

41  
2Ej



# Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE INGENIERIA

EJERCICIOS PARA ASIGNATURA INTRODUCCION  
AL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

## T E S I S

Que para obtener el Título de  
INGENIERO CIVIL  
p r e s e n t a

### ISMAEL DOMINGUEZ ALMARAZ



Asesor: ING. HECTOR SANGINES GARCIA

México, D. F.

1987



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

	Hoja No
1.0 Introducción -----	1
1.1 Contenido de la Tesis -----	1
2.0 Elasticidad lineal -----	3
2.1 Ley de Hooke -----	4
2.2 Relación de Poisson -----	5
2.3 Ley de Hooke Generalizada -----	7
2.4 La función de Airy -----	10
2.5 Problemas Resueltos -----	13
2.6 Problemas Propuestos -----	37
3.0 Plásticidad -----	39
3.1 Generalidades -----	39
3.2 Tipos de materiales Frágiles y Dúctiles -----	40
3.3 Postulados fundamentales de la Plásticidad -----	40
3.4 Modelos analógicos plásticos -----	41
3.5 Leyes esfuerzo deformación plástica -----	42
3.5.1 Relaciones Incrementales -----	42
3.5.2 Relaciones Totales esfuerzo deformación -----	46
3.6 Resolución de Problemas elasto-plásticos -----	46
3.6.1 Mecanismos de Falla -----	47
3.6.2 Criterio de Von Mises -----	48
3.6.3 Criterio de Tresca -----	49
3.6.4 Teoría de Rankine -----	49
3.6.5 Teoría de Saint-Venant -----	50
3.6.6 Teoría de Beltrami -----	50
3.7 Análisis y diseño límite -----	52
3.7.1 Teorema 1 -----	52

	Hoja No
3.72 Teorema 2 -----	53
3.8 Selección de mecanismos de Falla -----	54
3.9 Problemas Resueltos -----	55
3.10 Problemas Propuestos -----	70
4.0 Conclusiones -----	71

## 1.0 INTRODUCCION

La elaboración de esta Tesis ha sido con el objeto de que sirva de apoyo al alumno, así como proporcionarle herramientas necesarias tanto en teoría como en la resolución de problemas prácticos que se plantean en los Temas de Elástica lineal y Plástica de Materiales, que forman parte de la materia Introducción al comportamiento de materiales. impartida por la Facultad de Ingeniería para la carrera de Ingeniero Civil, con el fin de alcanzar dicho objetivo, sin pretender profundizar demasiado -- por lo muy extenso de los temas, se expone un breve resumen sobre lo fundamental de la parte teórica, enseguida se presenta una serie de ejercicios, explicados en forma ordenada y a detalle para que el alumno logre entender con claridad la parte conceptual y así reafirme sus conocimientos en los problemas aplicados de estos temas.

## 1.1 CONTENIDO DE LA TESIS

Este trabajo consta de dos temas fundamentales, En el capítulo dos trata sobre la Elástica lineal tema que se inicia a partir de la Ley de Hooke generalizada la cual expresa la relación lineal entre el esfuerzo y la deformación incluyendo cierto número de relaciones posibles entre estado de esfuerzo deformación, luego se describe el Metodo de Airy el cual propone una función esfuerzo solución del problema elástico en dos dimensiones obligandola a cumplir las ecuaciones de equilibrio elástico y las correspondientes de frontera, posteriormente se presenta una serie de ejercicios resueltos y propuestos en una can

tividad suficiente para que sean una muestra representativa de los diferentes tipos de problemas que se pueden presentar en el tema. En el capítulo tres trata sobre la Plásticidad de los materiales; Se inicia con los postulados fundamentales de la Plásticidad para seguir con las leyes esfuerzo deformación plástica, en este caso se propusieron dos diferentes tipos de relación que son, Relaciones Incrementales y Relaciones Totales, luego se expone en forma general las ecuaciones que resuelven problemas elastoplásticos, -enseguida se expresan en forma resumida diferentes mecanismos de Falla Plástica, Criterio de Von Mises, Teoría de Rankine, Teoría de Saint Venant y Criterio de Tresca. Finalmente se presenta una serie de ejercicios resueltos y propuestos para que el alumno registre sus conocimientos.

Cabe hacer mención que para el desarrollo de la parte teórica de esta Tesis se utilizó como referencia principal los apuntes de --clase de los ingenieros; Agustin Demeneghi Colina, Roberto Magana del Toro y Hector Sanginés Garcia.

## 2.0 ELASTICIDAD LINEAL

### INTRODUCCION.

Se dice que un cuerpo es elástico lineal cuando cumple con las siguientes condiciones;

- a) Es un cuerpo deformable idealmente.
- b) Las deformaciones originadas por la aplicación de un sistema cualquiera de cargas que se incrementan gradualmente, desaparecen al dejar de actuar éstas también gradualmente.
- c) Las deformaciones que experimenta son directamente proporcionales a los esfuerzos que las originan.

Por los postulados anteriores se considera que la Elasticidad lineal es parte de la Mecánica de los medios continuos que estudia el comportamiento de los sólidos cuyas propiedades son independientes del tiempo y en el intervalo en que las deformaciones producidas en los medios continuos son recuperables al cesar el esfuerzo que las produce.

Puede afirmarse que la mayoría de los materiales sólidos usados por el Ingeniero, como la mayor parte de los metales, plástico, madera, hormigón o concreto y materiales cerámicos tienen un comportamiento elástico lineal para niveles de esfuerzo bajos. Sin embargo, cuando los niveles de esfuerzo aplicados son considerables, el comportamiento del material deja de ser elástico lineal, no pudiéndose describir su comportamiento a partir de la teoría de la elasticidad lineal.

## 2.1 LEY DE HOOKE

La ley de Hooke expresa una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones. El factor de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones recibe el nombre de Módulo Elástico o Módulo de Young (E). Matemáticamente la ley de Hooke se puede escribir como:

$$\sigma = E \epsilon \quad (1.1)$$

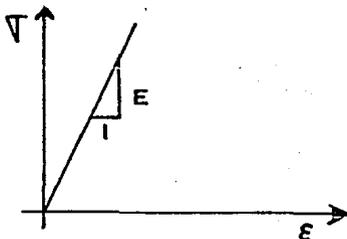
donde;

$\sigma$  = esfuerzo normal

$\epsilon$  = deformación unitaria

E = Módulo de elasticidad del material.

Para un material elástico sometido a un estado de esfuerzos uniaxial, la curva esfuerzo deformación es una línea recta con pendiente igual al módulo de elasticidad del material (Fig. 1)



(Fig. 1)

El módulo de elasticidad depende de muchos factores, siendo las más importantes el tipo de material, temperatura y velocidad de carga. Dado que la deformación unitaria es adimensional las unidades del módulo de elasticidad son unidades de esfuerzo.

## 2.2 RELACION DE POISSON

Per experimentos efectuados se sabe que además de la deformación de los materiales en la dirección del esfuerzo normal aplicado, se puede observar otra propiedad notable en todos los materiales sólidos, a saber, que perpendicularmente al esfuerzo aplicado, ocurre cierta expansión o contracción lateral (transversal), este fenómeno se ilustra en la fig. 2 a) y b). Donde las deformaciones se han exagerado. Para mayor claridad esto se puede expresar así, si se somete un cuerpo sólido a tensión axial, se contrae lateralmente, por otra parte si se le comprime, el material se ensancha lateralmente.

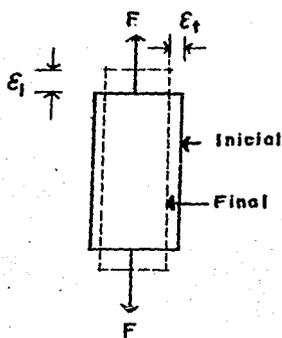


Fig. 2 (a)

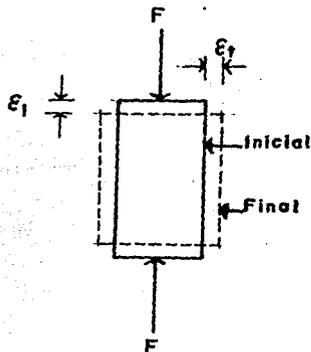


Fig. 2 (b)

La relación entre la deformación unitaria transversal ( $\epsilon_t$ ) y la deformación unitaria longitudinal ( $\epsilon_l$ ) con signo negativo, se conoce como relación de Poisson.

$$\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} \quad (1.2)$$

donde,

$\nu$  = relación de Poisson

$\epsilon_t$  = deformación unitaria transversal

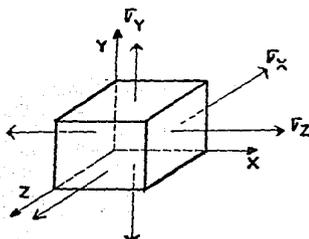
$\epsilon_l$  = deformación unitaria longitudinal

El signo negativo que aparece en la expresión obedece al hecho de que si el esfuerzo normal aplicado es de tensión, la deformación en la dirección del esfuerzo normal será positiva, mientras que la deformación transversal será negativa ya que el material se contrae; por lo tanto, la relación de Poisson será positiva; si el esfuerzo normal aplicado es de compresión, la deformación en la dirección del esfuerzo normal es de signo negativo, en tanto que la deformación transversal es positiva, la relación de Poisson definida de acuerdo con la expresión (1.2) siempre será positiva.

### 2.3 LEY DE HOOKE GENERALIZADA

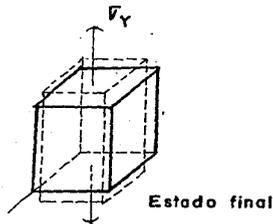
Ahora consideraremos la deformación elástica en tres dimensiones. - El modelo que nos ocupará es isotrópico ( idénticas propiedades en todas direcciones en un punto ) y homogéneo ( sin variaciones en las propiedades de un punto a otro ).

Considerese un cuerpo sólido sometido a un estado de esfuerzo triaxial tal como se ilustra en la fig. 3 a) y b). Para calcular las deformaciones que se generan en el cuerpo por efecto de los esfuerzos aplicados es necesario aplicar el principio de superposición, el cual establece que el esfuerzo a la deformación resultante en un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas es la suma algebraica de los esfuerzos producidos por cada una de las fuerzas aplicadas en forma individual. Este principio tiene validez únicamente cuando existe una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones.



(a)

Fig. 3



Estado inicial

Estado final

(b)

Tomando en cuenta lo anterior supongamos inicialmente que el cuerpo está sometido a un esfuerzo normal de tensión  $\sigma_x$ ; por lo tanto, se trata de un estado de esfuerzo uniaxial, el cual produce alargamientos en la dirección del esfuerzo aplicado y acortamientos o contrac-

ciones en las direcciones Y y Z fig. 3-b) las deformaciones en las direcciones X, Y y Z son respectivamente;

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_x \quad ; \quad \epsilon_z = \nu \epsilon_x$$

Cuando se aplica el esfuerzo normal  $\sigma_y$  en forma individual se tiene:

$$\epsilon_x = -\nu \epsilon_y \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad ; \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_y$$

Finalmente para  $\sigma_z$  se obtiene;

$$\epsilon_x = -\nu \epsilon_z \quad ; \quad \epsilon_y = -\nu \epsilon_z \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

La deformación resultante en una dirección específica, es la suma algebraica de cada una de las deformaciones producidas en esa dirección por todos los esfuerzos aplicados en forma individual. Así,

para la dirección X se tiene.  $(\epsilon_x)_T = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$

$$(\epsilon_x)_T = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.3)$$

Análogamente, para las direcciones Y y Z se obtiene.

$$(\epsilon_y) = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1.4)$$

$$(\epsilon_z) = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1.5)$$

Las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) se conocen como ley de Hooke generalizada. También adoptan el nombre de ecuaciones constitutivas para medios elásticos lineales homogéneos e isótropos. El concepto de homogeneidad implica que las propiedades mecánicas (Módulo de Young E y relación de Poisson) de los medios elásticos, son las mismas en cualquier punto del material, mientras que la isotropía supone que la microestructura del material está constituida de elementos orientados aleatoriamente, lo cual elimina la existencia de direcciones preferenciales en propiedades mecánicas. Si se quiere expresar los esfuerzos en función de las deformaciones se tiene lo siguiente:

$$\sigma_x = 2G \cdot \epsilon_x + \lambda J_1 \quad (1.6)$$

$$\sigma_y = 2G \cdot \epsilon_y + \lambda J_1 \quad (1.7)$$

$$\sigma_z = 2G \epsilon_z + \lambda J_1 \quad (1.8)$$

Donde:

$$\lambda = \text{Constante de Lm\u00e9} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E$$

$$E = \text{M\u00f3dulo de R\u00edgidez del material} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$J_1 = \text{Primer invariante del Tensor de deformaciones} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

En el caso de que se tenga un estado general de esfuerzos, referido a un sistema cartesiano las ecuaciones (1.6), (1.7) y (1.8) -- pueden manejarse de la manera siguiente:

$$\sigma_x = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_x \quad (1.9)$$

$$\sigma_y = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_y \quad (1.10)$$

$$\sigma_z = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_z \quad (1.11)$$

$$\tau = G \tau_{xy} \quad (1.12)$$

$$\tau = G \tau_{xz} \quad (1.13)$$

$$\tau = G \tau_{yz} \quad (1.14)$$

## 2.4 LA FUNCION DE AIRY

En 1862 George Bidell Airy, Astrónomo y matemático inglés, propone por primera vez una función esfuerzo solución del problema elástico en dos dimensiones, obligándola a cumplir las ecuaciones de -- equilibrio elástico y las correspondientes de frontera.

Airy parte de las ecuaciones de equilibrio elástico correspondientes al estado bidimensional de esfuerzo para proponer la función -- que las verifica, como se describe a continuación.

