

10j
37



Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

POLITICAS DE REEMPLAZO OPTIMO
PARA PROCESOS SUJETOS A
DETERIORO MARKOVIANO

Tesis Profesional

Que para obtener el Título de:

ACTUARIO

presenta

JOSE ANTONIO OROZCO MONTERO



México, D. F.

1987



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Las probabilidades de fallo de los componentes operativos de cada estado son dependientes del estado. Además, se supondrá que se tiene una estructura de costos constituida por tasas de ingreso por unidad de tiempo y costos de reemplazo por estado. Existe por lo tanto un incentivo para encontrar mejores políticas de reemplazo. En el capítulo 2 se modela este problema como un proceso markoviano de decisión en tiempo continuo, más aún, como un modelo de reemplazo. Además se encuentra la forma de las políticas óptimas para un cierto criterio de optimización.

En el capítulo 3 se presenta un algoritmo iterativo que bajo ciertas condiciones de monotonía proporciona la política óptima, consistente en una clase de estados de reemplazo contenida en el conjunto de estados del sistema, que maximiza la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo.

Por último, en el capítulo 4, se expone de una manera breve las consideraciones estructurales básicas para la implementación en computadora del algoritmo.

INDICE

Introducción.....	1
CAPITULO 1. Cadenas de Markov en tiempo continuo.	
§1. Introducción.....	1
§2. Cadenas de Markov en tiempo continuo.....	5
§3. Procesos de muerte generalizados en tiempo continuo.....	22
Referencias.....	29
CAPITULO 2. Procesos Markovianos de Decisión y Modelos de Reemplazo Óptimo.	
§1. Introducción.....	30
§2. Procesos markovianos de decisión en tiempo continuo.....	31
§3. El criterio de optimalidad: maximizar la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo.....	33
§4. Modelos de reemplazo óptimo.....	38
Referencias.....	47
CAPITULO 3. Un Algoritmo para Resolver Determinados Problemas de Reemplazo Óptimo.	
§1. Descripción del modelo.....	48
§2. Condiciones de optimalidad alternativas para el tiempo de reemplazo óptimo.....	53
§3. El algoritmo.....	58
Referencias.....	64
CAPITULO 4. Implementación de un Sistema y Algunos Ejemplos.	
§1. Concepción general del sistema.....	65
§2. Representación de estados y estructuras de datos usadas.....	67
§3. Algunos ejemplos.....	76
Referencias.....	76
Conclusiones.....	77

CAPITULO 1

**CADENAS DE MARKOV
EN TIEMPO CONTINUO.****§1. INTRODUCCION.**

Hay situaciones físicas en las que un fenómeno de interés es observado y registrado como función del tiempo. Por ejemplo, el porcentaje de humedad en el ambiente es registrado a lo largo del día como una función del tiempo. Cuando se quiere modelar situaciones o procesos que dependen del tiempo (o de algún parámetro continuo) se podría optar por estudiar el fenómeno observado en forma discreta, tomando en cuenta por ejemplo sólo las observaciones registradas cada determinado lapso de tiempo. Así, en el ejemplo anterior se podrían considerar los porcentajes de humedad cada hora o cada minuto. Indudablemente que hacer algo como esto es ignorar la dependencia en el tiempo de la situación en cuestión.

Si específicamente se trata de modelar un proceso probabilístico cuyas manifestaciones son función de algún parámetro continuo, se podría considerar que para cada valor del parámetro t existe una variable aleatoria X_t que describe las posibles manifestaciones o resultados del proceso. En el caso específico del tiempo, se tiene una familia de variables aleatorias X_t con t en algún rango previamente especificado, como por ejemplo $[0, \infty)$. El modelar así un proceso, está fundamentado en la idea que se tiene de un proceso probabilístico o estocástico, como la de una situación que se manifiesta de diversas maneras a lo largo del "tiempo", gobernada por leyes probabilísticas.

A continuación se formalizará el concepto de proceso estocástico en tiempo continuo.

DEFINICION 1.1. Proceso Estocástico en Tiempo Continuo.

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, (S, \mathcal{S}) un espacio medible arbitrario y T un intervalo de reales.

Un proceso estocástico en tiempo continuo o que depende de un parámetro continuo sobre (Ω, \mathcal{F}, P) con espacio de estados (S, \mathcal{S}) y conjunto de índices T es una familia de variables aleatorias

$$\{X_t: \Omega \rightarrow S; t \in T\}.$$

Denotaremos $\{X_t; t \in T\}$ o $\{X_t(\omega); t \in T\}$ a un proceso estocástico y hablaremos de S como su espacio de estados cuando $S \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$ la σ -álgebra de Borel restringida a S .

Históricamente el término de proceso estocástico se reserva a familias de variables aleatorias relacionadas de alguna manera [(4) p. 47]; lo que debe caracterizar a un proceso estocástico será las relaciones entre las variables aleatorias X_t , $t \in T$.

Se observa que un proceso estocástico $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ es una función dependiente de dos variables, $\omega \in \Omega$ y $t \in T$; si se fija ω , $X_t(\omega)$ es una función de T en S conocida como trayectoria.

Si $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso estocástico en tiempo continuo, y si para cada $t_1, \dots, t_n \in T$ con $t_1 < \dots < t_n$ es posible conocer la distribución finito dimensional de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, por el Teorema de Extensión de Kolmogorov es posible asignar una medida de probabilidad en el espacio de las funciones de T en S (i.e., en el espacio de trayectorias). De esta manera, se dice que las distribuciones finito dimensionales determinan un proceso en tiempo continuo [(1) p. 41].

A pesar de que las distribuciones conjuntas finito dimensionales caracterizan a un proceso estocástico, cuando T es no numerable hay ocasiones en que las mismas no proporcionan información suficiente para el análisis de algunos eventos definidos en términos de trayectorias [(1) p. 161] , [(7) p. 32]; sin embargo dicho análisis es posible trabajando con otro proceso que es "similar" de alguna manera al proceso original.

DEFINICION 1.2. Modificación o versión de un proceso estocástico.

Sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico en tiempo continuo sobre (Ω, \mathcal{F}, P) . Un proceso estocástico $\{Y_t : t \in T\}$ sobre (Ω, \mathcal{F}, P) es una modificación o una versión del proceso $\{X_t : t \in T\}$ si para cada $t \in T$

$$Pr\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1.$$

Nos interesará trabajar con versiones del proceso que cumplan ciertas propiedades, en particular que cumplan la llamada condición de separabilidad.

DEFINICION 1.3. Proceso estocástico separable.

Sea $(X_t; t \in T)$ un proceso estocástico. El proceso es separable si existe un subconjunto (numerable) denso T_0 en T , llamado conjunto separante, y un conjunto $A \subset \Omega$ de probabilidad cero, llamado conjunto despreciable, tal que si ω no es elemento de A y $t \in T$, hay una sucesión $\{t_n\} \subset T$, $t_n \rightarrow t$ y tal que

$$X_{t_n}(\omega) \rightarrow X_t(\omega).$$

En un proceso separable el comportamiento de las trayectorias en T está determinado por el comportamiento de las mismas en T_0 . Además un proceso estocástico en tiempo continuo siempre admite una versión separable si el espacio de estados es finito. [(1) p. 166], y más que eso, las trayectorias del proceso son continuas por la derecha y con límites por la izquierda.

Por último, para determinar ciertos procesos (específicamente en los llamados procesos de Markov), no se dan las distribuciones conjuntas de cualquier colección finita de variables aleatorias sino que se establecen especificaciones entre ellas de tal manera que dichas distribuciones puedan ser conocidas.

§2. CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO.

Consideremos un fenómeno que tiene un número finito de manifestaciones y que es observado a partir de un determinado momento. Este fenómeno se podría modelar considerando un espacio de estados $S = \{s_0, s_1, \dots, s_N\}$ finito, $T = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = [0, \infty)$ y definiendo la variable aleatoria X_t el estado o manifestación del fenómeno al tiempo $t \geq 0$. Si el fenómeno tiene además la propiedad que la información del pasado con la que se

cuenta no contribuye a la información del presente para predecir el comportamiento futuro del fenómeno en cuestión, entonces el proceso que modela el fenómeno tiene la propiedad de Markov. En términos informales, esta propiedad se puede establecer como: dado el valor de X_t con $t > 0$ fija y el valor de X_u con $0 \leq u < t$, el valor de X_s con $s > t$ sólo está influenciado por X_t .

DEFINICION 1.4. Cadena de Markov en Tiempo Continuo.

Sea $\{X_t; t \in T\}$ un proceso estocástico en tiempo continuo sobre (Ω, \mathcal{F}, P) con espacio de estados (S, \mathcal{P}) .

El proceso es una Cadena de Markov en tiempo continuo si:

- i) El conjunto de estados S es finito o numerable
- ii) El conjunto de valores parametrales es $T = [0, \infty)$
- iii) Dados valores parametrales arbitrarios $h \geq 0$ y $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ se tiene que

$$\Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i, X_{t_n}=i_n, \dots, X_{t_1}=i_1\} = \Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i\}$$

con probabilidad 1 para cualesquiera estados i, j, i_1, \dots, i_n .

Cuando S es un conjunto finito, que por comodidad se etiqueta como $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, se toma $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\{0, 1, 2, \dots, N\})$ el conjunto de todos los subconjuntos de S . Pedir S finito es una manera de suponer que

$$\sum_{j=0}^N \Pr\{X_t=j\} = 1 \quad \forall t \in T;$$

$T = [0, \infty)$ establece que el proceso depende de un parámetro continuo no negativo aunque generalmente se le interpreta como el tiempo que transcurre desde el inicio del proceso.

Si $\Pr\{X_t=i\} > 0$ dada $t \in T$, definimos $p_{ij}(t, t+h)$ como

$$p_{ij}(t, t+h) = \Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i\} \quad i, j \in S \quad h \geq 0$$

a la probabilidad de efectuar una "transición" del estado i al estado j en un lapso de tiempo $h \geq 0$ dado que el proceso se encuentra al tiempo $t \geq 0$ en el estado i .

Cuando $p_{ij}(t, t+h)$ no depende de t (cada vez que $\Pr\{X_t=i\} > 0$) la denotamos $p_{ij}(h) = \Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i\}$ y decimos que la cadena de Markov tiene probabilidades estacionarias de transición lo que significa que la probabilidad de ir de i a j en un lapso de tiempo h no depende de cuando alcanzamos el estado i .

De aquí en adelante, y a menos que se especifique lo contrario, sólo consideraremos cadenas de Markov con espacio de estados finito en tiempo continuo con probabilidades de transición estacionarias i.e.

$$p_{ij}(h) = \Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i\} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{con } h \geq 0.$$

Supongamos conocida la distribución inicial del proceso $\Pr\{X_0=j\}$. Se tiene que todas las distribuciones finito dimensionales para la cadena de Markov quedan completamente especificadas si se tienen las probabilidades de transición $p_{ij}(h) \forall h \geq 0$ y la distribución inicial del proceso.

[(2) p. 170], [(4) p. 236].

Las probabilidades de transición cumplen las siguientes cuatro propiedades:

$$a) p_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i, j \in S \quad \forall t \geq 0$$

$$b) \sum_{j=0}^N p_{ij}(t) = 1 \quad \forall i, j \in S \quad \forall t \geq 0$$

$$c) p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^N p_{ik}(s) p_{kj}(t) \quad \forall i, j \in S \quad \forall t, s \geq 0$$

Este último establece que para ir del estado i al estado j en un lapso de tiempo $s+t$ se debe pasar al tiempo s por algún estado intermedio k . (Fig. 1).

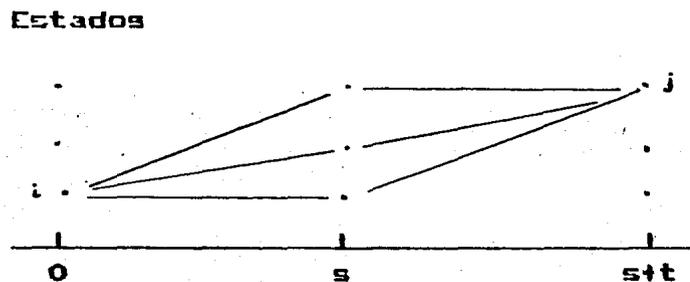


Fig. 1

Entonces la probabilidad de ir en un tiempo s al estado k y luego en un tiempo t al estado j , dado que se comienza en el estado i es:

$$\begin{aligned} & \Pr\{X_{s+t}=j \mid X_s=k \mid X_0=i\} \\ &= \Pr\{X_{s+t}=j \mid X_s=k \mid X_0=i\} \Pr\{X_s=k \mid X_0=i\} \\ &= \Pr\{X_{s+t}=j \mid X_s=k\} \Pr\{X_s=k \mid X_0=i\} \quad (\text{Prop. Markov}) \\ &= \Pr\{X_t=j \mid X_0=k\} \Pr\{X_s=k \mid X_0=i\} \quad (\text{estacionaridad}) \\ &= p_{ik}(s) p_{kj}(t) \end{aligned}$$

Entonces, por la ley de probabilidades totales

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^N \Pr\{X_{s+t}=j \mid X_s=k \mid X_0=i\} = \sum_{k=0}^N p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación o relación de

Chapman Kolmogorov (en tiempo continuo).

d) Adicionalmente se supone la siguiente condición de continuidad

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$$

Esta última condición establece, junto con el hecho de que es conveniente definir $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, que en intervalos pequeños de tiempo la probabilidad de transición a un estado diferente es casi cero, o en términos prácticos, no habrá transiciones a un estado distinto en un lapso pequeño de tiempo.

Se afirma que a fin de que un conjunto de funciones $p_{ij}(t)$ definidas $\forall t \geq 0$ y $\forall i, j \in S$ sean las probabilidades estacionarias de transición de un proceso de Markov sin saltos instantáneos es necesario y suficiente que satisfagan las condiciones a), b), c) y d) anteriormente enunciadas.

[(2) p. 199].

De hecho, si se tiene una distribución inicial de estados y un conjunto de funciones $p_{ij}(t)$ que satisfacen los cuatro puntos anteriores es posible construir una Cadena de Markov, usando el Teorema de Extensión de Kolmogorov, cuyas probabilidades estacionarias de transición sean las funciones $p_{ij}(t)$.

[(1) p. 194].

$$\text{Sea } P(t) = \left[p_{ij}(t) \right]_{i,j=0}^N = \begin{vmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0N}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1N}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N0}(t) & p_{N1}(t) & \dots & p_{NN}(t) \end{vmatrix} \quad \text{la matriz}$$

de probabilidades de transición en t unidades de tiempo, $t \geq 0$. Es algo parecido a la matriz de probabilidades de transición de un

paso en una cadena de Markov en tiempo discreto, con la salvedad de tener una matriz de intensidades de transición estacionarias para cada t no negativa.

La relación Chapman-Kolmogorov se puede escribir en términos matriciales como

$$P(t+s) = P(t) \cdot P(s) \quad \forall t, s \geq 0.$$

Se observa que $P(t+s) = P(s+t)$, de donde se concluye que el producto matricial $P(t) \cdot P(s) = P(s) \cdot P(t)$ es conmutativo.

Si definimos el límite de una sucesión de matrices como la matriz formada por los límites de cada una de sus entradas, suponiendo que dichos límites existan; la condición d) se escribirá como $\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = I$ con I la matriz identidad de dimensión $(N + 1)$. Por otro lado, como se define $P(0) = I$, condición d) afirma que $P(t)$ es continua por la derecha en $t = 0$ ya que $\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = P(0)$.

Un conjunto de funciones matriciales de probabilidades estacionarias de transición de un proceso de Markov $P(t)$ que satisface a), b), c) d) es comúnmente llamado "estándar".

De hecho se deduce fácilmente el siguiente resultado:

TEOREMA 1.1

Si las matrices de probabilidades de transición de un proceso de Markov en tiempo continuo $\{P(t) : t \geq 0\}$ cumplen la condición de continuidad

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P(t) = P(0)$$

entonces $P(t)$ es continua $\forall t > 0$, i.e.

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(t+h) = P(t) \quad \forall t > 0.$$

[(4) p. 230], [(7) p. 150].

El pedir que las matrices de probabilidades estacionarias de transición $P(t)$ satisfagan la condición de continuidad d) implica un resultado más fuerte: la matriz $P(t)$ es diferenciable con derivada continua $\forall t \geq 0$, i.e. $p_{ij}(t)$ es derivable con derivada continua $\forall t \geq 0$; $i, j \in S$.

[(3) p. 135], [(4) p. 251], [(8) p. 130].

En particular un resultado más útil es que $P(t)$ tiene derivadas por la derecha en $t = 0$, lo cual se establece en el siguiente teorema:

TEOREMA 1.2.

Si $(P(t) : t \geq 0)$ es estándar, entonces $\forall i, j \in S$ los límites

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = -p'_{ii}(0) = -q_{ii} = q_i \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = p'_{ij}(0) = q_{ij} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

existen y son finitos, i.e. $0 \leq q_i, q_{ij} < \infty$.

[(4) p. 243, 246], [(7) p. 151], [(8) p. 137], [(10) p. 6.6.2]

Dado que $1 = \sum_{j=0}^N p_{ij}(h) \quad \forall i \in S, \quad \forall h > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - p_{ii}(h) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N p_{ij}(h)$$

$$\Rightarrow \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{p_{ij}(h)}{h}$$

tomando $h \rightarrow 0^+$ y por el teorema 1.2 se tiene que

$$q_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N q_{ij} < \infty \quad \forall i \in S.$$

DEFINICION 1.5. Procesos conservativos.

Un proceso de Markov en tiempo continuo en el que $\{P(t) : t \geq 0\}$ es estándar, se llama conservativo si

$$q_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} q_{ij} < \infty \quad \forall i \in S.$$

Se observa que, si el conjunto de estados S es finito, i.e. se tiene una cadena de Markov en tiempo continuo estándar, entonces el proceso es conservativo.

Ahora, las ecuaciones (1.1) del teorema 1.2 son equivalentes a las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pr\{X_{t+h}=j \mid X_t=i\} = p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h) \quad i \neq j \\ \Pr\{X_{t+h}=i \mid X_t=i\} = p_{ii}(h) = 1 - hq_i + o(h) \end{array} \right. \quad (1.2)$$

en donde $o(h)$ es tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Las ecuaciones (1.2) suministran una descripción infinitesimal del proceso en el sentido que si $h > 0$ es cercana a cero, entonces $p_{ij}(h) \approx hq_{ij}$ y $p_{ii}(h) \approx 1 - hq_i$. Esta aproximación es útil dado que si se tienen las probabilidades de transición para el intervalo pequeño de tiempo $[0, h]$, entonces por la relación de Chapman-Kolmogorov se podrían conocer aproximadamente para un intervalo de tiempo $[0, 2h]$ y repitiendo el proceso se podrían aproximar para todo tiempo t , i.e. conociendo las probabilidades de transición para tiempos pequeños se aproximan las probabilidades de transición para todo tiempo $t \geq 0$. [(2) p. 200].

$$\text{Defínase } A = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & \dots & q_{0N} \\ q_{10} & -q_1 & \dots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_{N0} & q_{N1} & \dots & -q_N \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } \|A\|_{ij} = \begin{cases} -q_i & i = j \\ q_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad \text{la matriz infinitesimal o matriz de}$$

intensidades de transición, entonces en términos matriciales, las relaciones (1.1) del teorema 1.2 se pueden escribir como

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(h) - I}{h} = A, \text{ y dado que } I = P(0), \text{ se tiene que } A \text{ es la}$$

matriz de derivadas por la derecha de $P(t)$ en $t = 0$, lo cual se denota $A = P'(0)$ en donde se entiende que la derivada de una matriz es la matriz formada por las derivadas de cada uno de sus elementos.

