

03063

/  
121

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
UNIDAD ACADÉMICA DE LOS CICLOS  
PROFESIONAL Y DE POSGRADO

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES  
EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y  
EN SISTEMAS

MAESTRIA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

EXPLORACION DE UNA FAMILIA DE  
METODOS DE UN PASO PARA LA  
SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION  
DINAMICA DE EQUILIBRIO

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACION

PRESENTA

BYRON PATRICIO GUERRERO VILLAVICENCIO

MEXICO, D.F.

OCTUBRE DE 1983.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# I N D I C E

	Pág.
CAPITULO 0. INTRODUCCION.....	1
CAPITULO 1. DEFINICION DEL PROBLEMA.....	4
1.1 El Método del Elemento Finito .....	5
1.2 Las ecuaciones de equilibrio del aná- lisis Estructural.....	9
1.2.1 Generalidades .....	9
1.2.2 El Equilibrio Estático .....	11
1.2.3 El Equilibrio Dinámico .....	19
1.3 La Respuesta Dinámica de las Estructuras.....	24
1.3.1 Generalidades .....	24
1.3.2 Sistemas con un Grado de Liber- tad .....	26
1.3.3 Sistemas con n Grados de Liber- tad .....	30
1.4 El principio de superposición modal ...	39
1.4.1 Superposición modal para siste- mas sin amortiguamiento .....	40
1.4.2 Superposición modal para siste- mas con amortiguamiento .....	45
1.4.3 Consideraciones prácticas acerca de la descomposición modal .....	49
CAPITULO 2. SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE EQUILI- BRIO DINAMICO .....	55
2.1 Generalidades .....	55
2.2 Funcionamiento de los métodos de inte- gración directa .....	61

2.3 Estabilidad de los métodos de integración directa.....	66
2.4 Precisión de los métodos de integración directa.....	70
2.4.1 Decaimiento de la amplitud.....	71
2.4.2 Elongación del período.....	73
2.5 Algunos esquemas conocidos.....	76
2.5.1 El método de diferencias centrales.....	76
2.5.2 El método de Houbolt.....	79
2.5.3 El método de Wilson.....	81
2.5.4 El método de Newmark.....	84
2.6 Formulación de una familia de esquemas por el método de residuos pesados.....	87

CAPITULO 3. UNA FAMILIA DE METODOS DE UN PASO PARA LA SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DINAMICA DE EQUILIBRIO.....	94
3.1 Motivación.....	94
3.2 Deducción del algoritmo básico.....	96
3.2.1 Método directo para la resolución de la ecuación de segundo orden....	96
3.2.2 Método basado en la reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden.....	99
3.3 Opciones para las funciones de interpolación.....	103
3.3.1 El método generalizado de interpolación de Hermite.....	104

3.3.2	Determinación de parámetros para - las diferentes opciones de las fun- ciones de interpolación.....	106
3.3.3	Algunas fórmulas para los coefi- - cientes de interpolación.....	113
3.4	Análisis teórico de estabilidad y pre- - cisión.....	116
3.4.1	Planteamiento general.....	116
3.4.2	Implementación.....	120
3.4.3	Conclusiones y comentarios.....	128
CAPITULO 4.	UN EJEMPLO DE APLICACION.....	132
4.1	El problema a resolver.....	132
4.2	Implementación.....	135
4.2.1	Consideraciones prácticas previas a la implementación.....	135
4.2.2	Diagrama de flujo.....	139
4.2.3	Descripción de rutinas del progra- ma de prueba.....	140
4.3	Análisis de resultados.....	147

## INTRODUCCION GENERAL

El presente trabajo tiene por objeto explorar una familia de métodos aplicables a la resolución de la ecuación dinámica de equilibrio, en busca de descubrir esquemas de buenas características para el tratamiento de este problema. No se ha perseguido, realizar un análisis riguroso de las técnicas utilizadas. Se trata, un cambio de descubrir un problema de ingeniería, desarrollar una idea de como resolverlo y hacer un estudio teórico y práctico de cuan eficiente resultó ser esa idea.

La motivación fundamental al elegir el tema de esta tesis fue, justamente trabajar en un problema de ingeniería (el autor de este trabajo es ingeniero civil) y aprender a utilizar las técnicas del análisis numérico y, en particular, el método del elemento finito, en relación a problemas prácticos de esta área técnica.

La dinámica estructural es un tópico avanzado dentro del campo de ingeniería, pues requiere de ciertos conocimientos previos. Esto a obligado a dar al lector una larga introducción teórica, contenida en los dos primeros capítulos, con el fin de ubicar apropiadamente el problema y proporcionar los conceptos básicos que se aplicaran después .

El capítulo 1 describe el problema que se va a tratar. Empieza dando los lineamientos generales de las técnicas de discretización y del elemento final., se hace luego la deducción de la ecuación que representa el fenómeno que queremos estudiar y se continúa explicando la forma de la solución que se va a buscar. Concluye este capítulo con una exposición breve del principio de superposición modal que, a base de razonamien

tos teóricos permite extraer importantes conclusiones prácticas y proporciona una comprensión mas profunda del problema.

En el capítulo 2 se da los lineamientos generales que siguen todos los métodos numéricos que enfrentan este problema y se explican las técnicas de análisis utilizadas para determinar la eficacia de estos métodos. Se hace luego una breve exposición de algunos de los métodos mas conocidos y se concluye con un ejemplo en el que se realiza una formulación generalizada capaz de producir una familia de métodos de solución. Dado que nuestro objetivo es también presentar una familia completa de esquemas basados en otra formulación, esta última sección nos permitirá luego establecer comparaciones con la formulación que se hará en el capítulo siguiente.

El capítulo 3 contiene la exposición de los algoritmos básicos que caracterizan la familia de métodos que estudiamos; se describen, en seguida, las diferentes variantes que -- hemos considerado para esos algoritmos básicos, y que generan la familia que vamos a explorar y se concluye el capítulo con un análisis teórico de estabilidad y precisión.

El capítulo 4, por último, contiene un ejemplo práctico de aplicación: describimos el problema elegido para nuestras pruebas y, a continuación, explicamos el programa que ejecuta estas pruebas, mediante un diagrama de flujo y luego, explicando las rutinas que lo componen. Para terminar, se exponen los resultados obtenidos y se hace un análisis somero de los mismos.

No creemos que este trabajo sea suficiente para completar un estudio de este tipo. Aún queda mucho por hacer y creemos, por el contrario que este puede ser el inicio de -- otras investigaciones posteriores.

Es oportuno consignar aquí nuestro agradecimiento a - las personas que han contribuido a la realización de esta tesis, en especial al grupo de Análisis Numérico y, en particular, al Director de este trabajo, Dr. Jean Pierre Hennart - - quien realizó una sabia conducción del mismo y prestó siempre su valiosa ayuda y asesoría.



**CAPITULO I**  
**DEFINICION DEL PROBLEMA**

## 1. DEFINICION DEL PROBLEMA

### 1.1. EL METODO DEL ELEMENTO FINITO.

En diversas ramas técnicas suelen presentarse problemas prácticos de gran complejidad cuyo tratamiento global resulta imposible. En tales casos, es necesario representar el fenómeno que se estudia mediante un modelo simplificado que permita plantear y resolver el problema en términos más sencillos. Con frecuencia, el modelo planteado se basa en procedimientos de descomposición que subdividen el caso global y lo reducen a un conjunto de subproblemas que, al considerarlos en conjunto, permiten obtener la solución.

En ciertos casos, existen criterios naturales de división que permiten obtener modelos en los que intervienen un número finito de componentes; tales problemas se clasifican como discretos. En contraposición, algunos sistemas no pueden subdividirse de manera natural en un número finito de componentes; estos son los problemas continuos.

El estudio de los problemas continuos puede hacerse mediante el uso de métodos basados en el cálculo infinitesimal, pero para utilizarlos con fluidez se requiere de entrenamiento y experiencia y, excepto en los casos más elementales, suelen resultar muy laboriosos; además, estos métodos no son generales, pues existen problemas para los cuales no se conoce un procedimiento analítico de solución.

La difusión de los computadores y el desarrollo de técnicas numéricas ha hecho factible el tratamiento de problemas representados por modelos muy complejos. Por esta razón los métodos

dos numéricos han venido a constituir una alternativa práctica en la solución de los sistemas continuos, dada la escasa aplicabilidad de los métodos analíticos. El procedimiento a seguir - consiste en aproximar el problema continuo mediante un modelo - discreto (Discretización), y aplicar técnicas numéricas para la solución. La precisión que se obtenga en los resultados puede ser tan buena como se quiera, a condición de considerar un número suficiente de elementos. La laboriosidad del cálculo aumenta cuando crece este número, pero se puede llegar a un punto razonable de equilibrio que permita obtener resultados satisfactorios tanto en costo como en precisión.

En el presente trabajo, utilizaremos la técnica de discretización conocida como "Método del Elemento Finito", que constituye una metodología general para el tratamiento de problemas continuos de muy diferente tipo. Este método se desarrolló inicialmente sobre una base física para analizar problemas de Mecánica Estructural, pero su aplicación se extendió rápidamente a otras áreas técnicas y científicas. Al analizar sus características, se pudo probar que este método constituye la aplicación de conceptos matemáticos bien definidos y que los modelos que consigue establecer no están basados en consideraciones puramente físicas, como se creyó en un principio.

En la actualidad, el Método del Elemento Finito ha sido ampliamente aceptado, debido principalmente a su generalidad y a sus atractivas propiedades numéricas.

Algunas de las ideas básicas del Método del Elemento Finito, son bastante antiguas, pero su conformación definitiva solamente se ha alcanzado en años recientes. Muchos ingenieros, físicos y matemáticos han contribuido a desarrollarlo, tanto desde el punto de vista teórico, como de su aplicación práctica, pero su perfeccionamiento y difusión solo ha sido posible debi-

do al uso generalizado del computador electrónico, único medio-práctico de efectuar los cálculos necesarios.

En términos generales, el método consiste en dividir artificialmente el medio continuo en un cierto número finito de elementos, limitados cada uno de ellos por líneas o superficies imaginarias, e interconectados entre sí mediante un número discreto de puntos llamados nodos, situados en las fronteras entre ellos.

Para resolver el problema, se considera el sistema completo como un ensamblaje de sus elementos, y se usan los mismos métodos aplicables a problemas discretos: se plantea un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los valores de una -- función dada, en cada uno de los nodos. Si se suponen conocidas estas incógnitas, se pueden encontrar los valores correspondientes a los demás puntos, mediante un conjunto de funciones de interpolación, previamente establecidas.

En cada elemento, las magnitudes correspondientes a -- un punto cualquiera, se expresan, exclusivamente, en términos -- de los valores de las incógnitas en los nodos pertenecientes a -- ese elemento.

Esta breve explicación, desde luego, no es suficiente -- para dar una idea clara de este método. Quien se interese en -- estudiarlo de manera formal, deberá consultar algunos de los muchos libros y artículos que tratan sobre el tema.

En el presente trabajo aplicaremos estos principios a -- la solución de las ecuaciones de equilibrio de dinámica estruc -- tural. No intentaremos ahondar en las bases matemáticas del método ni tampoco trataremos de describir aplicaciones a otros --

problemas. Un tratamiento sobre los aspectos teóricos y matemáticos puede hallarse en las referencias [1]; y [18]; la aplicación a problemas específicos de ingeniería, y en particular a la mecánica estructural puede encontrarse en [2], [3] y [4].

## 1.2. LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

### 1.2.1. Generalidades.

El análisis de una estructura busca determinar los esfuerzos internos y las deformaciones que ésta sufre, como respuesta a ciertos estímulos externos conocidos. (estímulos que en general, consisten en fuerzas o variaciones térmicas). La Mecánica y la Teoría de las Estructuras proporcionan las bases teóricas y los métodos para plantear y resolver este problema; en particular, existen procedimientos perfectamente definidos para tratar los problemas estructurales discretos.

Nuestro objetivo en esta sección es emplear el método de elementos finitos, para deducir ecuaciones de equilibrio que puedan aplicarse a problemas continuos y que permitan resolverlos siguiendo procedimientos similares a los usados para casos discretos. Concretamente, nos interesa deducir la ecuación dinámica de equilibrio, a la que dedicaremos nuestra atención en el presente trabajo. Comenzaremos con algunas consideraciones de tipo general, para llegar después a formular las ecuaciones de equilibrio.

Quando se enfrenta un problema estructural de tipo discreto, en los casos más elementales, se obtiene la solución -- aplicando las ecuaciones fundamentales de la estática para hallar las acciones que inciden sobre cada elemento; luego, se analiza cada uno por separado y se determinan sus esfuerzos internos. En problemas más generales, las ecuaciones fundamentales de equilibrio son insuficientes en número para calcular las interacciones entre los elementos; en este caso, para llegar a una solución se requiere obtener ecuaciones adicionales que ha-

gan que el problema se vuelva determinado. Estas ecuaciones se pueden deducir tomando en cuenta las deformaciones que ocurren, debido a las acciones externas. (como estas deformaciones dependen de las características físicas de la estructura, es decir, forma, dimensiones y material de que está construida, es necesario disponer de estos datos para el cálculo).

El estudio de las deformaciones de la estructura viene a ser el método fundamental de análisis y la vía mediante la cual se obtienen las ecuaciones que expresan el equilibrio del sistema. Existen diferentes planteamientos teóricos que establecen una relación entre esfuerzos y deformaciones y que permiten deducir las ecuaciones que se necesiten, pero en estructuras elásticas convencionales se suele usar la "Ley de Hooke" para definir esta relación. (Esta ley afirma que esfuerzos y deformaciones son proporcionales entre si y se considera válida para deformaciones pequeñas que no alteren las condiciones geométricas del sistema). Dentro del presente trabajo se usará esta ley.

El análisis de una estructura discreta general tiene, pues, como parte medular, el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones simultáneas que tenga como incógnitas ciertas magnitudes apropiadas. Una de las alternativas consisten en tomar como incógnitas los desplazamientos de los puntos, expresándolos como funciones lineales de las fuerzas. El procedimiento de solución que se deriva de este planteamiento es llamado "Método de los Desplazamientos".

Al analizar una estructura continua, las deformaciones debidas a las acciones externas provocan que todos sus puntos sufran desplazamientos, por lo que el problema es continuo. Como hemos visto, en este caso se requiere que, tanto la estructura física como los estímulos que recibe, sean representados de ma-

nera simplificada por medio de modelos discretos para que sea factible una solución.

Existen varios principios teóricos que pueden conducir al planteamiento de un sistema de ecuaciones de equilibrio. -- Uno de ellos es el "principio de desplazamientos virtuales" o "del trabajo virtual", que toma en consideración las deformaciones de la estructura y permite plantear un sistema en el que -- las incógnitas son los desplazamientos. Expresado en palabras, este principio nos dice que "si un sistema que esta en equilibrio bajo la acción de un conjunto de fuerzas es sometido a un grupo de desplazamientos compatibles con las restricciones de la estructura, el trabajo total realizado por las fuerzas será cero". Debe observarse que, en el caso planteado, participan tanto las fuerzas externas que actúan sobre el sistema como los esfuerzos internos. Tomando en cuenta esto, el principio del trabajo virtual puede enunciarse diciendo que "para cualquier conjunto de desplazamientos compatibles, el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo total". A continuación, usaremos este fundamento teórico para deducir las ecuaciones que nos permitan resolver el problema que estudiamos, aplicando el método de los desplazamientos a un modelo discretizado del sistema.

### 1.2.2. El Equilibrio Estático.

Considérese el equilibrio de un cuerpo general de tres dimensiones. Supondremos que sobre él actúan fuerzas repartidas sobre su superficie  $f^s(x, y, z)$ , fuerzas internas en cada uno de sus puntos,  $f^a(x, y, z)$  y fuerzas concentradas  $F^i$ , aplicadas en puntos específicos del cuerpo. En estos tres tipos de fuerza suponemos incluidas todas las acciones y reacciones externas que, en el análisis estático, suponemos que son constantes.



Cada vector-fuerza aplicado en un punto tiene, en general, tres componentes, en las direcciones de los ejes coordenados:

$$F^s = \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \end{bmatrix}, \quad f^o = \begin{bmatrix} f_x^o \\ f_y^o \\ f_z^o \end{bmatrix}, \quad F^i = \begin{bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_z^i \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

El vector de desplazamientos de un punto, medidos a partir de una conformación inicial sin cargas, lo denotaremos con  $\mu$ . En el caso general, el desplazamiento de cada punto tendrá tres componentes:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

(El número de componentes que tiene el vector de desplazamiento de un sistema, se llama número de grados de libertad de ese sistema. Aquí hemos definido  $\mu$  de manera que se consideran tres grados de libertad por cada punto. En ciertos análisis específicos, puede ser suficiente considerar un número menor, pero esos son solamente casos particulares del que estamos estudiando. A veces hay que tomar en cuenta grados de libertad rotacionales, pero en el contexto de este trabajo no es necesario hacerlo).

Las deformaciones unitarias correspondientes al vector de desplazamientos  $\mu$  se definen de la siguiente forma:

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \delta_{xy} \ \delta_{yz} \ \delta_{xz}] \quad (1.3)$$

$$\text{donde } \epsilon_{vr} = \frac{\partial \mu_r}{\partial v} \quad (1.4)$$

$$y \quad \gamma_{\tau w} = \frac{\partial u w}{\partial w} + \frac{\partial u w}{\partial v} \quad (1.5)$$

Los esfuerzos correspondientes al vector de deformaciones  $\epsilon$  son:

$$\tau^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}] \quad (1.6)$$

Los vectores  $\epsilon$  y  $\tau$  pueden relacionarse, como ya hemos dicho, mediante la ley de Hooke, que puede expresarse así:

$$\tau = D\epsilon + \tau^I \quad (1.7)$$

donde  $D$  es la llamada "matriz de flexibilidad" que contiene los coeficientes de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones, y  $\tau^I$  es un vector con los valores de los esfuerzos iniciales de la estructura (es decir, los que existían desde antes de la aplicación de  $f^s$ ,  $f^b$  y  $F^i$ ). Obsérvese que, de existir acciones térmicas, sus efectos estarán incluidos en  $\tau^I$ . (En este trabajo no consideraremos otros efectos debidos a temperatura).

El principio del trabajo virtual establece que:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau \, dv = \int_S (\bar{u}^s)^T f^s \, ds + \int_V \bar{u}^T f^b \, dv + \sum_i (u^i)^T F^i \quad (1.8)$$

donde las integraciones se realizan sobre el volumen  $V$  y la superficie  $S$  del cuerpo, respectivamente, y la sumatoria incluye todos los puntos donde se aplican fuerzas concentradas  $F^i$ .

El lado izquierdo de la ecuación (1.8) representa el trabajo virtual interno y es igual a los esfuerzos reales  $\tau$  actuando a lo largo de las deformaciones virtuales  $\bar{\epsilon}$  que corresponden a los desplazamientos virtuales que impongamos:

$$\bar{\epsilon}^T = [\bar{\epsilon}_{xx} \quad \bar{\epsilon}_{yy} \quad \bar{\epsilon}_{zz} \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{xz}] \quad (1.9)$$

El trabajo externo está dado por el lado derecho de -- (1.8) y es igual a las fuerzas  $f^s$ ,  $f^B$  y  $F^i$  actuando a lo largo de los desplazamientos virtuales  $\bar{u}$ , que en cada punto vienen dados por:

$$\bar{u}^T = [\bar{u}_x \quad \bar{u}_y \quad u_z] \quad (1.10)$$

La notación  $\bar{u}^s$  usada en (1.8) denota el subconjunto de  $\bar{u}$  correspondiente a los puntos de la superficie, y  $\bar{u}^i$  denota el vector de desplazamientos correspondiente al punto  $i$  en donde se aplica la fuerza concentrada  $F^i$ .

La ecuación (1.8) es muy general y expresa el equilibrio del sistema para cualquier conjunto compatible de desplazamientos. Si bien se ha considerado un caso general, en tres dimensiones, el planteamiento es válido en otros sistemas coordenados. Sin embargo, hay que observar que esta ecuación se refiere a un sistema elástico continuo, por lo cual involucra un número infinito de puntos, cada uno de ellos con un desplazamiento desconocido. Para que sea posible una solución práctica, es necesario discretizar el sistema, lo cual puede hacerse siguiendo la metodología descrita en la sección anterior: consideraremos la estructura total como un ensamblaje de un número discreto de elementos finitos, interconectados entre si mediante puntos nodales situados en sus fronteras; supondremos también que la discretización se ha hecho de tal manera que todas las cargas concentradas incidan sobre alguno de los nodos.

Queremos plantear un sistema de ecuaciones que expre--

sen el equilibrio del sistema y que tengan como incógnitas los desplazamientos de los nodos.

El vector de incógnitas  $U$ , en el caso general, será de longitud  $n$  siendo  $\frac{n}{3} = p$  el número total de puntos nodales, cada uno con tres grados de libertad, ya que los desplazamientos tienen componentes en cada uno de los tres ejes coordenados. Los elementos del vector  $U$  están medidos en un sistema general de coordenadas válido para toda la estructura. Haremos:

$$U^T = [u_{x_1} \ u_{y_1} \ u_{z_1} \ u_{x_2} \ u_{y_2} \ u_{z_2} \ \dots \ u_{x_p} \ u_{y_p} \ u_{z_p}] \quad (1.11)$$

Los desplazamientos y deformaciones unitarias de un punto  $P(x, y, z)$  los expresaremos en función de los desplazamientos de los nodos que pertenecen al elemento que contiene a  $P$ . Además, considerando este elemento individualmente, podemos establecer en él un sistema local de coordenadas, por lo que es necesario determinar la relación entre los desplazamientos y las deformaciones de sus puntos, medidos en el sistema local y los desplazamientos de los nodos de la estructura, referidos al sistema total. Expresaremos estas relaciones como:

$$u^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z) U \quad (1.12)$$

$$\epsilon^{(m)}(x, y, z) = B^{(m)}(x, y, z) U. \quad (1.13)$$

donde el superíndice  $(m)$  significa perteneciente al elemento  $m$ .

Hay que observar que la transformación lineal efectuada por  $H^{(m)}$  y  $B^{(m)}$  involucra, en primer lugar, un cambio de coordenadas, al pasar del sistema general, al particular y, además,

una interpolación para calcular las magnitudes en punto  $(x, y, z)$ , en términos de los desplazamientos nodales del elemento correspondiente.

Las matrices  $H^{(m)}$  y  $B^{(m)}$  contienen los coeficientes de transformación adecuados entre los vectores correspondientes. Debe notarse que, a pesar de que en el vector  $U$  constan todos los desplazamientos de los nodos de la estructura, para calcular los vectores  $u^{(m)}$  y  $\epsilon^{(m)}$  sólo deben intervenir los desplazamientos y deformaciones asociados a los nodos del elemento  $m$ . Según las definiciones (1.2), (1.3) y (1.11), para que los cálculos sean congruentes, las matrices  $H^{(m)}$  y  $B^{(m)}$  deben ser dimensiones  $3 \times 3n$  y  $6 \times 3n$ , respectivamente, donde  $n$  es el número total de nodos de la estructura. (3 es, en este caso, el número de componentes que tienen los desplazamientos de cada punto; 6 es el número de elementos del vector de deformaciones de un punto.) Para conseguir lo que queremos, las columnas de  $H^{(m)}$  y  $B^{(m)}$  correspondientes a los nodos que no pertenecen a  $m$ , deben estar llenas de ceros; de este modo se consigue, además, que todas las matrices tengan dimensiones uniformes lo cual permite operar con ellas, de manera más fácil. Más adelante se hará evidente la necesidad de esta uniformización.

Ahora necesitamos particularizar la expresión dada en (1.7) de modo que se establezca la relación entre esfuerzos y deformaciones para los puntos de un elemento dado  $m$ . Podemos escribir:

$$\gamma^{(m)} = D^{(m)} \epsilon^{(m)} + \tau^{I(m)} \quad (1.14)$$

Podemos reescribir (1.8) como una suma de integrales sobre el volumen y el área de cada elemento:

$$\sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\epsilon}^{(m)T} \tau^{(m)} dV^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{u}^{(m)T} f^{B^{(m)}} dV^{(m)} + \sum_m \int_{S^{(m)}} \bar{u}^{s^{(m)T}} f^{s^{(m)}} ds^{(m)} + \sum_i \bar{u}^{iT} F_i \quad (1.15)$$

donde  $m=1, 2, \dots, N$ ;  $N$  = número de elementos. Ahora, las integraciones se realizan sobre el volumen y la superficie de cada elemento finito. Si en (1.15) sustituimos los valores definidos en (1.12), (1.13) y (1.14), obtenemos:

$$\bar{U}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} D^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \right] U = \bar{U}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f^{B^{(m)}} dV^{(m)} \right] + \\ + \bar{U}^T \left[ \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{s^{(m)T}} f^{s^{(m)}} ds^{(m)} \right] - \bar{U}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \tau^{I^{(m)}} dV^{(m)} \right] + \bar{U}^T F \quad (1.16)$$

Donde  $F$  es un vector general de todas las fuerzas externas aplicadas en los nodos de la estructura. Nótese que debe existir congruencia entre  $F$  y  $U$  pues la  $i$ -ésima componente de  $F$  debe corresponder a un mismo nodo y actuar en la misma dirección que la  $i$ -ésima componente de  $U$ .

Queremos obtener de (1.16) las ecuaciones de equilibrio que nos permitan calcular los desplazamientos de los puntos nodales. Puesto que (1.16) es válida para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales que sea compatible con las restricciones de la estructura, podemos sustituir sucesivamente en esta ecuación  $\bar{U}^T = \{1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0\}$ ,  $\bar{U}^T = \{0 \ 1 \ \dots \ 0 \ 0\}$ , ...  $\bar{U}^T = \{0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0\}$ ,  $\bar{U}^T = \{0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1\}$ , obteniendo así un sistema de ecuaciones lineales simultáneas en el que las incógnitas son los elementos del vector  $U$  de desplazamientos nodales. Esta última sustitución puede expresarse más concisamente haciendo  $\bar{U}^T = I$  ( $I$  es la matriz identidad), con lo cual el sistema de ecuaciones que se obtiene puede escribirse en la forma:

$$K U = R \quad (1.17)$$

donde

$$K = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} D^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)} \quad (1.18)$$

es la llamada matriz de rigidez del sistema. La matriz  $K$  resulta ser simétrica, y sus elementos se agrupan en torno a lo diagonal principal (lo que se conoce como "estructura en banda").

En el vector  $R$  se incluyen los efectos de las diferentes fuerzas que intervienen, es decir, de las fuerzas repartidas que actúan en todos los puntos de cada elemento,  $f^B$  cuyo efecto es

$$R_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} f^{B(m)} dV^{(m)} \quad (1.19)$$

de las fuerzas repartidas aplicadas en la superficie de cada elemento,  $f^S$ , cuyo efecto es

$$R_S = \sum_m \int_{S^{(m)}} H^{S(m)T} f^{S(m)} dS^{(m)} \quad (1.20)$$

de los esfuerzos iniciales,  $\tau^I$ , cuyo efecto es

$$R_I = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} \tau^{I(m)} dV^{(m)} \quad (1.21)$$

y de las cargas concentradas

$$R_C = F \quad (1.22)$$

El vector  $R$  es, pues, la suma

$$R = R_B + R_S - R_I + R_C \quad (1.23)$$

Como ya dijimos, en las ecuaciones que se obtienen al considerar el elemento  $m$ , sólo intervienen las fuerzas y desplazamientos correspondientes a los nodos de ese elemento. Igual-

ocurre con todos los restantes, y, naturalmente, los puntos nodales no son siempre los mismo. Por esta razón, las sumatorias indicadas en (1.18) a (1.21) no pueden ejecutarse sin uniformizar antes las matrices, es decir, referenciarlas con respecto al conjunto global de fuerzas y desplazamientos, y agregar filas y columnas de ceros, en el número y la posición adecuados, para obtener un sistema de ecuaciones de la forma (1.17). En la práctica se calculan las matrices de cada elemento en forma compacta (sin agregar ceros) pero se ensamblan de tal manera que se obtengan matrices globales equivalentes.

Un punto importante que hay que notar es que el sistema (1.17) ha sido obtenido luego de discretizar el medio continuo en el que ocurren los desplazamientos, o sea, la masa material que constituye la estructura. Se trata, pues, de la discretización de un dominio en el espacio.

Hasta aquí hemos considerado que las fuerzas y desplazamientos que intervienen son constantes; por ello, la ecuación (1.17) es una expresión de equilibrio estático. Si las fuerzas aplicadas son variables en el tiempo, los desplazamientos originados por ellas serán variables también, y el estudio del fenómeno corresponde a la dinámica de estructuras.

### 1.2.3. El Equilibrio Dinámico

El problema dinámico tiene, entonces, como característica fundamental, ser variable en el tiempo. Dado que acciones y efectos son cambiantes, es natural que no exista una solución instantánea única como en el caso estático, sino una sucesión de soluciones correspondientes a cada instante, durante el período de estudio del fenómeno. Este es, obviamente, un problema continuo en el tiempo, para cuya resolución necesitaremos -- discretizar también la nueva dimensión introducida (es decir, -



el tiempo).

Por otra parte el análisis dinámico requiere tomar en cuenta las velocidades y aceleraciones que intervienen en los desplazamientos. En particular, se consideran las fuerzas de inercia y de amortiguamiento que oponen resistencia al movimiento y que actúan sobre cada punto de la estructura.

Para hallar la ecuación que determina las condiciones de equilibrio instantáneas para un valor  $t$  del tiempo, simplemente haremos intervenir en la ecuación (1.17) estos factores adicionales.

Podemos asumir que las aceleraciones de cada punto del elemento  $m$ ,  $\ddot{u}^{(m)}(x, y, z)$ , se expresan en función de las aceleraciones de los nodos mediante interpolaciones iguales a las usadas para los desplazamientos. En este caso se tiene:

$$\ddot{u}^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z) \ddot{U} \quad (1.24)$$

Aquí,  $\ddot{U}$  es el vector de aceleraciones de los nodos, es decir el vector de segundas derivadas de  $U$ , con respecto al tiempo.

Se puede hacer una suposición igual para las velocidades, con lo cual

$$\dot{u}^{(m)}(x, y, z) = H^{(m)}(x, y, z) \dot{U}; \quad (1.25)$$

$\dot{U}$  es el vector de velocidades de los nodos, es decir el vector de primeras derivadas de  $U$ , con respecto al tiempo.

El principio de D'Alembert establece que una masa en movimiento desarrolla una fuerza de inercia proporcional a su aceleración y de sentido contrario a ésta. Estas fuerzas actúan sobre cada punto de la estructura, en forma repartida. Ha

ciendo uso de este principio y de la relación (1.24), podemos expresarlas como:

$$f^I(m) = -\rho^{(m)} H^{(m)} \ddot{u} \quad (1.26)$$

donde  $\rho^{(m)}$  es la densidad de masa del elemento  $m$ .

La disipación de energía que ocurre durante el movimiento se suele tomar en cuenta introduciendo las llamadas fuerzas de amortiguamiento, que se asumen como proporcionales a las velocidades, actuando en cada punto de la estructura, en forma repartida. Con esta suposición y haciendo uso de la relación (1.25), expresaremos estas fuerzas como

$$f^A(m) = -K^{(m)} H^{(m)} \dot{u} \quad (1.27)$$

donde  $K^{(m)}$  es un parámetro que expresa las propiedades de amortiguamiento del elemento  $m$ .

Incluyendo estas fuerzas dentro de las que actúan repartidas en cada punto, obtenemos una generalización de  $R_B$  que llamaremos  $\hat{R}_B$  cuya expresión es:

$$\hat{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \{ f^B(m) - \rho^{(m)} H^{(m)} \ddot{u} - K^{(m)} H^{(m)} \dot{u} \} dV^{(m)} \quad (1.28)$$

Naturalmente, en este caso, las fuerzas  $f^B(m)$  no incluyen fuerzas de inercia ni de amortiguamiento.

$$\text{Podemos escribir } \hat{R}_B = R_B - M\ddot{u} - C\dot{u} \quad (1.29)$$

donde  $M$  es la llamada "matriz de masa" de la estructura, cuya expresión es

$$M = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} H^{(m)T} H^{(m)} dV^{(m)} \quad (1.30)$$

y  $C$  es la "matriz de amortiguamiento" que viene dada por

$$C = \sum_m \int_{V^{(m)}} K^{(m)} H^{(m)T} H^{(m)} dV^{(m)} \quad (1.31)$$

Hay que notar que  $M$  y  $C$  son también matrices simétricas y de estructura en banda.

En general, no se hace el cálculo directo de la matriz  $C$ . En vez de ello, se suele deducir de manera experimental, como una combinación de las matrices de masa y rigidez. (En la sección 1.4.2, hablaremos sobre 2 métodos de cálculo de  $C$ : las hipótesis de Rayleigh y de Caughey).

Sustituyendo (1.29) en (1.17), obtenemos la expresión de la ecuación dinámica de equilibrio, que viene dada por

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R. \quad (1.32)$$

Esta es la ecuación de que nos ocuparemos en lo que sigue de este trabajo.

La expresión matricial (1.32) corresponde a un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de 2º orden, donde  $n$  es el número total de grados de libertad de los nodos de la estructura. Las matrices  $M, C$  y  $K$  son de dimensión  $n \times n$  y se consideran constantes en el contexto de este trabajo, mientras que  $U, \dot{U}, \ddot{U}$  y  $R$  son vectores de  $n$  elementos, dependientes del tiempo. Según una convención usual, las notaciones  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  significan, respectivamente primera y segunda derivada de  $U$  con respecto al tiempo. Como se ha visto,  $M, C$  y  $K$  se determinan a través de un proceso de discretización en el espacio, y dependen además de las características físicas de la estructura. Los elementos de  $U$  representan los desplazamientos de los nodos en un instante dado, y los elementos de  $R$  son las fuerzas que ocasionan el fenómeno dinámico que se quiere analizar.

La deducción de la ecuación dinámica de equilibrio - - (1.32) que hemos desarrollado en esta sección, se fundamenta, - obviamente, en conceptos de la teoría elástica de las estructuras que pueden no ser familiares al lector. De ser necesario, - se podrá encontrar una explicación mas amplia del tema en textos especializados: las referencias [5] y [6] son recomendables por su orientación hacia los métodos matriciales; la referencia [7] trata exclusivamente del análisis estructural dinámico (aun que [6] también cubre este tema).

### 1.3. LA RESPUESTA DINAMICA DE LAS ESTRUCTURAS

#### 1.3.1 Generalidades.

En la sección anterior, llegamos a deducir la ecuación dinámica de equilibrio.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \quad (1.32)$$

cuyas condiciones iniciales  $U_0$  y  $\dot{U}_0$  se suponen conocidas, al igual que las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  (constantes) y el vector  $R$  y su ley de variación en el tiempo. (1.32) se puede clasificar como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde la variable independiente es el tiempo, y las ecuaciones son de segundo orden, de tipo lineal, con coeficientes constantes. Nuestro interés radica en resolver esta ecuación, esto es, determinar la ley de variación del vector de desplazamientos  $U$ , a través del tiempo.

Cuando se conoce la función  $U=U(t)$ , se puede calcular una sucesión de valores, cada uno de los cuales representa la solución válida para un instante dado. Los métodos que usaremos para buscar estas soluciones consisten en técnicas numéricas, basadas en algún sistema de discretización en el tiempo. No se tratará, pues, de encontrar la expresión analítica  $U=U(t)$ , sino, directamente, una cierta sucesión de valores de  $U$  para un conjunto de valores discretos del tiempo.

Aunque hemos visto que las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  se determinan por medio de un proceso de discretización en el espacio, no abordaremos aquí este problema, y consideraremos que estas-

matrices son conocidas (pues habrán sido calculadas previamente, mediante procedimientos adecuados). Para nuestros objetivos, suponemos también que  $M$ ,  $C$  y  $K$  son constantes, debiendo recordarse, además, que son simétricas y de estructura en banda, propiedades que pueden ser aprovechadas para facilitar la resolución del problema.

En principio es factible resolver (1.32) mediante procedimientos analíticos, pero éstos pueden ser tan complejos -- que su utilidad práctica sea nula; además, como se dijo antes, estos métodos no son generales, y en ciertos casos, pueden fallar. Por esta razón, son preferibles los métodos numéricos, y en particular, nos proponemos estudiar la solución de este sistema mediante el uso de la técnica de elementos finitos.

Antes de emprender la formulación de la solución numérica, vamos a hacer una ligera descripción de las respuestas de los sistemas dinámicos bajo diferentes condiciones, pues -- ello nos permitirá conocer la naturaleza de la solución que -- buscamos y nos dará una mejor comprensión del problema. Con este fin, en la presente sección, vamos a examinar la solución de ciertos casos generales, debiendo aclararse que nuestro objetivo es comprender la estructura de estas soluciones y no discutir los métodos analíticos que conducen a ellas.

La ecuación matricial (1.32), tal como la hemos planteado, representa las condiciones de equilibrio para un sistema dinámico con  $n$  grados de libertad; naturalmente,  $n$  puede ser igual a 1, con lo cual se obtienen casos particulares que han sido perfectamente estudiados y para los cuales existen métodos analíticos de solución bien conocidos. Vamos, pues, a examinar que forma tiene la solución de esta ecuación cuando la dimensión del sistema es 1, para tener una idea de lo que ocurre en dimensiones mayores:

## 1.3.2. Sistemas con un grado de libertad.

Si en (1.32) se hace  $C=0$  y  $R=0$ , y si  $M, C$  y  $K$  son dimensiones  $l \times l$ , se obtiene la llamada ecuación de "vibración libre sin amortiguamiento" cuya expresión es:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad ; \quad m, k > 0 \quad (1.33)$$

donde todos los elementos son escalares. Su solución viene dada por:

$$u = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

o también

(1.34)

$$u = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t$$

donde  $\omega_0$  es la "frecuencia natural de vibración" definida por  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  y las constantes  $c_1, c_2, a$  y  $b$  se determinan de acuerdo a las condiciones iniciales. Es importante observar que la función  $u$  que satisface a (1.33) es la combinación lineal de dos exponenciales complejas, y es una función oscilatoria de período  $T = 2\pi/\omega_0$  y de amplitud  $S = \sqrt{a^2 + b^2}$ . (Siendo  $T$  el "período natural de vibración"). Además el movimiento descrito por esta función, no termina cuando el tiempo aumenta, lo cual es una consecuencia de no haber considerado una fuerza de amortiguamiento que proporcionaría un medio de disipar la energía suministrada al sistema por el desplazamiento y velocidad originales.

Si queremos estudiar la vibración libre tomando en cuenta el amortiguamiento, la ecuación (escalar) que describe el fenómeno es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0; \quad m, c, k > 0 \quad (1.35)$$

y su solución es, asimismo, una combinación lineal de funciones exponenciales complejas, de la forma

$$u = c_1 e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)t} + c_2 e^{(\alpha_1 - i\alpha_2)t} \quad (1.36)$$

Bajo la condición  $c^2 - 4km < 0$ , que usualmente se cumple en los sistemas mecánicos y estructurales, esta solución puede expresarse como:

$$u = e^{\alpha_1 t} \left[ a \cos \alpha_2 t + b \operatorname{sen} \alpha_2 t \right]; \quad \alpha_1 < 0 \quad (1.37)$$

donde  $\alpha_1 = -\frac{c}{2m}$  y  $\alpha_2 = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m} > 0$  ( $\alpha_2^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{4m^2}$ )

asimismo  $c_1, c_2, a$  y  $b$  dependen de las condiciones iniciales.