Puesto que el caso de esfuerzos planos (Bidimensional) se tiene -- que

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$\epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$$

Para este caso las relaciones de Hooke se reducen a

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (1.15)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (1.16)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{2G} \tau_{xy} \quad (1.17)$$

Y las ecuaciones de equilibrio a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.19)$$

Ahora el fundamento del método consiste en suponer que existe una función potencial  $\phi$  ( que es la que se llama función de Airy ) la cual se define de tal manera que tenga las propiedades siguientes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_x \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sigma_y \quad (1.21)$$

$$-\frac{J^2 \theta}{J_x J_y} = \tau_{xy} \quad (1.22)$$

Lo que implica que si se conoce  $\theta$  es posible obtener  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en las ecuaciones de equilibrio, estas se satisfacen. Esto implica a su vez, que la función de Airy cumple con las condiciones de equilibrio.

Por otra parte observando que

$$\frac{J^2 \epsilon_x}{J_y^2} + \frac{J^2 \epsilon_y}{J_x^2} = \frac{J^2}{J_y^2} \left( \frac{J \sigma_x}{J_x} \right) + \frac{J^2}{J_x^2} \left( \frac{J \sigma_y}{J_y} \right) = \frac{J^2}{J_x J_y} \left( \frac{J \sigma_x}{J_x} + \frac{J \sigma_y}{J_y} \right) = \frac{2 J \epsilon_{xy}}{J_x J_y} \quad (1.23)$$

Que es una ecuación de compatibilidad de deformaciones, la cual liga deformaciones lineales con angulares.

Ahora si en la ecuación (1.23) se remplazan los valores de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_{xy}$  dados por la ley de Hooke se tiene.

$$\left( \frac{J^2 \sigma_x}{J_y^2} - \nu \frac{J^2 \sigma_y}{J_y^2} \right) + \left( \frac{J^2 \sigma_y}{J_x^2} - \nu \frac{J^2 \sigma_x}{J_x^2} \right) = \frac{E}{G} \frac{J^2 \tau_{xy}}{J_x J_y} \quad (1.24)$$

Relación que liga los esfuerzos normales con tangenciales.

A su vez si en la ecuación (1.24) se remplazan los valores de las ecuaciones (1.20), (1.21) y (1.22) y considerando que  $\frac{E}{G} = 2(1+\nu)$  se tiene

$$\left( \frac{J^4 \theta}{J_y^4} - \nu \frac{J^4 \theta}{J_x^2 J_y^2} \right) + \left( \frac{J^4 \theta}{J_x^4} - \nu \frac{J^4 \theta}{J_x^2 J_y^2} \right) + 2(1+\nu) \frac{J^4 \theta}{J_x^2 J_y^2} = 0$$

Simplificando se tiene

$$\frac{J^4 \theta}{J_x^4} + \frac{J^4 \theta}{J_y^4} + 2 \frac{J^4 \theta}{J_x^2 J_y^2} = 0$$

o sea

$$\frac{J^4 \theta}{J_x^4} + \frac{J^4 \theta}{J_x^2 J_y^2} + \frac{J^4 \theta}{J_y^4} = 0 \quad (1.25)$$

que en forma condensada puede escribirse como

$$\nabla (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (1.26)$$

Ya que  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla^2 \phi) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ \nabla^2 (\nabla^2 \phi) &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (1.27)$$

que es igual a la ecuación (1.25).

De la ecuación (1.26) se concluye que la función de Airy ( $\phi$ ) debe ser biarmónica, luego entonces de la solución de la ecuación (1.26) y de las condiciones de frontera de que se trate se obtendrá la función  $\phi$  y mediante las ecuaciones (1.20), (1.21) y (1.22) se obtendrán a su vez las funciones.

$$\sigma_x = \phi_{xx}(x,y) ; \quad \sigma_y = \phi_{yy}(x,y) ; \quad \tau_{xy} = -\phi_{xy}$$

Con lo que se tendrá determinado el estado de esfuerzos para este caso bidimensional.

Debe aclararse entonces que el problema elástico se ha convertido en la obtención de la solución de la ecuación diferencial biarmónica (1.25) o (1.26) mas las condiciones de frontera.

## 2.5 PROBLEMAS RESUELTOS

### Problema 1

Los aristas de un paralelepipedo recto rectangular tienen las siguientes longitudes; AM=2 cms. BM=1.6. , CM=2.8 cms. y sus caras estan sometidas a la acción de las siguientes fuerzas; la cara BC a 6700 Kg. de tensión, la CA a 9400 Kg. de compresión; la CD a 7300 Kg. de compresión. El módulo de elasticidad es  $E=2 \times 10^6$  --  $\text{Kg}/\text{cm}^2$  el de Poisson,  $\nu=0.3$ . Hallar las deformaciones principales a que esta sometido el cuerpo así como la energía de deformación elástica.

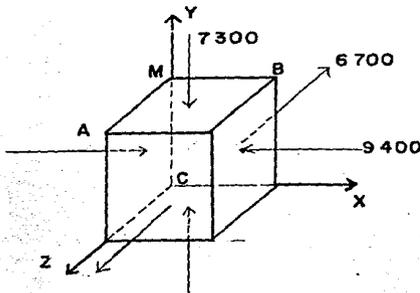


Fig. 4

### Solución;

Se calculan los esfuerzos para cada una de las caras del paralelepipedo; el esfuerzo en Ingeniería se define como una fuerza por unidad de área de sección transversal,

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{-9400}{2.8 \times 1.6} = \frac{-9400}{5.6} = -1678.5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{-7300}{2 \times 1.6} = \frac{-7300}{3.2} = -2281.2 \text{ "}$$

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{A_3} = \frac{6700}{2.8 \times 1.6} = \frac{6700}{4.48} = 1495.5 \text{ "}$$

Una vez obtenidos los esfuerzos se procede a calcular las deformaciones; para encontrar las deformaciones principales utilizamos la ley de Hooke generalizada ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) las cuales expresan las deformaciones en función de los esfuerzos principales.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \times 10^6} (-1678.7 - 0.3(2281.2 + 1495.5)) = -72.13 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} (-2281.2 - 0.3(-1678.5 + 1495.5)) = -111.31 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} (1495.5 - 0.3(-1678.5 - 2281.2)) = 134.17 \times 10^{-5}$$

La energía se define como la capacidad de realizar trabajo; a su vez el trabajo como el producto de una fuerza y la distancia recorrida en la dirección de la misma. En nuestro problema, los esfuerzos multiplicados por sus áreas respectivas dan fuerzas, y las deformaciones son distancias recorridas. El producto de estas dos cantidades es el trabajo interno realizado. Este trabajo se almacena en el cuerpo como energía de deformación elástica. Si nuestro paralelepipedo inicialmente esta libre de esfuerzo, la fuerza que actua finalmente va en aumento linealmente desde cero hasta que alcanza su valor total, Por lo tanto debemos considerar la fuerza media que actua en el paralelepipedo mientras ocurre la deformación.

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z)$$

$$U_0 = \left[ 0.5(-1.678.5)(-72.13) + 0.5(-2281.2)(-111.31) + (1495.5)(134.17) \right]$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (1.21 + 2.53 + 2) = 2.87 \text{ Kg-cm/cm}^3$$

## Problema 2

Un cúbico está situado en el espacio, donde está sujeto a una presión isotrópica de  $20 \text{ Kg/cm}^2$ . Su volumen disminuye  $1/10^5$ . Calcular la relación de las deformaciones transversal y longitudinal sabiendo que  $E=2 \times 10^6$ .

Solución:

La relación entre la deformación unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal se conoce como relación de Poisson  $\nu$ . Esta relación es la que se va a calcular.

Ahora bien como el cubo está sujeto a una presión isotrópica esto nos indica que las propiedades mecánicas son iguales en cualquier dirección por lo tanto los esfuerzos principales valen lo mismo.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -20 \text{ Kg/cm}^2$$

Las deformaciones que sufre el cubo por los esfuerzos provocarán un cambio de volumen el cual se puede cuantificar como:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \frac{1}{10^5}$$

Tomando en cuenta la ley de Hooke, la deformación volumétrica se puede expresar como:

$$\epsilon_v = \frac{1}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\nu (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Sustituyendo valores se tiene

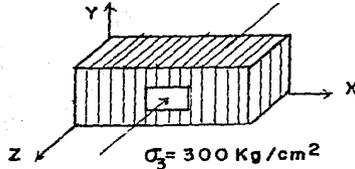
$$-\frac{2 \times 10^6}{10^5} (-20 - 20 - 20) - 2\nu (-20 - 20 - 20)$$

despejando

$$\nu = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

### Problema 3

Un cúbico se encuentra confinado en un hueco de paredes rígidas. sobre su cara libre se ejerce un esfuerzo normal constante. Determine los esfuerzos normales que originan sobre las paredes del cúbico si  $E=2 \times 10^6$  y  $\nu = 0.30$



### Solución,

Sabemos por la ley de Hooke que las deformaciones son proporcionales a los esfuerzos por lo tanto en nuestro problema podemos encontrar la deformación en la dirección de

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} = \frac{300}{2 \times 10^6} = 1.5 \times 10^{-4}$$

Las deformaciones en las direcciones X y Y son:  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  puesto que el cúbico se encuentra confinado por paredes rígidas.

Utilizando las expresiones (1.3), (1.4) y (1.5) de la ley de Hooke e igualando las deformaciones principales  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  se tiene lo siguiente.  $(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3))$

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3 = \sigma_2 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3$$

$$\sigma_1 + \nu\sigma_1 = \sigma_2 + \nu\sigma_2$$

despejando  $\sigma_1(1 + \nu) = \sigma_2(1 + \nu)$

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

De la expresión (1.3) y tomando en cuenta que  $\sigma_1 = \sigma_2$

Sustituyendo  $\sigma_1$  por  $\sigma_2$

$$\text{entonces } \sigma = \sigma_1 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \quad ; \quad \sigma = \sigma_1 - \nu\sigma_1 - \nu\sigma_3$$

$$\sigma_1 = \frac{\nu \sigma_3}{(1 - \nu)} \quad ; \quad \sigma = \frac{0.3(-300)}{1 - 0.3} = -128.57 \text{ Kg/cm}^2$$

Como sabemos que  $\sigma_1 = \sigma_2$  por lo tanto

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -128.57 \text{ Kg/cm}^2 \quad \sigma_3 = -300 \text{ Kg/cm}^2$$

Problema 4

Para el estado de esfuerzo de la fig. el módulo de elasticidad  $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  determinar:

- el vector esfuerzo normal  $\sigma$  y sus cortantes asociados  $\tau$  para los planos cuyos cosenos directores son los siguientes:  
 plano 1  $\alpha = 60^\circ$   $\beta = 0^\circ$   $\gamma = 30^\circ$   
 plano 2  $\alpha = 60^\circ$   $\beta = 30^\circ$   $\gamma = 0^\circ$   
 plano 3  $\alpha = 0^\circ$   $\beta = 30^\circ$   $\gamma = 60^\circ$
- las deformaciones lineales principales  $\epsilon_1, \epsilon_2$  y  $\epsilon_3$
- la deformación volumétrica unitaria
- la energía de deformación elástica  $U$

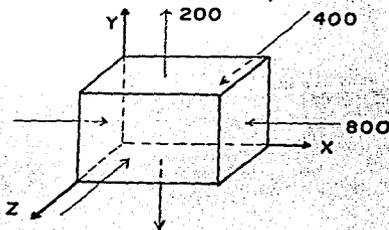


Fig. 6

Solución

De la figura obtenemos el Tensor esfuerzo que es el siguiente:

$$T = \begin{pmatrix} -800 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{pmatrix}$$

Para obtener el vector esfuerzo basta multiplicar el tensor es - fuerzo por los cosenos directores del vector normal a la superfi cie.

Para el plano 1 el vector unitario esta dado por:

$$\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

$$\vec{u} = \cos 60^\circ \vec{i} + \cos 0^\circ \vec{j} + \cos 30^\circ \vec{k}$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -800 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.866 \end{pmatrix} = (-400i - 0j + 346.4k)$$

Para obtener la magnitud del vector esfuerzo es necesario el producto escalar del vector  $\vec{S}$  por el vector unitario  $\vec{u}$

$$\sigma = (-400i - 346.4k) \cdot (0.5i + 0.866k)$$

Como ya se sabe las componentes del vector esfuerzo son el vector-esfuerzo normal  $\vec{\sigma}$  y el vector esfuerzo cortante  $\vec{\tau}$ .

$$\vec{S} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

Por lo tanto para la determinación del esfuerzo cortante basta realizar una resta de vectores.  $\vec{\tau} = \vec{S} - \vec{\sigma}$

$$\vec{\tau} = (-400i - 346.4k) - [(-500)(0.5i + 0.866k)] = -150i - 86.6k$$

Su magnitud se obtiene de la siguiente manera.

$$\tau = \sqrt{(150)^2 + (86.6)^2} = 173.2$$

Para el plano 2 se procede de la misma manera que en el plano 1

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -800 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & -400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{pmatrix} = -400i + 173.2k \quad \begin{aligned} \vec{u} &= \cos 60^\circ i + \cos 30^\circ j \\ \vec{u} &= 0.5i + 0.866j \end{aligned}$$

Analogamente el vector esfuerzo normal se obtiene

$$\vec{\sigma} = -400i + 173.2j$$

que multiplicado por su vector unitario da su magnitud

$$\sigma = (-400i + 173.2j) \cdot (0.5i + 0.866j) = -200.0 + 150 = -50 \text{ Kg/cm}^2$$

y haciendo nuevamente la resta de vectores se tiene

$$\vec{\tau} = (-400i + 173.2j) - (-25j - 43.3k) = -400i + 218.5j + 43.3k$$

$$\tau = \sqrt{(400)^2 + (218.5)^2 + (43.3)^2}$$

Nuevamente para el plano 3 se obtiene el vector unitario

$$\vec{u} = 0.866j + 0.5k$$

Analogamente el vector esfuerzo normal se obtiene

$$\vec{S} = 173j - 200k$$

$$\sigma = (173.2j - 200k) \cdot (0.866j + 0.5k) = 150 - 100 = 50 \text{ Kg/cm}^2$$

obteniendo el vector esfuerzo cortante

$$\vec{\tau} = (173.2j - 200k) - (25j + 43.3k) = 148.2j - 243.3k$$

a su vez obteniendo su magnitud.

$$\tau = 284.88 \text{ Kg/cm}^2$$

b) Para encontrar las deformaciones principales las obtendremos por medio de la ley de Hooke generalizada.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2 \times 10^6} \left[ -800 - 0.3(200 - 400) \right] = \frac{-700}{2 \times 10^6} = -3.7 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{2 \times 10^6} \left[ 200 - 0.3(-800 - 400) \right] = \frac{560}{2 \times 10^6} = 2.8 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{2 \times 10^6} \left[ -400 - 0.3(-800 + 200) \right] = \frac{-220}{2 \times 10^6} = -1.1 \times 10^{-4}$$

c) La deformación volumétrica se puede expresar en función de las deformaciones principales como  $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$

$$\epsilon_v = (2.8 - 1.1 - 3.7) 10^{-4} = -2 \times 10^{-4}$$

d) la energía de deformación elástica es la fuerza media que actúa mientras ocurre la deformación, esta fuerza multiplicada por la distancia es el trabajo que a su vez se almacena como energía de deformación interna recuperable tratándose de cuerpos elásticos.

$$U = (O_1 \epsilon_1 + O_2 \epsilon_2 + O_3 \epsilon_3)$$

$$U = \frac{(-800)(-3.7) + (200)(2.8) + (-400)(-1.10)}{2 \times 10^4} = 19.8 \times 10^{-2} \text{ Kg/cm}^2$$

Problema 5

Las deformaciones principales en un punto en un sólido tienen la siguiente relación  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 / n$

En que relación están los esfuerzos ?

