VALOR PRESENTE $ 227187.5547
 LA RENTA ES    $ 10000
 EL NUMERO DE PERIODOS #25
 LA TASA DE INTERES .75%
 DESEAS CALCULAR OTRA TASA
 CONTESTA SI/NO NO
 ESPERO HABERTE SIDO UTIL
```

EL NUMERO DE PERIODOS

N

Para poder despejar el número de periodos "N" de una Anualidad Cierta, utilizaremos las propiedades de los logaritmos, tomemos como ejemplo una Anualidad Vencida con los datos siguientes:

VALOR PRESENTE ES	A
LA RENTA ES	R
LA TASA ES	I

La fórmula de Valor Presente es:

$$A = \frac{R\left(1 - (1 + I)^{-N}\right)}{I}$$

Buscaremos despejar la N, que es el número de periodos

Despejemos la I, que está dividiendo:

$$A\,I = R\left(1 - (1 + I)^{-N}\right)$$

Despejemos a la R, que está multiplicando:

$$A\,I / R = 1 - (1+I)^{-N}$$

Despejemos al 1, que está sumando:

$$A\,I / R - 1 = -(1+I)^{-N}$$

Multipliquemos por -1, la igualdad:

$$1 - A\,I / R = (1+I)^{-N}$$

Utilizaremos las propiedades de los logaritmos:

$$\mathrm{Log}\,(1 - A\,I / R) = -N\,\mathrm{Log}\,(1 + I)$$

Dejemos a la log (1+I)

$$\frac{\text{Log} (1 - A I / R)}{\text{Log} (1 + I)} = - N$$

Multipliquemos por -1

$$\frac{-\text{Log} (1 - A I / R)}{\text{Log} (1 + I)} = N$$

```
]LIST

10  REM  ** DATOS DE UNA ANUALIDAD **
20  INPUT " VALOR PRESENTE  $";A
30  INPUT " LA RENTA        $";R
40  INPUT " LA TASA         %";I
50  REM  ** FORMULA N **
60 N =  - LOG (1 - (A * I) / R) /  LOG (1 + I)
65 N =  INT ((N + .0001) * 100) / 100
70  PRINT " EL NUMERO PERIODOS ";N
80  PRINT " DESEAS CALCULAR OTRO CASO "
90  INPUT " CONTESTA SI O NO ";A$
100  IF A$ = "SI" THEN 10


]RUN


 VALOR PRESENTE  $19.75226174
 LA RENTA        $1
 LA TASA         %.05
 EL NUMERO PERIODOS 90
 DESEAS CALCULAR OTRO CASO
 CONTESTA SI O NO SI


 VALOR PRESENTE  $7.18883022
 LA RENTA        $1
 LA TASA         %.065
 EL NUMERO PERIODOS 10
 DESEAS CALCULAR OTRO CASO
 CONTESTA SI O NO SI


 VALOR PRESENTE  $0.93457844
 LA RENTA        $1
 LA TASA         %.07
 EL NUMERO PERIODOS 1
 DESEAS CALCULAR OTRO CASO
 CONTESTA SI O NO SI


 VALOR PRESENTE  $11.65456922
 LA RENTA        $1
 LA TASA         %.08
 EL NUMERO PERIODOS 35
 DESEAS CALCULAR OTRO CASO
 CONTESTA SI O NO NO
```