El movimiento representado por (1.36) también es oscilatorio pero, en este caso, al aumentar  $t$ ,  $u$  tiende a cero (debido al exponente negativo  $\alpha_1 t$ ), es decir que el movimiento se acaba cuando el tiempo aumenta. Este resultado era de esperarse puesto que se está considerando la acción de las fuerzas de amortiguamiento.

Aunque el movimiento no es verdaderamente periódico, se puede definir un cuasiperíodo  $T_d = 2\pi/\alpha_2$  como el tiempo entre los máximos sucesivos de la oscilación. También se puede escribir:



$$T_d = T \left( 1 - \frac{c^2}{4m^2} \right)^{-1/2} \quad (1.38)$$

Consideremos ahora el fenómeno de "vibración forzada", que aparece cuando se toma en cuenta el efecto de cargas externas. La ecuación:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = r \quad ; \quad m, k > 0 \quad ; \quad c \geq 0 \quad (1.39)$$

cuyos coeficientes son escalares, representa este caso. (Si  $c \neq 0$ , se llama "vibración forzada con amortiguamiento"). La solución de tal ecuación, según lo establece la teoría de las ecuaciones lineales, se compone de la suma de la solución de la ecuación homogénea ((1.33) o (1.35) según que  $c$  sea igual o diferente que cero) más una solución particular debida al término de carga  $r$  que aparece en (1.39). Así, pues, en este caso, la solución viene dada por

$$u = u_c + u_p \quad (1.40)$$

donde  $u_c$  es la solución de la homogénea o solución complementaria, que corresponde al segundo miembro de (1.34) o (1.36) según el caso y  $u_p$  es la solución particular debida al término  $r$ . No se puede establecer de antemano la forma general de la solución particular  $u_p$  pues esta depende, en cada caso específico, del término de carga y su ley de variación.

Cuando en un sistema sin amortiguamiento, incide una acción externa  $r$  de tipo armónico, definida por una función periódica del tiempo  $r(t) = f_0 \cos \omega t$ , el movimiento resultante se puede expresar, en general, como la suma de dos movimientos

periódicos de frecuencias  $\omega_0$  y  $\omega$  y amplitudes diferentes. (En el caso  $\omega_0 = \omega$  aparece el fenómeno de resonancia, que consiste en un aumento progresivo de la amplitud de las oscilaciones. - Si un sistema estructural entrara en resonancia, llegaría en un momento dado, a ser incapaz de asimilar las grandes deformaciones de la oscilación y se destruiría. Este es, pues, un caso de inestabilidad que, desde luego, debe evitarse en la práctica).

En los casos en los que se considera el amortiguamiento, como ya hemos visto, la solución de la ecuación homogénea  $u_c$  tiende a cero a medida que transcurre el tiempo, por lo que la solución (1.40)  $u = u_c + u_p$  tiende al valor  $u = u_p$ . En este caso, a la solución complementaria  $u_c$  se le llama también "solución transitoria" y a  $u_p$  se le llama también "solución del estado estable". En términos generales, la solución transitoria permite satisfacer las condiciones iniciales impuestas, pero como su valor tiende a cero por efecto del amortiguamiento, la solución general tiende a estabilizarse en  $u = u_p$ ; este valor viene a ser la respuesta del sistema a la fuerza externa.

Hasta aquí, hemos enfocado el fenómeno de la vibración dinámica de sistemas con un grado de libertad, representados por ecuaciones escalares de la forma (1.33), (1.35) y (1.39) y hemos examinado brevemente sus soluciones. (El lector interesado en conocer mayores detalles sobre este tema puede consultar cualquier texto que trate sobre Dinámica de Estructura, por ejemplo la referencia [7], o sobre Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones, por ejemplo la referencia [8]. - A continuación, vamos a tratar de generalizar estos conceptos para sistemas de dimensión  $n > 1$ , cuya representación matemática son las mismas ecuaciones anteriores pero con coeficientes matriciales.

### 1.3.3. Sistemas con $n$ grados de libertad.

Una primera enseñanza que se obtiene de la discusión anterior, es que las soluciones de las ecuaciones dinámicas de equilibrio, para sistemas con un grado de libertad, todas tienen como parte fundamental una combinación lineal de funciones exponenciales del tipo  $e^{i\omega t}$  que representan la respuesta básica consistente en un movimiento oscilante; cuando existen condiciones de carga o de amortiguamiento en el sistema, esta respuesta se modifica. Esta conformación de las soluciones se justifica plenamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, y se puede demostrar también que esta característica se mantiene para problemas dinámicos con  $n$  grados de libertad ( $n > 1$ ), donde el fenómeno se representa mediante sistemas de ecuaciones diferenciales. No intentaremos probar aquí estas afirmaciones, que son materia para textos especializados; sin embargo, aún sin probarla habremos de reconocer que es razonable la suposición de que la solución del caso general ( $n > 1$ ) debe tener una estructura análoga a la del caso particular ( $n = 1$ ). La generalización de estos resultados para sistemas de dimensión  $n > 1$  (que se puede encontrar en las mismas referencias [7] y [8] ya mencionadas), se apoya en ciertos principios del Algebra Lineal. En general, la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Lineales Simultáneas, se halla estrechamente relacionada con los conceptos de valores y vectores propios, que suponemos conocido para el lector. (De ser necesario deberá consultarse algún texto sobre Algebra Lineal Aplicada. Dos de las referencias más conocidas sobre el tema son -- [9] y [10]).

Analicemos la ecuación matricial para vibración libre sin amortiguamiento de un sistema con  $n$  grados de libertad -- ( $n > 1$ ).

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (1.41)$$

cuya solución general supondremos de la forma

$$U = \phi e^{i\omega t} \quad (1.42)$$

donde  $\phi$  es un vector de coeficientes de orden  $n$ .

Si este valor de  $U$  es una solución, la sustitución de (1.42) en (1.41) debe producir una identidad. Sustituyendo se obtiene:

$$(-\omega^2 M + K) \phi = 0 \quad (1.43)$$

El problema puede plantearse en términos más familiares si (1.43) se escribe

$$H \phi = \lambda \phi \quad (1.44)$$

con  $\lambda = \omega^2$  y  $H = M^{-1}K$ . Esta ecuación nos dice que, para que exista una solución  $U \neq 0$  se requiere que

$$|H - \lambda I| = 0 \quad (1.45)$$

La ecuación (1.45) puede interpretarse en términos muy precisos: es la ecuación característica de la matriz  $H = M^{-1}K$ , y  $\lambda$  y  $\phi$  son, respectivamente, valores y vectores propios de  $H$ .

Puesto que las matrices  $M$ ,  $K$  y  $H$  son de orden  $n \times n$ , la expresión (1.45) constituye una ecuación de grado  $n$  para la incógnita  $\lambda$ ; esto implica que es posible calcular  $n$  valores para  $\lambda$ . En el contexto de los problemas estructurales, usualmente  $M$  y  $K$  son matrices positivas definidas, y en tal caso, las raíces de (1.45)  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, n$  son todas reales y positivas; en el presente trabajo consideraremos solamente los casos en los que se cumple esta hipótesis. Conocidos los valores  $\lambda$ , se pueden hallar los valores de  $\omega = \pm \sqrt{\lambda}$  que son las llamadas "frecuencias naturales del sistema"; evidentemente se pueden calcular  $2n$  valores de  $\omega$ . Llamamos  $\omega_j$  a la raíz cuadrada positiva de  $\lambda_j$ , es decir  $\omega_j = +\sqrt{\lambda_j}$ , debiendo notarse que los valores  $\omega_j$ ,  $j=1, \dots, n$  son reales y positivos de acuerdo con nuestra hipótesis.

A cada uno de los valores  $\lambda_j$  le corresponde un vector de coeficientes  $\phi_j$  que se puede determinar a partir de (1.44); los vectores  $\phi_j$ ,  $j=1, \dots, n$  son llamados "modos naturales de vibración del sistema". Estos vectores pueden estar multiplicados por una constante de proporcionalidad, por lo que, para evitar ambigüedades, se suele normalizarlos, haciéndoles cumplir:

$$\phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (1.46)$$

Dejaremos establecidas de una vez las propiedades de ortogonalidad de los modos naturales de vibración, que se expresan por

$$\left. \begin{aligned} \phi_j^T M \phi_i &\equiv 0 \\ \phi_j^T K \phi_i &\equiv 0 \end{aligned} \right\} i \neq j \quad (1.47)$$

(En la sección 1.4.1, complementaremos las ecuaciones (1.46) y (1.47), al considerar el caso  $\phi_j^T K \phi_i$  para  $i=j$ ).

Lo anterior se suele expresar diciendo que los vectores  $\phi_j$  son M-ortogonales y K-ortogonales respectivamente.

La demostración de esta propiedad es simple: puesto que la ecuación (1.43) es válida para cualquier modo de vibración, podemos escribir:

$$\omega_i^2 M \phi_i = K \phi_i \quad (1.47 a)$$

y también 
$$\omega_j^2 M \phi_j = K \phi_j \quad (1.47 b)$$

Dado que tanto  $M$  como  $K$  son simétricas, se cumple que  $\phi_i^T M \phi_j = \phi_j^T M \phi_i$  y  $\phi_i^T K \phi_j = \phi_j^T K \phi_i$ ; por lo tanto, premultiplicando la primera ecuación por  $\phi_j^T$  y la segunda por  $\phi_i^T$ , y restando las dos, se obtiene:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_i^T M \phi_j = 0 \quad (1.47 c)$$

y si  $\omega_i \neq \omega_j$ , la ortogonalidad de la matriz  $M$  queda probada.

A partir de este resultado, si premultiplicamos (1.47 a) por  $\phi_j^T$ , queda probada la condición de ortogonalidad para  $K$ .

Si  $\omega_i = \omega_j$  para algún par de valores  $i$  y  $j$ , entonces, los vectores característicos no son únicos, pero siempre pueden ser elegidos de forma que cumplan con las condiciones (1.47).

Más adelante (en la sección 1.4.1) necesitaremos hacer

uso de esta importante propiedad.

Habíamos supuesto que la solución de la ecuación - - (1.41) era de la forma  $u = \phi e^{i\omega t}$ , y hemos llegado a determinar que esto es cierto, siempre que se cumpla la condición (1.44) - siendo  $\omega = \pm \sqrt{\lambda}$ . Hemos visto también que existen  $2n$  funciones exponenciales de esta forma que satisfacen (1.41). La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales nos enseña que la solución general de esta ecuación será una combinación lineal de las soluciones elementales, por lo que escribimos.

$$u(t) = (c_1 e^{i\omega_1 t} + d_1 e^{-i\omega_1 t}) \phi_1 + \dots + (c_n e^{i\omega_n t} + d_n e^{-i\omega_n t}) \phi_n \quad (1.48)$$

Dado que los exponentes  $i\omega_j t$  son imaginarios puros, - el movimiento expresado por (1.48) es una combinación lineal - de oscilaciones puras que se puede expresar como

$$u(t) = (a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t) \phi_1 + \dots + (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \phi_n \quad (1.49)$$

Las constantes  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $a_j$  y  $b_j$ , como siempre, se -- calculan de acuerdo a las condiciones iniciales impuestas. Si estas condiciones iniciales son  $U(0) = U_0$  y  $\dot{U}(0) = \dot{U}_0$ , de - - (1.49) se obtiene,

$$U_0 = a_1 \phi_1 + \dots + a_n \phi_n \quad (1.50)$$

$$\dot{U}_0 = b_1 \omega_1 \phi_1 + \dots + b_n \omega_n \phi_n \quad (1.51)$$

Resolviendo estos sistemas se determinan las constan-

tes  $a_j, b_j, j=1, \dots, n$  con lo que se concluye el cálculo de la solución de (1.41).

Un resultado general que resume nuestra discusión es que la solución de (1.41) que quedó definida en (1.48) y (1.49) es una combinación lineal de funciones oscilantes, cada una de las cuales se determina a partir de un valor y un vector propio de  $H = M^{-1}K$ , por lo que el proceso analítico de resolución de esta ecuación tiene como parte medular la determinación de los valores y vectores propios de  $H$ . Sin embargo el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz es un problema complejo que, casi siempre, requiere ser tratado mediante métodos numéricos y computacionales; en efecto se han diseñado algoritmos muy eficientes que realizan este cálculo y en todos los centros de cómputo se dispone de rutinas de biblioteca que sirven para ello.

Si ahora consideramos la ecuación de vibración libre-amortiguada para un sistema con  $n$  grados de libertad ( $n > 1$ )

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0 \quad (1.52)$$

supondremos también que tiene una solución de la forma

$$U = V e^{st} \quad (1.53)$$

La condición para que este valor sea solución de (1.52) la obtenemos sustituyendo en la ecuación el valor de nuestra supuesta solución. Se obtiene



$$(\alpha^2 M + \alpha C + K)V = 0 \quad (1.54)$$

donde  $\alpha$  y  $V$ , en general serán complejos.

La determinación de  $\alpha$  y  $V$  de (1.54) es un problema mucho más complejo que el que se tiene que resolver en el caso sin amortiguamiento (i.e., ecuación (1.44)); por esta razón no es usual emprender la resolución de (1.52) por este procedimiento. Los valores y vectores propios involucrados en la ecuación (1.54) tienen, más que nada, importancia teórica para entender el comportamiento del fenómeno que estudiamos. En este caso siempre son preferibles los métodos numéricos basados en técnicas de discretización, de las cuales nos ocuparemos más adelante.

Es obvio suponer que la solución de (1.52) será una combinación lineal de funciones oscilantes con un factor de decaimiento que hace que el movimiento tienda a desaparecer cuando el tiempo aumenta (es decir, una combinación lineal de términos del tipo de (1.37)). En este caso, como en el anterior, desempeñan un papel fundamental los valores y vectores propios que se determinan de (1.54) para establecer la solución general.

Nos quedaría por examinar solamente el caso de vibraciones forzadas para sistemas con  $n$  grados de libertad ( $n > 1$ ), representadas por una ecuación del tipo de (1.32); sin embargo, no hay mucho que decir pues, por analogía con los casos anteriores, debemos suponer que la forma de la solución será similar a la que quedó establecida para sistemas con un grado de libertad (es decir para  $n=1$ ).

Si aceptamos esta suposición, el vector de desplazamientos vendrá calculado como la suma de una solución complementaria, más una solución particular, es decir  $U = U_c + U_p$ , -- siendo todos los vectores de longitud  $\mathcal{N}$ . Podemos considerar que la solución de una ecuación matricial del tipo (1.32) es -- una combinación lineal de las soluciones de  $\mathcal{N}$  ecuaciones escalares del tipo (1.39). Esta afirmación puede justificarse plenamente y, en la próxima sección, hablaremos de este tema con más detalle. La interpretación de las soluciones complementaria y particular, para este caso, es la misma que para sistemas con un grado de libertad.

De todo lo dicho, podemos concluir que las estructuras afectadas por una excitación dinámica, oscilan. Esta oscilación tiende a desaparecer cuando hay amortiguamiento y, con el tiempo, la solución tiende a estabilizarse en los valores -- que corresponden a la respuesta del sistema a la carga  $R$ . Los sistemas con un grado de libertad tienen soluciones de una -- cierta forma elemental, mientras que las soluciones de los sistemas dinámicos con  $n$  grados de libertad son combinaciones lineales de  $n$  soluciones de esa forma elemental. Cada una de estas componentes es función de un "par característico", (es decir un valor y un vector propio) de una matriz calculada a partir de los coeficientes  $M, C$  y  $K$ .

Con esto concluimos nuestra discusión sobre las respuestas que dan los sistemas estructurales a diversas condiciones de excitación. El lector interesado en profundizar sobre estos temas, puede consultar las referencias [7] y [8] ya mencionadas, u otros textos similares.

La próxima sección estará dedicada a estudiar el -- "principio de superposición modal" que nos permitirá formalizar algunas de las suposiciones que se han hecho en la presente sección al respecto de considerar que un sistema con  $\mathcal{N}$  gra

dos de libertad, es en cierta medida, una superposición de varios sistemas elementales con un grado de libertad.

#### 1.4 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION MODAL

En la sección anterior comenzamos examinando las respuestas dinámicas de los sistemas con un grado de libertad, y establecimos para ellas una forma básica, consistente en funciones exponenciales complejas, que representan un movimiento oscilante con o sin amortiguamiento. Al generalizar nuestro estudio a sistemas con  $n$  grados de libertad, hemos supuesto -- que las respuestas de estos sistemas generales son combinaciones lineales de soluciones elementales de la misma forma básica que corresponde a los sistemas con un grado de libertad. -- Esto parece significar que una ecuación matricial del tipo -- (1.32) es susceptible de desacoplarse y generar  $n$  ecuaciones -- escalares de la forma (1.39). Si esto fuera cierto, querría -- decir que un sistema general con  $n$  grados de libertad se com-- porta como una superposición de  $n$  sistemas elementales de un -- grado de libertad.

Esta suposición es cierta y, justamente, en esta sección estudiaremos el procedimiento que permite conseguir esta descomposición, así como su significado físico y las condiciones bajo las cuales es posible realizarla. Estos conceptos -- son de imponderable importancia en el presente trabajo, pues -- nos permitirán obtener una concepción teórica completa del fenómeno que estudiamos, y además, nos darán las bases para ciertos métodos de resolución. Es evidente que es mas sencillo -- resolver  $n$  ecuaciones de 1° orden antes que una ecuación conmatriciales-coeficientes de dimensión  $n \times n$ , pero no es esta la única ventaja, como veremos después. Esta transformación del sistema de ecuaciones tiene aplicación práctica no solo para la -- resolución analítica sino también dentro de las técnicas numéricas de solución que constituyen nuestro objetivo básico.

### 1.4.1 Superposición Modal para Sistemas sin Amortiguamiento.

Volvamos ahora a considerar la ecuación (1.41) que representa el fenómeno de vibración libre sin amortiguamiento de un sistema con  $n$  grados de libertad:

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (1.41)$$

la solución general de esta ecuación, que quedó establecida en (1.48) y (1.49), puede expresarse también como

$$U(t) = \sum_{j=1}^n (a_j \cos \omega_j t + b_j \operatorname{sen} \omega_j t) \phi_j \quad (1.55)$$

Cada uno de los términos de la sumatoria es también - una solución, pues al sustituir su valor

$$U_j(t) = (a_j \cos \omega_j t + b_j \operatorname{sen} \omega_j t) \phi_j \quad (1.56)$$

en (1.41), se obtiene

$$K \phi_j = \omega_j^2 M \phi_j \quad (1.57)$$

y como sabemos, existen  $n$  pares característicos  $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$  capaces de satisfacer (1.57). Recordemos de (1.46) y (1.47), que los vectores tienen la propiedad

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.58)$$

y hagamos

$$0 < \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2 \quad (1.59)$$

Si definimos una matriz  $\Phi$  cuyas columnas son los vector

res  $\phi_j$ ; y una matriz diagonal  $\Omega^2$  que almacena los valores  $\omega_i^2$  en su diagonal, tendremos

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] ; \quad \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

entonces, la ecuación (1.57) puede también expresarse así:

$$K \Phi = \Omega M \Phi \quad (1.61)$$

Por (1.58) sabemos que

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (1.62)$$

por lo tanto, premultiplicando ambos miembros de (1.61) por  $\Phi^T$  se obtiene:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (1.63)$$

Las ecuaciones (1.62) y (1.63) nos muestran que la transformación  $\bar{z}(z) = \Phi^T z \Phi$  aplicada a las matrices  $M$  y  $K$ , da por resultado una matriz diagonal, lo que significa que la ecuación matricial (1.41) puede desacoplarse en  $n$  ecuaciones escalares del tipo (1.33).

A fin de lograr esta descomposición, vamos a definir un nuevo sistema de referencia para medir los desplazamientos de la estructura, haciendo

$$U(t) = \Phi X(t) \quad (1.64)$$

donde el vector  $X(t)$  es dependiente del tiempo y de longitud  $n$ . A las componentes del vector  $X$  les daremos el nombre de "despla

zamientos generalizados" de la estructura.

Para que exista una relación única entre los vectores  $U$  y  $X$  en (1.64), se requiere que la matriz  $\Phi$  sea de rango completo, es decir que sus columnas  $\phi_i$  sean independientes. Esto ocurre de hecho si las frecuencias  $\omega_i$  son todas diferentes, como es el caso usual en estructuras; pero si existiera un par de frecuencias del mismo valor, los vectores  $\phi_i$  no son únicos, y siempre se puede escoger un conjunto independiente.

Los conceptos anteriores nos permiten encontrar un sistema de ecuaciones desacopladas, para un sistema dinámico general sin amortiguamiento, cuya ecuación de equilibrio es --

$$M\ddot{U}(t) + KU(t) = R(t) \quad (1.65)$$

Sustituyendo (1.64) en (1.65) y premultiplicando ambos miembros de la ecuación por  $\Phi^T$ , se obtiene:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{X}(t) + \Phi^T K \Phi X(t) = \Phi^T R(t) \quad (1.66)$$

es decir

$$\ddot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = \Phi^T R(t) \quad (1.67)$$

Las condiciones iniciales para (1.67) se pueden calcular si en la relación (1.64) premultiplicamos ambos miembros por  $\Phi^T M$  con lo cual se obtiene, en virtud de (1.62).

$$\begin{aligned} X_0 &= \Phi^T M U_0 \\ \dot{X}_0 &= \Phi^T M \dot{U}_0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

La ecuación (1.67) en realidad es un conjunto de ecuaciones escalares cuya solución es inmediata. Estas son

$$\ddot{x}_j(t) + \omega_j^2 x_j(t) = r_j(t), \quad j=1,2,\dots,n \quad (1.69)$$

donde

$$r_j(t) = \phi_j^T R(t) \quad (1.70)$$

La presente discusión es válida para sistemas que no toman en cuenta el amortiguamiento, tanto en vibraciones forzadas como libres, pues este último es un caso particular con  $R(t)=0$ . En ambos, se ha logrado descomponer la ecuación matricial (1.65) en un sistema de ecuaciones desacopladas, definido por (1.69) y (1.70). En la ecuación original (1.65), el conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales simultáneas, se mantenía acoplado por los términos no diagonales de las matrices de masa y rigidez; al diagonalizar estas matrices, el proceso que hemos descrito reduce el sistema a un conjunto de  $n$  ecuaciones independientes. La respuesta dinámica puede obtenerse resolviendo separadamente cada una de las ecuaciones (1.69) para hallar los desplazamientos generalizados  $X$  y, superponiendo estos resultados parciales mediante (1.64), para obtener la respuesta  $U$  en las coordenadas originales. Este procedimiento se llama "método de superposición modal".

Además de haber establecido los lineamientos para este método, nuestra discusión nos permite extraer importantes conclusiones:

En primer lugar, la ecuación (1.64) puede escribirse también:

$$U(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t) = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \dots + \phi_n x_n \quad (1.71)$$

y esta igualdad expresa que la solución  $U(t)$  del sistema gene-



ral, es una combinación lineal de las soluciones elementales  $x_i$ , cada una de las cuales proviene de una ecuación escalar de la forma (1.69). Nótese que la hipótesis (1.71) no es arbitraria, sino que tuvo que adoptarse con el fin de conseguir la diagonalización de las matrices-coeficientes de la ecuación (1.65). -- (Si en esta ecuación el término de cargas  $P(t)=0$ , las soluciones  $x_j$  son de la forma (1.34), por lo que (1.71) reproduce exactamente la solución dada en (1.48) y (1.49).

Los vectores  $\phi_j$ ,  $j=1\dots n$ , que hemos llamado modos naturales de vibración, pueden interpretarse como patrones básicos de deformación de la estructura, que sirven como una base vectorial para expresar cualquier desplazamiento; los modos de vibración tienen la ventaja adicional de ser independientes, debido a las propiedades de ortogonalidad definidas en (1.58). -- Además, se puede utilizar un subconjunto de ellos para describir aproximadamente una cierta respuesta dinámica; en general, es posible conseguir un valor de  $U(t)$  aceptablemente aproximado si en (1.71) se consideran solamente algunos términos en vez de los  $n$  totales. Sobre esto volveremos a hablar mas adelante.

La descomposición de (1.65) en el sistema (1.69) de -- muestra la suposición de que un sistema general con  $n$  grados de libertad puede considerarse como la superposición de  $n$  sistemas elementales con un grado de libertad. En efecto, cada una de las ecuaciones (1.69), constituye una ecuación independiente -- que representa un modo particular de vibración de la estructura.

Si bien la solución del sistema de ecuaciones (1.69) -- puede ser sencilla, la determinación de los pares característicos  $(\omega_i^2, \phi_i)$ , que conducen al sistema desacoplado es, en general, un problema complejo. Sin embargo, la posibilidad de trabajar con un subconjunto de los modos de vibración para obtener valores aproximados de la respuesta dinámica, hace que el es --

ral, es una combinación lineal de las soluciones elementales  $x_i$ , cada una de las cuales proviene de una ecuación escalar de la forma (1.69). Nótese que la hipótesis (1.71) no es arbitraria, sino que tuvo que adoptarse con el fin de conseguir la diagonalización de las matrices-coeficientes de la ecuación (1.65). -- (Si en esta ecuación el término de cargas  $R(t)=0$ , las soluciones  $x_j$  son de la forma (1.34), por lo que (1.71) reproduce exactamente la solución dada en (1.48) y (1.49).

Los vectores  $\phi_j$ ,  $j=1\dots n$ , que hemos llamado modos naturales de vibración, pueden interpretarse como patrones básicos de deformación de la estructura, que sirven como una base vectorial para expresar cualquier desplazamiento; los modos de vibración tienen la ventaja adicional de ser independientes, debido a las propiedades de ortogonalidad definidas en (1.58). -- Además, se puede utilizar un subconjunto de ellos para describir aproximadamente una cierta respuesta dinámica; en general, es posible conseguir un valor de  $u(t)$  aceptablemente aproximado si en (1.71) se consideran solamente algunos términos en vez de los  $n$  totales. Sobre esto volveremos a hablar mas adelante.

La descomposición de (1.65) en el sistema (1.69) de --- muestra la suposición de que un sistema general con  $n$  grados de libertad puede considerarse como la superposición de  $n$  sistemas elementales con un grado de libertad. En efecto, cada una de las ecuaciones (1.69), constituye una ecuación independiente -- que representa un modo particular de vibración de la estructura.

Si bien la solución del sistema de ecuaciones (1.69) puede ser sencilla, la determinación de los pares característicos  $(\omega_i^2, \phi_i)$ , que conducen al sistema desacoplado es, en general, un problema complejo. Sin embargo, la posibilidad de trabajar con un subconjunto de los modos de vibración para obtener valores aproximados de la respuesta dinámica, hace que el es-

fuerzo de cálculo requerido se pueda reducir drásticamente. En la práctica, nunca es necesario considerar la totalidad de los modos de vibración, por lo que sólo se calculan algunos de los pares característicos y, en consecuencia, sólo se plantean algunas de las ecuaciones desacopladas, las que sean suficientes para conseguir una aproximación adecuada. Los criterios que permiten decidir cuales de los modos hay que conservar, y cuales desechar, los trataremos mas adelante.

#### 1.4.2 Superposición Modal para Sistemas con Amortiguamiento.

Ahora debemos investigar lo que ocurre cuando se trata de descomponer una ecuación que contenga un término de amortiguamiento tal como

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = R(t) \quad (1.72)$$

Reemplazando en esta ecuación el valor de  $U$  dado en (1.64) y premultiplicando por  $\Phi^T$ , queda

$$\Phi^T M \Phi \ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \Phi^T K \Phi X(t) = \Phi^T R(t) \quad (1.73)$$

Sabemos que las matrices  $\Phi^T M \Phi$  y  $\Phi^T K \Phi$  son diagonales, según (1.62) y (1.63), lo cual fue suficiente para conseguir la descomposición de (1.65); pero, en este caso, nada nos garantiza que  $\Phi^T C \Phi$  sea diagonal, por lo que no se puede asegurar el mismo resultado para (1.73). Es evidente que, para conseguir nuestros fines, debemos buscar que  $C$  sea de tal naturaleza que los vectores  $\phi_j$  sean  $C$ -ortogonales. Si suponemos que se cumple

$$\phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 \xi_i \omega_i & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.74)$$

entonces  $\Phi^T C \Phi$  es diagonal, y la ecuación (1.73) se reduce a  $n$  ecuaciones escalares de la forma

$$\ddot{x}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{x}_j(t) + \omega_j^2 x_j(t) = \ddot{r}_j(t) ; \quad j=1, \dots, n \quad (1.75)$$

donde  $\xi_j$  es un parámetro de amortiguamiento válido para el modo  $j$ , y los demás elementos se definen igual que en las ecuaciones (1.69) y (1.70).

Hay que establecer bajo que condiciones se cumplen las relaciones de (1.74), pues estas constituyen la clave para con seguir la descomposición de (1.72).

La matriz de masa  $M$  del sistema se calcula, como hemos visto, ensamblando las matrices de masa de cada elemento finito; un procedimiento similar se sigue para obtener la matriz de rigidez  $K$ . Sin embargo, la matriz de amortiguamiento  $C$  no se suele calcular en esta forma, pues la determinación del parámetro  $\mathcal{K}^{(m)}$  que aparece en (1.27) no es simple. Por esta razón, se recurre a otros métodos para obtener una expresión de  $C$  que modele adecuadamente la disipación de energía durante la vibración.

Las relaciones (1.74) implican que el efecto de amortiguamiento se define mediante un conjunto de parámetros de proporcionalidad  $\xi_j$ ,  $j=1 \dots n$ , cada uno de los cuales es válido para un modo particular de vibración. El amortiguamiento total en la estructura, será la suma de los efectos parciales en cada modo. Es usual que se determinen experimentalmente los valores de los parámetros  $\xi_j$  a fin de obtener una aproximación realista del comportamiento de la estructura en relación al amortiguamiento; para ello, existen procedimientos establecidos cuya descripción no está dentro de los objetivos de este trabajo.

Si queremos hallar la respuesta dinámica de un sistema con amortiguamiento por el método de superposición modal, y

si conocemos los parámetros  $\xi_j$ , no hace falta calcular explícitamente la matriz de amortiguamiento  $C$ ; se pueden calcular los pares  $(\omega_j^2, \phi_j)$  a partir de  $M$  y  $K$  y se pueden plantear directamente las ecuaciones desacopladas (1.75).

En ocasiones, se conoce de antemano un subconjunto de valores de  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;  $p < n$ . En tal caso se puede calcular una matriz  $C$ , ajustando ciertas combinaciones de  $M$  y  $K$  de modo que los vectores  $\phi_j$  sigan siendo  $C$ -ortogonales, y se mantengan los valores  $\xi_j$  conocidos,

El método de Rayleigh cumple con estos requerimientos, planteando una matriz de amortiguamiento  $C$ , de la forma:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.76)$$

Evidentemente, en este caso los vectores  $\phi_j$  son  $C$ -ortogonales, debido a que  $C$  es una combinación lineal de dos matrices que tienen la misma propiedad. Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan de forma que se ajusten a dos valores conocidos -- del parámetro de amortiguamiento,  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ; las ecuaciones a resolver son:

$$\phi_i^T C \phi_i = \phi_i^T (\alpha M + \beta K) \phi_i = \alpha + \beta \omega_i^2 = 2 \omega_i \xi_i; \quad i=1,2 \quad (1.77)$$

de donde se obtienen  $\alpha$  y  $\beta$

También puede usarse la forma de Rayleigh para calcular una matriz  $C$  que se ajuste aproximadamente a más de dos valores de  $\xi$ .

Es necesario entender el significado que tiene, en este caso, el coeficiente de amortiguamiento  $\xi_j$  y sus relaciones-

con los demás parámetros del problema. Definida la matriz  $C$  mediante (1.76), y reemplazando este valor en (1.74), obtenemos la siguiente relación;

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \phi_i^T (\alpha M + \beta K) \phi_i = \frac{1}{2\omega_i} (\alpha + \beta \omega_i^2) \quad (1.78)$$

Si en esta ecuación se hace  $\beta=0$  ( $\alpha \neq 0$ ) entonces el amortiguamiento es inversamente proporcional a la frecuencia de vibración; si  $\alpha=0$  ( $\beta \neq 0$ ), entonces el amortiguamiento es directamente proporcional a la frecuencia. En el primer caso, los modos de vibración "altos" son poco amortiguados, y en el segundo caso, ocurre lo contrario. En los sistemas estructurales generales, no ocurre ninguna de estas situaciones extremas, aunque el coeficiente  $\beta$  suele tener mayor influencia, por lo que las vibraciones de frecuencia alta decaen más rápidamente. Esto concuerda con el fenómeno físico real, como se ha comprobado mediante métodos experimentales.

Cuando se conocen varios valores  $\xi_i$ ,  $i=1, \dots, p$  se puede usar también el método de Caughey, que permite calcular una matriz  $C$ , con las características que requerimos. Se define

$$C = M \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j [M^{-1}K]^j \quad (1.79)$$

donde los coeficientes  $\xi_j$ ,  $j=1, \dots, p$  se determinan mediante las  $p$  ecuaciones simultáneas

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{\omega_i} + \alpha_1 \omega_i + \alpha_2 \omega_i^3 + \dots + \alpha_{p-1} \omega_i^{2p-3} \right); i=1, \dots, p \quad (1.80)$$

Debe notarse que la ecuación (1.76) de Rayleigh es un caso particular de (1.79) con  $p=2$ .

El método de Caughey permite mayor flexibilidad, pues se pueden asignar valores arbitrarios a tantos parámetros de amortiguamiento  $\xi_i$  como se quieran, pero es menos usado, pues

requiere de cálculos más complejos. En general, es suficiente usar la hipótesis de Rayleigh.

Los métodos anteriores, nos enseñan a construir matrices de amortiguamiento que permitan el uso de la superposición modal al resolver (1.72). Sin embargo, las hipótesis que se han hecho pueden resultar inapropiadas en ciertos casos particulares y entonces la descomposición de la ecuación matricial es imposible y la única opción práctica para la resolución, son los métodos numéricos de integración directa, de los que hablaremos en la segunda parte de este trabajo.

#### 1.4.3 Consideraciones prácticas acerca de la descomposición modal.

En los párrafos anteriores hemos descrito brevemente el método de descomposición modal y la interpretación física que proporciona de los sistemas estructurales y sus respuestas dinámicas: cualquier vibración de un sistema con  $n$  grados de libertad se puede expresar como una combinación lineal de los  $n$  modos naturales de vibración que posee. Vamos a puntualizar ahora la característica más importante de la superposición modal: debido a que no todos los  $n$  modos de vibración tienen igual influencia en la respuesta final, en la mayor parte de los casos prácticos, se puede reducir drásticamente la dimensión del problema, al conservar para el análisis sólo aquellos modos que más contribuyan al efecto total, y desechar los demás; además, según la precisión que se requiera obtener, se puede incluir un número mayor o menor de componentes para el cálculo.

Frecuentemente, la parte esencial de la respuesta dinámica, esta asociada con unos pocos modos de vibración, correspondientes a las frecuencias más bajas; la influencia de

cada modo tiende a decrecer para las frecuencias mas altas. - Por ello, al calcular los desplazamientos mediante la sumatoria (1.71), esta puede truncarse cuando se haya obtenido un -- grado suficiente de precisión.

Por otra parte, los métodos de discretización usados - para idealizar un sistema estructural, tienden a ser menos con fiables al determinar los modos de vibración mas altos y hemos visto también que el coeficiente de amortiguamiento es mayor - para las frecuencias altas; todo esto justifica el criterio de desechar los términos mas avanzados de la sumatoria en (1.71).

Bajo determinadas condiciones iniciales o cuando las cargas son de cierta forma particular, puede suceder que alguno o algunos modos de vibración tengan una participación insig nificante en la respuesta final. Examinemos un caso extremo:

Supongamos que tenemos que hallar la respuesta dinámi ca de un sistema cuyas condiciones de equilibrio vienen dadas por la ecuación (1.72). Sean las condiciones iniciales  $U_0 = 0$  y  $\dot{U}_0 = 0$  (con ello,  $X_0 = 0$  y  $\dot{X}_0 = 0$ ). Si la carga aplicada es -  $R(t) = M \phi_i f(t)$ , siendo  $f(t)$  una función arbitraria de  $t$ , al transformar (1.72) en un sistema de ecuaciones desacopladas de la forma (1.75), se obtiene:

$$\ddot{x}_j(t) + 2\omega_j \xi_j \dot{x}_j(t) + \omega_j^2 x_j(t) = \phi_j^T M \phi_i f(t); \quad j=1, \dots, n. \quad (1.81)$$

y el término de carga es cero para todos los modos de vibración excepto para el  $i$ -ésimo. Las ecuaciones (1.81) para las cuales  $j \neq i$  representan una vibración libre; sin embargo las condicio nes iniciales impuestas, (desplazamiento y velocidad inicial -- nulos) hacen que la participación de estos modos de vibración - en la respuesta total, sea nula. Dicho de otra manera, la forma particular de la carga ha anulado completamente la participa



ción de todos los modos, excepto uno.

Es poco probable que en la práctica, ocurran las condiciones del ejemplo anterior, pero un efecto de ese tipo puede anular o reducir la participación de alguno de los modos de vibración. Si se sabe de antemano que la carga que incide en el sistema es ortogonal (o se aproxima a serlo) a algunos de los modos de vibración, sabemos que éstos pueden excluirse del análisis ya que su participación es insignificante.

Por otra parte cuando el término de carga es de forma armónica, digamos  $R(t) = F_0 \cos \omega t$ , si la frecuencia de la carga  $\omega$  es un valor cercano a una frecuencia natural del sistema  $\omega_n$ , sabremos que el  $\ell$ -ésimo modo de vibración tendrá una importante participación en la respuesta total. Esto se debe al efecto de resonancia, ya mencionado, que se produce cuando la frecuencia de la carga coincide con la frecuencia de vibración del sistema. En la práctica, es poco probable que el sistema entre en resonancia, debido a las fuerzas de amortiguamiento y a la participación de otros modos de vibración pero, de hecho, una carga armónica produce una excitación mayor a los modos de vibración cuya frecuencia se aproxima a la de la carga.

En ocasiones, se trata de analizar la respuesta del sistema a cierta frecuencia particular (o a cierto rango de frecuencias); en ese caso, la elección de los modos de vibración a conservar y a desechar, se hará tomando en cuenta las consideraciones anteriores: se conservarán los modos cuya frecuencia mas se aproxime (o caigan dentro) del rango que se quiere estudiar.

Naturalmente, al prescindir de algunas de las componentes, se está provocando un error en la determinación de la respuesta total, el mismo que debe mantenerse dentro de los lí

mites de tolerancia que el caso requiera. Una medida del error  $\xi^{(p)}(t)$  que ocurre en la respuesta al considerar  $p$  modos de vibración,  $p < n$ , vendrá dada por:

$$\xi^{(p)}(t) = \frac{\|R(t) - [M\ddot{U}^{(p)}(t) + C\dot{U}^{(p)}(t) + KU^{(p)}(t)]\|_2}{\|R(t)\|_2} \quad (1.82)$$

donde  $U^{(p)}$  es la respuesta calculada por superposición modal - cuando se han considerado  $p$  modos de vibración. Si se ha conseguido una solución suficientemente aproximada de (1.72), el - valor de  $\xi^{(p)}$  se mantendrá pequeño para todo valor de  $t$ ; en caso contrario, habrá que considerar un número mayor de componentes - para el cálculo de la respuesta.

