UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES
AREA DE INGENIERIA DE RECURSOS DEL SUBSUELO
SECCION DE INGENIERIA PETROLERA

COMPORTAMIENTO DE PRESION DE UN POZO FRACTURADO EN UN YACIMIENTO ESTRATIFICADO

TESIS DE POSGRADO DE
MAESTRO DE INGENIERIA PETROLERA

ALUMNO: RAFAEL DE LOS ANGELES
HERRERA GOMEZ.

I N D I C E

RECONOCIMIENTOS

El autor quiere expresar su más sincero reconocimiento al Dr. Heber Cinco Ley, profesor del Area de Ingeniería de Recursos del Subsuelo, de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, por su ayuda, estímulo y orientación en todas las etapas de este estudio. En la misma forma, el autor agradece al Dr. Fernando Samaniego Verduzco sus discusiones y comentarios.

Así mismo agradece a Petróleos Mexicanos, por su apoyo financiero, sin el cual no hubiera sido posible realizar los estudios de posgrado ni la elaboración de este trabajo.

Finalmente el autor dá las gracias a su esposa Teresa, por la ayuda contínua, entusiasmo y comprensión durante este período de estudios de posgrado.

RESUMEN

Durante las últimas décadas se han realizado un número de estudios de comportamiento de presión de pozos que producen de yacimientos estratificados, otros para pozos con fractura que producen de un estrato, pero poco se ha analizado cuando existen ambos problemas, fractura y estratificación.

En este trabajo se dedujo una solución aproximada analítica-numérica para estudiar el comportamiento de presión de un pozo con una fractura vertical con flujo o presión uniforme que penetra totalmente un yacimiento estratificado de dos capas de extensión radial infinita sin flujo cruzado.

La solución aproximada se realizó empleando el método de funciones de Green propuesto por Gringarten y Ramey, la integral de superposición de Duhamel y aproximaciones con series asintóticas y geométricas. La solución se presenta en forma gráfica con curvas tipo en función de variables adimensionales teniendo como parámetros las combinaciones de valores de las tres relaciones de propiedades siguientes:
$R\chi F = \chi_{f_1}/\chi_{f_2}$, $RN = (k/\phi\mu c_t)_1/(k/\phi\mu c_t)_2$ y $RKH = (kh/\mu)_1/(kh/\mu)_2$
Además, en las gráficas se señala el período de flujo lineal, el de transición y el pseudo radial.

Los resultados indican lo siguiente:

El comportamiento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento de dos estratos sin flujo cruzado con la misma difusibidad hidráulica y extensión de fractura en ambos estratos y con la misma o diferente capacidad de flujo (RKH $\geqslant$ 1, RXF = RN = 1) es similar al comportamiento de un pozo con fractura vertical en un yacimiento de un solo estrato, para condiciones de flujo y presión uniforme en la fractura.

La relación de capacidades de flujo RKH es el factor predominante con respecto a las otras dos relaciones de propiedades, así cuanto mayor sea de uno, el comportamiento de presión correspondiente más se parece al comportamiento de un solo estrato fracturado.

Las propiedades de la formación y las características de la fractura se pueden determinar con una prueba de decremento de presión con la combinación de los métodos de análisis convencionales de flujo radial, de flujo lineal y el ajuste de curvas tipo.

Además se presentan dos ejemplos que ilustran el análisis de pruebas de presión para el caso considerado.

I INTRODUCCION

Para la operación y el estudio de yacimientos de agua, aceite y/o gas se requiere información que se obtiene de muy diversas fuentes, entre todas ellas, la medición de presión de fondo de un pozo es de gran importancia, ya que ésta se toma fácilmente y proporciona una manera de caracterizar el yacimiento bajo condiciones insitu.

Inicialmente se medía la presión de fondo+ en un pozo después de cierto tiempo de cierre y se consideraba como la estática, obviamente esta presión es muy distinta de la estática real del yacimiento para formaciones de muy baja permeabilidad.

Desde un principio se observó que la presión medida dependía del tiempo de cierre, de donde se concluyó que la rapidez de variación de la presión es función de la permeabilidad de la roca. Esta idea dió orígen a las pruebas de presión en pozos++, las cuales se han desarrollado notablemente en las últimas tres décadas. Esto se ha debido a la necesidad cada vez más imperiosa de disponer de información más confiable y realista necesaria en la aplicación de los métodos de análisis de yacimientos, tales como Balance de Materia[2-3], tratamiento de entrada de agua[4-6], inyección de agua[7], recuperación mejorada[8], simulación de yacimientos[9], etc. A la fecha se han

---

+"Presión Estática[1]": Se consideraba como la presión de fondo medida después de cerrar un pozo de 24 a 72 horas.

++ Cualquier perturbación que produce un cambio medible en el comportamiento de presión variando con el tiempo es una prueba de presión de pozo.

publicado cientos de trabajos que han ido cubriendo las diferentes situaciones en los yacimientos.

El aspecto cuantitativo de las mediciones de presión de pozos permite definir indirectamente, dependiendo del método en que se utilice o de la herramienta con que se haga la medición, la porosidad y la permeabilidad promedio de una formación, así como también, la longitud de una fractura hidráulica que intercepta a un pozo, la eficiencia de terminación, la necesidad de estimular, el tipo y resultado de estimulación de un pozo, el grado de comunicación entre pozos, el volumen de drene y la presión media local o del yacimiento. Esta información combinada con datos de producción y de laboratorio (propiedades de roca y fluidos) da un medio para definir el volumen original y la eficiencia y rapidez de recuperación de fluidos del yacimiento.

Actualmente, las pruebas de presión transitoria de un pozo más usadas son las pruebas de incremento, seguidas por las de decremento. En ambos tipos de pruebas se mide continuamente la variación de la presión en el pozo. Otras pruebas que se utilizan con menor frecuencia son las de inyección y decremento en pozos inyectores, de gasto múltiples, de interferencia, de pulso y de interferencia vertical.

A Antecedentes

Basados en estudios fundamentales[6, 10-13] de flujo en medios porosos, en estudios analógicos ya sea eléctricos[14-15] o de conducción de calor[16] y con soluciones de la ecuación difusión para conducción de calor[17-18] y otras técnicas[19], se han desarrollado varios métodos para el análisis de pruebas de presión en un pozo considerando diversas circunstancias y condiciones. En la siguiente sección se presenta un resumen de las contribuciones más importantes en el área de pruebas de presión.

B Pruebas de Pozos en Yacimientos de una Capa

En 1933, Moore[4] y colaboradores presentaron el primer método para analizar una prueba de presión en un pozo para determinar permeabilidad y el efecto de llenado. Poco después en 1935, Theis[22] mostró que el comportamiento de la presión de un pozo de agua que produce de un yacimiento infinito está dado por la solución de línea fuente, deducida a partir de la solución de punto fuente instantánea de Lord Kelvin[23] y propuso un método de análisis para datos de una prueba de incremento de presión.

En 1937, Muskat[24] sugirió el uso de pruebas de presión para determinar la presión estática del yacimiento por medio de un procedimiento que involucra ensayo y error y posteriormente este método fue extendido por Larson[25] y Russell[26].

Más tarde en 1950, se publicaron dos métodos de análisis de pruebas de presión transitoria actualmente denominados "convencionales", estos son el método de Horner[27] y el de Miller-Dyes-Hutchinson[28].

Horner presentó un análisis del comportamiento de presión-tiempo+ para una prueba de incremento de presión similar al trabajo de Theis pero extendido para proporcionar la presión estática para un pozo que drena una área circular cerrada, posteriormente este método fue extendido por Matthews-Brons-Hazebroek[29] en 1954 para considerar un pozo dentro de cualquier posición en áreas de drene de distintas formas.

Miller-Dyes-Hutchinson presentaron un método alternativo para el mismo tipo de pruebas, además mostraron información del efecto causado por la frontera externa cuando es cerrada o abierta e investigaron los efectos de llenado y daño del pozo.

En 1956, Perrine[31] desarrolló intuitivamente un método de análisis de pruebas de presión para pozos considerando flujo multifásico. Después Martin[32] le dió bases teóricas a este trabajo.

En el mismo año, Tracy[33] extendió el análisis de datos de presión desarrollado para líquidos al caso de pozos de gas.

En 1967, Matthews y Russell[1] integraron e ilustraron el arte de analizar pruebas de presión transitoria al sintetizar y clasificar lo publicado hasta esa fecha en una monografía.

\+ Usando un tiempo normalizado en la forma del cociente de la suma del tiempo de producción más el tiempo de cierre entre el tiempo de cierre.

En 1970, Ramey y Cobb[30] revisaron los trabajos de Muskat, Horner y Miller-Dyes-Hutchinson considerando una área de drene cuadrada y encontraron ligeras modificaciones en las condiciones de aplicabilidad de los métodos, las cuales fueron señaladas ampliamente.

C Yacimientos Heterogéneos

Todos los procesos geológicos involucrados durante la evolución de un sistema roca-fluidos de un yacimiento producen variaciones en las propiedades de la roca y si las variaciones tienen una distribución uniforme o son distinguibles a gran escala, son heterogeneidades factibles de definirse por pruebas de presión transitoria, por lo que es necesario en cada caso considerar la heterogeneidad común observada y resolver los problemas de interpretacion.

En los últimos años esta situación ha tenido una gran atención estudiándose los casos siguientes:
Sistemas fracturados, sistemas estratificados, pozos cerca de una falla, de una fractura y/o de contacto fluido-fluido, pozos en yacimientos con fracturas naturales y fracturados hidráulicamente.

D Fractura Hidráulica

Desde hace más de treinta años el fracturamiento hidráulico es un método de estimulación para pozos dañados o en yacimien tos de baja permeabilidad, la fractura creada se considera generalmente vertical (con excepción del caso en el que el yacimiento sea somero) y simétrica al pozo.

Los primeros trabajos de investigación[12, 34-38] del comportamiento de la heterogeneidad producida por la fractura hidráulica en un pozo fueron encausados principalmente a productividad de los pozos y en todos se observa la inaplicabilidad de la teoría radial simple.

Posteriormente Dyes[15] y colaboradores con un equipo analógico eléctrico simularon un pozo fracturado; determinando alteraciones en la pendiente de las curvas de incremento para relaciones longitud de fractura con diámetro de drene mayores de 0.15. Scott[16] usó un modelo de flujo de calor encontrando lo mismo que Dyes y col., además de definir un diámetro equivalente de la mitad de la longitud total de la fractura para flujo transitorio en fracturas de alta conductividad.

Russell-Truitt[39] con un modelo numérico confirmaron lo obtenido por Dyes[15] y Scott[16] y definieron flujo lineal cerca de la fractura para tiempos muy pequeños y Clark[40] y Millheim y Cichowicz[41] aplicaron el comportamiento lineal de flujo al análisis de pruebas de presión.

Después en 1972 Rahavan, Cady y Ramey[42] extendieron el uso de factores de correcciones propuesto por Russell[39] para el método de Horner[27] y a los métodos de Muskat[24] y de Miller-Dyes-Hutchinson[28].

Recientemente se ha tenido un gran avance en las pruebas de presión transitoria de pozos fracturados debido a los estudios de Gringarten y col[43-45]., Cinco Ley y col[46]., Agarwal y col[47], Ramey y col[48]., que desarrollaron modelos matemáticos en los cuales es posible analizar la historia completa de las pruebas de presión, determinándose además de los datos característicos del yacimiento, el tipo y geometría de la fractura.

Los modelos considerados son fractura vertical de conductividad infinita, conductividad finita, flujo uniforme y fractura horizontal de flujo uniforme.

Es de señalarse que desde 1970 ha tomado un gran impulso el análisis de las pruebas de presión mediante el método de "curvas tipo" o "análisis moderno", usado por primera vez por Theis en 1935 para pruebas de interferencia en acuíferos, que combinado con el método tradicional o convencional produce un alto grado de confiabilidad en los resultados.

Además, las curvas tipo reproducen la prueba de presión completa por lo que son muy útiles para analizar pruebas de "tiempo corto"+ ampliamente discutidas por Ramey[49] en 1976.

\+ Pruebas de presión de pozo en las cuales no se alcanzó a registrar el flujo radial.

Poco después, Earlougher[50] sintetizó y ejemplificó en una monografía los avances logrados de 1967 a 1977 y actualizado hasta 1979 por Cinco Ley y Samaniego[51] y Gringarten y col[52].

E .Sistemas Estratificados

El sistema heterogéneo más común es el yacimiento compuesto por dos estratos o más, en el que cada uno de los estratos puede tener propiedades de roca y/o fluidos contenidos en ella diferentes y que se puede considerar en dos situaciones:

(1) Una cantidad significativa de flujo cruzado ocurre entre los estratos del sistema. Russell y Prats[53] presentan en forma práctica los estudios previos de este tipo[54-59] y concluyeron que un sistema estratificado se comporta en forma análoga a un yacimiento de una capa con propiedades promedio del sistema.

(2) Los estratos del sistema se comunican únicamente a través del pozo. Para este caso los estudios disponibles son escasos y no-sofisticados debido a lo complejo de las soluciones matemáticas, y por la diferencia que existe entre los comportamientos de un estrato con condiciones medias del sistema y el presentado por el sistema mismo.

Lefkovits y col[60]., presentaron un estudio riguroso del comportamiento de yacimientos estratificados, sin flujo cruzado y limitados, usando valores ponderados de características de los estratos con su espesor y considerando que todos los estratos contienen el mismo fluido. Ellos muestran en su trabajo la solución para un sistema de n estratos infinitos resuelto por Horner[61], así como también comprueban que la aproximación de Tempelaar-Lietz[62] es buena para flujo pseudo estacionario.

Después Duvaut[63], Pélissier y Séguier[58] y Papadopulos[65] presentaron resultados similares a los de Lefkovits y col., y en 1970 Kazemy[66] con un esquema numérico mostró que la teoría convencional de pruebas de presión de incremento es aplicable para pruebas de límite de yacimientos a sistemas estratificados sin flujo cruzado con la ayuda de la prueba de decremento.

Tariq y Ramey[67] extendieron el estudio de Lefkovits y col., para considerar efecto de daño y de llenado de pozo para cada estrato y para varias relaciones de permeabilidad, espesor y radio de drene entre estratos.

Gringarten[73] discute con un modelo de doble porosidad una aproximación general para la interpretación de pruebas de yacimientos fisurados y estratificados con alto contraste de permeabilidad entre estratos.

Bennett y col[74 y 75]., con un modelo numérico y una aproximación ananlítica estudiaron el comportamiento de un pozo con fractura vertical de conductividad finita que penetra totalmente uno y/o varios estratos sin flujo cruzado durante el período de flujo bilineal principalmente.

El objetivo del presente estudio es desarrollar una solución de presión para el flujo transitorio hacia un pozo fracturado verticalmente en un yacimiento estratificado. Se considera que los estratos son de propiedades distintas y únicamente se comu nican a través del pozo y que la fractura es de conductividad infinita o de flujo uniforme.

Además se pretende presentar diferentes métodos de análisis de pruebas de presión para determinar las propiedades del yacimiento y geometría de la fractura.

II. DISTRIBUCION DE PRESION EN REGIMEN TRANSITORIO EN UN YACIMIENTO DE DOS ESTRATOS SIN FLUJO CRUZADO.

El problema en estudio considera un sistema de dos estratos infinitos produciendo a través del mismo pozo fracturado hidráulicamente sin flujo cruzado; la fractura es vertical y atraviesa los dos estratos, se supone que cada estrato es homogéneo isotrópico y contiene un fluido ligeramente compresible. El flujo es laminar, los gradientes de presión son pequeños en el yacimiento y el efecto de gravedad es despreciable. Además el gasto producido del sistema es constante y la presión inicial es la misma en ambos estratos. Finalmente se supone que la presión instantánea de ambos estratos en el pozo es la misma. Un esquema del sistema se presenta en la figura No. 1.

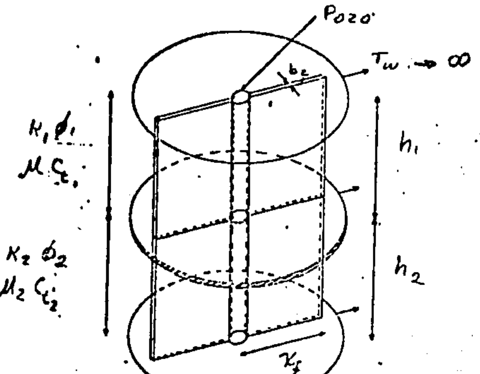


Fig. 1 Pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado.

Para establecer la expresión analítica del comportamiento de la presión del sistema se discute brevemente el método matemático a usar, después se establecen los modelos del más sencillo al más complicado en forma progresiva, aumentando las condiciones que deben ir cumpliendo hasta establecer el caso del sistema, objeto de este estudio.

A Descripción del Método Matemático

La expresión matemática que representa el flujo transitorio de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso homogéneo, isotrópico y uniforme es descrito por la ecuación de difusión derivada de la ecuación de continuidad, de la Ley de Darcy y la ecuación de estado del fluido, con gradientes de presión pequeñas en todas partes y efectos de gravedad despreciables, se expresa en coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}(r,t)\right)=\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial t}(r,t) \quad \ldots(1)$$

Donde : $\eta = \frac{K}{\phi \mu c_t}$

μ = cte; viscosidad del fluido

c_t = cte; compresibilidad del sistema roca-fluido.