Se observa que $A = \|q_{ij}\|$ es una matriz de constantes que satisface $\forall i, j = 0, 1, \dots, N$

$$1) \ 0 \leq q_{ij} < \infty \quad i \neq j$$

$$\text{ii) } 0 \leq q_i = -q_{ii}$$

$$\text{iii) } \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty.$$

Además los elementos de la matriz infinitesimal tienen una interpretación probabilística para las trayectorias del proceso, es decir, es una descripción operativa alternativa de la Cadena.

Si se considera la versión separable del proceso, que para una cadena de Markov con conjunto de estados finito siempre existe, se tiene que:

a) $\Pr\{X_h = i, t \leq h \leq t+\Delta t \mid X_t = i\} = e^{-q_i h} = \exp(-q_i h)$
 i.e. la distribución del tiempo de espera en el estado i es una distribución exponencial con parámetro q_i . Además si $X_t = i$, entonces $X_h = i$ en alguna vecindad de t con probabilidad 1.

b) Si $q_i > 0$ y si $X_t = i$, entonces con probabilidad 1 habrá una primera transición a algún estado j , $j \neq i$. Dado que hubo una primera transición, la probabilidad de cambiar a j , en ese primer salto, está dada por $\frac{q_{ij}}{q_i}$, i.e. si $q_i > 0$, $\frac{q_{ij}}{q_i}$ se puede interpretar como la probabilidad condicional de que la primera transición fuera del estado i sea al estado j .
 [(4) p. 244, 246], [(8) p. 146, 147].

c) Además el tiempo de espera y la variable aleatoria que denota el estado al que ocurrió la primera transición son independientes. [(2) p. 212].

Con los resultados anteriores no sólo se tiene una interpretación de los elementos de A sino que permiten describir el desarrollo de la cadena de Markov de la siguiente manera: una típica realización del proceso que comienza en el estado i

permanece en él un tiempo aleatorio cuya distribución es exponencial con parámetro q_i , el proceso entonces salta a un estado $j \neq i$ con probabilidad $\frac{q_{ij}}{q_i}$, independientemente de cuanto tiempo estuvo en el estado i , y permanece en él un tiempo aleatorio distribuido exponencialmente con parámetro q_j y así sucesivamente.

Si denotamos ξ_0, ξ_1, \dots a los estados visitados por el proceso, $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cadena de Markov con parámetro discreto, sin considerar los tiempos entre transiciones, con probabilidades estacionarias de transición $\frac{q_{ij}}{q_i}$ $i, j \in S$ y recibe el nombre de *embedded Markov Chain* o cadena de Markov subyacente. Condicionados a la secuencia de estados ξ_0, ξ_1, \dots los tiempos de espera entre transiciones T_0, T_1, \dots son variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con parámetros $q_{\xi_0}, q_{\xi_1}, \dots$ respectivamente. De hecho esta descripción es una manera alternativa para definir una cadena de Markov en tiempo continuo como un caso particular de los llamados procesos de semi Markov en los que los tiempos entre transiciones son aleatorios. [(7) p. 110].

Por otro lado por la relación de Chapman Kolmogorov se tiene que $P(t)P(h) = P(h)P(t)$ de donde

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t) = P(t) \frac{P(h) - I}{h}$$

con lo que se concluye que existe el $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$ obteniéndose la ecuación matricial diferencial

$$P'(t) = A \cdot P(t) = P(t) \cdot A.$$

La ecuación matricial $P'(t) = A \cdot P(t)$ es la manera compacta de escribir las relaciones

$$p'_{ij} = -q_i p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik} p_{kj}(t) \quad i, j \in S$$

y análogamente $P'(t) = P(t) \cdot A$ es equivalente a que

$$p'_{ij} = -p_{ij}(t) q_j + \sum_{k \neq j} p_{ik}(t) q_{kj} \quad i, j \in S.$$

A los sistemas de ecuaciones $P'(t) = A \cdot P(t)$ y $P'(t) = P(t) \cdot A$ se les conoce respectivamente como sistema de ecuaciones hacia atrás (*backward*) y sistema de ecuaciones hacia adelante (*forward*). [(2) p. 206], [(4) p. 240], [(8) p. 143].

Desafortunadamente, en la mayoría de los casos prácticos y de interés, el proceso bajo estudio no se define en términos de las probabilidades condicionales de transición $p_{ij}(t)$, sino en términos de una descripción infinitesimal; por ejemplo, el proceso de Poisson o el proceso de nacimiento y muerte. Surge la interesante pregunta: dadas las intensidades de transición q_{ij} para cada pareja de estados i, j , ¿es posible definir un único proceso de Markov cuya descripción infinitesimal esté dada por las intensidades de transición conocidas?

Para ser más específicos supóngase conocida una matriz de constantes $A = [q_{ij}]$, $i, j = 0, 1, \dots, N$ que cumpla:

$$i) \quad 0 \leq q_{ij} < \infty \quad i \neq j$$

$$ii) \quad 0 \leq q_i = -q_{ii}$$

$$iii) \quad \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty \quad i = 0, 1, \dots, N$$

¿Es posible encontrar un proceso de Markov $(X_t; t \geq 0)$ definido en $S = \{0, 1, \dots, N\}$, cuya función matricial $P(t)$ de probabilidades estacionarias de transición sea estándar y cumpla los sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} P'(t) = A \cdot P(t) \text{ (sistema hacia atrás)} \\ P'(t) = P(t) \cdot A \text{ (sistema hacia adelante)} \end{cases} \quad (1.3)$$

sujeto a la condición inicial $P(0) = I$

La respuesta, antes de entrar en más detalles, es que existe un proceso (único, excepto por versiones, conocido como proceso minimal) que es la solución deseada y que tiene una descripción muy simple en términos probabilísticos. Observamos que si dicho proceso cumple $P(0) = I$, entonces se tendrá que $P'(0) = A$ i.e. A será la matriz de intensidades de transición del proceso. De hecho, basta poder construir el conjunto de probabilidades de transición $(P(t); t \geq 0)$ pues junto con una distribución inicial se podría construir el proceso de Markov buscado.

Que la solución al menos satisfaga, además de ser probabilidades estacionarias y estándar de transición, el sistema de ecuaciones hacia atrás es consecuencia de que $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$.
 [(8) p. 143, 145].

La solución cumplirá el sistema hacia adelante pues una condición suficiente para su validez es que el espacio de estados sea finito [(9) p. 112]. El problema es que para ciertos procesos el sistema hacia adelante no es válido. (Para más referencias con respecto a la validez de los sistemas (1.3) en nuestro caso consultar [(4) p. 240], [(6) p. 370-376], [(8) p. 145-149], [(3) p. 251].)

Por último, la solución será única como consecuencia de que el conjunto $\{q_i : i=0, 1, \dots, N\}$ es acotado. [(6) p. 374].

De hecho, la solución para los sistemas (1.3) s.a. $P(0) = I$ es

$$P(t) = \exp\{A \cdot t\} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(A)^n t^n}{n!}.$$

Como se ve, esta expresión ni es sencilla ni muestra relaciones probabilísticas. Por lo tanto, a continuación se describirán las ideas principales para la construcción de las probabilidades de transición, que está basada en la descripción operativa alternativa de la cadena como proceso de semi-Markov y tiene mucha más significancia probabilística que la relación anterior.

Recordando la interpretación de los elementos de la matriz infinitesimal A , se construye el equivalente a una posible "trayectoria" o realización típica de un "proceso de Markov" usando la información de A , i.e. si el "proceso" se encuentra en el estado i inicialmente permanece en él un tiempo aleatorio distribuido $\exp(q_i)$ y entonces hay una transición a algún estado j diferente del estado actual con probabilidad $\frac{q_{ji}}{q_i}$, donde transcurre un tiempo de espera con distribución $\exp(q_j)$, y así sucesivamente se contruye la "realización del proceso". Usando resultados muy profundos de teoría de la medida es posible determinar un conjunto de probabilidades de transición $\{P(t); t \geq 0\}$ que permitirán la construcción de un proceso de Markov con las características deseadas suponiendo conocida cierta distribución inicial.

[(4) p. 252].

Otra manera de describir el proceso minimal se deriva del hecho de poder encontrar las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$ a partir de probabilidades de transición en un número finito de pasos. Si se denota $p_{ij}(t; M)$ a la probabilidad de transición de i a j en un tiempo t y en a lo más M transiciones, entonces, siendo consistentes con el significado de los parámetros infinitesimales

que tiene la versión separable de un proceso de Markov se define

$$p_{ij}(t;0) = \begin{cases} \exp(-q_i t) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

y recursivamente

$$\begin{cases} p_{ii}(t;M) = \exp(-q_i t) + \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} \int_0^t p_{ki}(t-\tau;M-1) q_k \exp(-q_i \tau) d\tau \\ p_{ij}(t;M) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} \int_0^t p_{kj}(t-\tau;M-1) q_k \exp(-q_i \tau) d\tau \quad i \neq j \end{cases}$$

por último se prueba que $\lim_{M \rightarrow \infty} p_{ij}(t;M) = p_{ij}(t)$ son las probabilidades estacionarias de un proceso de Markov.

[(3) p. 250], [(4) p. 251], [(6) p. 373], [(8) p. 148, 149].

Hay otros aspectos de interés, como por ejemplo analizar la distribución límite cuando $t \rightarrow \infty$ o las probabilidades de absorción para algún determinado estado. En nuestro caso, será importante determinar tanto las probabilidades de absorción como el tiempo esperado de absorción.

DEFINICION 1.6. Estado absorbente de un proceso de Markov.

Sea $\{X_t = X(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Markov, se dice que el estado i es absorbente si

$$Pr\{X(\tau) = i; 0 \leq \tau < t | X(0) = i\} = 1 \quad \forall t > 0.$$

La idea de un estado absorbente es la de un estado en el cual, una vez entrando a él, no es posible efectuar una transición para salir. Dado que el tiempo de espera en el estado i antes de

la primera transición tiene una distribución exponencial con parámetro q_i , entonces que el estado i sea absorbente es equivalente a que $q_i = 0$, pues en este caso se tendría que

$$\Pr\{X(t) = i; 0 \leq t < \infty | X(0) = i\} = \exp(-qt) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Sea l un estado absorbente de una cadena de Markov en tiempo continuo y sea A_l el evento "el proceso es eventualmente absorbido en el estado l "; definamos la función $f_l(i) = \Pr\{A_l | X_0 = i\}$ con la condición de frontera $f_l(l) = 1$. Por la ley de probabilidades totales

$$\Pr\{A_l | X_0 = i\} = \sum_j \Pr\{A_l | X_{\Delta t} = j, X_0 = i\} \Pr\{X_{\Delta t} = j | X_0 = i\}.$$

Ahora, dado que se alcanzó el estado j , la probabilidad de absorción es la misma que si el estado inicial hubiera sido j , i.e.

$$\Pr\{A_l | X_{\Delta t} = j, X_0 = i\} = f_l(j).$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene el sistema de ecuaciones

$$f_l(i) = \sum_j f_l(j) p_{ij}(\Delta t) \quad i \in S = \{0, 1, \dots, N\}$$

ahora

$$p_{ij}(\Delta t) = (q_{ij}) (\Delta t) + o(\Delta t) \quad i \neq j$$

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 - (q_i) (\Delta t) + o(\Delta t)$$

de donde

$$f_l(i) = (1 - \Delta t \cdot q_i) f_l(i) + \Delta t \sum_{j \neq i} f_l(j) q_{ij} + o(\Delta t)$$

dividiendo entre Δt y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$

$$q_i f_l(i) = \sum_{j \neq i} q_{ij} f_l(j).$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{\ell}(i) = \sum_{j \neq i} f_{\ell}(j) \frac{q_{ij}}{q_i} \\ \text{con la condición } f_{\ell}(\ell) = 1 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

determinan las probabilidades de absorción en el estado ℓ dado el estado inicial $X_0 = i$ con $i=0,1,\dots,N$.

Para determinar el tiempo esperado hasta la absorción en algún estado, consideremos un estado absorbente ℓ en una cadena de Markov en tiempo continuo. Definamos T_{ℓ} el primer tiempo en el que el sistema alcanza el estado ℓ , y $w_{\ell}(i) = E[T_{\ell} | X_0 = i]$ el tiempo esperado de absorción en el estado ℓ a partir del estado i , que puede incluso ser infinito. Supondremos adicionalmente que la absorción en el estado ℓ a partir del estado i es cierta, o en términos de las probabilidades anteriormente descritas $f_{\ell}(i) = 1$.

Dado que el tiempo de espera antes de la primera transición se distribuye exponencialmente con parámetro q_i , el tiempo esperado a la primera transición será $\frac{1}{q_i}$ en donde $q_i > 0$ si $i \neq \ell$ pues la transición al estado ℓ es cierta. Supongamos que la primera transición del estado i ha ocurrido a otro estado j , lo cual sucede con probabilidad $\frac{q_{ij}}{q_i}$ entonces el tiempo esperado de absorción a ℓ a partir de j será $w_{\ell}(j)$.

Por lo tanto el tiempo esperado de absorción al estado ℓ cuando el estado inicial es i debe satisfacer las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{\ell}(i) = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} w_{\ell}(j) \frac{q_{ij}}{q_i} \\ \text{con la condición } w_{\ell}(\ell) = 0. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

§3. PROCESOS DE MUERTE GENERALIZADOS EN TIEMPO CONTINUO.

Considérese un proceso de Markov en tiempo continuo con $T = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < \infty\}$. Supóngase que el espacio de estados $S = \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1, s_0\}$ es finito y es tal que tiene definido al menos un orden parcial. Adicionalmente hay dos estados distinguidos s_N, s_0 que cumplen que $s_N \geq s_i \geq s_0 \quad \forall s_i \in S$ y para evitar trivialidades $s_N > s_0$ lo que implicará que $\#(S) \geq 2$. También supóngase que el conjunto de funciones $\{P(t) : t \geq 0\}$, matrices de probabilidades estacionarias de transición, es estándar para el proceso de Markov $\{X_t : t \geq 0\}$ en donde X_t indica el estado al tiempo t .

Si el proceso no permite transiciones de estados menores a mayores es fácil verificar que el proceso eventualmente será absorbido en el estado s_0 si el estado inicial es s_N . En este sentido el proceso va muriendo o deteriorándose irremediabilmente con el tiempo.

DEFINICION 1.7. Proceso de Muerte Generalizado en Tiempo Continuo.

Sea una cadena de Markov $\{X_t : t \geq 0\}$ con un conjunto de estados finito $S = \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1, s_0\}$ con al menos un orden parcial definido en él y tal que $s_N \geq s_i \geq s_0 \quad \forall s_i \in S$; y con probabilidades de transición estacionarias y estándares.

Al proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ lo llamamos un proceso de muerte generalizado o un proceso de deterioro si adicionalmente

- i) s_0 es el único estado absorbente,
 - ii) $p_{ij}(h) = \Pr\{X_{t+h} = s_j | X_t = s_i\} = 0$ si
 - $s_i < s_j$ ó
 - s_i, s_j no están relacionados
- $\forall h \geq 0$ con $s_i, s_j \in S$.

Para simplificar la notación, denotaremos al estado s_j como j y supondremos que los estados están numerados de tal forma que si $s_i > s_j$, entonces $i > j$.

Si $\{X_t; t \geq 0\}$ es un proceso de muerte generalizado, es inmediato que $p_{ij}(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$ si $i > j$ para al menos un estado menor a i . Si denotamos $P(t)$ a la matriz

$$P(t) = \begin{vmatrix} p_{NN}(t) & p_{N,N-1}(t) & \dots & p_{No}(t) \\ p_{N-1,N}(t) & p_{N-1,N-1}(t) & \dots & p_{No}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{oN}(t) & p_{o,N-1}(t) & \dots & p_{oo}(t) \end{vmatrix} \quad t \geq 0 \quad (1.6)$$

entonces es una matriz triangular superior, en cuyo caso se deriva que la matriz de intensidades de transición A también es triangular superior.

De hecho, la forma de la matriz A será:

$$A = \begin{vmatrix} -q_N & q_{N,N-1} & \dots & q_{N,o} \\ 0 & -q_{N-1} & \dots & q_{N-1,o} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -q_o \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

en donde

$$\begin{cases} 0 \leq q_{i,i} < \infty \\ q_{i,j} = 0 & \text{si } i, j \text{ no están relacionados} \\ 0 < \sum_{k \neq i} q_{i,k} = \sum_{k < i} q_{i,k} = q_i < \infty & \text{si } i \neq 0 \\ q_o = 0 \end{cases}$$

Recíprocamente, cualquier matriz A de la forma anteriormente descrita es la matriz de intensidades de transición de un único proceso de muerte generalizado con probabilidades de transición $P(t)$ estacionarias y estándar, tales que cumplen (1.3) pues ya se

mencionó que es posible construir una cadena de Markov cuya matriz generadora sea la matriz dada y es claro que dicho proceso debería cumplir con las condiciones de la definición 1.7.

Anteriormente, se mencionó que irremediamente el proceso sería absorbido en el estado 0. Esto se formalizará con el siguiente teorema.

TEOREMA 1.3.

Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un proceso de muerte generalizado en tiempo continuo con espacio de estados finito.

Si $f_0(i)$ denota la probabilidad de absorción en el estado 0, dado que inicialmente el proceso se encuentra en el estado i , entonces

$$f_0(i) = 1 \quad \forall i \in S$$

y el tiempo esperado de absorción es finito para cualquier estado inicial $i \in S$.

Dem. Sea $\{X_t; t \geq 0\}$ un proceso de muerte generalizado, entonces la matriz de intensidades de transición será de la forma (1.7) en donde $0 < q_i = \sum_{j < i} q_{ij} < \infty$.