Solución:

Sabemos que la ley de Hooke generalizada nos da las deformaciones principales en función de los esfuerzos principales de la siguiente manera.

$$\epsilon_1 = \epsilon_2$$

$$\sigma_1 - \nu \sigma_2 - \nu \sigma_3 = \sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3$$

$$\sigma_1 + \nu \sigma_1 = \sigma_2 + \nu \sigma_2$$

$$\sigma_1 (1 + \nu) = \sigma_2 (1 + \nu)$$

Por lo tanto  $\sigma_1 = \sigma_2$

Analogamente se tiene:  $\epsilon_2 = \epsilon_3 / n$

$$\sigma_2 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3 = \sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_2 / n$$

Sustituyendo  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  puesto que  $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\sigma_1 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_3 = \sigma_3 - \nu \sigma_1 - \nu \sigma_1 / n$$

$$\sigma_1 (1 - \nu) - \nu \sigma_3 = \frac{\sigma_3 - 2 \sigma_2}{n}$$

$$\sigma_1 n (1 - \nu) + 2 = \sigma_3 (1 + \nu n)$$

despejando  $\sigma_1$  tenemos

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3 (1 + \nu n)}{n - n \nu + 2}$$

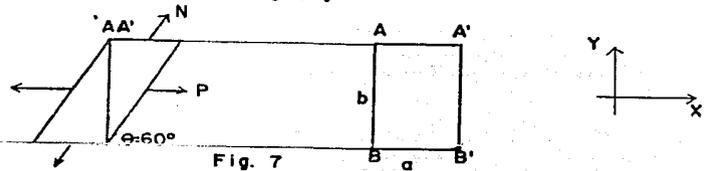
Por lo tanto tenemos la relación de esfuerzos siguientes:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\sigma_3 (1 + \nu n)}{n - n \nu + 2}$$

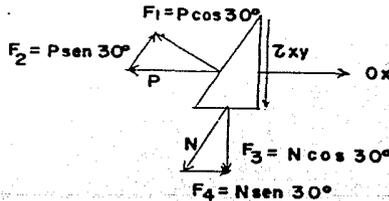
Problema 6

En un paralelepipedo como el mostrado en la figura las fuerzas que actúan están uniformemente distribuidas con el área. obtenga los esfuerzos y su cortante asociado en la superficie AA, BB, así como las deformaciones  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_{xy}$  si:

$N = 600 \text{ Kg}$   
 $P = 500 \text{ Kg}$   
 $\theta = 60^\circ$   
 $a = 20 \text{ cm}$   
 $b = 40 \text{ cm}$   
 $E = 2 \times 10^6$   
 $\nu = 0.3$



Descomponiendo la fuerza P y N en sus componentes obtendremos en el diagrama de cuerpo libre.



Para encontrar el esfuerzo  $\sigma_x$  en la dirección  $\sigma_x$  se utiliza la siguiente expresión.

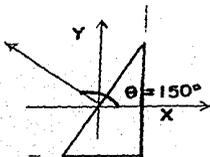
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

Donde  $\sigma_y = \frac{F_3}{A_3} = \frac{N \cos 30^\circ}{(20)^2} = \frac{600(0.866)}{400} = 1.3 \text{ Kg/cm}$

El esfuerzo cortante es.  $\tau_{xy} = \frac{F_4}{A_4} = \frac{N \sin 30^\circ}{(20)^2} = \frac{600(0.5)}{400} = 0.75 \text{ Kg/cm}^2$

El esfuerzo normal vale.  $\sigma = \frac{F_1}{A_1} = \frac{P \cos 30^\circ}{(20)^2} = \frac{500(0.866)}{800} = 0.541 \text{ Kg/cm}^2$

Sustituyendo los valores en la expresión anterior y considerando que  $\theta = 150$



$$0.541 = \frac{\sigma_x + 1.3}{2} + \frac{\sigma_x - 1.3 \cos(300^\circ) + 0.75 \sin(300^\circ)}{2}$$

$$1.082 = 1.5\sigma_x - 0.65$$

$$\sigma_x = 1.155 \text{ Kg/cm}^2$$

Se puede comprobar el valor de  $\tau_{xy}$  utilizando la siguiente expresión

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\text{donde } \tau = \frac{F_p}{A_2} = \frac{P \cos 30^\circ}{40(20)} = \frac{500(0.5)}{800} = 0.31 \text{ Kg/cm}^2$$

Por lo tanto sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$0.31 = -\frac{(1.155 - 1.3)}{2} \sin 300^\circ + \tau_{xy} \cos 300^\circ ; \quad \tau_{xy} = 0.75 \text{ Kg/cm}^2$$

Debido a que nuestro problema esta en un estado de deformación plana

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

Para este caso las relaciones de Hooke se reducen a

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}$$

Por lo tanto sustituyendo valores podemos calcular la deformación --

$$\epsilon_x = \frac{1}{2 \times 10^6} (1.155 - 0.3(1.3)) = \frac{1}{2 \times 10^6} (0.765) = 3.84 \times 10^{-7}$$

La expresión que relaciona el módulo de elasticidad E con el módulo de rigidez al cortante G es la siguiente.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

de donde despejando y sustituyendo valores obtenemos el valor de G--

$$G = \frac{2 \times 10^6}{2(1.3)} = 0.769 \times 10^6$$

Para obtener la deformación  $\epsilon_{xy}$  se sustituyen valores en la expresión de la ley de Hooke.

$$\epsilon_{xy} = \frac{0.75}{2(0.769 \times 10^6)} = 4.8 \times 10^{-7}$$

Problema 7

En un punto se conocen los tensores deformación y esfuerzo

$$E = \begin{pmatrix} 4.08 & 0 & 0 \\ 0 & 2.59 & 0 \\ 0 & 0 & -4.60 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 900 & 0 & 0 \\ 0 & 650 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{pmatrix}$$

Hallar el valor de E, y G.

Solución:

Tanto el Tensor deformación esta compuesto por sus deformaciones principales como el tensor esfuerzo esta formado por sus esfuerzos principales.

La ley de Hooke relaciona las deformaciones con los esfuerzos de la siguiente manera:  $\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$

Sustituyendo valores  $4.08 = \frac{1}{E} (900 - \nu(650 - 500))$

$$4.08E + 150\nu = 900 \quad (1)$$

Análogamente para la deformación  $\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3))$

$$2.59E = 650 - 400\nu$$

$$2.59E + 400\nu = 650 \quad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) se obtiene

$$4.08E + 150\nu = 900$$

$$2.59E + 400\nu = 650$$

Multiplicando (1) por (-400) y (2) por (150)

$$-1632E - 60000\nu = -360000$$

$$\underline{388E + 60000\nu = 97500}$$

$$-1244E = -262500$$

despejando  $E = 2.11 \times 10^6$

Para obtener  $\nu$  sustituimos el valor de E en la ecuación (1)

$$150\nu = 900 - 861 \quad \nu = 0.26$$

El valor de G lo podemos obtener en función de E y  $\nu$  de la siguiente expresión  $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 83.73 \times 10^4$

Problema 8

Una armadura formada por cinco varillas esta comprimida por las fuerzas P mostradas en la figura 8 las varillas tienen el mismo diámetro y son de igual material. Hallar el acortamiento de los puntos B y D siendo A el area de la sección.

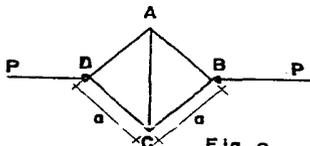
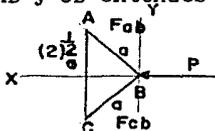


Fig. 8

La armadura de la figura sera analizada por el método de los desplazamientos.

Primero analizaremos el punto B para encontrar las fuerzas que actúan en las barras AB y CB entonces por equilibrio en B.



del triángulo rectángulo ABC se tiene.  $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} a$

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_y = F_{cb} \operatorname{sen} \alpha - F_{cb} \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad ; \quad F_{ab} = F_{cb}$$

$$\sum F_x = -P + F_{ab} \operatorname{cos} \alpha + F_{cb} \operatorname{cos} \alpha = 0$$

$$-P + 2 F_{ab} \operatorname{cos} \alpha = 0$$

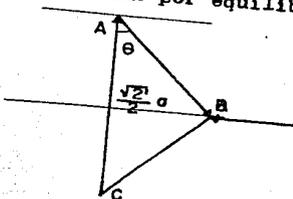
$$F_{ab} = \frac{P}{2 \operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto

$$F_{ab} = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

Ahora bien por equilibrio en A se tiene



$$\sum F_y = 0 \quad F_{ac} - F_{ab} \cos \theta = 0$$

$$\frac{1}{2} F_{ac} = F_{ab} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo los valores de  $\theta$  y de  $\cos \theta$  se tiene

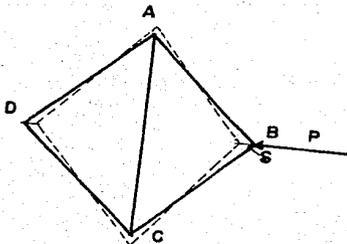
$$\frac{1}{2} F_{ac} = \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = P \quad ; \quad F_{ac} = 2P$$

Los desplazamientos de las juntas B y D serán las incógnitas en el análisis.

Sabemos que el acortamiento de una barra está dado por

$$s = \frac{PL}{AE}$$

y como las áreas son las mismas



$$s = \frac{(2F_{ab} + F_{ac})L}{AE}$$

$$s = \frac{(2 \frac{P}{\sqrt{2}} + P)\sqrt{2}a}{AE}$$

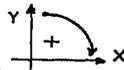
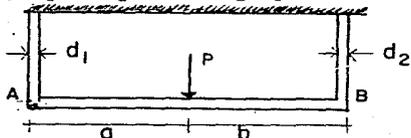
Puesto que  $L = \sqrt{2}a$ .

$$s = \frac{2Pa + \sqrt{2}Pa}{AE}$$

$$s = \frac{Pa(2 + \sqrt{2})}{AE}$$

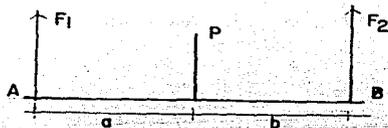
Problema 9

Una viga AB esta colgada por sus extremos por dos barras de igual longitud y diámetro  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente, cual es la relación  $a/b$  para que la viga permanezca horizontal.



Para que la barra AB permanezca horizontal las deformaciones en la barra con diámetro  $d_1$  deberá ser igual a deformación en la barra con diámetro  $d_2$ .

Se analizarán las barras verticales para encontrar sus desplazamientos en un diagrama de cuerpo libre se tiene.



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum MA = 0$$

$$F_1 + F_2 - P = 0$$

$$F_1 + F_2 = P \quad (1)$$

$$Pa - F_2(a+b) = 0$$

$$F_2 = \frac{Pa}{(a+b)} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$F_1 = P - \frac{Pa}{(a+b)} = \frac{Pa + Pb + Pa}{(a+b)} \quad F_1 = \frac{Pb}{(a+b)} \quad (3)$$

para que la viga permanezca horizontal  $S_1 = S_2$

$$\delta_1 = \frac{F_1 L}{\frac{\pi d_1^2 E}{4}}$$

$$\delta = \frac{F_2 L}{\frac{\pi d_2^2 E}{4}}$$

despejando  $\frac{F_1}{d_1^2} = \frac{F_2}{d_2^2}$

Sustituyendo  $F_1$  y  $F_2$  por sus valores en las ecuaciones (2) y (3) se tiene

$$\frac{\frac{Pb}{(a+b)}}{d_1^2} = \frac{\frac{Pa}{(a+b)}}{d_2^2}$$

despejando  $\frac{Pb}{d_1^2} = \frac{Pa}{d_2^2}$  se elimina P

$$\frac{b}{d_1^2} = \frac{a}{d_2^2}$$

Por tanto  $\frac{a}{b} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$

Problema 10

Para una roseta en DELTA se encontraron las deformaciones que se indican en la fig. 10 calcular, el tensor deformación así como el tensor esfuerzo sabiendo que  $\nu = 0.3$  y  $E = 2 \times 10^6$   $\epsilon_a = -2 \times 10^{-4}$   $\epsilon_b = 1 \times 10^{-4}$  y  $\epsilon_c = 1.5 \times 10^{-4}$ .

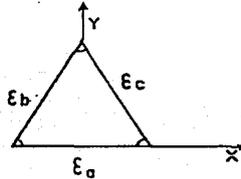


Fig. 10

Solución:

La roseta es un conjunto de extensómetros que miden las deformaciones lineales en diferentes direcciones,

El problema consiste en encontrar el tensor deformación (E) a partir de los datos obtenidos en la roseta.

Sabemos que para obtener la deformación lineal en una dirección dada necesitamos el tensor deformación y conocer  $\alpha$  que es la dirección en que se presente la deformación lineal por lo tanto.