Muchas técnicas han sido usadas para resolver la ecuación 1, la mayoría de ellas inicialmente se usaron para resolver problemas de flujo de calor y posteriormente han sido usadas por varios autores para resolver problemas de flujo en medios porosos. En la literatura, la mayoría de los problemas fueron resueltos por transformadas de Laplace o de Fourier. Otros métodos emplean la solución fundamental del punto fuente instantáneo de Lord Kelvin[23] y recientemente por el método de funciones de Green[64], el cual aplicado en combinación con otras técnicas propone soluciones inmediatas a problemas de flujo, algunos de los cuales han sido resueltos por métodos analíticos complicados y técnicas numéricas sofisticadas.

Las funciones de Green producen la solución para cualquier condición inicial y de frontera por medio de integración sobre la frontera del dominio.

En la aplicación de la teoría de funciones de Green a problemas de flujo en régimen transitorio es conveniente introducir funciones fuentes las cuales son obtenidas por integración de funciones de Green sobre el volumen de la fuente. Detalles de la derivación teórica para la aplicación de la teoría de funciones de Green para régimen transitorio son dados en las referencias 64 y 68. En este estudio solo se mencionan los resultados aplicables al problema en estudio.

La solución $P(M,t)$ de la ecuación de difusión 1 es determinada para una distribución de presión inicial con flujo que cruza o mantiene una presión en la superficie de la frontera del yacimiento en todo tiempo.

La función de Green instantánea para el dominio se define como la presión que sería creada en el punto $M(x, y, z)$ al tiempo t por una fuente ficticia instantánea de intensidad unitaria en el punto $M'(x', y', z')$ al tiempo τ con $\tau < t$. El dominio está inicialmente a presión cero y la superficie de la frontera es impermeable al flujo o se mantiene a presión cero (condiciones inicial y de frontera).

Considerando que el yacimiento produce un flujo definido. Sea D_ω el dominio de la fuente y M_ω un punto cualquiera de la fuente. Si la función de Green existe entonces la presión en el punto M al tiempo t, $P(M, t)$, en el yacimiento con una distribución de presión inicial $P_i(M)$ y un flujo o presión definido en la frontera S_e, está dado por;

$$\Delta P(M,t) = \frac{1}{\phi\, c_t} \int_0^t \int_{D_\omega} q(M_\omega, \tau)\, G(M, M_\omega, t-\tau)\, dM_\omega\, d\tau$$

$$- \eta \int_0^t \left\{ \int_{S_e} \left[G(M, M', t-\tau) \frac{\partial P(M', \tau)}{\partial_n (M')} - P(M', \tau) \cdot \frac{\partial G(M, M', t-\tau)}{\partial_n (M')} \right] dS_e(M') \right\}_{M' \in S_e} d\tau \qquad \ldots (2)$$

Donde :

$$\Delta P(M, t) = \int_D P_i(M')\, G(M, M', t)\, dM' - P(M, t)$$

Si $\quad P_i(M') = cte$

$$\Delta P(M, t) = P_i - P(M, t)$$

$G(M, M', t)$ es la función de Green y $q(M_w, t)$ es el gasto de extracción o inyección por unidad de volumen en cada punto de la fuente.

δ/δ_n es la derivada normal al elemento $\delta S_e(M')$ de la frontera S_e, con sentido positivo en dirección hacia afuera (flujo hacia afuera de la superficie cerrada).

La caída de presión es obtenida como la suma de dos términos de naturaleza diferente: el primer término cuantifica el efecto del gasto de producción definido en la fuente y el segundo término cuantifica el efecto de las condiciones de frontera. Este último está formado por dos términos producto de los cuales uno es cero; si el flujo es definido en la frontera exterior S_e, $\left.\frac{\delta P(M',t)}{\delta_n(M')}\right|_{M' \in S_e}$ es conocido, pero $\left.\frac{\delta G(M,M',t-\tau)}{\delta_n(M')}\right|_{M' \in S_e} = 0$ por definición de funciones de Green y si la presión es definida en la frontera exterior S_e, $\left.G(M, M', t-\tau)\right|_{M' \in S_e}$ es cero.

Para el caso de un yacimiento infinito el segundo término es cero.

La caída de presión en M con función de Green definida para una <u>fuente con flujo uniforme</u> en un yacimiento infinito se expresa por:

$$\Delta P(M,t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t q(\tau)\, s(M, t-\tau)\, d\tau \qquad \ldots (3)$$

Donde:

$$S(M,t) = \int_{D_\omega} G(M, M_\omega, t)\, dM_\omega \qquad \ldots . (4)$$

es la función fuente de flujo uniforme instantánea para el sistema fuente-yacimiento que depende únicamente de una variable de espacio.

La función punto fuente instantánea para un yacimiento isotrópico e infinito es definida por Gringarten[64] como:

$$G(M, M_\omega, t) = \frac{1}{8(\pi \eta t)^{3/2}}\, e^{-\frac{d^2}{4\eta t}} \qquad \ldots (5)$$

Donde:

$$d^2 = (x - x_\omega)^2 + (y - y)^2 + (z - z_\omega)^2$$

<u>Solución punto fuente de Lord Kelvin.</u>

La forma propuesta por Nisle[20] para la solución fundamental punto fuente instantáneo de Lord Kelvin[23] para flujo en medios porosos homogéneos isotrópicos e infinitos es:

$$\Delta P(d, t) = \frac{q}{\phi c_t}\, \frac{1}{8(\pi \eta t)^{3/2}}\, e^{-\frac{d^2}{4\eta t}} \qquad \ldots (6)$$

La cual es solución de la ecuación de difusión 1, que es una ecuación diferencial parcial lineal (es decir, la solución de ella cumple la propiedad de superposición tanto en espacio como tiempo) y representa la caída de presión creada en un punto M producida por una extracción instantánea q en un punto M_w a una distancia d del punto de observación M.

Para el caso que nos ocupa, una solución fuente es directamente proporcional a una función fuente, siempre que ambas estén definidas para las mismas condiciones de espacio y tiempo, por ejemplo la solución de punto fuente instantánea es:

$$\Delta P(d, t) = \frac{q}{\phi c_t} G(M, M_w, t) \qquad \ldots (7)$$

donde $G(M, M_w, t)$ es una función fuente de Green, y $\frac{q}{\phi c_t}$ es la función de proporcionalidad.

Así también la caída de presión para un flujo contínuo en M, con una fuente de flujo uniforme en un yacimiento infinito es:

$$\Delta P(d, t) = \int_0^t \frac{q(\tau)\, e^{-\frac{d^2}{4\eta(t-\tau)}}}{8 \phi c_t (\pi \eta (t-\tau))^{3/2}} d\tau$$ con solución fuente.

$$\Delta P(d, t) = \int_0^t \frac{q(\tau)}{\phi c_t} G(M, M_w, t-\tau)\, d\tau$$ con función de Green.

Como se observa en el Apéndice A, el uso del principio de superposición en espacio y tiempo con la solución punto fuente instantáneo para definir la solución de línea fuente, plano fuente, etc, en yacimientos infinitos, es una parte de la teoría de funciones de Green, razón por la cual en lo que sigue se usarán indistintamente.

B Modelo de un Pozo en un Yacimiento Infinito.

El comportamiento de la presión se puede establecer mediante el uso de las funciones de Green para un yacimiento infinito, ecuaciones 3 y 4.

$$\Delta P(M,t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t q(\tau) \int_{D_w} G(M, M_w, t-\tau)\, dM_w\, d\tau \quad \ldots (8)$$

Donde $G(M, M_w, t-\tau)$ es la función de Green instantánea obtenida del trabajo de Gringarten[64] (que para este modelo es la línea fuente instantánea infinita, Tabla I Función III aplicada a flujo radial).

Quedando la expresión como:

$$\Delta P(M,t) = \frac{1}{\phi c_t} \int_0^t q(\tau) \frac{e^{-\frac{(x-x_w)^2+(y-y_w)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\pi\eta(t-\tau)}\, d\tau \quad \ldots (9)$$

Esta es la solución línea fuente usada por Theis[22] y Horner[27] para un gasto constante y un radio de extracción que tiende a cero (pero $r_w \neq 0$), así mismo, es también la solución para tiempos largos, radio de pozo finito y gasto constante de la solución analítica presentada por Van Everdingen y Hurst[6], expresada como:

$$P_i - P(M,t) = \frac{-q\mu}{4\pi kh} E_i\left(-\frac{\phi\mu c_t r^2}{4kt}\right) \quad \ldots (10)$$

Otros modelos para flujo de pozo en medios infinitos son los presentados por Gringarten[21] denominados " Soluciones de cilindro sólido y superficie fuentes", obtenidas por superposición de soluciones de línea fuente, detalle de obtención y comparación entre modelos son ampliamente discutidos en su trabajo.

C Modelo de una Fractura Vertical que Atraviesa un Estrato.

Su expresión analítica es la ecuación A-10 del Apendice A, en que fue deducida, aplicando el principio de superposición en espacio y tiempo a la solución punto fuente instantáneo y definidos los planos sello del estrato horizontal por el método de pozos imagen;

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t \frac{q(\tau)\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \pi \eta (t-\tau)} \int_{-x_f}^{x_f} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)}} dx_w \, d\tau \quad . . .(11)$$

Esta ecuación es el punto de partida de la solución aproximada presentada por Gringarten[43] para análisis de pruebas de presión de pozos fracturados con gasto constante y fractura de presión uniforme, la integral fue evaluada en dos formas diferentes: para tiempos pequeños y tiempos largos, formas que se plantean en el Apéndice A y se resuelven en el Apéndice B. También es la expresión básica para plantear el modelo del sistema en estudio.

D Modelo para un Pozo Fracturado en un Yacimiento Estratificado.

En el Apéndice C se establece el sistema de ecuaciones que representa el modelo del sistema de un yacimiento compuesto por dos estratos infinitos penetrados completamente por un pozo fracturado hidráulicamente con orientación vertical para la fractura y sin flujo cruzado, en el cual son incógnitas la caída de presión y los gastos de cada capa. Para la resolución del sistema se emplea un método analítico-numérico al discretizar la ecuación, lo que permite conocer el gasto para cada intervalo de tiempo y posteriormente la caída de presión de cada capa.

La ecuación simplificada para este problema es+:

$$\int_0^{t_D} q_D(\tau)\left\{F_1(x_D,t_D-\tau)+C_1F_2(x_D,t_D-\tau)\right\}d\tau = \int_0^{t_D} F_2(t_D-\tau)\,d\tau \qquad (12)$$

En forma discretizada para valores fijos de x_D (0. y 0.732)

$$\sum_{i=1}^{n} q_{D_{1i}}\left\{\int_0^{t_{Di}}\left[F_1(t_D-\tau)+C_1F_2(t_D-\tau)\right]d\tau - \int_0^{t_{Di-1}}\left[F_1(t_D-\tau)+C_1F_2(t_D-\tau)\right]d\tau\right\} = \int_0^{t_{Dn}} C_1F_2(t_D-\tau)\,d\tau \qquad (13)$$

En donde el gasto es constante para cada intervalo de tiempo.

Las integrales $\int_0^{t_D} F_1(t_D-\tau)\,d\tau$ y $\int_0^{t_D} F_2(t_D-\tau)\,d\tau$

son semejantes a la ecuación 11, cada una representa el comportamiento de la presión, con respecto al tiempo, de un pozo fracturado hidráulicamente, que atraviesa una capa infinita produciendo a gasto constante, problema ya resuelto (ver Apéndice B).

+ La deducción se presenta en el Apéndice C.

La discretización de la ecuación 13, con respecto al gasto de una capa, es semejante que aplicar el principio de superposición con respecto al tiempo cuando se tiene un gasto variable, lo que permite determinar el gasto en cada intervalo de tiempo en forma consecutiva como se desarrolló en el Apéndice C. La expresión para el gasto n-ésimo es:

$$q_{D1i} = \frac{C_1 I_2(t_{Dn}) + \sum_{i=1}^{n-1} q_{D1i} \left\{ I_1(t_{Dn} - t_{Di}) - I_1(t_{Dn} - t_{Di-1}) \right.}{I_1(t_{Dn} - t_{Dn-1}) + C_1 I_2(t_{Dn} - t_{Dn-1})}$$

$$\left. + \frac{C_1 [I_2(t_{Dn} - t_{Di}) - I_2(t_{Dn} - t_{Di-1})] \right\}}{I_1(t_{Dn} - t_{Dn-1}) + C_1 I_2(t_{Dn} - t_{Dn-1})} \qquad (14)$$

Una vez conocido el gasto en función del tiempo es posible determinar el comportamiento de la presión del sistema en estudio con las expresiones siguientes:

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D1i} \left\{ I_1(t_{Dn} - t_{Di-1}) - I_1(t_{Dn} - t_{Di}) \right\} \qquad (15)$$

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D2i}\, C_1 \left\{ I_2(t_{Dn} - t_{Di-1}) - I_2(t_{Dn} - t_{Di}) \right\} \qquad (16)$$

Es de señalar que el comportamiento de la presión en la fractura es el mismo para ambas capas, en base a la suposición inicial de que la presión instantánea es la misma en ambas capas (esta condición inicial debe cumplirse para que produzcan las dos capas o al menos no exista flujo de una capa a otra) y lo que va a diferenciar una capa de otra es el comportamiento del gasto en función del tiempo.

III EVALUACION DEL MODELO Y RESULTADOS

Las ecuaciones de comportamiento de presión y gasto adimensionales se evaluaron por medio de un programa de cómputo en lenguaje fortran consistente de programa principal y 16 sub-rutinas que se muestran en el Apéndice E, dando a los resultados una presentación gráfica tanto en papel log-log, semilog como normal.

Los resultados del modelo del sistema en estudio se calcularon haciendo uso de variables adimensionales para obtener soluciones generales. Las variables adimensionales se establecieron siguiendo la definición propuesta por van Everdingen y Hurst[6] adicionando otras en forma de relaciones de propiedades, las cuales se definen en el Apéndice C.

El cálculo del comportamiento de presión y gasto adimensionales por capa que interesa para interpretación de pruebas de presión es la correspondiente a la región de la fractura ($y_D = 0.$ $|x_D| \leq 1.0$), de la cual dos puntos son los más importantes, $x_D = 0$ para una fractura de flujo uniforme y $x_D = 0.732$ para una conductividad infinita tanto para tiempos pequeños como para tiempos grandes. Además, dicho cálculo se realizó en forma discreta, es decir se asignó valores al tiempo adimensional y a las relaciones de propiedades para determinar valores de gasto y presiones adimensionales.

Los valores del tiempo adimensional se seleccionaron dentro del rango de la gráfica presentado por Gringarten, seleccionando 20 valores distribuídos uniformemente por ciclo logarítmico de tiempo para obtener una buena definición (cantidad definida en análisis de sensibilidad llevado a cabo por Juan[70] en un trabajo similar).

Los valores de las relaciones de propiedades se asignaron en la forma siguiente:

Relación de constantes de difusión RN = 1, 2, 5, 10 y 100.

donde $RN = \left(\frac{k}{\phi \mu c_t}\right)_1 / \left(\frac{k}{\phi \mu c_t}\right)_2$

Relación de longitud de fracturas RXF = 1, 1.5, 2, 2.5 y 3.

donde $RXF = x_{f_1} / x_{f_2}$

Relación de capacidades de flujo RKH = 1, 2, 5, 10 y 100.

donde $RKH = \left(\frac{kh}{\mu}\right)_1 / \left(\frac{kh}{\mu}\right)_2$

Para definir la influencia de cada una de las relaciones, por cada valor de cada relación se obtuvo una curva manteniendo las otras dos relaciones constantes e iguales a uno y variando dos de ellas y considerando constante la restante.

El conjunto de combinaciones de valores de relaciones de propiedades antes mencionado es amplio, entre los que se consideran casos similares a los reportados por Lefkovits[60] y Tariq[67] y cuyo significado físico se describe a continuación:

La combinación de relaciones RN = RKH = RYF = 1 corresponde el caso de que ambas capas sean iguales con la misma extensión de fractura.

La combinación RN= RXF = 1 y RKH = 1, 2, 5, 10 y 100 corresponde al caso de que ambas capas tengan las mismas propiedades pero con espesor diferente y la misma extensión de fractura.

La combinación RN = RKH = 1 y RXF = 1, 1.5, 2, 2.5 y 3, corresponde al caso de que ambas capas tengan las mismas propiedades con diferente extensión de fractura.

La combinación RXF = RKH = 1 y RN = 1, 2, 5, 10 y 100, corresponde al caso de que se tenga diferente porosidad y/o compresibilidad de fluidos con la misma extensión de fractura.

La combinación RXF = 1 y RKH = RN = 1, 2, 5, 10 y 100 corresponde al caso de que se tengan diferentes permeabilidades y/o viscosidades con la misma extensión de fractura.

Como se puede observar la gama de valores que se puede dar a las combinaciones de relaciones de propiedades es infinita y se puede adecuar a un sistema en especial deseado con auxilio del programa de cálculo mostrado en el Apéndice E.

En las gráficas se observa que el comportamiento de un pozo fracturado en un yacimiento estratificado (2 capas), al igual que el caso de un yacimiento con una sola capa, exhibe tres períodos de flujo: período de flujo lineal, de transición y pseudo radial: los cuales se identificaron por la relación lineal que existe en las gráficas, para tiempos adimensionales pequeños, de log P_D contra log t_{Dx_f} con pendiente de 0.5 y de P_D contra $\sqrt{t_{Dx_f}}$ para flujo lineal; para tiempos grandes, de P_D contra log t_{Dx_f} para flujo pseudoradial y al de transición como el período intermedio entre los otros dos.