Con esto concluimos nuestra breve descripción del método de superposición modal, que nos permite conformar una idea - mas cabal del funcionamiento de los sistemas estructurales, y - al mismo tiempo, nos proporciona un método de resolución de la ecuación general de equilibrio para sistemas dinámicos dada en (1.72). Un tratamiento mas amplio de este principio se puede - hallar en las referencias [2], [3] y [7]. La segunda parte de este trabajo estará dedicada a estudiar los métodos numéricos - de solución de (1.72), que constituyen nuestro interés primordial. Hay que aclarar que los métodos numéricos de integración directa no se contraponen con el de superposición modal; antes - bien pueden complementarse. Es perfectamente posible reducir - una ecuación matricial general a un sistema desacoplado, eliminar algunos modos de poca influencia en la respuesta total y re - solver el sistema reducido mediante métodos numéricos de inte - gración. También puede usarse la integración numérica desde el comienzo y trabajar con el sistema dinámico original.

Solamente las características propias del sistema y la efectividad numérica de uno u otro método en un caso particular,

pueden determinar el procedimiento a seguir. Hay que tomar en cuenta también, que no se trata de un enfrentamiento entre una técnica analítica y una numérica, pues la determinación de los pares característicos  $(\omega_i^2, \phi_i)$  que constituyen la base de la descomposición modal, se hace generalmente, mediante técnicas numéricas que constituyen el único método práctico de cálculo. No trataremos sobre estas técnicas en el presente trabajo, pero el lector interesado puede encontrarlas en los textos de análisis numérico o en la referencia [3], Caps. 10, 11 y 12.

**CAPITULO 2**  
**SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION**  
**DE EQUILIBRIO DINAMICO**

## 2. SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO

### 2.1. GENERALIDADES

El primer capítulo de este trabajo estuvo dedicado a describir el problema del equilibrio dinámico de las estructuras; ahora vamos a estudiar las técnicas de integración numérica que nos permitirán resolver este problema.

Cómo ya hemos dicho, solo en casos muy restringidos se pueden resolver las ecuaciones de equilibrio por métodos analíticos; en general, es preferible usar técnicas de integración numérica. Inclusive al resolver sistemas desacoplados de la forma (1.75), usualmente la solución analítica es laboriosa, pero aún si no lo fuera, existen razones para usar los métodos numéricos: Hay que recordar que la transformación de la ecuación general (1.72) al sistema desacoplado (1.75) se hace mediante técnicas numéricas, con el auxilio de una computadora electrónica; si, de todas formas, tenemos que usar la computadora en esta primera parte, es razonable usarla también en la resolución de las ecuaciones, tomando en cuenta además, que existen métodos numéricos perfectamente probados y confiables para este efecto.

La ecuación (1.72) que representa el caso general de equilibrio dinámico que hemos estudiado, es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y, en principio, cualquier método standard de solución puede emplearse. Sin embargo, existen métodos mas apropiados que otros, pues las matrices-coeficientes  $M$ ,  $C$  y  $K$  tienen ciertas características particulares que pueden ser aprovechadas para una solución mas eficiente del sistema. Existen muchos procedimientos diseñados

especialmente para el caso que tratamos, pero la descripción detallada de los mismos rebasa los objetivos de este trabajo. (El lector interesado en estos tópicos deberá consultar un texto standard sobre Dinámica Estructural, por ejemplo, la referencia [7]). Nosotros dedicaremos nuestra atención a una clase particular de métodos, basados en las técnicas de elementos finitos.

Las técnicas de solución que estudiamos se basan en los mismos conceptos de discretización que mencionamos en la sección 1.1. Ahora el dominio a discretizar es el intervalo de tiempo durante el cual nos interesa conocer la respuesta dinámica de la estructura.

Los métodos de discretización en el espacio que dan lugar a la determinación de las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$ , no los discutiremos aquí y consideraremos que nuestro problema comienza con una ecuación ya planteada de la forma (1.72); sin embargo, hay que notar que estas matrices tienen características ventajosas para la resolución numérica, pues usualmente tienen estructura de banda y son simétricas. Existen muchas posibilidades para el cálculo de  $M$ ,  $C$  y  $K$ , pero se debe observar que, mientras mas refinados sean los métodos usados, mas complicadas resultarán estas matrices, lo cual implica mayor dificultad en la resolución.

Se ha desarrollado un gran esfuerzo de investigación para encontrar técnicas óptimas que permitan tratar adecuadamente los sistemas resultantes, a menudo complejos y de gran dimensión. La elección de un algoritmo eficiente de solución es, pues, indispensable para culminar exitosamente el cálculo de la respuesta dinámica de la estructura y para que el costo del procedimiento sea razonable.

En la deducción de la ecuación (1.72) se asumieron ciertas hipótesis de comportamiento de la estructura las mismas que, de hecho, estamos aceptando en nuestro estudio; éstas son:

- a) elasticidad lineal, según lo afirma la ley de Hooke. Se supone una relación lineal entre esfuerzos y deformaciones.
- b) amortiguamiento proporcional a la velocidad.
- c) fuerzas de inercia proporcionales a la aceleración es decir aceptación del principio de D'Alembert.

Además, en nuestro caso específico, hemos impuesto las condiciones adicionales siguientes, que se justifican dentro de las aplicaciones a las estructuras que nos interesan:

- d) cargas independientes del movimiento, esto es, definidas por una función que depende directamente del tiempo.
- e) características materiales y geométricas constantes, es decir,  $M$ ,  $C$  y  $K$ , constantes.

Dentro de estas restricciones, aplicaremos los principios básicos del método de elementos finitos para deducir los esquemas de integración numérica.

Nuestro problema es del tipo de valores iniciales: conocidas las condiciones  $U(t_0)$ ,  $\dot{U}(t_0)$  en el punto  $t_0$ , trataremos de encontrar los valores de la función  $U(t)$ , que nos interesa, en un intervalo  $\mathcal{D} \equiv [t_0, t_0 + \tau]$ . Es conocido también, el término de carga  $R(t)$  y su ley de variación en el tiempo. Se realiza un proceso de cálculo por recurrencia: se determina el valor de la función  $U(t)$  en un subintervalo  $\mathcal{D}_0$ , a partir de las condiciones iniciales en  $t_0$ ; luego, en un subintervalo  $\mathcal{D}_1$ , usando como condiciones iniciales los valores  $U(t_1)$ ,  $\dot{U}(t_1)$  calculados

en el paso anterior; luego en un intervalo  $\mathcal{D}_2$  usando como condiciones iniciales  $U(t_2), \dot{U}(t_2)$ , etc. hasta cubrir el intervalo total  $\mathcal{D}$ .

Para utilizar estos métodos de solución por recurrencia, es necesario discretizar el intervalo  $\mathcal{D} \equiv [t_0, t_0 + \tau]$  Para ello, definimos un conjunto de valores  $\{t_i\}$  de la variable  $t$ , donde

$$\{t_i\} = \{t / t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, \dots, \ell; \ell h = \tau\} \quad (2.1)$$

Aunque no es imprescindible que el dominio discretizado tenga espaciamiento uniforme entre sus elementos, el conjunto definido en (2.1) cumple con la condición  $t_{i+1} - t_i = h$  para todo  $i$  ya que esto simplifica los cálculos. El parámetro  $h$  llamado también Longitud de paso, debe ser elegido con cuidado, según las características particulares del problema y el método usado para resolverlo, pues su valor tiene influencia en la estabilidad y precisión del proceso de integración. Más adelante trataremos este tema con detalle.

Los puntos  $t_i$  serán los nodos de nuestro problema, y cada elemento finito será un intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  de longitud  $h$ . Nos proponemos determinar los valores de  $U(t_i)$  es decir, los valores de los desplazamientos, para cada valor del conjunto  $\{t_i\}$  definido en (2.1).

Los valores de  $U(t)$  para  $t \notin \{t_i\}$  se definen mediante funciones que interpolan los valores de  $U(t_i)$ . Existe una infinidad de posibilidades de realizar esta interpolación, y de la elección particular que se haga, dependerá también el grado de precisión, estabilidad y costo del procedimiento de solución.

Los métodos que vamos a estudiar, son llamados "de in-



tegración directa", debido a que trabajan con las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$  originales, sin transformarlas (en contraposición con el método de superposición modal que se basa en la diagonalización de estas matrices). Hay que recalcar que, a diferencia de los métodos analíticos, los métodos de integración directa no buscan satisfacer la ecuación de equilibrio para todo . Se trata de satisfacerla de manera aproximada, en cada intervalo, de acuerdo con un criterio preestablecido. (Por ejemplo, el criterio de "residuos pesados". Ver sección 2.6).

Al comparar estos métodos con los de superposición modal, una de las ventajas de la integración directa, radica en que su implementación en una computadora es mucho más sencilla; además, con pequeñas modificaciones, las mismas técnicas de integración directa pueden extenderse para ser aplicadas a una gran variedad de problemas, lo que constituye también una característica atractiva.

Los algoritmos que describiremos, calculan los valores de la solución  $U(t)$  en un punto dado  $t_{k+1}$ , suponiendo conocidas las soluciones en los puntos anteriores,  $t_0, t_1, \dots, t_k$ . (En ciertos esquemas, se suponen conocidas, además, sus derivadas en esos puntos). Si los valores de  $U(t_{k+1})$  se calculan a partir de  $U(t_k)$  (y tal vez de una derivada  $\dot{U}(t_k)$ ) el método se llama de un solo paso; los métodos de pasos múltiples determinan  $U(t_{k+1})$  a partir de  $U(t_k), U(t_{k-1}), \dots$ , etc (y tal vez, de algunas derivadas como  $\dot{U}(t_k), \dot{U}(t_{k-1})$ ). Según el número de intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  involucrados en el cálculo, los métodos se llaman "de un paso", "de dos pasos", etc.

Existen varios caminos para establecer esquemas recurrentes de integración: mediante el método de "residuos pesados" o por discretización en el tiempo de principios variacionales, con muchas variantes dentro de cada método. Al tratar el-

sistema de ecuaciones del problema específico que estudiamos, - también se pueden distinguir dos enfoques diferentes: conside-- rar la ecuación de equilibrio (1.72) como un sistema de  $n$  ecua-- ciones diferenciales de segundo orden, o transformarla en un -- sistema de  $2n$  ecuaciones de primer orden.

La discusión en detalle de todas estas posibilidades, - rebasa los objetivos del presente trabajo. Nosotros nos limita-- remos a estudiar algunas generalidades sobre estos métodos y -- luego describiremos brevemente algunos de los esquemas mas cono-- cidos. (El lector que se interese puede profundizar sobre es-- tos temas, en las referencias [2], [3] y [11]).

## 2.2 FUNCIONAMIENTO DE LOS METODOS DE INTEGRACION DIRECTA

En primer lugar vamos a tratar de esclarecer la estructura de los métodos de solución que estamos por considerar. Hemos visto que una ecuación general del tipo (1.72), mediante la superposición modal, se descompone en un sistema de  $n$  ecuaciones desacopladas. La integración de uno u otro sistema es equivalente, por lo que, para este estudio, basta con considerar la solución de una de las ecuaciones de la forma (1.75) suponiendo que son conocidas las respuestas en los instantes  $t_0, t_1 = t_0 + h, \dots, t_i = t_0 + ih$  y que necesitamos calcular la solución en el siguiente punto del dominio discretizado  $t_{i+1} = t_i + h$ . Podemos definir un método recursivo general mediante la relación.

$$\hat{X}_{i+1} = A\hat{X}_i + Lr_{i+\nu} \quad (2.2)$$

donde  $\hat{X}_{i+1}$  y  $\hat{X}_i$  son vectores cuyos elementos son valores de desplazamientos, velocidades, etc. que intervienen en el proceso recursivo de cálculo (la naturaleza de los elementos de estos vectores, es variable según el método de que se trate);  $r_{i+\nu}$  es el valor de la carga  $r$  en el instante  $t_{i+\nu}h$  ( $\nu$  también es variable según el método),  $A$  es una matriz que ejecuta la transformación lineal apropiada según el método particular de integración y  $L$  es un operador que actúa sobre los valores de las cargas (es un vector). Todos los elementos que intervienen en esta ecuación dependen del método particular de integración de que se trate.

La expresión (2.2) se puede utilizar para calcular un vector de solución en el instante  $t_i + lh$ ; aplicándola recursivamente, se obtiene:

$$\hat{X}_{i+1} = A^k \hat{X}_i + A^{k-1} L r_{i+1} + A^{k-2} L r_{i+2} + \dots + A L r_{i+k-2} + L r_{i+k-1}. \quad (2.3)$$

Esta relación expresa el funcionamiento de un método dado de integración directa. Analizando (2.3) se pueden determinar las características de precisión y estabilidad del esquema correspondiente, en función de la matriz  $A$  y el vector  $L$  de ese método particular y de la longitud de paso  $h$ .

Un tratamiento más formal sobre los temas de estabilidad y precisión de los métodos del tipo (2.2) puede encontrarse, por ejemplo en la referencia [12, caps. 4 y 10] o en la referencia [13, caps. 4 y 6].

El costo de la solución depende obviamente, del número  $\ell$  de etapas del cálculo, que es inversamente proporcional a la longitud de paso  $h$ , dado que, para cubrir un intervalo de longitud  $T$  se requieren  $\ell = \frac{T}{h}$  pasos.

Al conocer las características de un método dado, podremos decidir el valor de  $h$  a utilizar considerando, por un lado, el grado de precisión que se requiere y el costo del proceso. Un valor más pequeño de  $h$ , generalmente dará más precisión pero el cálculo requerirá más tiempo de máquina y será más costoso; valores grandes de  $h$  pueden disminuir el costo pero también la precisión.

En algunos métodos existe un límite superior para  $h$  - pues para valores mayores a ese límite, el proceso se vuelve inestable; por último algunos esquemas son siempre inestables por lo que no tienen utilidad práctica. Como se ve la elección del valor de  $h$  es crucial para obtener un comportamiento óptimo del método de integración que se haya escogido. A con-

tinuación vamos a hablar mas en detalle de los conceptos de estabilidad y precisión de los esquemas de integración directa, a partir del análisis de las expresiones (2.2) y (2.3), con el fin de tener criterios que nos orienten al momento de seleccionar el valor de  $h$ .

Sabemos que la solución de una ecuación de la forma (1.75) es una función oscilante cuya longitud de período llamaremos  $T$ . Si queremos determinar los valores de la respuesta del sistema durante un período completo de oscilación, debemos dividir  $T$  en un número suficiente  $\ell$  de intervalos de longitud  $h$ , tales que  $T = \ell h$ . Al decir "número suficiente" se deja libertad para escoger el número  $\ell$ , de acuerdo a un criterio -- subjetivo, por lo que cabe preguntar que ocurriría si nuestra elección de  $\ell$  (y de  $h$ ) en realidad no es adecuada para obtener una buena representación de la respuesta a un modo particular de vibración.

Para contestar a esta pregunta, primero observamos -- que, al considerar un sistema estructural con  $n$  grados de libertad y obtener un sistema desacoplado como (1.75), a cada uno de los modos de vibración le corresponde una frecuencia  $\omega_i$  -- diferente; por convención se asume que  $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ . Dado que  $T_i = 2\pi/\omega_i$  donde  $T_i$  es el período correspondiente al  $i$ -ésimo modo natural de vibración, se cumple que  $T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n$

Al utilizar un método de integración directa de la forma (2.2) para resolver un sistema como (1.75), la longitud de paso  $h$  es la misma para todas las ecuaciones. Supongamos que se ha elegido un valor de  $h$  suficientemente pequeño para obtener una buena representación de la respuesta al  $j$ -ésimo modo de vibración; como los períodos  $T_i$ ,  $i < j$  son mayores -- que  $T_j$ , entonces se obtendrá también una buena representación para todos los modos de vibración anteriores. Sin embar-

go para las ecuaciones con  $\tau_j$  es posible que las respuestas - que se obtengan, carezcan de significado. Las figuras 1a. y 1.b ilustran lo que ocurre cuando se calcula una representación -- discretizada de una función oscilante con una longitud de paso "apropiada" ( $\tau/12$ ) y una "inapropiada" ( $5\tau/12$ )

Hay que recordar que las frecuencias mas bajas se calculan con una mayor aproximación mientras que las altas pueden estar tan poco ajustadas a su valor real que tomarlas en cuenta dentro del cálculo puede considerarse como una verdadera -- fuente de perturbación, por lo cual, con frecuencia se prescind de su efecto para calcular la respuesta total.

Vemos, pues, que nuestra elección de  $h$  debe ser tal que sea apropiada para los  $p$  primeros modos naturales de vibración  $p < n$ , siendo  $p$  el mayor índice de los modos de vibración que hayamos decidido incluir en un análisis por superposición-modal. Un valor aconsejable de  $h$  podrá ser por ejemplo  $T_p/10$

Si se tomaran en cuenta todos los modos de vibración, debería elegirse un  $h \sim T_n/10$ ; al considerarse solamente los  $p$  primeros y elegir un  $h \sim T_p/10$ , se obtiene una importante -- disminución en el número de etapas de cálculo (y en el costo -- de la solución) pues el valor del cociente  $T_p/T_n$  puede ser tan alto como 100 o 1000 en muchos casos prácticos.

Aún cuando no se haya realizado la descomposición-modal, de todas maneras, el efecto que hemos descrito permanece presente en el cálculo de la solución, y puede tomarse una longitud de paso estimada para aproximar adecuadamente un número suficiente de componentes, digamos las  $p$  de período más -- grande. Sin embargo, esto significa perder el control sobre -- los  $n-p$  modos de vibración de período mas bajo y naturalmente, esto solo debe hacerse cuando estamos seguros de que las -- perturbaciones debidas a los modos mal aproximados sean pequeñas.

En la práctica cada esquema de integración tiene características propias respecto a la propagación de perturbaciones en el proceso de cálculo; estas características definen la estabilidad del esquema.

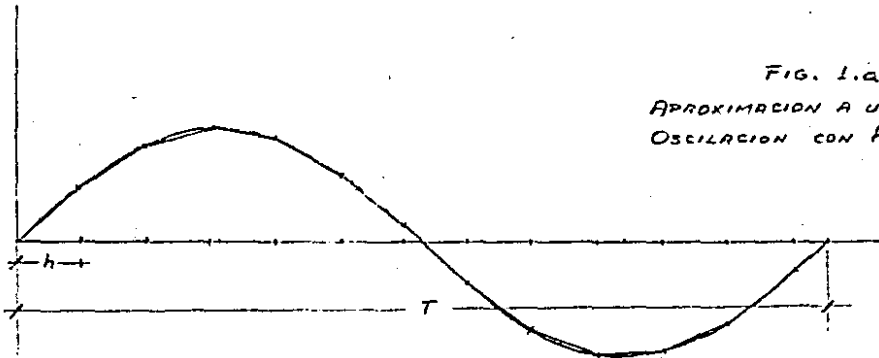


FIG. 1.a.-  
APROXIMACION A UNA  
OSCILACION CON  $h \sim \frac{T}{12}$ .

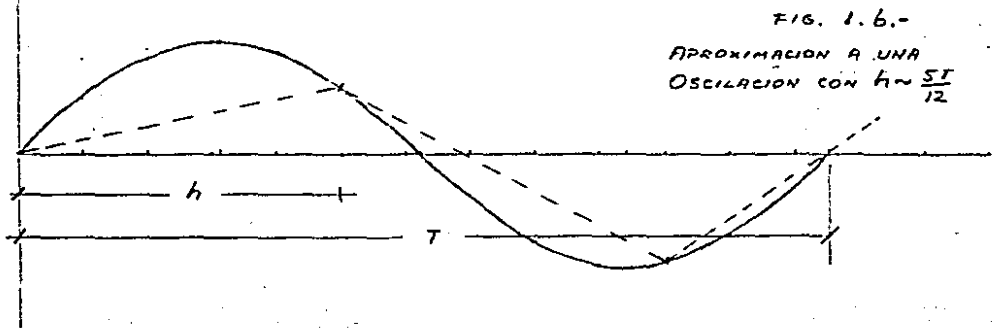


FIG. 1.b.-  
APROXIMACION A UNA  
OSCILACION CON  $h \sim \frac{5T}{12}$ .

### 2.3. ESTABILIDAD DE LOS METODOS DE INTEGRACION DIRECTA.

Se dice que un esquema es estable si cualquier error en los desplazamientos, velocidades o aceleraciones que aparezca en el instante  $t$ , no se amplifica al pasar al instante  $t+h$  en el proceso de integración. Dentro de estos "errores" están incluidos los de redondeo y de cualquier otro tipo y, en particular, los valores que aparecen por la influencia de los modos de vibración mal aproximados o las condiciones iniciales de los modos eliminados del análisis.

Supongamos que la respuesta calculada para una ecuación del tipo (1.75) en el instante  $t$ , viene dada por un valor aproximado  $x_i$  y que el valor exacto de esa respuesta es  $x(t_i)$ . Evidentemente el error en  $x$  y en  $\dot{x}$  en el instante  $t$  será

$$\Delta x_i = x(t_i) - x_i \quad (2.4)$$

$$\Delta \dot{x}_i = \dot{x}(t_i) - \dot{x}_i \quad (2.5)$$

Para investigar la estabilidad de un método de integración del tipo (2.2), debemos determinar como se propagan a las etapas sucesivas de cálculo, los errores  $\Delta x_i$  y  $\Delta \dot{x}_i$ , tomándolos como condiciones iniciales y sin considerar cargas ni amortiguamiento; esto es, hay que analizar la ecuación siguiente:

$$\widehat{\Delta X}_{i+t} = A^t \widehat{\Delta X}_i \quad (2.6)$$

Esta ecuación es la misma (2.3) con  $r=0$ ;  $\xi=0$  y con con



diciones iniciales  $\hat{\Delta X}_i$ .

Existen métodos de integración que son incondicionalmente estables; esto quiere decir que el vector  $\hat{\Delta X}_i$  no crece al propagarse a las etapas posteriores de cálculo, sea cual sea el valor de la longitud de paso  $h$ . Se dice que un esquema es condicionalmente estable si lo anterior se cumple para valores de  $h$  menores a un cierto límite; usualmente se define el llamado "límite de estabilidad" como el máximo valor del cociente  $h/\tau$  para el cual el método se mantiene estable.

Evidentemente, la clave del problema está en los valores característicos de la matriz  $A$ . Definiremos el radio espectral  $\rho(A)$ , de esta matriz como

$$\rho(A) = \max |\gamma_i| \quad i=1,2,\dots \quad (2.7)$$

donde  $\gamma_i$  son los valores característicos de  $A$ . Un esquema será estable si sólo si

$$\rho(A) \leq 1 \quad (2.8)$$

pues, en ese caso,  $A^l$  se mantiene acotado cuando  $l \rightarrow \infty$ . Además,  $A^l \rightarrow 0$  si  $\rho(A) < 1$  y mientras mas pequeño sea  $\rho(A)$ , más rápida es la convergencia. Esto se desprende de la relación (2.6).

Para determinar las condiciones de estabilidad de un método dado, basta con plantear, para este método, la ecuación (2.6) y hacer cumplir con el radio espectral de  $A$ , la desigualdad (2.8); esto proporcionará una relación, en función de  $h/\tau$ , que representará la condición necesaria y suficiente de

estabilidad para este método.

Podemos darnos una mejor idea del significado de estas condiciones de estabilidad, estudiando la solución de un problema de vibración libre en un sistema con un grado de libertad que consiste en una ecuación desacoplada de la forma (1.33) y sus correspondientes condiciones iniciales.

Sea:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

con

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = 0$$

(2.9)

La solución exacta es

$$x(t) = x_0 \cos \omega t = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.10)$$

la cual puede también escribirse

$$x(t) = c_1 \psi_1^e + c_2 \psi_2^e \quad (2.11)$$

donde  $c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$ ,  $\psi_1 = e^{i\omega t}$  y  $\psi_2 = e^{-i\omega t}$ . Sólo con estas -- equivalencias, (2.11) es capaz de reproducir la función armónica (2.10). Obsérvese que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son dos números complejos -- conjugados, por lo cual  $|\psi_1| = |\psi_2|$ .

Evidentemente, para que el problema sea estable, debe cumplirse que

$$|\psi_1| = |\psi_2| = |e^{+i\omega}| \leq 1. \quad (2.12)$$

La discusión anterior nos sugiere una interpretación para los dos mayores valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz  $A$ : son aproximaciones de  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ; por ello se deduce que el método representado en (2.2) dará una buena aproximación de la solución exacta si los valores característicos  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de la matriz  $A$  son complejos y conjugados en el rango de frecuencia que nos interesa como lo son  $\psi_1$  y  $\psi_2$ . Si  $A$  tiene mas de dos valores característicos, los siguientes ( $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ ) no son significativos para la aproximación de la solución (2.10).

El análisis que hemos hecho no contempla el efecto del amortiguamiento físico; esto es, se supone  $\xi = 0$ . Si  $\xi > 0$ , se generaría un efecto favorable desde el punto de vista de la estabilidad pero, en general, valores pequeños de  $\xi$  no ocasionan cambios drásticos en el comportamiento de los esquemas de integración.

Sin embargo las consideraciones de estabilidad no son suficientes para definir la bondad de un método de integración; es necesario investigar también el grado de precisión que es posible obtener con un esquema determinado para un valor dado de  $h$ .

#### 2.4. PRECISION DE LOS METODOS DE INTEGRACION DIRECTA

Aparte de todas las consideraciones ya hechas acerca de la influencia de la longitud de paso sobre la estabilidad, la selección del valor de  $h$  debe hacerse tomando en cuenta el efecto que este tiene sobre la precisión; por esta razón vamos a establecer criterios mas rigurosos que aclaren la relación entre estas variables.

No es posible describir un método general para analizar la precisión de los diferentes métodos de integración, ya que cada uno de ellos tiene características propias; además, las condiciones iniciales y de carga de un problema particular, pueden tener gran influencia sobre el grado de precisión que se obtenga, en cada caso. Se puede realizar un análisis exhaustivo para un método dado, pero no es ese nuestro objetivo; en vez de ello, tratamos de entender la naturaleza de los errores que aparecen en el cálculo y su relación con la longitud de paso.

Consideremos otra vez el problema de valores iniciales (2.9), cuya solución exacta quedó expresada en (2.10):

$$x(t) = x_0 \cos \omega t = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.10)$$

La solución anterior es una función armónica, que puede definirse por la longitud  $T$  del período y la amplitud de oscilación  $y$ . Al resolver la ecuación (2.9) por alguno de los métodos de integración directa, debe obtenerse una representación discretizada aproximada de la solución exacta (2.10). Podemos darnos una idea de las discrepancias que ocurren, midien

do las diferencias en la amplitud y el período de la solución exacta y la aproximada.

#### 2.4.1. Decaimiento de la Amplitud.

Las oscilaciones de la solución exacta (2.10), naturalmente son todas de igual amplitud. Vamos a llamar  $t_k$  la abscisa correspondiente a la amplitud máxima  $y_k$  de una oscilación:

$$y_k = x(t_k) \quad (2.13)$$

Vamos a suponer que el conjunto de valores discretos  $\{t_i\}$  se ha definido de forma tal que  $t_{i+1} - t_i = h$  y  $hL = T$ . En ese caso, la amplitud de la siguiente oscilación será:

$$y_{k+1} = x(t_k + Lh) = x(t_{k+1}) \quad (2.14)$$

y obviamente

$$y_k = y_{k+1} \quad (2.15)$$

Llamaremos  $y_{k+1}^*$  al valor aproximado de  $y_{k+1}$  calculado mediante un método de integración directa, tomando como valor inicial  $y_k^* = y_k$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} y_k^* &= x_k \\ y_{k+1}^* &= x_{k+1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se puede hacer uso de la relación (2.3) y escribir

$$\tilde{X}_{k+l} = A^l \tilde{X}_k \quad (2.17)$$

donde los vectores  $\hat{X}_{k+l}$  y  $\hat{X}_k$  están conformados de acuerdo al método que se trate, para permitirnos calcular  $X_{k+l}$  a partir del valor inicial  $X_k$ .

Naturalmente en la ecuación (2.17) la relación entre  $\hat{X}_{k+l}$  y  $\hat{X}_k$  depende exclusivamente de la matriz  $A^l$  o, más concretamente, de sus valores característicos. Dejamos establecida ya, en (2.8), la condición de estabilidad de un esquema de integración: ( $\rho(A) \leq 1$ ), por lo cual, si el esquema es estable, es evidente que la amplitud  $y_{k+l}^*$  será menor o igual a  $y_k^*$ .

La diferencia  $y_{k+l} - y_{k+l}^*$  es llamada "decaimiento de la amplitud" de la solución discretizada de (2.9), y su valor puede ser calculado solamente mediante aplicación directa de los métodos de integración a un problema tipo cuya solución se conozca, y comparando los valores aproximados con los exactos. Sin embargo, podemos tener una idea más o menos clara de la transformación lineal de  $\hat{X}_k$  a  $\hat{X}_{k+l}$  si examinamos el módulo de los valores característicos de la matriz  $A$ .

Se pueden obtener funciones que expresan los valores característicos en función del cociente  $h/T$ . En general, para muchos esquemas conocidos, el módulo de los valores característicos  $|\delta_i|$  es próximo a uno cuando  $h/T$  es pequeño, mientras que, cuando este cociente es grande, los valores  $|\delta_i|$  -- descienden; esto ocasiona que, en un mismo problema, el decaimiento de amplitud sea mayor para los modos de vibración de -- período pequeño, cuyo efecto, por esta razón, tiende a desaparecer rápidamente. Sin embargo, existen esquemas que no intro

ducen decaimiento en la amplitud. Mas adelante consideraremos algunos casos específicos.

#### 2.4.2. Elongación del Período.

Para estudiar este fenómeno, vamos también a analizar el problema de valores iniciales (2.9), cuya solución, como ya vimos, es la función armónica  $x(t) = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$  con un período uniforme  $T$ . Esta solución se puede escribir en la forma descrita en (2.11)

$$x(t) = c_1 \psi_1^t + c_2 \psi_2^t \quad (2.11)$$

donde  $c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$ ,  $\psi_1 = e^{i\omega}$  y  $\psi_2 = e^{-i\omega}$

Supongamos que el método numérico que utilizamos proporciona para el problema (2.9) la solución aproximada:

$$x^*(t) = c_1 \hat{\chi}_1^t + c_2 \hat{\chi}_2^t \quad (2.18)$$

siendo

$$\hat{\chi}_1 = e^{i\theta} ; \quad \hat{\chi}_2 = e^{-i\theta} \quad (2.19)$$

Aquí  $\theta$  es una aproximación de la frecuencia exacta  $\omega$  y, desde luego,  $\hat{\chi}_1$  y  $\hat{\chi}_2$  son aproximaciones a  $\psi_1$  y  $\psi_2$ . Sin embargo, los métodos que estudiamos, trabajan sobre un dominio discretizado. Para el problema (2.9) que consideramos, este dominio es  $\{t_j\} \equiv \{t_j/t_j = jh ; j = 0, 1, \dots\}$ ; entonces, podemos escribir

$$x_j = c_1 \chi_1^j + c_2 \chi_2^j \quad (2.20)$$

donde  $\chi_1 = \hat{\chi}_1^h = e^{i\theta h}$  y  $\chi_2 = \hat{\chi}_2^h = e^{-i\theta h}$  (2.21)

y se cumple también que  $|\chi_1| = |\chi_2|$  (2.22)

La expresión (2.20) resume el procedimiento de cálculo de los valores  $\chi_j$ . Obviamente, la condición de estabilidad es:

$$|\chi_1| = |\chi_2| = |e^{\pm i\theta h}| \leq 1 \quad (2.23)$$

Las condiciones de estabilidad para un método numérico dado, se pueden determinar haciendo cumplir la desigualdad (2.8). Para el caso del problema (2.9),  $f(h) = \chi_1 = e^{i\theta h}$  de donde podemos calcular el ángulo  $\theta$  que es la pseudo frecuencia de la solución numérica. Puesto que  $e^{i\theta h} = \cos \theta h + i \sin \theta h$  se tiene:

$$\theta = \frac{1}{h} \tan^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(\chi_1)}{\text{Re}(\chi_1)} \right\} \quad (2.24)$$

Conocido el ángulo  $\theta$ , el error de periodicidad o "elongación del período" puede calcularse con la siguiente fórmula:



$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T^* - T}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\theta} - \frac{2\pi}{\omega}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\theta} - 1 \quad (2.25)$$

El valor de la elongación del período puede ser positivo o negativo, según los casos; sin embargo, hay que observar - que la pseudo-frecuencia  $\theta$  es igual a cero para valores de  $\chi_0$  - con parte imaginaria igual a cero y, en ese caso, (2.25) daría un valor infinito para la elongación del período. Esto se explica por el hecho de que un valor real de  $\chi_0$  haría que la solución (2.20) se transforme en una exponencial pura, incapaz de reproducir las oscilaciones de la solución que buscamos.

Con esto, concluimos nuestra discusión sobre aspectos generales de los métodos de integración directa.

## 2.5. ALGUNOS ESQUEMAS CONOCIDOS

Como hemos visto, existe un infinito número de posibilidades para la formulación de un esquema de integración, y por diferentes caminos; en muchos casos se puede llegar a resultados iguales por rutas diferentes. No pretendemos hacer un recuento exhaustivo de todas estas posibilidades y únicamente trataremos de describir de manera breve algunos de los esquemas más conocidos; este será el objetivo de la presente sección.

### 2.5.1. Método de Diferencias Centrales.

Este método se basa en la aproximación por diferencias finitas centrales de las velocidades y aceleraciones en función de los desplazamientos. Estas aproximaciones son:

$$\ddot{U}_i = \frac{1}{h^2} [U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}] \quad (2.26)$$

$$\dot{U}_i = \frac{1}{2h} [-U_{i-1} + U_{i+1}] \quad (2.27)$$

y el error que se comete con estas fórmulas es proporcional -- a  $h^2$ .

Haciendo cumplir las condiciones de equilibrio en el instante  $t_i$ , se tiene:

$$M\ddot{U}_i + C\dot{U}_i + KU_i = R_i \quad (2.28)$$

y reemplazando aquí los valores dados en (2.26) y (2.27) de la primera y segunda derivadas, queda:

$$\left(\frac{M}{h^2} + \frac{C}{2h}\right) U_{i+1} = R_i - \left(K - \frac{2M}{h^2}\right) U_i - \left(\frac{M}{h^2} - \frac{C}{2h}\right) U_{i-1} \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) representa un sistema de  $n$  ecuaciones lineales donde las incógnitas son los componentes del vector  $U_{i+1}$ . Para que el cálculo sea posible, se necesita conocer los desplazamientos  $U_i$  y  $U_{i-1}$ . Esto significa que, para comenzar se requiere un procedimiento especial de arranque, pues las condiciones iniciales dadas son  $U_0$  y  $\dot{U}_0$  y el algoritmo requiere  $U_0$  y  $U_{-1}$ .

La ecuación (2.28) valuada en  $t=0$  nos permite calcular  $\ddot{U}_0$ ; calculado este valor, se puede encontrar  $U_{-1}$  con la siguiente fórmula:

$$U_{-1} = U_0 - h\dot{U}_0 + \frac{h^2}{2}\ddot{U}_0 \quad (2.30)$$

Con este valor, se completan los datos necesarios para arrancar con el procedimiento recursivo descrito en (2.29).

Para analizar las características de este método, podemos estudiar la solución de una ecuación de equilibrio de la forma (1.75) en el instante  $t_i$ :

$$\ddot{x}_i + 2\xi\omega\dot{x}_i + \omega^2 x_i = r_i \quad (2.31)$$

y reemplazando en esta ecuación las aproximaciones descritas en (2.26) y (2.27), se obtiene

$$x_{i+1} = \frac{2-\omega^2 h^2}{1+\xi\omega h} x_i - \frac{1-\xi\omega h}{1+\xi\omega h} x_{i-1} + \frac{h^2}{1+\xi\omega h} r_i \quad (2.32)$$

o, con notación matricial

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} + L r_i \quad (2.33)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 h^2}{1 + \xi \omega h} & -\frac{1 - \xi \omega h}{1 + \xi \omega h} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad L = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{1 + \xi \omega h} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para analizar la estabilidad de este sistema, debemos calcular los valores característicos de la matriz  $A$ , suponiendo que  $\xi = 0$ . El problema de valores característicos a resolver es entonces:

$$\begin{bmatrix} 2 - \omega^2 h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v = \lambda v \quad (2.35)$$

y los valores de  $\lambda$  son las raíces de la siguiente ecuación característica

$$(2 - \omega^2 h^2 - \lambda)(-\lambda) + 1 = 0 \quad (2.36)$$

por lo tanto

$$\lambda = \frac{2 - \omega^2 h^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2 - \omega^2 h^2)^2}{4} - 1} \quad (2.37)$$

y la iteración será estable si y solo si  $|\lambda| \leq 1$ .

Como se puede comprobar, la condición de estabilidad se cumple solo para valores de  $h$  menores que un valor crítico  $h_c$ :

$$h \leq \frac{2}{\omega} = \frac{\tau}{\pi} \quad (2.38)$$

por lo que el esquema es condicionalmente estable.

### 2.5.2. El Método de Houbolt.

Establezcamos las siguientes aproximaciones por diferencias finitas:

$$U_{i+1} = U_{i+1} \quad (a)$$

$$U_i = U_{i+1} - h \dot{U}_{i+1} + \frac{1}{2} h^2 \ddot{U}_{i+1} - \frac{1}{6} h^3 \ddot{\ddot{U}}_{i+1} + O(h^4) \quad (b)$$

$$U_{i-1} = U_{i+1} - 2h \dot{U}_{i+1} + 2h^2 \ddot{U}_{i+1} - \frac{4}{3} h^3 \ddot{\ddot{U}}_{i+1} + O(h^4) \quad (c)$$

$$U_{i-2} = U_{i+1} - 3h \dot{U}_{i+1} + \frac{9}{2} h^2 \ddot{U}_{i+1} - \frac{9}{2} h^3 \ddot{\ddot{U}}_{i+1} + O(h^4) \quad (d)$$

Multiplicando (a) por 1, (b) por -5 (c) por 4 y (d) por -1, y sumando, se obtiene:

$$-5U_i + 4U_{i-1} - U_{i-2} = -2U_{i+1} + h^2 \ddot{U}_{i+1} + O(h^4) \quad (e)$$

de donde

$$\ddot{U}_{i+1} = \frac{1}{h^2} \left[ 2U_{i+1} - 5U_i + 4U_{i-1} - U_{i-2} \right] + O(h^2) \quad (2.39)$$

De modo semejante, multiplicando (a) por 1, (b) por --

18, (c) por  $-9$  y (d) por  $2$ , y sumando, se obtiene:

$$18U_i - 9U_{i-1} + 2U_{i-2} = 11U_{i+1} - 6h\dot{U}_{i+1} + O(h^2) \quad (f)$$

de donde:

$$\dot{U}_{i+1} = \frac{1}{6h} [11U_{i+1} - 18U_i + 9U_{i-1} - 2U_{i-2}] + O(h^2) \quad (2.40)$$

El método de Houbolt se basa en las aproximaciones dadas por (2.39) y (2.40).