$\epsilon_a$  es la deformación lineal en la dirección de eje X o sea  $\epsilon_a = \epsilon_x$

$\epsilon_b$  es la deformación lineal en la dirección a  $60^\circ$  o sea  $\epsilon_b = \epsilon_{\theta 60^\circ}$

$\epsilon_c$  es la deformación lineal en la dirección a  $120^\circ$  o sea  $\epsilon_c = \epsilon_{\theta 120^\circ}$

Por lo que  $\epsilon_x$  y  $\frac{1}{2}\epsilon_{xy}$  se pueden encontrar con un sistema de ecuaciones a saber

$$\epsilon_b = \epsilon_x \cos^2 60^\circ + \epsilon_y \sin^2 60^\circ + \epsilon_{xy} \sin 60^\circ \cos 60^\circ \quad (1)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x \cos^2 120^\circ + \epsilon_y \sin^2 120^\circ + \epsilon_{xy} \sin 120^\circ \cos 120^\circ \quad (2)$$

sustituyendo valores

$$1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} (0.25) + \epsilon_y (0.75) + \epsilon_{xy} (0.866) (0.5)$$

$$1 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} (0.25) \epsilon_y (0.75) + \epsilon_{xy} (0.866) (-0.5)$$

Sumando (1) y (2)

$$2.5 \times 10^{-4} = -1 \times 10^{-4} + \epsilon_{xy} (1.5)$$

despejando  $\epsilon_y = 2.33 \times 10^{-4}$

Sustituyendo  $\epsilon_y$  en (1) obtenemos

$$1 \times 10^{-4} = -2 \times 10^{-4}(0.25) + 2.33 \times 10^{-4}(0.75) + \epsilon_{xy}(0.866)(0.5)$$

$$\epsilon_{xy} = -0.576 \times 10^{-4}$$

Por lo tanto  $\frac{1}{2} \epsilon_{xy} = -0.288 \times 10^{-4}$

Finalmente el Tensor deformación queda

$$E = \begin{pmatrix} -2 & -0.288 & 0 \\ -0.288 & 2.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el tensor esfuerzo utilizamos las relaciones constitutivas de un material elástico para el caso bidimensional en donde los esfuerzos están en función de las deformaciones.

$$\sigma_x = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G \epsilon_x \quad (3)$$

$$\sigma_y = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G \epsilon_y \quad (4)$$

$$\sigma_z = \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y) + 2G \epsilon_z \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = G \epsilon_{xy} \quad (6)$$

$$\text{Donde } \lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Obteniendo las constantes elásticas se tienen

$$\lambda = 1.15 \times 10^6$$

$$G = 76.92 \times 10^6$$

Utilizando las ecuaciones (3), (4) y (5) se calculan los esfuerzos

$$\sigma_x = 1.15 \times 10^{-4}(-2 \times 10^{-4} + 2.33 \times 10^{-4}) + 2(76.92 \times 10^{-4})(-2 \times 10^{-4}) = -269.73 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = 1.15 \times 10^{-4}(-2 + 2.33) \times 10^{-4} + 2(76.92)(2.33) \times 10^{-4} = 396.4 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_z = 1.15 \times 10^{-4}(-2 + 2.33) \times 10^{-4} = 37.95 \text{ Kg/cm}^2$$

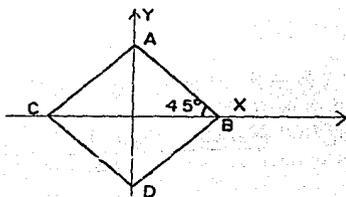
$$\tau_{xy} = (76.92)(0.576) \times 10^{-4} = 44.3 \text{ Kg/cm}^2$$

Por tanto el tensor esfuerzo queda como sigue

$$S = \begin{pmatrix} -269.73 & 44.3 & 0 \\ 44.3 & 396.4 & 0 \\ 0 & 0 & 37.9 \end{pmatrix}$$

Problema 11

El cuadrado ABCD es la base de un prisma, la diagonal BD experimenta una deformación  $\epsilon_1$  la AC una deformación  $\epsilon_2$ . Encontrar el tensor deformación, el tensor esfuerzo, así como la deformación de AB y la deformación angular del ángulo ABC sabiendo que  $\nu = 0.3$



Puesto que estamos en un problema de estado bidimensional y como solo ocurren deformaciones en las direcciones de las diagonales -- por lo tanto.

$$\epsilon_x = \epsilon_1 \quad \epsilon_y = \epsilon_2 \quad \epsilon_{xy} = 0$$

El tensor deformación quedara de la siguiente manera

$$E = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el tensor esfuerzo utilizaremos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + 2G \epsilon_z \\ \tau_{xy} &= G \epsilon_{xy} \end{aligned}$$

Por lo tanto el tensor esfuerzo queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 1 \times 10^6 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + 0) + \epsilon_1 \times 10^6 = (2\epsilon_1 + \epsilon_2) 10^6 \\ \sigma_y &= 1 \times 10^6 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + 0) + \epsilon_2 \times 10^6 = (\epsilon_1 + 2\epsilon_2) 10^6 \\ \sigma_z &= 1 \times 10^6 (\epsilon_1 + \epsilon_2 + 0) = (\epsilon_1 + \epsilon_2) 10^6 \end{aligned}$$

La deformación de AB es la deformación lineal que se presenta en una dirección  $\alpha$  de  $135^\circ$ ; para calcular la deformación se utiliza la siguiente expresión -  $\epsilon_l = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \epsilon_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$

Sustituyendo valores se tiene

$$\epsilon_{135^\circ} = \epsilon_1 \cos^2 135^\circ + \epsilon_2 \sin^2 135^\circ + 0 (\sin 135^\circ) (\cos 135^\circ)$$

$$\epsilon_{135^\circ} = 0.5 \epsilon_1 + 0.5 \epsilon_2 = \frac{1}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

Para determinar la deformación angular del ángulo ABC  $\epsilon_{\theta_{ABC}}$  se utiliza la expresión siguiente:

$$\epsilon_{\theta} = (\epsilon_x + \epsilon_y) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \epsilon_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

se tiene que el ángulo  $\alpha = 45^\circ$  ya que nos interesa conocer la deformación angular que sufre uno de los ejes con respecto a la horizontal por lo tanto.

$$\epsilon_{\theta 45^\circ} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 45^\circ \sin 45^\circ + \frac{1}{2} (0) (\sin^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ)$$

$$\epsilon_{\theta 45^\circ} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$$

que nos representa la mitad de deformación del ángulo recto que nos interesa conocer por lo que

$$\epsilon_{\theta_{ABC}} = 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2}$$

$$\epsilon_{\theta_{ABC}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Problema 12

Hallar la relación necesaria entre las constantes, A y B si

$$\phi = A X^2 Y^3 + B Y^5 \quad \text{Es una función de Tensión de Airy.}$$

Airy propuso un método que consiste en suponer una función potencial  $\phi$  la cual tiene las propiedades siguientes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_x \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sigma_y \quad \text{y} \quad - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}$$

Se puede ver mediante estas expresiones que se se conoce es posible obtener  $\sigma_x, \sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Por otra parte la función de Airy

debe ser biarmónica o sea 
$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

Por lo tanto derivando a  $\phi$  comprobamos las condiciones del método de Airy.

Derivando a  $\phi$  con respecto a X

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2 A X Y^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 2 A Y^3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0 \quad (4)$$

Derivando a  $\phi$  con respecto a Y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3 A X Y^2 + 5 B Y^4 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 6 A X Y + 20 B Y^3 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = 6 A X^2 + 60 B Y^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 120 B Y \quad (8)$$

Obteniendo la  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}$  de (2) se tiene

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 6 A Y^2 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 12 A Y \quad (10)$$

Sustituyendo en la ecuación biarmónica

$$0 + 2(12 A Y) + 120 B Y$$

$$24 A Y + 120 B Y = 0$$

$$Y(24 A + 120 B) = 0$$

$$A = -5 B$$

Problema 13

En coordenadas polares  $(r, \theta)$  la función de tensión de Airy  $\phi = B\theta$  se usa en la solución de un disco de radio  $a$  sometido a un momento central  $M$ . Determinar las componentes de tensión y el valor de la constante  $B$ .

La geometría de un cuerpo con frecuencia aconseja la conveniencia de formular los problemas elásticos bidimensionales en función de coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  entonces para las ecuaciones de transformación  $X = r \cos \theta$   $Y = r \sin \theta$

Tomando ahora la función de tensión de Airy como  $(r, \theta)$  las componentes de tensión están dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{(rr)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{(\theta\theta)} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{(r\theta)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

Para nuestro problema la componente de tensión está dada por

$$\sigma_{(r\theta)} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

por lo tanto la componente de tensión es

$$\begin{aligned}\sigma_{(r\theta)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (B\theta)}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{(r\theta)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B}{r} \right) = \frac{B}{r^2}\end{aligned}$$

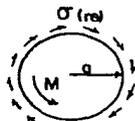


Fig.12

Para encontrar el valor de la constante  $B$ , tomamos un elemento diferencial



Haciendo la suma de momentos alrededor del disco

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi} \sigma_{(r\theta)} a \, d\theta \times a \\ M &= \int_0^{2\pi} \sigma_{(r\theta)} a^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{B}{r^2} r^2 \, d\theta \\ M &= 2\pi B \\ B &= \frac{M}{2\pi}\end{aligned}$$

Problema 14

Probar que  $\phi = \frac{3F}{4C}(XY - \frac{XY^3}{3C}) + \frac{P}{4C}Y^2$  es una función de tensión de Airy y hallar las componentes de tensión en la región  $X > 0$ ,  $-C < Y < C$ . Puesto que la función es una función de Airy es biarmónica

$$\nabla^2 \phi = 0$$

o sea que 
$$\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} = 0$$

derivando la función  $\phi$  respecto a X se tiene 
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{3}{4C} (Y - \frac{Y^3}{3C^2})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} = 0$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0$$

(1)

derivando con respecto a Y 
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{3F}{4C} (X - \frac{XY^2}{C^2}) + \frac{P}{4C} Y$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{3F}{4C} (-\frac{2XY}{C^2}) + \frac{2P}{4C}$$

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} = \frac{6F}{4C^2}$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

(2)

Ahora encontrando la segunda parcial con respecto a X y luego la segunda parcial con respecto a Y se tiene;

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

(3)

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se comprueba que la función es una función de Airy biarmónica.

Ahora bien para encontrar las componentes de tensión

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = \frac{3 F X Y}{2 C} + \frac{P}{C}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-3 F (C - Y)}{4 C}$$

Estas tensiones son las de una viga en voladizo sometida a una carga transversal en su extremo F y una tensión axial P como se muestra en la figura 13.

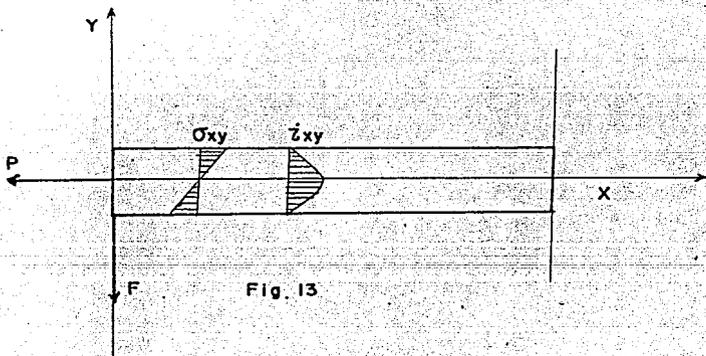


Fig. 13

## 2.6 PROBLEMAS PROPUESTOS

- 1.- Una barra de sección transversal circular se carga con fuerzas a tensión  $P=8$  ton. (como se ve en la fig.14) la barra tiene -- una longitud  $L=3.0$  mts. y un diámetro  $d=30$ mm. Esta hecha de -- Aluminio con un módulo de Elasticidad  $E=2 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup> y un módulo de Poisson  $\nu = 1/3$ . Calcular el alargamiento  $\delta$ , la disminución de diámetro  $\Delta d$  y el incremento de volumen  $\Delta V$  de la barra.

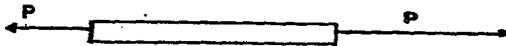


Fig. 14

- 2.- Calcular las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , si las deformaciones unitarias en estas direcciones son  $\epsilon_x=0.001$ ,  $\epsilon_y=0.0008$ , el módulo de Elasticidad  $E=2 \times 10^6$  Kg/cm<sup>2</sup> y el módulo de Poisson  $\nu=0.3$ .
- 3.- El cubo de goma ABCD se introduce libremente, pero sin holgura en un molde de acero de tal manera que dos caras opuestas quedan libres (fig. 15). El cubo está sometido, en su parte superior, a la presión  $P$ . Calcular la tensión  $\sigma_x$ , las deformaciones  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_z$  la variación unitaria del volumen. El módulo de elasticidad de la goma es  $E$  y el coeficiente de Poisson,  $\nu$ . -- Precíndase del roce entre el cubo y las paredes. Considerese -- que el molde es absolutamente rígido.

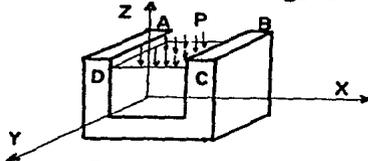


Fig. 15

4.- Un paralelepipedo recto rectangular de aristas  $a, b, c$  esta solidificado por tres esfuerzos normales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  paralelos respectivamente a cada una de las aristas. Hallar la relación bajo la cual estas seis cantidades estan ligadas para que el volumen del paralelepipedo permanezca constante.

5.- Comprobar que la función de Airy  $\phi = 2x^4 + 12x^2y^2 - 6y^4$  satisface la ecuación biarmónica  $\nabla^4 \phi = 0$  y determinar el tensor esfuerzo y el tensor deformación suponiendo un estado de esfuerzo plano.

### 3.0 PLASTICIDAD

#### 3.1 GENERALIDADES

Cuando a los materiales se les omete a un esfuerzo creciente de tensión o compresión experimentan deformaciones que en un principio estan en el rango elástico, pero posteriormente se salen de el y crecen con mayor velocidad que los esfuerzos; ahora si ellos siguen creciendo, en el material comienzan a aparecer grietas, -- hasta que finalmente este se separa en fracciones discontinuas. De lo anterior se concluye que el concepto de falla corresponde a la situación donde las deformaciones son plásticas y alcanzan una cierta magnitud que se considera intolerable desde el punto de -- vista de la funcionalidad de la estructura de la cual forma parte el material.