De acuerdo a las observaciones en los resultados se modificaron las expresiones del comportamiento de presión adimensional en cada tipo de flujo para facilitar el análisis de datos de pruebas de campo. Partiendo de las expresiones generales del sistema expresadas por las ecuaciones C-16 y C-17 del Apéndice C.

CAPA I

$$P_D(r_D, t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D1,i}\left(I_1(t_{D_n} - t_{D_{i-1}}) - I_1(t_{D_n} - t_{D_i})\right) \qquad \text{C-16}$$

CAPA II

$$P_D(r_D, t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D2_i} C_1\left(I_2(t_{D_n} - t_{D_{i-1}}) - I_2(t_{D_n} - t_{D_i})\right) \qquad \text{C-17}$$

A Flujo lineal

En las figuras 2 a 7 de gasto contra log de tiempo adimensionales el gasto se mantiene constante durante el flujo lineal,

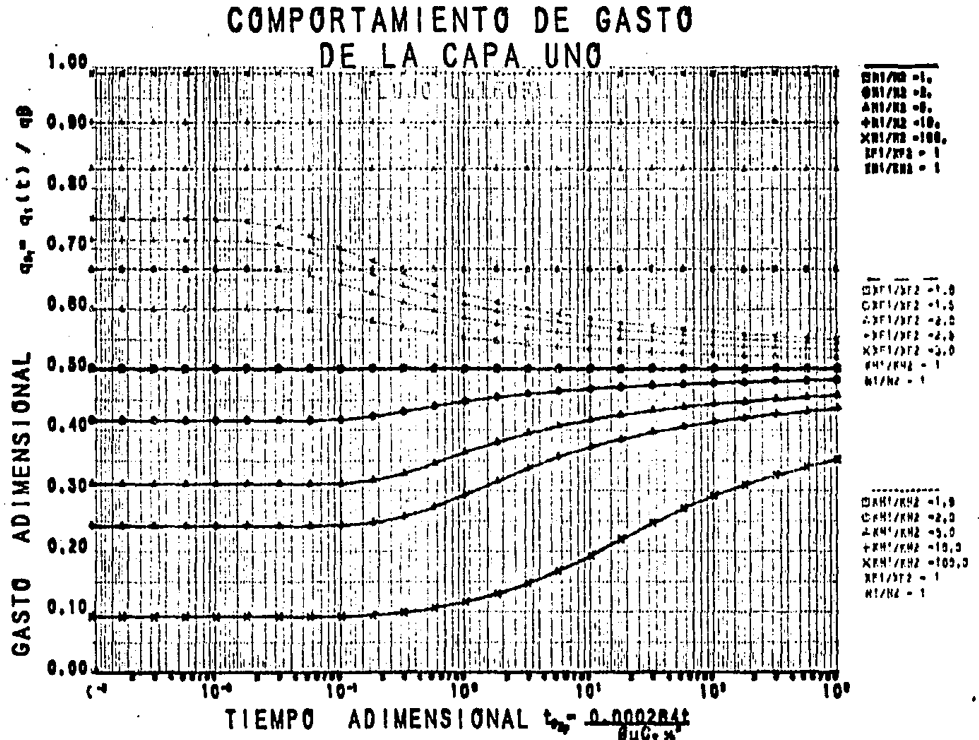


Fig. 2 .-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

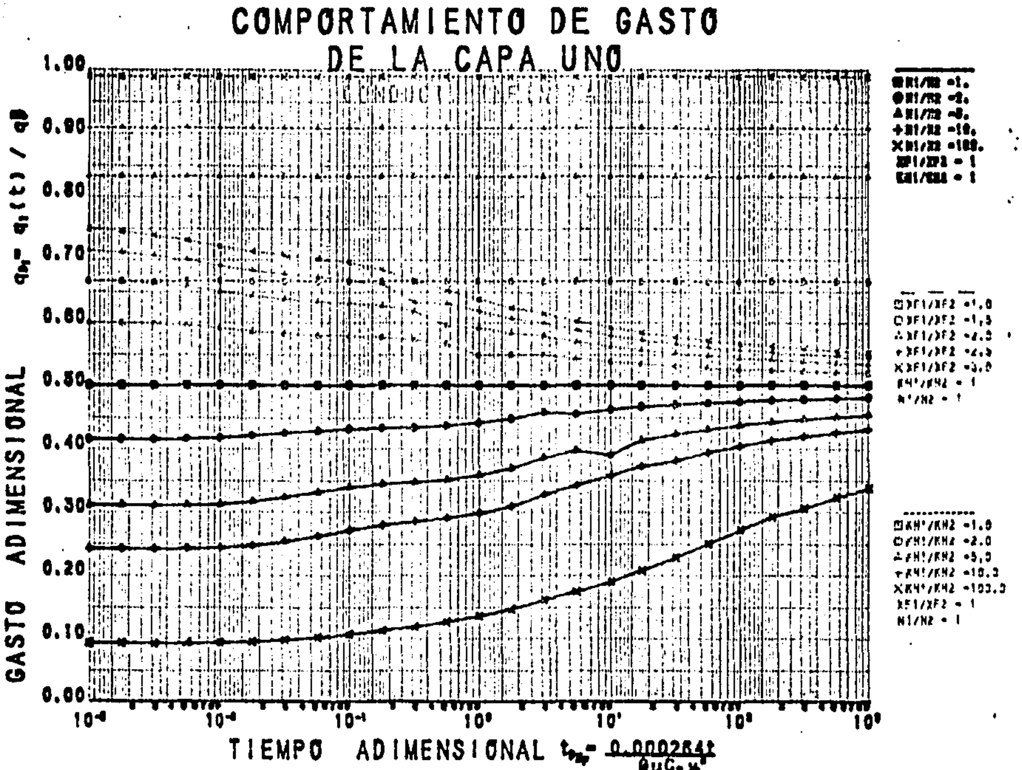


Fig. 3 .-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

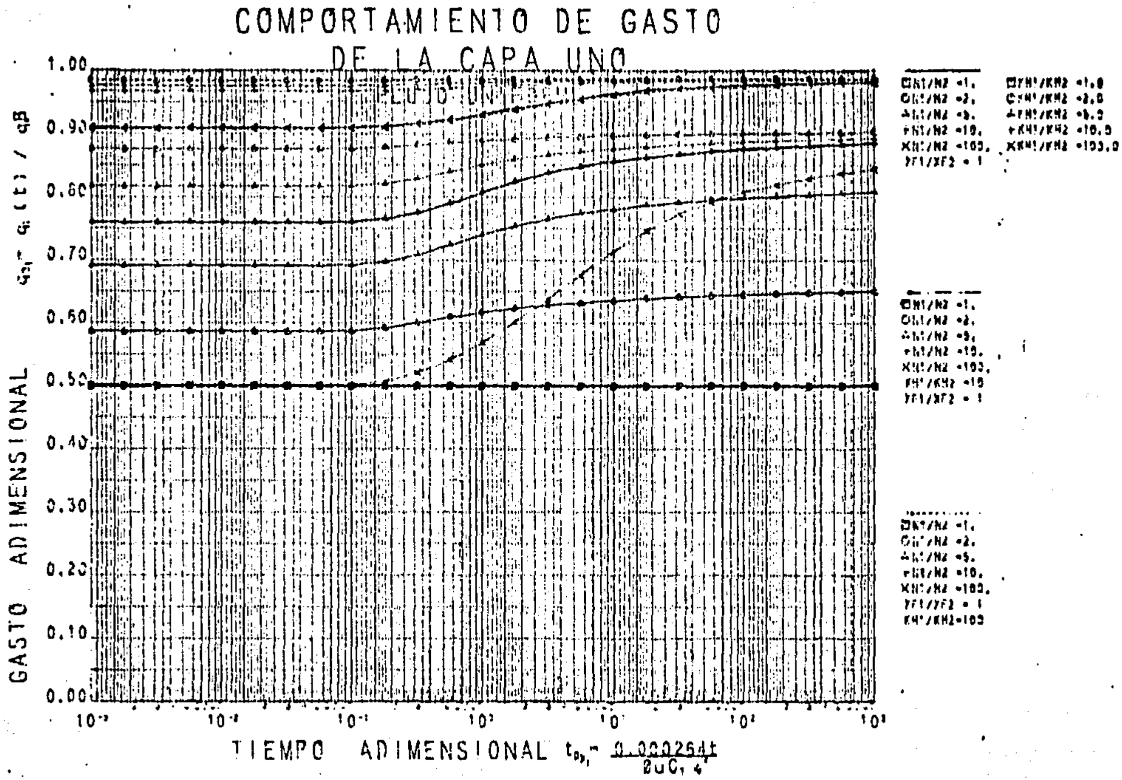


Fig. 4 .-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante los tres períodos de flujo

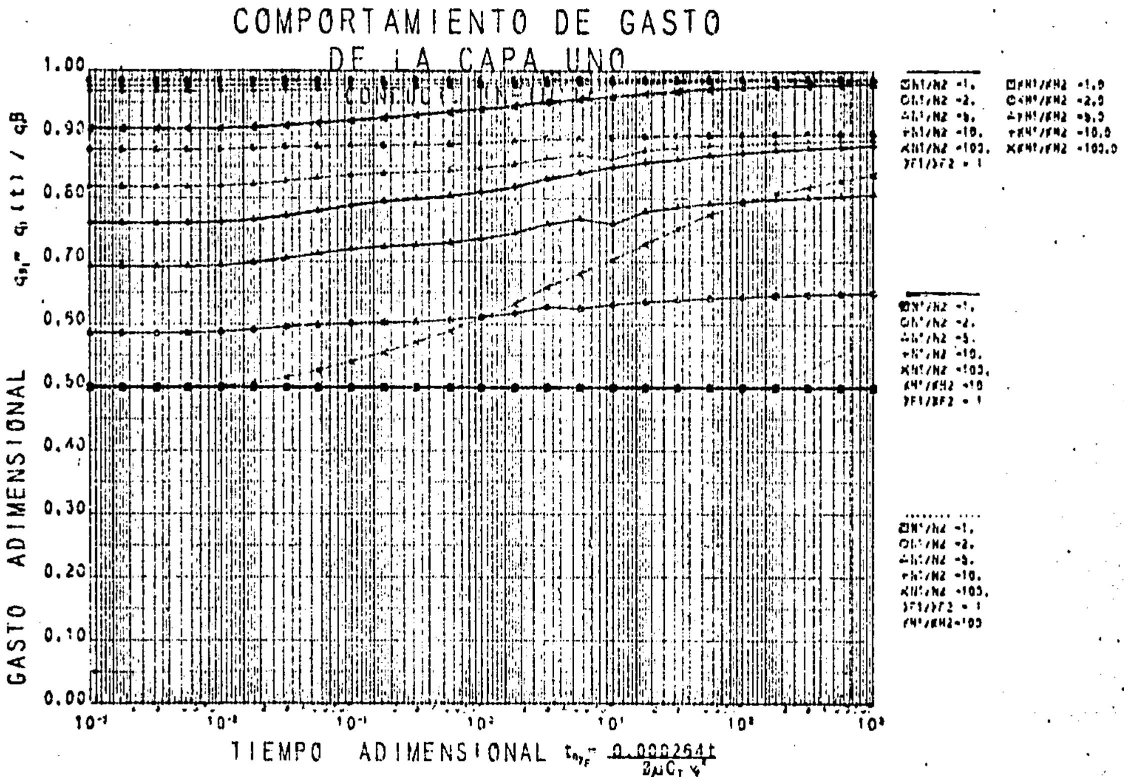


Fig. 5.-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante los tres periodos de flujo

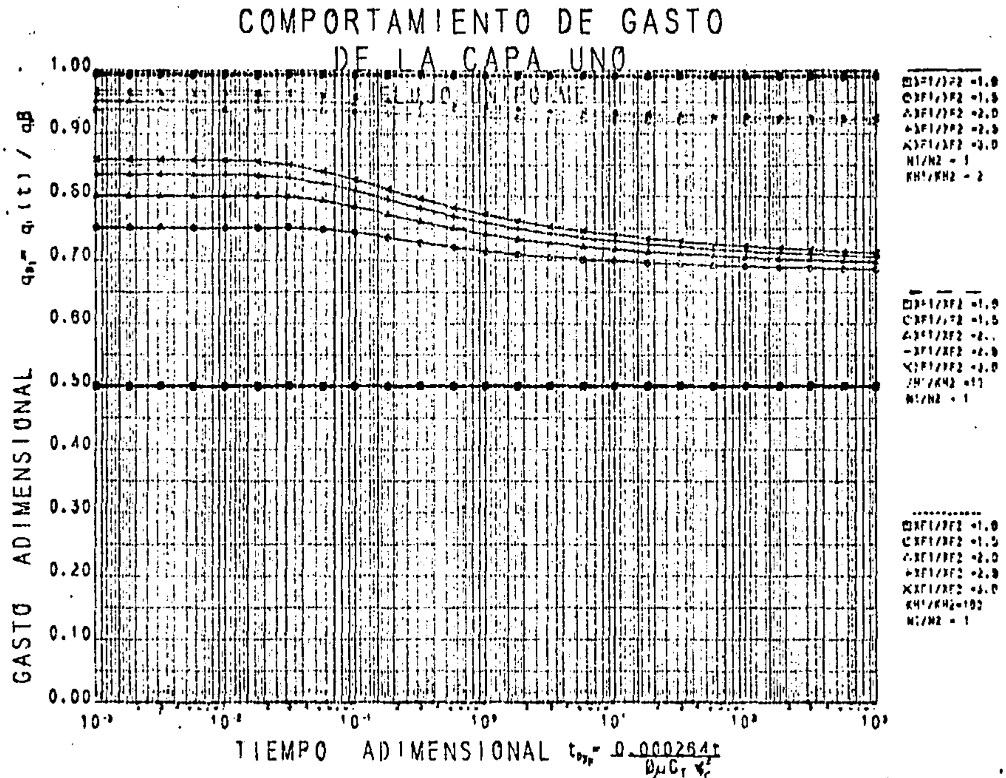


Fig. 6 .-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía tanto en la extensión de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

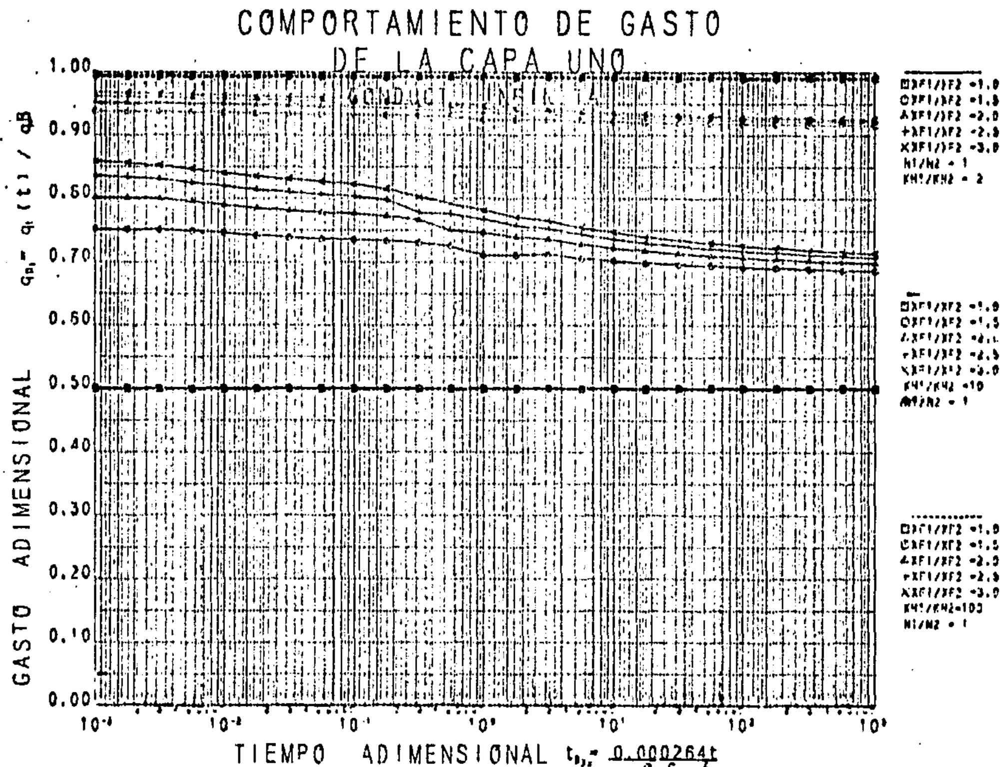


Fig. 7 .-Comportamiento del gasto de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía tanto en la extensión de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

por lo que las ecuaciones C-16 y C-17 se pueden expresar para tiempos pequeños como:

CAPA I

$$P_D(t_D) = q_{D_1} I_1 = q_{D_1} \sqrt{\pi t_D} \qquad (17)$$

CAPA II

$$P_D(t_D) = q_{D_2} C_1 I_2 = q_{D_2} C_1 \sqrt{\pi t_D / RN} \qquad (18)$$

Las expresiones se simplificaron notablemente debido a que los valores de las funciones exponenciales son cero y los de las funciones error son 1 en la ecuación C-18 y C-20 para tiempos pequeños.