Por resultados de la sección anterior, las probabilidades de absorción deben satisfacer el sistema de ecuaciones (1.4) i.e.

$$\begin{cases} f_0(i) = \sum_{j < i} f_0(j) \frac{q_{ij}}{q_i} & i = 1, 2, \dots, N \\ f_0(0) = 1 \end{cases}$$

Explicítamente el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(N) = f_0(N-1) \frac{q_{N,N-1}}{q_N} + \dots + f_0(1) \frac{q_{N1}}{q_N} + f_0(0) \frac{q_{N0}}{q_N} \\ \dots \\ f_0(i) = f_0(i-1) \frac{q_{i,i-1}}{q_i} + \dots + f_0(1) \frac{q_{i1}}{q_i} + f_0(0) \frac{q_{i0}}{q_i} \\ \dots \\ f_0(1) = f_0(0) \frac{q_{10}}{q_1} \\ f_0(0) = 1 \end{array} \right.$$

Como $q_i = \sum_{j < i} q_{ij} = q_{i0}$ y dado $f_0(0) = 1$ se sigue que $f_0(1) = 1$. Ahora, si suponemos $f_0(0) = f_0(1) = \dots = f_0(i-1) = 1$ y dado que $q_i = \sum_{j < i} q_{ij}$ se tiene que

$$f_0(i) = \sum_{j < i} f_0(j) \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{1}{q_i} \sum_{j < i} q_{ij} = 1.$$

Por lo tanto $f_0(i) = 1 \quad \forall i \in S$.

Ahora, dado que la absorción es cierta en el estado 0, si $w_0(i)$ denota el tiempo esperado de absorción en el estado 0 cuando el estado inicial es i , se debe satisfacer (1.5), i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0(i) = \frac{1}{q_i} + \sum_{j < i} w_0(j) \frac{q_{ij}}{q_i} \quad i = 1, 2, \dots, N \\ w_0(0) = 0 \end{array} \right.$$

Es evidente entonces que $w_0(1) = \frac{1}{q_1} < \infty$. Si suponemos que $w_0(0), w_0(1), \dots, w_0(i-1) < \infty$ se tendría que

$$w_0(i) = \frac{1}{q_i} + \sum_{j=0}^{i-1} w_0(j) \frac{q_{ij}}{q_i} < \infty.$$

Por lo tanto $w_0(i) < \infty \quad \forall i \in S$. □

Ejemplo 1. Procesos de Muerte Pura. [(5) p. 445].

Supongamos una población que inicialmente tiene N elementos y consideramos el proceso $\{X_t; t \geq 0\}$ el número de elementos de la población inicial que aún están con vida al tiempo t . Postulamos que:

i) El sistema sólo cambia de estado mediante transiciones a su vecino menor inmediato. Si el proceso se encuentra en el estado $j = 1, 2, \dots, N$, la única transición posible tendrá lugar al estado $j-1$. Se supone que el estado 0 es el único estado absorbente.

ii) Si al tiempo t el sistema se encuentra en el estado j , la probabilidad de que ocurra una transición al estado $j-1$ en un intervalo pequeño de tiempo $(t, t+h)$ es $\mu_j h + o(h)$, independientemente de t y con $o(h)$ tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Se supone que $0 < \mu_j < \infty$ $j = 1, 2, \dots, N$.

iii) La probabilidad de que ocurra más de una transición del estado $j > 1$ en un intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es $o(h)$ con $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Se tiene entonces que $\{X_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov cuyo espacio de estados $S = \{N, N-1, \dots, 0\}$ es ordenado totalmente y con probabilidades estacionarias de transición

$$\begin{cases} p_{ij}(h) = 0 & \text{si } i < j \\ p_{i, i-1}(h) = h\mu_i + o(h) \\ p_{ij}(h) = o(h) & \text{si } j < i-1 \\ p_{ii}(h) = 1 - h\mu_i + o(h) \end{cases}$$

de donde se concluye que

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = \mu_i \\ q_{i,j} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \begin{cases} \mu_i & j = i-1 \\ 0 & j \neq i-1, i \end{cases} \end{array} \right.$$

en cuyo caso la matriz de intensidades de transición está dada por

$$A = \begin{vmatrix} -\mu_N & \mu_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_{N-1} & \mu_{N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{N-2} & \mu_{N-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\mu_1 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

y $w_0(i)$, el tiempo esperado de absorción en el estado 0 cuando $X_0 = i$, cumple

$$\begin{cases} w_0(i) = \frac{1}{\mu_i} + w_0(i-1) & i = 1, 2, \dots, N \\ w_0(0) = 0 \end{cases}$$

de donde $w_0(i) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{\mu_j}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Ejemplo 2.

Supongamos un sistema con N componentes distinguibles en operación, los cuales se supone fallan aleatoriamente. Sea $S = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\}) = \{A: A \subseteq \{1, 2, \dots, N\}\}$ i.e. el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, 2, \dots, N\}$; cada elemento de S representará los posibles conjuntos de elementos en operación o que aún no fallan; claramente S es finito pues $\#(S) = 2^N$. En S se establece un orden parcial en términos de contenciones: dados $E_i, E_j \in S$, $E_j \subseteq E_i \Leftrightarrow E_i \supseteq E_j$. Notamos que se satisface que $\forall E_i \in S$ $\{1, 2, \dots, N\} \supseteq E_i \supseteq \emptyset$.

Sea X_t , $t \geq 0$ la variable aleatoria que denota el estado del sistema al tiempo t . Convenimos en etiquetar los estados de manera que si $E_j \subset E_i$ entonces $j < i$, se observa que $j < i$ no implica en general que $E_j \subset E_i$; llamaremos indistintamente al estado E_j estado j y el conjunto vacío es el estado 0.

Se postulan las siguientes leyes de movimiento:

i) Si el proceso o sistema se encuentra en algún estado en un tiempo determinado, las únicas transiciones posibles deberán tener lugar a un estado menor que el estado dado. Formalmente, si el sistema se encuentra en el estado E_i al tiempo t , las únicas transiciones posibles son al conjunto $\{E_j; E_j \subset E_i\}$; se supone que el único estado absorbente es 0. En particular, es factible ir del estado $\{1, 2, \dots, N\}$ a cualquier otro estado.

ii) Sean i, j dos estados tales que $E_j \subset E_i$ i.e. $E_j \subseteq E_i$. Si al tiempo t el sistema se encuentra en el estado i , la probabilidad de transición al estado j en el intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es $hq_{ij} + o(h)$ independientemente de t y de los estados anteriores a i . $o(h)$ es una función tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Entonces es claro que $\{X_t; t \geq 0\}$ es un proceso de Markov con espacio de estados $S = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, N\})$ ordenado parcialmente en términos de contenciones con probabilidades estacionarias de transición

$$\begin{cases} p_{ij}(h) = 0 & \text{si } E_i \text{ no es subconjunto de } E_j \\ p_{ij}(h) = hq_{ij} + o(h) & \text{si } E_j \subset E_i \\ p_{ii}(h) = 1 - h \sum_{j < i} q_{ij} + o(h) & \end{cases}$$

Se observa que $\sum_{j < i} q_{ij}$ no es afectada por aquellos estados en los que se tenga que $j < i$ pero que E_j no sea subconjunto de E_i , pues en ese caso $q_{ij} = 0$.

Las intensidades de transición para el proceso son:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } E_j \text{ no es subconjunto de } E_i \\ \geq 0 & \text{si } E_j \subset E_i \end{cases} \\ 0 < q_i = \sum_{j < i} q_{ij} < \infty \quad i > 0 \\ q_0 = 0 \end{array} \right.$$

REFERENCIAS

1. Ash, R.B. & Gardner, M.F.; *Topics in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.
2. Breiman, L.; *Probability and Stochastic Processes with a view toward applications*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.
3. Chung, K.L.; *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, Springer Verlag, New York, 1967.
4. Doob, J.L.; *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953.
5. Feller, W.; *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones (Vol. I)*, Limusa, México, 1963.
6. Feller, W.; *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones (Vol. II)*, Limusa, México, 1978.
7. Karlin, G. & Taylor, H.M.; *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.
8. Karlin, G. & Taylor, H.M.; *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.
9. Ross, S.; *Applied Probability Models with optimization applications*, Holden Day, San Francisco, 1970.
10. Taylor, H.M. & Karlin, G.; *An Introduction to Stochastic Modeling*, third draft, 1984.

CAPITULO 2

PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION
Y MODELOS DE REEMPLAZO OPTIMO.

2.1. INTRODUCCION.

En este capítulo hablaremos de procesos estocásticos que modelan la vida de un sistema continuamente, i.e., se conoce el estado del proceso para cada tiempo $t \geq 0$; una vez determinado (o conocido) el estado del proceso, se toma una acción que modificará las probabilidades de transición del sistema. Supóngase que el proceso tiene cierta estructura de ingresos y costos (por ejemplo, se incurre en un costo $c(i,a)$ si el sistema se encuentra en el estado i y se efectúa la acción a), entonces sería deseable tomar las acciones adecuadas de tal manera que se "optimicen" las consecuencias económicas que ocasione la vida del proceso.

Con el fin de elegir las acciones adecuadas se seguirán los lineamientos de una determinada "política" o regla para tomar decisiones, la cuál sea la "política óptima" de acuerdo a un determinado criterio que involucre ingresos y costos.

Una clase importante de los modelos de decisión (secuencial) anteriormente mencionados, es la de los llamados modelos de reemplazo óptimo, que describen sistemas que se deterioran en el tiempo pero pueden continuar operando aunque algunas de sus componentes hayan fallado y que tienen como conjunto de posibles acciones para cada estado: i) el reemplazo del sistema por uno nuevo estadísticamente idéntico, o ii) el continuar operando con el mismo sistema.

§2. PROCESOS MARKOVIANOS DE DECISION EN TIEMPO CONTINUO.

Considérese $T = [0, \infty)$ y $S = \{0, 1, \dots, N\}$ el conjunto de posibles estados del proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$. Considérese así mismo, un conjunto finito de posibles acciones $A = \{a_0, \dots, a_M\}$ y sea $\{Y_t : t \in T\}$ el proceso estocástico que indicará las acciones a tomar para cada $t \in T$.

El vector estocástico $\{(X_t, Y_t) : t \geq 0\}$ describe la evolución del sistema indicando, para cada tiempo, el estado y la acción a tomar.

Sea $H_t^- = \{(X_s, Y_s) : s \in [0, t)\}$ la historia del proceso hasta antes del tiempo $t > 0$. Supóngase conocidas las probabilidades de transición

$$p_{ij}(t, h, a, H_t^-) = \Pr\{X_{t+h} = j \mid X_t = i, Y_t = a, H_t^-\} \quad \forall t, h \geq 0.$$

Adicionalmente supondremos que las probabilidades anteriores son independientes de la historia del proceso y que son estacionarias, estas son denotadas como:

$$\begin{aligned} p_{ij}(t, h, a, H_t^-) &= p_{ij}(h, a) \\ &= \Pr\{X_{t+h} = j \mid X_t = i, Y_t = a\} \quad i, j \in S, a \in A, h, t \geq 0 \end{aligned}$$

e indican que las probabilidades de transición dependen del estado y decisión presentes (y que son independientes de la historia).

Entenderemos a una política como una regla para tomar acciones. En general no se debería imponer restricciones para la determinación de políticas excepto que una política debería ser considerada válida si a lo más contempla la historia del proceso para tomar una decisión. Incluso las acciones a tomar de acuerdo a cierta política podrían ser aleatorias en el sentido de elegirías con cierta distribución de probabilidad, es decir, la acción a tomar cuando el proceso se encuentra en determinado estado es elegida por medio de un mecanismo aleatorio, siendo este mecanismo función de la historia del proceso.

Supóngase que dada una política es posible conocer

$$\Pr\{Y_t=a|X_t=i, H_t^-\} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

i.e. la probabilidad de tomar una acción al tiempo t puede ser dependiente del estado actual i y de la historia del proceso hasta antes del momento presente H_t^- .

Si la política es tal que $\forall t \geq 0$, (2.1) no es función de H_t^- , la política es llamada markoviana o desmemoriada pues

$$\Pr\{Y_t=a|X_t=i, H_t^-\} = \Pr\{Y_t=a|X_t=i\} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.2)$$

y en este caso es posible demostrar que el proceso estocástico $\{X_t; t \geq 0\}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo con probabilidades de transición (no estacionarias posiblemente)

$$\Pr\{X_{t+h}=j|X_t=i\} = \sum_{a \in A} \Pr\{X_{t+h}=j|X_t=i, Y_t=a\} \cdot \Pr\{Y_t=a|X_t=i\}.$$

Si una política markoviana además es estacionaria, i.e. invariante en el tiempo, entonces (2.1) sólo es función del estado actual teniéndose

$$\Pr\{Y_t=a|X_t=i, H_t^-\} = \Pr\{Y_s=a|X_s=i\} \quad \forall t, s \geq 0 \quad (2.3)$$

adicionalmente $\{X_t; t \in T\}$ sería una cadena de Markov en tiempo continuo con probabilidades estacionarias de transición

$$\begin{aligned}
 p_{ij}(t) &= \sum_{a \in A} \Pr\{X_t=j | X_0=i, Y_0=a\} \cdot \Pr\{Y_0=a | X_0=i\} \\
 &= \sum_{a \in A} \Pr\{X_t=j | X_0=i, Y_0=a\} d_i(a)
 \end{aligned}$$

en donde $d_i(a) = \Pr\{Y_0=a | X_0=i\}$.

Se podría definir una política determinista como una política markoviana y estacionaria en la cual

$$d_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{para una } \acute{u}\text{nica } a = a(i) \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de hecho la política sería una función del conjunto de estados S en el conjunto de las acciones A ya que en cada estado siempre se aplica una única decisión. La importancia práctica de las políticas deterministas radica en su fácil implementación debido precisamente a su carácter funcional⁴ [(2) p. 511, (8) p. 2031.

§3. EL CRITERIO DE OPTIMALIDAD: MAXIMIZAR LA GANANCIA NETA PROMEDIO ESPERADA POR UNIDAD DE TIEMPO.

El criterio de optimalidad que se establecerá a continuación consiste en maximizar la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo (*long run average revenue per unit time*) y está íntimamente relacionado con los llamados modelos de reemplazo o procesos markovianos de decisión de dos acciones [(7) p. 301]. Para poder definirlo es necesario enunciar ciertos resultados relativos a la teoría de renovación.

⁴Bajo una política determinista el proceso es "bien portado" (no tiene un número infinito de saltos en intervalos finitos de tiempo) si $\{ \Pr\{X_t=j | X_0=i, Y_0=a\}, t \geq 0 \}$ son probabilidades de transición estándares.

Un proceso de renovación es un proceso estocástico que al evolucionar en el tiempo es afectado por renovaciones, i.e. existe un tiempo en el cual el proceso comienza de nuevo (o es reestablecido a un estado inicial determinado). La teoría de renovación es el estudio de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas que representan los tiempos entre renovaciones. El objeto de esta sección es establecer a la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo como un cociente de valores esperados: la ganancia neta esperada en cada renovación entre el tiempo esperado entre renovaciones; dado que el cociente es función de la política usada, se buscará una política que haga máximo el valor de dicho cociente.

DEFINICION 2.1. Procesos de renovación.

Un proceso de renovación $\{N(t): t \geq 0\}$ es un proceso estocástico en los enteros no negativos que registra o cuenta las ocurrencias sucesivas de un evento durante el intervalo de tiempo $(0, t]$, en donde los tiempos entre eventos consecutivos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) positivas $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Generalmente, cuando se modela la vida de unidades en servicio, T_k representa el tiempo de vida de la k -ésima unidad en servicio y $N(t)$ es el número de unidades que han servido hasta el tiempo t .

Si F denota la distribución de T_k , se debe tener que

$$\begin{cases} F(x) = \Pr\{T_k \leq x\} & k = 1, 2, \dots \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Denotamos $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$; al tiempo de espera para la ocurrencia del n ésimos evento. Entonces se tiene que

$N(t)$ = # de renovaciones al tiempo t
 = número de índices n para los cuales $0 < S_n \leq t$.

El principal objetivo de la teoría de renovación es el de derivar propiedades de ciertas funcionales asociadas con $\{N(t): t \geq 0\}$ y $\{S_n: n = 0, 1, \dots\}$ a partir de la distribución F de tiempos de interocurrencia. En particular será de mucha importancia la llamada función de renovación $M(t)$ o número esperado de renovaciones en intervalos de la forma $(0, t]$.

$$\begin{aligned} M(t) = E[N(t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr\{N(t)=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N(t) \geq k\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{S_k \leq t\} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) \end{aligned}$$

en donde $F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-y) dF(y)$ es la convolución de las n primeras variables T_i . [(3) p. 167], [(11) p. 7.5.11].

La función de renovación $M(t) = E[N(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ con $F_k(t) = \Pr\{S_k \leq t\} = \Pr\{\sum_{i=1}^k T_i \leq t\}$ tiene ciertas propiedades, por ejemplo $M(t)$ es finita $\forall t > 0$. [(3) p. 182].

Existe un resultado conocido como teorema elemental de renovación que establece que toda función de renovación es asintóticamente lineal.

TEOREMA 2.1.

Sea $\{N(t): t \geq 0\}$ un proceso de renovación con tiempos de interocurrencia $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $\mu = E[T_i] < \infty$. Entonces con probabilidad 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

[(3) p. 100], [(5) p. 40].

El teorema elemental de renovación a simple vista parece obvio pues $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t}$ es el número esperado de renovaciones (o reemplazos) por unidad de tiempo a largo plazo que debería ser igual al recíproco de la duración media de una renovación.

Consideremos un proceso de renovación con tiempos entre ocurrencias $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ y asociada a cada intervalo de renovación existe una variable aleatoria R_i que será interpretada como el costo o ganancia asociada al i -ésimo ciclo de renovación (supondremos que $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ son idénticamente distribuidas). Aunque T_i, R_i pueden ser dependientes, supondremos que las parejas $(T_1, R_1), (T_2, R_2), \dots$ son independientes.

Sea $W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} R_k$ los costos o ganancias acumulados que se tienen hasta el tiempo t (suponiendo que las transacciones se hacen al inicio de cada ciclo). Sea $A(t) = E[W(t)]$, condicionando sobre $T_1 = x$

$$E[W(t) | T_1 = x] = \begin{cases} E[R_1] & t < x \\ E[R_1] + E[W(t-x)] & t \geq x \end{cases}$$

y aplicando la ley de probabilidades totales

$$\begin{aligned} A(t) &= E[W(t)] = \int_0^{\infty} E[W(t) | T_1] dF(x) \\ &= \int_0^t (E[R_1] + E[W(t-x)]) dF(x) + \int_t^{\infty} E[R_1] dF(x) \\ &= E[R_1] \int_0^{\infty} dF(x) + \int_0^t E[W(t-x)] dF(x) \\ &= E[R_1] + \int_0^t A(t-x) dF(x), \end{aligned}$$

i.e. se tiene la siguiente ecuación funcional

$$A(t) = E[R_1] + \int_0^t A(t-x) dF(x). \quad (2.4)$$

Si se supone $|E[R_1]| < \infty$, la única función solución de (2.4) es [(3) p. 185]

$$\begin{aligned} A(t) &= E[R_1] + \int_0^t E[R_1] dM(x) \\ &= E[R_1] + E[R_1] \cdot M(t) = E[R_1] \cdot (1 + M(t)) \end{aligned}$$

donde $M(t)$ es la función de renovación.