El error que se comete al usar estas aproximaciones, es proporcional a  $h^2$ . (En realidad (2.40) tiene un término de error de orden 3 pero prevalece el orden más bajo de (2.39)).

Vamos a considerar la ecuación de equilibrio en el instante  $t_{i+h} = t_{i+1}$ :

$$M\ddot{U}_{i+1} + C\dot{U}_{i+1} + KU_{i+1} = R_{i+1} \quad (2.41)$$

Sustituyendo (2.39) y (2.40) en esta ecuación se obtiene:

$$\left(\frac{2}{h^2}M + \frac{11}{6h}C + K\right)U_{i+1} = R_{i+1} + \left(\frac{5}{h^2}M + \frac{3}{h}C\right)U_i - \left(\frac{4}{h^2}M + \frac{3}{2h}C\right)U_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2}M + \frac{1}{3h}C\right)U_{i-2} \quad (2.42)$$

de donde se puede calcular los valores de  $U_{i+1}$ , siempre que sean conocidos los valores de  $U_i$ ,  $U_{i-1}$  y  $U_{i-2}$ . En este método, igual que en el de diferencias centrales, se requiere un procedimiento especial de arranque antes de poder aplicar la fórmula (2.42).

Se puede realizar para el método de Houbolt, un análisis de estabilidad semejante al que realizamos en la sección 2.5.1., para el método de diferencias centrales. El resultado-

es que este esquema de Houbolt es incondicionalmente estable, - es decir, no existe un límite para el valor de la longitud de paso  $h$ .

Para poner este método en la forma (2.2), Consideremos la ecuación:

$$\ddot{x}_{i+1} + 2 \frac{E}{m} x_{i+1} + \omega^2 x_{i+1} = r_{i+1} \quad (2.43)$$

y haciendo uso de las aproximaciones (2.39) y (2.40), se llega a establecer:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ x_{i-2} \end{bmatrix} + L r_{i+1} \quad (2.44)$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5\beta}{\omega^2 h^2} + 6\kappa & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 h^2} + 3\kappa\right) & \frac{\beta}{\omega^2 h^2} + \frac{2\kappa}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$\beta = \left(\frac{2}{\omega^2 h^2} + \frac{11E}{3mh} + 1\right)^{-1}; \quad \kappa = \frac{E\beta}{mh}$$

y

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

### 2.5.3. El Método $\theta$ de Wilson.

El método  $\theta$  de Wilson se basa en la hipótesis de que la

aceleración es lineal en el intervalo  $[t_i, t_i + \theta h]$  donde  $\theta \geq 1$ .--  
Sea  $\xi$  una variable que expresa el incremento en el tiempo, tal -  
que  $0 \leq \xi \leq \theta$  ; entonces se asume que:

$$\ddot{U}_{i+\xi} = \ddot{U}_i + \frac{\xi}{\theta} (\ddot{U}_{i+\theta} - \ddot{U}_i) \quad (2.46)$$

donde  $\ddot{U}_{i+\xi}$  y  $\ddot{U}_{i+\theta}$  quieren decir los valores calculados de la ace-  
leración en los instantes  $t_i + \xi h$  y  $t_i + \theta h$ . Seguiremos usando esta -  
notación en las líneas siguientes.

Integrando (2.46), se obtiene:

$$\dot{U}_{i+\xi} = \dot{U}_i + \ddot{U}_i \xi h + \frac{\xi^2 h^2}{2\theta h} (\ddot{U}_{i+\theta} - \ddot{U}_i) \quad (2.47)$$

$$y \quad U_{i+\xi} = U_i + \dot{U}_i \xi h + \ddot{U}_i \frac{\xi^2 h^2}{2} + \frac{\xi^3 h^3}{6\theta h} (\ddot{U}_{i+\theta} - \ddot{U}_i) \quad (2.48)$$

A partir de (2.47) y (2.48), haciendo  $\xi = \theta$ , se obtie-  
ne:

$$\dot{U}_{i+\theta} = \dot{U}_i + \frac{\theta h}{2} (\ddot{U}_{i+\theta} - \ddot{U}_i) \quad (2.49)$$

$$U_{i+\theta} = U_i + \dot{U}_i \theta h + \frac{\theta^2 h^2}{6} (\ddot{U}_{i+\theta} + 2\ddot{U}_i) \quad (2.50)$$

y de aquí se puede despejar  $\ddot{U}_{i+\theta}$  y  $\dot{U}_{i+\theta}$

$$\ddot{U}_{i+\theta} = \frac{6}{\theta^2 h^2} (U_{i+\theta} - U_i) - \frac{6}{\theta h} \dot{U}_i - 2\ddot{U}_i \quad (2.51)$$

$$y \quad \dot{U}_{i+\theta} = \frac{3}{\theta h} (U_{i+\theta} - U_i) - 2\dot{U}_i - \frac{\theta h}{2} \ddot{U}_i \quad (2.52)$$

En este método, se considera la ecuación de equilibrio  
en el instante  $t_i + \theta h$ , es decir;



$$M\ddot{U}_{i+0} + C\dot{U}_{i+0} + KU_{i+0} = \bar{R}_{i+0} \quad (2.53)$$

donde:  $\bar{R}_{i+0} = R_i + \theta (R_{i+1} - R_i)$

Reemplazando en (2.53) los valores dados en (2.51) y (2.52), se obtiene:

$$\left( \frac{6M}{\theta^2 h^2} + \frac{3C}{\theta h} + K \right) U_{i+0} = \left( \frac{6M}{\theta^2 h^2} + \frac{3C}{\theta h} \right) U_i + \left( \frac{6M}{\theta h} + 2C \right) \dot{U}_i + \left( 2M + \frac{C\theta h}{2} \right) \ddot{U}_i + R_i + \theta (R_{i+1} - R_i) \quad (2.54)$$

y esta ecuación nos permite calcular los desplazamientos en el instante  $t_i + \theta h$ , a partir de  $U_i$ ,  $\dot{U}_i$  y  $\ddot{U}_i$ . Nótese que este es un esquema de un solo paso, pues se consideran como valores iniciales los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del nodo inmediato anterior.

En realidad, necesitamos conocer los desplazamientos y sus derivados en el instante  $t_{i+h}$  y hasta ahora, solo se conocen los desplazamientos en  $t_i + \theta h$ ; reemplazando (2.51) en (2.46) y haciendo  $\theta = 1$ , se obtiene la siguiente ecuación que permite calcular  $\dot{U}_{i+1}$ .

$$\dot{U}_{i+1} = \frac{6}{\theta^3 h^2} (U_{i+0} - U_i) - \frac{6}{\theta^2 h} \dot{U}_i + \left( 1 - \frac{3}{\theta} \right) \ddot{U}_i \quad (2.55)$$

y haciendo  $\theta = 1$  en (2.49) y (2.50) se obtienen las siguientes fórmulas que permiten calcular  $\dot{U}_{i+1}$  y  $U_{i+1}$ .

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + \frac{h}{2} (\ddot{U}_{i+1} + \ddot{U}_i) \quad (2.56)$$

$$U_{i+1} = U_i + h\dot{U}_i + \frac{h^2}{6} (\ddot{U}_{i+1} + 2\ddot{U}_i) \quad (2.57)$$

Para poner este método en la forma (2.2), vamos a considerar la ecuación

$$\ddot{x}_{i+0} + 2\xi\omega\dot{x}_{i+0} + \omega^2 x_{i+0} = r_{i+0} \quad (2.58)$$

Usando las aproximaciones propias del método y reemplazándolas en (2.58), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \dot{x}_i \\ x_i \end{bmatrix} + L r_{i+0} \quad (2.59)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \mathcal{K}\theta & \frac{1}{h}(-\beta\theta - 2\mathcal{K}) & \frac{1}{h^2}(-\beta) \\ h(1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} - \frac{\mathcal{K}\theta}{2}) & 1 - \frac{\beta\theta}{2} - \mathcal{K} & \frac{1}{h}(-\frac{\beta}{2}) \\ h^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} - \frac{\mathcal{K}\theta}{6}) & h(1 - \frac{\beta\theta}{6} - \frac{\mathcal{K}}{3}) & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

con

$$\beta = \frac{\theta}{\omega^2 h^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega h} + \frac{\theta^3}{6} ; \quad \mathcal{K} = \frac{\xi\beta}{\omega h}$$

y

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 h^2} & \frac{\beta}{2\omega^2 h} & \frac{\beta}{6\omega^2} \end{bmatrix}^T$$

Al realizar un análisis de estabilidad se puede encontrar que el método es incondicionalmente estable siempre - -

que  $\theta \geq 1.37$  (Se acostumbra usar  $\theta = 1.4$ ).

#### 2.5.4. El Método de Newmark.

El esquema de integración de Newmark se basa también en la hipótesis de la aceleración lineal. Se usan las siguientes aproximaciones:

$$\dot{U}_{i+1} = \dot{U}_i + [(1 - \delta_1)\ddot{U}_i + \delta_1\ddot{U}_{i+1}]h \quad (2.61)$$

$$U_{i+1} = U_i + \dot{U}_i h + \left[\left(\frac{1}{2} - \delta_2\right)\ddot{U}_i + \delta_2\ddot{U}_{i+1}\right]h^2 \quad (2.62)$$

donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son parámetros que se pueden modificar para optimizar la precisión y estabilidad. (Dos selecciones muy generalizadas son  $\delta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{6}$  y  $\delta_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\delta_2 = \frac{1}{4}$ ; estos últimos valores son los propuestos originalmente por Newmark, y proporcionan un método incondicionalmente estable).

Para formular el algoritmo de cálculo, consideraremos la ecuación de equilibrio en el instante  $t_i + h$ :

$$M\ddot{U}_{i+1} + C\dot{U}_{i+1} + KU_{i+1} = R_{i+1} \quad (2.63)$$

De (2.61) y (2.62) se pueden obtener ecuaciones para  $\ddot{U}_{i+1}$  y  $\dot{U}_{i+1}$  en función de  $U_{i+1}$ , las que se reemplazan en (2.63) para darnos la siguiente fórmula recursiva:

$$\left(\frac{M}{\delta_2 h^2} + \frac{C\delta_1}{\delta_2 h} + K\right)U_{i+1} = \left(\frac{M}{\delta_2 h^2} + \frac{C\delta_1}{\delta_2 h}\right)U_i + \left(\frac{M}{\delta_2 h} + \frac{C(\delta_1 - \delta_2)}{\delta_2}\right)\dot{U}_i + \left(\frac{M(1 - 2\delta_2)}{2\delta_2} + \frac{Ch(\delta_1 - 2\delta_2)}{2\delta_2}\right)\ddot{U}_i + R_{i+1} \quad (2.64)$$

Para establecer una relación de la forma (2.2) para este esquema, aplicamos las aproximaciones propias del método a la ecuación:

$$\ddot{x}_{i+1} + 2\xi\omega\dot{x}_{i+1} + \omega^2 x_{i+1} = r_{i+1} \quad (2.65)$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \dot{x}_i \\ x_i \end{bmatrix} + L r_{i+1} \quad (2.66)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2} - \delta_2\right)\beta - 2(1 - \delta_1)\kappa & \frac{1}{h}(-\beta - 2\kappa) & \frac{1}{h^2}(-\beta) \\ h\left\{1 - \delta_1 - \left(\frac{1}{2} - \delta_2\right)\delta_1\beta - 2(1 - \delta_1)\delta_1\kappa\right\} & 1 - \beta\delta_1 - 2\delta_1\kappa & \frac{1}{h}(-\beta\delta_1) \\ h^2\left\{\frac{1}{2} - \delta_2 - \left(\frac{1}{2} - \delta_2\right)\delta_2\beta - 2(1 - \delta_1)\delta_2\kappa\right\} & h(1 - \delta_2\beta - 2\delta_2\kappa) & (1 - \delta_2\beta) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\text{con } \beta = \left( \frac{1}{\omega^2 h^2} + \frac{2\xi\delta_1}{\omega h} + \delta_2 \right)^{-1} ; \quad \kappa = \frac{\xi\beta}{\omega h} ;$$

$$\text{y } L = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 h^2} & \frac{\beta\delta_1}{\omega^2 h} & \frac{\delta_2\beta}{\omega^2} \end{bmatrix}^T$$

Los métodos de Newmark y  $\theta$  de Wilson son semejantes -- entre sí, pues ambos se fundamentan en la hipótesis de que la -- aceleración varía linealmente en el intervalo  $[t_i, t_i + h]$ .

Del análisis de estabilidad de (2.66), se puede determinar que este esquema es incondicionalmente estable si  $\delta_1 \geq \frac{1}{2}$  y  $\delta_2 \geq \frac{1}{4} (\delta_1 + \frac{1}{2})^2$ . Un análisis de precisión revela que los valores  $\delta_1 = \frac{1}{2}$  y  $\delta_2 = \frac{1}{4}$  proporcionan al esquema las mejores características pues, en este caso, no existe decaimiento de amplitud.

Con esto concluimos la descripción de algunos de los métodos de integración más usuales para el problema que estudiamos.

## 2.6 FORMULACION DE UNA FAMILIA DE ESQUEMAS POR EL METODO DE - "RESIDUOS PESADOS".

Vamos ahora a considerar una formulación más general, como un ejemplo de los procedimientos que se utilizan para generar esquemas de aproximación, del tipo de elementos finitos. El criterio básico que vamos a seguir es el de "residuos pesados".

Suponemos que la función  $U=U(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + \ell h]$  se aproxima mediante la expresión

$$U \approx \hat{U} = \sum_{i=0}^{\ell} N_i U_i \quad (2.68)$$

donde  $U_i \approx U(t_0 + ih)$ ,  $i=0, 1, \dots, \ell$  y  $\hat{U}$  es una función de interpolación (que supondremos polinomial) y que se ajusta a los valores  $U_i$ . (Para que el problema de interpolación esté bien planteado, las funciones bases  $N_i$  deben ser linealmente independientes).

Cuando reemplazamos la función aproximada en la ecuación que queremos satisfacer, se genera un residuo  $\Delta$ , que, en general, será diferente de cero:

$$\Delta = M\ddot{\hat{U}} + C\dot{\hat{U}} + K\hat{U} - R \quad (2.69)$$

El criterio de aproximación por residuos pesados establece que

$$\int_{t_0}^{t_0 + \ell h} w_j \Delta dt = \int_{t_0}^{t_0 + \ell h} w_j (M\ddot{\hat{U}} + C\dot{\hat{U}} + K\hat{U} - R) dt = 0 \quad (2.70)$$

o, cambiando la variable

$$\int_0^{\ell} w_j (M\ddot{\hat{U}} + C\dot{\hat{U}} + K\hat{U} - R) d\xi = 0 \quad (2.71)$$

$$\text{con } \xi = \frac{t - t_n}{h} \quad (2.72)$$

Aquí, la función  $w_j$  es una función de "peso" tal que - haga cumplir (2.70) y (2.71). Existen diferentes criterios -- para escoger esta función; los mas conocidos son:

a) Colocación en un punto: se hace  $w_j = \delta(x - x_j)$  donde  $\delta$  es la función "delta de Dirac", que se define por

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 0 & x \neq x_j \\ \infty & x = x_j \end{cases}$$

y

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - x_j) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq x_j \leq \beta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x - x_j) dx = \begin{cases} f(x_j) & \text{si } \alpha \leq x_j \leq \beta \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El método de colocación en un punto, obliga a que el residuo se haga cero en el punto de colocación  $x_j$

b) Colocación en un subdominio: dado un subdominio  $\Omega_j \subset \Omega$  se hace

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

con ello, resulta

$$\int_{\Omega} w_j f(x) dx = \int_{\Omega_j} f(x) dx$$

La colocación en un subdominio, obliga a que la integral del residuo se haga cero en el subdominio especificado.

- c) Criterio de Galerkin: con este método, se escogen las funciones de peso iguales a las funciones base:  $w_j = N_j$

Para ilustrar el método de residuos pesados, vamos a utilizar un valor  $l=3$ , con lo cual vamos a generar una familia de esquemas de 4 puntos; ésto significa que vamos a aproximar la función mediante un polinomio cúbico:  $\hat{U}(\xi) = P_3(\xi)$  y  $\hat{U}(0) = U_0$ ,  $\hat{U}(1) = U_1$ ,  $\hat{U}(2) = U_2$ ,  $\hat{U}(3) = U_3$ , y las funciones base para determinar el polinomio de interpolación vienen dadas por:

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= -\frac{1}{6} (\xi-1)(\xi-2)(\xi-3) \\ N_1 &= \frac{1}{2} \xi (\xi-2)(\xi-3) \\ N_2 &= -\frac{1}{2} \xi (\xi-1)(\xi-3) \\ N_3 &= \frac{1}{6} \xi (\xi-1)(\xi-2) \end{aligned} \right\} (2.73)$$

Para reemplazar la función aproximante en (2.71), requerimos la primera y segunda derivada de las funciones base:  $\dot{N}_i$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_0 &= -\frac{1}{6h} [3\xi^2 - 12\xi + 11] & \ddot{N}_0 &= -\frac{1}{h^2} (\xi-2) \\ \dot{N}_1 &= \frac{1}{2h} [3\xi^2 - 10\xi + 6] & \ddot{N}_1 &= \frac{1}{h^2} (3\xi-5) \\ \dot{N}_2 &= -\frac{1}{2h} [3\xi^2 - 8\xi + 3] & \ddot{N}_2 &= -\frac{1}{h^2} (3\xi-4) \\ \dot{N}_3 &= \frac{1}{6h} [3\xi^2 - 6\xi + 2] & \ddot{N}_3 &= \frac{1}{h^2} (\xi-1) \end{aligned} \right\} (2.74)$$



Es usual establecer para las cargas una función aproximante de la misma forma que para los desplazamientos, de modo que haremos

$$R \approx \sum_{i=0}^3 N_i R_i \quad (2.75)$$

donde

$$R_i = R(t_0 + ih).$$

Reemplazando en (2.71) las magnitudes  $\hat{U}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\hat{U}$  y el valor de  $\ell$ , y aproximando la función de carga según (2.75), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{M}{h^2} \int_0^3 W_j (\xi - 1) d\xi + \frac{C}{h} \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2) d\xi + K \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) d\xi \right] U_3 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} \int_0^3 W_j (4 - 3\xi) d\xi - \frac{C}{h} \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (3\xi^2 - 8\xi + 3) d\xi - K \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (\xi^3 - 4\xi^2 + 3\xi) d\xi \right] U_2 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} \int_0^3 W_j (3\xi - 5) d\xi + \frac{C}{h} \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (3\xi^2 - 10\xi + 6) d\xi + K \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (\xi^3 - 5\xi^2 + 6\xi) d\xi \right] U_1 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} \int_0^3 W_j (2 - \xi) d\xi - \frac{C}{h} \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (3\xi^2 - 12\xi + 11) d\xi - K \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (\xi^3 - 6\xi^2 + 11\xi - 6) d\xi \right] U_0 - \\ & - \left[ \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) d\xi \right] R_3 + \left[ \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (\xi^3 - 4\xi^2 + 3\xi) d\xi \right] R_2 - \\ & - \left[ \int_0^3 W_j \frac{1}{2} (\xi^3 - 5\xi^2 + 6\xi) d\xi \right] R_1 + \left[ \int_0^3 W_j \frac{1}{6} (\xi^3 - 6\xi^2 + 11\xi - 6) d\xi \right] R_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Aquí, la función de peso  $w_j$  no ha sido definida todavía, pero podemos hacer una simplificación en (2.76), a fin de evitar la realización de tantas integraciones que involucran a  $w_j$ . Vamos a llamar

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\int_0^3 w_j \xi^3 d\xi}{\int_0^3 w_j d\xi} \\ \beta &= \frac{\int_0^3 w_j \xi^2 d\xi}{\int_0^3 w_j d\xi} \\ \gamma &= \frac{\int_0^3 w_j \xi d\xi}{\int_0^3 w_j d\xi}\end{aligned}\quad (2.77)$$

y entonces, dividiendo (2.76) para  $\int_0^3 w_j d\xi$ , queda:

$$\begin{aligned}& \left[ \frac{M}{h^2} (\gamma - 1) + \frac{C}{h} \left( \frac{1}{2} \beta - \gamma + \frac{1}{3} \right) + \kappa \left( \frac{1}{6} \alpha - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} \gamma \right) \right] U_3 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} (-3\gamma + 4) + \frac{C}{h} \left( -\frac{3}{2} \beta + 4\gamma - \frac{3}{2} \right) + \kappa \left( -\frac{1}{2} \alpha + 2\beta - \frac{3}{2} \gamma \right) \right] U_2 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} (3\gamma - 5) + \frac{C}{h} \left( \frac{3}{2} \beta - 5\gamma + 3 \right) + \kappa \left( \frac{1}{2} \alpha - \frac{5}{2} \beta + 3\gamma \right) \right] U_1 + \\ & + \left[ \frac{M}{h^2} (-\gamma + 2) + \frac{C}{h} \left( -\frac{1}{2} \beta + 2\gamma - \frac{11}{6} \right) + \kappa \left( -\frac{1}{6} \alpha + \beta - \frac{11}{6} \gamma + 1 \right) \right] U_0 - \\ & - \left( \frac{1}{6} \alpha - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{3} \gamma \right) R_3 + \left( \frac{1}{2} \alpha - 2\beta + \frac{3}{2} \gamma \right) R_2 - \\ & - \left( \frac{1}{2} \alpha - \frac{5}{2} \beta + 3\gamma \right) R_1 + \left( \frac{1}{6} \alpha - \beta + \frac{11}{6} \gamma - 1 \right) R_0 = 0, \quad (2.78)\end{aligned}$$

Con esto, ya no es necesario conocer explícitamente la función de peso  $W$ ; sino solamente  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ . Combinando diferentes valores de estos parámetros, se pueden generar una infinidad de esquemas de integración que nos permiten calcular el valor del vector  $U_3$ , si son conocidos  $U_0$ ,  $U_1$  y  $U_2$

Es fácil comprobar que con los valores  $\alpha=27, \beta=9$  y  $\gamma=3$  la ecuación (2.78) reproduce el esquema de integración de Houbolt, dado antes en (2.42). Se puede constatar también que -- las funciones de peso usadas para obtener este esquema provienen de una colocación en el punto  $\xi=3$ .

Con  $\alpha=2+4\theta+3\theta^2+\theta^3$ ,  $\beta=\frac{4}{3}+2\theta+\theta^2$  y  $\gamma=1+\theta$  (2.78) reproduce el esquema de integración de Wilson, aunque -- con una forma diferente a (2.54). Haciendo  $\theta=1$  en las fórmulas anteriores, esto es, con  $\alpha=10, \beta=\frac{13}{3}$  y  $\gamma=2$ , se reproduce el esquema de Newmark (con  $\delta_1=\frac{1}{2}, \delta_2=\frac{1}{6}$ ) aunque en una forma diferente a la de (2.64).

Hemos visto, pues, que la formulación por residuos pesados ha generado una familia muy amplia de esquema de integración, que contiene como casos particulares algunos de los ya conocidos. Dada la generalidad de la formulación, se pueden seguir explorando sus posibilidades y descubrir combinaciones eficientes de los parámetros, que proporcionen esquemas de buenas características.

### CAPITULO 3

UNA FAMILIA DE METODOS DE UN PASO  
PARA LA SOLUCION NUMERICA DE LA -  
ECUACION DINAMICA DE EQUILIBRIO

### 3.- UNA FAMILIA DE METODOS DE UN PASO PARA LA SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DINAMICA DE EQUILIBRIO.

#### 3.1.- MOTIVACION.

En el capítulo anterior estudiamos los principios básicos que se aplican para la resolución numérica de la ecuación dinámica de equilibrio y examinamos brevemente algunos de los métodos mas conocidos para este efecto. En el presente trabajo, queremos explorar las posibilidades de una familia de métodos, basados en una formulación diferente, cuyas ideas fundamentales se han tomado de las referencias (14) y (15).

Se ha visto que, para analizar la respuesta dinámica de una estructura, es deseable usar un método que permita una longitud de paso grande, pues con ello disminuye el número de etapas de cálculo y, por consiguiente, disminuye el costo del proceso; sin embargo, puesto que el error introducido en cada paso de integración, es proporcional a una cierta potencia de  $h$ , el uso de longitudes de paso grandes disminuye también la precisión en la respuesta final. Por estas razones, es aconsejable usar un método incondicionalmente estable y que introduzca errores lo mas pequeños que sea posible, especialmente al analizar fenómenos dinámicos en intervalos prolongados. La búsqueda de esquemas con mejores características justifica entonces, la exploración de nuevas rutas de formulación.

Casi nunca se pueden obtener ventajas en un sentido -- sin que resulten desventajas en otro y, en este caso, probablemente los esquemas propuestos pueden requerir de un cierto trabajo adicional de programación, pero si bien los algoritmos tienen esta desventaja poseen, en cambio, una gran flexibilidad -- pues se pueden usar diferentes variantes para las funciones de interpolación dentro del mismo esquema básico. La posibilidad-

de experimentar diferentes formas de interpolación mediante el cambio de unos pocos coeficientes hace posible, pues, adaptar - el método a las necesidades particulares de una gran variedad - de situaciones, permitiendo elegir para un caso dado, la óptima entre todas las opciones. Esto, tal vez, justifica el trabajo adicional de programación.

Como hemos visto, los métodos de más de un paso requieren de procedimientos especiales de arranque, hasta completar - la información suficiente que permita continuar adelante con el algoritmo normal de cálculo. La familia de métodos que estudiaremos es de un sólo paso, lo cual evita el uso de procedimientos especiales de iniciación, y también proporciona una pequeña simplificación en la programación.

El problema que estudiamos consiste, como hemos visto, en la resolución de un sistema de ecuaciones de 2° orden. Basándonos en la misma idea fundamental, podemos construir esquemas con dos orientaciones diferentes: los que resuelven la ecuación reduciéndola a un sistema de ecuaciones de primer orden, - y los que la resuelven directamente, como ecuación de segundo orden. Examinaremos las dos posibilidades.

En lo que sigue de la presente sección, explicaremos - la formulación del método, consideraremos las diferentes posibilidades para las funciones de interpolación y analizaremos las propiedades de estabilidad y precisión de las diferentes combinaciones.

### 3.2.- DEDUCCION DEL ALGORITMO BASICO.

#### 3.2.1. Método Directo para la Resolución de la Ecuación de 2°-Orden.

Partiremos de la ecuación de equilibrio dinámico para un sistema con  $n$  grados de libertad:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = R(t) \quad (3.1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son matrices constantes y  $\ddot{U}$ ,  $\dot{U}$ ,  $U$  y  $R$  son vectores de longitud  $n$  dependientes del tiempo. Vamos a integrar (3.1) sobre el intervalo  $[t_i, t]$  ; con lo que se obtiene:

$$M\dot{U}(t) - M\dot{U}(t_i) + CU(t) - CU(t_i) + K \int_{t_i}^t U(t) dt = \int_{t_i}^t R(t) dt \quad (3.2)$$

en particular, en el intervalo de integración  $[t_i, t_{i+1}]$  , (3.2) se transforma en:

$$M\dot{U}(t_{i+1}) - M\dot{U}(t_i) + CU(t_{i+1}) - CU(t_i) + K \int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t) dt \quad (3.3)$$

Integrando nuevamente (3.2) sobre un intervalo  $[t_i, t]$  :

$$\begin{aligned}
 MU(t) - MU(t_i) - M(t-t_i)\dot{U}(t_i) + c \int_{t_i}^t U(t) dt - C(t-t_i)U(t_i) + \\
 + K \int_{t_i}^t dt \int_{t_i}^t U(s) ds - \int_{t_i}^t dt \int_{t_i}^t R(s) ds = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

y si el intervalo de integración es  $[t_i, t_{i+1}]$ , (3.4) queda:

$$\begin{aligned}
 MU(t_{i+1}) - MU(t_i) + Mh\dot{U}(t_i) - C \int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt + ChU(t_i) - \\
 - K \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t U(s) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t R(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Vamos a definir las siguientes aproximaciones:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt \approx \alpha_1 U_i + \alpha_2 U_{i+1} + \alpha_3 \dot{U}_i + \alpha_4 \dot{U}_{i+1}. \tag{3.6}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t U(s) ds \approx \beta_1 U_i + \beta_2 U_{i+1} + \beta_3 \dot{U}_i + \beta_4 \dot{U}_{i+1}. \tag{3.7}$$

y para las cargas suponemos la misma forma de interpolación, -- con lo cual:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t) dt \approx \alpha_1 R_i + \alpha_2 R_{i+1} + \alpha_3 \dot{R}_i + \alpha_4 \dot{R}_{i+1} \tag{3.8}$$



y

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t \mathcal{R}(s) ds \approx \beta_1 R_i + \beta_2 R_{i+1} + \beta_3 \dot{R}_i + \beta_4 \dot{R}_{i+1} \quad (3.9)$$

Reemplazando estas expresiones en las ecuaciones (3.3) y (3.5) y reemplazando también los valores de  $U(t_i)$ ,  $U(t_{i+1})$ ,  $\dot{U}(t_i)$  y  $\dot{U}(t_{i+1})$  por sus aproximaciones  $U_i$ ,  $U_{i+1}$ ,  $\dot{U}_i$ ,  $\dot{U}_{i+1}$  se obtiene la siguiente expresión recurrente:

$$\begin{bmatrix} M + C\alpha_2 + K\beta_2 & C\alpha_4 + K\beta_4 \\ C + K\alpha_2 & M + K\alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i+1} \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - C\alpha_1 + Ch - K\beta_1 & Mh - C\alpha_3 - K\beta_3 \\ C - K\alpha_1 & M - K\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ \dot{U}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 I & \beta_4 I \\ \alpha_2 I & \alpha_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{i+1} \\ \dot{R}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 I & \beta_3 I \\ \alpha_1 I & \alpha_3 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ \dot{R}_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n$ . La ecuación (3.10) define un método de cálculo de un sólo paso para el problema -- que estudiamos. Por el momento, no están definidos con precisión los coeficientes  $\alpha_i, \beta_i = 0, 1, \dots, 4$ ; pero en la próxima sección hablaremos en detalle de su determinación. Existen muchas variantes posibles para las funciones de interpolación, y cada una de ellas proporciona diferentes valores para  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ; sin embargo, el algoritmo es básicamente el mismo; de ahí su flexibilidad.

3.2.2. Método basado en la reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Empezaremos considerando la misma ecuación de equilibrio dinámico, (3.1):

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = R(t). \quad (3.1)$$

Esta ecuación puede ser escrita como un sistema de primer orden, haciendo  $V = \dot{U}$ . En ese caso, se tiene:

$$\dot{U}(t) = V(t). \quad (3.11)$$

$$M\dot{V}(t) + CV(t) + KU(t) = R(t). \quad (3.12)$$

Integrando sobre el intervalo  $[t_i, t]$ .

$$U(t) - U(t_i) = \int_{t_i}^t V(t) dt. \quad (3.13)$$

$$MV(t) - MV(t_i) + C \int_{t_i}^t V(t) dt + K \int_{t_i}^t U(t) dt = \int_{t_i}^t R(t) dt. \quad (3.14)$$

En particular integrando sobre  $[t_i, t_{i+1}]$ , el sistema queda:

$$U(t_{i+1}) - U(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(t) dt. \quad (3.15)$$

$$MV(t_{i+1}) - MV(t_i) + C \int_{t_i}^{t_{i+1}} V(t) dt + K \int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t) dt. \quad (3.16)$$

Definimos las aproximaciones:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt \approx \alpha_1 U_i + \alpha_2 U_{i+1} + \alpha_3 \dot{U}_i + \alpha_4 \dot{U}_{i+1} \quad (3.17)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V(t) dt \approx \beta_1 V_i + \beta_2 V_{i+1} + \beta_3 \dot{V}_i + \beta_4 \dot{V}_{i+1} \quad (3.18)$$

y para el término de cargas usaremos una interpolación igual a la que se usó para los desplazamientos en (3.17):

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t) dt \approx \alpha_1 R_i + \alpha_2 R_{i+1} + \alpha_3 \dot{R}_i + \alpha_4 \dot{R}_{i+1} \quad (3.19)$$

Necesitamos reemplazar los valores de  $\dot{U}$  y  $\dot{V}$  de las ecuaciones (3.17) y (3.18) y podemos encontrar las equivalencias a partir de (3.11) y (3.12); se tiene:

$$\dot{U}(t) = V(t) \quad (3.20)$$

$$\dot{V}(t) = M^{-1} [R(t) - CV(t) - KU(t)] \quad (3.21)$$

reemplazando estos valores queda:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} U(t) dt \approx \alpha_1 U_i + \alpha_2 U_{i+1} + \alpha_3 V_i + \alpha_4 V_{i+1} \quad (3.22)$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} V(t) dt \approx \beta_1 V_i + \beta_2 V_{i+1} + \beta_3 M^{-1} [R_i - KU_i - CV_i] + \beta_4 M^{-1} [R_{i+1} - KU_{i+1} - CV_{i+1}] \quad (3.23)$$

Reemplazando los valores de (3.19), (3.22) y (3.23) en las ecuaciones (3.15) y (3.16) y usando las aproximaciones  $U_i$ ,  $U_{i+1}$ ,  $V_i$ ,  $V_{i+1}$ , en lugar de los valores exactos  $U(t_i)$ ,  $U(t_{i+1})$ ,  $V(t_i)$ ,  $V(t_{i+1})$ ; se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} M + \beta_4 K & -\beta_2 M + \beta_4 C \\ -\beta_4 C M^{-1} K + \alpha_2 K & M + \beta_2 C - \beta_4 C M^{-1} C + \alpha_4 K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i+1} \\ V_{i+1} \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} M - \beta_3 K & \beta_1 M - \beta_3 C \\ \beta_3 C M^{-1} K - \alpha_1 K & M - \beta_1 C + \beta_3 C M^{-1} C - \alpha_3 K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \beta_4 I & 0 \\ -\beta_4 C M^{-1} + \alpha_2 I & \alpha_4 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{i+1} \\ \dot{R}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_3 I & 0 \\ -\beta_3 C M^{-1} + \alpha_1 I & \alpha_3 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ \dot{R}_i \end{bmatrix} \\
 & \qquad \qquad \qquad (3.24).
 \end{aligned}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n$ ...

La ecuación (3.24) define un método de un paso para resolver (3.1) donde los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  dependen del método de interpolación empleado. Hay que observar que algunos de los términos contienen el factor  $M^{-1}$  que, en general, es una matriz llena, pues proviene de la inversión de la matriz de masa. Sin embargo, hay formas de eludir este inconveniente, como veremos mas adelante.

(Observemos por lo pronto, que si  $C=0$ , se anulan todos los términos que contienen  $M^{-1}$ , en cuyo caso ya no es necesario calcular esta inversa).

Tanto en (3.10) como en (3.24), se han establecido esquemas de integración de un sólo paso para resolver la ecuación

dinámica de equilibrio. En ambos casos podemos expresar el esquema como

$$A_i \tilde{U}_{i+1} = A_o \tilde{U}_i + L_i \tilde{R}_{i+1} + L_o \tilde{R}_i \quad (3.25)$$

donde las equivalencias se establecen comparando (3.25) con -- (3.10) y (3.24), respectivamente. Las matrices  $A_i, A_o, L_i$  y  $L_o$  han dejado de ser simétricas y han perdido la estructura en banda, aunque mantienen todavía su condición de tener muchos -- elementos diferentes de cero. Cuando hablemos, en el próximo ca pítulo, de la implementación del método veremos la forma de mo dificar las matrices, para facilitar la solución numérica.

Como hemos visto, los métodos descritos pueden ser muy- flexibles debido a las diferentes posibilidades que existen pa- ra establecer las funciones de interpolación, mediante las cua- les se pueden calcular las aproximaciones definidas en (3.6) y- (3.7) para el método directo de 2°orden y en (3.17) y (3.18) pa- ra el método de reducción a sistema de 1er, orden. La siguien- te sección está dedicada a estudiar las opciones de interpola-- ción y a determinar el procedimiento para calcular los coefi- cientes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , que dependen de estas funciones.

## 3.3.- OPCIONES PARA LAS FUNCIONES DE INTERPOLACION

En la sección anterior, en las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.17) y (3.18) dejamos definida la forma general de ciertas expresiones aproximadas que intervienen en el cálculo de los desplazamientos y velocidades en los procesos de integración descritos en (3.10) y (3.24). Para encontrar los valores de estas expresiones, es necesario tener una función aproximada que represente la ley de variación de los desplazamientos en un intervalo dado. Precisemos mejor los conceptos:

Dado un intervalo  $J \equiv [t_i, t_{i+h}]$ , queremos conocer la ley de variación de los desplazamientos,  $U(t)$ ,  $t \in J$ . Bajo ciertas condiciones se puede hallar una función  $U^*(t)$ ,  $t \in J$  que se aproxime a  $U(t)$  si se conocen algunos de los valores aproximados  $U_i \approx U(t_i)$ ,  $U_{i+h} \approx U(t_{i+h})$ ,  $\dot{U}_i \approx \dot{U}(t_i)$ ,  $\dot{U}_{i+h} \approx \dot{U}(t_{i+h})$ ;  $U^*(t)$  será una función de interpolación cuyo valor, o el de su 1ª derivada, sea igual, en los puntos correspondientes, a los valores que sean conocidos de entre  $U_i$ ,  $U_{i+h}$ ,  $\dot{U}_i$  o  $\dot{U}_{i+h}$ .

Por otra parte queremos evaluar las expresiones de (3.6); (3.7), (3.17) y (3.18) que son de la forma:

$$\bar{x} = \gamma_1 U_i + \gamma_2 U_{i+h} + \gamma_3 \dot{U}_i + \gamma_4 \dot{U}_{i+h} \quad (3.26)$$

cuyos parámetros  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , quedan determinados de acuerdo a la forma de interpolación y a los valores conocidos de la función  $U^*(t)$  y su 1ª derivada en los instantes  $t_i$  y  $t_{i+h}$ . Según puede verse, en (3.6), (3.17) y (3.18),  $\bar{x} = \int_{t_i}^{t_{i+h}} U(t) dt$  y en (3.7),  $\bar{x} = \int_{t_i}^{t_{i+h}} dt \int_{t_i}^t U(s) ds$ .

Para que sea posible el cálculo de  $\bar{x}$ , es necesario su

poner que la función interpolante  $U^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i+h]$  es de una forma preestablecida, digamos polinomial o una combinación de funciones armónicas, o exponenciales u otras. El proceso de cálculo de  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ , en realidad comprende dos partes: la determinación de la función interpolante  $U^*(t)$  y el cálculo de la integral correspondiente y los coeficientes  $Y_i$ . Ambas etapas pueden realizarse de manera sistemática mediante el método generalizado de interpolación de Hermite, el mismo que pasamos a explicar a continuación.

### 3.3.1.- Método Generalizado de Interpolación de Hermite.

Sean  $k$ ,  $\ell$  y  $m$ , números enteros positivos.

Definimos una matriz  $E = (e_{ij})$ ,  $i=0, 1, \dots, \ell$ ;  $j=0, 1, \dots, m$  donde los elementos  $e_{ij}$  pueden tomar los valores 0 ó 1 únicamente, y se cumple que  $\sum_j e_{ij} = k$ ; la matriz  $E$  recibe el nombre de matriz de incidencia.