Con esta nueva premisa de gasto constante se determina el valor del gasto y el comportamiento de la presión para el sistema en la forma siguiente:

$$q_{D_1} \sqrt{\pi t_D} = C_1 \, q_{D_2} \sqrt{\pi t_D / RN} \quad ; \quad q_{D_1} = q_{D_2} \frac{C_1}{\sqrt{RN}}$$

Además

$$q_{D_1} + q_{D_2} = 1.$$

Por lo tanto;

$$P_D(t_D) = \frac{C_1}{C_1 + \sqrt{RN}} \sqrt{\pi t_D} \qquad (19)$$

Transformándolo a variables reales con la definición de P_D, t_D, C_1 y RN, se tiene,

$$\frac{2\pi K_1 h_1 \Delta P(t)}{q_w B \mu_1} = \frac{\left[\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 / \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2\right] \frac{x_{f_1}}{x_{f_2}}}{\left[\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 / \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2\right] \frac{x_{f_1}}{x_{f_2}} + \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}} \sqrt{\frac{\pi \eta_1 t}{x_{f_1}^2}}$$

Simplificando:

$$\Delta P(t) = \frac{q_w B}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{\left(\frac{K h x_f}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_1 + \left(\frac{K h x_f}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_2} \qquad (20)$$

En forma más general,

$$q = \frac{\Delta P K h x_f}{C B \mu} \frac{1}{\sqrt{\eta t}}$$

$$q_i = \frac{\Delta P}{C B \sqrt{t}} \left(\frac{K h x_f}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_i$$

y para n estratos:

$$q_w = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K h x_f}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_i$$

$$\Delta P(t) = \frac{C q_w B \sqrt{t}}{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K h x_f}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_i} \quad y \quad \Delta P = P_i - P_{wf} \qquad (21)$$

Ambas expresiones son idénticas para el caso de 2 estratos y es una expresión sencilla para la interpretación de pruebas de presión para flujo lineal.

B Flujo Pseudoradial

Para el caso de flujo pseudoradial se observa en las gráficas de q_D contra log t_{Dx_f} (figuras 2 a 7) que el gasto adimensional tiende a un valor límite cuando $t_{Dx_f} \rightarrow \infty$. Este valor puede calcularse considerando el gasto constante en las ecuaciones C-19 y C-21 para tiempos largos en la forma siguiente:

CAPA I

$$P_D(t_D) = q_{D_1} I_1 = q_{D_1} \frac{1}{2} \left(Ln\, t_D + 2.80907 \right) \qquad \text{C-19}$$

CAPA II

$$P_D(t_D) = q_{D_2} C_1 I_2 = \frac{RKH}{2} q_{D_2} \left(Ln \frac{t_D}{RN} + 2.80907 + 2\, Ln\, RXF \right) \qquad \text{C-21}$$

Igualándolas, despejando q_{D_1} , y simplificando se tiene:

$$q_{D_1} = \frac{1 + \dfrac{RKH\, Ln\,(RXF^2/RN)}{RKH\;\; Ln\;(16.6\; t_D)}}{\dfrac{RKH+1}{RKH} + \dfrac{RKH\; Ln\;(RXF^2/RN)}{RKH\; Ln\;(16.6\; t_D)}}$$

El gasto límite es:

$$\lim_{t_D \to \infty} q_{D_1} = \frac{1}{\dfrac{RKH+1}{RKH}} = \frac{RKH}{RKH+1} \qquad (22)$$

Este límite es el mismo para el caso de conductividad infinita (presión uniforme), dado que el término adicional también tiende a cero.

$$\lim_{t_D \to \infty} \left(\frac{\frac{RKH}{4}\left(0.268 \ln \frac{0.718}{R\gamma F^2} - 1.732 \ln \frac{3}{R\gamma F^2}\right)}{RKH \ln (16.6\, t_D)} \right) = 0$$

Substituyendo el valor de la relación en el límite se tiene:

$$\frac{RKH}{RKH+1} = \frac{\frac{K_1 h_1 \mu_2}{K_2 h_2 \mu_1}}{\frac{K_1 h_1 \mu_2}{K_1 h_1 \mu_1} + 1} = \frac{\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1}{\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 + \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2} = \frac{\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1}{\left(\overline{\frac{Kh}{\mu}}\right)} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } \mu_1 = \mu_2 \qquad \dfrac{RKH}{RKH+1} = \dfrac{K_1 h_1}{\overline{Kh}} \quad \text{y} \\ \dfrac{K_2 h_2}{\overline{Kh}} = q_{D_2} \quad \text{ó} \quad q_{D_2} = 1 - q_{D_1} = 1 - q_1 / q_T \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Lefkovits y col[60]., reportan el mismo valor límite para q_1/q_T en un yacimiento infinito y es usado por M. Cobb y col[76]., para establecer la diferencia de agotamiento entre capas.

La presión adimensional definida por Cobb y col[76]., puede ser obtenida dividiendo la definición original por el gasto límite obtenido anteriormente.

$$P_D(t_D) = \frac{2\pi K_1 h_1 \Delta P}{q_w B \mu_1} \div \frac{\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1}{\left(\overline{\frac{Kh}{\mu}}\right)} = \left(\overline{\frac{Kh}{\mu}}\right) \frac{2\pi \Delta P}{q_w B} \qquad (25)$$

y si $\mu_1 = \mu_2$

$$P_D(t_D) = \frac{2\pi \overline{Kh}\, \Delta P}{q_w \mu B} \qquad (26)$$

Con esta definición de presión adimensional modificada se calculó nuevamente el comportamiento de presión contra tiempo adimensionales del sistema observándose en los resultado lo siguiente:

En las gráficas de log P_D contra log t_{Dx_f} (fig. 8 a 13) o "Curvas Tipo del Sistema" se observa que todas las curvas son diferentes y tienden a unirse a una curva a tiempos grandes, por lo que se pueden obtener buenos resultados con el método de ajuste de curvas al analizar pruebas de presión, principalmente en los casos sencillos mencionados anteriormente. Con este objeto en cada curva se señala el final del período de flujo lineal y el inicio del pseudo radial.

Comparando las curvas en las figuras 8 y 9 se observa que entre mayor es la relación de propiedades RXF menor es la magnitud del período de flujo lineal, al contrario de la relación RN para la que aumenta dicha magnitud y por lo mismo empieza después el período de flujo pseudoradial. Cuando interviene la relación RKH (figuras 10 a 13) depende de la posición relativa de la curva con respecto a la de comportamiento de un solo estrato y comparando entre gráficas de flujo uniforme y conductividad infinita en la fractura se observa que el período de flujo lineal termina antes para conductividad infinita (fig. 8 y 9).

En las mismas gráficas se observa que el comportamiento para el caso de estratos con las mismas propiedades ya sea con espesores iguales o diferentes y con la misma extensión de fractura (RKH = RN = RXF = 1 ó RN = RYF = 1 y RKH $>$ 1) es idéntico al comportamiento de un solo estrato con fractura vertical (fig. 14

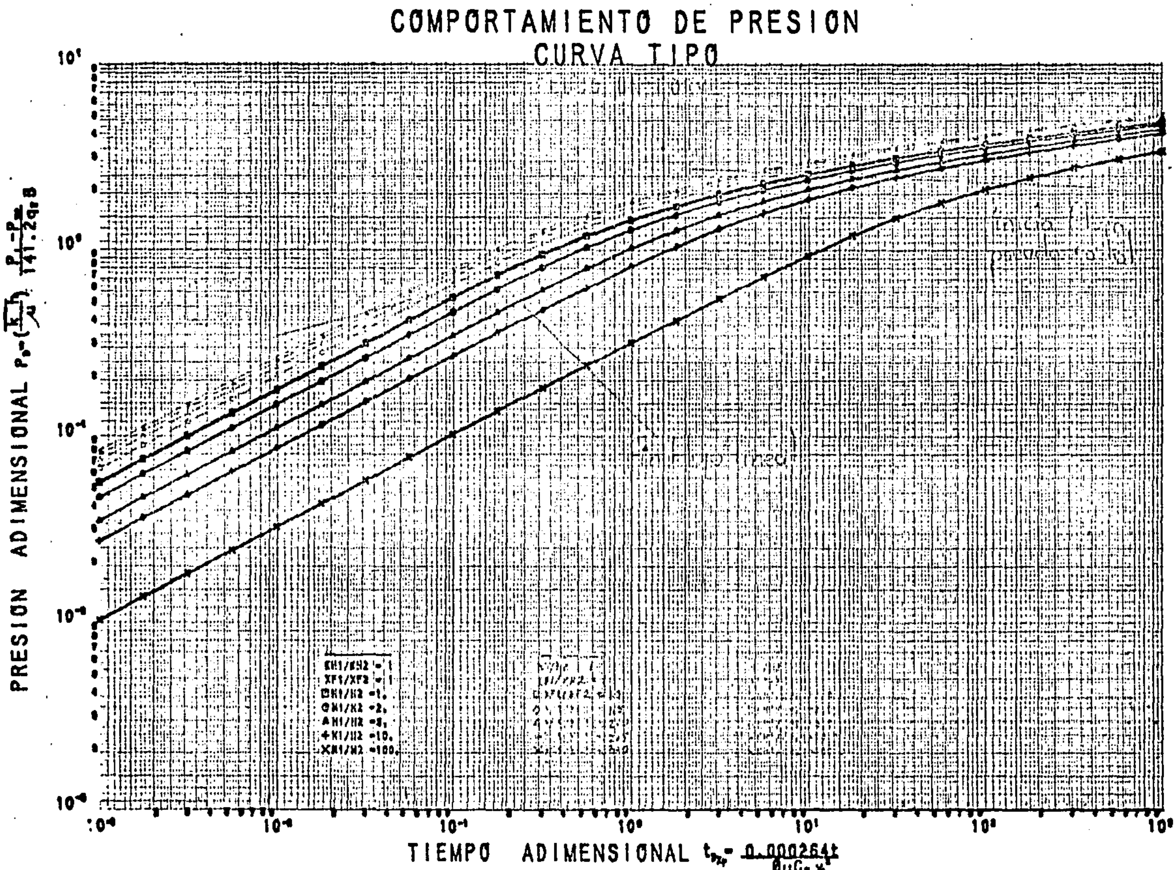


Fig. 8 .-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

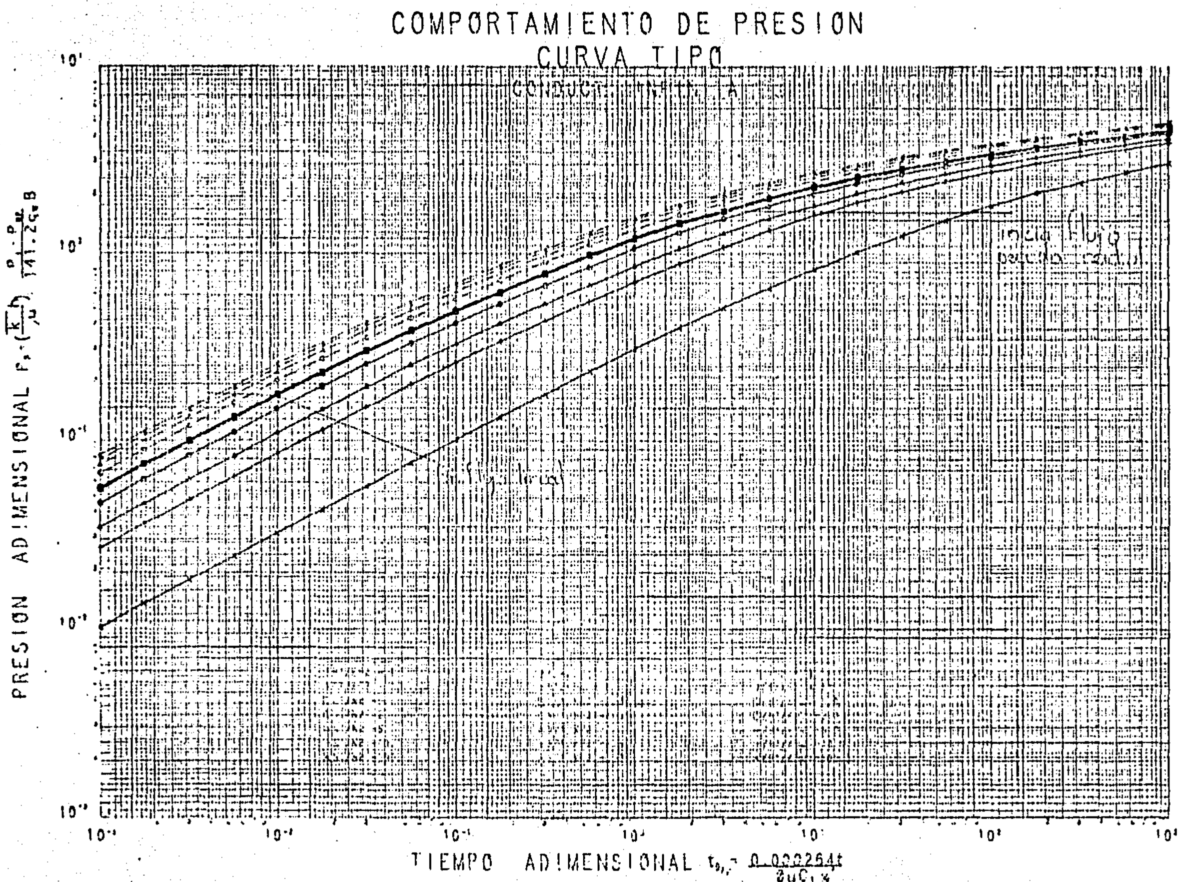


Fig. 7 -Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

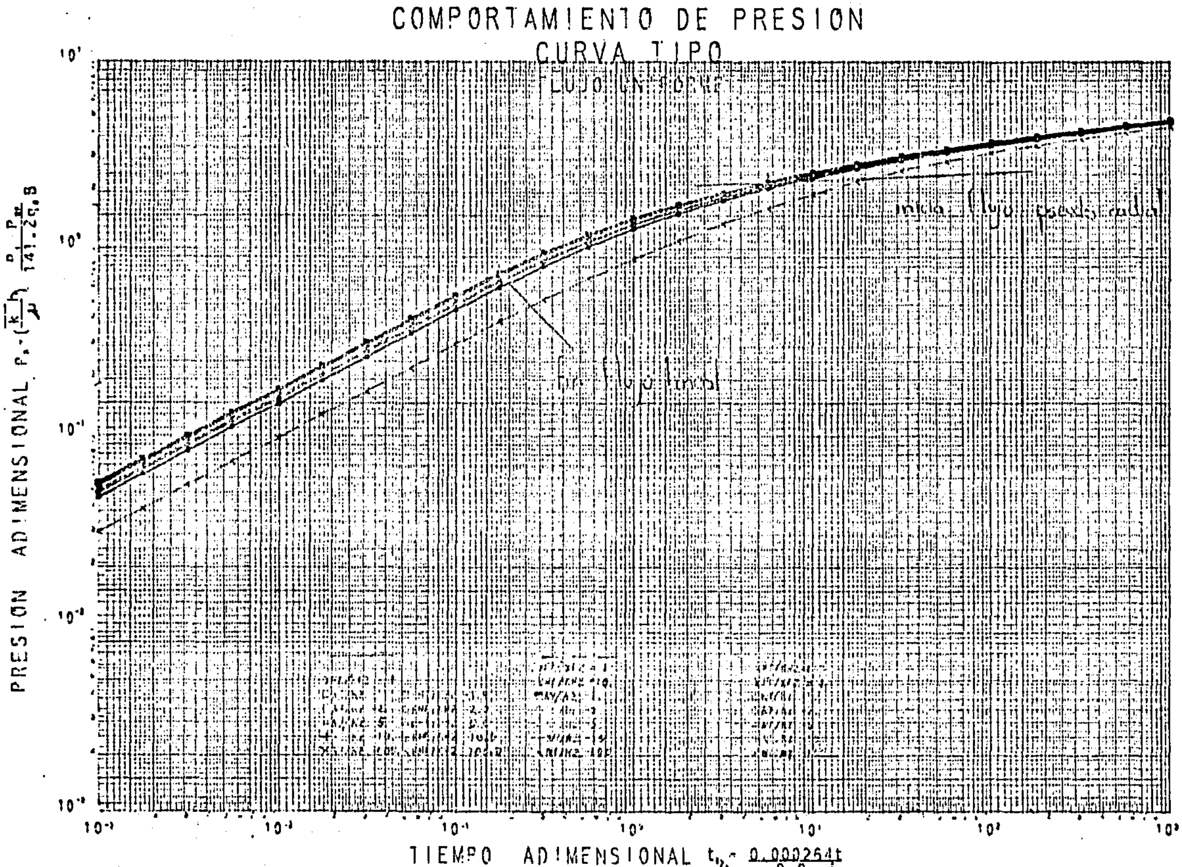


Fig. 10 -Decremento de presión en un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante los tres periodos de flujo