Es decir, si pensamos a R_k como la ganancia neta del k -ésimo ciclo de renovación, la ganancia neta esperada al tiempo t está dada por

$$E[W(t)] = E[R_1] \cdot (1 + M(t)),$$

ahora $\frac{E[W(t)]}{t}$ es la ganancia neta esperada por unidad de tiempo hasta el tiempo t , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[W(t)]}{t}$$

es la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo, y por el teorema elemental de renovación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[W(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ E[R_1] + E[R_1] \cdot M(t) \right\} = \frac{E[R_1]}{\mu} = \frac{E[R_1]}{E[T_1]}$$

lo que justifica que la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo es el cociente de la ganancia neta esperada por periodo de renovación entre la longitud esperada del periodo de renovación. [(3) p. 203], [(5) p. 52], [(11) p. 7.5.01].

Sea π una política válida, es claro entonces que dado un modelo de reemplazo, la elección de acciones debería afectar la ganancia neta y la duración de los intervalos de renovación. Por un argumento similar al anterior, la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo para la política π debería ser el cociente de la ganancia neta esperada en un ciclo de renovación cuando se usa la política π entre la longitud esperada del ciclo

de renovación bajo la política π . Sea

$$\varphi_{\pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[W_{\pi}(t)] = \frac{E[R_{\pi}]}{E[T_{\pi}]}$$

la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo asociada a la política π (donde los subíndices indican la dependencia de dicha política).

Lo que vamos a hacer en este trabajo es analizar la política óptima π^* para este criterio φ_{π} , i.e. la política π^* tal que

$$\varphi_{\pi^*} = \text{Max}_{\pi} \varphi_{\pi}$$

donde π es una política válida.

54. MODELOS DE REEMPLAZO OPTIMO.

Una subclase muy importante de los procesos markovianos de decisión es aquella en la que el espacio de acciones sólo contempla dos posibles alternativas para cualquier estado, en cualquier tiempo: (i) el sistema se reestablece con uno nuevo estadísticamente idéntico ó (ii) continuar la operación con el mismo sistema. En general estos modelos contemplan la noción de falla total en un estado en el cuál la única opción posible es el reemplazo.

DEFINICION 2.2. Modelos de reemplazo óptimo.

Un modelo de reemplazo óptimo tiene la siguiente estructura:

1) Un proceso estocástico en tiempo continuo $\{X_t; t \geq 0\}$ sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y con espacio de estados (S, \mathcal{S})

2) Una variable aleatoria no negativa $\zeta \leq \infty$ que indica el tiempo de fallo del sistema, i.e. el tiempo en el cual se alcanza un estado en donde el reemplazo es obligatorio.

- 3) Una historia observable $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ donde \mathcal{F}_t es la historia hasta el tiempo t
- 4) Una estructura de costos
- 5) Una clase de tiempos de reemplazo (las políticas bajo consideración) contenida en la clase de todos los tiempos de Markov $T \leq \zeta$.

En (1) se establece el proceso de interés $\{X_t; t \geq 0\}$ que indica el estado del sistema al tiempo t (aunque en general indicará el estado de conocimiento sobre el sistema al tiempo t). [(12) p. 748].

En (2), denotando \emptyset al estado en el cual el reemplazo es obligatorio, es claro que si no hay reemplazamientos se tiene

$$X(t) = \emptyset \Leftrightarrow t \geq \zeta \quad \therefore \quad \zeta = \inf\{t \geq 0 : X(t) = \emptyset\}.$$

En (3), se puede interpretar la historia al tiempo t como $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ donde $\sigma\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$ denota la σ -álgebra generada por el conjunto $\{X_s; 0 \leq s \leq t\}$.

En (4), se suele suponer que el sistema genera ingresos mientras opera y que existen costos asociados a cada estado si hay reemplazamiento en dicho estado. Dado que la idea es que los ingresos sean dependientes del estado del sistema y del tiempo de estadía en el mismo, supondremos que existe una tasa de ingresos por unidad de tiempo $i(s)$ si el proceso se encuentra en el estado s . También supondremos conocidos los costos de reemplazamiento $c(s)$ si el sistema se encuentra en el estado s y se decide reemplazar; así con esta notación, $c(\emptyset)$ es el costo de reemplazo cuando el sistema está en el estado de reemplazo obligatorio (que podría incluir una penalización por falla en servicio al no aplicar reemplazo preventivo).

En (5), se establece que las políticas bajo consideración están comprendidas en los llamados tiempos de paro o tiempos de Markov.

DEFINICION 2.3. Tiempos de Markov o Tiempos de Paro.

Una variable aleatoria T , para la cual $0 \leq T$ es un tiempo de Markov si $\forall t \geq 0$, el evento $\{T \leq t\}$ pertenece a $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ la σ -álgebra generada por $\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$.

Observamos que como ζ es el tiempo máximo de reemplazo, los tiempos de Markov de interés son tales que $T \leq \zeta$.

Dado que es posible pensar que \mathcal{F}_t es la información disponible o la historia hasta el tiempo t y si T es un tiempo de Markov entonces los eventos $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ con $0 \leq t \leq \zeta$, de donde los eventos $\{T \leq t\}$ son factibles de decisión en el sentido que es posible saber para cada tiempo t si han ocurrido o no.

Es claro con lo anterior que si T es un tiempo de Markov, la política "reemplazar al tiempo $T \leq \zeta$ " define una política de reemplazamiento tal que para cada $t \in [0, \zeta]$ se puede saber si se ha reemplazado o no.

Si R es un subconjunto del conjunto de estados, la variable aleatoria $T(R) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in R\}$ resulta ser un tiempo de Markov [(10) p. 1334] y es conocida como el *hitting time* o tiempo de llegada al conjunto R . Ahora, cualquier política determinista queda especificada por el subconjunto \mathcal{R} de S en el cual hay que reemplazar, entonces una política que reemplace en el conjunto \mathcal{R} queda determinada por $T(\mathcal{R})$, i.e. los tiempos de Markov contienen todas las políticas de reemplazo deterministas razonables.

Para modelos de reemplazo óptimo, debido a que el conjunto de acciones consta de sólo dos elementos, interpretar a los tiempos de Markov $T \leq \zeta$ como "reemplazar al tiempo T " nos proporciona todas aquellas políticas "naturales y de significancia práctica".

Consideremos una política de reemplazo válida, i.e. un tiempo de Markov $T \leq \zeta$, entonces el costo de reemplazamiento está dado por $c(X(T))$ y el ingreso acumulado por $I(T) = \int_0^T i(X(s)) ds$. Dado que el sistema comienza nuevo y opera hasta una falla total o un reemplazamiento preventivo (determinado por T) y en ese momento es reemplazado por un sistema nuevo estadísticamente idéntico, entonces por los resultados de la sección anterior, la ganancia neta promedio esperada por unidad de tiempo para el tiempo de Markov T está dada por²

$$\varphi(T) = \frac{E[I(T) - c(X(T))]}{E[T]} \quad (2.5)$$

El problema se reduce a encontrar $T^* \leq \zeta$, un tiempo de Markov, tal que

$$\varphi(T^*) = \max_T \varphi(T).$$

Taylor [(10) p. 1341] demostró la existencia de políticas óptimas para el problema anterior y estas resultan ser tiempos de llegadas (i.e. políticas deterministas).

De gran utilidad será el siguiente teorema, pues proporciona una manera alternativa de expresar al tiempo de Markov óptimo.

²En general, la clase de tiempos de reemplazo debería estar limitada a un subconjunto de la clase de todos los tiempos de Markov $T \leq \zeta$ con el fin de evitar indeterminaciones en (2.5).

TEOREMA 2.2.

Sea $T = \{T : T \text{ es un tiempo de Markov, } 0 < E[T] < \infty\}$ el conjunto de tiempos de Markov finitos, entonces

$$T^* \text{ maximiza } \varphi(T) = \frac{E[I(T) - c(X(T))]}{E[T]} \text{ sobre } T$$

si y sólo si

T^* maximiza $\theta(T, r^*) = E[I(T) - c(X(T)) - r^* \cdot T]$ sobre T para algún valor r^* tal que $\theta(T^*, r^*) = 0$.

[(4) p. 11], [(7) p. 302], [(10) p. 1341].

Dem.

↔) Sea T^* que maximiza $\theta(T, r^*)$ sobre T en donde r^* es una constante tal que $\theta(T^*, r^*) = 0$, $\therefore r^* = \varphi(T^*)$.

Pero $0 = \theta(T^*, r^*) \geq \theta(T, r^*)$ sobre T , i.e.

$$0 \geq E[I(T) - c(X(T)) - r^* \cdot T] \text{ sobre } T$$

$$\Leftrightarrow r^* E[T] \geq E[I(T) - c(X(T))] \text{ sobre } T$$

$$\Leftrightarrow r^* \geq \frac{E[I(T) - c(X(T))]}{E[T]} = \varphi(T) \text{ sobre } T$$

es decir,

$$\varphi(T^*) = r^* \geq \varphi(T) \text{ sobre } T.$$

→) Sea T^* que maximiza $\varphi(T)$ sobre T . Defínase $r^* = \varphi(T^*)$; entonces r^* es un valor constante tal que $\theta(T^*, r^*) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Además } \theta(T, r^*) &= (\varphi(T) - r^*) E[T] \\ &= (\varphi(T) - \varphi(T^*)) E[T] \end{aligned}$$

pero $\varphi(T) \leq \varphi(T^*)$ sobre T , así que

$$\theta(T, r^*) = (\varphi(T) - \varphi(T^*)) \cdot E[T] \leq 0 = \theta(T^*, r^*). \quad \square$$

Supongamos que existe una función $g: S \rightarrow \mathbb{R}$ que denota la tasa diferencial de costos de reemplazamiento con la propiedad que

$$E[c(X(T))] = E\left[\int_0^T g(X(s)) ds\right] + c$$

en donde T es un tiempo de reemplazamiento válido y $c = c(X(0)) > 0$ (para evitar trivialidades), entonces es posible escribir

$$\begin{cases} \theta(T, \gamma) = E[I(T) - c(X(T)) - \gamma] \\ \quad = E\left[\int_0^T (i(X(s)) - g(X(s)) - \gamma) ds\right] - c \end{cases} \quad (2.6)$$

Dado el conjunto de estados S , es posible ordenar al menos parcialmente, a subconjuntos de elementos de S , siendo este orden inducido por las componentes que aún están en operación (si los elementos de S son indistinguibles el orden establecido es en términos del número de componentes que aún no han fallado; si por el contrario los elementos de S son distinguibles el orden será en términos de contenciones como en el ejemplo 2 de la sección §3 del capítulo I, Procesos de Muerte Generalizados en Tiempo Continuo). De ahora en adelante supondremos que los elementos de S presentan ese orden natural anteriormente citado.

Si γ es fija y la función $i(s) - g(s)$, $s \in S$ es no-decreciente en S , parece natural que hay que continuar operando mientras el integrando en (2.6) sea positivo y reemplazar en el momento en que sea negativo. Dado que $i(s) - g(s)$, $s \in S$ se puede ver como la "tasa de ganancia neta" por unidad de tiempo cuando el proceso se encuentra en el estado s , suponer que $i(s) - g(s)$ es no-decreciente es suponer que "la tasa de ganancia neta" es menor en estados más pequeños (más deteriorados) que en estados más grandes (menos deteriorados). El que $i(s) - g(s)$ sea positivo indica que aún se puede continuar operando y recibir ganancias por lo cual no es conveniente aún reemplazar.

DEFINICION 2.4. Clases Decrecientes.

Una clase de estados $\mathcal{X} \subseteq S$ es llamada decreciente si cada vez que $A \in \mathcal{X}$ y $B \leq A$ entonces $B \in \mathcal{X}$ con $A, B \in S$.

Para el modelo de reemplazo hasta ahora establecido se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.3.

Si se tiene un modelo de reemplazo para el cual $i(s) - g(s)$ es no-decreciente en S (i.e. si $s_1 \leq s_2$, $s_1, s_2 \in S$ se tiene $i(s_1) - g(s_1) \leq i(s_2) - g(s_2)$) entonces para toda γ

i.) $\mathcal{X}^*(\gamma) = \{A \in S : i(A) - g(A) - \gamma < 0\}$ es una clase decreciente.

$$\begin{aligned} \text{ii.) } T^* &= \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{X}^*(\gamma)\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : i(X(t)) - g(X(t)) - \gamma < 0\} \\ &= \sup\{t \geq 0 : i(X(t)) - g(X(t)) - \gamma \geq 0\} \end{aligned}$$

es tal que $\theta(T^*, \gamma) \geq \theta(T, \gamma)$ para todo tiempo de Markov T . Si además existe un valor γ^* tal que $\theta(T^*, \gamma^*) = 0$ entonces T^* es el tiempo de reemplazo óptimo. (De hecho γ^* es el valor del que se hace referencia en el teorema 2.2, i.e. $\gamma^* = \max_T \phi(T)$).

Dem.

i.) Dado que el proceso siempre se mueve a estados menores (más deteriorados) en ausencia de reemplazo y de que $i(s) - g(s)$ es no-decreciente en S , se tiene que:
si $A \in \mathcal{X}^*(\gamma)$ y $B \leq A$ entonces

$$\begin{aligned} i(A) - g(A) - \gamma &< 0 \\ \text{e } i(B) - g(B) &\leq i(A) - g(A) \\ \therefore i(B) - g(B) - \gamma &< 0 \\ \text{i.e. } B &\in \mathcal{X}^*(\gamma). \end{aligned}$$

ii.) Dado $T^* = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in \mathcal{X}^*(\gamma)\}$ entonces

a) si $0 \leq \tau < T^*$ se tiene que $i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma \geq 0$ y debido a que sin reemplazo el proceso se mueve a estados menores y por la monotanía de $i(\cdot) - g(\cdot)$ se tiene que

b) si $\tau > T^*$ $i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma < 0$

$\therefore T^* = \sup\{t \geq 0 : i(X(t)) - g(X(t)) - \gamma \geq 0\}$

(si los conjuntos $\{t \geq 0 : i(X(t)) - g(X(t)) - \gamma < 0\}$ y $\{t \geq 0 : i(X(t)) - g(X(t)) - \gamma \geq 0\}$ no son vacíos).

Entonces, para cualquier otra política válida (o tiempo de Markov) T

$$\theta(T^*, \gamma) - \theta(T, \gamma)$$

$$= E \left[\int_0^{T^*} (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau - \right.$$

$$\left. \int_0^T (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \right]$$

$$= E \left[\left\{ \int_0^{T^*} (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau - \right. \right.$$

$$\left. \int_0^T (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \right\} \\ (1(T < T^*) + 1(T \geq T^*)) \right]$$

$$= E \left[\int_0^{T^*} (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T < T^*) \right.$$

$$+ \int_0^{T^*} (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T \geq T^*)$$

$$- \int_0^T (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T < T^*)$$

$$\left. - \int_0^T (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T \geq T^*) \right]$$

$$= E \left[\int_0^{T^*} (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T < T^*) \right.$$

$$\left. - \int_0^T (i(X(\tau)) - g(X(\tau)) - \gamma) d\tau \cdot 1(T \geq T^*) \right] \geq 0$$

donde la última desigualdad se sigue de a) y b) y de que la función indicadora $i(\cdot)$ es no negativa.

Entonces para todo tiempo de Markov T , $\theta(T^*, \gamma) \geq \theta(T, \gamma)$. Si además, γ^* es el único valor que hace $\theta(T^*, \gamma^*) = 0$, entonces del teorema anterior (si $T^* \in T$)

$$\rho(T^*) = \text{Max}_{T \in T} \rho(T).$$

□

Observamos que bajo las condiciones anteriormente citadas, T^* es el tiempo de llegada (*hitting time*) a la clase de estados $\mathcal{X}^* = \{s \in S : i(s) - g(s) - \gamma^* < 0\}$ y por lo tanto la política óptima es determinista.

La existencia de políticas óptimas para modelos de reemplazo con diversos criterios de optimalidad (incluyendo el nuestro) fue demostrada por Taylor [(10)] y resultaron ser *hitting times*. Ross [(7)] demuestra que los *hitting times* son óptimos usando ciertas condiciones de monotonía en los estados (clases decrecientes) y operadores infinitesimales (que se interpretan como ganancia infinitesimal futura). Bergman [(1)] demostró la existencia de tiempos de reemplazo óptimo con la suposición de monotonía usual en $i(s) - g(s) - \gamma^*$ o en general con una tasa monotónica dependiente de estados y además afirma que no es necesaria la suposición de Markov (su criterio resulta estar relacionado con el de Ross).

Sin embargo, no había manera sistemática para calcular soluciones explícitas para modelos de reemplazo óptimo fuera de algunos casos muy simples, pues los algoritmos con los que se contaba se basaban en los teoremas de existencia de políticas óptimas y eran computacionalmente imprácticos.

REFERENCIAS

- 1.- Bergman, B., "Optimal replacement under a general failure model", *Advances in Applied Probability*, 10. 431-451, 1978.
- 2.- Jorgenson, D.W.; McCall, J.J.; Radner, R., *Optimal Replacement Policy*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- 3.- Karlin, G. & Taylor, H.M., *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.
- 4.- Rodriguez, B.E., "Optimal replacement for N component systems", M.S. thesis, Cornell University, Ithaca, New York, 1984.
- 5.- Ross, S., *Applied Probability Models with Optimization applications*, Holden Day, San Francisco, 1970.
- 6.- Ross, S., "Arbitrary state markovian decision processes", *Ann. Math. Stat.*, 39. 2118-2122, 1968.
- 7.- Ross, S., "Infinitesimal look-ahead stopping rules", *Ann. Math. Stat.*, 42. 297-303, 1971.
- 8.- Serfozo, R., "Monotone optimal policies for Markov decision processes", *Mathematical Programming Study*, 6, 202-215, 1976.
- 9.- Taylor, H.M., "Optimal replacement under additive damage and other failure models", *Naval Research Logistic Quarterly*, 22, 1-17, 1975.
- 10.- Taylor, H.M., "Optimal stopping in a Markov processes", *Ann. Math. Stat.*, 39, 1333-1344, 1968.
- 11.- Taylor, H.M. & Karlin, G., *An Introduction to Stochastic Modelling*, third draft, 1984.
- 12.- Taylor, H.M. & Rodriguez, B.E., "Optimal replacement for fault tolerant systems", *Naval Research Logistic Quarterly*, 33, 747-757, 1986.