En tanto que el concepto de ruptura corresponde a cuando el material se separa en partes aisladas y deja de ser un medio continuo. Ahora bien los criterios de falla y ruptura se fijan mediante convenciones de acuerdo al nivel máximo de esfuerzos que el material debe de soportar. Este nivel se determina a fin de que no se registren deformaciones que rebasen ciertos límites, o de que no se propagen grietas existentes. En general se tiene que dicho nivel se estima a partir de una cierta función de los esfuerzos principales o sea  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  (2.1)

Se ve por tanto que para establecerlo es indispensable determinar el estado de esfuerzo existente en un problema dado.

Existen diferentes criterios de falla que se han establecido a --

fin de evitar diseñar en lo posible obras que sufran deformaciones excesivas y dejen de ser funcionales.

También en el caso de ruptura se han establecido criterios, en los que a partir de las características del tensor esfuerzo se elige - en una relación en función de los esfuerzos principales, mediante la cual se puede estimar si existe riesgo de ruptura del material - y la consecuente falla de obra de la cual forma parte.

### **3.2 TIPOS DE MATERIALES FRAGILES Y DUCTILES**

Los materiales pueden clasificarse como frágil y dúctil, de acuerdo con la magnitud de la deformación que sufren antes de romperse, entonces de acuerdo con lo anterior se puede decir que un material es frágil cuando se rompe sin sufrir mucha deformación. En tanto - que es dúctil cuando se rompe después de experimentar grandes de - formaciones. Entre los materiales frágiles se tienen por ejemplo - el vidrio , la madera, el concreto, etc. entre las dúctiles estan - el acero, el plomo, suelos arcillosos, etc. Los factores mas impor - tantes que influyen en la ductilidad o fragilidad se pueden consi - derar los siguientes: esfuerzos isotrópicos así como los distorsio - nantes, velocidad de carga, temperatura, estructuración, heteroge - neidad, impurezas y vacíos.

### **3.3 POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA PLASTICIDAD**

- 1.- La deformación plástica es causada, solamente por esfuerzos -- certantes.
- 2.- Para un estado dado de esfuerzo, las deformaciones plásticas -

principales son proporcionales a los esfuerzos principales.

4.- El volumen permanece constante.

5.- La deformación plástica es irreversible.

### 3.4 MODELOS ANALOGICOS PLASTICOS

En lo que sigue se presentan algunos de los modelos plásticos.

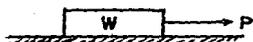


Fig. 16



a) Cuerpo rígido-plástico perfecto

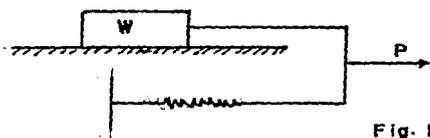
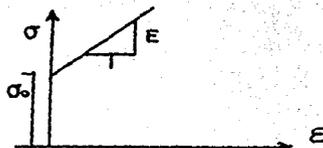


Fig. 17



b) Cuerpo rígido-plástico con endurecimiento lineal a la deformación

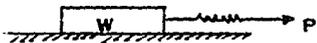
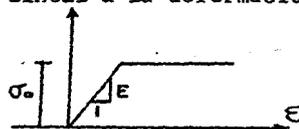


Fig. 18



c) cuerpo elasto-plástico perfecto.

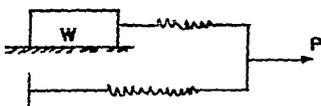
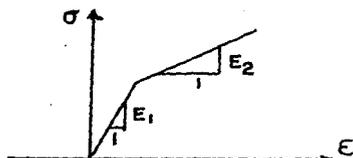


Fig. 19

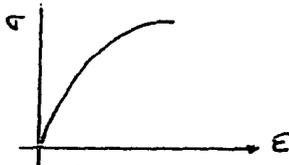


d) Cuerpo elasto-plástico con endurecimiento lineal a la deformación

### 3.5 LEYES ESFUERZO DEFORMACION PLASTICA

#### 3.5.1 RELACIONES INCREMENTALES

Estas surgen debido a que en los materiales reales se obtienen curvas esfuerzo-deformación no lineales, como se ve en la figura.



Las cuales se deben a fluidificación de ciertas porciones de material, dando como resultado relaciones esfuerzo-deformación-tiempo que dependen de la historia y velocidad de carga. Todo esto conduce a que estos materiales tengan ecuaciones constitutivas, para cuya solución incremental se requiere conocer las condiciones iniciales; y de esta manera se tienen relaciones entre incrementos pequeños de esfuerzo y deformación que son lineales, pero cuya constante de proporcionalidad es función de la historia de carga.

Un aspecto que debe destacarse es que la componente de deformación una parte es elástica y otra es plástica ( es decir permanente ) -  
teniendo.  
$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (2.2)$$

Se han propuesto diferentes relaciones entre esfuerzos y deformaciones para el rango plástico, una de ellas la dada por Levy y Mises que se presenta como sigue

$$\frac{d\epsilon_x}{S_x} = \frac{d\epsilon_y}{S_y} = \frac{d\epsilon_z}{S_z} = \frac{d\epsilon_{xy}}{2xy} = \frac{d\epsilon_{xz}}{2xz} = \frac{d\epsilon_{yz}}{2yz} = d\lambda \quad (2.3)$$

Donde  $S_x, S_y, \text{Etc.}$  son elementos de la componente distorsionante del tensor esfuerzo;  $d\epsilon_x, \dots, d\epsilon_y, \text{etc.}$  son los incrementos del-

tensor deformación total y  $d\lambda$  es una constante de proporcionalidad; por tanto las relaciones anteriores se establecen entre los esfuerzos totales actuantes y los incrementos de deformación total (en la cual se supone que la parte elástica es nula), donde la constante de proporcionalidad variará con el nivel de esfuerzos.

Prandtl y Reuss generalizaron las relaciones para incluir la parte elástica y propusieron unas relaciones semejantes para la plástica que son:

$$\frac{d\epsilon_x P}{S_x} = \frac{d\epsilon_y P}{S_y} = \frac{d\epsilon_z P}{S_z} = \frac{d\epsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\epsilon_{xz} P}{\tau_{xz}} = \frac{d\epsilon_{yz} P}{\tau_{yz}} \quad (2.4)$$

Estas relaciones solo se aplican a la parte plástica; en tanto que para la elástica se emplean las leyes de Hooke.

También pueden escribirse, de manera análoga, las relaciones entre esfuerzos principales e incrementos de deformación plástica principales como sigue:

$$\frac{d\epsilon_1 P}{S_1} = \frac{d\epsilon_2}{S_2} = \frac{d\epsilon_3 P}{S_3} = d\lambda \quad (2.5)$$

$$\text{y así mismo que } \frac{d\epsilon_1 P - d\epsilon_2 P}{S_1 - S_2} = \frac{d\epsilon_2 - d\epsilon_3 P}{S_2 - S_3} = \frac{d\epsilon_3 P - d\epsilon_1 P}{S_3 - S_1} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) implican, que los círculos de Mohr de los tensores de esfuerzo total y de incremento de deformación plástica son semejantes o sea solo afectados por la constante de proporcionalidad  $d\lambda$ .

Ahora bien las ecuaciones (2.4) pueden escribirse en función de los esfuerzos totales de la manera siguiente.

$$\begin{aligned} d\epsilon_x P &= \frac{2}{3} d\lambda \left( \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right) \\ d\epsilon_y P &= \frac{2}{3} d\lambda \left( \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right) \\ d\epsilon_z P &= 2 d\lambda \left( \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right) \\ d\epsilon_{xy} P &= d\lambda \tau_{xy} \\ d\epsilon_{xz} P &= d\lambda \tau_{xz} \\ d\epsilon_{yz} P &= d\lambda \tau_{yz} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ya que

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m = \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{2}{3} \sigma_x - \frac{1}{3} (\sigma_y + \sigma_z)$$

Analogamente 
$$S_y = \frac{2}{3} \left( \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right)$$

$$S_x = \frac{2}{3} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right)$$
 (2.8)

Las ecuaciones (2.7) son las relaciones buscadas; para encontrar la constante de proporcionalidad se empleará el criterio de fluencia de Von Mises, que es el siguiente.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \tau_{xy}^2 + 6 \tau_{yz}^2 + 6 \tau_{zx}^2 = 2 \sigma_s^2$$

Se puede demostrar que la constante de proporcionalidad es  $d\lambda = \frac{d\epsilon_0 P}{\sigma_{oct}}$  (2.9) donde  $d\epsilon_0 P$  = Deformación angular octaédrica

Como se sabe 
$$\sigma_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2$$
 (2.10)

Siendo  $J_2$  el segundo invariante de la componente distorsional del tensor esfuerzo.

Se define esfuerzo efectivo o equivalente  $\sigma_e$ , e incremento de deformación efectivo o equivalente  $d\epsilon P$ , de la siguiente manera

$$\sigma_e = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sigma_{oct} = \sqrt{\frac{3}{2}} J_2$$
 (2.11)

$$d\epsilon P = \sqrt{\frac{3}{2}} d\epsilon_0 P$$
 (2.12)

Para el caso de una prueba uniaxial de tensión en la dirección X se tiene

$$\sigma_e = \sigma_x$$

y 
$$d\epsilon P = d\epsilon_x P$$
 (2.13)

esto último debido a que 
$$d\epsilon_y P = d\epsilon_z P = -1 d\epsilon_x P$$
 (2.14)

Ahora bien considerando (2.9) y considerando (2.11) y (2.12)

$$d\lambda = \frac{d\epsilon_0 P}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e} = \frac{d\epsilon P / 2}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\epsilon P}{\sigma_e}$$
 (2.15)

Además, tomando en cuenta el criterio de fluencia de Von Mises se tiene que el esfuerzo equivalente es igual a la función de fluencia luego para el momento en que se inicia la plastificación  $\sigma_e = \sigma_0$  siendo  $\sigma_0$  el esfuerzo de fluencia en una prueba uniaxial de tensión finalmente la cantidad de proporcionalidad queda.

$$d\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\epsilon P}{\sigma_0}$$

Se observa que dicha constante es función del incremento de deforma

ción equivalente  $dEP$  y del parametro experimental  $\sigma_0$  (esfuerzo de fluencia), así que tomando en cuenta esto las relaciones quedan:

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_{xP} &= \frac{dEP}{\sigma_2} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right) \\
 d\epsilon_{yP} &= \frac{dEP}{\sigma_2} \left( \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right) \\
 d\epsilon_{zP} &= \frac{dEP}{\sigma_2} \left( \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right) \\
 d\epsilon_{xyP} &= \frac{3}{2} \frac{dEP}{\sigma_2} \tau_{xy} \\
 d\epsilon_{yzP} &= \frac{3}{2} \frac{dEP}{\sigma_2} \tau_{yz} \\
 d\epsilon_{zxP} &= \frac{3}{2} \frac{dEP}{\sigma_2} \tau_{zx}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Debe observarse que estas relaciones se aplican con  $\sigma_2$  a materiales con endurecimiento a la deformación casos b) y d) de las figuras -- 17 y 19 y con  $\sigma_0$  dados por materiales perfectamente plásticos casos a) y c) figuras 16 y 18. Las relaciones de  $\sigma_2$  y  $dEP$  se conocen -- experimentalmente.

Para incrementar la relación buscada debe observarse que el trabajo total realizado tiene una componente elástica y una plástica, o sea

$$dWT = dW^e + dWP \tag{2.17}$$

donde el trabajo plástico es

$$dWP = S_x d\epsilon_{xP} + S_y d\epsilon_{yP} + S_z d\epsilon_{zP} + \tau_{xy} d\epsilon_{xyP} + \tau_{xz} d\epsilon_{xzP} + \tau_{yz} d\epsilon_{yzP} \tag{2.18}$$

y para esfuerzos principales  $dWP = S_1 d\epsilon_1 P + S_2 d\epsilon_2 P + S_3 d\epsilon_3 P$  (2.19)

así mismo, el trabajo plástico puede escribirse en función de los -- esfuerzos e incrementos de deformación principales es decir

$$dWP = \sigma_2 dEP \tag{2.20}$$

de donde

$$dEP = \frac{dWP}{\sigma_2} \tag{2.21}$$

### 3.5.2 RELACIONES TOTALES ESFUERZO-DEFORMACION

Quando todas las componentes del tensor esfuerzo crecen proporcionalmente pueden utilizarse relaciones esfuerzo-deformación totales que resultan de integrar directamente las ecuaciones (2.16) o sea -

$$\begin{aligned} \epsilon_x P &= \frac{E P}{\sigma_2} \left( \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right) \\ \epsilon_y P &= \frac{E P}{\sigma_2} \left( \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) \right) \\ \epsilon_z P &= \frac{E P}{\sigma_2} \left( \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right) \\ \epsilon_{xy} P &= \frac{3}{2} \frac{E P}{\sigma_2} \tau_{xy} \\ \epsilon_{yz} P &= \frac{3}{2} \frac{E P}{\sigma_2} \tau_{yz} \\ \epsilon_{zx} P &= \frac{3}{2} \frac{E P}{\sigma_2} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Así que la deformación total plástica solo es función del estado actual de esfuerzos y es independiente de la trayectoria de esfuerzo (historia de carga).

De esta manera, conocido el tensor esfuerzo (es decir todas sus componentes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , etc.) se obtiene  $\sigma_2$  de la ecuación (2.11) luego  $E P$  se obtiene de la curva experimental durante una prueba de tensión simple (uniaxial) y a su vez con las relaciones (2.22) se evaluarán las componentes de la deformación plástica totales. Es conveniente destacar que en muchos problemas prácticos puede considerarse que la historia de carga es proporcional y por lo tanto las ecuaciones (2.22) se utilizan con cierta frecuencia.