Sea  $F$  un espacio dado de funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con una base  $\{f_i(t) = i=0, 1, \dots, k-1\}$ . Supondremos también que  $F$  cumple con la condición de invarianza a la traslación, que significa que para cada función  $f \in F$  sobre un dominio  $[t_0, t_0+\tau]$  y para cada  $y$  real existe otra función  $g \in F$  sobre un dominio  $[t_0+y, t_0+\tau+y]$  tal que  $f(t) = g(t+y)$  para toda  $t \in [t_0, t_0+\tau]$  y viceversa. (Debe notarse que las funciones polinomiales, trigonométricas y exponenciales, satisfacen la condición de invarianza a la traslación).

La matriz de incidencia  $E$  y el espacio de funciones  $F$  definen un problema de interpolación de Hermite. Se trata de encontrar una función  $f \in F$  tal que, sobre un intervalo  $[t_0, t_0+\tau]$ , en el que se ha definido un conjunto de valores discretizados  $\{t_i = t_0 + ih / i=0, 1, \dots, \ell; \ell h = \tau\}$ , se cumpla:

$$f^{(j)}(t_i) = S^{(j)}(t_i) \quad (3.27)$$

para todo  $(i, j)$  tal que  $e_{ij} = 1$ . Aquí el superíndice  $(j)$  indica derivada de orden  $j$ .

Los valores  $S^{(j)}(t_i)$  son conocidos y la matriz de incidencia  $E$  contiene la información de los índices  $i$  y  $j$  correspondientes a los datos de que se dispone.

En algunos casos, el problema de interpolación que hemos descrito no tiene solución única; sin embargo, esto no ocurre cuando el espacio de funciones  $F$  es del tipo exponencial o polinomial y si la matriz  $E$  es de tal naturaleza que exista por lo menos un valor  $e_{ij} \neq 0$ , en la primera columna y si siempre --  $e_{ij} \leq e_{i, j+1}$ . Esto también es cierto para un espacio de funciones trigonométricas tal como  $F \equiv \{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  siempre que la longitud del intervalo,  $T$ , sea menor que  $\pi/\omega$ . (Una justificación de estas afirmaciones se puede encontrar en las referencias [20], sección 2.2.a y, más ampliamente, en [21], cap. 9).

Debido a la invarianza a la traslación, las funciones  $f \in F$  tienen una representación

$$f(t_i) = f(t_0 + ih) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j f_j(ih) \quad (3.28)$$

por lo cual, las condiciones (3.27) permiten escribir

$$HC = S \quad (3.29)$$



donde  $C = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$  es un vector de coeficientes;  $H$  es una matriz de orden  $k \times k$ , cuyas filas son  $(f_0^{(j)}(th), f_1^{(j)}(th), \dots, f_{k-1}^{(j)}(th))$  para todo  $(i, j)$  tales que  $E_{ij} = 1$  y  $S$  es un vector con los valores conocidos  $S^{(j)}(t_i)$  con  $(i, j)$  tales que  $E_{ij} = 1$ . (Hay que cuidar que la fila  $n$ -ésima de  $H$  y el  $n$ -ésimo elemento de  $S$ , correspondan a un mismo par  $(i, j)$ ).

$$\text{Puesto que } C = H^{-1}S \quad (3.30)$$

$$\text{entonces } f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j f_j(t-t_0) = \alpha^T H^{-1}S \quad (3.31)$$

$$\text{donde } \alpha = (f_0(t-t_0), f_1(t-t_0), \dots, f_{k-1}(t-t_0))^T.$$

La función  $f(t)$  es una función interpolante válida para el subintervalo  $[t_0, t_0 + th]$  cuyos parámetros se determinan de forma que se cumplan las condiciones expresadas en (3.27), de tal manera que se pueda encontrar el valor aproximado de una función  $S(t)$  en un punto  $t \in [t_0, t_0 + th]$ , conocidos los valores de  $S$  o sus derivadas en algunos puntos  $t_i = t_0 + ih$ .

Hasta aquí, hemos explicado el mecanismo del método generalizado de interpolación de Hermite (explicación tomada de la referencia [16]; a continuación con la base de este método, analizaremos las diferentes opciones de interpolación y estudiaremos el procedimiento de evaluación de los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  para cada una de estas opciones.

3.3.2.- Determinación de parámetros para las diferentes opciones de las funciones de interpolación.

Dejamos establecida en (3.26) la forma general de las expresiones integrales que intervienen en los algoritmos (3.10) y (3.24); estudiaremos ahora los criterios que se pueden seguir para determinar estas expresiones.

Los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, 4$  que aparecen en las expresiones (3.6), (3.7), (3.17) y (3.18) dependen de la forma -- particular que se haya asumido para la función de interpolación  $U^*(t)$ ; si es conocida esta función, se pueden evaluar estos parámetros y, por consiguiente, quedan calculadas las integrales. -- Por esta razón, vamos a abordar primero la cuestión de la construcción de la función interpolante  $U^*(t)$ .

Hemos visto que un problema de interpolación por el mé todo generalizado de Hermite queda definido mediante la matriz de incidencia  $E$  y el espacio de funciones  $F$ , generado por una -- base  $\{f_i(t), i=0, 1, \dots, k-1\}$

El caso mas común es el de interpolación polinomial, -- en el cual  $\{f_i(t)\} \equiv \{1, t, t^2, \dots, t^{k-1}\}$ ; se puede también usar una base que incluya funciones trigonométricas o exponenciales, pero, por ahora, nos limitaremos al estudio de la interpolación polinomial, y pospondremos la consideración de los otros casos.

Nuestra función aproximante  $U^*(t)$ ,  $t \in [t_i, t_i+h]$  será, en -- este caso, un polinomio  $Y_{pq}(t)$ , de grado  $p+q-1$  que queda determinado por su valor y sus derivadas sucesivas hasta de orden  $p-1$  en  $t=t_i$  y por su valor y sus derivadas sucesivas hasta de -- orden  $q-1$  en  $t=t_i+h$ , ( $p, q > 0$ ). Dada la forma de la expresión (3.26),  $p$  y  $q$  no pueden exceder de 2, por lo que el grado de --  $U^*(t)$  no puede exceder de 3.

Así, pues, podemos calcular polinomios aproximantes --  $Y_{11}(t)$ ,  $Y_{12}(t)$ ,  $Y_{21}(t)$  y  $Y_{22}(t)$  si disponemos de los valores de  $U$  o  $\dot{U}$  en los lugares adecuados. El método generalizado de Hermite permite resolver el problema de manera directa, como se -- puede ver en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 3.1

Determinar la ecuación de un polinomio de interpolación en el intervalo  $[t_i, t_i+h]$ , siendo conocidos los valores  $U_i, U_{i+1}$  y  $\dot{U}_{i+1}$

Se trata de una interpolación  $\chi_{12}$  (el polinomio es de 2° grado).

La matriz de incidencia es: 
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

(Siendo conocidos  $U^{*(0)}(t_i+0h)$ ,  $U^{*(1)}(t_i+h)$  y  $U^{*(2)}(t_i+h)$  deberán ser iguales a 1 los elementos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ , y  $(1,1)$ )

Puesto que  $k_i = \sum_{ij} e_{ij} = 3$  (b)

requerimos una base de tres funciones que, para interpolación polinómica, es:

$$f_i(t) \equiv [1, t, t^2] \quad (c)$$

Es conocido  $S = [U_i \ U_{i+1} \ \dot{U}_{i+1}]^T$  (d)

y a partir de (a) y (c), determinamos

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h & h^2 \\ 0 & 1 & 2h \end{bmatrix} \quad (e)$$

La inversa  $H^{-1}$  es:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/h & 2/h & -1 \\ 1/h^2 & -1/h^2 & 1/h \end{bmatrix} \quad (f)$$

y  $d = [1 \quad t-t_i \quad (t-t_i)^2]^T$

(g)

por lo cual

$$\begin{aligned}
 Y_{12}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t-t_i & (t-t_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/h & 2/h & -1 \\ 1/h^2 & -1/h^2 & 1/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_{i+1} \\ \dot{U}_{i+1} \end{bmatrix} \\
 &= \left[ 1 - \frac{2(t-t_i)}{h} + \frac{(t-t_i)^2}{h^2} \right] U_i + \left[ \frac{2(t-t_i)}{h} - \frac{(t-t_i)^2}{h^2} \right] U_{i+1} + \left[ -(t-t_i) + \frac{(t-t_i)^2}{h} \right] \dot{U}_{i+1}
 \end{aligned} \quad (h)$$

Como se puede ver en el ejemplo (3.1), el método generalizado de Hermite permite calcular fácilmente la función de interpolación  $U^*(t)$ ; sin embargo, lo que realmente nos interesa evaluar son los valores definidos en las ecuaciones (3.6), (3.7), (3.17) y (3.18), cosa que puede hacerse con el mismo método, como ilustraremos en el ejemplo siguiente:

### EJEMPLO 3.2.

Evaluar la expresión (3.7), conocidos los valores  $U_i$ ,  $U_{i+1}$ ,  $\dot{U}_{i+1}$ .

Se trata de determinar el valor de  $Z = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t U(s) ds$  mediante la aproximación  $Z \approx \beta_1 U_i + \beta_2 U_{i+1} + \beta_3 \dot{U}_{i+1}$

Se supone, desde luego, que  $\beta_3 = 0$

Nótese que si llamamos  $Z(t) = \int_{t_i}^t dt \int_{t_i}^t U(s) ds$ ,

entonces  $\dot{Z}(t) = \int_{t_i}^t U(s) ds$ ;  $\ddot{Z}(t) = U(t)$  y  $\dddot{Z}(t) = \dot{U}(t)$

y podemos realizar la interpolación, aproximando  $U(t_i) \approx U_i$ ,  $U(t_{i+1}) \approx U_{i+1}$  y  $\dot{U}(t_{i+1}) = \dot{U}_{i+1}$ , y suponiendo también conocidos -

los valores  $z(t_i) = 0$  y  $\dot{z}(t_i) = 0$

La matriz de incidencia es

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (a)$$

y como  $k=5$ , tomamos las siguientes funciones bases:

$$f_i(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3 \quad t^4] \quad (b)$$

El vector  $S$  es:

$$-S = [0 \quad 0 \quad U_i \quad U_{i+1} \quad \dot{U}_{i+1}]^T \quad (c)$$

y la matriz  $H$ , calculada de acuerdo a (a) y (c) es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6h & 12h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24h \end{bmatrix} \quad (d)$$

y su inversa  $H^{-1}$

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3h & 1/3h & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/12h^2 & -1/12h^2 & 1/12h \end{bmatrix} \quad (e)$$

Tenemos que calcular  $Z(t_{i+1}) - Z(t_i, h)$  ; para ello, -  
el vector  $d$  será:

$$d = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & t_{i+1} - t_i & (t_{i+1} - t_i)^2 & (t_{i+1} - t_i)^3 & (t_{i+1} - t_i)^4 \end{array} \right]^T \quad (f)$$

$$d = \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & h & h^2 & h^3 & h^4 \end{array} \right]^T$$

con lo cual

$$Z(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t U(s) ds \approx d^T H^{-1} s = \frac{h^2}{4} U_i + \frac{h^2}{4} U_{i+1} - \frac{h^3}{12} \dot{U}_{i+1} \quad (g)$$

y entonces  $\beta_1 = \frac{h^2}{4}$  ;  $\beta_2 = \frac{h^2}{4}$  ;  $\beta_3 = 0$  y  $\beta_4 = -\frac{h^3}{12}$  (h)

Obsérvese que  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_4$  se determinan realizando el producto del vector  $d$ , por la tercera, cuarta y quinta columna de  $H$ , respectivamente.

Como se ve, siguiendo este procedimiento, se pueden -- calcular los parámetros  $\gamma_i$  de la ecuación (3.26), en forma más o menos sencilla y sistemática; naturalmente, el método es especialmente adecuado para calcular los coeficientes con ayuda del computador.

En realidad, estos coeficientes se pueden calcular analíticamente, aunque el proceso es algo laborioso; también pueden usarse otros métodos numéricos diferentes del que hemos explicado aquí. De todas maneras cualquiera que sea la forma de cálculo, una vez conocidos los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , se pueden aplicar de inmediato los métodos descritos en (3.10)- y (3.24).

Cuando se usa el método basado en la reducción a un sistema de primer orden, las interpolaciones usadas para  $U$  y para  $V$  no tienen que ser necesariamente iguales; ni siquiera hace falta que tengan ninguna relación entre ellas, de modo que, por ejemplo, podría aproximarse  $U$  con un polinomio  $Y_{11}$  y  $V$  con un polinomio  $Y_{22}$  o cualquier otra combinación. (Veremos después, al analizar la estabilidad, que algunas de estas combinaciones no son aconsejables).

Hasta aquí, hemos considerado solamente la interpolación polinomial; sin embargo, con el mismo procedimiento, se puede calcular una función de interpolación de tipo trigonométrico o exponencial; simplemente, las bases  $f_i$  cambian de forma. Para interpolación con funciones trigonométricas se puede usar una base como

$$f_i(t) \equiv [1 \quad t \quad \sin \theta t \quad \cos \theta t] \quad (3.32)$$

(Si se requieren menos funciones, se prescinde de  $t^2$ ,  $t$  o  $1$ , en ese orden)

En la base definida en (3.32), se pueden, además, incluir parámetros libres, para mejorar la interpolación. Es típica la base

$$f_i(t) \equiv [1 \quad t \quad t^2 \quad \sin t \quad \cos t] \quad (3.34)$$

cuyas características analizaremos con más detalle en la sección 3.4.

Cuando se usa el método basado en la reducción a un sistema de primer orden, las interpolaciones usadas para  $U$  y para  $V$  no tienen que ser necesariamente iguales; ni siquiera hace falta que tengan ninguna relación entre ellas, de modo que, por ejemplo, podría aproximarse  $U$  con un polinomio  $Y_{11}$  y  $V$  con un polinomio  $Y_{22}$  o cualquier otra combinación. (Veremos después, al analizar la estabilidad, que algunas de estas combinaciones no son aconsejables).

Hasta aquí, hemos considerado solamente la interpolación polinomial; sin embargo, con el mismo procedimiento, se puede calcular una función de interpolación de tipo trigonométrico o exponencial; simplemente, las bases  $f_i$  cambian de forma. Para interpolación con funciones trigonométricas se puede usar una base como

$$f_i(t) \equiv [1 \quad t \quad \sin \theta t \quad \cos \theta t] \quad (3.32)$$

(Si se requieren menos funciones, se prescinde de  $t^2$ ,  $t$  o  $1$ , en ese orden)

En la base definida en (3.32), se pueden, además, incluir parámetros libres, para mejorar la interpolación. Es típica la base

$$f_i(t) \equiv [1 \quad t \quad t^2 \quad \sin t \quad \cos t] \quad (3.34)$$

cuyas características analizaremos con más detalle en la sección 3.4.



La aproximación por funciones polinomiales es, por sencillez, la más usada, por lo que siempre es interesante considerarla; por otra parte, la naturaleza oscilatoria del fenómeno que estudiamos, hace especialmente apropiada la interpolación por funciones trigonométricas. Por esta razón, centraremos nuestra atención en estas dos opciones.

Aunque es perfectamente posible usar los métodos que hemos descrito para establecer funciones de interpolación con una base de funciones exponenciales, no consideraremos esta variante en el presente trabajo.

### 3.3.3. Algunas fórmulas para los coeficientes de interpolación.

En las ecuaciones (3.10) y (3.24) quedaron establecidas las fórmulas generales que describen la familia de métodos que estudiamos. En éstas, intervienen los parámetros  $\alpha_i, \beta_i, i=1, \dots, 4$ , cuya determinación hemos explicado en la sección anterior, haciendo uso del método generalizado de Hermite. Usando este procedimiento, se pueden calcular numéricamente estos coeficientes de interpolación.

Sin embargo, el lector puede encontrar útil disponer de fórmulas deducidas analíticamente que permitan calcular tales coeficientes para algunos casos comunes. Para este fin, incluimos la tabla 3.1 que resume algunos resultados:

TABLA 3.1

## FORMULAS PARA CALCULAR LOS VALORES

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt \approx a_{11} x_i + a_{12} x_{i+1} + a_{13} \dot{x}_i + a_{14} \dot{x}_{i+1}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t x(s) ds \approx a_{21} x_i + a_{22} x_{i+1} + a_{23} \dot{x}_i + a_{24} \dot{x}_{i+1}$$

## a) INTERPOLACION POLINOMIAL.

TIPO DE INTERPOLACION		j =			
		1	2	3	4
y <sub>11</sub>	a <sub>1j</sub>	h/2	h/2	0	0
	a <sub>2j</sub>	h <sup>2</sup> /3	h <sup>2</sup> /6	0	0
y <sub>12</sub>	a <sub>1j</sub>	h/3	2h/3	0	-h <sup>2</sup> /6
	a <sub>2j</sub>	h <sup>2</sup> /4	h <sup>2</sup> /4	0	-h <sup>3</sup> /12
y <sub>21</sub>	a <sub>1j</sub>	2h/3	h/3	h <sup>2</sup> /6	0
	a <sub>2j</sub>	5h <sup>2</sup> /12	h <sup>2</sup> /12	h <sup>3</sup> /12	0
y <sub>22</sub>	a <sub>1j</sub>	h/2	h/2	h <sup>2</sup> /12	-h <sup>2</sup> /12
	a <sub>2j</sub>	7h <sup>2</sup> /20	3h <sup>2</sup> /20	h <sup>3</sup> /20	-h <sup>3</sup> /20

TABLA 3.1.- (CONTINUACION).

FORMULAS PARA CALCULAR LOS VALORES  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, 4$ .

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} X(t) dt \approx a_{11} X_i + a_{12} X_{i+1} + a_{13} \dot{X}_i + a_{14} \dot{X}_{i+1}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt \int_{t_i}^t X(s) ds \approx a_{21} X_i + a_{22} X_{i+1} + a_{23} \dot{X}_i + a_{24} \dot{X}_{i+1}$$

b) INTERPOLACION TRIGONOMETRICA.

TIPO DE INTERPOLACION		j =			
		1	2	3	4
1,1	$a_{1j}$	$\frac{1 - \cos \theta h}{\theta \sin \theta h}$	$\frac{1 - \cos \theta h}{\theta \sin \theta h}$	0	0
	$a_{2j}$	$\frac{\tan \theta h - \theta h}{\theta^2 \cos \theta h}$	$-\frac{\sin \theta h - \theta h}{\theta^2 \sin \theta h}$	0	0
1,2	$a_{1j}$	$\frac{\sin \theta h - \theta h}{\theta (\cos \theta h - 1)}$	$\frac{\theta h \cos \theta h - \sin \theta h}{\theta (\cos \theta h - 1)}$	0	$-\frac{h \sin \theta h}{\theta (\cos \theta h - 1)} - \frac{2}{\theta^2}$
	$a_{2j}$	$\frac{\frac{1}{\theta^2} + h(2 \sin \theta h - \theta h)}{2\theta (\cos \theta h - 1)}$	$-\frac{\frac{1}{\theta^2} - h(2 \sin \theta h - \theta h \cos \theta h)}{2\theta (\cos \theta h - 1)}$	0	$-\frac{h^2 \sin \theta h}{2\theta (\cos \theta h - 1)} - \frac{h}{\theta^2}$
2,1 (*)	$a_{1j}$	$\frac{1}{D_1} (\theta h \cos \theta h - \sin \theta h)$	$\frac{1}{D_1} (\sin \theta h - \theta h)$	$\frac{h \sin \theta h}{D_1} + \frac{2}{\theta^2}$	0
	$a_{2j}$	$\frac{\theta h^2 \cos \theta h}{2D_1} + \frac{1}{\theta^2}$	$-\frac{\theta h^2}{2D_1} - \frac{1}{\theta^2}$	$\frac{h^2 \sin \theta h}{2D_1} + \frac{h}{\theta^2}$	0
2,2 (**)	$a_{1j}$	$h/2$	$h/2$	$\frac{1}{\theta^2} + \frac{2h \sin \theta h - h^2 \theta (1 + \cos \theta h)}{2D_2}$	$-\frac{1}{\theta^2} - \frac{2h \sin \theta h - h^2 \theta (1 + \cos \theta h)}{2D_2}$
	$a_{2j}$	$\frac{h^2}{4} + \frac{1}{\theta^2} + \frac{\theta^2 h^2 \sin \theta h}{12 D_2}$	$\frac{h^2}{4} - \frac{1}{\theta^2} - \frac{\theta^2 h^2 \sin \theta h}{12 D_2}$	$\frac{1}{D_2} \left[ -\frac{h^2 \theta}{6} (1 + 2 \cos \theta h) + \frac{3h^2}{2} \sin \theta h - \frac{2\theta}{h} (1 - \cos \theta h) \right]$	$\frac{1}{D_2} \left[ \frac{h^2 \theta}{6} (2 + \cos \theta h) - \frac{h^2}{2} \sin \theta h \right]$

(\*)  $D_1 = \theta (\cos \theta h - 1)$

(\*\*)  $D_2 = -\theta (2 - 2 \cos \theta h - \theta h \sin \theta h)$

### 3.4. ANALISIS TEORICO DE ESTABILIDAD Y PRECISION.

#### 3.4.1. Planteamiento General.

En las secciones 2.3 y 2.4 dejamos establecidos los procedimientos que se utilizan, en general, para examinar las características de estabilidad y precisión de los métodos de integración directa. En la presente sección, aplicaremos estas técnicas a la familia de métodos materia del presente trabajo.

La ecuación 2.6 resume la investigación que queremos realizar:

$$\widehat{\Delta X_{i+l}} = A^l \widehat{\Delta X_i} \quad (2.6)$$

donde  $\widehat{\Delta X_i}$  es una perturbación de la solución, que aparece en la etapa  $i$  del cálculo y  $\widehat{\Delta X_{i+l}}$  es la propagación de esta perturbación,  $l$  etapas después. Aquí, los valores propios de la matriz  $A$  juegan un papel decisivo; en efecto, (2.8) resume la condición fundamental de estabilidad:

$$\rho(A) < 1 \quad (2.8)$$

Nosotros restringiremos nuestro análisis a una ecuación escalar desacoplada, partiendo de que, por descomposición modal, cualquier sistema puede ponerse en esa forma; además, se puede prescindir, para este estudio de la posible influencia de amortiguamiento y cargas externas que, como ya hemos visto, son solo factores modificatorios del movimiento oscilatorio básico; en resumen, nuestro estudio se basará en el análisis de una ecuación de la forma (1.33), con los valores de  $m=1$  y  $k=\omega^2$ . Tenemos, pues:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (3.35)$$

Los métodos descritos por las ecuaciones (3.10) y (3.24) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$H_1 \hat{u}_{i+1} = H_0 \hat{u}_i \quad (3.36)$$

donde  $H_1$  y  $H_0$  son matrices de orden  $2 \times 2$  cuyos valores vienen dados en las mismas ecuaciones (3.10) y (3.24) y los vectores  $\hat{u}_{i+1}$  y  $\hat{u}_i$  contienen valores de los desplazamientos y sus derivadas en los instantes que denotan los subíndices.

Las "matrices" de masa, rigidez y amortiguamiento que intervienen en el cálculo de  $H_1$  y  $H_0$ , en este caso, son los valores escalares  $M=1$ ;  $K=\omega^2$  y  $C=0$ .

Premultiplicando ambos miembros de (3.36) por  $H_1^{-1}$  se puede poner esta ecuación en una forma similar a la de (2.6) con  $A = H_1^{-1} H_0$ . Debemos estudiar los valores propios de esta matriz para nuestro análisis de estabilidad, pero esto puede hacerse de manera más directa, resolviendo:

$$\det (H_0 - \lambda H_1) = 0 \quad (3.37)$$

Evidentemente, la condición de estabilidad, es, como quedó establecido en (2.23)

$$|\lambda_M| \leq 1 \quad (3.38)$$

donde  $\lambda_M$  es el mayor de los valores propios que son solución de (3.37).

A continuación, vamos a determinar la forma que ad-

quiere la ecuación (3.37) para los dos enfoques fundamentales que hemos establecido, esto es, para el método directo, que trata el problema como ecuación de 2o. orden y para el método que lo resuelve reduciéndolo a un sistema de 1er. orden:

a) Para el método directo.

Haciendo  $M=1$ ,  $K=\omega^2$ ,  $C=0$  y con todos los términos de carga iguales a cero, la ecuación (3.10), queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 + \omega^2 \beta_2 & \omega^2 \beta_4 \\ \omega^2 \alpha_2 & 1 + \omega^2 \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ \dot{U}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \beta_1 & h - \omega^2 \beta_3 \\ -\omega^2 \alpha_1 & 1 - \omega^2 \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ \dot{U}_i \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

y reemplazando los valores correspondientes en (3.27), se obtiene:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 \beta_1 - \chi(1 + \omega^2 \beta_2) & h - \omega^2 \beta_3 - \chi(\omega^2 \beta_4) \\ -\omega^2 \alpha_1 - \chi(\omega^2 \alpha_2) & 1 - \omega^2 \alpha_3 - \chi(1 + \omega^2 \alpha_4) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.40)$$

lo cual genera una ecuación de 2o. grado en  $\chi$  que se puede resolver para valores dados de  $\omega$ ,  $h$  y de los parámetros de interpolación  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i=1, \dots, 4$ . Si suponemos conocidos estos valores, se puede poner el radio espectral  $\chi$  en función del producto  $\omega h$ , como se puede comprobar, haciendo uso de las fórmulas de la tabla (3.1).

b) Para el método de reducción a sistema de 1er. orden.

Bajo las mismas condiciones impuestas en el literal a), se obtiene la siguiente expresión, a partir de (3.24):

$$\begin{pmatrix} 1 + \beta_4 \omega^2 & -\beta_2 \\ \alpha_2 \omega^2 & 1 + \alpha_4 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \beta_3 \omega^2 & \beta_1 \\ -\alpha_1 \omega^2 & 1 - \alpha_3 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i \\ V_i \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

con lo cual, (3.37) adquiere la siguiente forma:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \beta_3 \omega^2 - \chi(1 + \beta_4 \omega^2) & \beta_1 + \chi \beta_2 \\ -\alpha_1 \omega^2 - \chi(\alpha_2 \omega^2) & 1 - \alpha_3 \omega^2 - \chi(1 + \alpha_4 \omega^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

Reemplazando los valores de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . (que se pueden determinar con ayuda de la tabla 3.1), en la ecuación anterior, se obtiene una expresión de 2o. grado en  $\chi$ , que nos va a permitir calcular el radio espectral  $\chi_M$  en función del producto  $\omega h$ .

Las expresiones (3.40) y (3.24), sirven también, para establecer los valores esperados del decaimiento de amplitud en función de  $\omega h$ .

Por último, según lo explicado en 2.4.2. las ecuaciones (2.24) y (2.25) permiten calcular los valores de la elonga

ción del período. Estas fórmulas pueden aplicarse directamente al caso que estudiamos, pero es importante recordar que este cálculo sólo tiene sentido cuando las raíces  $\chi$  de (3.41) y - (3.43) tienen una parte imaginaria diferente de cero, pues de otro modo, la ecuación (2.25), implicaría una división por cero (elongación de período infinita). Desde el punto de vista del análisis del error de periodicidad, estamos interesados, - pues, solamente en aquellos rangos de valores de  $\omega h$  que produzcan raíces  $\chi$  con parte imaginaria. Si un esquema de integración produce valores reales de  $\chi$  en un cierto rango de valores  $\omega h$ , debemos esperar una mala aproximación de los modos de vibración que caigan dentro de una mala aproximación de los modos de vibración que caigan dentro de ese rango.

### 3.4.2. Implementación.

El análisis teórico de estabilidad y precisión de la familia de métodos de que trata este trabajo se realizó mediante un programa de computador. Este programa, tiene por objeto calcular los valores numéricos del radio espectral y el error de periodicidad, según lo explicado en la sección anterior, para los diferentes métodos que se pueden generar; estos valores se utilizaron para producir una salida gráfica. Los gráficos obtenidos se incluyen como parte del presente trabajo.

En las figuras presentadas, los números junto a las curvas indican el tipo de interpolación usado; así, un esquema 1-2 significa una función interpolante para el intervalo  $(t_i, t_{i+1})$  ajustada al valor de la función en el extremo  $t_i$  y, al valor de la función y su primera derivada en  $t_{i+1}$ .

En las curvas que representan el radio espectral, se ha interrumpido la grafica cuando los valores de la función exceden de 1:2 o cuando la abscisa  $\omega h$  excede de 100. Hemos hecho notar la bifurcación que ocurren en los módulos de las raíces-



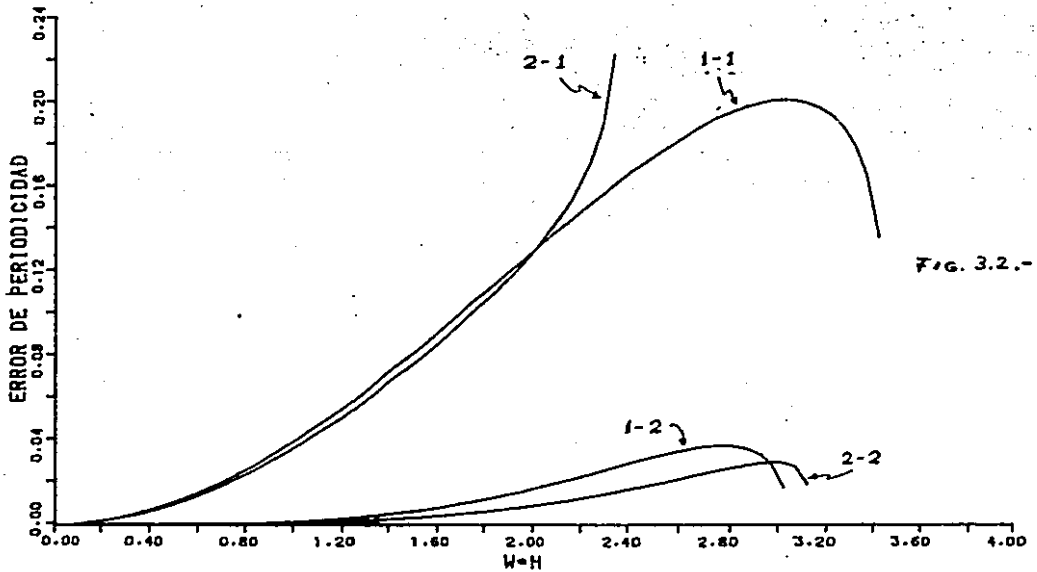
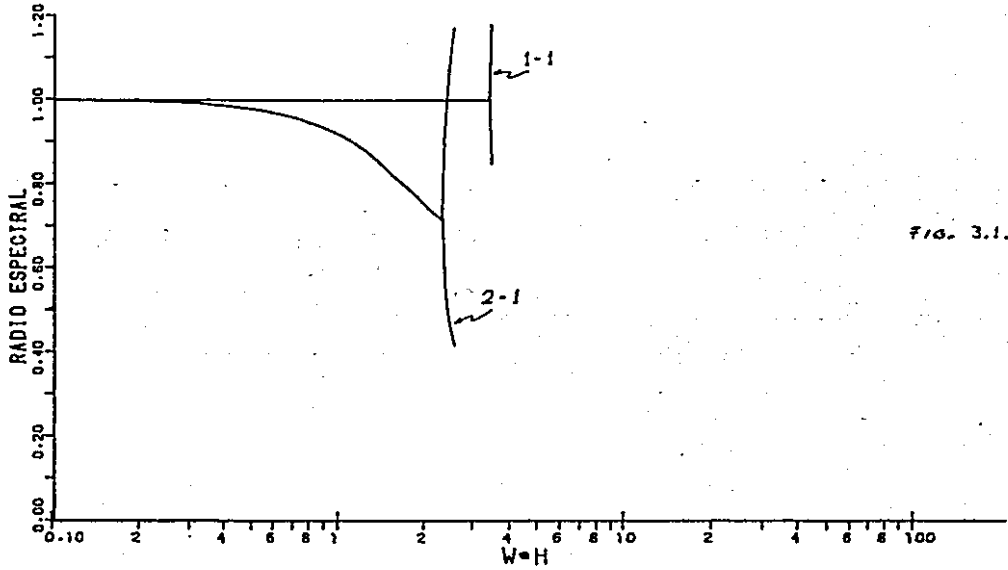
en aquellas zonas en donde la ecuación correspondiente tiene raíces reales (pues el módulo de las dos raíces es, en general, diferente). Cuando las raíces son complejas, las dos tienen el mismo módulo pues son conjugadas, y en ese caso, la curva tiene una ordenada única para el valor correspondiente de .

En las gráficas del error de periodicidad, las ordenadas corresponden al valor absoluto de esta función, pero se indica expresamente las zonas donde las ordenadas son negativas; las curvas se han cortado cuando el error de periodicidad excede de 0.24 o al llegar a un punto en el que las raíces de (3.40) o (3.42) se vuelven reales, en cuyo caso deja de tener sentido esta magnitud.

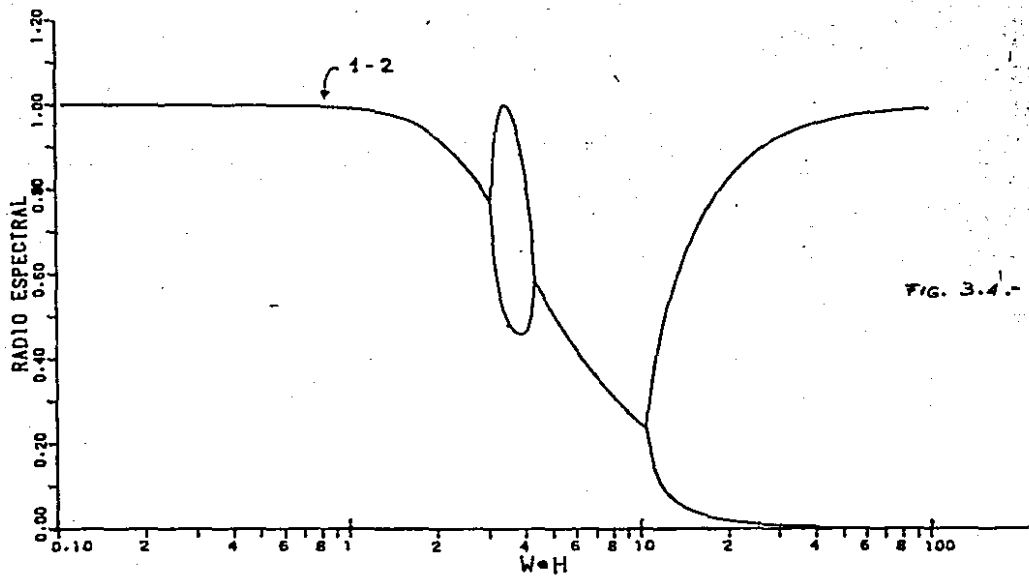
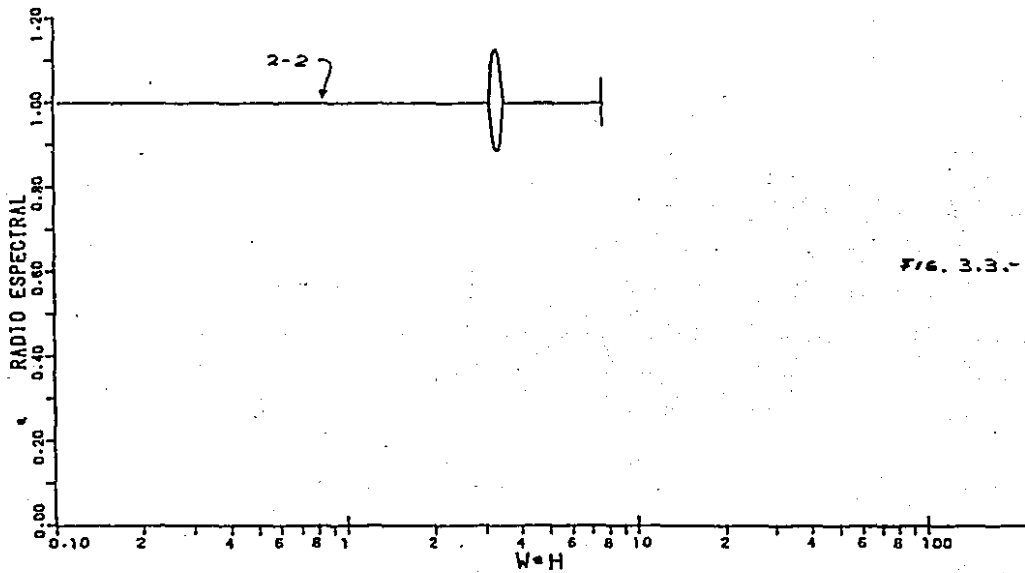
En los métodos de reducción a sistema de primer orden, las curvas se han designado mediante dos pares de números, que representan, el primero, el tipo de interpolación para y, el segundo, el tipo de interpolación para .

Las gráficas correspondientes a esquemas que usan interpolación trigonométrica han sido obtenidas con una base de forma similar a la de (3.34), haciendo el parámetro libre igual a 1.

METODO DIRECTO (Ecuacion de 2º Orden). (INTERP. POLINOMIAL).



METODO DIRECTO (ECUACION DE 2º ORDEN). (INTERP. POLINOMIAL).