CAPITULO 3

UN ALGORITMO PARA DETERMINADOS
PROBLEMAS DE REEMPLAZO OPTIMO.

51. DESCRIPCION DEL MODELO.

Sea $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un conjunto finito que identificaremos como el conjunto de estados. Supongamos que existe una relación de orden (al menos parcial) en los elementos de S tal que

$$s_n \geq s_j \geq s_0 \quad \forall s_j \in S \text{ pero } s_n > s_0.$$

Además si $s_i > s_j$, entonces $i > j$.

Supóngase conocida una matriz $A = \|q_{ij}\|$ de constantes con las características siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq q_{ij} < \infty & s_i > s_j \\ 0 < q_i = q_{ii} - \sum_{k < i} q_{ik} & s_i \neq s_0 \\ q_{00} = 0 & \\ q_{ij} = 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right.$$

entonces con los resultados de §3 en el capítulo I es posible construir un (único) proceso de muerte generalizado $(X_t; t \geq 0)$ con conjunto de estados S y cuya matriz infinitesimal es A . Se tiene entonces que s_0 es el único estado absorbente y que la probabilidad de absorción desde cualquier estado inicial es 1, siendo el tiempo esperado de absorción finito. La descripción infinitesimal de las probabilidades de transición será:

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_{ij}(h) = h \cdot q_{ij} + o(h) & s_i > s_j \\ p_{ii}(h) = 1 - h \sum_{k < i} q_{ik} + o(h) & s_i \leq s_0 \\ p_{ij}(h) = 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right.$$

Supongamos que el proceso comienza en s_N , es decir $X_0 = s_N$ con probabilidad uno. Sea $\zeta = \inf\{t \geq 0 : X_t = s_0\}$ la variable aleatoria que denota el tiempo de absorción al estado s_0 . Adicionalmente se considerará un conjunto de sólo dos acciones: (i) reemplazar o llevar el proceso al estado s_N , (ii) dejar evolucionar el proceso. Pensaremos que s_0 es un estado en el cual el reemplazo es obligatorio; además supondremos que el tiempo de reemplazo es despreciable, entonces ζ es el tiempo máximo de reemplazo y de hecho $E[\zeta | X_0 = s_N] < \infty$.

Si el proceso se encuentra en el estado s_i se tiene una tasa de ingresos por unidad de tiempo $i(s_i)$. Si se decide reemplazar cuando el proceso se encuentra en el estado s_i se incurre en un costo de reemplazamiento $c(s_i)$. Supondremos que $i(\cdot)$, $c(\cdot)$ son acotados y para evitar trivialidades $c(s_N) > 0$.

Se considera

$$\Pi = \{T \mid T \text{ es un tiempo de Markov, } T \leq \zeta, 0 < E[T]\}$$

el conjunto de políticas bajo consideración (son los tiempos de reemplazo válidos), notamos que entonces $0 < E[T] \leq E[\zeta] < \infty$.

Se quiere encontrar un tiempo de Markov T^* para maximizar

$$\varphi(T) = \frac{E[I(T) - c(X(T))]}{E[T]}$$

sobre Π , en donde $I(T) = \int_0^T i(X(\tau)) d\tau$. Se observa que por las suposiciones de acotamiento sobre $i(\cdot)$ y $c(\cdot)$, $\varphi(T)$ está bien definido $\forall T \in \Pi$.

Entonces para este modelo de reemplazo óptimo, por el teorema 2.2,

$$\gamma^* = \varphi(T^*) = \text{Max}_{T \in \Pi} \{\varphi(T)\}$$

es la ganancia neta máxima esperada promedio por unidad de tiempo y T^* es el tiempo de reemplazo óptimo, y además son tales que

$$\begin{aligned} 0 &= \theta(T^*, \gamma^*) = \text{Max}_{T \in \Pi} \theta(T, \gamma^*) \\ &= \text{Max}_{T \in \Pi} [E[I(T) - c(X(T)) - T \cdot \gamma^*]] \end{aligned}$$

Existe un resultado muy importante conocido como fórmula de Dynkin que establece que para cualquier función acotada definida sobre los estados $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ y para cualquier tiempo de Markov T con esperanza finita

$$E_i[f(X(T))] - f(s_i) = E_i \left[\int_0^T (A \cdot f)(X(\tau)) d\tau \right]$$

donde $E_i[\cdot]$ representa la esperanza condicionada a que $X_0 = s_i$. [(1) p. 13,50], [(2) p. 270], [(3) p. 3], [(4) p. 751].

De ahora en adelante y a menos que se especifique lo contrario, las esperanzas son condicionadas al evento $X_0 = s_N$. Usando la fórmula de Dynkin y con la convención $c(s_N) > 0$ se tiene que

$$E[c(X(T))] - c(s_N) = E \left[\int_0^T (A \cdot c)(X(\tau)) d\tau \right] \quad (3.1)$$

es decir

$$E[c(X(T))] = E\left[\int_0^T (A \cdot c)(X(r)) dr\right] + c(s_N) \quad (3.2)$$

entonces si se define

$$\begin{cases} g(s_i) = \sum_{j < i} q_{ij} c(s_j) & s_i > s_0 \\ g(s_0) = 0 \end{cases}$$

o sea $g : S \rightarrow \mathbb{R}$, $g = A \cdot c$, es la tasa diferencial de costos de reemplazamiento a que se hace referencia después del teorema 2.2 y entonces es posible escribir (2.6) como

$$\theta(T, \gamma) = E\left[\int_0^T (i(X(r)) - (Ac)(X(r)) - \gamma) dr\right] - c(s_N). \quad (3.3)$$

Si adicionalmente se tiene que $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ es no-decreciente en S , por el teorema 2.3 el tiempo de reemplazo óptimo es la política determinista

$$\begin{aligned} T^* &= \inf\{t \geq 0 : i(X(t)) - Ac(X(t)) - \gamma^* < 0\} \\ &= \sup\{t \geq 0 : i(X(t)) - Ac(X(t)) - \gamma^* \geq 0\} \end{aligned}$$

donde γ^* es un valor tal que $\theta(T^*, \gamma^*) = 0$. Se supondrá entonces que si $s_i \leq s_j$ son elementos de S

$$i(s_j) - Ac(s_j) \geq i(s_i) - Ac(s_i).$$

Notamos que la condición anterior se satisface si se pide que cada vez que $s_i \leq s_j$, entonces simultáneamente se cumpla

$$\begin{aligned} i(s_i) &\leq i(s_j) \\ Ac(s_i) &\geq Ac(s_j). \end{aligned}$$

Cuando X_t representa alguna noción de uso o daño acumulado hasta el tiempo t , esta suposición de monotonia (que llamaremos la suposición de monotonia usual) es con frecuencia realista

[(4) p. 750]. Si se revisa la demostración del teorema 2.3, la propiedad de que $R^* = \{s \in S : i(s) - Ac(s) - \gamma^* < 0\}$ es una clase decreciente es la que implica la optimalidad de T^* , y aunque se han encontrado algunas condiciones sobre A y c para que se cumpla $Ac(s_i) \geq Ac(s_j)$ si $s_i \leq s_j$, [(1) p. 191, sería deseable poder encontrar en lo futuro condiciones más generales para que R^* sea una clase decreciente.

A continuación se establecerá un par de casos particulares muy importantes para el modelo anterior.

Ejemplo 1. Sistemas con componentes distinguibles.

Se tiene un sistema con N componentes distinguibles. Se considera S el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, \dots, N\}$ con lo que cada estado representa el grupo de componentes aún en operación, el orden usado en S es el orden parcial definido en términos de contenciones ($s_i \geq s_j \Leftrightarrow s_j \subseteq s_i$).

La matriz de intensidades de transición queda caracterizada por un conjunto de números $\{q_{ij}\}$ que cumplen

$$\begin{cases} q_{ij} \geq 0 & \text{si } s_j < s_i \\ 0 > q_{ii} = -\sum_{j < i} q_{ij} > -\infty & s_i \neq s_0 \\ q_{\infty\infty} = 0 \\ q_{i\infty} = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y entonces la descripción infinitesimal de las probabilidades de transición serían $\forall h > 0$

$$\begin{cases} p_{ij}(h) = h q_{ij} + o(h) & s_j < s_i \\ p_{ii}(h) = 1 - h \sum_{j < i} q_{ij} + o(h) & i \neq 0 \\ p_{\infty\infty}(h) = 1 \\ p_{i\infty}(h) = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que estas probabilidades establecen que los componentes pueden fallar individualmente o en conjunto, y que permanecen así hasta que haya un reemplazo. Además son independientes del estado inicial (Ejemplo 2, §3, Capítulo I).

Ejemplo 2. Sistemas con componentes indistinguibles.

Ahora se tiene un sistema con N componentes indistinguibles. Se considera un estado como el número de componentes aún en operación con lo que $S = \{0, 1, \dots, N\}$ y se usa el orden usual en los enteros.

A fin de tener un proceso de muerte generalizado se definen las siguientes intensidades de transición

$$\begin{cases} q_{i,j} \geq 0 & j < i \\ 0 > q_{i,i} = -\sum_{j < i} q_{i,j} > -\infty & i \neq 0 \\ q_{0,0} = 0 \\ q_{i,j} = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

§2. CONDICIONES DE OPTIMALIDAD ALTERNATIVAS PARA EL TIEMPO DE REEMPLAZO OPTIMO.

El teorema 2.3 establece que si hay monotonía en $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ entonces el tiempo de llegada $T(R^*)$ a la clase decreciente

$$R^* = \{s \in S : i(s) - Ac(s) < \gamma^*\}$$

es el tiempo de reemplazo óptimo y en donde γ^* es un valor tal que

$$E \left[\int_0^{T(R^*)} (i(X(\tau)) - (Ac)(X(\tau)) - \gamma^*) d\tau \right] = c(s_N),$$

es decir, a fin de encontrar una política óptima hay que encontrar un número real γ^* y una clase decreciente $R(\gamma^*)$ que satisfagan simultáneamente

$$R^* = R(\gamma^*) = \{s \in S : i(s) - Ac(s) < \gamma^*\} \quad (3.4)$$

$$E \left[\int_0^{T(R^*)} (i(X(\tau)) - (Ac)(X(\tau)) - \gamma^*) d\tau \right] = c(s_N) \quad (3.5)$$

con $T(R^*) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in R^*\}$.

Sea $C(\gamma^*) = S - R(\gamma^*)$, como $R(\gamma^*)$ es una clase de estados en la que hay que reemplazar y $C(\gamma^*)$ en la que no hay que reemplazar, llamamos a $R(\gamma^*)$ la clase de reemplazo y a $C(\gamma^*)$ la clase de continuación. Si $s \in C(\gamma^*)$ es arbitrario pero fijo, notamos que

$$E \left[\int_0^{T(R^*)} 1\{X_t = s\} d\tau \right]$$

es el tiempo medio de estadía en el estado $s \in C(\gamma^*)$ antes del reemplazo y es posible encontrarle una expresión relativamente sencilla en términos de la matriz infinitesimal A con el siguiente teorema, lo que nos conducirá a una expresión más simple de (3.5).

TEOREMA 3.1.

Sea A_{oo} la matriz infinitesimal restringida al conjunto de estados $S \setminus \{s_o\}$ (i.e. A_{oo} es la matriz infinitesimal sin la columna y el renglón correspondiente a s_o).

Supongamos que se cumplen las condiciones de monotonía usuales en $i(\cdot) - Ac(\cdot)$.

Sea $\gamma \in \mathbb{R}$ fijo y defínase

$$R = R(\gamma) = \{s \in S : i(s) - Ac(s) - \gamma < 0\}$$

entonces $\forall s \in C = (S - R)$ se tiene que

$$E \left[\int_0^{T(R)} 1\{X_t = s\} d\tau \mid X_0 = s_N \right] = -(A_{oo})^{-1}(s_N, s) \quad (3.6)$$

en donde $(A_{oo})^{-1}(s_N, s)$ representa el elemento (s_N, s) de la inversa de la matriz A_{oo} y $T(R)$ es el tiempo de llegada o *hitting time* a la clase decreciente R .

Defin. Sea $s \in C$ arbitrario pero fijo y defínase

$$g_s: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_s(s_i) = \begin{cases} 1 & s_i = s \\ 0 & s_i \neq s \end{cases}$$

entonces el tiempo medio de estadia en el estado s antes del tiempo de llegada $T(R)$ cuando el proceso comienza en s_0 es

$$E \left[\int_0^{T(R)} 1 \{X_r = s\} dr \mid X_0 = s_0 \right] = E \left[\int_0^{T(R)} g_s(X_r) dr \mid X_0 = s_0 \right]. \quad (3.7)$$

Por otro lado, la matriz infinitesimal se puede escribir como

$$A = \begin{vmatrix} A_{00} & A^0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

con A^0 el vector de N dimensiones con las intensidades de transición de cualquier estado diferente de s_0 al estado s_0 ,
 \therefore el sistema $A \cdot f_s = g_s$ se puede escribir como

$$A_{00} \cdot f_s + k A^0 = g_s$$

si particionamos

$$f_s = \begin{vmatrix} f_s \\ k \end{vmatrix} \text{ y } g_s = \begin{vmatrix} g_s \\ 0 \end{vmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

y como claramente A_{00} es invertible (es una matriz triangular superior con elementos > 0 en la diagonal)

$$f_s = (A_{00})^{-1} \cdot g_s - k (A_{00})^{-1} \cdot A^0 \quad (3.8)$$

i.e. $\forall s \in C$ fijo es posible encontrar un vector (no único) f_s tal que $A \cdot f_s = g_s$.

De hecho, como $(A_{00})^{-1}$ es triangular superior se tiene que

$$((A_{00})^{-1} g_a)(s_j) = 0 \quad \text{si } s_j \in R - \{s_0\}$$

$$((A_{00})^{-1} g_a)(s_j) = (A_{00})^{-1}(s_j, s) \quad \text{si } s_j \in C$$

y por lo tanto de (3.7)

$$f_a(s_j) = \begin{cases} k & s_j = s_0 \\ -k \cdot ((A_{00})^{-1} A^0)(s_j) & s_j \in R - \{s_0\} \\ (A_{00})^{-1}(s_j, s) - k ((A_{00})^{-1} A^0)(s_j) & s_j \in C \end{cases}$$

Los elementos (q_{ij}) de A suman 0 por renglón y entonces se tiene que

$$A^0 = -((A_{00})^{-1} \cdot 1)$$

con 1 un vector que contiene sólo 1's, lo que finalmente conduce a que

$$f_a(s_j) = \begin{cases} k & s_j \in R \\ (A_{00})^{-1}(s_j, s) + k & s_j \in C \end{cases}$$

Ahora, como $T(R) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in R\}$ y como el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ es continuo por la derecha, $X_{T(R)} \in R$, de donde $f_a(X_{T(R)}) = k$; por último, aplicando la fórmula de Dynkin a (3.8) se tiene que

$$E\left[\int_0^{T(R)} g_a(X_t) dt \mid X_0 = s_N\right] =$$

$$= E\left[\int_0^{T(R)} A f_a(X_t) dt \mid X_0 = s_N\right] = \quad \text{(Dynkin)}$$

$$= E[f_a(X_{T(R)}) \mid X_0 = s_N] - f(s_N)$$

$$= k - (A_{00})^{-1}(s_N, s) - k$$

$$= -(A_{00})^{-1}(s_N, s)$$

□

Llamemos $M(s_N, s) = -(A_{00})^{-1}(s_N, s)$ al tiempo medio de estadía en $s \in C(\gamma^*)$ antes de la absorción a la clase $R(\gamma^*)$ cuando el proceso comienza en s_N . Se tiene que $M(s_N, s) \geq 0$ y de hecho la expresión explícita de los elementos de $-(A_{00})^{-1}(\cdot, \cdot)$ confirma su significado (ver siguiente capítulo).

COROLARIO 3.2.

Supongamos que $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ es monótono en el sentido usual. Entonces el tiempo de reemplazo óptimo está dado por

$$T^* = T(\gamma^*) = \inf\{t \geq 0 : X_t \in R^*\}$$

con

$$R^* = R(\gamma^*) = \{s \in S : i(s) - Ac(s) < \gamma^*\} \quad (3.7)$$

y en donde γ^* es el número real que satisface

$$\sum_{s \in C^*} M(s_N, s) (i(s) - Ac(s) - \gamma^*) = c(s_N) \quad (3.10)$$

con $C^* = C(\gamma^*) = S - R^*$.

Dem. La condición (3.7) es la condición (3.4). Basta probar que (3.10) es equivalente a (3.5) pero

$$\begin{aligned} c(s_N) &= \sum_{s \in C^*} M(s_N, s) \cdot (i(s) - Ac(s) - \gamma^*) = \\ &= \sum_{s \in C^*} E \left[\int_0^{T^*} 1\{X_\tau = s\} d\tau \mid X_0 = s_N \right] \cdot (i(s) - (Ac)(s) - \gamma^*) \\ &= E \left[\int_0^{T^*} \sum_{s \in C^*} 1\{X_\tau = s\} \cdot (i(s) - (Ac)(s) - \gamma^*) d\tau \mid X_0 = s_N \right] \\ &= E \left[\int_0^{T^*} (i(X_\tau) - (Ac)(X_\tau) - \gamma^*) d\tau \mid X_0 = s_N \right] \quad \square \end{aligned}$$

Se observan los siguientes hechos:

- a) El número γ^* dado como en el corolario 3.2 es la tasa de ganancia neta máxima esperada promedio por unidad de tiempo, hecho que es implicado por (3.5) y por el teorema 2.3.
- b) C^* cumple la siguiente condición de monotonia: si $s_i \leq s_j$ y si $s_i \in C^* \therefore s_j \in C^*$. Esta propiedad se deriva de que R^* es una clase decreciente.
- c) De la definición de R^* se tiene la siguiente condición equivalente a (3.9)

$$\begin{cases} \forall s \in R^* & i(s) - Ac(s) < \gamma^* \\ \forall s \in C^* & i(s) - Ac(s) \geq \gamma^* \end{cases} \quad (3.11)$$

El corolario 3.2 proporciona la base para el desarrollo de un algoritmo para resolver el modelo de reemplazo óptimo ya establecido.

§3. EL ALGORITMO.

Una vez definido el modelo de reemplazo óptimo a considerar y con las condiciones de optimalidad establecidas en el corolario 3.2 estamos en posibilidad de establecer un algoritmo para encontrar la política de reemplazo óptimo.