### 3.6 RESOLUCION DE PROBLEMAS ELASTO-PLASTICOS

Las situaciones en las que en un cuerpo existen deformaciones elás-

tas y plásticas aproximadamente del mismo orden bajo una carga se denominan problemas elasto-plásticas. Un número de ejemplos de tales problemas bien conocidos tiene lugar en la teoría de vigas, torsión de ejes y tubos de pared gruesa y esferas sometidas a presión. En general, las ecuaciones que gobiernan a los problemas elasto-plásticos son:

- a) ecuaciones de equilibrio
- b) ecuaciones de compatibilidad de deformaciones
- c) Relaciones esfuerzo-deformación (que dependerán de la teoría plástica empleada)
- d) Condiciones de contorno en el contorno plástico cuando existan
- e) Condiciones de continuidad de esfuerzo-deformación en la interfase elasto-plástica

### 3.61 MECANISMOS DE FALLA PLÁSTICA

Tanto los criterios de falla y los de ruptura son únicamente aproximados, puesto que se basan en aplicaciones de la mecánica del medio continuo, siendo que en este caso son muy determinantes las discontinuidades intrínsecas, heterogeneidades y anisotropía existentes en el material para este nivel de esfuerzos, sin embargo, dichos criterios son de bastante utilidad puesto que han demostrado dar una idea aceptable de las condiciones de falla o ruptura, lo cual se ha podido constatar experimentalmente. Por otra parte es el único recurso del que actualmente se dispone para dicho fin. El más importante de estos puede considerarse que es el ocasionado por esfuerzos distorsionantes.

ticas y plásticas aproximadamente del mismo orden bajo una carga se denominan problemas elasto-plásticas. Un número de ejemplos de tales problemas bien conocidos tiene lugar en la teoría de vigas, torsión de ejes y tubos de pared gruesa y esferas sometidas a presión. En general, las ecuaciones que gobiernan a los problemas elastoplásticos son:

- a) ecuaciones de equilibrio
- b) ecuaciones de compatibilidad de deformaciones
- c) Relaciones esfuerzo-deformación (que dependerán de la teoría plástica empleada)
- d) Condiciones de contorno en el contorno plástico cuando existan
- e) Condiciones de continuidad de esfuerzo-deformación en la interfase elasto-plástica

### 3.6. MECANISMOS DE FALLA PLÁSTICA

Tanto los criterios de falla y los de ruptura son únicamente aproximados, puesto que se basan en aplicaciones de la mecánica del medio continuo, siendo que en este caso son muy determinantes las discontinuidades intrínsecas, heterogeneidades y anisotropía existentes en el material para este nivel de esfuerzos, sin embargo, dichos criterios son de bastante utilidad puesto que han demostrado dar una idea aceptable de las condiciones de falla o ruptura, lo cual se ha podido constatar experimentalmente. Por otra parte es el único recurso del que actualmente se dispone para dicho fin. El más importante de estos puede considerarse que es el ocasionado por esfuerzos distorsionantes.

### 3.6.2 CRITERIO DE VON MISES

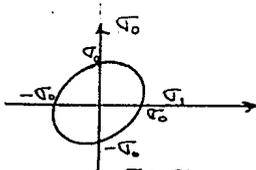
Este criterio supone que la plastificación únicamente se debe a la Energía de distorsión y que se presenta cuando dicha energía es -- igual a la que existe en una prueba de tensión simple.

En esta teoría se usa el esfuerzo cortante octaédral ( es el valor maximo que ocurre sobre el plano octaédral.), por lo que la condición de fluencia en función de los esfuerzos principales queda.

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.23)$$

Y para el caso biaxial queda  $\sigma_1 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0$  (2.24)

Que es la ecuación de una elipse con eje focal a 45°, ya que para  $\sigma_1 = \sigma_2$  entonces  $\sigma_1 = 0$  y tambien  $\sigma_2 = 0$  ver fig. 21



Para tensión simple  $(\sigma, 0, 0)$  , entonces  $\tau_{oct}$  se reduce a

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma \quad (2.25)$$

Para encontrar el valor del esfuerzo efectivo  $\sigma_e$  igualamos las -- ecuaciones (2.23) y (2.25) Por lo tanto nos queda,

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.26)$$

Para encontrar  $\epsilon_p$  se entra en el diagrama esfuerzo-deformación de la prueba de tensión simple en el rango plástico con el valor de es fuerza efectivo  $\sigma_e$  .

Cuando los ejes de referencia no son los principales, en estado ge- neral, el esfuerzo cortante octaedral esta dado por

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.27)$$

entonces la ecuación (2.26) se modifica de la siguiente manera.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.28)$$

### 3.6.3 CRITERIO DE TRESCA

En este se considera que la plastificación se presenta cuando alcanza el cortante máximo que se registra en la prueba de tensión simple. Esto implica que ocurre cuando se cumplen las seis condiciones siguientes:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_0$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = \pm \sigma_0$$

Luego para el caso biaxial se tiene:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 ; \text{ si } \sigma_1 > 0 \text{ y } \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_0 ; \text{ si } \sigma_1 < 0 \text{ y } \sigma_2 > 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 ; \text{ si } \sigma_2 > \sigma_1 > 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 ; \text{ si } \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

$$\sigma_1 = -\sigma_0 ; \text{ si } \sigma_1 < \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_1 = -\sigma_0 ; \text{ si } \sigma_2 < \sigma_1 < 0$$

Para tensión pura  $(\sigma, 0, 0)$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} \quad (2.29)$$

Para un estado general  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.30)$$

Para encontrar el esfuerzo efectivo se igualan las ecuaciones (2.29)

y (2.30) de donde se obtiene

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2.31)$$

Análogamente, para determinar  $\epsilon_p$  entramos en el diagrama esfuerzo de formación plástica para tensión pura.

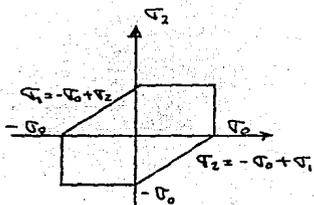
entonces

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_e}{E_p} \quad (2.32)$$

### 3.6.4 TEORIA DE RANKINE (máximo esfuerzo de tensión)

como su nombre lo indica esta señala que la falla se alcanza cuando uno de los esfuerzos principales alcanza la resistencia máxima en -

Fig. 22



tensión, por ejemplo para el caso bidimensional

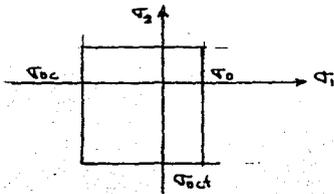


Fig. 23

- donde
- $\sigma_2 = -\sigma_{0,c}$
  - $\sigma_1$ : Esfuerzo principal de Tensión
  - $\sigma_2$ : Esfuerzo principal de compresión
  - $\sigma_0$ : Resistencia máxima a la tensión
  - $\sigma_{0,c}$ : Resistencia máxima a la compresión

### 3.6.5 TEORIA DE SAINT-VENANT (o deformación axial máxima)

En esta se supone que la plastificación ocurre cuando una deformación principal iguala a la deformación máxima en tensión o compresión, o sea cuando

$$E \epsilon_1 = \sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3) = \pm \sigma_0 \quad (2.33)$$

entonces para el caso biaxial (cuando  $\sigma_3 = 0$ )

$$E \epsilon_1 = \sigma_1 - \nu \sigma_2 = \pm \sigma_0 ; \text{ para } |\sigma_1| \geq |\sigma_2| \quad (2.34)$$

$$E \epsilon_2 = \sigma_2 - \nu \sigma_1 = \pm \sigma_0 ; \text{ para } |\sigma_2| \geq |\sigma_1| \quad (2.35)$$

### 3.6.6 TEORIA DE BELTRAMI (o de la máxima energía de deformación)

en esta se considera que la plastificación se presenta cuando la energía total de deformación iguala a la que existe en una prueba de tensión o compresión unidimensional, o sea

$$U = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 = \frac{1}{2E} \sigma_0^2 \quad (2.36)$$

Y como por otra parte, en general la energía total elástica esta dada por

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) \quad (2.37)$$

reemplazando en la anterior expresión las deformaciones dadas por las expresiones de la ley de Hooke se tiene

$$U = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)) \quad (2.38)$$

reemplazando U por su valor

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) = \sigma_0^2 \quad (2.39)$$

que constituye la función buscada de acuerdo con este criterio.

ahora para el caso bidimensional la anterior expresión se reduce a

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_0^2 \quad (2.40)$$

### 3.7 ANALISIS Y DISEÑO LIMITE

Es conveniente observar que los análisis límite permiten estimar la carga máxima que en un cierto medio o estructura puede soportar, al desarrollarse en él un mecanismo de falla. Esto implica que se plastifique todo el medio, o bien que si existen posiciones sólidas -- (elásticas) éstas no ofrecen ninguna resistencia al movimiento, moviéndose como inclusiones dentro de la fase fluida del material. Es conveniente reflexionar acerca de que las teorías rígido-plásticas (análisis límite) presuponen que todo el medio se ha plastificado, en tanto que la teoría de elasticidad implica que el medio en ningún punto lo ha hecho. Luego entonces estos dos tipos de análisis corresponden a condiciones extremas, y no son capaces de predecir el comportamiento cuando parte del material se ha plastificado únicamente, por lo cual debe emplearse las teorías y métodos elastoplásticos. De la consideración anterior han surgido los teoremas-límites que a continuación se verán.

#### 3.7.1. TEOREMA I

Una carga se produce un campo de velocidades cinemáticamente admisible puede ser igual o mayor que la carga real que puede producir la falla. Esto constituye un Límite superior.

Esta carga es la que se calcula con la teoría rígido-plástica (análisis límite). La conclusión obtenida se debe a que la carga mencionada presupone plastificación total en una región, sin considerar - que el medio involucrado puede moverse aunque no se haya plastifi--

cado una zona que facilita la formación de un mecanismo de falla.

### 3.7.2 TEOREMA 2

Una carga que produce un campo de esfuerzos estáticamente admisible será igual o menor que la carga que se necesita para que se produzca deslizamiento por flujo plástico. Esto es un límite inferior. Esta carga se obtiene de teoría de elasticidad considerando la carga -- máxima que se puede aplicar a un medio para que en ningún punto rebase la resistencia al corte (fluencia). Esta es un límite inferior, ya que pueden existir zonas plastificadas en el interior de la región sin que por ello ocurra un deslizamiento generalizado de alguna porción del medio.

De lo anterior se concluye que, los dos límites indican un ancho de banda dentro del cual se encuentra la verdadera carga  $P$ , que se necesita para que se inicie la formación de un mecanismo de falla (en medio continuo o sistema estructural), que sería la carga última, - por lo cual, dicha carga última que soporta una obra es difícil (si no imposible) de obtenerla con precisión, siendo solo posible acotarla entre dichos límites

Por tanto el diseño límite (o último) de cualquier tipo de obra, - debe tomar en cuenta estas consideraciones, por lo cual se requiere de un análisis elástico y de uno rígido-plástico, para obtener información en este tipo de diseño.

Debe anotarse entonces que en este diseño lo único que importa es - acotar la carga última, sin tomar en cuenta las condiciones de deformación que experimenta en el rango donde parte de las deformacio-

nes son elásticas y parte plásticas, para esto sí sería necesario realizar análisis elastoplásticos como los mencionados anteriormente.

EN

### 3.8. SELECCION DE MECANISMOS DE FALLA

En esta parte se hace notar que para que una estructura falle no basta con que ciertas partes de ella se plastifiquen, ni es necesario tampoco que se plastifique todo, sino que basta que se defina una zona plastificada capaz de engendrar un mecanismo de falla, mediante el cual ciertas porciones de ella son capaces de experimentar movimientos del cuerpo rígido ( cinemáticamente admisible ). Es claro que para una estructura dada pueden existir diferentes mecanismos de falla, por lo que es necesario definirlos y determinar cual de ellos requiere una menor carga para ser engendrado. Esta selección por tanto debe hacerse trazando diferentes superficies de falla capaces de generar movimientos de cuerpo rígido. Por ejemplo, se tiene el método conocido para análisis de estabilidad de taludes, en el cual se supone un círculo de falla, mediante el cual una posición de él es capaz de moverse como cuerpo rígido. En general por tanto bastará con transformar una región hiperestática en isostática eliminando por ello restricciones al movimiento analizando además las fuerzas que intervienen en él, así como los factores que se oponen a él ( recordar por ejemplo los análisis de estabilidad de taludes mencionados antes ).

### 3.9 PROBLEMAS RESUELTOS

#### Problema 1

Para un estado de tensión biaxial con  $\sigma_2$  determinar el lugar geométrico de las curvas de fluencia de las condiciones de Mises y Tresca y compararlas en una representación en el espacio bidimensional de  $\sigma_1/\sigma_2$  frente  $\sigma_3/\sigma_2$ .

Solución:

Para el criterio de Von Mises se usa el esfuerzo cortante octaedral. Este valor ( $\tau_{oct}$ ) es el valor máximo que ocurre sobre el plano octaedral. Este plano se puede entrever al marcar longitudes iguales sobre los ejes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  y pasar un plano a través de estos puntos resultantes como se indica en la fig. 24.

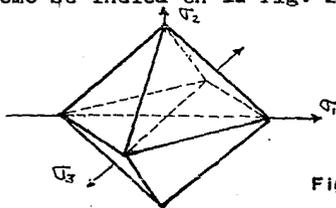


Fig. 24

El esfuerzo cortante octaedral está dado en términos de los esfuerzos principales por:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Para una prueba de tensión simple del esfuerzo octaedral esta dado en terminos de los esfuerzos principales por  $(\sigma_1, 0, 0)$

$$\tau_{oct} = \sqrt{(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1$$

Para encontrar el esfuerzo efectivo  $\sigma_e$  el cual se define como el valor del esfuerzo con el que una tensión pura producirá el mismo esfuerzo cortante máximo que aquel con el cual ocurre en el estado general de esfuerzo.

$$\tau'_{oct} = \tau_{oct}$$

$$\text{Por lo tanto } \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$2 \sigma_e = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Como en nuestro problema tenemos un estado de tensión biaxial

$$2 \sigma_e = (\sigma_1 - 0)^2 + (0 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$2 \sigma_e = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \sigma_3^2 - 2 \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1^2$$

$$\sigma_e = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_3 \sigma_1$$

Dividiendo entre  $\sigma_e$

$$1 = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_e} + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_e}\right)^2$$

Que es la ecuación de la Elipse con sus ejes a 45 como se ve en la figura 25 .