```
]LIST

10  INPUT " VALOR PRESENTE $ ";A
20  INPUT " LA RENTA ES     $ ";R
30  INPUT "LA TASA DE INTERES ES: ";I
40 N = 10: REM  # DE PERIODOS INICIAL
50 K = 1: REM  INCREMENTO EN EL # DE PERIODOS
60 TB = (R * (1 - (1 + I) ^ ( - N))) / I
70  IF  ABS (TB - A) <  = .00001 THEN 230
80 T = 0
90  IF (TB > A) THEN S =  - 1: GOTO 94
92 S = 1
94 T = T + 1
96 J = N + (S * T * K)
100 TJ = (R * (1 - (1 + I) ^ ( - J))) / I
110  IF S =  - 1 THEN 130
120  IF (TJ =  < A) THEN N = J:TB = TJ: GOTO 94
125  GOTO 140
130  IF (TJ > A) THEN N = J:TB = TJ: GOTO 94
140   = (N + J) / 2
15    = (R * (1 - (1 + I) ^ ( - L))) / I
160  IF (TL =  < A) THEN 190
170  IF S = 1 THEN J = L:TJ = TL: GOTO 210
180 N = L:TB = TL: GOTO 210
190  IF S = 1 THEN N = L:TB = TL: GOTO 210
200 J = L:TJ = TL
210  IF  ABS (TB - TJ) < .001 THEN 230
220  GOTO 140
230 N =  INT (N * 100 + .001) / 100
235  PRINT "EL # DE PERIODOS ES : ";N
240  PRINT "DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO"
250  INPUT " CONTESTA SI/NO ";A$
270  IF A$ = "SI" THEN  PRINT : PRINT : GOTO 10
280  PRINT " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "
290  END
```

```
]RUN

 VALOR PRESENTE $ 43.09835164
 LA RENTA ES    $ 1
LA TASA DE INTERES ES: .02
EL # DE PERIODOS ES : 99.99
DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO
 CONTESTA SI/NO SI


 VALOR PRESENTE $ 44518.2233
 LA RENTA ES    $ 10000
LA TASA DE INTERES ES: .04
EL # DE PERIODOS ES : 5
DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO
 CONTESTA SI/NO SI


 VALOR PRESENTE $ 2045.354991
 LA RENTA ES    $ 100
LA TASA DE INTERES ES: .025
EL # DE PERIODOS ES : 29
DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO
 CONTESTA SI/NO SI


 VALOR PRESENTE $ 599.9444012
 LA RENTA ES    $ 10
LA TASA DE INTERES ES: .0075
EL # DE PERIODOS ES : 79.99
DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO
 CONTESTA SI/NO SI


 VALOR PRESENTE $ 0.99009901
 LA RENTA ES    $ 1
LA TASA DE INTERES ES: .01
EL # DE PERIODOS ES : 1
DESEAS CALCULAR OTRO PERIODO
 CONTESTA SI/NO NO
 ESPERO HABERTE SIDO UTIL
```

A M O R T I Z A C I O N

La tabla de amortización es uno de los elementos más importantes en el aspecto financiero porque describe con claridad el comportamiento, en la liquidación de una deuda pactada bajo determinadas condiciones.

La deuda puede ser saldada en pagos y periodos uniformes o bajo cualquier otro esquema de pago; aquí solo nos ocuparemos del primer caso (pagos iguales en periodos iguales) considerándo fija la tasa de interés.

Puesto que el pago periodico tiene el objetivo de saldar la deuda, el valor presente del total de pagos será igual al monto de la deuda, valuando en el momento de contracción del préstamo; esto es:

$$A = R \frac{\left(1 - (1 + I)^{-N} \right)}{I}$$

De donde:

$$R = \frac{A\,I}{1 - (1 + I)^{-N}}$$

El pago estará formado de dos partes, una que sirve para pagar los intereses que generaría el capital y otra que sirva para disminuir el capital, que constituye deuda. A través del tiempo, la parte destinada al pago de los intereses disminuye como consecuencia lógica de la reducción en el monto de la deuda, ocurre lo contrario con la parte destinada al pago de la deuda.

T A B L A D E A M O R T I Z A C I O N

Para conocer el comportamiento de una deuda a través del tiempo y la distribución del pago periodico efectuado, haremos una tabla con cinco columnas fundamentales.

En la primera indicaremos el final del periodo correspondiente.

La segunda columna corresponde al capital insoluto que se tiene al principio del periódo.

La tercera colúmna de la tabla contiene la parte del pago que se determina a cubrir los intereses que generará el capital insoluto en su periodo.

La cuarta columna se destina al pago total efectuado al final de cada periodo.

La última columna, contiene la parte del pago que se destina a decrementar el monto de la deuda.

Si denotamos por At el capital insoluto a inicios del decimo periodo, entonces podemos determinar expresiones para At.

$$A\ 0 = \frac{R\ (\ 1 - (\ 1+i\ )^{-N}\ )}{I}$$

$$A\ 1 = \frac{R\ (\ 1 - (\ 1 + I\ )^{-N}\ )}{I}$$

$$A\ 2 = \frac{R\ (\ 1 - (\ 1 + I\ )^{-N}\ )}{I}$$

.

.

.

$$A\ T = \frac{R\ (\ 1 - (\ 1 + I\ )^{-(N-T)}\ )}{I}$$

Si devengamos por I T los intereses devengados por el capital insoluto durante el decimo periodo, entonces:

$$I\ T = A\ T\ (\ I\ )$$

Si denotamos por C T a la parte del pago destinado a disminuir la deuda, entonces:

$$CT = R - IT$$

En la elaboración de un programa de cómputo para realizar la tabla, no es necesario calcular cada uno de los elementos de la tabla vía sus fórmulas, sino que pueden deducirse con facilidad sus valores si se conoce la tasa de interes, el capital insoluto en sus inicios del periodo y el pago correspondiente.

A continuación se muestra el programa correspondiente:

```
100 PRINT " PROGRAMA CON EL TEMA "

110 PRINT

120 PRINT " AMORTIZACION "

130 PRINT

140 PRINT " DE UNA DEUDA "

150 PRINT

160 PRINT " PARA OBTENER LO SIGUIENTE "

170 PRINT

180 PRINT " EL IMPORTE POR CADA UNO DE LOS PAGOS "

190 PRINT

200 PRINT " Y LA TABLA DE AMORTIZACIONES "

210 PRINT

220 PRINT " CON LOS DATOS SIGUIENTES "

230 PRINT

240 IMPUT " LA DEUDA ES DE $";A

250 PRINT

260 INPUT " LA TASA ES DE %";I

270 PRINT
```

```
280 IMPUT " EL NUMERO DE PAGOS ES DE # ";N
290 PRINT
300 REM ** FORMULA PARA LOS PAGOS **
310 PRINT
320 LET R = A *I/( 1 - ( 1+I )↑( -N ) )
340 PRINT " IMPORTE DE CADA PAGO ES DE $";R
350 PRINT
360 INPUT " DESEAS CONTINUAR CONTESTA SI/NO ";A
370 IF A$ = " SI " THEN 390
380 END
390 REM **PARA LA CONSTRUCCION DE LA TABLA **
400 PRINT
410 REM **NUMERO DE PERIODOS**
420 DIM N(100)
430 REM  ** PARA EL CAPITAL INSOLUTO **
440 DIM A(100)
450 REM ** PARA INTERES VENCIDO **
460 DIM I(100)
470 REM ** IMPORTE PAGADO **
480 DIM R(100)
490 REM ** CAPITAL PAGADO **
500 DIM C(100)
510 PRINT " TABLA DE AMORTIZACION "
520 PRINT
530 PRINT " ______________________________________ "
```