REDUCCION A SISTEMA DE 1<sup>er</sup> ORDEN. (INTERP. POLINOMIAL)

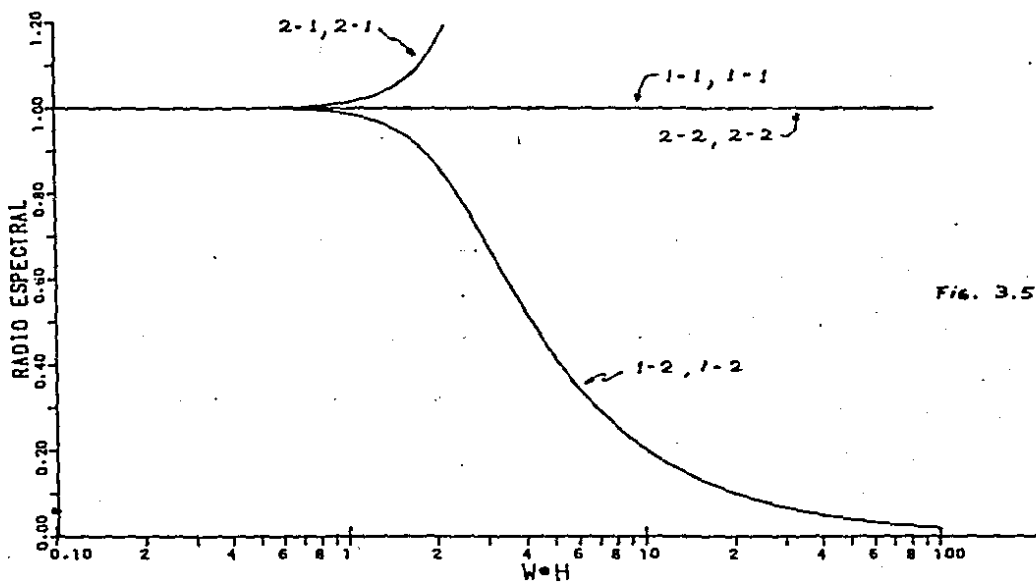


Fig. 3.5.-

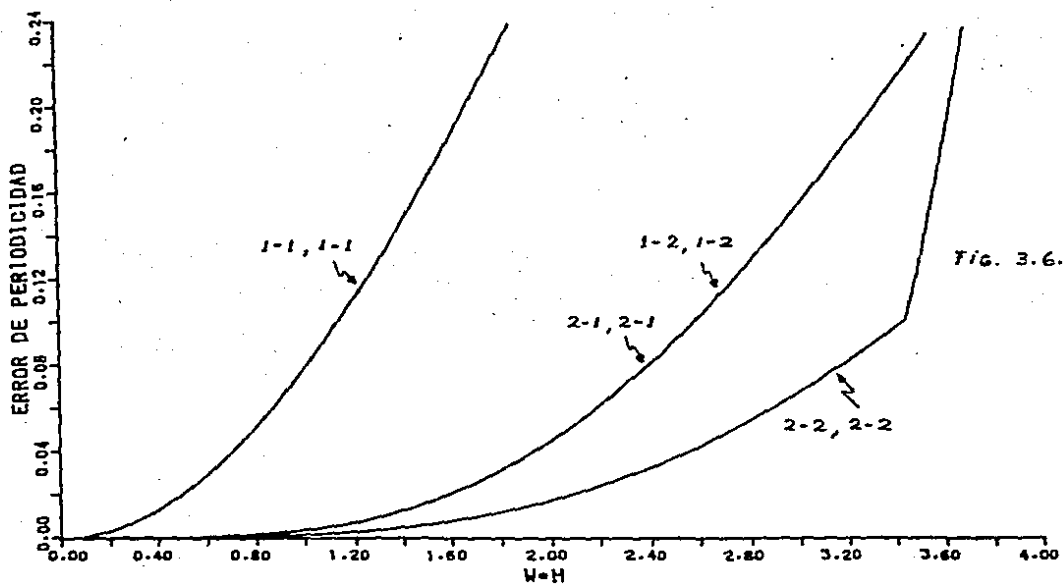


Fig. 3.6.-

METODO DIRECTO (Ecuacion de 2º ORDEN), (INTERP. TRIGONOMETRICA)

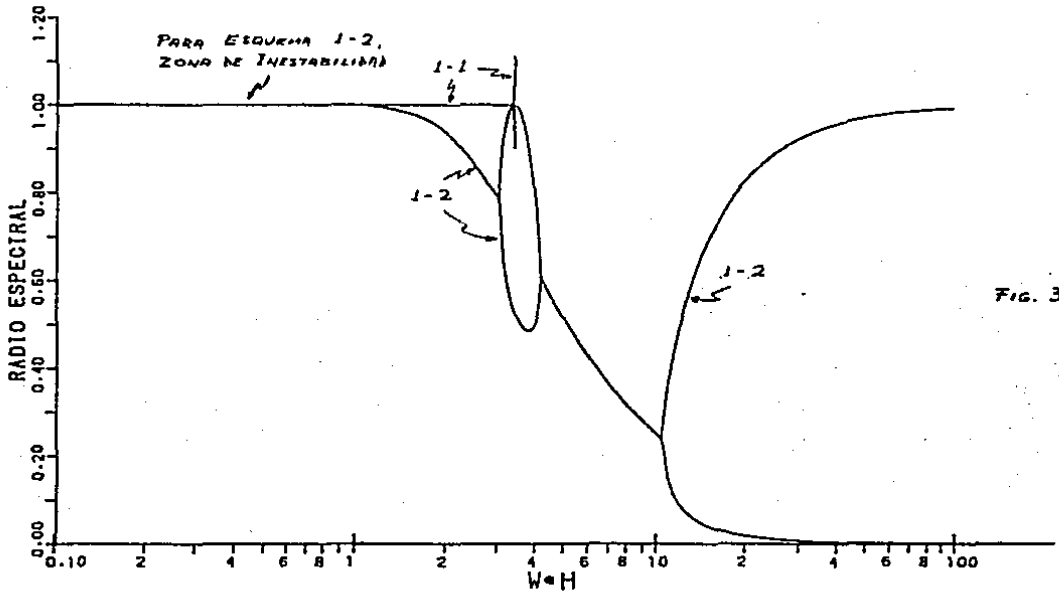


Fig. 3.7.-

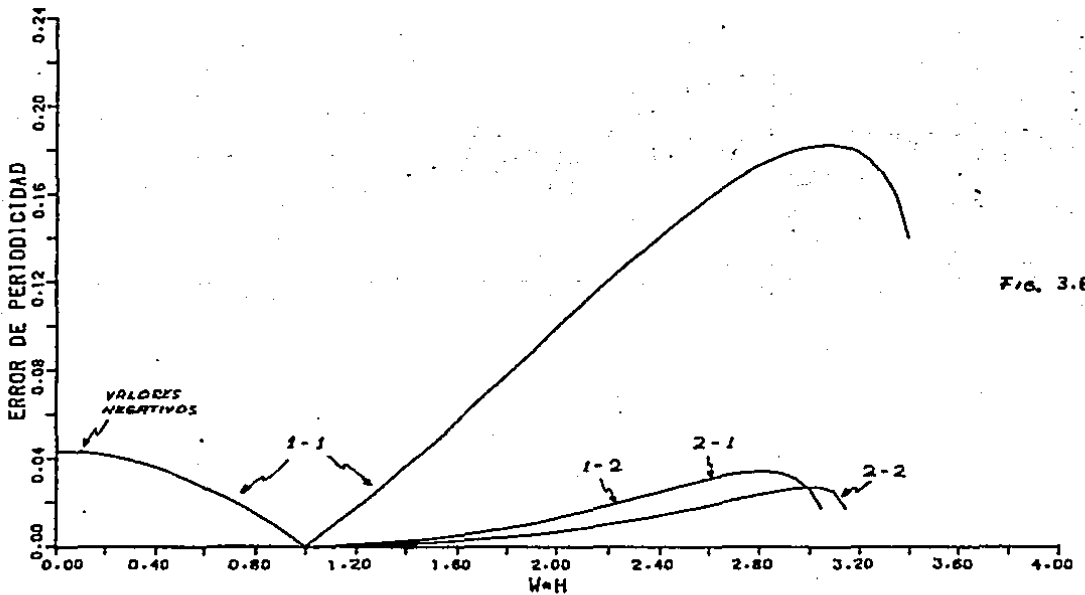


Fig. 3.8.-

METODO DIRECTO (ECUACION DE 2º ORDEN). (INTER. TRIGONOMETRICA).

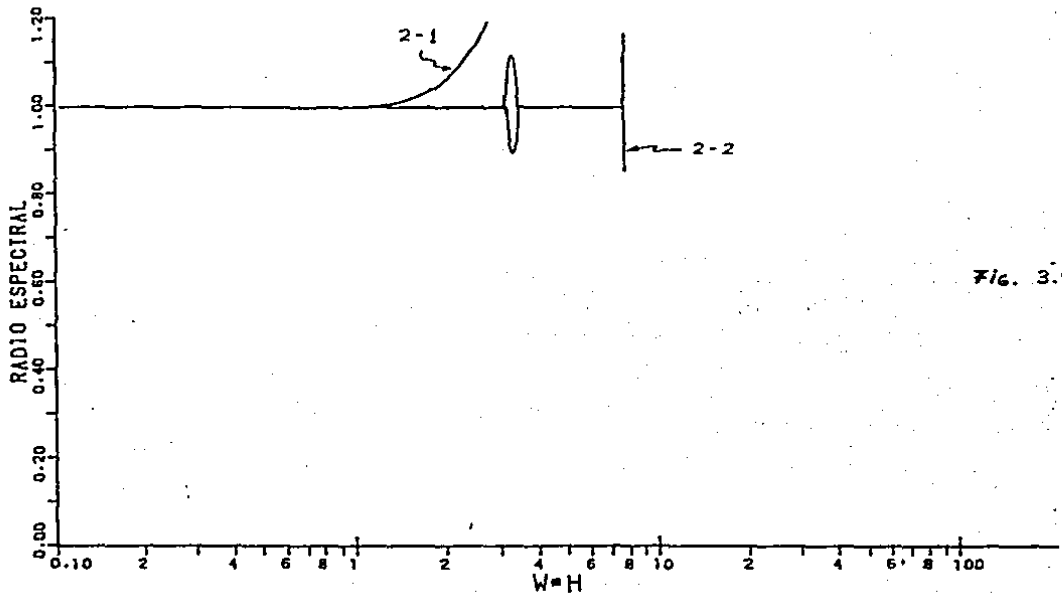


Fig. 3.9.-

REDUCCION A SISTEMA DE 1<sup>ER</sup> ORDEN. (INTERP. TRIGONOMETRICA).

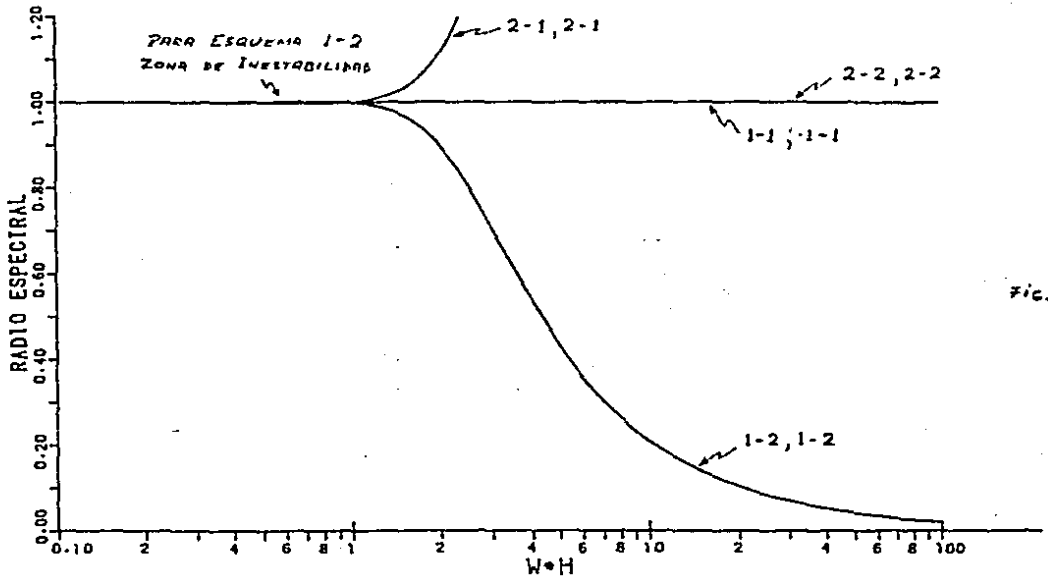


Fig. 3.10.-

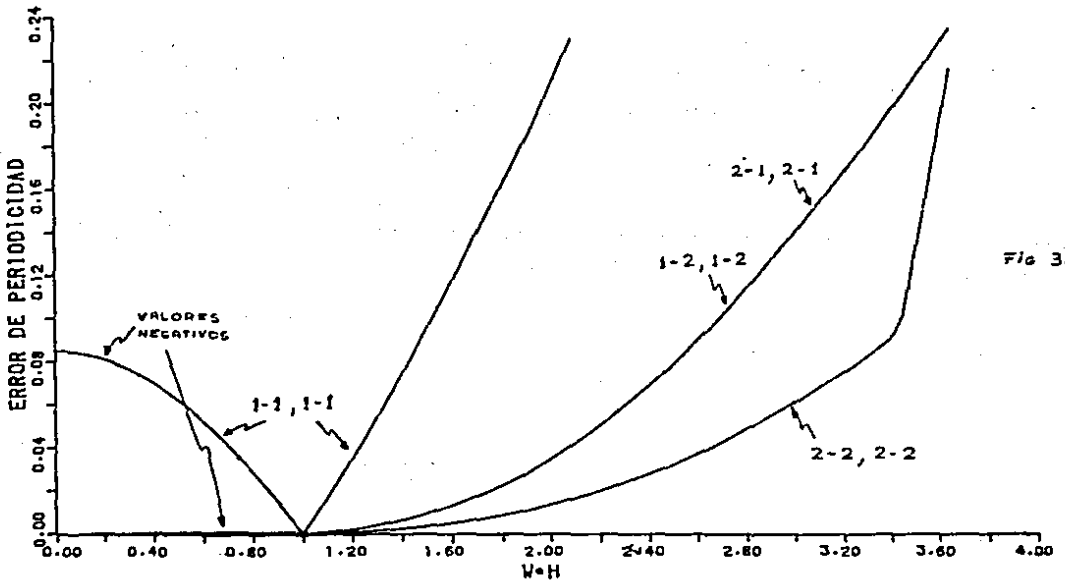


Fig. 3.11.-

ESQUEMA  $\theta$  DE WILSON

$\theta = 1.4$  - (PARA COMPARACION).

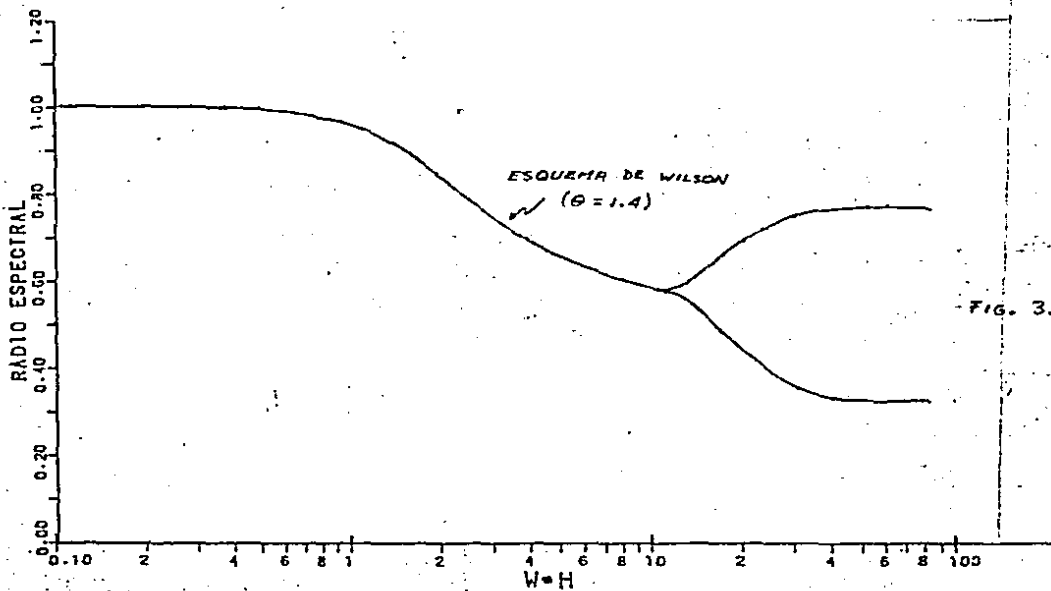


Fig. 3.12.-

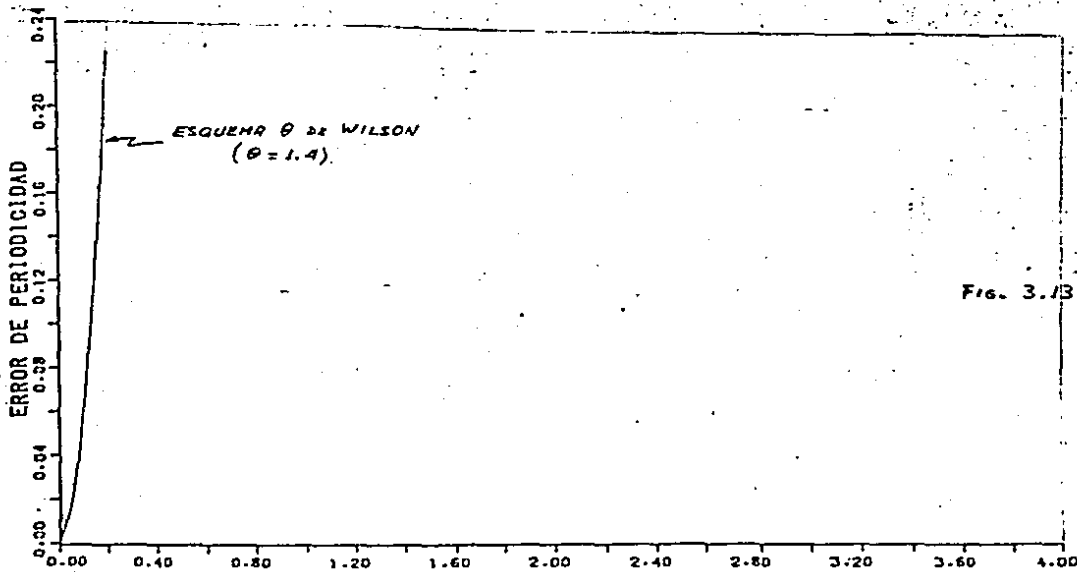


Fig. 3.13.-



### 3.4.3.- Conclusiones y Comentarios.

Las gráficas 3.1 a 3.11 nos permiten darnos una idea del comportamiento de los métodos que estudiamos. Incluimos las figuras 3.12 y 3.13 correspondientes al esquema  $\theta$  de Wilson con fines de comparación. Vamos a resumir aquí algunos -- hechos que se deducen de la observación de estas figuras:

Es evidente que los dos planteamientos, el de resolución directa de la ecuación de segundo orden y el de reducción a sistema de primer orden tienen características radicalmente diferentes pues las curvas correspondientes a un caso u otro -- son muy distintas.

Las opciones de interpolación polinomial y trigonométrica, no producen cambios sensibles en las formas de las curvas. Compárese, por ejemplo, la curva de la figura 3.4, correspondiente a interpolación polinomial 1-2 y la curva de la figura 3.7 que representa un caso de interpolación trigonométrica 1-2: las dos son prácticamente iguales en su forma, aunque existen pequeñas diferencias en los valores, los cuales, como veremos, pueden ser suficientes para dar a una y otra opción características muy diferentes.

Al analizar los métodos que resuelven la ecuación de segundo orden de manera directa, se observa una característica interesante: en todos los esquemas se presentan zonas en las que las raíces se vuelven reales y distintas, lo que se refleja en las bifurcaciones de las curvas correspondientes. Esta es una mala propiedad que se presenta en todos los casos, excepto en el esquema 2-1 con interpolación trigonométrica.

Prácticamente todos los métodos directos resultan ser condicionalmente estables, con excepción del esquema 1-2 con interpolación polinomial que es estable para todo valor de  $wh$

Este puede considerarse como un buen método, pues aparte de su estabilidad, amortigua el efecto de una buena zona de frecuencias altas. Sin embargo habría que vigilar las zonas donde -- hay bifurcación, pues en esos rangos, se supone una mala aproximación de la periodicidad.

El esquema 1-2 con interpolación trigonométrica, al -- que corresponde una de las curvas de la figura 3.7, en realidad es un mal método, pues aunque el gráfico no lo revela a -- primera vista, es inestable. Las ordenadas de la curva en el -- intervalo  $0.1 \leq \omega h < 1$ , son superiores a 1, aunque muy próximas a -- este valor. Este hecho se ha señalado expresamente en la gráfica correspondiente.

La opción de resolver el problema reduciéndolo a un -- sistema de primer orden genera varios métodos de excelentes -- características, como puede verse en las figuras 3,5 y 3,6. -- Usando interpolación polinomial, los esquemas 1-1, 1-1; 2-2, -- 2-2 y 1-2, 1-2, resultan ser condicionalmente estables y el -- radio espectral corresponde siempre al módulo de dos raíces -- complejas conjugadas. Sólo el esquema 2-1, 2-1 es condicionalmente estable.

El esquema 1-2, 1-2 en particular, muestra muy buenas condiciones: aparte de las ya mencionadas, agrega un amortiguamiento bastante acentuado de las frecuencias altas. Sin embargo, al usar interpolación trigonométrica, este esquema se vuelve inestable.

En resumen, podemos concluir que los esquemas que se basan en la reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden combinados con la interpolación polinomial, producen magníficos, mientras que la solución directa como ecuación de 2o. orden, da lugar a esquemas de características inferiores. La interpolación trigonométrica, en general, no ha proporcionado re

sultados muy buenos, pues tiende a producir inestabilidad,

Es oportuno recordar aquí que los esquemas que efectúan la reducción a sistema de primer orden, requieren en los casos generales, de la inversión de la matriz  $M$ , problema complejo que debe eludirse. Esta es una característica desafortunada de estos métodos, que contrasta con las excelentes propiedades numéricas que hemos descrito.

**CAPITULO 4**  
**UN EJEMPLO DE APLICACION**

## 4. UN EJEMPLO DE APLICACION

## 4.1 EL PROBLEMA A RESOLVER

Aunque el presente trabajo está orientado, básicamente, hacia el análisis estructural, no es muy sencillo encontrar un problema práctico de esta área con solución conocida y de características adecuadas para una experimentación como la que vamos a emprender.

Se ha elegido, por esta razón, un problema que genera sistemas de ecuaciones del mismo tipo; estudiaremos la solución de la ecuación.

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c = \text{constante} \quad (4.1)$$

$$0 < x < l$$

$$u(0, t) = 0 \quad u(l, t) = 0 \quad t > 0 \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \dot{u}(x, 0) = g(x) \quad (4.3)$$

Esta ecuación es la "ecuación lineal de onda", y representa los desplazamientos de una cuerda vibrante, de propiedades uniformes, fija en ambos extremos. Las expresiones (4.2) son condiciones de frontera para el dominio espacial, mientras que (4.3) son condiciones iniciales para el problema de evolución en el tiempo.

Un estudio detallado de la ecuación (4.1) se puede encontrar en la referencia [4], capítulo 10, a la cual remitimos al lector interesado. Nosotros vamos a esbozar, a grandes rasgos, la transformación de (4.1) a un sistema del tipo que hemos considerado a lo largo del presente trabajo.

El procedimiento a seguir es el de discretización parcial o semidiscretización: puesto que la función  $u$  depende de la cordenada  $x$ , y del valor del tiempo  $t$ , queremos discretizar el dominio espacial  $0 \leq x \leq \ell$  de tal forma que el pro--blema se reduzca a un sistema de ecuaciones diferenciales ordi--narias dependientes del tiempo. Esto se puede conseguir de la siguiente forma:

Elegimos un conjunto de funciones bases que dependan de  $x$ , digamos  $b_1(x), b_2(x), \dots, b_N(x)$ , tales que podamos estable--cer para  $u(x,t)$  una aproximación de la forma

$$u(x,t) \sim u^*(x,t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) b_i(x) \quad (4.4)$$

donde  $N$  es el número de nodos que se haya establecido en el -intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ . Las funciones  $b_i$  tienen soporte local en este intervalo; esto quiere decir que si  $x_j$  es la abscisa co--rrespondiente al nodo  $j$ ,  $b_j(x_j) = 1$  pero  $b_j(x_i) = 0$  con  $i \neq j$ ; ade--más  $b_i(x) = 0$  para  $x \notin [x_i, x_{i+1}]$ . Además, estas funciones deben cumplir las condiciones de frontera (4.2), es decir que  $b_i(0) = b_i(\ell) = 0$ .

Tomemos una función  $b_i(x)$  y realicemos la integral:

$$\int_0^{\ell} b_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \int b_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (4.5)$$

Se puede también escribir:

$$\int_0^{\ell} b_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \left[ b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{\ell} - \int b_i'(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (4.6)$$

pero, por las condiciones de frontera y por el soporte local de las funciones bases, el termino entre corchetes, se anula.-- Por lo tanto;

$$\int_0^L b_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx + \int_0^L b_i'(x) \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \quad (4.7)$$

Planteando  $N$  ecuaciones iguales a (4.7), una para cada punto nodal, y reemplazando las derivadas de  $u$  por los valores que se obtienen a partir de la aproximación dada en (4.4), se llega a

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (4.8)$$

donde  $M = (m_{ij})$  y  $K = (k_{ij})$

siendo 
$$m_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i(x) b_j(x) dx \quad (4.9)$$

y 
$$k_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_i'(x) b_j'(x) dx \quad (4.10)$$

Hemos visto, pues, que discretizando el dominio espacial con funciones bases que dependen solamente de  $x$ , se ha obtenido el sistema de ecuaciones (4.8) que es del tipo que hemos estudiado. Por lo tanto, para efectos del presente trabajo, vamos a generar sistemas de la forma (4.8) a partir de (4.1) mediante el proceso de semidiscretización que hemos explicado. Aplicaremos luego, sobre el sistema generado los métodos descritos en el capítulo anterior.

La solución que buscamos consiste en los valores de los desplazamientos correspondientes a puntos dados de la cuerda, en instantes preestablecidos dentro del período de evolución que nos interesa.

## 4.2 IMPLEMENTACION

### 4.2.1. Consideraciones prácticas previas a la implementación.

Diffícilmente podría realizarse una implementación general de la familia de métodos que hemos estudiado.

Conocido un problema que se va a resolver, este tiene siempre alguna propiedad particular que facilita o dificulta la solución. El problema descrito en la sección anterior no tiene terminos de carga ni de amortiguamiento, lo que hace que sea apropiado para estos primeros experimentos con nuestros métodos, pues la solución analítica es convencido, y de forma -- más o menos sencilla.

Siendo  $C=0$ , esta característica particular, nos evi-  
te el problema de calcular la inversa de  $M$ , que aparece en los esquemas de reducción a sistema de  $1er.$  orden. (ver ecuación - 3.24).

(Sin embargo, si  $C$  fuera diferente de cero, recuérdese que por superposición modal se puede lograr diagonalizar las matrices  $M$ ,  $C$  y  $K$ , en cuyo caso, la inversión de  $M$  es inmediata. Desde luego que la diagonalización es muy costosa, pero hay -- que recordar las otras ventajas que se derivan de la superposición modal. Si no se desea usar este procedimiento, todavía -- se pueden emplear con ventaja estos métodos, a costa de introducir un error adicional de discretización: se puede calcular la matriz de masa en forma "condensada", lo cual nos daría una matriz diagonal desde el comienzo. Ver referencias [2], sección 2.4.2 y [3], sección 3.2.3)



En las ecuaciones (3.10) y (3.24) las matrices de -- coeficientes son en realidad matrices particionadas en cuatro submatrices cuadradas, con estructura de banda. Para obtener una forma más manejable de esta matriz, se pueden combinar las cuatro componentes, intercalando filas y columnas, de tal mane-- ra que se obtiene una sola matriz bandada de orden  $2N \times 2N$ .

Aclaremos lo dicho, con el siguiente ejemplo:

El sistema

$$\begin{bmatrix} A & B \\ G & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 & \beta_{33} \\ \gamma_{11} & 0 & 0 & \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

(4.11)

se puede manejar mejor si lo reescribimos en la siguiente forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & \delta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{22} & \beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{22} & \delta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{33} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

(4.12)

En algunos textos se llama "casi diagonal por bloques" a la forma que ha adquirido la matriz de coeficientes; esta es, de hecho, una matriz bandada con la cual se puede operar haciendo uso de muchos algoritmos bien conocidos. Hay que dejar acla--

rado, sin embargo, que aunque las componentes  $A, B, G$  y  $D$  sean si métricas, la matriz combinada ha perdido esta propiedad. En la implementación, construiremos la matriz de coeficientes de la forma explicada para obtener la forma "casi diagonal por bloques".

Otro hecho adicional a considerar en la implementación es que, debido a que la dimensión de las matrices y vectores que intervienen en calculos depende del número de nodos e intervalos en que se ha dividido el dominio espacial, y el grado de las funciones base de interpolación, es conveniente asignar dinámicamente la memoria, para un uso mas eficiente de la misma y, ademas, para facilitar la ampliación de la capacidad del programa para problemas mas grandes y complejos. La idea es crear un arreglo muy grande y, dentro de él, ir asignando localidades a los diferentes vectores y matrices que intervienen en los calculos.

#### 4.2.2. Organización del Programa.

Se ha desarrollado un programa, escrito en FORTRAN, que permite ejecutar los métodos que hemos estudiado, aplicandolos al problema descrito en la sección 4.1. La presente sección esta dedicada a explicar en rasgos generales la estructura de este programa. (El listado se incluye como suplemento de este trabajo).

Como hemos visto nuestro problema tiene dos fases bien definidas: la semidiscretización en el espacio y la solución iterativa a lo largo del tiempo. El proceso iterativo -- consiste, básicamente en la solución de un sistema de ecuaciones lineales donde la matriz de coeficientes va a ser casi diagonal por bloques; esta fase es la que requiere la mayor proporción del cómputo de todo el programa, por lo que es neces-

rio emplear una rutina de alta eficiencia, que minimice los requerimientos de espacio de memoria y tiempo de procesamiento. - Decidimos incorporar a nuestro programa la rutina SLVBLK, diseñada para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma casi diagonal por bloques. Esta rutina, escrita en FORTRAN, reside en las bibliotecas de análisis numérico que se han implementado en el computador BURROUGHS 7800 de la UNAM. Una descripción detallada del uso y las características de esta rutina se pueden encontrar en la referencia [19].

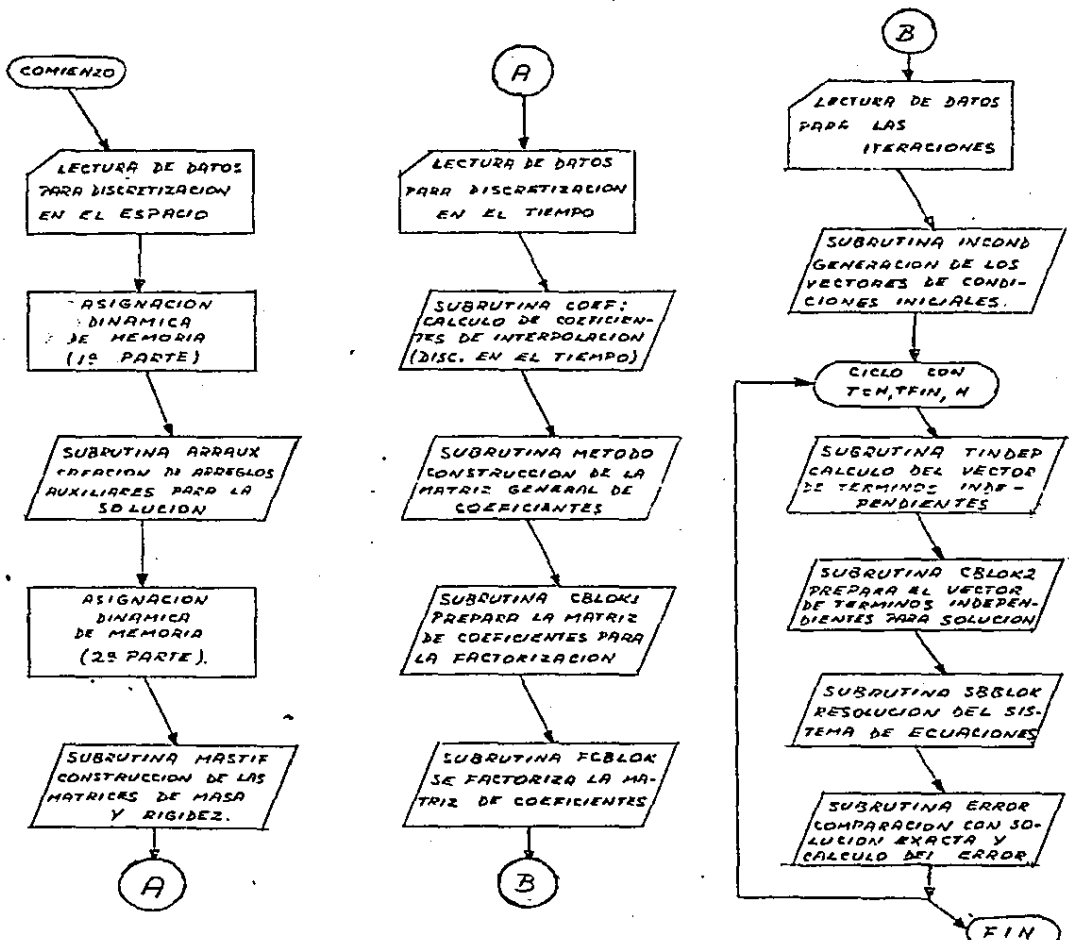
Las rutinas que realizan el proceso de semidiscretización en el espacio, se han inspirado en la referencia [22]; - todas las demás, son originales, escritas por el autor de este trabajo. Solamente en la rutina COEF que calcula los coeficientes de interpolación para la discretización en el tiempo - se ha incluido como auxiliar un módulo tomado de la referencia [17], que invierte matrices.

Se ha considerado necesario dar la posibilidad de interpolación lineal, cuadrática y cúbica en la discretización espacial, mientras que en el tiempo se pueden utilizar todas las variantes que hemos escrito: métodos directos o métodos de reducción a sistema de primer orden; interpolación polinomial o trigonométrica; interpolaciones 1-1, 1-2, 2-1 y 2-2 y - en el caso de reducción a sistemas de primer orden, cualquier combinación de estas opciones. También se admite el uso de un parámetro libre en la interpolación trigonométrica.

## 4.2.2 Diagrama de Flujo

Se ha desarrollado un programa en FORTRAN que permite ejecutar los métodos que estamos analizando sobre el problema descrito en la sección anterior. A continuación presentamos un diagrama de flujo de este programa. El listado del programa fuente, está incluido como suplemento de este trabajo:

DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA PGV/TODO.-



#### 4.2.3 Descripción de Rutinas del Programa de Pruebas.

A continuación describimos rápidamente los módulos que componen el programa:

##### Programa Principal:

El programa principal lee los datos del problema y realiza la asignación dinámica de memoria a los vectores y matrices que aparecen en el cálculo. Además, llama a las demás rutinas en el orden apropiado.

Los datos que hay que proporcionar a este programa --- son:

##### a) Datos para Discretización en el Espacio:

NI = número de intervalos en que se va a dividir el dominio espacial  $[X_I, X_F]$ .

XI = abscisa inicial para el dominio espacial.

XF = abscisa final para el dominio espacial.

IG = grado de las funciones base. Los valores admisibles son 1, 2, o 3 (para funciones base lineales, cuadráticas y cúbicas, respectivamente).

C = valor de la constante C que aparece en la ecuación 4.1

NIMP = número de puntos en los que se pide imprimir los resultados. Estos puntos estarán uniformemente distribuidos en el intervalo  $[X_I, X_F]$ .

## b) Datos para Discretización en el Tiempo:

KLAVE = clave que designa el método a utilizar: si ---  
 KLAVE = 1, se usará el método de reducción a --  
 sistema de primer orden; si KLAVE = 2 se usará--  
 el método directo de solución a la ecuación de--  
 segundo orden.

H = longitud de paso para discretización en el tiem  
po.

P1 = parámetro que indica la forma de interpolación--  
 a usar para la función U. Puede tener valor 1--  
 o 2. P1 = 1 significa que es conocido el valor  
 de la función en el extremo izquierdo del inter  
valo. P1 = 2 significa que son conocidas la --  
 función y su primera derivada en el extremo iz--  
 quierdo.

Q1 = similar a P1, para el extremo derecho del inter  
valo.

K1 = parámetro que indica el tipo de interpolación a  
 realizar: K1 = 1 significa interpolación polino  
mial y K1 = 2 significa interpolación trigonomé  
trica.

PHI1 = valor del parámetro libre de la interpolación --  
 trigonométrica. Corresponde al valor de  $\phi$  para  
 las funciones  $\cos \phi \omega$ ,  $\sin \phi \omega$ . Este valor se--  
 ignora en la interpolación polinomial.

P2, Q2, K2 y PHI2 = iguales, respectivamente a P1, Q1, K1 y --  
 PHI1. Se leen solamente en los métodos de re--  
 ducción a sistema de primer orden, y se refie--

ren a la interpolación de la función  $V = \dot{U}$ . Estos valores no se requieren en los métodos directos de 2o. orden.

c) Datos para las Iteraciones:

TFIN = valor final de  $t$ , en el que concluyen las iteraciones.

DTIMP = intervalo de tiempo que separa entre si dos puntos de impresión. Debe ser un múltiplo exacto de la longitud de paso.

Dentro del programa principal se definen las siguientes variables que se usan después como parámetros para las demás rutinas:

NP = número de puntos que se definen en el dominio especial, de acuerdo al número de intervalos y al grado de las funciones base.

NPX2 = NP multiplicado por 2. Corresponde al orden del sistema total de ecuaciones.

ISAB = semiancho de banda de las matrices de masa y rigidez.

NDIM = número total de elementos almacenados de las matrices de masa y rigidez (se almacena por diagonales). Es igual al número de puntos, multiplicado por el semiancho de banda.

NBLOKS = número de bloques que poseen las matrices de masa y rigidez.

Además, el programa principal asigna memoria a varios arreglos y matrices, creando los siguientes apuntadores:

- IMASS = índice que señala al primer elemento de la matriz de masa.
- ISTIF = índice que señala al primer elemento de la matriz de rigidez.
- IINTS, ICOLI, ICOLF, IFILI = índices que señalan el comienzo de varios arreglos auxiliares requeridos por SLVBLK
- IBLOKS = índice que apunta al primer elemento de la matriz de coeficientes del sistema general de ecuaciones.
- IB = índice que apunta al comienzo del vector de términos independientes.
- IPVT = índice que apunta al comienzo de un vector que almacena los elementos pivotaes usados en la factorización de la matriz de coeficientes.
- IX = índice que apunta al comienzo del vector de incógnitas.
- ISER = índice que apunta al comienzo de un vector de trabajo, usado por SLVBLK.

#### Subrutina ARRAUX.

Este módulo genera los arreglos y valores auxiliares que describen la estructura de bloques de la matriz de coeficientes. Estos arreglos proporcionan la información que requiere la rutina SLVBLK para la solución del sistema de ecua--



ciones. Los vectores calculados por esta rutina son: COLI, -- COLF, FILI, que tienen una longitud NBLI. Son las secuencias de columna inicial, columna final y fila inicial de cada uno de los bloques. Se calcula también el arreglo INTS de  $4 \times NBLI$  a base de los anteriores. Se determina además el valor de las variables enteras LIPVT, LBLK, NULT, LSCR que expresan la longitud de ciertos vectores requeridos por SLVBLK.

#### Subrutina MASTIF:

Este es un programa que calcula las matrices de masa y rigidez del problema que se resuelve. El orden de estas matrices es  $NP \times ISAB$ ; el nombre de los arreglos es KSTIF y MASS.

MASTIF llama también a la función FINT que es una rutina que evalúa la integral de una función por cuadraturas de Gauss. A su vez, FINT se apoya en la función UIJ que proporciona las fórmulas de las funciones base para la discretización en el espacio.

#### Subrutina COEF:

Esta rutina determina el valor de los coeficientes de interpolación para la discretización en el tiempo, de acuerdo al tipo de aproximación elegido. Estos coeficientes se almacenan en el arreglo C de dimensiones  $2 \times 4$ . (C es un nombre local; en varios módulos, este arreglo se llama CINT).

COEF llama también a ciertas rutinas auxiliares como FUINT, que genera las funciones base adecuadas para la interpolación elegida. Se ha incluido en este módulo la subrutina -- INVHM y sus auxiliares SUBST y FACTOR, las cuales sirven para invertir matrices; estas rutinas han sido tomadas de la referencia [17].

Subrutina METODO:

Este es un programa que calcula la matriz de coeficientes del sistema general de ecuaciones. Esta se almacena de una forma especial, según lo requerido por SLVBLK. El nombre del vector de coeficientes es ARRAY.

Subrutina TINDEP:

Muy parecida a la anterior, esta rutina genera el vector de términos independientes del sistema general de ecuaciones. El nombre de este vector es B. Este módulo utiliza como datos las incógnitas calculadas en el paso anterior (o las condiciones iniciales, al arrancar).