Para el criterio de Tresca se usa el valor máximo del esfuerzo cortante. Para encontrar el esfuerzo efectivo , puesto que las deformaciones plásticas son causadas por esfuerzos cortantes, primero analizaremos el estado de tensión pura.  $(\sigma_1, 0, 0)$   $\tau_{max} = \frac{\sigma_e}{2}$

Para un estado general de esfuerzo  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$   $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Por lo tanto para encontrar el esfuerzo efectivo

$$\tau_{max} (\text{tensión Pura}) = \tau_{max} (\text{estado General}) \quad \frac{\sigma_e}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

entonces  $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3$  dividiendo entre  $\sigma_e$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_e} - \frac{\sigma_3}{\sigma_e} = \pm 1$$

ecuación que da lugar a los segmentos AB y ED de la figura 25

$$\frac{\sigma_1}{2} = \pm 1$$

ecuación que nos da los segmentos BC y EF

$$\frac{\sigma_3}{2} = \pm 1$$

ecuación que nos da los segmentos DC y FA

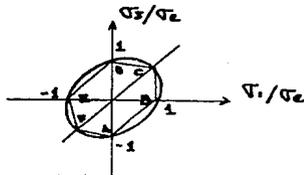


Fig. 25

Problema 2

Determinar para el estado de esfuerzo

$$s = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Donde a y b son constantes, la condición de plásticidad según los criterios de Von Mises y Tresca.

Solución:

Debido a que los criterios de Von Mises y Tresca se establecen en función de los esfuerzos principales, procederemos a determinarlos resolviendo el determinante de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3a\lambda^2 + a^2\lambda + a^3 - b^2a + b^2\lambda$$

Resolviendo la ecuación se obtienen los siguientes esfuerzos principales.

$$\sigma_1 = a+b \quad \sigma_2 = a \quad \sigma_3 = a-b$$

Para la condición de Tresca (valor máximo del esfuerzo cortante).

Para tensión pura  $(\sigma, 0, 0)$ .  $\tau_{max} = \frac{\sigma_2}{2}$

y para un estado general de esfuerzo  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$   $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

por tanto el esfuerzo efectivo será  $\tau_e = \sigma_1 - \sigma_3$

Sustituyendo los valores de los esfuerzos principales se tiene

$$\tau_e = (a+b) - (a-b)$$

Para la condición de Von Mises (máximo esfuerzo cortante octaedral)

se obtiene para tensión pura  $(\sigma, 0, 0)$   $\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \sigma$

y para un estado general de esfuerzo se obtiene  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de los esfuerzos principales se tiene

$$\tau_e \sqrt{2} \frac{1}{3} \sqrt{(a+b-a)^2 + (a-a+b)^2 + (a-b)-(a+b))^2}$$

$$\tau_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b^2 + b^2 + 4b^2}$$

$$\tau_e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} b$$

$$\tau_e = \sqrt{3} b$$

Problema 3

Una probeta de acero dulce, sometida a tensión triaxial (de modo que sea  $(\sigma_2 = \sigma_3)$ ), esta en estado plástico, se el límite de fluencia  $\sigma_0$  del material es de 2196 Kg/cm<sup>2</sup> y si el esfuerzo  $\sigma_1 = 5000$  Kg/cm<sup>2</sup> encuentrese  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$

Solución:

Por el criterio de Von Mises y para esfuerzos principales sabemos -- que el esfuerzo cortante octaédrico sera igual al esfuerzo cortante de fluencia.

$$\sigma_0 = \tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$9 \tau_{oct}^2 = 9 \sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Para tensión simple  $(\sigma_1, 0, 0)$  el esfuerzo octaédrico será.

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0 \quad ; \quad 2 \sigma_0^2 = 9 \tau_{oct}^2$$

Sustituyendo (4) en (2) se tiene

$$9 \sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Y como condición del problema  $\sigma_2 = \sigma_3$

$$9 \sigma_0^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2$$

$$9 \sigma_0^2 = \sigma_1^2 - 2 \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 - 2 \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1^2$$

$$9 \sigma_0^2 = 2 \sigma_1^2 - 4 \sigma_1 \sigma_2 + 2 \sigma_2^2$$

$$9 \sigma_0^2 = 2 (\sigma_1^2 - 2 \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)$$

$$9 \sigma_0^2 = 2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad ; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_0$$

Reemplazando valores

$$500 - \sigma_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \times 2196$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 358 \text{ Kg/cm}^2$$

Problema 4

Determinar las proporciones de los incrementos de deformación plástica para (a) tensión simple ( $\sigma_1, 0, 0$ ) con  $\sigma_1 = \sigma_0$ , (b) tensión biaxial con  $\sigma_1 = -\sigma_0/3$ ,  $\sigma_2 = -\sigma_0/3$  y  $\sigma_3 = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  (c) cortante puro con  $\tau_{xy} = \sigma_0/\sqrt{3}$

Solución: (a) tensión simple

Prandtl y Reuss generalizaron las relaciones entre esfuerzos principales e incrementos de deformación plástica principales como sigue:

$$\frac{d\epsilon_1 P}{S_1} = \frac{d\epsilon_2 P}{S_2} = \frac{d\epsilon_3 P}{S_3} = d\lambda$$

donde  $S_1 = \sigma_1 - \sigma_m$

siendo  $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

por lo tanto  $S_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

y para nuestro caso  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$   $\sigma_1 = \sigma_0$

luego  $S_1 = \sigma_0 - \sigma_0/3$  ;  $S_1 = \frac{2}{3} \sigma_0$

Análogamente  $S_2 = \sigma_2 - \sigma_m = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$$\text{como } \sigma_1 = \sigma_0 \quad S_2 = -\frac{\sigma_0}{3}$$

y  $S_3 = \sigma_3 - \sigma_m = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

$$\text{como } \sigma_1 = \sigma_0 \quad S_3 = -\frac{1}{3} \sigma_0$$

Por lo tanto la relación buscada es la siguiente:

$$\frac{3 d\epsilon_1 P}{2 S_1} = -\frac{3 d\epsilon_2 P}{S_2} = -\frac{3 d\epsilon_3 P}{S_3} = d\lambda$$

Para el caso (b) se tiene

$$\sigma_1 = \sigma_0/\sqrt{3} ; \quad \sigma_2 = 0 ; \quad \sigma_3 = -\sigma_0/\sqrt{3}$$

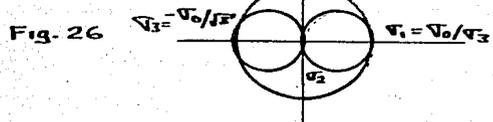
entonces  $S_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_0/\sqrt{3} - \sigma_0/\sqrt{3} + 0 + (-\sigma_0/\sqrt{3}) = -\sigma_0/\sqrt{3}$

para  $S_2 = 0 - \frac{1}{3} (\sigma_0/\sqrt{3} + 0 + (-\sigma_0/\sqrt{3})) = 0$

y  $S_3 = -\sigma_0/\sqrt{3} - \frac{1}{3} (\sigma_0/\sqrt{3} + 0 + (-\sigma_0/\sqrt{3})) = -\sigma_0/\sqrt{3}$

Por lo tanto la relación buscada es  $\frac{d\epsilon_1 P}{S_1} = -\frac{d\epsilon_3 P}{S_3} = d\lambda$

Para el caso (c) tenemos cortante puro que estará representado por el diagrama de Mohr siguiente:



Del diagrama se puede ver que tenemos los mismos valores del inciso (b).

$$S_1 = v_0/\sqrt{3} ; S_2 = 0 ; S_3 = -v_0/\sqrt{3}$$

Analogamente la relación buscada será:

$$\frac{d\varepsilon_1 P}{I} = \frac{d\varepsilon_3 P}{I} = d\lambda$$

Problema 5

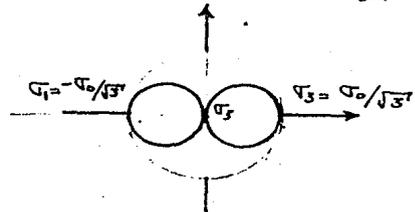
Determinar el incremento de Trabajo plástico  $dW_P$  y el incremento de deformación plástica equivalente  $d\epsilon_{1q}^P$  para el estado de tensión-biaxial  $\sigma_1 = -\sigma_0/\sqrt{3}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_0/\sqrt{3}$  y  $\sigma_3 = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

Si la deformación plástica es controlada de forma que  $d\epsilon_1^P = c$ , una constante.

Solución:

Puesto que se trata de tensión biaxial se tiene el caso en que el diagrama de Mohr es el siguiente.

Fig. 27



Calculando los incrementos de deformación plástica se tiene.

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_m = -\sigma_2/\sqrt{3} - \frac{1}{3} (-\sigma_0/\sqrt{3} + \sigma_0/\sqrt{3} + 0)$$

$$S_1 = -\sigma_0/\sqrt{3} + 1/3 \sigma_0/\sqrt{3} - \frac{1}{3} \sigma_0/\sqrt{3} = -\sigma_0/\sqrt{3}$$

$$S_2 = \sigma_2 - \sigma_m = \sigma_0/\sqrt{3} - \frac{1}{3} (-\sigma_0/\sqrt{3} + \sigma_0/\sqrt{3} + 0) = \sigma_0/\sqrt{3}$$

Por lo tanto la relación entre incrementos de deformación es la siguiente.

$$\frac{d\epsilon_1^P}{S_1} = \frac{d\epsilon_2^P}{S_2} = \frac{d\epsilon_3^P}{S_3} = d\lambda$$

$$\frac{d\epsilon_1^P}{-\sigma_0/\sqrt{3}} = \frac{d\epsilon_2^P}{\sigma_0/\sqrt{3}} ; \quad d\epsilon_1^P = -d\epsilon_2^P$$

El incremento de trabajo plástico esta dado por la siguiente relación para esfuerzos principales.

$$dW_P = S_1 d\epsilon_1^P + S_2 d\epsilon_2^P + S_3 d\epsilon_3^P$$

como  $d\epsilon_1^P = c$

entonces  $d\epsilon_2^P = -c$

Sustituyendo los valores en la ecuación de incrementos de trabajo se tiene

$$dW_P = (-\sigma_0/\sqrt{3})(c) + (\sigma_0/\sqrt{3})(-c) = -2c \sigma_0/\sqrt{3}$$

El incremento de deformación plástica equivalente  $d\epsilon_{EQ}^p$  se calcula de la siguiente relación:

$$d\epsilon_{EQ}^p = \left\{ 2 \left[ d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p \right]^2 + (d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p)^2 + (d\epsilon_3^p - d\epsilon_1^p)^2 \right\}^{1/2} / 3$$

Para nuestro caso sustituyendo valores de

$$d\epsilon_1^p = c \quad d\epsilon_2^p = -c$$

se tiene:

$$d\epsilon_{EQ}^p = \left\{ 2 \left[ c^2 + c^2 + [(c) - (-c)]^2 \right] \right\}^{1/2} / 3$$

$$d\epsilon_{EQ}^p = \left\{ 2 \left[ c^2 + c^2 + 4c^2 \right] \right\}^{1/2} / 3$$

$$d\epsilon_{EQ}^p = (12c^2)^{1/2} / 3$$

$$d\epsilon_{EQ}^p = 2c / \sqrt{3}$$

Problema 6

Una probeta de Aluminio, sometida a tensión uniaxial dio el siguiente diagrama esfuerzo-deformación

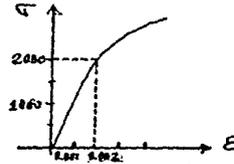


Fig. 28

Calcular las deformaciones plásticas de un pequeño elemento cúbico del mismo metal, usando el criterio de Von Mises, el cual está sujeto a un estado de esfuerzo descrito mediante el siguiente tensor.

$$S = \begin{pmatrix} 800 & 300 & 200 \\ 300 & 600 & 400 \\ 200 & 400 & 700 \end{pmatrix}$$

Para tensión pura  $\sigma_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0$  (1)

para tensión triaxial  $\sigma_{oct} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$  (2)

Igualando (1) y (2)  $\frac{\sqrt{3}}{3} \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Sustituyendo valores

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \sqrt{(800 - 600)^2 + (600 - 700)^2 + (700 - 800)^2 + 6[(300)^2 + (200)^2 + (400)^2]}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{40000 + 10000 + 10000 + 6(90000 + 40000 + 160000)}$$

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \sqrt{60000 + 174000} = 20000 \text{ Kg/cm}^2$$

Para encontrar  $\epsilon_p$  se entra al diagrama esfuerzo-deformación con el valor  $\sigma_0 = \sigma_e$

en donde  $\epsilon_p = 0.002$   $\frac{\epsilon_p}{\sigma_e} = \frac{0.002}{20000} = 1 \times 10^{-6}$

Luego para encontrar las deformaciones plásticas se utilizan las e-

cuciones (2.22)  $\epsilon_{xp} = 1 \times 10^{-6} [800 - \frac{1}{2}(600 + 700)] = 1.5 \times 10^{-4}$

$$\epsilon_{yp} = 1 \times 10^{-6} [600 - \frac{1}{2}(800 + 700)] = -1.5 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{zp} = 1 \times 10^{-6} [700 - \frac{1}{2}(800 + 600)] = 0$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{3}{2} (1 \times 10^{-6}) (300) = 4.5 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{3}{2} (1 \times 10^{-6}) (200) = 3 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{3}{2} (1 \times 10^{-6}) (400) = 6 \times 10^{-4}$$

Problema 7

Determinar la carga de Fluencia  $P_0$  y la carga última  $P_u$ , para la estructura de la fig. 29 si la barra es rígida y los dos alambres verticales son de material elastoplástico. Así mismo hállese la carga admisible,  $P_w$  (la  $w$  es de trabajo) de la estructura, utilizando un factor de carga 1.8. Ambos alambres tienen la misma área.