La idea es comenzar con la política determinista "no reemplazar si y sólo si todos los componentes están funcionando" o equivalentemente tomar $C = \{s_N\}$ como clase de continuación inicial. Para una clase de continuación propuesta se encuentra el valor de γ de tal forma que se cumpla la igualdad (3.10), y se verifica que se cumpla la restricción (3.9), agrandando la clase de continuación si no se satisface dicha condición. El proceso se repite hasta que se cumpla (3.9). Dado que $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ es la tasa de ingresos netos, intuitivamente se sospecha que el estado que debe entrar a formar parte de la clase de continuación es aquél que proporcione la tasa más grande de entre todos los candidatos.

El algoritmo se establece formalmente a continuación:

Paso 0. Ordenar los estados de S de acuerdo a los valores de $v(s) = i(s) - Ac(s)$ en orden decreciente, es decir tenemos

$$S = \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1, s_0\}$$

de tal manera que

$$v(s_N) \geq v(s_{N-1}) \geq \dots \geq v(s_1) \geq v(s_0).$$

Los empates se rompen arbitrariamente (teorema 3.4).

Se propone la clase de continuación $C_N = \{s_N\}$ y sea

$$r'_N = \frac{H(s_N, s_N)v(s_N) - c(s_N)}{H(s_N, s_N)}.$$

Sea $j = N - 1$ un índice de iteración.

Paso 1. Considérese el estado s_j ,

a) Si $v(s_j) < r'_{j+1}$ ir al paso 3.

b) Si $v(s_j) \geq r'_{j+1}$ entonces

$$\text{hágase } C_j = C_{j+1} \cup \{s_j\}$$

evalúese

$$r'_j = \frac{\sum_{s \in C_j} H(s_N, s)v(s) - c(s_N)}{\sum_{s \in C_j} H(s_N, s)}.$$

Asígnese a j el valor $j - 1$.

Paso 2. Si $j=0$ entonces ir al paso 3. En otro caso ir al paso 1.

Paso 3. Fin del Algoritmo (teorema 3.3).

$C^* = C_{i-1}$ es una clase óptima de continuación.

$r^* = r'_{i-1}$ es la tasa de ganancia neta máxima esperada promedio por unidad de tiempo.

$T^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \in (S - C^*)\}$ es el tiempo de reemplazo óptimo.

Es conveniente notar algunas observaciones con respecto al algoritmo anterior:

a) $C^*, R^* \neq \emptyset$ pues al menos $s_N \in C^*$ y $s_0 \in R^*$, lo que equivale a excluir las políticas "siempre reemplazar" y "nunca reemplazar". Es fácil modificar el algoritmo para que sea posible tener incluso que $R^* = \emptyset$ (hecho que no aporta ninguna utilidad práctica ya que, en el caso de que $C^* = S - \{s_0\}$, como entendemos a s_0 como un estado en donde el reemplazo es obligatorio, se debería tener que $v(s_0) < \gamma^*$, lo cual siempre es posible si se penaliza la función $v(\cdot)$ en el estado s_0).

b) La sucesión $\{\gamma_j\}$ generada por el algoritmo forma una sucesión monótona no-creciente (i.e. $\gamma_j \geq \gamma_{j+1} \forall j$). Esto porque por construcción

$$\sum_{s \in C_{j+1}} M(s_N, s) \cdot (v(s) - \gamma_{j+1}) - c(s_N) = 0$$

y como $v(s_j) \geq \gamma_{j+1}$ y $M(s_N, s_j) \geq 0$

$$\therefore \sum_{s \in C_j} M(s_N, s) (v(s) - \gamma_{j+1}) - c(s_N) \geq 0$$

Por otro lado

$$\sum_{s \in C_j} M(s_N, s) (v(s) - \gamma_j) - c(s_N) = 0.$$

Tomando la diferencia de las dos últimas desigualdades

$$\sum_{s \in C_j} M(s_N, s) (\gamma_j - \gamma_{j+1}) \geq 0$$

y como $M(s_N, s) \geq 0$, ya que son tiempos medios de estadía, entonces $\gamma_j - \gamma_{j+1} \geq 0$

A continuación se verificará que la clase C^* y el número γ^* obtenidos por el algoritmo son respectivamente la clase de continuación óptima y la tasa de ganancia máxima esperada promedio por unidad de tiempo.

TEOREMA 3.3.

$C^* = C_{j+1}$ y $r^* = r_{j+1}$ obtenidas como en el algoritmo anterior satisfacen las condiciones de optimalidad (3.7) y (3.10) del corolario 3.2.

Dem. a). Por construcción

$$r^* = \frac{\sum_{s \in C^*} H(s_N, s) v(s) - c(s_N)}{\sum_{s \in C^*} H(s_N, s)}$$

de donde $\sum_{s \in C^*} H(s_N, s) \cdot \{v(s) - r^*\} - c(s_N) = 0$, es decir se satisface (3.7)

b). Dado el orden con respecto a $v(\cdot)$ establecido en el paso 0 sobre los elementos de S y si $r^* > v(s_j)$ entonces

$$r^* > v(s) \quad \forall s \in (S - C^*).$$

Por otro lado, si $C^* = \{s_N\}$ entonces

$$r^* = r_N = v(s_N) - \frac{c(s_N)}{H(s_N, s_N)} \leq v(s_N);$$

si $C^* = \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_{j+1}\}$ se tiene que r_{j+2} satisface que $r_{j+2} \leq v(s_{j+1})$, es decir

$$\sum_{s \in C_{j+2}} H(s_N, s) v(s) - c(s_N) \leq v(s_{j+1}) \sum_{s \in C_{j+2}} H(s_N, s)$$

y entonces

$$\begin{aligned} r^* &= r_{j+1} = \\ &= \frac{\sum_{s \in C_{j+2}} H(s_N, s) v(s) + H(s_N, s_{j+1}) v(s_{j+1}) - c(s_N)}{\sum_{s \in C_{j+1}} H(s_N, s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{v(s_{j+1}) \sum_{s \in C_{j+2}} M(s_N, s) + M(s_N, s_{j+1}) v(s_{j+1})}{\sum_{s \in C_{j+1}} M(s_N, s)} \\
 & = v(s_{j+1}) \leq v(s) \quad \forall s \in C^* = C_{j+1}.
 \end{aligned}$$

En cualquier caso se tiene

$$\begin{aligned}
 \gamma^* & > v(s) \quad \forall s \in (S - C^*) \\
 \gamma^* & \leq v(s) \quad \forall s \in C^*
 \end{aligned}$$

es decir, se satisface (3.11) y por lo tanto (3.9). \square

En el paso 0 se establece que es posible romper los empates en los valores de $v(\cdot)$ arbitrariamente. Esto lo garantiza el siguiente resultado, que indica que estados con el mismo valor de $v(\cdot)$ deben pertenecer ambos a la clase de continuación o ambos a la clase de reemplazo, pero no pueden pertenecer a clases diferentes.

TEOREMA 3.4.

Supongamos que $v(s_j) = v(s_{j+1})$. Entonces C_{j+1} (la clase de continuación que contiene a s_{j+1} pero no contiene a s_j) encontrada como indica el algoritmo, no puede ser la clase de continuación óptima.

Dem.

Supongamos que $C^* = C_{j+1}$ es la clase de continuación óptima, entonces se tiene que $s_{j+1} \in C^*$ y $s_j \in R^*$ con $R^* = S - C^*$, la clase de reemplazo óptima. Equivalentemente

$$\begin{aligned}
 v(s_j) & < \gamma_{j+1} = \gamma^* \\
 v(s_{j+1}) & \geq \gamma_{j+2}
 \end{aligned}$$

Escribamos

$$r_{j+2} = \frac{\Sigma_1 - c(s_N)}{\Sigma_2}$$

$$\text{con } \Sigma_1 = \sum_{s \in C_{j+2}} M(s_N, s) v(s)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s \in C_{j+2}} M(s_N, s)$$

Entonces

$$r_{j+2} = \frac{\Sigma_1 + M(s_N, s_{j+1}) v(s_{j+1}) - c(s_N)}{\Sigma_2 + M(s_N, s_{j+1})} > v(s_j) = v(s_{j+1})$$

de donde

$$\left\{ \Sigma_1 + M(s_N, s_{j+1}) v(s_{j+1}) - c(s_N) \right\} > v(s_{j+1}) \left\{ \Sigma_2 + M(s_N, s_{j+1}) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_1 - c(s_N) > v(s_{j+1}) \Sigma_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Sigma_1 - c(s_N)}{\Sigma_2} = r_{j+2} > v(s_{j+1}) \quad |$$

Entonces no es posible que C_{j+2} sea la clase de continuación óptima. □

Para terminar, por el teorema 2.3 sabemos que si hay una política óptima, ésta es determinista y de hecho queda caracterizada por el conjunto de estados donde hay que reemplazar. Dado que excluimos las políticas "nunca reemplazar" y "siempre reemplazar" el número total de políticas deterministas está acotado por $2^{N+1} - 2$; el algoritmo encuentra una política óptima en a lo más N iteraciones.

REFERENCIAS

- 1.- Rodriguez, B.E., "Optimal replacement for N component systems", M.S. thesis, Cornell University, Ithaca, New York, 1984.
- 2.- Ross, S., "Infinitesimal look-ahead stopping rules", *Ann. Math. Stat.*, 42, 297-303, 1971.
- 3.- Taylor, H.M., "Optimal replacement under additive damage and other failure models", *Naval Research Logistic Quarterly*, 22, 1-17, 1975.
- 4.- Taylor, H.M. & Rodriguez, B.E., "Optimal replacement for fault tolerant systems", *Naval Research Logistic Quarterly*, 33, 747-757, 1986.

CAPITULO 4

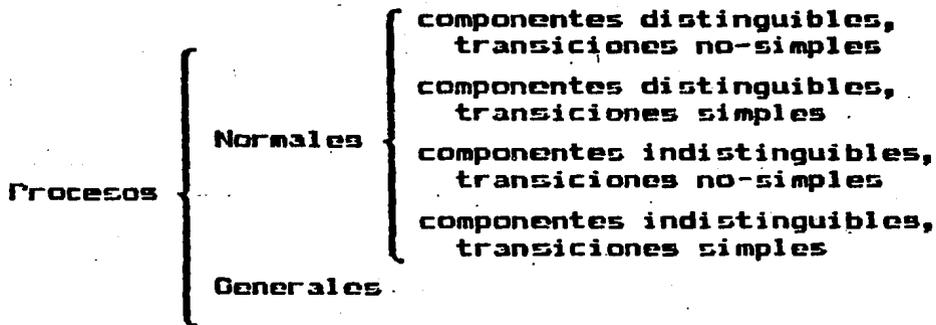
IMPLEMENTACION DE UN SISTEMA Y
ALGUNOS EJEMPLOS.

§1. CONCEPCION GENERAL DEL SISTEMA.

Parte de los objetivos del presente trabajo era el implementar el algoritmo del capítulo anterior como un sistema totalmente interactivo. Debido a lo complicado y tedioso que puede llegar a ser la captura de información, el sistema debe ser capaz no sólo de resolver el problema aplicando el algoritmo a un conjunto de datos, sino que también debe presentar facilidades para la generación, modificación y almacenamiento de dicha información. En términos muy generales, la implementación computacional del manejo de dicha información se centra en la manipulación de: la matriz de intensidades de transición, el vector de tasas de ingresos y el vector de costos de reemplazo, así como el diseño de una representación eficiente del conjunto de estados.

Con el fin de agilizar y facilitar la captura de información, los procesos bajo consideración, según la descripción del capítulo

anterior, se clasificarán en:



en donde por componentes indistinguibles se entenderá que el número de componentes en operación de cada estado es la característica distintiva entre estados, al contrario de procesos con componentes distinguibles en los que, para caracterizar a un estado del proceso, no basta saber *cuantos* están aún en operación sino que hay que saber *cuales* están aún en operación. Por procesos con transiciones no simples entenderemos procesos en los cuales los componentes pueden fallar simultáneamente, i.e., las transiciones son posibles a cualquier estado menor. Por otra parte, los procesos con transiciones simples son procesos en los que los componentes fallan individualmente, lo que se traduce en que la evolución del proceso es sólo a estados menores con exactamente un componente operativo menos en cada transición.

En los procesos normales, es posible conocer el número de componentes operativos en cada estado; en los generales, el número de componentes operativos no podrá ser calculado, el uso de este último tipo de proceso puede disminuir significativamente el tamaño del problema, como se verá más adelante.

Para aclarar un poco lo anterior, considérese un sistema formado por cuatro componentes numerados "1", "2", "3" y "4", como se muestra en la figura siguiente:

1	2
3	4

en donde se indica un momento en la vida del proceso en el que los componentes "1", "2", "3", "4" están todos en operación. Cuando un componente ha fallado lo denotamos por $\bar{1}$. Así la figura:

$\bar{1}$	2
3	$\bar{4}$

denota que en el sistema, los componentes "1" y "4" han fallado.

Con esta representación daremos ejemplos de las distintas clasificaciones de los procesos.

a) *Procesos con componentes distinguibles y transiciones no simples.*

En un proceso de este tipo, los estados

$\bar{1}$	2	y	1	2
3	$\bar{4}$		$\bar{1}$	$\bar{4}$

son estados diferentes, pues aunque ambos tienen dos componentes en operación, el conjunto de componentes operativos no es el mismo.

Como las transiciones son no-simples, del estado

1	2
3	$\bar{4}$

es posible una transición directa a los siguientes estados menores (el orden claramente es en términos de contenciones del conjunto de componentes operativos):

1	2	1	$\bar{4}$	$\bar{1}$	2	1	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	3	$\bar{4}$	3	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Observamos que por las suposiciones del modelo, no es posible una transición directa entre los siguientes estados:

del estado

1	2
3	4

 al estado

3	2
3	4

.

b) *Procesos con componentes distinguibles y transiciones simples.*

Los estados son distinguibles como en a) pero, por ejemplo, todas las posibles transiciones directas del estado

1	2
2	3

son a los estados

1	2	1	3	3	2
3	3	2	3	2	3

pues no se permite que falle más de un componente operativo por transición.

c) *Procesos con componentes indistinguibles y transiciones no simples.*

En un proceso de este tipo, el conjunto de estados se reduce al conjunto

1	2	1	2	1	2	3	3	3	3
2	4	2	3	3	3	3	3	3	3

pues siendo los componentes indistinguibles, los estados

3	2	y	1	2
3	4		3	3

representan lo mismo. Transiciones no-simples indica, por ejemplo, que es posible una transición directa del estado

1	2	a cualquiera de los estados	1	3	3	3	3
3	3		3	3	3	3	3

d) *Procesos con componentes indistinguibles y transiciones simples.*

Se comporta como un proceso del ejemplo c) pero en el que sólo hay transiciones directas al estado menor inmediato (i.e. el estado con exactamente un componente operativo menos).

e) *Procesos Generales.*

Si lo que nos interesa es la posición relativa de los componentes operativos, y consideramos que los estados son indistinguibles bajo rotaciones del cuadrado de componentes operativos, el espacio de estados se reduce a

1	2	1	2	1	2	1	3	1	3	3	3
2	4	2	3	3	3	3	4	3	3	3	3

Por ejemplo, los estados

1	2	1	3
3	3	2	3

y

son indistinguibles, aunque los estados

1	2	1	3
3	3	3	4

y

son diferentes. Siempre se considerará que las transiciones son no-simples.

Por último, cualquiera de los procesos bajo consideración son factibles de ser modelados como procesos generales.

§2. REPRESENTACION DE ESTADOS Y ESTRUCTURAS DE DATOS USADAS.

Debido a que la manipulación eficiente de la información de los estados depende fuertemente de la manera de representar a los mismos, se requiere una representación también eficiente, al menos en términos de memoria requerida, para no interferir en la

cantidad de memoria que necesite el sistema para almacenar la información de los estados.

a) REPRESENTACION DE ESTADOS EN PROCESOS NORMALES.

Analizaremos primeramente el caso de procesos normales. Supongamos que el sistema bajo estudio cuenta con $(N + 1)$ componentes que etiquetamos c_0, c_1, \dots, c_N . Es posible hablar entonces de un vector de componentes operativos

$$a = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \{0, 1\}^{N+1}$$

en donde

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & \text{si } c_i \text{ ya ha fallado} \\ 1 & \text{si } c_i \text{ aún está en operación} \end{cases}$$

para cualquier momento de la evolución del proceso e independientemente de la cualidad de los componentes (distinguidos o indistinguidos) y del tipo de transición (simples o no simples).

Componentes indistinguidos.

En este caso, es claro que el estado queda caracterizado solamente por el número de componentes en operación, es decir, si se tiene dos vectores de componentes operativos $a = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ y $b = (\beta_0, \dots, \beta_N)$ tales que $s = \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i$, decimos que ambos vectores representan al mismo estado y que el estado queda bien determinado por el número s . El espacio de estados S tiene $N + 2$ elementos y queda representado por $S = \{0, 1, \dots, N+1\}$ donde se usa el orden usual en los naturales.

Cuando las transiciones son no-simples, es posible efectuar una transición directa del estado s a cualquier otro estado s_j , si $s_j < s$. Cuando las transiciones son simples, el único vecino, o posible estado de transición directa, del estado s , es el estado $s-1$.

Componentes distinguidos.

En este caso no basta caracterizar al estado con el número de

componentes aún en operación. De hecho, un estado queda determinado por un y sólo un vector de componentes operativos $a = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$. Además, como $a \in \{0, 1\}^{N+1}$, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de vectores de componentes operativos y los números binarios enteros de a lo más $(N + 1)$ cifras, dada por

$$a = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \Leftrightarrow (\alpha_N \dots \alpha_0)_2$$

Entonces, el estado $(\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ queda caracterizado por el número

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 = \sum_{i=0}^N (2^i) \cdot \alpha_i$$

El número de componentes operativos del estado $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$ es simplemente $\sum \alpha_i$, al cual lo llamaremos la cardinalidad del estado $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$.

Para determinar los vecinos, o posibles estados de transición directa, del estado $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$, no basta buscar aquellos estados con cardinalidad menor a la cardinalidad del estado dado, sino que hay que buscar aquellos estados que son menores al estado en cuestión (i.e., que el conjunto de componentes aún en operación esté contenido en el conjunto de componentes operativos del estado $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$). Sin embargo es fácil verificar que $(\beta_N \dots \beta_0)_2$ es un estado menor que el estado $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$ si y sólo si

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \text{ OR } (\beta_N \dots \beta_0)_2 = (\alpha_N \dots \alpha_0)_2$$

en donde OR es un operador binario definido de la siguiente manera

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \text{ OR } (\beta_N \dots \beta_0)_2 = (\gamma_N \dots \gamma_0)_2$$

$$\text{con } \gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i = \beta_i = 0 \\ 1 & \text{si } \alpha_i = 1 \text{ ó } \beta_i = 1 \end{cases}$$

Entonces el espacio de estados de un sistema con $(N + 1)$ componentes distinguibles, queda representado por $S = \{(\alpha_N \dots \alpha_0)_2\}$ y en donde el orden definido es

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \geq (\beta_N \dots \beta_0)_2 \Leftrightarrow (\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \text{ OR } (\beta_N \dots \beta_0)_2 = (\alpha_N \dots \alpha_0)_2$$

Vemos que la cardinalidad de S es 2^{N+1} .