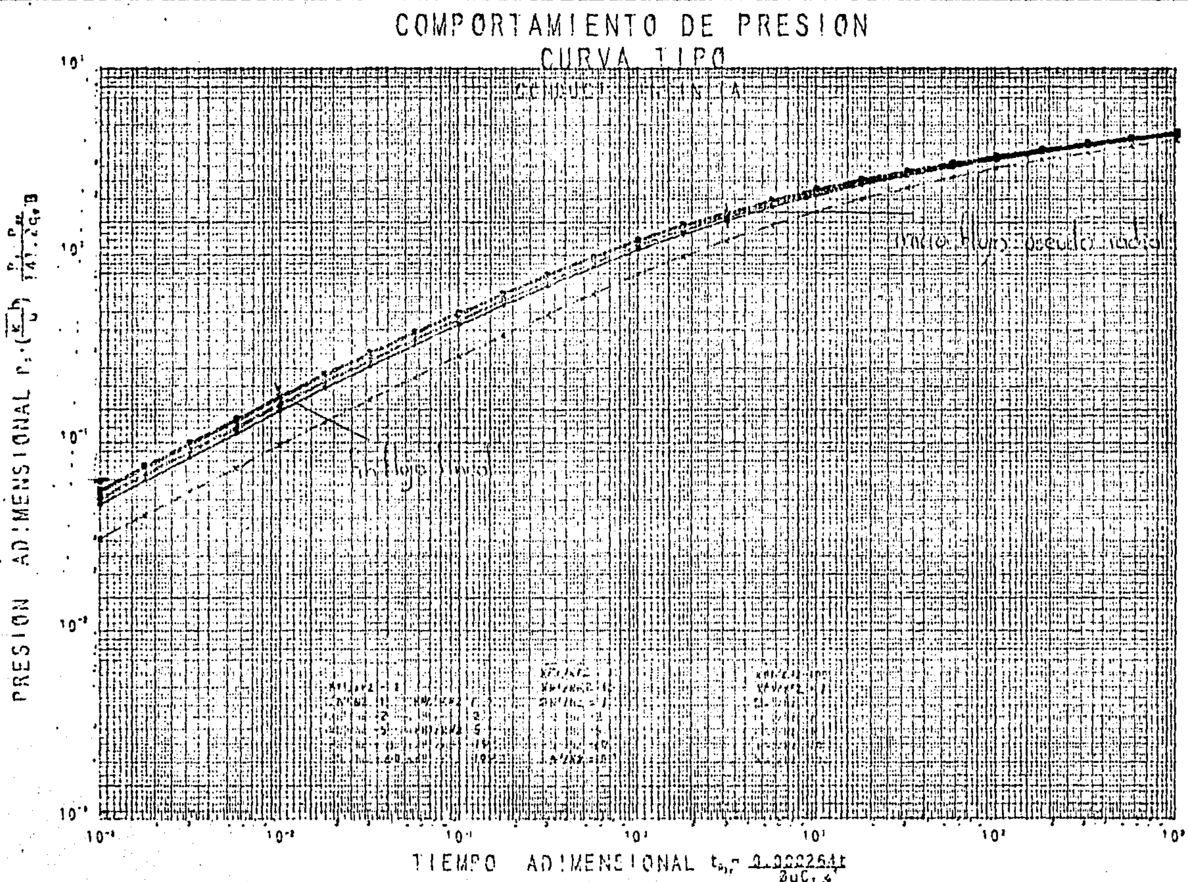


Fig. 11 -Comportamiento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante los tres periodos de flujo

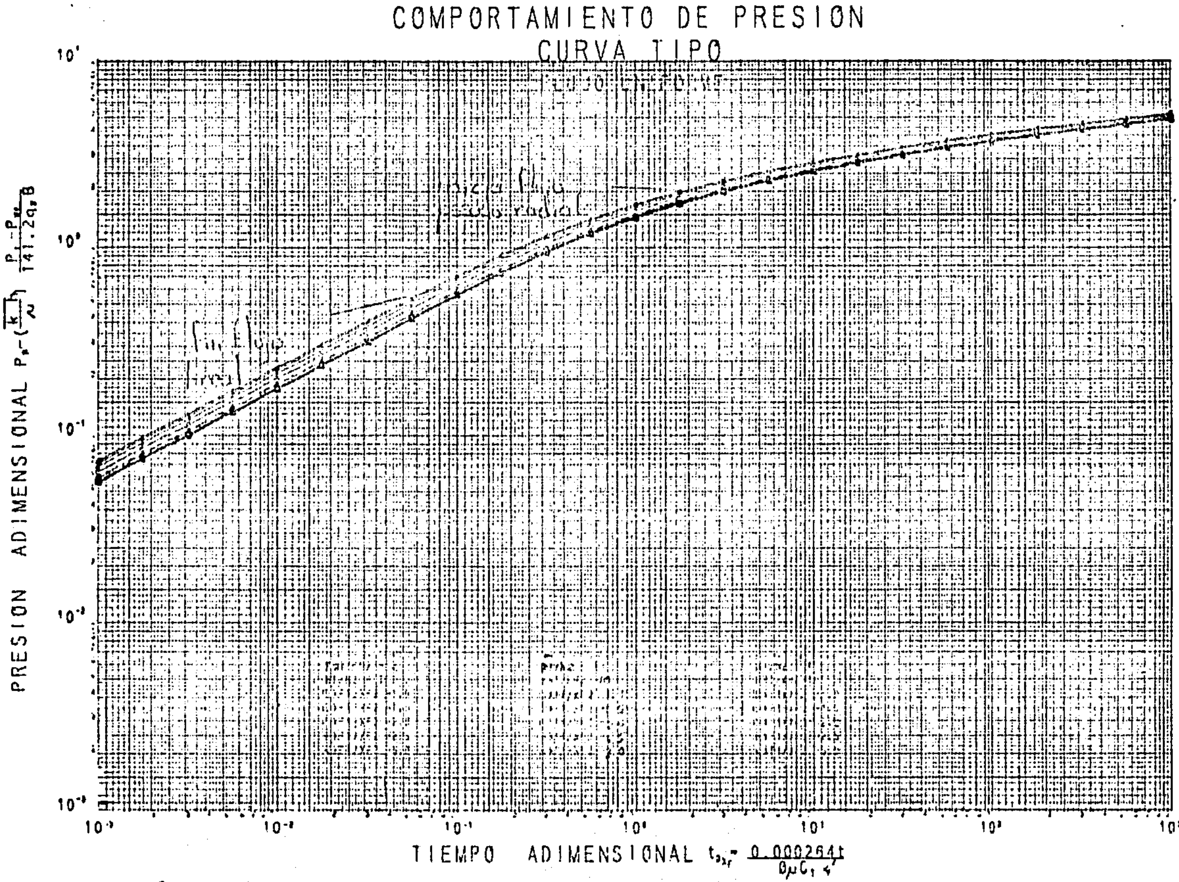


Fig. 12-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia tanto en la extension de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

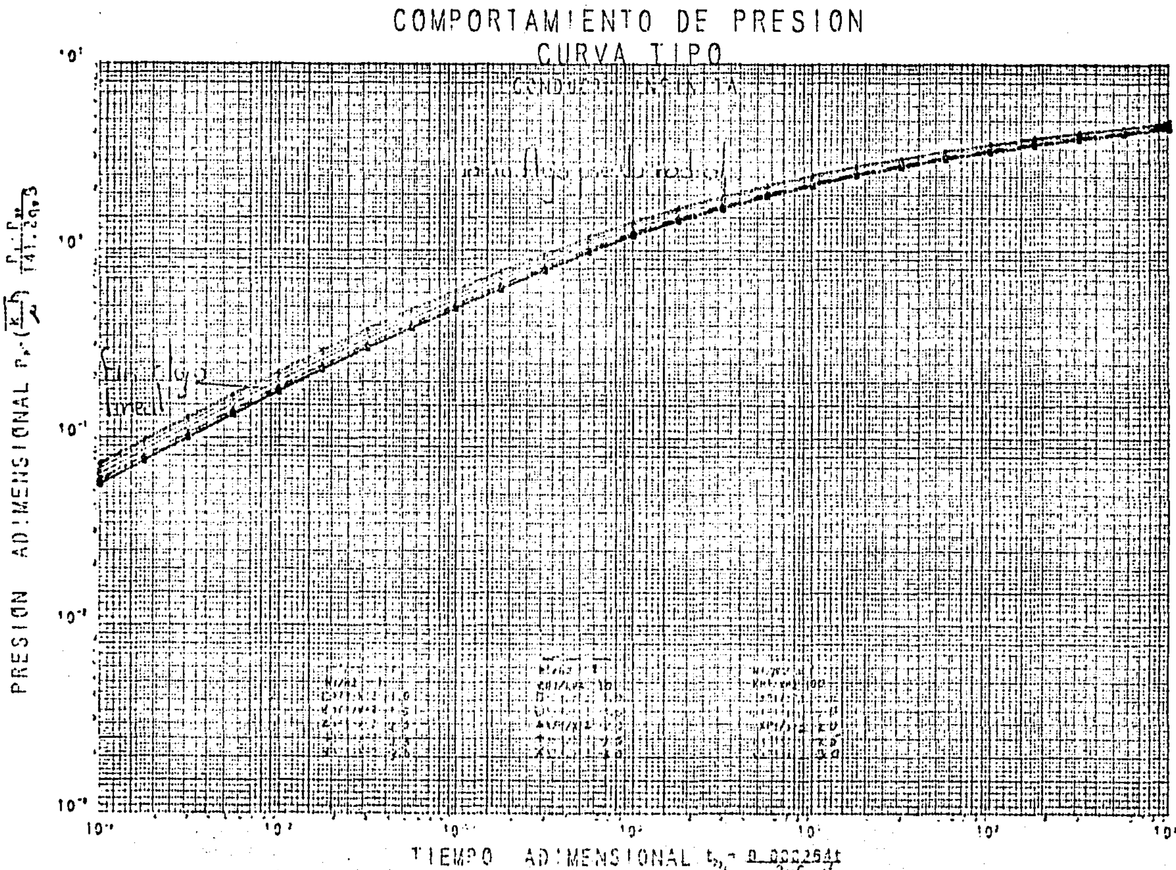


Fig. 13.- Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía tanto en la extensión de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante los tres periodos de flujo.

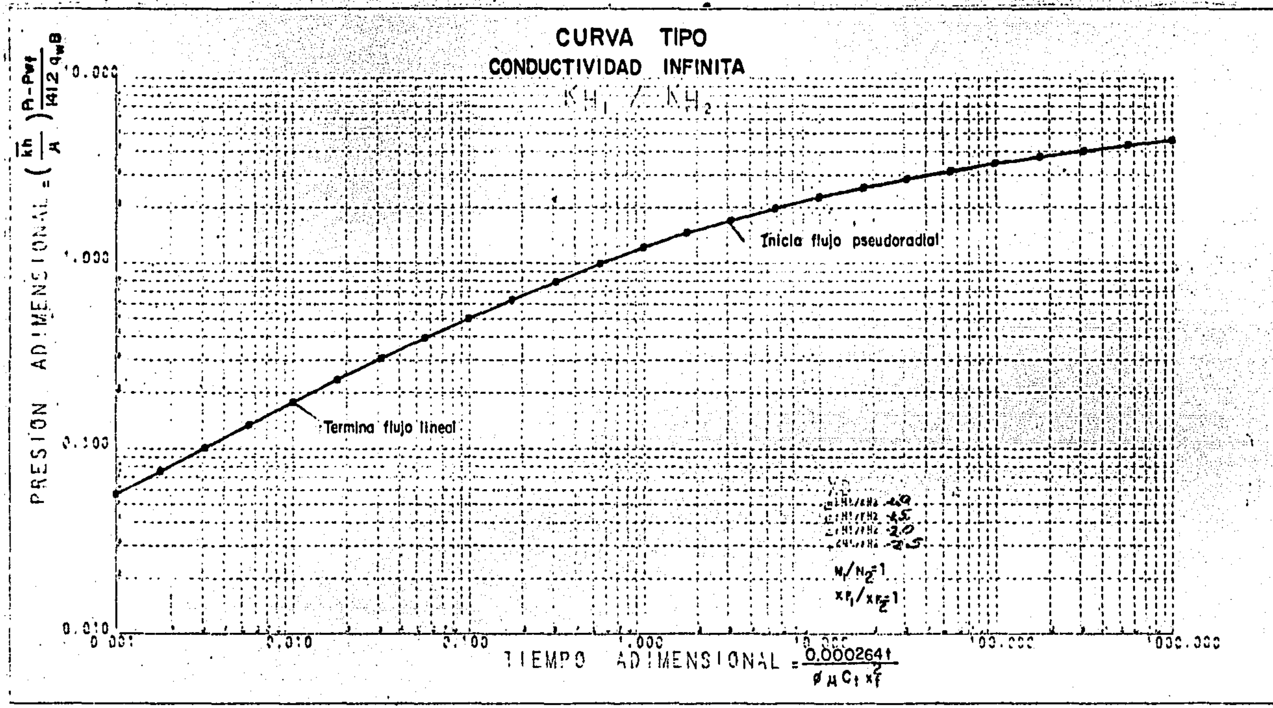


FIG. 14 **Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia el espesor de una capa a la otra durante los tres periodos de flujo.**

incluída en las figuras 8 a 13.

Para el caso de estratos con diferente permeabilidad y/o viscosidad de fluidos y con la misma extensión de fractura (RN = RKH $>$ 1, RXF = 1) el comportamiento se aproxima al de un solo estrato, alcanzando una diferencia máxima de 0.2 de presión adimensional para una relación entre ellos de 5 y menor para cualquier otro valor (fig. 10 y 11) similar a lo obtenido con la ecuación de Lefkovits[60] para pozos sin fracturar, que se puede expresar en forma adimensional con las relaciones de propiedades definidas en este trabajo en la forma siguiente:

$$P_D(t_D) = \frac{1}{2}\left(\ln t_t + 0.80907 - \ln RN^{\frac{1}{RKH}} \right) \tag{27}$$

Donde, $t_D = \eta_1 t / r_w^2$

Para el caso de estratos con diferentes porosidades y/o compresibilidades de fluidos y con la misma extensión de fractura (RKH = RXF = 1 y RN $>$1) el comportamiento varía notablemente, (fig. 8 y 9) y se acerca al comportamiento de una sola capa conforme la relación de espesores (RKH) crece (fig. 10 y 11).

Para el caso de estratos con las mismas propiedades y diferente extensión de fractura (RN = RKH = 1 RXF $>$ 1) la variación es considerable pero menor que para el caso anterior (fig. 8 y 9) y se acerca al comportamiento de una sola capa conforme la relación de espesores (RKH) crece (fig. 12 y 13).

Todo lo anterior se cumple tanto para flujo uniforme como para conductividad infinita en la fractura.

Las curvas de comportamiento graficadas en papel semilog (fig. 15 a 20) tienen una pendiente de 1.15129 por ciclo en su porción recta, por lo que los métodos de análisis de pruebas de pozos desarrolladas para problemas de flujo transitorio radial, basados en la existencia de la línea recta semilog con pendiente de 1.15129 por ciclo, pueden ser extendidas al análisis de pruebas de pozos con fractura vertical que penetre dos estratos de extensión infinita con flujo transitorio. Así, la ecuación del período de flujo pseudoradial del sistema se representa por:

$$P_D(t_D) = \frac{1}{2}\left(\ln t_D + 0.80907 + 2S\right) \qquad (28)$$

Donde:

$$t_D = \frac{K_1 t}{\phi \mu_1 C_{t_1} r_w^2} = t_{Dx_f} \frac{x_f^2}{r_w^2} \quad y \quad S = P_D(t_{Dx_f})_{mod} - P_D\left((t_D)\frac{r_w^2}{x_f^2}\right)_{rad}$$

es el pseudo efecto skin que depende del flujo estratificado y la fractura vertical.

Conociendo S se determina el radio efectivo del pozo con la expresión siguiente:

$$r_w' = e^{-S} r_w \qquad (29)$$

o de las figuras 21 ó 22 que se construyeron en base a la ecuación anterior y de la diferencia de presiones adimensionales del modelo y flujo radial.

Además en las figuras 15 a 20, se determina el tiempo adimensional al cual se inicia la porción recta o período de flujo pseudo radial.

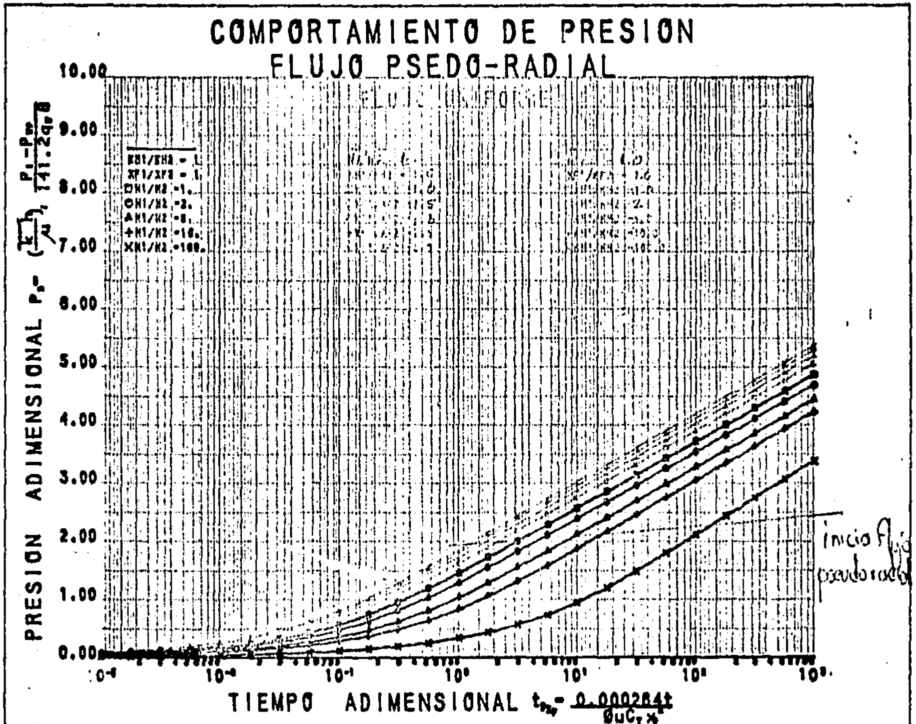


Fig. 15 .- Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante el periodo de flujo pseudo-radial.