Subrutina INCOND:

Al arrancar, llena un vector con las condiciones iniciales del problema particular; este vector es de dimensiones  $2 \times NP$  y su nombre es A.

Subrutina ERROR:

Calcula las normas de error correspondientes a un instante preestablecido, comparando la solución proporcionada por el método con la solución analítica exacta. Esta solución analítica es proporcionada por la rutina FEX.

La salida de esta rutina se imprime directamente. -- Consiste de los valores exactos y aproximados de las incógnitas y la diferencia entre ellos, indicando además la abscisa correspondiente y el valor de T. Imprime, además, el máximo error detectado y la abscisa en la que ocurrió, así como el -- error cuadrático total (ver ecuación 4.15).

Paquete SLVBLK:

Realiza la resolución de un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es casi diagonal por bloques. El método empleado es una variante de la eliminación gaussiana, adaptada para aprovechar la estructura de la matriz de coeficientes.

En nuestro programa, este paquete ha sido roto en varias rutinas que se llaman oportunamente. Estas son:

CBLOK1 que prepara la matriz de coeficientes para su factorización.

FCBLOK que ejecuta la factorización.

CBLOK2 que prepara el vector de términos independientes para la resolución.

SBBLOK que resuelve el sistema.

Remitimos al lector interesado a la referencia [19] - páginas 36 y siguientes para una explicación más amplia de este paquete.

## 4.3 ANALISIS DE RESULTADOS

Se aplicaron los métodos a un problema ejemplo: se resolvió la ecuación

$$100 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \pi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.11)$$

$$u(0, t) = 0 ; \quad u(10, t) = 0 \quad (4.12)$$

$$u(x, 0) = 2 \sin \frac{\pi x}{5} ; \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (4.13)$$

La solución analítica exacta es:

$$u(x, t) = \sin \left( \frac{\pi x}{5} - 2t \right) + \sin \left( \frac{\pi x}{5} + 2t \right) \quad (4.14)$$

La norma  $L_2$  del error se define por:

$$L_2 = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k e_i^2 \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

donde  $k$  es el número de puntos que se toman en el intervalo  $[0, 10.]$  para comparar la solución exacta  $u_e$  con el valor aproximado  $u_a$ . El error  $e_i$  se define así:

$$e_i = |u_e(x_i) - u_a(x_i)| \quad (4.16)$$

A fin de averiguar las condiciones de los diferentes métodos en la práctica, hemos calculado la norma  $L_2$  del error en el instante  $t=1$  para los diferentes métodos, con diferente longitud de paso y con diferentes funciones base. A continuación se muestran algunas de estas tablas, correspondientes a los casos más interesantes.

ERROR  $L_2$  EN  $T = 1$   
 ESQUEMA 1-2, 1-2 (INTERPOLACION POLINOMIAL)  
 SE USO UNA MALLA DE 32 INTERVALOS EN EL ESPACIO

FS. BASE	1er GRADO	2o. GRADO	3er GRADO
$h = 0.2$	$0.254595 \times 10^{-2}$	$0.113195 \times 10^{-2}$	$0.113446 \times 10^{-2}$
$h = 0.1$	$0.358260 \times 10^{-2}$	$0.127385 \times 10^{-3}$	$0.129903 \times 10^{-3}$
$h = 0.05$	$0.367865 \times 10^{-2}$	$0.127980 \times 10^{-4}$	$0.153147 \times 10^{-4}$
$h = 0.025$	$0.369280 \times 10^{-2}$	$0.785042 \times 10^{-6}$	$0.173730 \times 10^{-5}$

---

ERROR  $L_2$  EN  $T = 1$   
 ESQUEMA 2-2, 2-2 (INTERPOLACION POLINOMIAL)  
 SE USO UNA MALLA DE 32 INTERVALOS EN EL ESPACIO

FS. BASE	1er GRADO	2o. GRADO	3er GRADO
$h = 0.2$	$0.361277 \times 10^{-2}$	$0.788370 \times 10^{-4}$	$0.673428 \times 10^{-4}$
$h = 0.1$	$0.368918 \times 10^{-2}$	$0.301515 \times 10^{-5}$	$0.283942 \times 10^{-5}$
$h = 0.05$	$0.369399 \times 10^{-2}$	$0.287244 \times 10^{-5}$	$0.253487 \times 10^{-5}$
$h = 0.025$	$0.369499 \times 10^{-2}$	$0.252965 \times 10^{-5}$	$0.170526 \times 10^{-6}$

ERROR  $L_2$  EN  $T = 1$   
 ESQUEMA 1-2, = (INTERPOLACION POLINOMIAL)  
 SE USO UNA MALLA DE 32 INTERVALOS EN EL ESPACIO

FS. BASE:	1er GRADO	2o. GRADO	3er GRADO
$h = 0.2$	$0.262554 \times 10^{-2}$	$0.105748 \times 10^{-2}$	$0.112861 \times 10^{-2}$
$h = 0.1$	$0.356578 \times 10^{-2}$	$0.124836 \times 10^{-3}$	$0.146115 \times 10^{-3}$
$h = 0.05$	$0.367856 \times 10^{-2}$	$0.129723 \times 10^{-4}$	$0.178433 \times 10^{-4}$
$h = 0.025$	$0.369236 \times 10^{-2}$	$0.725128 \times 10^{-6}$	$0.102188 \times 10^{-5}$

---

ERROR  $L_2$  EN  $T = 1$   
 ESQUEMA 2-1 = (INTERPOLACION POLINOMIAL)  
 SE USO UNA MALLA DE 32 INTERVALOS EN EL ESPACIO

FS. BASE:	1er GRADO	2o. GRADO	3er GRADO
$h = 0.2$	$0.460108 \times 10^{-2}$	$0.263577 \times 10^{+1}$	$0.241818 \times 10^{+1}$
$h = 0.1$	$0.381295 \times 10^{-2}$	$0.880793 \times 10^{-1}$	$0.903712 \times 10^{-1}$
$h = 0.05$	$0.370941 \times 10^{-2}$	$0.458360 \times 10^{+1}$	$0.452562 \times 10^{+1}$
$h = 0.025$	$0.369622 \times 10^{-2}$	$0.127411 \times 10^{-5}$	$0.142215 \times 10^{-5}$

Las tablas anteriores presentan los valores de la norma  $L_2$  del error en diferentes casos. Se usó siempre una malla de 32 intervalos en el espacio. Los resultados numéricos obtenidos revelan algunos hechos interesantes pero, en definitiva, concuerdan con nuestro análisis teórico de estabilidad y precisión.

La primera observación que se puede hacer es que, al usar una discretización lineal en el espacio, prácticamente todos los métodos mantienen sus normas de error sin cambio apreciable, pese a la disminución de la longitud de paso. Esto revela la dominancia del error de discretización en el espacio: al usar interpolación lineal en el espacio se generan errores que no pueden ser contrarrestados por un refinamiento en la malla de discretización en el tiempo.

En algunos casos, la discretización lineal en el espacio produce oscilaciones caóticas en los valores del error.

Si examinamos la tabla correspondiente al esquema 1-2, 1-2 con interpolación polinomial que habíamos considerado excelente, veremos que nuestras deducciones fueron ciertas: la combinación de este esquema con la interpolación cuadrática en el espacio, presenta una disminución del error realmente drástica, con factores de disminución que van desde aproximadamente 9 -- hasta más de 16. Sin embargo, al usar interpolación cúbica en el espacio no se logra reducir más el error, pues en ese caso pasa a dominar el orden más bajo de la discretización en el tiempo. (Por otra parte, con elementos cúbicos en el espacio, ya deben existir efectos del error de redondeo pues en ese caso el sistema de ecuaciones es de orden  $190 \times 190$ ).

Una enseñanza que se puede extraer de lo dicho es que no es conveniente usar diferentes órdenes de aproximación en -

el tiempo y el espacio pues, en ese caso, prevalece el mas bajo y no se puede contrarrestar con el refinamiento en la otra-dimensión.

Otro esquema de excelente comportamiento resulta ser el 2-2, 2-2 con interpolación lineal, combinado con la discretización cúbica en el espacio, reduce mucho las normas de -- error. Sin embargo, el orden de reducción es comparable al del esquema 1-2, 1-2 que mencionamos, pero el 2-2, 2-2 es mucho -- más costoso.

Conforme se podía esperar de los resultados del análisis teórico, también resulta muy aceptable el esquema 1-2, - con interpolación polinomial. Su desempeño es comparable al - de 1-2, 1-2 que vimos antes.

El esquema 2-1, con interpolación polinomial que se - reveló como malo en el análisis teórico, se confirma así, mostrando un comportamiento caótico en la tabla correspondiente.

Con este breve análisis, damos por terminada esta exploración preliminar de esta familia de métodos. Hemos visto que hay en ella esquemas buenos y malos, pero ya sabemos hacia donde hay que dirigir la atención. Como hemos dicho, el trabajo no esta terminado; todo lo contrario, apenas comienza y esperamos que otros prosigan con esta investigación que dejamos inconclusa.



## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. G. STRANG y G. J. FIX, "An Analysis of the Finite Element Method ", Prentice Hall, 1973.
2. O.C. ZIENKIEWICZ, "The Finite Element Method" (third edition), Mc. Graw-Hill, 1977.
3. K.J. BATHE y E.L. WILSON, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
4. I. FRIED, "Numerical Solution of Differential Equations", Academic Press, 1979.
5. H.C. MARTIN, "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis", Mc. Graw-Hill, 1966.
6. J.S. PRZEMIENIECKI, "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc. Graw-Hill, 1968.
7. R.W. CLOUGH y J. PENZIEN, "Dynamics of Structures", Mc. Graw-Hill, 1975.
8. W.E. BOYCE y R.C. DI PRIMA, "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", (third edition), John Wiley & Sons, Inc., 1977.
9. G. STRANG, "Linear Algebra and its Applications", (second edition), Academic Press, 1980.
10. B. NOBLE y J.W. DANIEL, "Applied Linear Algebra", (second edition), Prentice Hall, 1977.

11. M. GERADIN , "A Classification and Discussion of Integration Operators for Transient Structural Response", AIAA - Paper, No. 74-105, 1974.
12. C.E. GEAR, "Numerical Initial Value Problems in Ordinary-Differential Equations", Prentice Hall, 1971.
13. P. HENRICI, "Discrete Variable Methods for Ordinary Differential Equations", John Wiley & Sons, 1962.
14. H. GOURGEON, Notas Personales, 1981.
15. J.P. HENNART, Notas Personales, 1981.
16. M. MAKELA, O. NEVANLINNA y A.H. SIPILA, "Exponentially - Fitted Multistep Methods by Generalized Hermite-Birkhoff-Interpolation", BIT 14, Pgs. 437-451, 1974.
17. S.D. CONTE y C. DE BOOR, "Elementary Numerical Analysis", (third edition), Mc. Graw-Hill, 1980.
18. A.R. MITCHELL y R. WAIT, "The Finite Element Method in - Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, 1977.
19. A. CALDERON y otros, "Guía para el uso de la Biblioteca - Básica de Programas de Análisis Numérico: volumen II", -- Comunicaciones Técnicas, No. 62, IIMAS-UNAM, 1983.
- 20.- J.P. HENNART, "Piecewise Continuous Discretization Techniques for Initial Value Problems with Applications to Kinetics and Transport", Comunicaciones Técnicas, No.341 (Serie Naranja), IIMAS-UNAM, 1983.
21. L. SCHUMAKER, "Spline Functions: Basic Theory", Wiley & Sons, 1981.

GET PGV/TODD  
#WORKFILE PGV/TODD: FORTRAN, 1443 RECORDS, SAVED  
#OBJECT FILE PRESENT, SAVED

```
L
100000 C*
100100 C*
100200 C*
100300 C*
100400 C*
100500 C*
100600 C*
100700 C*
100800 C*
100900 FILE 6 (MAXRECSIZE=22)
101000 DIMENSION A(10000),CINT(2,4)
101100 C*
101200 C*
101300 WRITE(6,55)
101400 55 FORMAT(// ' DATOS PARA DISCRETIZACION EN EL ESPACIO: '//)
101500 WRITE(6,65)
101600 65 FORMAT(' No. DE INTERVALOS, ABSCISA INICIAL, ABSCISA FINAL, ',
101700 * ' GRADO DE LAS FUNCIONES BASE, VALOR DE C Y No. DE PUNTOS',
101750 * ' A IMPRIMIR '//)
101800 READ(5,/)NI,XI,XF,IG,C,NIMP
101900 NP=NI*IG-1
101950 NPX2=NP*2
102000 ISAB=IG+1
102100 NDIM=NP*ISAB
102200 IMASS=1
102300 ISTIF=NDIM+1
102400 NBLOKS=NI
102500 IF(IG.EQ.1)NBLOKS=NI-2
102600 IINTS=ISTIF+NDIM
102700 ICOLI=IINTS+(NBLOKS+1)*4
102800 ICOLF=ICOLI+NBLOKS+1
102900 IFILI=ICOLF+NBLOKS+1
103000 C*-
103100 C*
103200 CALL ARRAUX(IG,NI,NBLOKS+1,A(ICOLI),A(ICOLF),A(IFILI),
103300 * A(IINTS),LIPVT,LBLK,NULT,LSCR)
103400 C*
103450 C*
103500 IBLOKS=IFILI+NBLOKS+1
103600 IB=IBLOKS+LBLK
103700 IPVT=IB+LIPVT
103800 IX=IPVT+LIPVT
103900 ISCR=IX+NPX2
103950 IULT=ISCR+LSCR-1
104000 C*
104100 C*
```

Este programa ejecuta los metodos que hemos estudiado.  
Se hace la aplicacion a la solucion de la ecuacion de onda

GET\_PGV/TODO

#WORKFILE PGV/TODO: FORTRAN, 1443 RECORDS, SAVED

#OBJECT FILE PRESENT, SAVED

L

100000 C\*

100100 C\*

100200 C\*

100300 C\*

100400 C\*

100500 C\*

100600 C\*

100700 C\*

100800 C\*

100900 FILE 6 (MAXRECSIZE=22)

101000 DIMENSION A(10000),CINT(2,4)

101100 C\*

101200 C\*

101300

WRITE(6,55)

101400 55 FORMAT(// ' DATOS PARA DISCRETIZACION EN EL ESPACIO: '//)

101500 WRITE(6,65)

101600 65 FORMAT(' No. DE INTERVALOS, ABCISIA INICIAL, ABCISIA FINAL, ',  
101700 \* ' GRADO DE LAS FUNCIONES BASE, VALOR DE C Y No. DE PUNTOS',  
101750 \* ' A IMPRIMIR '//)

101800 READ(5,/)NI,XI,XF,IG,C,NIMP

101900 NP=NI\*IG-1

101950 NPX2=NP\*2

102000 ISAB=IG+1

102100 NDIM=NP\*ISAB

102200 IMASS=1

102300 ISTIF=NDIM+1

102400 NBLOKS=NI

102500 IF(IG.EQ.1)NBLOKS=NI-2

102600 IINTS=ISTIF+NDIM

102700 ICOLI=IINTS+(NBLOKS+1)\*4

102800 ICOLF=ICOLI+NBLOKS+1

102900 IFILI=ICOLF+NBLOKS+1

103000 C\*

103100 C\*

103200

CALL ARRAUX(IG,NI,NBLOKS+1,A(ICOLI),A(ICOLF),A(IFILI),  
103300 \* A(IINTS),LIPVT,LBLK,NULT,LSCR)

103400 C\*

103450 C\*

103500

IBLOKS=IFILI+NBLOKS+1

103600 IB=IBLOKS+LBLK

103700 IPVT=IB+LIPVT

103800 IX=IPVT+LIPVT

103900 ISCR=IX+NPX2

103950 IULT=ISCR+LSCR-1

104000 C\*

104100 C\*

Este programa ejecuta los metodos que hemos estudiado.  
Se hace la aplicacion a la solucion de la ecuacion de onda

```

104200      IF(IULT.LE.10000)GO TO 150
104300      WRITE(6,145)IULT
104400  145  FORMAT(//3X,' A ES MUY PEQUENO; LONGITUD NECESARIA:',I6/)
104500      STOP
104600 C*
104700 C*
104800  150  CALL MASTIF(XI,XF,NI,IG,NP,ISAB,A(ISTIF),A(IMASS),C)
104900 C*
105000 C*
106300      WRITE(6,615)
106400  615  FORMAT(// ' DATOS PARA DISCRETIZACION EN EL TIEMPO: '//)
106500      WRITE(6,625)
106600  625  FORMAT(' CLAVE DEL METODO, LONGITUD DE PASO, P1 Y Q1 ',
106700 *      '(PARAMETROS DE INTERPOLACION), TIPO DE INTERPOLACION',
106800 *      ' Y PARAMETRO LIBRE '//)
106900      READ(5,/)KLAVE,H,P1,Q1,K1,PHI1
107000      IF(KLAVE.EQ.2)GO TO 700
107100      WRITE(6,635)
107200  635  FORMAT(' DATOS PARA 2a. INTERPOLACION EN EL TIEMPO: '//)
107300      READ(5,/)P2,Q2,K2,PHI2
107400 C*
107500 C*
107600  700  CALL COEF(KLAVE,P1,Q1,K1,PHI1,P2,Q2,K2,PHI2,H,CINT)
107700 C*
107800 C*
108400 C*
108500 C*
108600      CALL METODO(KLAVE,CINT,NBLOKS+1,LBLK,NP,ISAB,A(ICOLI),
108700 *      A(ICOLF),A(IFILI),A(IBLOKS),A(IMASS),A(ISTIF))
108800 C*
108900 C*
109600      CALL CBLOK1(NBLOKS,NULT,A(IINTS),A(IBLOKS))
109700      CALL FCBLOK(A(IBLOKS),A(IINTS),NBLOKS,A(IPUT),A(ISCR),IFLAG)
109800 C*
109900 C*
110000      IF(IFLAG.EQ.0)GO TO 900
110100 C*
110200 C*
110300      WRITE(6,835)
110400  835  FORMAT(// ' LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES SINGULAR '//)
110500      STOP
110600 C*
110700 C*
110800  900  WRITE(6,915)
110900  915  FORMAT(//// ' COMIENZAN LAS ITERACIONES. DAR T FINAL E INTERVALO',
110950 *      ' PARA IMPRESION '//)
111000 C*
111100 C*
111200      READ(5,/)TFIN,DTIMP
111250      NWR=DTIMP/H
111300 C*

```

```

111400 C*
111500 CALL INCOND(NP,A(IX),XI,XF)
112300 C*
112400 C*
113100 IWR=0
113200 DO 1000 T=H,TFIN,H
113250 CALL TINDEF(KLAVE,CINT,NBLOKS+1,NP,NPX2,ISAB,A(COLI),
113260 * A(COLF),A(FILI),A(IB),A(IMASS),A(ISTIF),A(IX),H)
113300 CALL CBLOK2(NPX2,NBLOKS,NULT,A(IINTS),A(IB))
113400 CALL SBRLOK(A(IBLOKS),A(IINTS),NBLOKS,A(IPVT),A(IB),
113500 * A(IX))
113509 C*
113510 C*
113520 IWR=IWR+1
113540 IF(IWR.LT.NWR)GO TO 1000
113545 WRITE(6,970)T
113548 970 FORMAT(///// T=',F10.6,/)
113550 CALL ERROR(A(IX),NI,XI,XF,NIMP,IG,NP,T)
113570 IWR=0
113600 C*
113650 C*
113700 C* WRITE(6,953)T
113750 C*953 FORMAT(///// T=',F10.6,/' VALORES DE U: '/')
113800 C* WRITE(6,975)(A(IX+I),I=0,NPX2-1,2)
114000 C* WRITE(6,965)
114100 C*965 FORMAT(/// VALORES DE dU/dt: '/')
114200 C* WRITE(6,975)(A(IX+I),I=1,NPX2-1,2)
114250 C*975 FORMAT(8F12.6)
114300 C*
114350 C*
114600 1000 CONTINUE
114650 C*
114700 C*
114750 1100 STOP
114800 END
115000 C*
115100 C*
115200 C*
115300 C*
115400 C* Esta rutina construye los arreglos auxiliares para
115500 C* resolver el sistema de ecuaciones mediante el uso del pa-
115600 C* quete SLVBLK.
115700 C*
115800 C*
115900 SUBROUTINE ARRAUX(IG,NI,NBL1,COLI,COLF,FILI,INTS,LIPVT,LBLK,NULT,
116000 * LSCR)
116100 INTEGER COLI(NBL1),COLF(NBL1),FILI(NBL1),INTS(4,NBL1),FILIX,FAC
116300 C*
116400 C*
116500 C*
116550 ..... NBLOKS=NBL1-1

```

```

116600      IRL=1
116700      COLI(1)=1
116800      FILI(1)=1
116900      FILIX=2*IG+1
116950      FILI(2)=FILIX
117000      COLF(1)=IG*4
117100      INC=1
117200      FAC=2
117300      IF(IG.EQ.1)GO TO 50
117350      IRL=IRL+1
117400  50   DO 100 I=2,NI
117500          IF (I.NE.NI-1)GO TO 70
117700          INC=0
118100  70   COLI(IRL)=(I-1)*IG*2-1
118200          COLF(IRL)=COLI(IRL)+(2*IG+INC)*FAC-1
118300          FILI(IRL+1)=FILIX+2*IG
118350          FILIX=FILI(IRL+1)+(INC-1)*2
118400          FAC=INC+1
118500          IRL=IRL+1
118550          IF(IRL.GT.NBLOKS)GO TO 120
119400  100  CONTINUE
119600  C*
119700  C*
119800  120  COLI(IRL)=FILI(IRL)
119900      COLF(IRL)=FILI(IRL)
120000      NULT=0
120400      LIPVT=0
120500      LSCR=0
120550      INTS(1,1)=1
120560  C*
120570  C*
120600      DO 200 I=1,NBLOKS
120700          INTS(2,I)=FILI(I+1)-COLI(I)
120800          LIPVT=LIPVT+INTS(2,I)
120900          IF(INTS(2,I).GT.LSCR)LSCR=INTS(2,I)
121000          INTS(3,I)=COLF(I)-COLI(I)+1
121100          INTS(4,I)=COLI(I+1)-COLI(I)
121200          NULT=NULT+(FILI(I+1)-FILI(I))*INTS(3,I)
121300          IF(I.EQ.NBLOKS)GO TO 180
121400          INTS(1,I+1)=INTS(1,I)+INTS(2,I)*INTS(3,I)
121500          GO TO 200
121600  180  LBLK=INTS(1,I)+INTS(2,I)*INTS(3,I)-1
121700  200  CONTINUE
121800  C*
121900  C*
122000      RETURN
122100      END
122200  C*
122300  C*
122400  C*
122500  C*

```

```

122600 C*
122700 C*
122800 C*
122900 C*
123000 C*      Esta rutina construye las matrices de masa y rigidez para
123100 C*      los metodos de un paso que estudiamos.
123200 C*
123300 C*
123400 C*
123500 SUBROUTINE MASTIF(XI,XF,NI,IG,NP,ISAR,KSTIF,MASS,C)
123600 REAL KSTIF,MASS
123700 DIMENSION KSTIF(NP,ISAR),MASS(NP,ISAR),IND(4)
123800 C*
123900 C*
124000          F=1./C**2
124100          P=1.
124200          DO 100 N=1,NP
124300              DO 100 M=1,ISAR
124400                  KSTIF(N,M)=0.
124500                  MASS(N,M)=0.
124600      100  CONTINUE
124700 C*
124800 C*
124900          H=(XF-XI)/NI
125000          DO 500 N=1,NI
125100              X1=XI+(N-1)*H
125200              X2=X1+H
125300              IND(1)=(N-1)*IG
125400              DO 150 M=2,IG+1
125500                  IND(M)=IND(M-1)+1
125600      150  CONTINUE
125700              IMIN=1
125800              IMAX=IG+1
125900              IF(N.EQ.1)IMIN=2
126000              IF(N.EQ.NI)IMAX=IMAX-1
126100              DO 300 I=IMIN,IMAX
126200                  II=IND(I)
126300                  DO 200 J=IMIN,I
126400                      JJ=ISAR-I+J
126500                      KSTIF(II,JJ)=KSTIF(II,JJ)+
126600 *                      FINT(IG,X1,X2,P,I,J,1)
126700                      MASS(II,JJ)=MASS(II,JJ)+
126800 *                      FINT(IG,X1,X2,P,I,J,0)
126900      200  CONTINUE
127000      300  CONTINUE
127100      500  CONTINUE
127200          RETURN
127300          END
127400 C*
127500 C*
127600 C*

```



```

127700 C*
127800 C*
127900 DOUBLE PRECISION FUNCTION FINT(GRADO,X1,X2,F,I,J,ID)
128000 INTEGER GRADO
128100 DOUBLE PRECISION POINT(4),WEIGHT(4),XC,H
128200 C*
128300 C*
128400 C*      Esta funcion proporciona el valor de la integral de la
128500 C*      funcion UIJ (si ID=0) o de su derivada (si ID=1). La
128600 C*      funcion UIJ se elige de acuerdo a los parametros I
128700 C*      o J que especifican el nodo correspondiente. Se usa
128800 C*      una cuadratura de Gauss, con un numero adecuado de
128900 C*      puntos segun el grado de la funcion.
129000 C*
129100 C*
129200      IXG=GRADO-ID      % Si se trata de derivada,
129300 C*      %      el grado disminuye en uno.
129400 C*
129500      GO TO (10,20,30,40),IXG+1
129600 C*
129700 C*
129800      10  POINT(1)=0.
129900      WEIGHT(1)=2.
130000      GO TO 98
130100 C*
130200 C*
130300      20  POINT(2)=0.577350269189626D0
130400      WEIGHT(2)=1.
130500      GO TO 90
130600 C*
130700 C*
130800      30  POINT(2)=0.
130900      POINT(3)=0.774596669241483D0
131000      WEIGHT(2)=0.8888888888888889D0
131100      WEIGHT(3)=0.5555555555555556D0
131200      GO TO 90
131300 C*
131400 C*
131500      40  POINT(3)=0.339981043584856D0
131600      POINT(4)=0.861136311594053D0
131700      WEIGHT(3)=0.652145154862546D0
131800      WEIGHT(4)=0.347854845137454D0
131900 C*
132000 C*
132100      90  LIM=(IXG+1)/2
132200      DO 95 N=1,LIM
132300      POINT(N)=-POINT(IXG+2-N)
132400      95  WEIGHT(N)=WEIGHT(IXG+2-N)
132500 C*
132600 C*
132700      98  FINT=0.

```

```

132800      H=X2-X1
132900      DO 100 N=1,IXG+1
133000          XC=POINT(N)
133100          FINT=FINT+WEIGHT(N)*F*UIJ(GRADO,I, ID,H,XC)*
133200      *          UIJ(GRADO,J, ID,H,XC)
133300      100  CONTINUE
133400          FINT=FINT*(X2-X1)/2.
133500      C*
133600      C*
133700          RETURN
133800          END
133900      C*
134000      C*
134100      C*
134200      C*
134300      C*
134400      C*
134500      DOUBLE PRECISION FUNCTION UIJ(IG,J, ID,H,R)
134600      DOUBLE PRECISION H,R
134700      C*
134800      C*
134900          IDF=ID+1
135000      C*
135100      C*
135200          GO TO (1000,2000,3000),IG
135300      C*
135400      1000  GO TO (1100,1200),IDF
135500      C*
135600      1100  GO TO (1110,1120),J
135700      C*
135800      1110  UIJ=0.5*(1.-R)
135900          RETURN
136000      1120  UIJ=0.5*(1.+R)
136100          RETURN
136200      C*
136300      C*
136400      1200  GO TO (1210,1220),J
136500      C*
136600      1210  UIJ=-1./H
136700          RETURN
136800      1220  UIJ=1./H
136900          RETURN
137000      C*
137100      C*
137200      2000  GO TO (2100,2200),IDF
137300      C*
137400      2100  GO TO (2110,2120,2130),J
137500      C*
137600      2110  UIJ=-0.5*R*(1.-R)
137700          RETURN
137800      2120  UIJ=.1.-R**2

```

```

137900      RETURN
138000  2130  UIJ=0.5*R*(1.+R)
138100      RETURN
138200  C*
138300  C*
138400  2200  GO TO (2210,2220,2230),J
138500  C*
138600  2210  UIJ=(2.*R-1.)/H
138700      RETURN
138800  2220  UIJ=-4.*R/H
138900      RETURN
139000  2230  UIJ=(2.*R+1.)/H
139100      RETURN
139200  C*
139300  C*
139400  3000  GO TO (3100,3200),IDP
139500  C*
139600  3100  GO TO (3110,3120,3130,3140),J
139700  C*
139800  3110  UIJ=(1.-R)*(9.*R**2-1.)/16.
139900      RETURN
140000  3120  UIJ=9.*(R**2-1.)*(3.*R-1.)/16.
140100      RETURN
140200  3130  UIJ=9.*(1.-R**2)*(3.*R+1.)/16.
140300      RETURN
140400  3140  UIJ=(1.+R)*(9.*R**2-1.)/16.
140500      RETURN
140600  C*
140700  C*
140800  3200  GO TO (3210,3220,3230,3240),J
140900  C*
141000  3210  UIJ=(-27.*R**2+18.*R+1.)/(8.*H)
141100      RETURN
141200  3220  UIJ=9.*(9.*R**2-2.*R-3.)/(8.*H)
141300      RETURN
141400  3230  UIJ=9.*(-9.*R**2-2.*R+3.)/(8.*H)
141500      RETURN
141600  3240  UIJ=(27.*R**2+18.*R-1.)/(8.*H)
141700      RETURN
141800      END
141900  C*
142000  C*
142100  C*
142200  C*
142300  C*
142400  C*
142500  C*
142600  C*
142700  C*
142800  C*
142900  C*

```

Rutina de Calculo de los Coeficientes de  
Interpolacion por el Metodo de Hermite-Birkhoff.

```

143000 C*
143100 SUBROUTINE CDEF(KLAVE,P1,Q1,K1,PHI1,P2,Q2,K2,PHI2,H,C)
143200 INTEGER P,Q,P1,Q1,P2,Q2,E
143300 DIMENSION C(2,4),E(2,4),HM(36),HMINV(36),FILA(6),D(6),INDPAR(4)
143400 C*
143500 C*
143600 CALL INITC(C) % Se inicializa C
143700 C*
143800 IF(KLAVE.LT.1.OR.KLAVE.GT.2)GO TO 1000 %
143900 IF(P1.LT.1.OR.P1.GT.2)GO TO 1000 %
144000 IF(Q1.LT.1.OR.Q1.GT.2)GO TO 1000 %
144100 IF(K1.LT.1.OR.K1.GT.2)GO TO 1000 %
144200 IF(KLAVE.EQ.2)GO TO 20 % Chequeo de datos
144300 IF(P2.LT.1.OR.P2.GT.2)GO TO 1000 %
144400 IF(Q2.LT.1.OR.Q2.GT.2)GO TO 1000 %
144500 IF(K2.LT.1.OR.K2.GT.2)GO TO 1000 %
144600 C*
144700 C*
144800 20 F=P1
144900 Q=Q1
145000 PHI=PHI1
145100 K=K1
145200 KVEZ=1
145300 50 CALL INITE(E) % Se inicializa E
145400 C*
145500 L=2 %
145600 M=3 %
145700 KORD=P+Q+1 %
145800 IF(P.GT.1)E(1,1)=1 %
145900 IF(Q.GT.1)E(2,1)=1 %
146000 E(1,2)=1 % Se calcula la matriz
146100 E(2,2)=1 % de incidencia E.
146200 E(1,3)=1 %
146300 E(1,4)=1 %
146400 C* % Se usa solo en el metodo de 2o. orden
146500 C* % para calcular la doble integral.
146600 INDPAR(1)=1 %
146700 INDPAR(2)=3*E(1,1) %
146800 INDPAR(3)=2 % Indpar es una lista
146900 INDPAR(4)=4*E(2,1) % ordenada de los indices
147000 C* % de los parametros que in-
147100 C* % tervienen en el calculo.
147200 C*
147300 80 N=1
147400 DO 100 I=1,L %
147500 DO 100 J=0,M-1 %
147600 IF(E(I,M-J).EQ.0)GO TO 100 %
147700 CALL FUINT(K,I-1,J,KORD,H,PHI,FILA) % Se forma la matriz HM
147800 CALL ENSAMB(HM,FILA,N,KORD) %
147900 N=N+1 %
148000 100 CONTINUE %

```

148100	C*			
148200	C*			
148300		CALL FUINT(K,1,0,KORD,H,PHI,D)	%	Calculo de D.
148400		KORSQ=KORD*KORD		
148500		CALL INVHM(KORD,KORSQ,HM,HMINV)	%	Inversion de HM.
148600	C*			
148700	C*			
148800		INICOL=KORD-P-Q+1	%	
148900		INI=(KORD-P-Q)*KORD	%	
149000		N=1	%	
149100		DO 200 I=INICOL,KORD	%	
149200	150	KONT=INDPAR(N)	%	
149300		N=N+1	%	Calculo de Parametros
149400		IF(KONT.EQ.0)GO TO 150	%	
149500		DO 180 J=1,KORD	%	
149600		C(KVEZ,KONT)=C(KVEZ,KONT)+HMINV(INI+J)*D(J)	%	
149700	180	CONTINUE	%	
149800		INI=INI+KORD	%	
149900	200	CONTINUE	%	
150000	C*			
150100	C*			
150200		IF(KVEZ.GT.1)GO TO 1200	%	Control para hacer
150300		KVEZ=2	%	dos Pasadas.
150400	C*			
150500	C*			
150600		IF(KLAVE.EQ.1)GO TO 500	%	
150700		M=M+1	%	Inicializacion para 2a.
150800		KORD=KORD+1	%	Pasada.(2o. orden)
150900		GO TO 80	%	
151000	C*			
151100	C*			
151200	500	P=P2	%	
151300		Q=Q2	%	
151400		PHI=PHI2	%	Inicializacion para 2a.
151500		K=K2	%	Pasada.(1er. orden)
151600		GO TO 50	%	
151700	C*			
151800	C*			
151900	1000	WRITE(6,2000)		
152000	2000	FORMAT(' ERROR EN LOS DATOS')		
152100	C*			
152200	C*			
152300	1200	RETURN		
152400		END		
152500	C*			
152600	C*			
152700	C*			
152800	C*			
152900	C*			
153000	C*			
153100	C*			

Subrutinas Auxiliares.

```

153200 C*
153300 SUBROUTINE INITE(E)
153400 DIMENSION E(2,4)
153500 INTEGER E
153600     DO 100 I=1,2
153700     DO 100 J=1,4
153800     100   E(I,J)=0
153900 C*
154000     RETURN
154100     END
154200 C*
154300 C*
154400 C*
154500 C*
154600 C*
154700 SUBROUTINE INITC(C)
154800 DIMENSION C(2,4)
154900     DO 100 I=1,2
155000     DO 100 J=1,4
155100     100   C(I,J)=0.
155200 C*
155300     RETURN
155400     END
155500 C*
155600 C*
155700 C*
155800 C*
155900 C*
156000 SUBROUTINE ENSAMB(HM,FILA,N,KORD)
156100 DIMENSION HM(36),FILA(6)
156200 C*
156300 C*
156400 C*   La presente subrutina guarda en los lugares adecuados los ele-
156500 C*   mentos de una fila de la matriz HM, que estan contenidos en el
156600 C*   arreglo FILA.
156700 C*
156800 C*
156900     INDICE=N
157000     DO 100 I=1,KORD
157100     HM(INDICE)=FILA(I)
157200     INDICE=INDICE+KORD
157300     100   CONTINUE
157400 C*
157500     RETURN
157600     END
157700 C*
157800 C*
157900 C*
158000 C*
158100 C*
158200 SUBROUTINE FUINT(K,I,J,KORD,H,PHI,VEC)

```

```

158300 DIMENSION VEC(6)
158400 C*
158500 C*
158600 C* La presente rutina proporciona los valores de las funciones
158700 C* de interpolacion requeridas, segun el caso. Las devuelve
158800 C* dentro del arreglo VEC.
158900 C*
159000 C*
159100 AI=I
159200 T=AI*H
159300 ARG=PHI*T
159400 DO 50 N=1,6 %
159500 VEC(N)=0. % Inicializacion de VEC.
159600 50 CONTINUE %
159700 C*
159800 C*
159900 IF(K.GT.2)GO TO 2000 % Los valores admisibles de K
160000 C* % son K=1, para interpolacion
160100 C* % polinomica y K=2, para inter-
160200 C* % polacion trisonometrica.
160300 C*
160400 C*
160500 1000 GO TO(1100,1200,1300,1400),J+1
160600 C*
160700 C*
160800 1100 IF(K.EQ.1)GO TO 1105 %
160900 VEC(KORD)=COS(ARG) %
161000 VEC(KORD-1)=SIN(ARG) %
161100 GO TO(1130,1140,1150,1160),7-KORD %
161200 1105 GO TO(1110,1120,1130,1140),7-KORD %
161300 1110 VEC(6)=T**5 % Funciones de Interpo-
161400 1120 VEC(5)=T**4 % lacion sin derivar.
161500 1130 VEC(4)=T**3 %
161600 1140 VEC(3)=T**2 %
161700 1150 VEC(2)=T %
161800 1160 VEC(1)=1. %
161900 GO TO 9000 %
162000 C*
162100 C*
162200 1200 IF(K.EQ.1)GO TO 1205 %
162300 VEC(KORD)=-PHI*SIN(ARG) %
162400 VEC(KORD-1)=PHI*COS(ARG) %
162500 GO TO(1230,1240,1250,9000),7-KORD %
162600 1205 GO TO(1210,1220,1230,1240),7-KORD %
162700 1210 VEC(6)=5.*T**4 % las derivadas de las fun-
162800 1220 VEC(5)=4.*T**3 % ciones de interpolacion
162900 1230 VEC(4)=3.*T**2 %
163000 1240 VEC(3)=2.*T %
163100 1250 VEC(2)=1. %
163200 GO TO 9000 %
163300 C*

```

```

163400 C*
163500 1300 IF(K.EQ.1)GO TO 1305 %
163600 VEC(KORD)=-PHI**2*COS(ARG) %
163700 VEC(KORD-1)=-PHI**2*SIN(ARG) %
163800 GO TO (1330,1340,9000),7-KORD %
163900 1305 GO TO (1310,1320,1330),7-KORD % 2as. derivadas de las fun
164000 1310 VEC(6)=20.*T**3 % ciones de interpolacion
164100 1320 VEC(5)=12.*T**2 %
164200 1330 VEC(4)=6.*T %
164300 1340 VEC(3)=2. %
164400 GO TO 9000 %
164500 C*
164600 C*
164700 1400 IF(K.EQ.1)GO TO 1405 %
164800 VEC(KORD)=PHI**3*SIN(ARG) %
164900 VEC(KORD-1)=-PHI**3*COS(ARG) %
165000 GO TO(1430,9000),7-KORD %
165100 1405 GO TO(1410,1420),7-KORD % 3as. derivadas de las fun
165200 1410 VEC(6)=60.*T**2 % ciones de interpolacion
165300 1420 VEC(5)=24.*T %
165400 1430 VEC(4)=6. %
165500 GO TO 9000 %
165600 C*
165700 C*
165800 2000 WRITE(6,2050)K
165900 2050 FORMAT(' LA OPCION DE INTERPOLACION No.',I2,' NO HA SIDO IM',
166000 * 'PLEMENTADA')
166100 C*
166200 C*
166300 9000 RETURN
166400 END
166500 C*
166600 C*
166700 C*
166800 C*
166900 C*
167000 SUBROUTINE INVHM(KORD,KORSQ,HM,HMINV)
167100 DIMENSION HM(KORSQ),HMINV(KORSQ),B(6),IPIVOT(6)
167200 C*
167300 C*
167400 C* Esta subrutina invierte matrices.
167500 C*
167600 C*
167700 CALL FACTOR(HM,KORD,B,IPIVOT,IFLAG) % Se factoriza HM
167800 C*
167900 IF(IFLAG.EQ.0)GO TO 500 % IFLAG=0 significa
168000 C* % matriz singular.
168100 C*
168200 DO 50 I=1,KORD
168300 50 B(I)=0.
168400 C*