Cuando las transiciones son no-simples, $(\beta_N \dots \beta_0)_2$ es un vecino de $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$ si y sólo si

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \text{ OR } (\beta_N \dots \beta_0)_2 = (\alpha_N \dots \alpha_0)_2,$$

cuando las transiciones son simples, $(\beta_N \dots \beta_0)_2$ es un vecino de $(\alpha_N \dots \alpha_0)_2$ si y sólo si

$$(\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \text{ OR } (\beta_N \dots \beta_0)_2 = (\alpha_N \dots \alpha_0)_2 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^N \alpha_i = \sum_{i=0}^N \beta_i + 1.$$

En cualquier caso (distinguidos o indistinguidos), la ventaja de la representación del espacio de estados S no se reduce solamente a su eficiencia para el almacenamiento de S sin utilizar memoria innecesaria, sino que la determinación de vecinos de un estado dado se reduce a operaciones lógicas ($<$ en el caso de componentes indistinguidos; OR, = en el caso de componentes distinguidos) lo cual es altamente eficiente.

Cuando los procesos son normales, la captura se agiliza y se vuelve menos tediosa, pues es posible preguntar solamente por las tasas de transición de un estado a sus vecinos y evitarse preguntar innecesariamente por tasas de transición a estados en los que la transición no es directa o es imposible.

En resumen, si se tiene un proceso normal con $(N + 1)$ componentes, el conjunto de estados queda representado de la siguiente manera:

Proceso	Espacio de estados S	Vecinos del estado $a \in S$	# comp. oper. de $a \in S$
Dist. y no-simples	$\{(\alpha_N \dots \alpha_0)_2\}$	$b \in S, (a \text{ OR } b) = a$	$\sum \alpha_i$
Dist. y simples	$\{(\alpha_N \dots \alpha_0)_2\}$	$b \in S, (a \text{ OR } b) = a$ $\sum \alpha_i = \sum \beta_i + 1$	$\sum \alpha_i$
Indist. y no simples	$\{s \in \mathbb{N}\}$ $s \in [0, N+1]$	$r \in S, s > r$ con $s = \sum \alpha_i$	s
Indist. y simples	$\{s \in \mathbb{N}\}$ $s \in [0, N+1]$	$r \in S, s = r + 1$ con $s = \sum \alpha_i$	s

b) REPRESENTACION DE ESTADOS EN PROCESOS GENERALES.

En el caso de procesos generales, más que preguntar por el número de componentes y generar la posible información del proceso, se pregunta por el número de estados diferentes. Si el sistema tiene $(N + 1)$ estados diferentes, representamos al espacio de estados como $S = \{0, 1, \dots, N\}$, i.e., caracterizamos a cada estado s_i por el número i . Observamos que este número no proporciona información acerca de la cardinalidad de componentes operativos de s_i . Recordando que el espacio de estados tiene definido un orden, los estados se numeran de tal manera que si $s_i < s_j$, entonces $i < j$. Las transiciones se consideran no-simples, siendo responsabilidad del capturista asignar 0 a las tasas de transición imposibles según el orden definido en S .

La ventaja de esta opción no sólo es permitir la captura de procesos que no son normales, sino que también ciertos procesos normales pueden ser reducidos en tamaño (i.e., reducir la cardinalidad del espacio de estados S) y ser modelados como procesos generales, cuando el modelo involucra cierta noción de simetría, como en el ejemplo c) de §3 que se verá más adelante.

c) ESTRUCTURAS DE DATOS.

Considerando la representación de estados anteriormente descrita, supongamos que el espacio de estados está formado por $N + 1$ estados diferentes, $S = \{s_N, s_{N-1}, \dots, s_1, s_0\}$.

La estructura de datos usada para representar tanto a las tasas de ingreso por estado como a los costos de reemplazo, son sencillamente vectores o arreglos unidimensionales de dimensión $N + 1$, donde el elemento i -ésimo del vector contienen la información correspondiente al estado s_i .

La representación de la matriz A en la forma usual, como un arreglo bidimensional cuadrado de tamaño $(N + 1) \times (N + 1)$, es

ineficiente debido a la gran cantidad de memoria usada innecesariamente, pues hay que recordar que A es una matriz triangular superior de la siguiente forma

$$A = \begin{vmatrix} -q_N & q_{N,N-1} & \dots & q_{N,0} \\ 0 & -q_{N-1} & \dots & q_{N-1,0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -q_0 \end{vmatrix}$$

Sin embargo, es posible representar a A como un vector A en donde se acomodan los elementos de la diagonal y los superiores a ésta, de la siguiente manera

$$A = (-q_N, q_{N,N-1}, \dots, q_{N,0}, -q_{N-1}, \dots, q_{N-1,0}, \dots, -q_0)$$

Para recuperar el elemento $q_{i,j}$ de A , notamos que

- i) si $i < j$ entonces $q_{i,j} = 0$,
- ii) si $i \geq j$ entonces $q_{i,j} = A(i)$, en donde i está dada por la siguiente función de indexación

$$i = i(i, j) = \frac{(N+1) \cdot (N+2) - (i+1) \cdot (i+2)}{2} + (i + 1 - j).$$

Una ventaja de usar un arreglo para representar la matriz de intensidades de transición es que el tiempo de acceso a cualquier elemento $q_{i,j}$ es constante, pues sólo se requiere la evaluación de la función de indexación.

Por último, otro aspecto que vale la pena considerar es que en el algoritmo es necesario conocer el primer renglón de la inversa de A_{00} (la matriz infinitesimal restringida a $S - \{s_0\}$), pero la forma de la matriz hará innecesario el invertir la matriz completamente.

$$\text{Sean } A_{00} = \begin{vmatrix} -q_N & q_{N,N-1} & \dots & q_{N,1} \\ 0 & -q_{N-1} & \dots & q_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -q_1 \end{vmatrix}$$

$$\text{y } (A_{00})^{-1} = \begin{vmatrix} -r_N & r_{N,N-1} & \dots & r_{N,1} \\ 0 & -r_{N-1} & \dots & r_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -r_1 \end{vmatrix}.$$

Es conveniente notar que $q_{ii} = -q_i$ y que $r_{ii} = -r_i \quad \forall i$.

Si M es una matriz, denotaremos por $[M]_i$ al i -ésimo renglón de M y por $[M]^j$ la j -ésima columna de M .

Como $(A_{00})^{-1} \cdot A_{00} = I$ entonces

$$\begin{cases} [(A_{00})^{-1}]_1 \cdot [A_{00}]^1 = r_N q_N = 1 \\ [(A_{00})^{-1}]_1 \cdot [A_{00}]^j = \sum_{i=N}^{(N+1-j)} r_{N,i} \cdot q_{i,(N+1-j)} = 0 \quad j = 2, \dots, N \end{cases}$$

lo que proporciona el siguiente sistema de ecuaciones recursivas para calcular el primer renglón de la inversa de A_{00}

$$\begin{cases} r_N = \frac{1}{q_N} \\ r_{N,N+1-j} = \frac{\sum_{i=N}^{(N+1-j)} r_{N,i} \cdot q_{i,(N+1-j)}}{q_{N+1-j}} \quad j=2, \dots, N \end{cases}$$

Recordando la interpretación de los elementos de la matriz infinitesimal vista en el capítulo I, §2, r_N es el tiempo esperado de estadía en s_N cuando el proceso comienza en s_N , y por un argumento inductivo, $-r_{N,j}$, $j = N-1, \dots, 1$ es el tiempo esperado de estadía en el estado s_j cuando el proceso comienza en s_N , lo que proporciona una demostración alternativa del teorema 3.1.

§3. ALCUNOS EJEMPLOS.

Los siguientes ejemplos, tienen por objeto mostrar algunas condiciones sobre las tasas de ingreso y los costos de reemplazo para que se satisfagan las condiciones de monotonía usuales, que permitirán a la postre poder determinar el tiempo de reemplazo óptimo.

a) Ejemplo 1.

El siguiente ejemplo, ya clásico (ver [(1) p. 29-33] y [(2) p. 754]), modela un sistema con cuatro componentes distinguibles y transiciones simples, y ejemplifica una aplicación del siguiente resultado: cuando las tasas de ingresos son monótonas y los costos de reemplazo son constantes, entonces es aplicable el corolario 3.2 y por lo tanto el algoritmo nos proporciona la clase óptima de reemplazo y la ganancia máxima promedio esperada por unidad de tiempo.

TEOREMA 4.1.

Supongamos que las tasas de ingresos son monótonas en el sentido que si $s_i \leq s_j$, entonces $i(s_i) \leq i(s_j)$ y que los costos de reemplazo son constantes, i.e. $c(s_i) = k \quad \forall s_i \in S$, entonces $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ satisface la condición de monotonía usual.

Dem. Notamos que

$$Ac(s_i) = \sum_{j=0}^N q_{ij} k = k (-q_i + \sum_{j>i}^N q_{ij}) = 0$$

por (1.7); entonces si $s_i \leq s_j$

$$i(s_i) - Ac(s_i) = i(s_i) \leq i(s_j) = i(s_j) - Ac(s_j) \quad \square$$

Observamos que si se satisfacen las condiciones del teorema 4.1, entonces es aplicable el corolario 3.2 y por lo tanto el algoritmo.

Los datos y resultados generados por el sistema se listan a continuación:

INFORMACION GENERAL

GANANCIA NETA PROMEDIO POR UNIDAD DE TIEMPO = 6.371503

PROCESO NORMAL

Numero de Componentes Operativos = 4
 Tipo de Componentes : DISTINGUIDLES
 Tipo de Transiciones : SIMPLES

CLASE OPTIMA DE CONTINUACION

(1 2 3 4)
 (2 3 4)
 (1 2 3)
 (2 3)
 (1 2 4)
 (2 4)
 (1 2)

CLASE OPTIMA DE REEMPLAZO

(1 3 4)
 (1 3)
 (1 4)
 (3 4)
 (4)
 (3)
 (2)
 (1)
 ()

 Estado 15 (1 2 3 4)

Tasa de ingresos : 15.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 15.000000
 Numero de comp. oper.: 4
 Tiempo medio estadia : 0.100000

Tasas de transicion del estado 15 a los estados :
 14 1.000000; 13 2.000000; 11 3.000000;
 7 4.000000;

 Estado 14 (2 3 4)

Tasa de ingresos : 14.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 14.000000
 Numero de comp. oper.: 3
 Tiempo medio estadia : 0.005556

Tasas de transicion del estado 14 a los estados :
 12 5.000000; 10 6.000000; 6 7.000000;

 Estado 13 (1 3 4)

Tasa de ingresos : 6.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 6.000000
 Numero de comp. oper.: 3
 Tiempo medio estadia : 0.007407

Tasas de transicion del estado 13 a los estados :
 12 8.000000; 7 9.000000; 5 10.000000;

 Estado 12 (3 4)

Tasa de ingresos : 2.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 2.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.001502

Tasas de transicion del estado 12 a los estados :
 8 27.000000; 4 28.000000;

 Estado 11 (1 2 4)

Tasa de ingresos : 7.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 7.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.008333

Tasas de transicion del estado 11 a los estados :
 10 11.000000; 7 12.000000; 2 12.000000;

 Estado 10 (2 4)

Tasa de ingresos : 8.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 8.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.002451

Tasas de transicion del estado 10 a los estados :
 8 25.000000; 2 26.000000;

 Estado 7 (1 4)

Tasa de ingresos : 4.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 4.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.003876

Tasas de transicion del estado 7 a los estados :
 8 21.000000; 1 22.000000;

 Estado 8 (4)

Tasa de ingresos : 1.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 1.000000
 Numero de comp. oper.: 1
 Tiempo medio estadia : 0.005774

Tasas de transicion del estado 8 a los estados :
 0 22.000000;

 Estado 7 (1 2 3)

 Tasa de ingresos : 11.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 11.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.008887

Tasas de transicion del estado 7 a los estados :
 6 14.000000; 5 15.000000; 2 16.000000;

 Estado 6 (2 3)

 Tasa de ingresos : 11.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 11.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.003475

Tasas de transicion del estado 6 a los estados :
 4 22.000000; 2 24.000000;

 Estado 5 (1 3)

 Tasa de ingresos : 5.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 5.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.005218

Tasas de transicion del estado 5 a los estados :
 4 17.000000; 1 20.000000;

 Estado 4 (3)

 Tasa de ingresos : 1.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 1.000000
 Numero de comp. oper.: 1
 Tiempo medio estadia : 0.007267

Tasas de transicion del estado 4 a los estados :
 0 31.000000;

Estado 2 (1 2)

Tasa de ingresos :	0.000000
Costos de reemplazo :	1.000000
Tasa de ingresos NETA:	0.000000
Numero de comp. oper.:	2
Tiempo medio estadia :	0.007157

Tasas de transicion del estado 2 a los estados :
 2 17.000000; 1 18.000000;

Estado 2 (2)

Tasa de ingresos :	1.000000
Costos de reemplazo :	1.000000
Tasa de ingresos NETA:	1.000000
Numero de comp. oper.:	1
Tiempo medio estadia :	0.008761

Tasas de transicion del estado 2 a los estados :
 0 20.000000;

Estado 1 (1)

Tasa de ingresos :	1.000000
Costos de reemplazo :	1.000000
Tasa de ingresos NETA:	1.000000
Numero de comp. oper.:	1
Tiempo medio estadia :	0.011051

Tasas de transicion del estado 1 a los estados :
 0 27.000000;

Estado 0 ()

Tasa de ingresos :	0.000000
Costos de reemplazo :	1.000000
Tasa de ingresos NETA:	0.000000
Numero de comp. oper.:	0

U) Ejemplo 2.

En [(1) p. 17] se establece un resultado que garantiza monotonía decreciente en $Ac(\cdot)$ cuando las transiciones son simples. En palabras, este resultado se aplica en situaciones reales que en la práctica son intuitivamente obvias: a medida que un estado está más deteriorado, el tiempo promedio de estadía es más corto. Si además, la función de costos es convexa entonces Ac , las tasas de costos de reemplazamientos, son monótonas en el sentido usual.

TEOREMA 4.2.

Supongamos un sistema con espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ y que las tasas de ingresos $i(\cdot)$ son monótonas en el sentido de que si $s_i \leq s_j$ entonces $i(s_i) \leq i(s_j)$.

Si además los costos de reemplazo $c(s_i)$ son una función convexa del número de componentes operativos del estado s_i (denotado $|s_i|$), i.e. $c(s_i) = f(|s_i|)$ con f convexa y si

$$\sum_{k>i} q_{ik} \leq \sum_{k>j} q_{jk} \quad s_j \leq s_i, \quad s_j \neq s_0$$

entonces $i(\cdot) - Ac(\cdot)$ satisface las condiciones de monotonía usuales.

Demo. Supongamos que $s_j \leq s_i$ y que $|s_j| = |s_i| - 1$ (recordamos que el orden en S es inducido por el número de componentes operativos) y como f es convexa

$$f(|s_j|) \leq \frac{f(|s_i| - 1) + f(|s_i| + 1)}{2}$$

$$\Rightarrow 2f(|s_j|) \leq f(|s_i| - 1) + f(|s_i| + 1)$$

$$\Rightarrow f(|s_j|) + f(|s_i| - 1) \leq f(|s_i| - 1) + f(|s_i|)$$

$$\Rightarrow f(|s_i| - 1) - f(|s_j|) \leq f(|s_i| - 1) - f(|s_i|)$$

Entonces

$$\begin{aligned} Ac(s_i) &= \sum_{k=1}^N q_{ik} \cdot c(s_k) = \\ &= q_{ii} c(s_i) + \sum_{k>i} q_{ik} c(s_k) = \\ &= -q_{ii} f(|s_i|) + \sum_{k>i} q_{ik} f(|s_i| - 1) \end{aligned}$$

Pues como las transiciones son simples, se tiene $q_{ik} = 0$ si $|s_k| \neq |s_i| - 1$

$$\therefore Ac(s_i) = \left\{ \sum_{k>i} q_{ik} \right\} \left\{ f(|s_i| - 1) - f(|s_i|) \right\}$$

Análogamente

$$Ac(s_j) = \left\{ \sum_{k>j} q_{jk} \right\} \left\{ f(|s_j| - 1) - f(|s_j|) \right\}$$

y como

$$f(|s_i| - 1) - f(|s_i|) \leq f(|s_j| - 1) - f(|s_j|)$$

$$\text{y } 0 \leq \sum_{k>i} q_{ik} \leq \sum_{k>j} q_{jk}$$

se sigue

$$Ac(s_i) \leq Ac(s_j) \quad \text{si } s_i \leq s_j \quad \text{con } |s_i| = |s_j| - 1.$$

En general se tendrá que si $s_i \leq s_j$, entonces $Ac(s_i) \leq Ac(s_j)$
y como $i(s_i) \geq i(s_j)$

$$\therefore i(s_i) - Ac(s_i) \geq i(s_j) - Ac(s_j) \quad \square$$

Observamos que el estado s_0 queda excluido de una de las condiciones del teorema anterior, de hecho $Ac(s_0) = 0$ pues el renglón de A asociado a s_0 es un vector nulo. Para que el estado s_0 cumpla la condición de monotonía usual, se asigna la siguiente tasa de ingresos : $i(s_0) = -M$, con M un número positivo

suficientemente grande (recordamos que $i(\cdot)$ es la tasa de ingresos por unidad de tiempo) pues s_0 es un estado en el que el reemplazo es obligatorio. En la práctica se excluye este estado en la verificación de las condiciones de monotonía.

A continuación se lista la información y los resultados de un ejemplo que cumple las condiciones del teorema 4.2. La función de costos está dada por el número de componentes operativos al cuadrado.