```
540 PRINT
550 PRINT " # PERIODO    CAPITAL    INTERES    PAGO    CAPITAL "
560 PRINT                INSOLUTO   VENCIDO            PAGADO
570 PRINT " ____________________________________________ "
580 PRINT
610 FOR J = O TO N-1
620 N (J) = J+1
630 A (J) = R * ( 1 - ( 1+ I )↑( -N+ J ) )/I
640 I (J) = A (J) * I
650 R (J) = R
660 C (J) = R - I (J)
690 PRINT N (J)  A (J)  I (J)  R (J)  C (J)
700 NEXT J
710 PRINT
720 IMPUT " DESEAS SEGUIR CONTESTA SI/NO ";A$
730 IF A$ = " SI " THEN 100
740 PRINT " ESPERO HABERTE SIDO UTIL "
750 END
RUN
          PROGRAMA CON EL TEMA
          AMORTIZACION
          DE UNA DEUDA
          PARA OBTENER LO SIGUIENTE
          EL IMPORTE POR CADA UNO DE LOS PAGOS
          Y LA TABLA DE AMORTIZACION
```

CON LOS DATOS SIGUIENTES

LA DEUDA ES DE $ ¿ 5000

LA TASA ES DE % ¿ .025

EL NUMERO DE PAGOS ES DE # ¿ 6

EL IMPÓRTE DE CADA PAGO ES DE $ 907.749846

DESEAS CONTINUAR CONTESTA SI/NO ¿ SI

TABLA DE AMORTIZACION.

PERIODO	CAPITAL INSOLUTO	INTERES CONTENIDO EN EL PAGO	PAGO	CAPITAL PAGADO CONTENIDO EN EL PAGO
1	5000	125	907.74	782.74
2	4217.25	105.43	907.74	802.31
3	3414.93	85.37	907.74	822.37
4	2592.55	64.81	907.74	842.93
5	1749.61	43.74	907.74	864.09
6	885.60	22.14	907.74	885.60

DESEAS SEGUIR CONTESTA SI/NO ¿ NO

ESPERO HABERTE SIDO UTIL

F O N D O D E A M O R T I Z A C I O N .

En este caso se tiene que liquidar una deuda al final de los n periodos, con las condiciones siguientes:

El deudor debe pagar al acreedor ciertos intereses a determinados periodos conforme se haya acordado, siendo por lo general los mismos periodos para construir un fondo de Amortización para poder liquidar la deuda al final de n periodos.

Por lo tanto tendremos 2 tasas que pueden ser iguales o no, por lo general la tasa que se paga al acreedor es mayor que la tasa del fondo de amortización.

La gráfica de los depósitos:

E	R	R	R	R	R . . . . R
0	1	2	3	4	5 . . . . n

El primer depósito tendrá un monto de:

$$R(1+i)^{n-1}$$

El segundo depósito tendrá un monto de:

$$R(1+i)^{n-2}$$

El último periodo tendrá un monto de:

$$R(1+i)^{o} = R$$

La suma de los montos de los n depósitos debe ser igual a la deuda contraida.

$$S = R(1+i) \quad R(1+i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots R$$

Para poder simplificar ordenamos de menor a mayor, para poder encontrar la fórmula respectiva.

$$S = R + R(1+i) + (1+i)^{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots R(1+i)^{n-1}$$

Factorizamos la R y nos resulta:

$$S + R\,(\,1 + (\,1+i\,) + (\,1+i\,)^{2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. R(1+i)^{n-1}\,)$$

Identificamos que se trata de una progresión geométrica, con los elementos siguientes:

El primer término es	1
La razón es	(1+i)
El número de elementos es	n

Sustituimos en la fórmula respectiva, y nos resulta:

$$S = \frac{R\,(\,1 - (\,1 + i\,)^{n}\,)}{1 - (\,1 + i\,)}$$

Simplificando el cociente, nos da lo siguiente:

$$S = \frac{R\,(\,(\,1 + i\,)^{n} - 1\,)}{i}$$

Pero en este caso se desea conocer el importe de los depósitos, despejamos R

$$R - \frac{A\,i}{(\,1 + i\,)^{n} - 1}$$

TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACIONES.

Para conocer la forma como se distribuyen, cada uno de los depósitos con sus intereses para poder llegar a liquidar la deuda.

Esta tabla constará de 5 columnas, de la forma siguiente:

La primera nos indicará el número de periodos.

La segunda es interés obtenido al final del periodo, se obtiene de la forma:

Del importe del fondo al final del periodo anterior por la tasa i = interés obtenido al final del periodo.

En el primer periodo no existe periodo anterior, el fondo es = 0

$I\,1 = 0i = 0$

En el segundo periodo, ya existe el importe del fondo final del anterior periodo éste es igual a:

$$S\,1 = R\,\frac{\left((1+i)^{1} - 1 \right)}{i} = R$$

El interés obtenido al final del segundo periodo es:

$I\,2 = S\,1$ por $i = Ri$

En el tercer periodo, el importe del fondo final del periodo anterior es igual a:

$$S\,2 = R\,\frac{(1+i)^{2} - 1)}{i}$$

El interés obtenido al final del tercer periodo es:

$I\,3 = S\,1$ por i

En el último periodo, el importe al final del periodo es igual a:

$$S\,n-1 = R\,\frac{\left((1+i)^{n-1} - 1 \right)}{i}$$

$I\,n = S\,n-2$ por i

La tercera corresponderá al importe del depósito es R

La cuarta el incremento al fondo correspondiente al periodo.

En el primer periodo es igual a R

La primera nos indicará el número de periodos.

La segunda es interés obtenido al final del periodo, se obtiene de la forma:

Del importe del fondo al final del periodo anterior por la tasa i = interés obtenido al final del periodo.

En el primer periodo no existe periodo anterior, el fondo es = 0

$I\ 1 = 0i = 0$

En el segundo periodo, ya existe el importe del fondo final del anterior periodo éste es igual a:

$$S\ 1 = R\ \frac{(\ (1+i)^{1} - 1\ )}{i} = R$$

El interés obtenido al final del segundo periodo es:

$I\ 2 = S\ 1$ por $i = Ri$

En el tercer periodo, el importe del fondo final del periodo anterior es igual a:

$$S\ 2 = R\ \frac{(\ 1+i\ )^{2} - 1\ )}{i}$$

El interés obtenido al final del tercer periodo es:

$I\ 3 = S\ 1$ por i

En el último periodo, el importe al final del periodo es igual a:

$$S\ n - 1 = R\ \frac{(\ (1+i)^{n-1} - 1\ )}{i}$$

$I\ n = S\ n - 2$ por i

La tercera corresponderá al importe del depósito es R

La cuarta el incremento al fondo correspondiente al periodo.

En el primer periodo es igual a R

En el segundo periodo es igual: $I_2 + R$

En el tercer periodo es igual a: $I_3 + R$

En el último periodo es igual a: $I_n + R$

La quinta columna es el importe del fondo al final del periodo.

En el primer periodo es igual a:

$$S_1 = \frac{R\left((1+i)^{1} - 1 \right)}{i} = R$$

En el segundo periodo es igual a:

$$S_2 = \frac{R\left((1+i)^{2} - 1 \right)}{i}$$

En el tercer periodo es igual a:

$$S_2 = \frac{R\left((1+i)^{2} - 1 \right)}{i}$$

En el último periodo es igual a:

$$S_n = \frac{R\left((1+i)^{n-1} - 1 \right)}{i}$$

Programa para obtener el importe de cada uno de los depósitos de la deuda (R) y la tabla del fondo de amortización con los siguientes elementos:

La deuda	(S)
La tasa	(i)
El número de depósitos	(n)

PROGRAMA COMPLETO.