```



```

168500 C*
168600 IREG=1 %
168700 DO 70 I=1,KORD %
168800 B(I)=1. % Calculo de la inversa
168900 CALL SUBST(HM,IPIVOT,B,KORD,HMINV(IREG))
169000 B(I)=0. %
169100 70 IREG=IREG+KORD %
169200 RETURN
169300 C*
169400 C*
169500 500 WRITE(6,510)
169600 510 FORMAT('1 LA MATRIZ ES SINGULAR')
169700 RETURN
169800 END
169900 C*
170000 C*
170100 C*
170200 C*
170300 C*
170400 SUBROUTINE SUBST(W,IPIVOT,B,N,X)
170500 DIMENSION B(N),W(N,N),X(N),IPIVOT(N)
170600 C*
170700 C*
170800 C* Esta rutina realiza la sustitucion de los valores conocidos
170900 C* en la matriz factorizada.
171000 C*
171100 C*
171200 IP=IPIVOT(1)
171300 X(1)=B(IP)
171400 C*
171500 C*
171600 DO 15 I=2,N
171700 SUM=0.
171800 DO 14 J=1,I-1
171900 14 SUM=W(I,J)*X(J)+SUM
172000 IP=IPIVOT(I)
172100 15 X(I)=B(IP)-SUM
172200 C*
172300 C*
172400 X(N)=X(N)/W(N,N)
172500 C*
172600 C*
172700 DO 20 IX=1,N-1
172800 I=N-IX
172900 SUM=0.
173000 DO 19 J=I+1,N
173100 19 SUM=W(I,J)*X(J)+SUM
173200 20 X(I)=(X(I)-SUM)/W(I,I)
173300 C*
173400 C*
173500 RETURN

```

```

173600      END
173700 C*
173800 C*
173900 C*
174000 C*
174100 C*
174200 SUBROUTINE FACTOR(W,N,D,IPIVOT,IFLAG)
174300 DIMENSION IPIVOT(N),D(N),W(N,N)
174400 C*
174500 C*
174600 C*      Esta rutina realiza la factorizacion de HM.
174700 C*
174800 C*
174900      IFLAG=1
175000 C*
175100 C*
175200      DO 9 I=1,N                                %
175300          IPIVOT(I)=I                          %
175400          ROWMAX=0.                             %
175500          DO 5 J=1,N                            %
175600              ROWMAX=AMAX1(ROWMAX,ABS(W(I,J)))  %
175700      5  CONTINUE                               %      Inicializacion de IPIVOT
175800          IF(ROWMAX.NE.0)GO TO 8                %      y D.
175900          IFLAG=0                                %
176000          ROWMAX=1.                              %
176100          GO TO 30                               %
176200      8  D(I)=ROWMAX                             %
176300      9  CONTINUE                               %
176400 C*
176500 C*
176600 C*      A continuacion, la factorizacion.
176700 C*
176800 C*
176900      DO 20 K=1,N-1
177000 C*
177100 C*
177200          COLMAX=ABS(W(K,K))/D(K)                  %
177300          ISTAR=K                                  %
177400          DO 13 I=K+1,N                            %
177500              AWIKOD=ABS(W(I,K))/D(I)             %
177600              IF(AWIKOD.LE.COLMAX)GO TO 13        %      Determinacion de la fila
177700              COLMAX=AWIKOD                         %      pivotal.(Fila ISTAR).
177800              ISTAR=I                               %
177900      13  CONTINUE                               %
178000 C*
178100 C*
178200      IF(COLMAX.NE.0)GO TO 14
178300          IFLAG=0
178400          GO TO 16
178500      14  IF(ISTAR.LE,K)GO TO 16
178600 C*

```

```

178700 C*
178800 IFLAG=-IFLAG %
178900 I=IPIVOT(ISTAR) %
179000 IPIVOT(ISTAR)=IPIVOT(K) %
179100 IPIVOT(K)=I %
179200 TEMP=D(ISTAR) %
179300 D(ISTAR)=D(K) %
179400 D(K)=TEMP %
179500 DO 15 J=1,N %
179600 TEMP=W(ISTAR,J) %
179700 W(ISTAR,J)=W(K,J) %
179800 W(K,J)=TEMP %
179900 C*
180000 C*
180100 16 DO 19 I=K+1,N %
180200 W(I,K)=W(I,K)/W(K,K) %
180300 RATIO=W(I,K) %
180400 DO 19 J=K+1,N %
180500 W(I,J)=W(I,J)-RATIO*W(K,J) %
180600 19 CONTINUE %
180700 20 CONTINUE
180800 IF(W(N,N).EQ.0)IFLAG=0
180900 C*
181000 C*
181100 30 RETURN
181200 END
181300 C*
181400 C*
181500 C*
181600 C*
181700 C*
181800 C*
181900 C*
182000 C*
182100 C*
182200 C*
182300 C*
182400 C*
182500 C*
182600 SUBROUTINE METODO(KLAVE,C,NBLK1,LBLK,NP,ISAB,COLI,COLF,FILI,ARRAY,
182700 * MASS,KSTIF)
182800 DIMENSION C(2,4),Q(5),COLI(NBLK1),COLF(NBLK1),FILI(NBLK1),
182900 * ARRAY(LBLK),MASS(NP,ISAB),KSTIF(NP,ISAB)
183000 REAL MASS,KSTIF
183100 INTEGER COLI,COLF,FILI
183200 C*
183300 C*
183400 C*
183500 C*
183600 C*
183700 C*

```

Haga K la fila pivote,  
intercambiandola con  
la fila escosida ISTAR

Elimine X(K) de las  
filas K+1,...,N

Esta rutina construye la matriz general de coeficien-  
tes de las incosnitas para la familia de metodos que estudia-  
mos. Esta rutina no es de uso general; se ha disenado especifi-  
camente para el ejemplo numerico de la ecuacion de onda.

```

183800      IF(KLAVE.EQ.1)GO TO 300
183900      IF(KLAVE.EQ.2)GO TO 400
184000      WRITE(6,250)KLAVE
184100      250      FORMAT('  CLAVE INCORRECTA: ',I2)
184200      RETURN
184300      C*
184400      C*
184500      300      Q(1)=C(2,4)
184600      Q(2)=C(1,2)
184700      Q(3)=-C(2,2)
184800      Q(4)=0.
184900      Q(5)=C(1,4)
185000      GO TO 1000
185100      C*
185200      C*
185300      400      Q(1)=C(2,2)
185400      Q(2)=C(1,2)
185500      Q(3)=0.
185600      Q(4)=C(2,4)
185700      Q(5)=C(1,4)
185800      C*
185900      C*
186000      1000     INDICE=1
186100      DO 1500 K=1,NBLK1-1
186200      INICOL=(COLI(K)+1)/2
186300      INIFIL=(FILI(K)+1)/2
186400      LIMCOL=(COLF(K)-COLI(K)+1)/2
186500      LIMFIL=(FILI(K+1)-FILI(K))/2
186600      DO 1400 J=0,LIMCOL-1
186700      JBEG=INICOL+J
186800      DO 1200 I=0,LIMFIL-1
186900      IBEG=INIFIL+I
187000      CALL TRAN(IBEG,JBEG,INEW,JNEW,ISAB)
187100      ARRAY(INDICE)=MASS(INEW,JNEW)+Q(1)*
187200      *          KSTIF(INEW,JNEW)
187300      ARRAY(INDICE+1)=Q(2)*KSTIF(INEW,JNEW)
187400      INDICE=INDICE+2
187500      1200     CONTINUE
187600      DO 1300 I=0,LIMFIL-1
187700      IBEG=INIFIL+I
187800      CALL TRAN(IBEG,JBEG,INEW,JNEW,ISAB)
187900      ARRAY(INDICE)=Q(3)*MASS(INEW,JNEW)+
188000      *          Q(4)*KSTIF(INEW,JNEW)
188100      ARRAY(INDICE+1)=MASS(INEW,JNEW)+Q(5)*
188200      *          KSTIF(INEW,JNEW)
188300      INDICE=INDICE+2
188400      1300     CONTINUE
188500      1400     CONTINUE
188600      1500     CONTINUE
188700      RETURN
188800      -----END-----

```

```

188900 C*
189000 C*
189100 C*
189200 C*
189300 C*
189400 SUBROUTINE TRAN(I,J,INEW,JNEW,ISAB)
189500 C*
189600 C*
189700 C*
189800         INEW=I
189900         JNEW=J
190000         IF(INEW.GE.JNEW)GO TO 100
190100         KTEMP=INEW
190200         INEW=JNEW
190300         JNEW=KTEMP
190400     100     JNEW=ISAB-INEW+JNEW
190420         IF(JNEW.GT.0)GO TO 200
190440         INEW=1           % Truco: si nos salimos de los li-
190460         JNEW=1           % mites del arreglo, TRAN da una
190480         %                 % direccion ficticia que correspon-
190490         %                 % de a un elemento de valor cero.
190500     200     RETURN
190600         END
190700 C*
190800 C*
190900 C*
191000 C*
191100 C*
191200 SUBROUTINE TINDEP(KLAVE,C,NBLK1,NP,NPX2,ISAB,COLI,COLF,FILI,B,
191300 *      MASS,KSTIF,U,H)
191400 DIMENSION Q(5),C(2,4),COLI(NBLK1),COLF(NBLK1),FILI(NBLK1),
191500 *      B(NPX2),MASS(NP,ISAB),KSTIF(NP,ISAB),U(NPX2)
191600 INTEGER COLI,COLF,FILI
191700 REAL MASS,KSTIF
191800 C*
191900 C*
192000 C*
192100         IF(KLAVE.EQ.1)GO TO 100
192200         IF(KLAVE.EQ.2)GO TO 200
192300 C*
192400 C*
192500         WRITE(5,55)KLAVE
192600     55     FORMAT(' CLAVE INCORRECTA: ',I2)
192700         RETURN
192800 C*
192900 C*
193000     100     Q(1)=-C(2,3)
193100         Q(2)=-C(1,1)
193200         Q(3)= C(2,1)
193300         Q(4)= 0.
193400         Q(5)=-C(1,3)

```

```

193500      GO TO 300
193600 C*
193700 C*
193800 200  Q(1)=-C(2,1)
193900      Q(2)=-C(1,1)
194000      Q(3)= H
194100      Q(4)=-C(2,3)
194200      Q(5)=-C(1,3)
194300 C*
194400 C*
194500 300  IRL=1
194600      INICOL=(COLI( IRL)+1)/2
194700      LIMCOL=COLF( IRL)/2
194800      DO 500 I=1,NP
195000          IX=I*2-1
195050          R(IX)=0.
195060          R(IX+1)=0.
195100          IF(IX.LT.FILI( IRL+1))GO TO 350
195200          IRL=IRL+1
195300          INICOL=(COLI( IRL)+1)/2
195400          LIMCOL=COLF( IRL)/2
195500 C*
195600 C*
195700 350  DO 400 J=INICOL,LIMCOL
195800          CALL TRAN(I,J,INEW,JNEW,ISAB)
195900          R(IX)=R(IX)+(MASS(INEW,JNEW)+Q(1)*KSTIF(INEW,JNEW))*
196000 *          U(2*J-1)
196100          R(IX)=R(IX)+(MASS(INEW,JNEW)*Q(3)+KSTIF(INEW,JNEW)*
196200 *          Q(4))*U(2*J)
196300 400  CONTINUE
196400 C*
196500 C*
196600      DO 450 J=INICOL,LIMCOL
196700          CALL TRAN(I,J,INEW,JNEW,ISAB)
196800          R(IX+1)=R(IX+1)+KSTIF(INEW,JNEW)*Q(2)*U(2*J-1)
196900          R(IX+1)=R(IX+1)+(MASS(INEW,JNEW)+Q(5)*KSTIF(INEW,JNEW))*
197000 *          *U(2*J)
197100 450  CONTINUE
197150 500  CONTINUE
197200 C*
197300 C*
197400      RETURN
197500      END
197600 C*
197700 C*
197800 C*
197900 C*
198000 C*
198100 C*
198200 C*
198300 C*  Esta rutina proporciona los valores iniciales de U y de
      du/dt. Para un problema particular de prueba. La ecuacion

```

```

198400 C*      de U inicial es U(:,0)=2 * sin( 3.14159*:/5 ) y la ecua-
198500 C*      cion de dU/dt inicial es dU/dt(:,0)=0.
198600 C*
198700 C*
198800 SUBROUTINE INCOND(NP,A,XI,XF)
198900 DIMENSION A(2,NP)
199000 C*
199100 C*
199200      H=(XF-XI)/(NP+1)
199300      X=0.
199400      DO 500 I=1,NP
199500          X=X+H
199600          A(1,I)=2.*SIN(3.1415926*X/5.)
199700          A(2,I)=0.
199800 500  CONTINUE
199900      RETURN
200000      END
200100 C*
200200 C*
200300 C*
200400 C*
200500 C*
200600 C*
200700 C*
200800 C*
200900 C*
201000 C*
201100 C*
201200 C*      La siguiente subrutina calcula las magnitudes de error
201300 C*      en relacion con la solucion exacta.
201400 C*
201500 C*
201600 C*
201700 SUBROUTINE ERROR(U,NI,XI,XF,NIMP,IG,NP,T)
201800 DIMENSION UX(4),U(2,NP)
201850 DOUBLE PRECISION HE,R
201900 C*
202000 C*
202100      E=0.
202200      E2=0.
202300      NMAX=1
202400      HE=(XF-XI)/FLOAT(NI)
202500      HIMP=(XF-XI)/FLOAT(NIMP-1)
202600 C*
202700 C*
202800      DO 100 N=1,NIMP
202850          UA=0.
202900          XIMP=XI+(N-1)*HIMP
203000          DO 10 M=1,NI
203100              X1=XI+(M-1)*HE
203200              IF(X1.LE.XIMP)GO TO 10

```

```

203300      II=M-1
203400      GO TO 20
203500  10    CONTINUE
203600      II=NI
203700  20    X1=XI+(II-1)*HE
203800      X2=X1+HE
203900      INI=1
204000      IFI=IG+1
204100      IND=(II-1)*IG
204200      IF(IND.GE.1)GO TO 25
204300      UX(1)=0.
204400      INI=2
204500      GO TO 30
204600  25    IF(IND+IG.LE.NP)GO TO 30
204700      UX(IG+1)=0.
204800      IFI=IG-1
204900  30    DO 40 I=INI,IFI
205000          UX(I)=U(1,IND-1+I)
205100  40    CONTINUE
205200      R=(2*XIMP-X1-X2)/HE
205300      DO 50 J=1,IG+1
205400          UA=UA+UX(J)*UIJ(IG,J,0,HE,R)
205500  50    CONTINUE
205600      UE=FEX(XIMP,T)
205700      ER=UE-UA
205800      IF(ABS(ER).LE.E)GO TO 60
205900      E=ABS(ER)
206000      NMAX=N
206100  60    E2=E2+ER**2
206200      WRITE(6,1100)XIMP,UE,UA,ER
206300 1100    FORMAT(' XIMP=',E12.6,3X,' UEX=',E12.6,3X,' UAP=',E12.6,
206400 *          3X,' ERROR=',E12.6)
206500 100    CONTINUE
206550      E2=SQRT(E2/NIMP)
206560      XMAX=XI+(NMAX-1)*HIMP
206600      WRITE(6,1200)E,XMAX,E2
206700 1200    FORMAT(///' ERROR MAXIMD=',E12.6,2X,' EN X=',E12.6//
206800 *          ' EL ERROR L2 ES=',E12.6)
206900 C*
207000 C*
207100      RETURN
207200      END
207300 C*
207400 C*
207500 C*
207600 C*
207700 C*
207800 FUNCTION FEX(X,T)
207900 C*
208000 C*
208100      P=3.1415926*X/5.

```



```

208200      FEX=SIN(P-2*T)+SIN(P+2*T)
208300 C*
208400 C*
208500      RETURN
208600      END
208700 C*
208800 C*
210000 *RESET FREE
210100      SUBROUTINE FCBLK (BLOKS, INTEGS, NBLOKS, IPIVOT, SCRATCH, IFLAG)
210200      REAL BLOKS(1), SCRATCH(1)
210300      INTEGER INTEGS(4,NBLOKS), NBLOKS, IPIVOT(1), IFLAG
210400 C-----
210500 C THIS IS THE JANUARY 23, 1978 VERSION OF ABD, A PACKAGE FOR THE
210600 C SOLUTION OF ALMOST BLOCK DIAGONAL LINEAR SYSTEMS A*X = B.
210700 C
210800 C WRITTEN BY C. DEBOOR AND R. WEISS, AND MODIFIED AT
210900 C LAWRENCE LIVERMORE LABORATORY BY J. A. DYER AND A. C. HINDMARSH.
211000 C
211100 C REFERENCE.. CARL DEBOOR AND RICHARD WEISS, SOLVERBLOK.. A PACKAGE
211200 C FOR SOLVING ALMOST BLOCK DIAGONAL LINEAR SYSTEMS, WITH APPLICATIONS
211300 C TO SPLINE APPROXIMATION AND THE NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY
211400 C DIFFERENTIAL EQUATIONS, MRC TECHNICAL SUMMARY REPORT,
211500 C UNIVERSITY OF WISCONSIN, MADISON, WISC., MARCH 1976.
211600 C
211700 C TO USE THIS PACKAGE, CALL FCBLK TO FACTOR THE MATRIX A, AND THEN
211800 C CALL SBBLOK FOR EACH RIGHT-HAND SIDE VECTOR B TO SOLVE THE SYSTEM.
211900 C FACTRB, SHIFTR, SUBFOR, AND SUBBAK ARE AUXILIARY SUBROUTINES CALLED
212000 C BY THE PACKAGE, NOT BY THE USER.
212100 C
212200 C THE ELEMENTS OF THE N BY N MATRIX A ARE ASSUMED TO OCCUR IN
212300 C NBLOKS BLOCKS ALONG THE MAIN DIAGONAL, AND STORED IN THE ARRAY BLOKS.
212400 C THE BLOCK STRUCTURE OF A IS COMMUNICATED IN THE ARRAY INTEGS,
212500 C IN TERMS OF THE FOLLOWING NOTATION..
212600 C FOR K = 1,2,...,NBLOKS, BLOCK K CONSISTS OF THE ELEMENTS A(I,J) OF A
212700 C IN ROWS E(K) THROUGH E(K+1) - 1 AND IN COLUMNS ALPHA(K) THROUGH
212800 C BETA(K). THAT IS, THE INDICES IN BLOCK K SATISFY
212900 C E(K) .LE. I .LT. E(K+1) AND ALPHA(K) .LE. J .LE. BETA(K).
213000 C HOWEVER, THE STORAGE FOR BLOCK K IN THE ARRAY BLOKS IS EXTENDED
213100 C UPWARD TO INCLUDE ROWS ALPHA(K) THROUGH E(K) - 1 ALSO.
213200 C THUS THE EXTENDED BLOCK K COVERS ROWS ALPHA(K) THROUGH E(K+1) - 1.
213300 C HERE E AND ALPHA ARE INCREASING SEQUENCES AND BETA IS A
213400 C NONDECREASING SEQUENCE, WITH THE CONSTRAINTS
213500 C E(1) = ALPHA(1) = 1, E(NBLOKS+1) = ALPHA(NBLOKS+1) = N + 1,
213600 C BETA(NBLOKS) = N, ALPHA(K) .LE. E(K), E(K+1) .LE. BETA(K) + 1.
213700 C
213800 C THE CALLING SEQUENCES OF FCBLK AND SBBLOK ARE AS FOLLOWS..
213900 C
214000 C      CALL FCBLK (BLOKS, INTEGS, NBLOKS, IPIVOT, SCRATCH, IFLAG)
214100 C      IF (IFLAG .NE. 0) ((STOP OR PERFORM DIAGNOSTICS))
214200 C      CALL SBBLOK (BLOKS, INTEGS, NBLOKS, IPIVOT, B, X)
214300 C

```

214400 C THE ARGUMENTS IN THE ABOVE CALL SEQUENCES ARE DESCRIBED AS FOLLOWS..  
214500 C  
214600 C NBLOKS = THE NUMBER OF BLOCKS IN THE MATRIX A.  
214700 C INTEGS = A 4 BY NBLOKS INTEGER ARRAY CONTAINING BLOCK  
214800 C STRUCTURE INFORMATION AS FOLLOWS..  
214900 C INTEGS(1,K) = INDEX(K) = 1 + SUM(J = 1 TO K-1)NROW(J)\*NCOL(J)  
215000 C = STARTING LOCATION OF BLOCK K (EXTENDED) IN BLOKS.  
215100 C INTEGS(2,K) = NROW(K) = E(K+1) - ALPHA(K)  
215200 C = NUMBER OF ROWS IN BLOCK K (EXTENDED).  
215300 C INTEGS(3,K) = NCOL(K) = BETA(K) + 1 - ALPHA(K)  
215400 C = NUMBER OF COLUMNS IN BLOCK K.  
215500 C INTEGS(4,K) = LAST(K) = ALPHA(K+1) - ALPHA(K)  
215600 C = NUMBER OF ROWS ON WHICH ELIMINATION OPERATIONS  
215700 C ARE DONE IN BLOCK K.  
215800 C BLOKS = A ONE DIMENSIONAL REAL ARRAY CONTAINING ELEMENTS  
215900 C OF A ON INPUT TO FCBLK, AND ELEMENTS OF  
216000 C AN LU FACTORIZATION OF A ON OUTPUT FROM FCBLK.  
216100 C ON INPUT TO FCBLK, BLOKS IS TO CONTAIN THE  
216200 C NONZERO ELEMENTS OF A BY BLOCKS. THE ELEMENTS IN BLOCK K  
216300 C ARE STORED IN LOCATIONS INDEX(K) THROUGH INDEX(K+1) - 1  
216400 C IN BLOKS. (INDEX(NBLOKS+1) IS DEFINED BY THE FORMULA  
216500 C ABOVE, BUT IS NOT STORED IN INTEGS.) EACH BLOCK IS STORED  
216600 C IN COLUMNWISE ORDER, AND FOR K .GT. 1, THE POSITIONS IN  
216700 C BLOCK K OF BLOKS CORRESPONDING TO ROWS ALPHA(K) THROUGH  
216800 C E(K) - 1 OF A CAN BE LOADED ARBITRARILY, OR NOT AT ALL.  
216900 C (THESE ELEMENTS ARE STORED IN BLOCK K - 1 OF BLOKS.)  
217000 C NOTE THAT FCBLK MODIFIES THE BLOKS ARRAY.  
217100 C IPIVOT = AN INTEGER ARRAY USED FOR WORKING STORAGE FOR PIVOT  
217200 C INFORMATION, OF LENGTH SUM(K = 1 TO NBLOKS)NROW(K).  
217300 C SCRTCH = A REAL ARRAY OF WORKING STORAGE (FCBLK ONLY) OF  
217400 C LENGTH MAX(OVER K)NROW(K).  
217500 C IFLAG = AN INTEGER FLAG (FCBLK ONLY) WITH THE FOLLOWING VALUES..  
217600 C = 0 IF NO TROUBLE OCCURRED.  
217700 C = K IF A WAS FOUND TO BE SINGULAR IN PROCESSING BLOCK K.  
217800 C B = A REAL ARRAY (SBBLOK ONLY) CONTAINING THE RIGHT-HAND  
217900 C SIDE VECTOR IN BLOCK FORM, WITH THE EXTENDED BLOCK SIZES.  
218000 C THE LENGTH OF B IS SUM(K = 1 TO NBLOKS)NROW(K).  
218100 C DEFINE INDEXB(K) = 1 + SUM(J = 1 TO K-1)NROW(J).  
218200 C THEN VECTOR COMPONENTS E(K) THROUGH E(K+1) - 1 ARE STORED  
218300 C IN LOCATIONS INDEXB(K) + E(K) - ALPHA(K) THROUGH  
218400 C INDEXB(K+1) - 1 IN THE ARRAY B. LOCATIONS INDEXB(K)  
218500 C THROUGH INDEXB(K) + E(K) - ALPHA(K) - 1 CAN BE FILLED  
218600 C ARBITRARILY.  
218700 C X = A REAL ARRAY (SBBLOK ONLY) OF LENGTH N CONTAINING THE  
218800 C SOLUTION VECTOR ON OUTPUT.  
218900 C  
219000 C FOR THE CALL TO FCBLK, THE INPUT ARGUMENTS ARE BLOKS, INTEGS, AND  
219100 C NBLOKS, AND THE OUTPUT ARGUMENTS ARE BLOKS, IPIVOT, AND IFLAG.  
219200 C IFLAG MUST BE TESTED ON RETURN FROM FCBLK, AND SBBLOK MUST NOT  
219300 C BE CALLED IF IFLAG IS NOT 0.  
219400 C FOR THE CALL TO SBBLOK, THE INPUT ARGUMENTS ARE BLOKS, INTEGS,

```

219500 C NBLOKS, IPIVOT, AND B, AND THE OUTPUT ARGUMENT IS X.
219600 C THE CONTENTS OF BLOKS AND IPIVOT MUST NOT BE DISTURBED
219700 C BETWEEN A CALL TO FCBLOK AND ANY SUBSEQUENT CALLS TO SBBLOK FOR
219800 C THE SAME MATRIX.
219900 C-----
220000     INTEGER INDEXB, INDEXN, I, INDEX, NROW, NCOL, LAST
220100 C
220200     IFLAG = 0
220300 C
220400 C LOOP ON I, OVER THE BLOCKS OF THE MATRIX.
220500     INDEXB = 1
220600     INDEXN = INTEGS(1,1)
220700     I = 1
220800 10    INDEX = INDEXN
220900     NROW = INTEGS(2,I)
221000     NCOL = INTEGS(3,I)
221100     LAST = INTEGS(4,I)
221200 C FACTOR THE I-TH BLOCK.
221300     CALL FACTRB(BLOKS(INDEX),IPIVOT(INDEXB),SCRATCH,NROW,NCOL,
221400     1      LAST,IFLAG)
221500     IF (IFLAG .NE. 0) GO TO 30
221600     IF (I .EQ. NBLOKS) RETURN
221700 C IF NOT DONE, SHIFT NONPIVOTAL ROWS TO NEXT BLOCK.
221800     I = I + 1
221900     INDEXN = INTEGS(1,I)
222000     IF (LAST .EQ. NROW .OR. LAST .EQ. NCOL) GO TO 20
222100     CALL SHIFTR(BLOKS(INDEX),NROW,NCOL,LAST,
222200     1      BLOKS(INDEXN),INTEGS(2,I),INTEGS(3,I))
222300 20    INDEXB = INDEXB + NROW
222400     GO TO 10
222500 C
222600 C ERROR RETURN. MATRIX IS SINGULAR.
222700 30    IFLAG = I
222800     RETURN
222900     END
223000     SUBROUTINE FACTRB (W, IPIVOT, D, N, NCOL, LAST, IFLAG)
223100     REAL W(N,NCOL), D(N)
223200     INTEGER IPIVOT(N), N, NCOL, LAST, IFLAG
223300 C-----
223400 C FACTRB IS CALLED BY FCBLOK AND DOES FACTORIZATION OPERATIONS
223500 C ON A SINGLE BLOCK OF THE MATRIX.
223600 C RETURNS IFLAG = K IF TOO SMALL A PIVOT WAS FOUND AT STAGE K.
223700 C-----
223800     REAL ROWMAX, COLMAX, AWIKOV, T
223900     INTEGER I, J, K, IPK, KP1, IP, JJ
224000 C
224100 C INITIALIZE IPIVOT AND LOAD ROW NORMS IN D.
224200     DO 10 I = 1,N
224300         IPIVOT(I) = I
224400         ROWMAX = 0.
224500         DO 5 J = 1,NCOL

```

```

224600 5      ROWMAX = AMAX1(ROWMAX, ABS(W(I,J)))
224700      IF (ROWMAX .EQ. 0.) GO TO 90
224800      D(I) = ROWMAX
224900 10      CONTINUE
225000 C GAUSS ELIMINATION WITH SCALED PARTIAL PIVOTING. LOOP OVER K.
225100      K = 1
225200 20      IPK = IPIVOT(K)
225300      IF (K .EQ. N) GO TO 80
225400      J = K
225500      KP1 = K + 1
225600      COLMAX = ABS(W(IPK,K))/D(IPK)
225700 C FIND PIVOT LOCATION IN COLUMN K.
225800      DO 30 I = KP1,N
225900          IP = IPIVOT(I)
226000          AWIKOV = ABS(W(IP,K))/D(IP)
226100          IF (AWIKOV .LE. COLMAX) GO TO 30
226200          COLMAX = AWIKOV
226300          J = I
226400 30      CONTINUE
226500 C INTERCHANGE ROWS K AND J (THE PIVOT ROW).
226600      DO 40 JJ = 1,NCOL
226700          T = W(J,JJ)
226800          W(J,JJ) = W(K,JJ)
226900          W(K,JJ) = T
227000 40      CONTINUE
227100      IPIVOT(K) = J
227200      T = D(K)
227300      D(K) = D(J)
227400      D(J) = T
227500 C TEST FOR TOO SMALL A PIVOT.
227600      IF (ABS(W(K,K))+D(K) .LE. D(K)) GO TO 90
227700 C STORE MULTIPLIERS (L ELEMENTS).
227800      T = 1./W(K,K)
227900      DO 50 I = KP1,N
228000 50      W(I,K) = W(I,K)*T
228100 C APPLY MULTIPLIERS (GET U ELEMENTS).
228200      DO 70 J = KP1,NCOL
228300          T = W(K,J)
228400          DO 60 I = KP1,N
228500 60      W(I,J) = -W(I,K)*T + W(I,J)
228600 70      CONTINUE
228700      K = KP1
228800      IF (K .LE. LAST) GO TO 20
228900      RETURN
229000 80      IF (ABS(W(K,N))+D(K) .GT. D(K)) RETURN
229100 C ERROR RETURN.. SMALL PIVOT.
229200 90      IFLAG = K
229300      RETURN
229400      END
229500      SUBROUTINE SHIFTB (AI, NROWI, NCOLI, LAST, AI1, NROWI1, NCOLI1)
229600      REAL AI(NROWI,NCOLI), AI1(NROWI1,NCOLI1)

```

```

229700      INTEGER NROWI, NCOLI, LAST, NROWI1, NCOLI1
229800 C-----
229900 C SHIFTR IS CALLED BY FCBLK AND SHIFTS PROCESSED ELEMENTS
230000 C FROM NONPIVOTAL ROWS OF ONE BLOCK OF THE MATRIX TO THE UPPER
230100 C PART OF THE NEXT BLOCK.
230200 C-----
230300      INTEGER MMAX, JMAX, J, M, JMAXP1
230400 C
230500      MMAX = NROWI - LAST
230600      JMAX = NCOLI - LAST
230700      DO 20 J = 1, JMAX
230800          DO 10 M = 1, MMAX
230900      10      AI1(M, J) = AI(LAST+M, LAST+J)
231000      20      CONTINUE
231100      IF (JMAX .EQ. NCOLI1) RETURN
231200      JMAXP1 = JMAX + 1
231300      DO 40 J = JMAXP1, NCOLI1
231400          DO 30 M = 1, MMAX
231500      30      AI1(M, J) = 0.
231600      40      CONTINUE
231700      RETURN
231800      END
231900      SUBROUTINE SBBLOK (BLOKS, INTEGS, NBLOKS, IPIVOT, B, X)
232000      REAL BLOKS(1), B(1), X(1)
232100      INTEGER INTEGS(4, NBLOKS), NBLOKS, IPIVOT(1)
232200 C-----
232300 C SBBLOK SOLVES AN ALMOST BLOCK DIAGONAL LINEAR SYSTEM
232400 C A * X = B FOR WHICH THE MATRIX A HAS BEEN FACTORED BY FCBLK.
232500 C SEE FCBLK FOR A DESCRIPTION OF THE ARGUMENTS.
232600 C (ON THE CALL TO SBBLOK, BLOKS CONTAINS THE FACTORIZATION, NOT
232700 C THE INPUT MATRIX ELEMENTS.)
232800 C
232900 C DO NOT CALL SBBLOK IF FCBLK RETURNED IFLAG .GT. 0.
233000 C-----
233100      INTEGER INDEXB, INDEXX, I, INDEX, NROW, LAST, NBP1, J
233200 C
233300 C DO FORWARD SUBSTITUTIONS BY MAKING CALLS TO SURFOR.
233400      INDEXB = 1
233500      INDEXX = 1
233600      DO 10 I = 1, NBLOKS
233700          INDEX = INTEGS(1, I)
233800          NROW = INTEGS(2, I)
233900          LAST = INTEGS(4, I)
234000          CALL SUBFOR(BLOKS(INDEX), IPIVOT(INDEXB), NROW, LAST, B(INDEXB),
234100      1          X(INDEXX))
234200          INDEXB = INDEXB + NROW
234300          INDEXX = INDEXX + LAST
234400      10      CONTINUE
234500 C
234600 C DO BACKWARD SUBSTITUTIONS BY MAKING CALLS TO SUBBAK.
234700      NRP1 = NBLOKS + 1

```

```

234800 DO 20 J = 1,NBLOKS
234900 I = NBP1 - J
235000 INDEX = INTEGS(1,I)
235100 NROW = INTEGS(2,I)
235200 LAST = INTEGS(4,I)
235300 INDEXB = INDEXB - NROW
235400 INDEXX = INDEXX - LAST
235500 CALL SUBBRAK(BLOKS(INDEX),NROW,INTEGS(3,I),LAST,X(INDEXX))
235600 20 CONTINUE
235700 RETURN
235800 END
235900 SUBROUTINE SUBFOR (A, IPIVOT, NROW, LAST, B, X)
236000 REAL A(NROW,1), B(1), X(NROW)
236100 INTEGER IPIVOT(NROW), NROW, LAST

```

```

236200 C-----
236300 C SUBFOR IS CALLED BY SBBLOK AND PERFORMS THE FORWARD
236400 C SUBSTITUTION OPERATIONS FOR A SINGLE BLOCK OF THE MATRIX.
236500 C-----

```

```

236600 REAL T, SUM
236700 INTEGER K, M, JMAX, J, NROWL, LASTP1
236800 C
236900 DO 10 K = 1, LAST
237000 M = IPIVOT(K)
237100 T = B(M)
237200 B(M) = B(K)
237300 B(K) = T
237400 10 CONTINUE
237500 X(1) = B(1)
237600 IF (NROW .EQ. 1) GO TO 90
237700 DO 30 K = 2, NROW
237800 JMAX = AMINO(K-1, LAST)
237900 SUM = 0.
238000 DO 20 J = 1, JMAX
238100 20 SUM = SUM + A(K,J)*X(J)
238200 X(K) = B(K) - SUM
238300 30 CONTINUE
238400 NROWL = NROW - LAST
238500 IF (NROWL .EQ. 0) GO TO 90
238600 LASTP1 = LAST + 1
238700 DO 40 K = LASTP1, NROW
238800 40 B(NROWL+K) = X(K)
238900 90 RETURN
239000 END
239100 SUBROUTINE SUBBRAK (A, NROW, NCOL, LAST, X)
239200 REAL A(NROW,NCOL), X(NROW)
239300 INTEGER NROW, NCOL, LAST
239400 C-----

```

```

239500 C SUBBRAK IS CALLED BY SBBLOK AND PERFORMS THE BACKWARD
239600 C SUBSTITUTION OPERATIONS FOR A SINGLE BLOCK OF THE MATRIX.
239700 C-----

```

```

239800 REAL SUM

```

```

239900      INTEGER K, KP1, J
240000 C
240100      K = LAST
240200 10    KP1 = K+1
240300      IF(K.EQ.NCOL)GO TO 30
240400      SUM = 0.
240500      DO 20 J = KP1,NCOL
240600 20      SUM = SUM + A(K,J)*X(J)
240700 30    X(K) = (X(K) - SUM)/A(K,K)
240800      IF (K .EQ. 1) RETURN
240900      K = K - 1
241000      GO TO 10
241100      END
241200      SUBROUTINE CBLOK1(NBLOKS,NULT,INTS,BLOKS)
241300      INTEGER NBLOKS,NULT,INTS(4,NBLOKS)
241400      REAL BLOKS(1)
241500 C
241600 C      INTERCALA LOS ESPACIOS NECESARIOS PARA TENER CADA BLOQUE
241700 C      Y EL VECTOR DERECHO EN LA FORMA EXTENDIDA.
241800 C
241900      INTEGER I,J,K,M,NBLANK,NPRIM
242000      NPRIM = INTS(2,1)*INTS(3,1)
242100      DO 50 K = 2 , NBLOKS
242200      NBLANK = INTS(2,K-1) - INTS(4,K-1)
242300      IF(NBLANK.GT.0) GO TO 10
242400      NPRIM = NPRIM + (INTS(2,K)-NBLANK)*INTS(3,K)
242500      GO TO 50
242600 10      DO 40 M=1 ,INTS(3,K)
242700      DO 20 I = 1, NULT-NPRIM
242800      J = NULT - I + 1
242900      BLOKS(J+NBLANK) = BLOKS(J)
243000      BLOKS(J) = 0.0
243100 20      CONTINUE
243200      NULT = NULT + NBLANK
243300      NPRIM = NPRIM + NBLANK + (INTS(2,K)-NBLANK)
243400 30      CONTINUE
243500 40      CONTINUE
243600 50      CONTINUE
243700      RETURN
243800      END
243900 C*
244000 C*
244100 C*
244200 C*
244300      SUBROUTINE CBLOK2(N,NBLOKS,NULT,INTS,B)
244400      INTEGER N,NBLOKS,NULT,INTS(4,NBLOKS)
244500      REAL B(1)
244600 C-----
244700      NPRIM = INTS(2,1)
244800      NULT = N
244900      DO 90 K=2 , NBLOKS

```

```
245000      NBLANK = INTS(2,K-1) - INTS(4,K-1)
245100      IF(NBLANK.GT.0) GO TO 60
245200      NPRIM = NPRIM + INTS(2,K)-NBLANK
245300      GO TO 80
245400  60    DO 70 I=1, NULT - NPRIM
245500          J = NULT - I + 1
245600          R(J+NBLANK) = R(J)
245700          R(J) = 0.0
245800  70    CONTINUE
245900      NULT = NULT + NBLANK
246000      NPRIM = NPRIM + NBLANK + INTS(2,K)-NBLANK
246100  80    CONTINUE
246200  90    RETURN
246300      END
246400
246500 C*
246600 C*
246700 C*
246800 C*
246900 C*
*
```

BYE