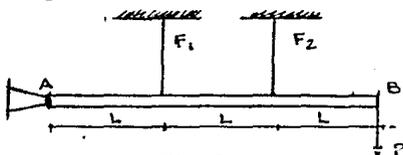
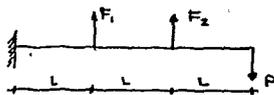


Fig. 29

Solución:

A medida que la carga  $P$  aumenta gradualmente, las Fuerzas en los alambres aumentarán también y mientras los esfuerzos permanezcan por debajo del esfuerzo de fluencia, las fuerzas se podrán determinar por un análisis elástico. El alambre que está a la derecha de la fig. 29 tendrá una fuerza mayor que el de la izquierda si sus áreas transversales son iguales, alcanzará el esfuerzo de fluencia primero cuando  $F_2$  sea igual a  $\sigma_y A$  donde  $A$  = área de la sección transversal y  $\sigma_y$  = esfuerzo de fluencia; con un incremento adicional de carga  $P$ , la fuerza en el alambre de la izquierda aumentará pero la fuerza  $F_2$  permanecerá constante debido a que el alambre derecho se ha vuelto plástico. Finalmente el alambre izquierdo llegará a ser plástico también y entonces la estructura no podrá soportar ninguna carga adicional y los dos alambres continuaran alargándose bajo un valor constante (y máximo) de la carga. Tal carga se llama carga última  $P_u$ .

Por equilibrio una ecuación que relaciona las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  de los alambres con la carga  $P$  se obtiene tomando momentos con respecto al extremo A de la barra



$$\sum F_y = 0 \quad F_1 + F_2 = P \quad (1)$$

$$\sum MA = 0 \quad -F_1 L - F_2 (2L) + 3L (P) = 0$$

$$3P = F_1 + 2 F_2 \quad (2)$$



De la fig. de cuerpo libre se ve claro, que el alargamiento del alambre de la derecha siempre será el doble del alargamiento del de la izquierda por consiguiente, en condiciones elásticas  $F_2 = 2F_1$  y se ve además que a medida que la carga  $P$  aumenta la fuerza  $F_2$  será la primera en alcanzar el valor de fluencia  $\sigma_0 A/2$  en ese instante - el valor de la fuerza  $F_1$  será igual a  $\sigma_0 A/2$  ya que el valor correspondiente de la carga  $P$ , igual a la carga de fluencia  $P_0$  por la ecuación (2)

$$3 P_0 = \sigma_0 (A/2) + 2 (2) (\sigma_0 A/2)$$

$$P_0 = \frac{\sigma_0 A}{6} + \frac{2 \sigma_0 A}{3} = \frac{5 \sigma_0 A}{6}$$

Cuando se alcanza la carga última  $P_u$ , tanto  $F_1$  como  $F_2$  serán iguales a  $\sigma_0 A$  así que de la ecuación (2) se tiene

$$3 P_u = \sigma_0 A + 2 \sigma_0 A \quad ; \quad P_u = \sigma_0 A$$

La carga admisible  $P_w$ , se determina dividiendo la carga última -- por el factor de carga.

$$P_w = \frac{P_u}{\text{Factor de carga}} = \frac{\sigma_0 A}{1.85}$$

Se ve de este ejemplo que la determinación de la carga última,  $P_u$ , para una estructura estáticamente indeterminada puede ser mucho -- más fácil que el efectuar un análisis elástico.

Problema 8

Una viga rectangular elástica y perfectamente plástica se carga a flexión pura, usando la teoría sencilla de las vigas, determinar -- los momentos extremos M para los que se extiende un núcleo elástico residual de  $-a$  hasta  $+a$  como se indica en la fig. 30.



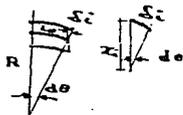
Solución:

Si una viga se carga más allá del límite de elasticidad y luego se quita la carga, algunos esfuerzos permanecerán en la viga. Tales esfuerzos se conocen por esfuerzos residuales o permanentes.

Los esfuerzos están en dirección Z perpendiculares a X.

Primero se calculará el esfuerzo en X, para la región elástica de la viga ( $-a < X < a$ )

Tomando un elemento diferencial de viga se tiene.



$$d\theta = \frac{\delta c}{x c} = \frac{L \theta}{R}$$

$$\delta c = \frac{x c L \theta}{R} \quad (1)$$

La deformación unitaria se define  $\frac{\delta c}{L}$

por lo tanto si dividimos la ecuación (1) entre L nos da:  $\epsilon = \frac{x}{R} \left( \frac{L \theta}{L} \right)$

como  $\frac{L \theta}{L}$  es la unidad la expresión nos queda  $\epsilon = \frac{x}{R}$

por lo tanto  $\sigma_x = E \epsilon_x = \frac{E x}{R}$

Donde R es el radio de curvatura y E el módulo de elasticidad.

En la región plástica el esfuerzo  $\sigma_x$  es igual al esfuerzo de fluencia

$$\sigma_x = \sigma_y$$

Por lo tanto, el momento resistente de la viga es

$$M = 2 \int_0^a \frac{E}{R} (x) (x dx) b + 2 \int_a^c \sigma_y x dx b$$

$$M = 2 E b x^2 \Big|_0^a + 2 \sigma_y b x^2 \Big|_a^c = 2 E a^3 b + \sigma_y b c^2 - \sigma_y b a^2$$

Ahora podemos usar  $\sigma_y = \frac{E \alpha}{\rho}$  como condición de esfuerzo en la inter fase elasto-plástica se obtiene.

$$M = \frac{2}{3} \sigma_y a^2 b + \sigma_y b c^2 - \sigma_y b a^2$$

$$M = \sigma_y b \left( \frac{2}{3} c^2 - a^2 \right)$$

De aquí se puede ver que para cuando  $a=c$

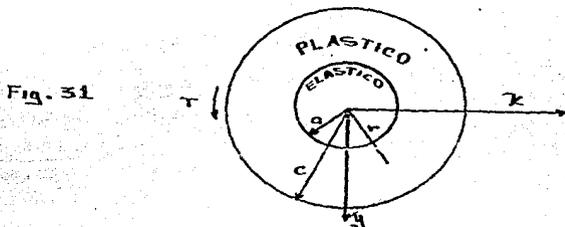
$$M = \frac{2}{3} \sigma_y b c^2$$

y para cuando  $a=0$

$$M = \sigma_y b c^2$$

Problema 9

Un eje circular elástico y perfectamente plástico de radio  $C$  esta sometido en sus extremos a los pares de Torsión como se indica en la fig. 31. Determinar el par para el que queda un núcleo elástico interior de radio  $a$



Para el rango elástico como ya se vió en el problema 8 de la viga.

$$\tau = K \frac{r}{a} \quad \text{si} \quad -a \leq r \leq a$$

Donde  $K$  es la constante elástica límite del material

si  $a \leq r \leq C$

para el rango plástico  $\tau = K$

tomando momentos con respecto al centro del eje

$$T = \int_0^a K \frac{r}{a} 2\pi r^2 dr + 2\pi \int_a^C K r^2 dr = 2\pi K r^2 \left[ \frac{r}{3} \right]_0^a + 2\pi K r^2 \left[ \frac{r}{3} \right]_a^C$$

$$T = \frac{1}{3} \pi K a^3 + \frac{2\pi K C^3}{3} - \frac{2}{3} \pi K a^3$$

$$T = \frac{2}{3} \pi K C^3 - \frac{1}{3} \pi K a^3 = \frac{2}{3} \pi K (C^3 - \frac{a^3}{4})$$

Para el comienzo de la deformación plástica se tiene  $a=C$

$$T_1 = \frac{2\pi K}{3} (C^3 - \frac{C^3}{4}) = \frac{2\pi K}{3} (\frac{3}{4} C^3)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi K C^3$$

Para un estado completamente plástico, cuando  $a=0$

$$T_2 = \frac{2}{3} \pi K (C^3 - \frac{0}{4})$$

$$T_2 = \frac{2}{3} \pi K C^3$$

Por lo tanto  $T_2 = \frac{4}{3} T_1$

Problema 10

Hallar el momento de una viga cargada a flexión pura si el material se comporta con un endurecimiento lineal por deformación que obedece a la ecuación Post-elástica  $\sigma_x = \sigma_e + A (\epsilon_x - \sigma_e/E)$

La distribución de tensiones es como se indica en la figura 32

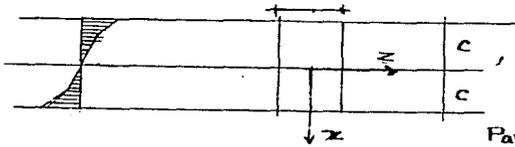


Fig. 32

Para la región elástica  $\epsilon_x = \frac{x}{R}$

Donde R es el radio de curvatura.

Toda la mitad superior esta sometida a compresión con endurecimiento lineal en tanto que la inferior esta toda bajo una tensión con endurecimiento lineal.

Tomando momentos con respecto al centro se tiene.

$$M = \int_0^a \frac{E(x)}{R} x dx b + 2 \int_a^c [\sigma_e + A \left( \frac{x}{R} - \frac{\sigma_e}{E} \right) x b dx$$

$$M = \frac{2Ea^3b}{3R} + \int_a^c 2b \left[ \sigma_e \left( 1 - \frac{A}{E} \right) x + \frac{Ax^2}{R} \right] dx$$

$$M = \frac{2Ea^3b}{3R} + 2b \left[ \frac{\sigma_e}{2} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) (c^2 - a^2) + A \left( \frac{c^3 - a^3}{3R} \right) \right]$$

Usando  $\sigma_e = \frac{Ea}{R}$

$$M = \frac{2a^3b}{3} \frac{E}{R} + bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) - a^2 b \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) + \frac{2bc^3A}{3R} - \frac{2a^3b}{3R}$$

$$M = 2a^2b \frac{E}{R} + bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) - a^2 b \frac{E}{R} + a^2 b \frac{E}{R} \frac{A}{E} + \frac{2bc^3A}{3R} - \frac{2a^3b}{3R}$$

$$M = bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) - \frac{1}{3} a^2 b \frac{E}{R} + a^2 b \frac{E}{R} \frac{A}{E} + \frac{2bc^3A}{3R} - 2a^3b$$

$$M = bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) - \frac{bE^3R^2}{3E^2} + \frac{bE^3R^2A}{E^2E} + \frac{2bc^3A}{3R} - \frac{2bE^3R^2}{3E^2}$$

$$M = bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) = \frac{2bc^3A}{3R} + \frac{bE^3R^2A}{E^2E} - \frac{bE^3R^2}{E^2}$$

$$M = bc^2 \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{A}{E} \right) + \frac{2bc^3A}{3R} + b \frac{E^3R^2}{E^2} \left( \frac{A}{E} - 1 \right) / E^2$$

### 3.10. PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Probar que la condición de plasticidad de Von Mises se puede escribir en la forma  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6K$

2.- Un pequeño elemento cúbico de metal, se sujeta a un estado de esfuerzo descrito mediante el siguiente tensor

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 12 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 8 & -30 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule el esfuerzo cortante octaedral usando la ecuación (2.27)

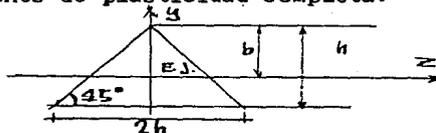
(b) Calcule los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ ; y use la ecuación (2.23) para calcular el esfuerzo cortante octaedral, que debe ser igual al calculado en (a).

3.- Siguiendo el procedimiento del Problema 4, determine las relaciones que hay entre los incrementos de deformación plástica para

(a) tensión biaxial  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  (b) tensión-torsión con  $\sigma_x = \sigma_z/2$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_z/2$

4.- Determine la capacidad plástica o última a la flexión de una viga de acero dulce de sección rectangular. Considérese que el material es idealmente elastoplástico.

5.- Una viga de sección transversal triangular de la fig. 33 está sometida a flexión pura. Determine la posición del eje neutro ( distancia b desde el vértice superior ) de la viga cuando esta en condiciones de plasticidad completa.



## 4.0 CONCLUSIONES

Las deformaciones elásticas consideradas en el segundo capítulo se caracterizan por una recuperación completa de las deformaciones, una vez que se retiran las cargas aplicadas. Además, las deformaciones elásticas solo dependen de la magnitud del esfuerzo y no de la historia de carga o deformaciones previas. Cualquier cambio de forma como respuesta a un medio continuo a las cargas aplicadas, que no obedezca a las leyes constitutivas de la elasticidad clásica, se considera como una "Deformación Inelástica". En particular las deformaciones irreversibles que conducen a cambios dimensionales permanentes unicamente tienen lugar a intensidades de esfuerzo por encima de un cierto valor conocido como límite elástico o es - fuerzo de fluencia.

En la Teoría de la plásticidad, la cuestión fundamental para resolver problemas consiste en la formulación matemática de las relaciones esfuerzo-deformación adecuadas para la descripción del fenómeno de las deformaciones plásticas, y en la adopción de un criterio de fluencia apropiado para predecir el comienzo del comportamiento plástico.

En problemas elasto-plásticos las deformaciones elásticas y plásticas son aproximadamente del mismo orden bajo una carga. Un gran número de ejemplos de tales problemas bien conocidos tiene lugar en la teoría de vigas, torsión de ejes y tubos de pared gruesa y esferas sometidas a presión.

L.E. Malvern, "Introducción to the Mechanic of a continuous Medium".  
Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs. N. J., 1969.

George E. Mase, "Mecánica del medio continuo, Teoría y Problemas",  
libros McGraw-Hill de México, 1977.

Castillo Heberto, "Análisis y diseño estructural", Ed. Representa-  
ciones y servicios de Ingeniería, México, 1976.

Timoshenko, "Teoría de la Elasticidad", Ed. Blume, Madrid 1968.

Ingenieros Agustin Demeneghi C. Roberto Magaña y Hector Saiginés -  
García Apútes de "Introducción al comportamiento de los materia-  
les", Facultad de Ingeniería.

Egor P. Popov "Mecánica de Sólidos", Ed. Limusa

F. R. Shanley "Mecánica de Materiales", Libros McGraw-Hill.

S.P. Timoshenko-James M. Gere. "Mecánica de Materiales", Unión tipo  
gráfica Editorial Hispano-Americana, S. A.

Ejercicios de Clase del Ing. Hector Saiginés García.

I. Mirolíúbov, S. Engálichev "Problemas de resistencia de Materiales"  
Ed. Mir. Moscu.