```
100 PRINT " PROGRAMA CON EL TEMA "
110 PRINT
120 PRINT " FONDO DE AMORTIZACION "
130 PRINT
140 PRINT " DE UNA DEUDA "
150 PRINT
160 PRINT " PARA OBTENER LO SIGUIENTE "
170 PRINT
180 PRINT " EL IMPORTE POR CADA UNO DE LOS DEPOSITOS ".
190 PRINT
200 PRINT " Y LA TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION "
210 PRINT
220 PRINT " CON LOS SIGUIENTES DATOS "
230 PRINT
240 INPUT " CON LA DEUDA ES DE $";S
250 PRINT
260 INPUT " LA TASA ES DE %";iI
270 PRINT
280 INPUT " NUMERO DE DEPOSITOS ";N
290 PRINT
300 REM  * * FORMULA PARA LOS DEPOSITOS * *
310 LET R = ( S * I ) / ( ( 1 + I )↑N - 1 )
320 PRINT
```

```
330 PRINT " IMPORTE DE CADA UNO DE LOS DEPOSITOS ES $";R
340 PRINT
350 INPUT " DESEAS CONTINUAR CONTESTA SI/NO ";A$
360 IF A$ = "SI" THEN 380
370 END
380 REM * * PARA LA CONSTRUCCION DE LA TABLA * *
390 REM * * NUMERO DE PERIODOS * *
400 DIM N ( 100 )
410 REM * * INTERES OBTENIDO * *
420 DIM I ( 100 )
430 REM * * PARA LOS DEPOSITOS * *
440 DIM R ( 100 )
450 REM * * INCREMENTO AL FONDO * *
460 DIM A ( 100 )
470 REM * * FONDO FINAL * *
480 DIM S ( 100 )
485 DIM F ( 100 )
490 PRINT " TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION "
500 PRINT
510 PRINT " * * - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - "
520 PRINT
530 PRINT " PERIODOS   INTERESES   DEPOSITOS   INCREMENTO   FONDO
540 PRINT             OBTENIDOS                FONDO        FINAL
550 PRINT " - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -"
```

```
560 PRINT
570 FOR J = 0 tO N-1
580 N (J) = J 1
590 S (J) = R * ( ( 1+i )↑J -1 )/I
595 I (J) = S (J) * I
600 R (J) = R
610 A (J) = R I (J)
620 F (J) = R * ( ( 1+i )↑ (J+1) -1)/I
```

```
630 PRINT N (J), I (J), R (J), A (J), F (J)
640 NEXT J
650 END
R U N
```

```
PROGRAMA CON EL TEMA
FONDO DE AMORTIZACION
DE UNA DEUDA
PARA OBTENER LO SIGUIENTE
EL IMPORTE POR CADA UNO DE LOS DEPOSITOS
Y LA TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION
CON LOS SIGUIENTES DATOS
LA DEUDA ES DE $ ¿ 5000
LA TASA ES DE % ¿ .015
NUMERO DE DEPOSITOS ¿ 8
IMPORTE DE CADA DEPOSITO $ 592.920102
DESEAS CONTINUAR CONTESTA SI/NO ¿ SI
```

TABLA DEL FONDO DE AMORTIZACION.

PERIODO	INTERESES OBTENIDOS	DEPOSITOS	INCREMENTO AL FONDO	FONDO FINAL
1	0	592.9201	592.9201	592.9201
2	8.8938	592.9201	601.8138	1194.7340
3	17.9210	592.9201	610.8413	1805.5751
4	27.0836	592.9201	620.0037	2425.5789
5	36.3836	592.9201	629.3037	3064.8827
6	45.8232	592.9201	638.7433	3693.6261
7	55.4043	592.9201	648.3244	4341.9506
8	65.1292	592.9201	658.0494	5000.00

C O N C L U S I O N E S

Considero que haber realizado este trabajo, auxiliará a los estudios de la materia, a conocer paso a paso el desarrollo matemático de las diferentes anualidades ciertas, pretendiéndo con esto que se tenga una idea clara y precisa del tema, lo que servirá para entender mejor las relaciones matemáticas que existen entre las diferentes anualidades ciertas.

El uso de programas de cómputo ya sea en BASIC o en cualquier otro lenguaje, permite obtener resultados rápidamente, utilizando algorítmos mas sofisticados como es el caso del método de Bisección para determinar la tasa de interés y el número de períodos.

Los programas aquí mostrados pueden ser facilmente modificados para cualquier problema en particular referente a Anualidades ya sea en el caso de valores presentes y de montos.

La importancia de este trabajo es que trata de vincular la teoría del interés con el uso del lenguaje de programación para obtener resultados más expedítos, motivando al alumno al uso de instrumentos más sofisticados en la realización de su trabajo.

B I B L I O G R A F I A

Apuntes de la clase de Matemáticas Financieras II de la Actuaria Aurora Valdes Michel, en la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, En el Segundo Semestre del Año escolar 1987.

Matemáticas Financieras
Benjamín de la Cueva
Editorial Porrúa, S. A.
México 1982.

Manual de Matemáticas Financieras
Justin H. Moore
Editorial UTEHA
Reimpresión de 1975.

Matemáticas Financieras
Frank Ayres Jr.
Serie de Compendios Schaum
Editorial McGraw-Hill
1971

Microsoft BASIC
C. Prigmore
Editorial Gustavo Gill, S. A.
1985

COMMODORE 64
Jhon Heiborn-Ran Talbott
Editorial Osborne/Mac Graw-Hill
1983