 INFORMACION GENERAL

GANANCIA NETA PROMEDIO POR UNIDAD DE TIEMPO = 10.807383

PROCESO NORMAL

Numero de Componentes Operativos = 2
 Tipo de Componentes : DISTINGUIBLES
 Tipo de Transiciones : NO SIMPLES

 CLASE OPTIMA DE CONTINUACION

(1 2 3)
 (2 3)
 (1 3)
 (1 2)
 (3)
 (2)
 (1)

 CLASE OPTIMA DE REEMPLAZO

()

Estado 7 (1 2 3)

Tasa de ingresos :	14.000000
Costos de reemplazo :	7.000000
Tasa de ingresos META:	51.000000
Numero de comp. oper.:	2
Tiempo medio estadia :	0.166667

Tasas de transicion del estado 7 a los estados :

6	1.000000;	5	1.000000;	4	0.000000;
3	2.000000;	2	1.000000;	1	0.000000;
0	1.000000;				

Estado 6 (2 3)

Tasa de ingresos :	12.000000
Costos de reemplazo :	4.000000
Tasa de ingresos META:	40.000000
Numero de comp. oper.:	2
Tiempo medio estadia :	0.010517

Tasas de transicion del estado 6 a los estados :

4	4.000000;	2	4.000000;	0	1.000000;
---	-----------	---	-----------	---	-----------

Estado 5 (1 3)

Tasa de ingresos :	12.000000
Costos de reemplazo :	4.000000
Tasa de ingresos META:	39.000000
Numero de comp. oper.:	2
Tiempo medio estadia :	0.010517

Tasas de transicion del estado 5 a los estados :

4	3.000000;	1	6.000000;	0	0.000000;
---	-----------	---	-----------	---	-----------

Estado 4 (3)

Tasa de ingresos :	5.000000
Costos de reemplazo :	1.000000
Tasa de ingresos META:	15.000000
Numero de comp. oper.:	1
Tiempo medio estadia :	0.012763

Tasas de transicion del estado 4 a los estados :

0	10.000000;
---	------------

 Estado 3 (1 2)

Tasa de ingresos : 11.000000
 Costos de reemplazo : 4.000000
 Tasa de ingresos NETA: 36.000000
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.041667

Tasas de transicion del estado 3 a los estados :
 2 5.000000; 1 2.000000; 0 1.000000;

 Estado 2 (2 3)

Tasa de ingresos : 3.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 14.000000
 Numero de comp. oper.: 1
 Tiempo medio estadia : 0.040825

Tasas de transicion del estado 2 a los estados :
 0 11.000000;

 Estado 1 (1)

Tasa de ingresos : 2.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 11.000000
 Numero de comp. oper.: 1
 Tiempo medio estadia : 0.021605

Tasas de transicion del estado 1 a los estados :
 0 7.000000;

 Estado 0 ()

Tasa de ingresos : 0.000000
 Costos de reemplazo : 0.000000
 Tasa de ingresos NETA: 0.000000
 Numero de comp. oper.: 0

c) Ejemplo 3.

Cables sujetos a fatiga estática [(1) p. 34], [(2) p. 221].

Consideremos un cable compuesto por fibras, las cuales están sometidas a la llamada fatiga estática, i.e., cada fibra que soporta una carga constante eventualmente fallará. Es claro que la carga soportada por la fibra está relacionada inversamente con el tiempo de vida de la fibra (carga constante más grande implica vida de la fibra más corta).

Se supone que el cable, inicialmente compuesto por $N + 1$ fibras, soportará una carga X la cual es repartida entre las fibras que no han fallado, hasta que ninguna de éstas sirva. Consideremos una fibra f que hasta el tiempo t no ha fallado y que soporta una carga l_i ; la fibra fallará en el intervalo $(t, t + h]$ con probabilidad

$$K(l_i) \cdot h + o(h).$$

La función $K(l)$, conocida como regla de fallo (*breakdown rule*) relaciona cambios en la carga de la fibra con cambios en la probabilidad de fallo de la misma.

Modelamos al sistema anterior como un proceso de muerte generalizado con componentes distinguibles y transiciones simples. Recordamos que un estado $s \in S$ queda representado por un número binario o equivalentemente por un vector de componentes operativos $(\alpha_0(s), \dots, \alpha_N(s)) \in \{0, 1\}^{N+1}$. Para cada elemento o estado de S , sea $l(s) = (l_0(s), \dots, l_N(s))$ el vector de cargas por componentes del estado s , en donde $l_i(s)$ representa la carga de la i -ésima fibra (componente operativo) del estado $s \in S$. Como la carga sólo es soportada por aquellas fibras que no han fallado, $l_i(s) = 0$ si $\alpha_i(s) = 0$. Además $\sum l_i(s) = X$. La tasa de transición del estado s_i al estado s_k , $s_i, s_k \in S$, quedará dada por:

$$q_{jk} = \begin{cases} K(1_i(s_j)) & \text{si } \alpha_i(s_j) = 1 & \text{y } \alpha_l(s_j) = \alpha_l(s_k) \\ & \alpha_i(s_k) = 0 & \text{con } l = 0, \dots, N; l \neq i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que las condiciones $\alpha_i(s_j) = 1$, $\alpha_i(s_k) = 0$ y $\alpha_l(s_j) = \alpha_l(s_k)$ con $l = 0, \dots, N; l \neq i$ es una manera equivalente de decir que s_k es un vecino de s_j .

Las tasas de transición pueden ser determinadas si se conoce como se reparte la carga entre las fibras que no han fallado para cada estado de S , y la manera en que la carga de cada fibra aún en operación, afecta la probabilidad de que ésta falle. En particular, consideraremos la llamada regla de reparto de carga local para el primer punto, y la llamada *power law breakdown rule* para el segundo.

Dado que el cable soporta todo el peso X a través de las fibras que no han fallado, cuando una de éstas falla, la carga que soportaba dicha fibra es repartida entre las demás fibras en operación de acuerdo a alguna determinada regla de reparto de carga.

Podemos caracterizar una regla de reparto de carga especificando la parte de la carga total X que soporta cada fibra en operación, de cada posible estado de S . Así por ejemplo, una posible regla de reparto de carga es que "la carga total se reparte igualmente entre las fibras en estado operativo: si en un estado $s \in S$ hay k fibras en buen estado, cada una de ellas soporta $L(N + 1)/k$ con $X = L(N + 1)$."

La regla anterior puede no ser válida cuando hay interacción entre fibras, por ejemplo, cuando las fibras se hallan entrelazadas. En este tipo de casos, los efectos de la ruptura o fallo de una fibra afectan principalmente a las fibras vecinas más cercanas. Un ejemplo de esto es la llamada regla de reparto de carga local (*local load sharing rule*).

De acuerdo a esta regla, las fibras se suponen organizadas en un círculo de tal manera que, cuando una fibra falla, la carga que soportaba se reparte entre las fibras en operación más cercanas a ella. De hecho, si una fibra operativa está rodeada por r fibras en mal estado, la carga que soporta la fibra es

$$l = \begin{cases} (1 + \frac{r}{2})L & \text{si } r = 0, \dots, N-1 \\ (N+1)L & \text{si } r = N \end{cases}$$

en donde $\mathcal{L} = (N+1)L$ es la carga total.

En [(1) p. 35], se demuestra que si $K(l)$ es una función convexa de l , entonces

$$\sum_{k>i} q_{ik} \leq \sum_{k>j} q_{jk} \quad s_j \leq s_i \quad s_j, s_i \in S$$

Por lo tanto, si $i(\cdot)$ es monótona creciente en el sentido usual, si $c(\cdot)$ es una función convexa del número de componentes de cada estado y si $K(l)$ es una función convexa de l , se satisfacen las condiciones del teorema 4.2 y, por lo tanto, el algoritmo es aplicable.

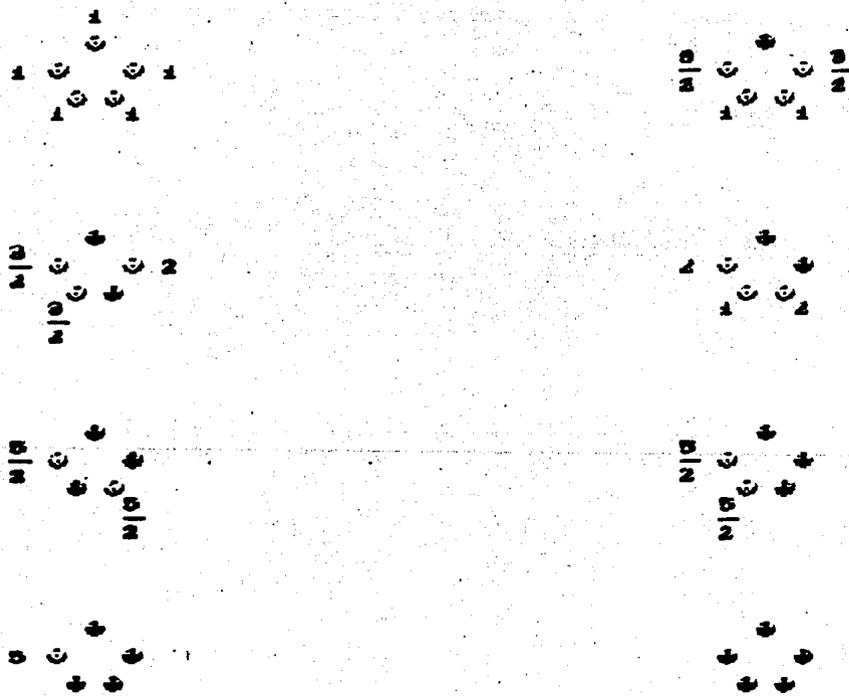
La función de fallo a utilizar es de la forma $K(l) = l^\beta/A$, con A, β constantes positivas dependientes del material de la fibra. Esta función de fallo, conocida como *power law breakdown rule*, indica que si una fibra soporta una carga l_t al tiempo t , la probabilidad de que se rompa en el intervalo $(t, t+h]$ es

$$\frac{(l_t)^\beta}{A} h + o(h)$$

Dado que si una función es derivable con derivada creciente, entonces es convexa, $K(l) = l^\beta/A$ es convexa si $\beta \geq 1$

Como ejemplo numérico, consideraremos un sistema con $N = 5$ fibras que soportará una carga total de $X = 5$ y tal que la regla de fallo esté dada por $K(l) = 1^{\beta}/\Lambda$ con $\beta = 5$ y $\Lambda = 1$, con regla de reparto de carga local.

En la *figura 1*, se muestran ocho configuraciones diferentes de fibras en estado operativo, así como las cargas que soportan. Como originalmente suponemos 5 fibras distinguibles, hay en total 2^5 configuraciones posibles, siendo las demás iguales a alguna de las configuraciones de la *figura 1*, si se aplica una rotación o una reflexión.



⊕ = fibra con fallo
 ⊙ = fibra en condición operativa

figura 1.

A continuación se ejemplifican las tasas de transición entre algunos estados usando reparto de carga local (flama 2).

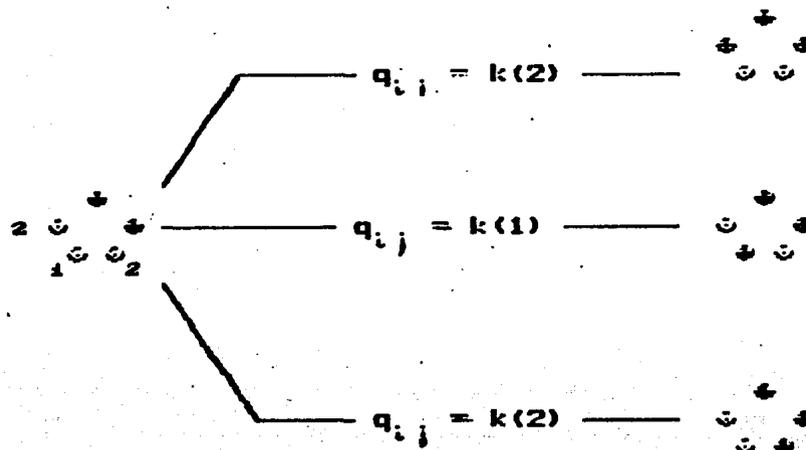


figura 2.

El modelo, considerado como un sistema con componentes distinguibles, tiene un total de $2^5=32$ estados diferentes, pero como muchos estados son indistinguibles bajo rotaciones o reflexiones, esta condición de simetría nos permite modelar con sólo 8 estados diferentes (mostrados en la figura 1). Las tasas de transición entre estados se muestran en la figura 3. Se modelará entonces el sistema como un proceso general.

A continuación se muestra tanto la información como los resultados de un ejemplo para esta aplicación. Se observa que la función de costos elegida es una función convexa del tamaño de cada estado.

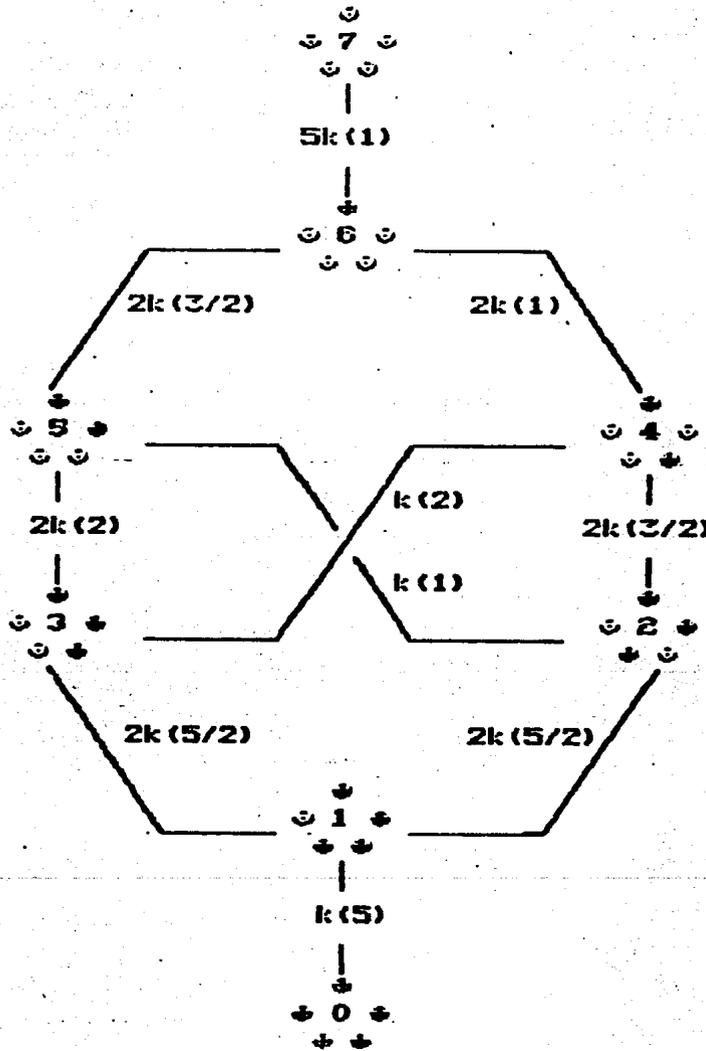


figura 3.

 INFORMACION GENERAL

GANANCIA NETA PROMEDIO POR UNIDAD DE TIEMPO = 13.737437

PROCESO GENERAL
 Numero total de Estados = 8
 Tipo de Transiciones : NO SIMPLES

 CLASE OPTIMA DE CONTINUACION

7
 6

 CLASE OPTIMA DE REEMPLAZO

4
 5
 1
 0

 Estado 7

Tasa de ingresos : 20.000000
 Costos de reemplazo : 1.000000
 Tasa de ingresos NETA: 18.000000
 Numero de comp. oper.: 5
 Tiempo medio estadia : 0.200000

Tasas de transicion del estado 7 a los estados :

6	5.000000;	5	0.000000;	4	0.000000;
3	0.000000;	2	0.000000;	1	0.000000;
0	0.000000;				

Estado 6

Tasa de ingresos : 10.000000
 Costos de reemplazo : 1.400000
 Tasa de ingresos NETA: 16.201250
 Numero de comp. oper.: 4
 Tiempo medio estadia : 0.050182

Tasas de transicion del estado 6 a los estados :
 5 15.107500; 4 2.000000; 3 0.000000;
 2 0.000000; 1 0.000000; 0 0.000000;

Estado 5

Tasa de ingresos : 16.000000
 Costos de reemplazo : 1.500000
 Tasa de ingresos NETA: 16.500000
 Numero de comp. oper.: 3
 Tiempo medio estadia : 0.013574

Tasas de transicion del estado 5 a los estados :
 4 0.000000; 3 64.000000; 2 1.000000;
 1 0.000000; 0 0.000000;

Estado 4

Tasa de ingresos : 14.000000
 Costos de reemplazo : 1.500000
 Tasa de ingresos NETA: 7.573750
 Numero de comp. oper.: 3
 Tiempo medio estadia : 0.002466

Tasas de transicion del estado 4 a los estados :
 3 32.000000; 2 15.107500; 1 0.000000;
 0 0.000000;

Estado 3

Tasa de ingresos : 6.000000
 Costos de reemplazo : 2.000000
 Tasa de ingresos NETA: 107.312500
 Numero de comp. oper.: 2
 Tiempo medio estadia : 0.004859

Tasas de transicion del estado 3 a los estados :
 2 0.000000; 1 175.312500; 0 0.000000;

Estado 2

Tasa de ingresos :	7.000000
Costos de reemplazo :	2.000000
Tasa de ingresos NETA:	-106.312500
Numero de comp. oper.:	2
Tiempo medio estadia :	0.000261

Tasas de transicion del estado 2 a los estados :
 1 175.312500; 0 0.000000;

Estado 1

Tasa de ingresos :	2.000000
Costos de reemplazo :	2.000000
Tasa de ingresos NETA:	-15623.000000
Numero de comp. oper.:	1
Tiempo medio estadia :	0.000320

Tasas de transicion del estado 1 a los estados :
 0 3125.000000;

Estado 0

Tasa de ingresos :	0.000000
Costos de reemplazo :	0.000000
Tasa de ingresos NETA:	0.000000
Numero de comp. oper.:	0

REFERENCIAS

- 1.- Rodríguez, D.E., "Optimal replacement for N component systems", M.S. thesis, Cornell University, Ithaca, New York, 1984.
- 2.- Taylor, H.M. & Karlin, S., *An Introduction to Stochastic Modelling*, Academic Press, New York, 1974.
- 3.- Taylor, H.M. & Rodríguez, D.E., "Optimal replacement for fault tolerant systems", *Naval Research Logistic Quarterly*, 33, 747-757, 1986.
4. *Turbo Pascal Reference Manual*, version 3.0, Scotts Valley CA, Borland International Inc., 1985.

CONCLUSIONES

La teoría de reemplazo Óptimo ha sido estudiada por varios investigadores, sin embargo, los resultados referentes a la existencia y forma de las políticas Óptimas se enfocan al aspecto teórico y no proporcionan una manera explícita de encontrar dichas políticas. Por eso es importante el contar con algoritmos que, al menos para ciertos modelos como en la presente tesis, nos permita determinar explícitamente una política de reemplazo Óptimo.

Otro aspecto que es importante resaltar es que la forma de la política Óptima obtenida en el capítulo 2 es la de una "política de control", es decir, una política que queda determinada por una "frontera" que divide al espacio de estados en dos clases: una de reemplazo y otra de continuación. Este hecho que es intuitivamente esperado se traduce en una política de reemplazo simple y de muy fácil implementación.

El sistema de computación que se realizó para implementar el algoritmo está diseñado en forma totalmente interactiva lo que permite la fácil captura y modificación de información necesaria, de tal manera que se cuenta con una herramienta que permite realizar desarrollos prácticos sobre estos modelos.