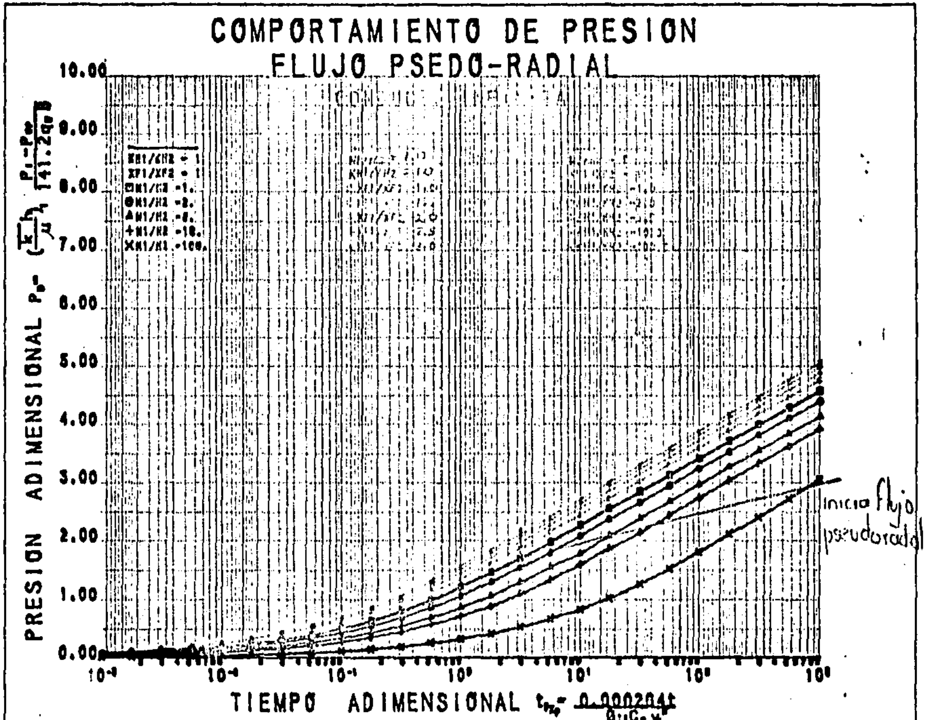


Fig. 16 .-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante el periodo de flujo pseudo-radial.

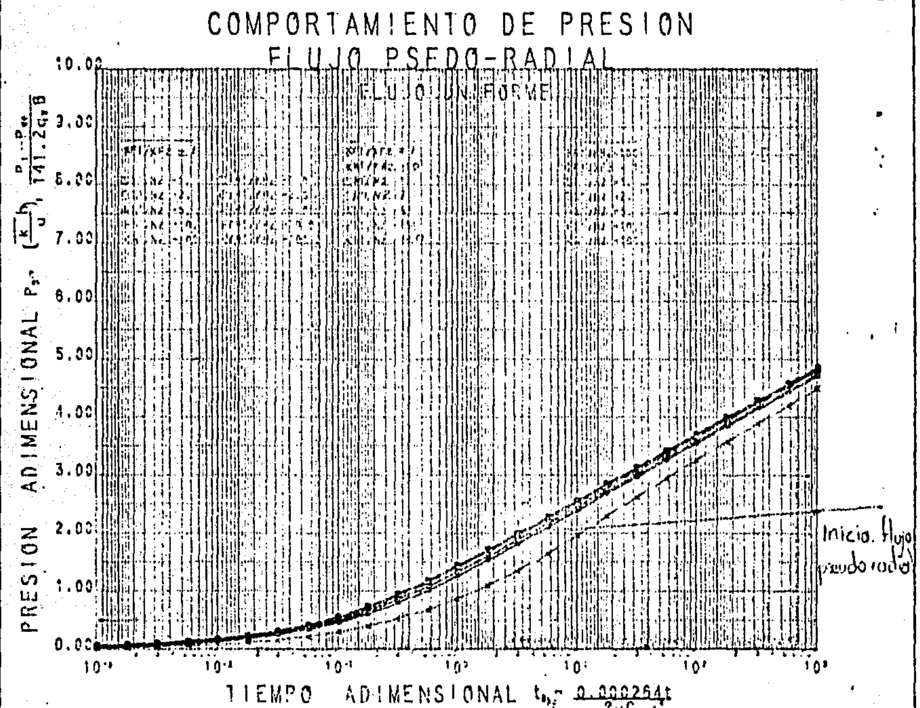


Fig. 17 -Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante el periodo de flujo pseudo-radial

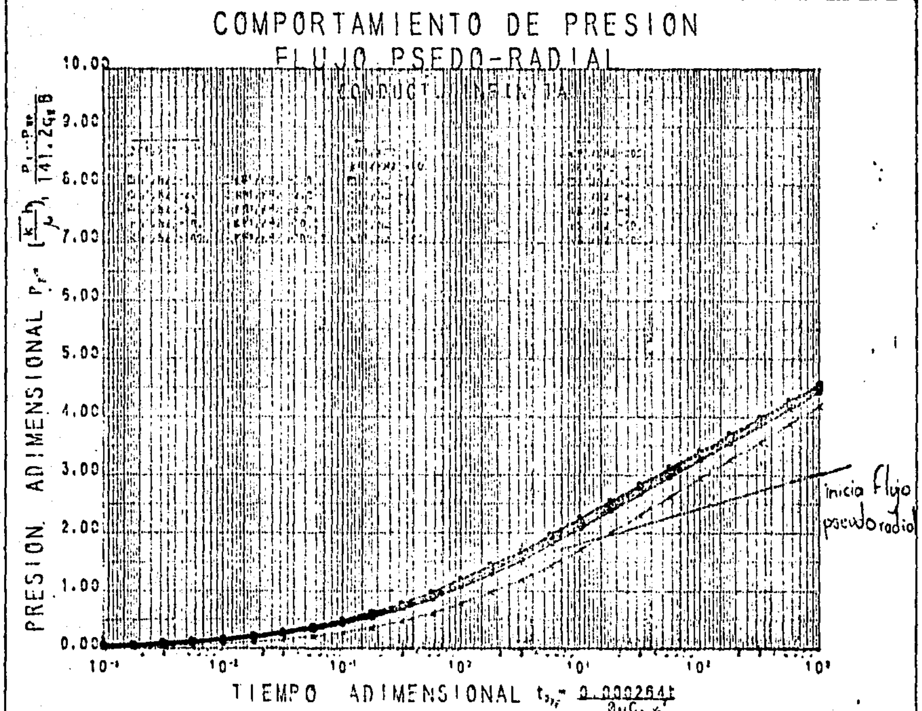


Fig. 18 .-Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante el periodo de flujo pseudo-radial

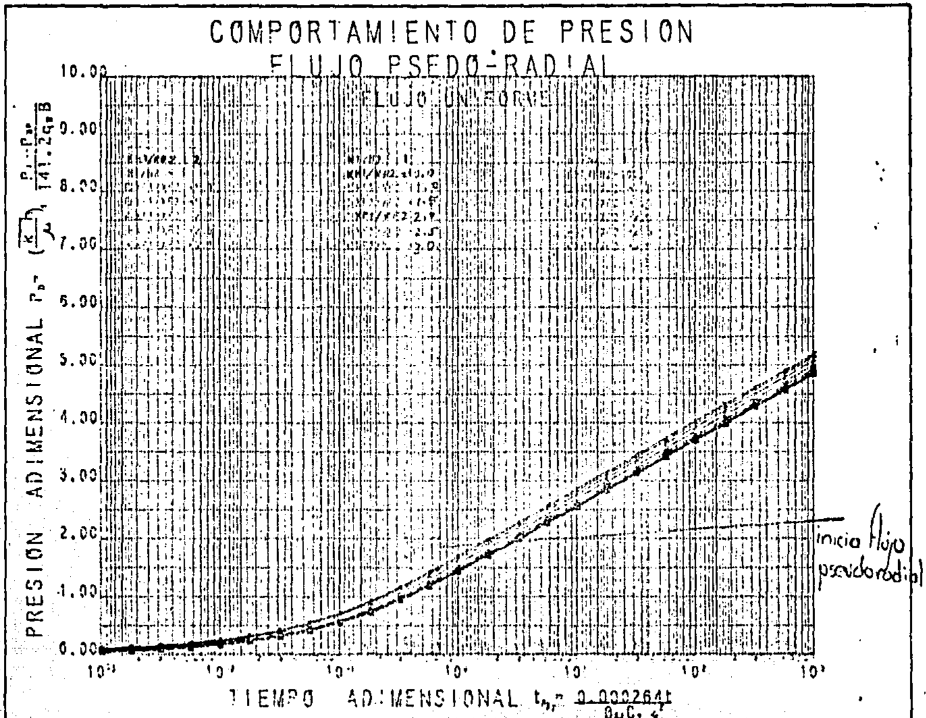


Fig. 19 .-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia tanto en la extension de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante el periodo de flujo pseudo-radial.

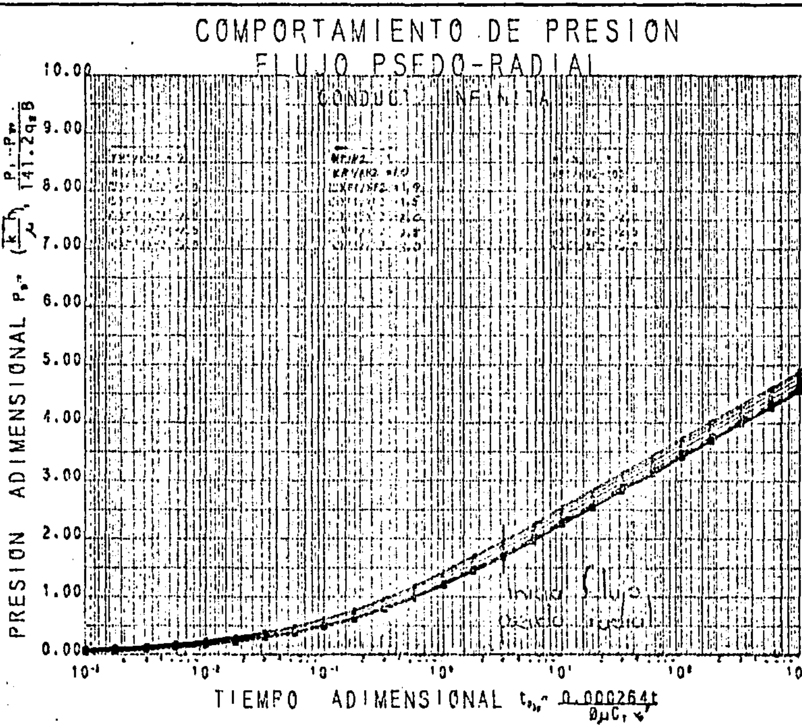


Fig. 20.-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia tanto en la extension de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante el periodo de flujo pseudo-radial.

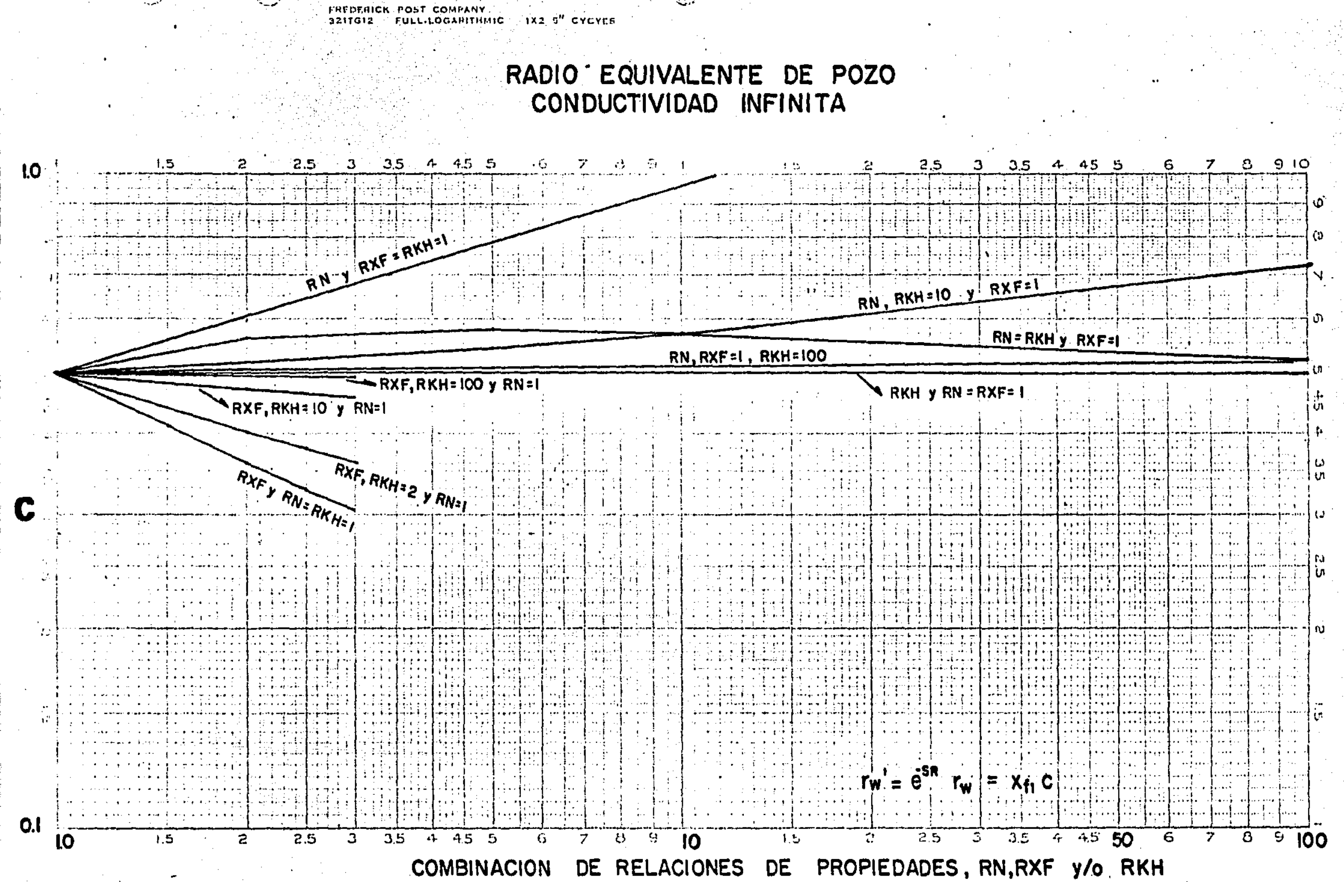


FIG. 21.- Relacion entre las combinaciones de relaciones de propiedades entre capas de un yacimiento infinito sin flujo cruzado y la relacion entre radio equivalente del pozo y la extension de la fractura vertical inducida.

FREDERICK POST COMPANY
321TG12 FULL-LOGARITHMIC 1X2 5" CYCYES

RADIO EQUIVALENTE DE POZO
FLUJO UNIFORME

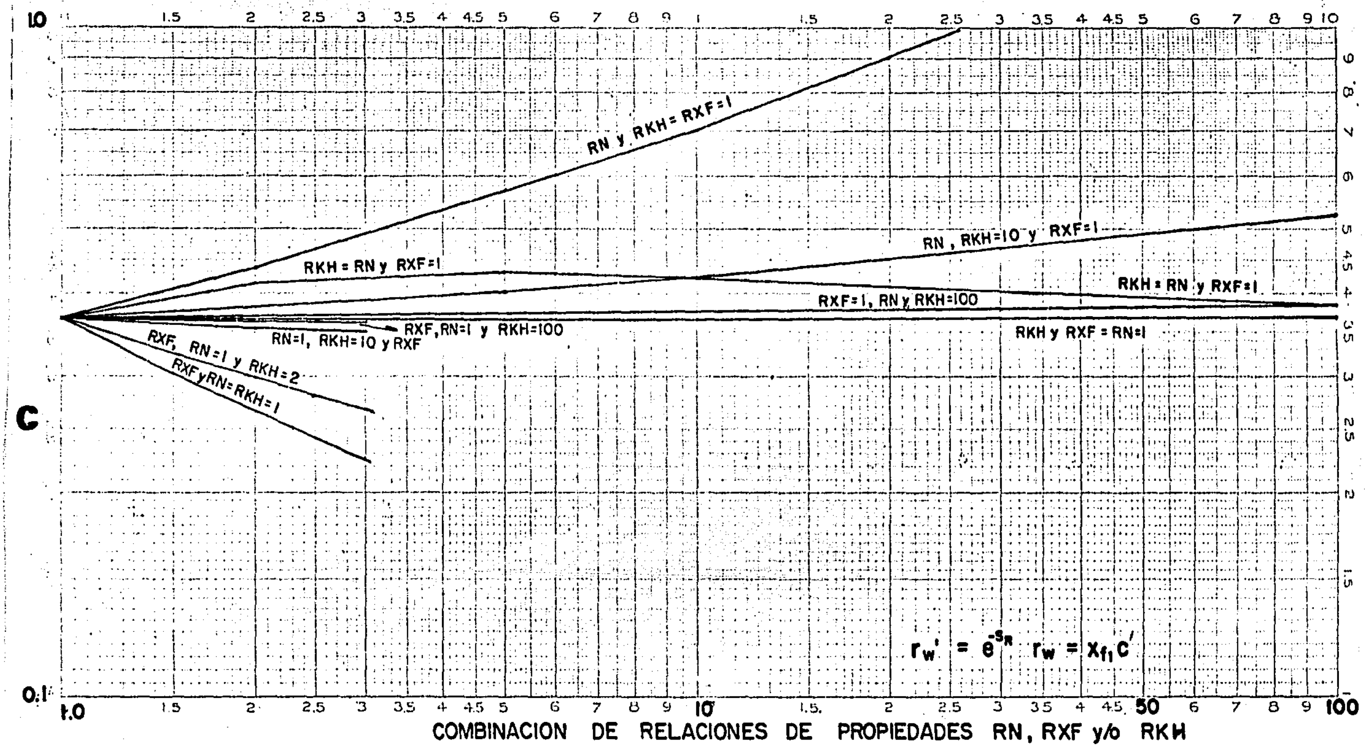


FIG. 22.- Relacion entre las combinaciones de relaciones de propiedades entre capas de un yacimiento infinito sin flujo cruzado y la relacion entre radio equivalente del pozo y la extension de la fractura vertical inducida.

Las curvas de comportamiento graficadas en papel natural (P_D contra $\sqrt{t_{Dxf}}$) resultan con su pendiente multiplicadas por el recíproco del gasto límite antes mencionado dificultando aún más la interpretación de pruebas de presión durante el período de flujo lineal, por lo que para este período se emplea la definición de presión adimensional original (fig. 23 a 28).

Por último, se observó que el comportamiento del gasto contra el tiempo adimensionales en el caso de K_1/K_2 = 10 para X_f = r_w es igual al presentado por Lefkovits[60] dentro del rango de flujo pseudoradial (RKH = RN = 10, fig. 5).

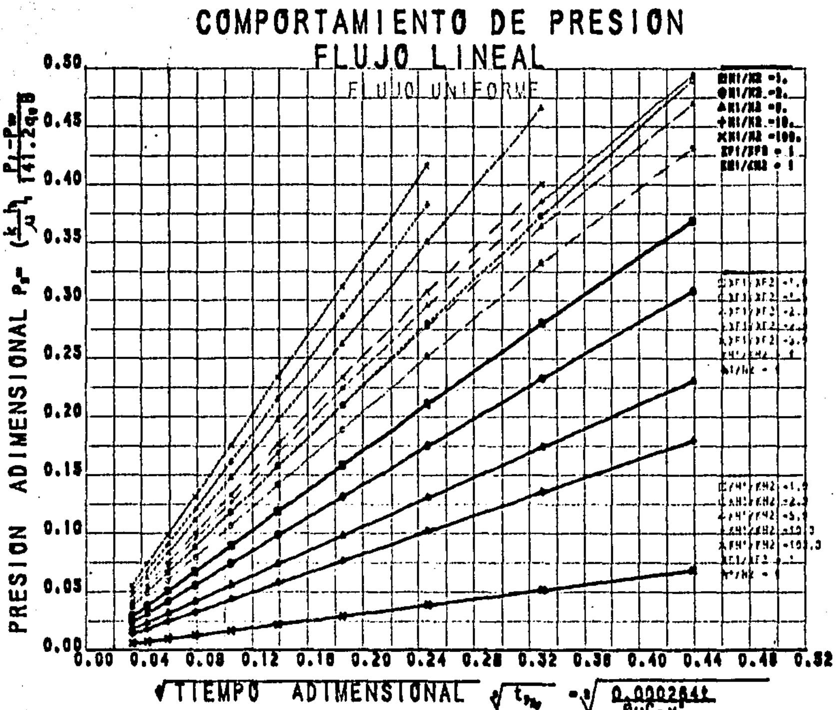


Fig. 23 .-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante el periodo de flujo lineal.

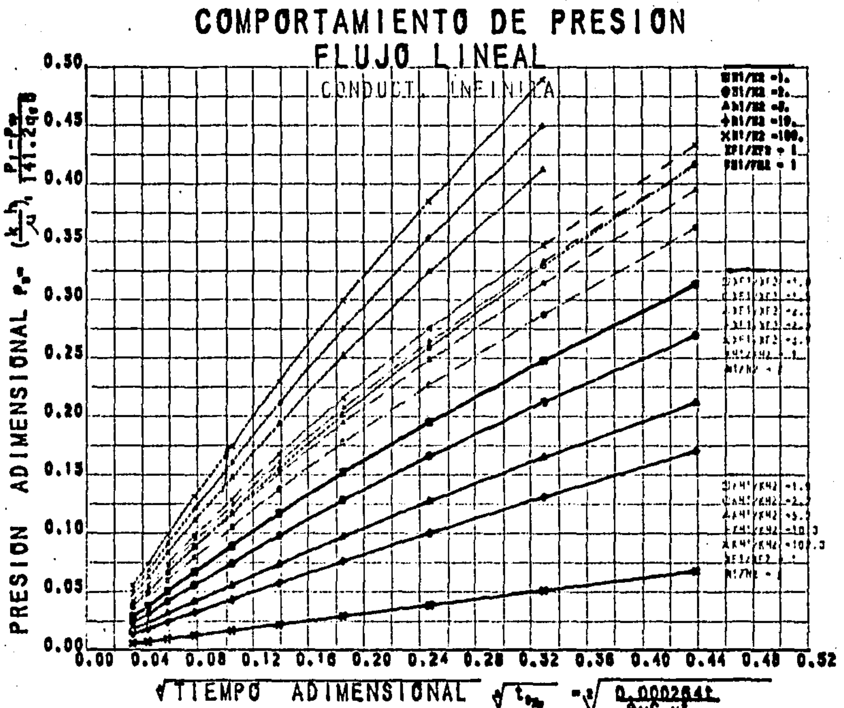


Fig. 24.-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia espesor, longitud de fractura, porosidad y/o compresibilidad de una capa a la otra del sistema durante el periodo de flujo lineal.

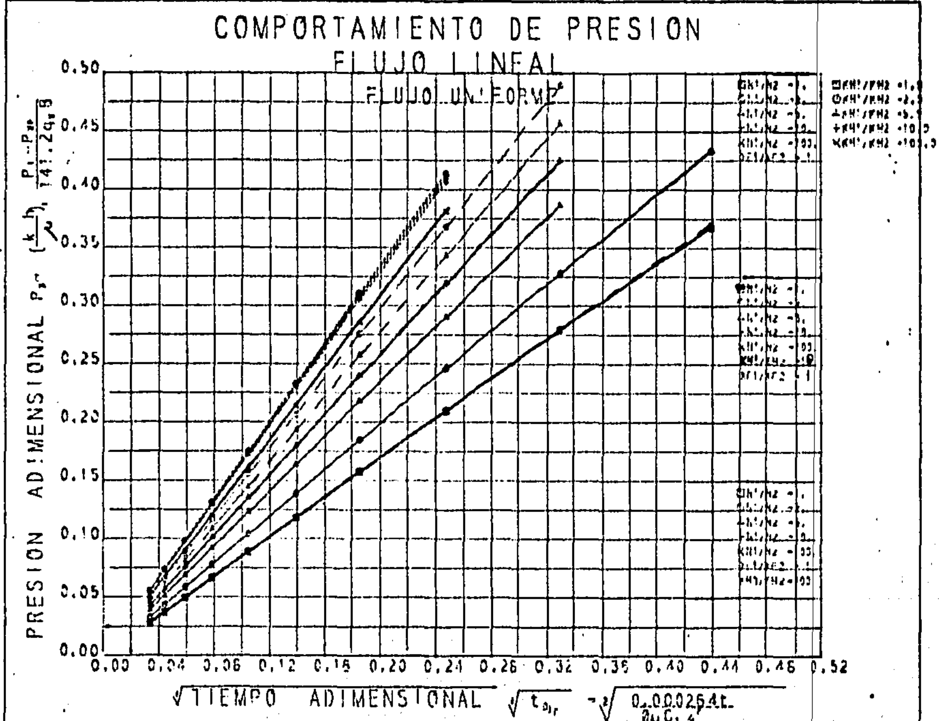


Fig. 25 .- Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante el periodo de flujo lineal.

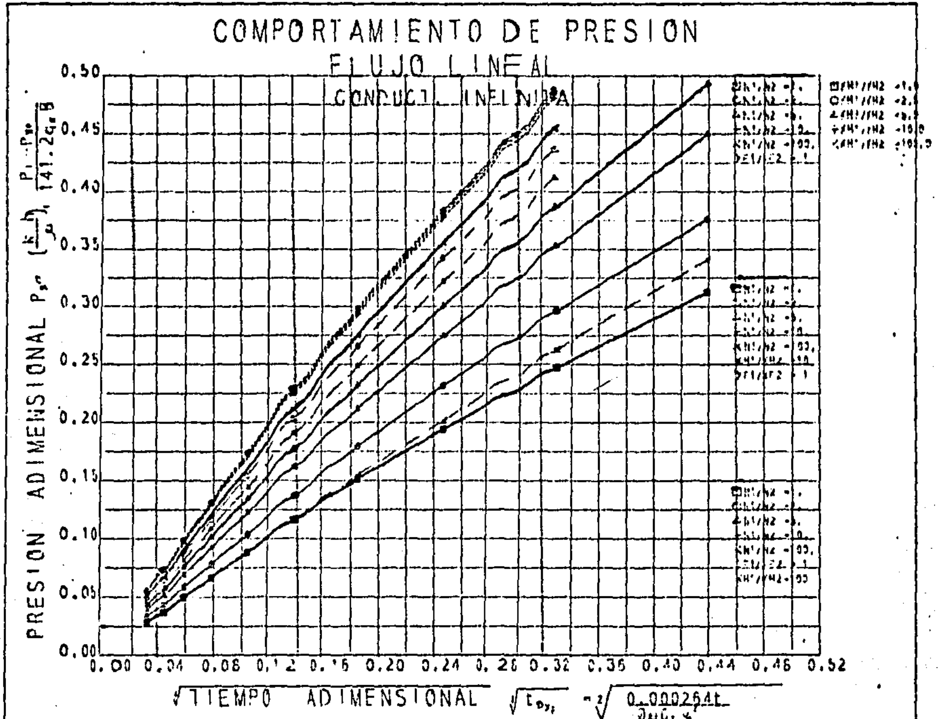


Fig.26.-Decremento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varía permeabilidad, porosidad y/o compresibilidad con espesor entre capas durante el período de flujo lineal

COMPORTAMIENTO DE PRESION

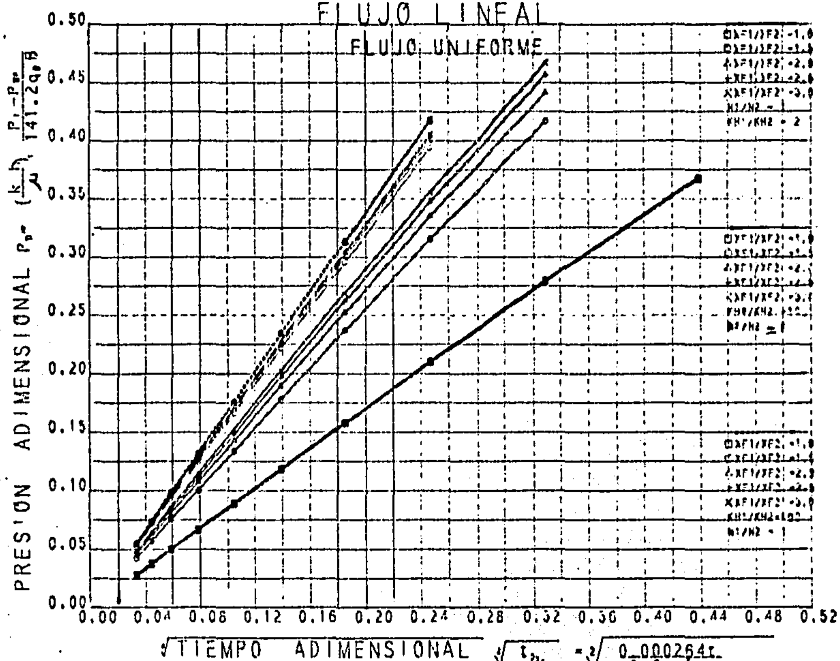


Fig. 2F .-Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia tanto en la extension de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante el periodo de flujo lineal.

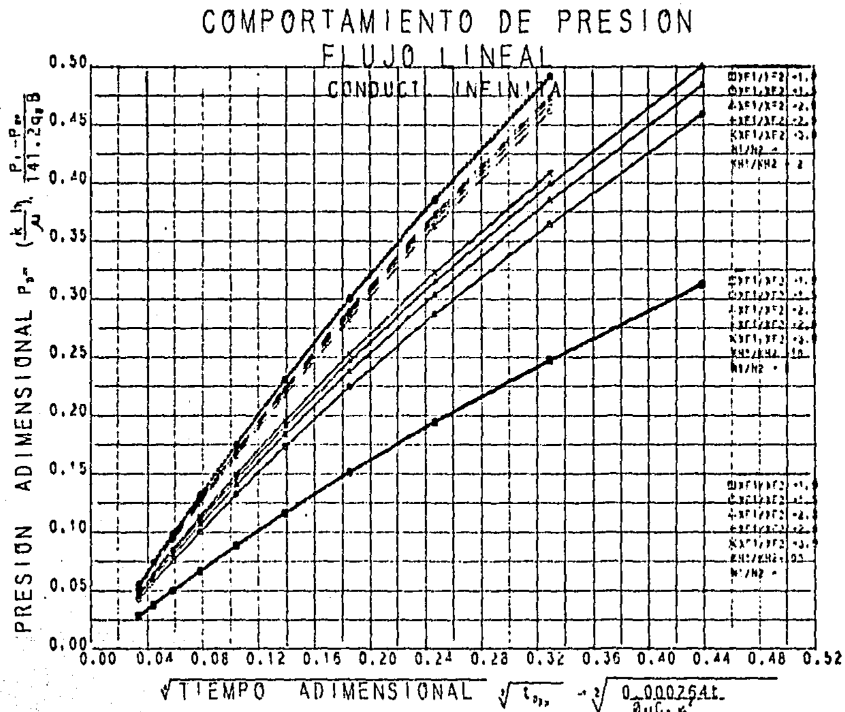


Fig. 28 Decremento de presion de un pozo con fractura vertical en un yacimiento estratificado infinito sin flujo cruzado cuando varia tanto en la extension de la fractura vertical como el espesor de una capa a otra del sistema durante el periodo de flujo lineal.

IV ANALISIS DE PRUEBAS DE PRESION

El modelo está diseñado para producir resultados que permiten analizar pruebas de decremento de presión en pozos que producen con gasto constante, midiendo la variación de presión de fondo del pozo con respecto al tiempo cuando éste fluye a partir de condiciones de equilibrio en el yacimiento o vecindad del pozo.

El análisis se realiza a partir de la ecuación de comportamiento de presión del pozo en los diferentes períodos de flujo en la forma siguiente:

A Flujo Lineal

De acuerdo a la ecuación 21 los datos en el período de flujo lineal forman una línea recta en una gráfica de P_{wf} contra $\sqrt{t}$ (fig. 29 y 30). La pendiente de esta línea es dada por:

$$m_l^{+} = \frac{4.064\,\mu B q_w}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{k h x_f}{\mu\sqrt{\eta}}\right)_i} \qquad (30)$$

De la pendiente se puede determinar $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K h x_f}{\mu\sqrt{\eta}}\right)$ en función del gasto del pozo.

La extrapolación de la línea debe pasar por la P_i cuando $t = 0$. si la fractura está sin daño.

$^{+}$Utilizando unidades de campo del sistema inglés

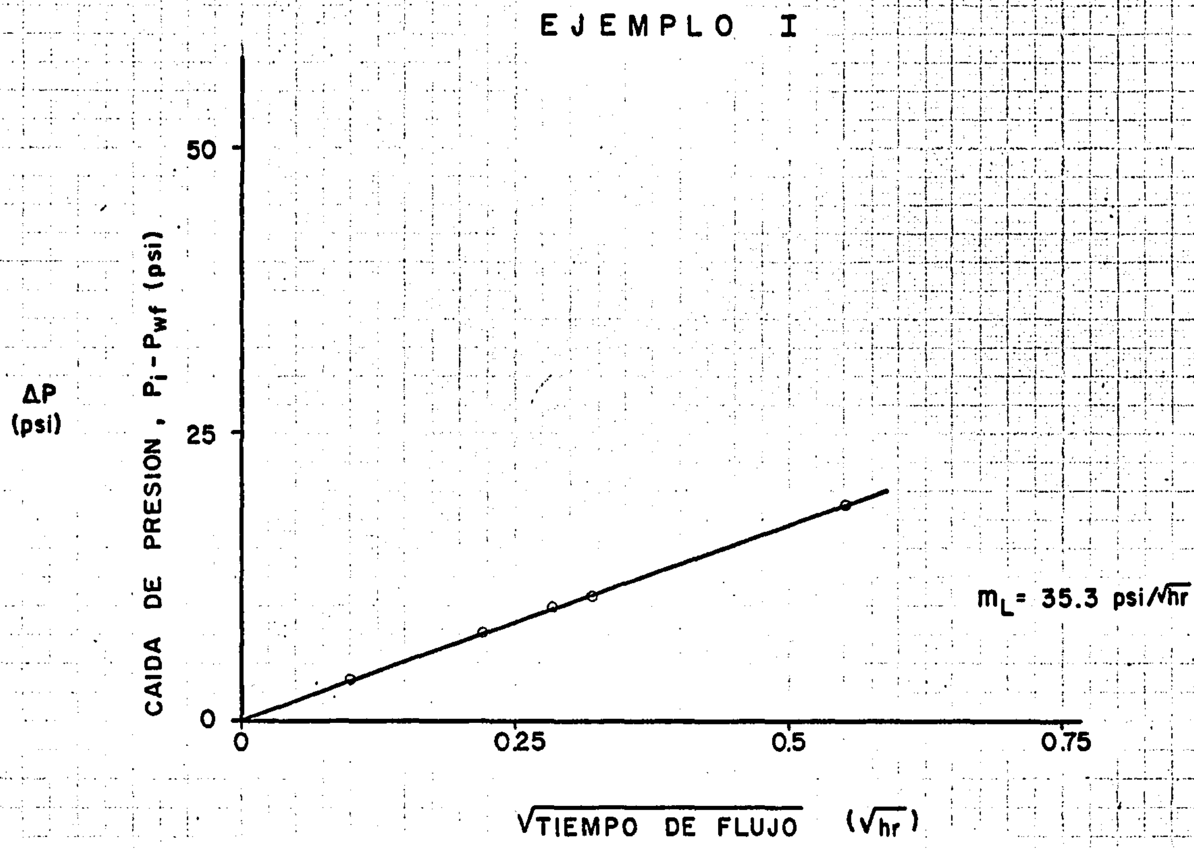


FIG. 29 Gráfica para análisis de datos en periodo de flujo lineal.

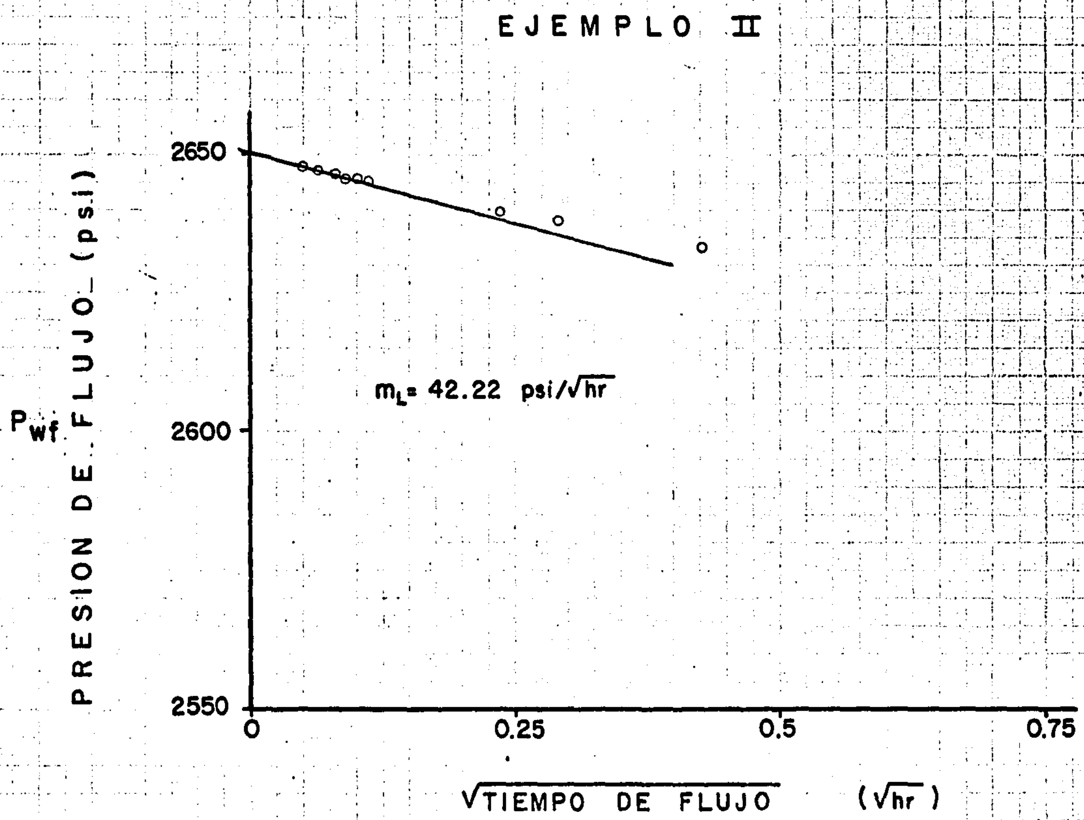


FIG. 30 Gráfica para análisis de datos en periodo lineal

B Flujo Pseudo-Radial

Para este período, la ecuación 28, indica que una gráfica de P_{wf} contra log t (figuras 31 y 32) exhibe una línea recta cuya pendiente es:

$$m_R = \frac{162.6\, q_w B}{\left(\frac{kh}{\mu}\right)} \tag{31}$$

La capacidad de flujo total se calcula de la ecuación 31 y el factor de pseudo daño se estima con:

$$s = 1.151 \left\{ \frac{P_i - P_{1hr}}{m_R} - \log\left(\frac{k_1}{\phi_1 \mu_1 C_{t_1} r_w^2}\right) + 3.23 \right\} \tag{32}$$

y el radio efectivo del pozo con la ecuación 29,

$$r_w' = e^{-s}\, r_w$$

C Análisis de Curvas Tipo

Earlougher[50] presentó ampliamente explicado la aplicación del método de ajuste de curvas tipo. Este método se basa en la proporcionalidad que existe entre la presión adimensional de la curva tipo calculada con la caída de presión medida y el tiempo adimensional de la curva tipo con el tiempo medido (figuras 33 y 34).

De la definición de P_D y t_{Dx_f} en las ecuaciones 26 y C-4 respectivamente se tiene:

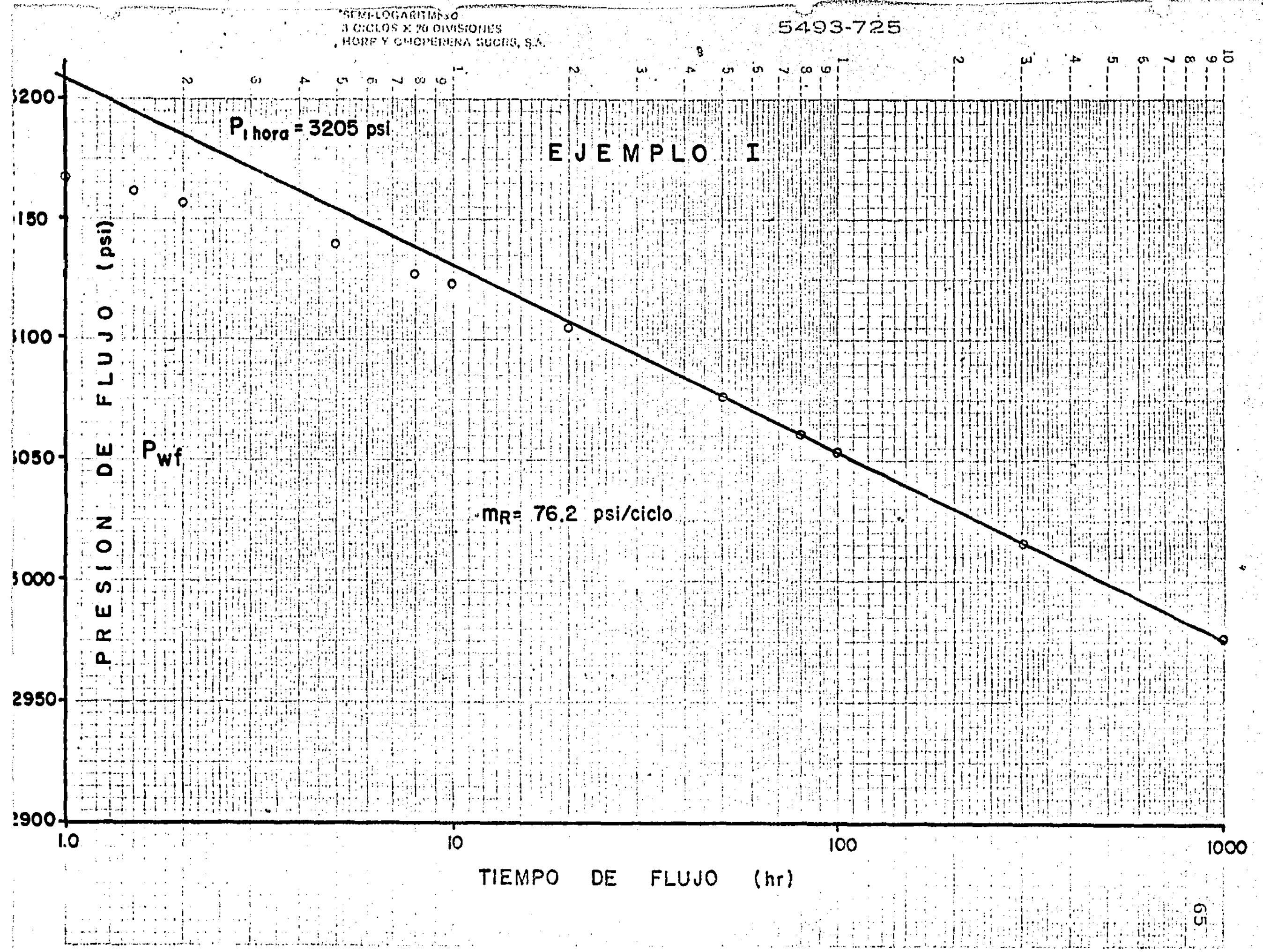


FIG. 31 Gráfica para análisis de datos en periodo pseudoradial.

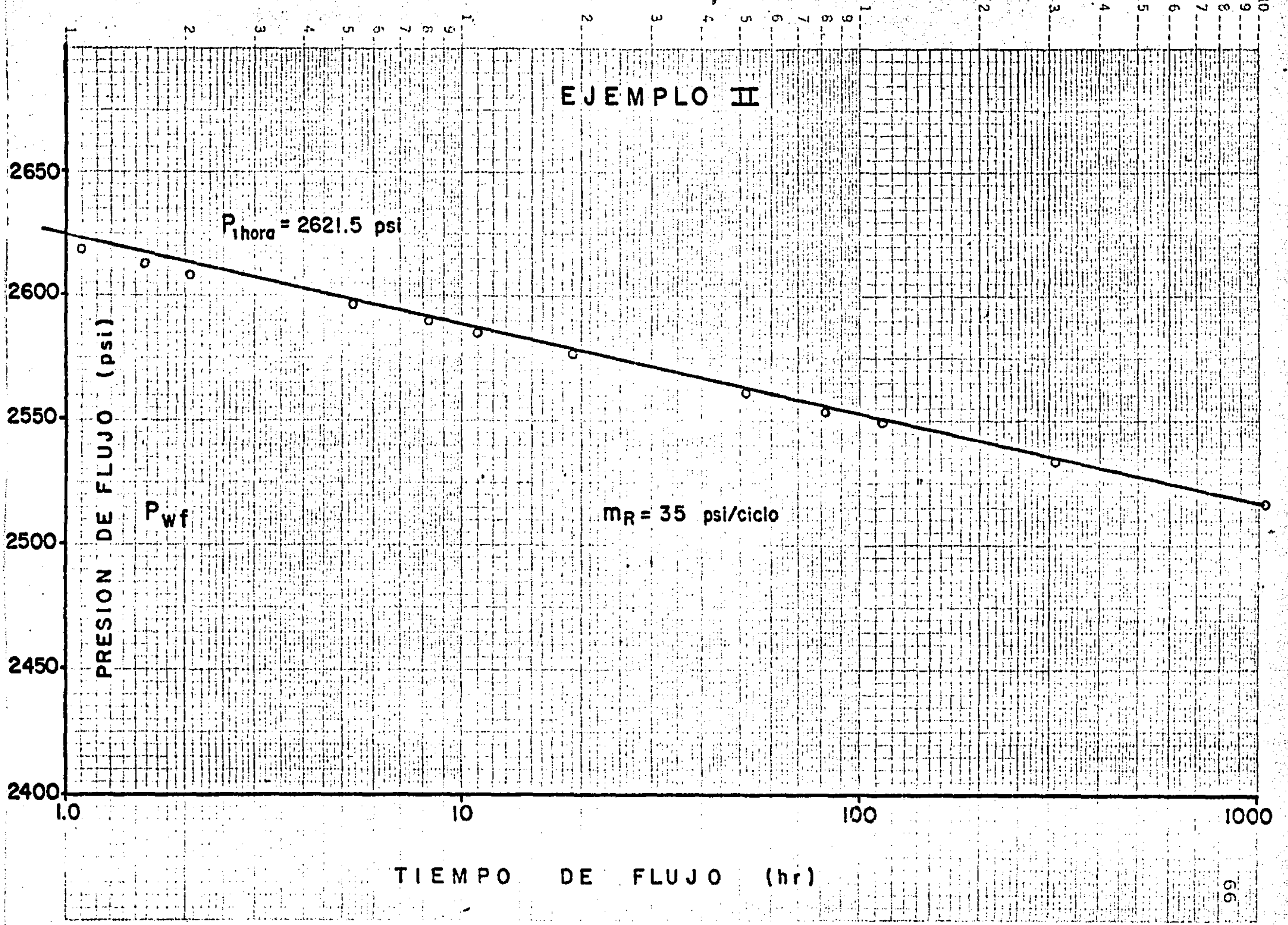


FIG. 32 Gráfica para análisis de datos en periodo pseudoradial.

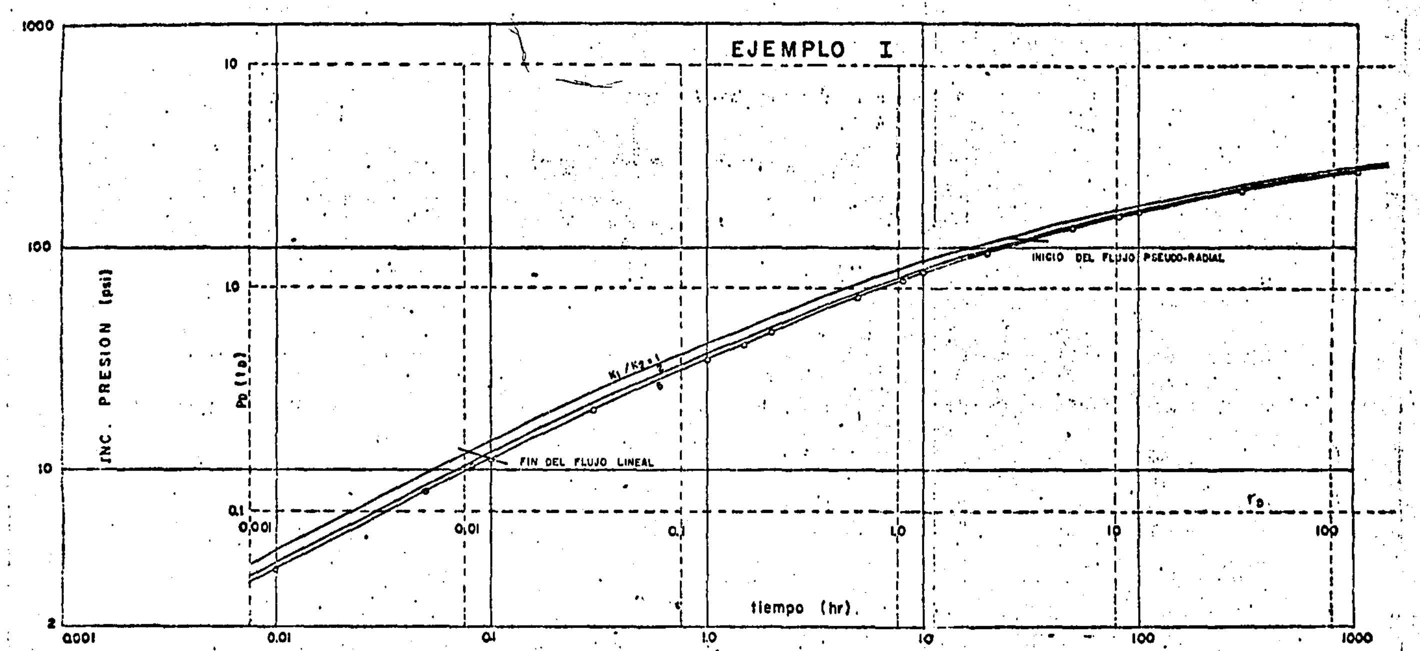


FIG.33 Análisis de curva tipo de datos de decremento de presión

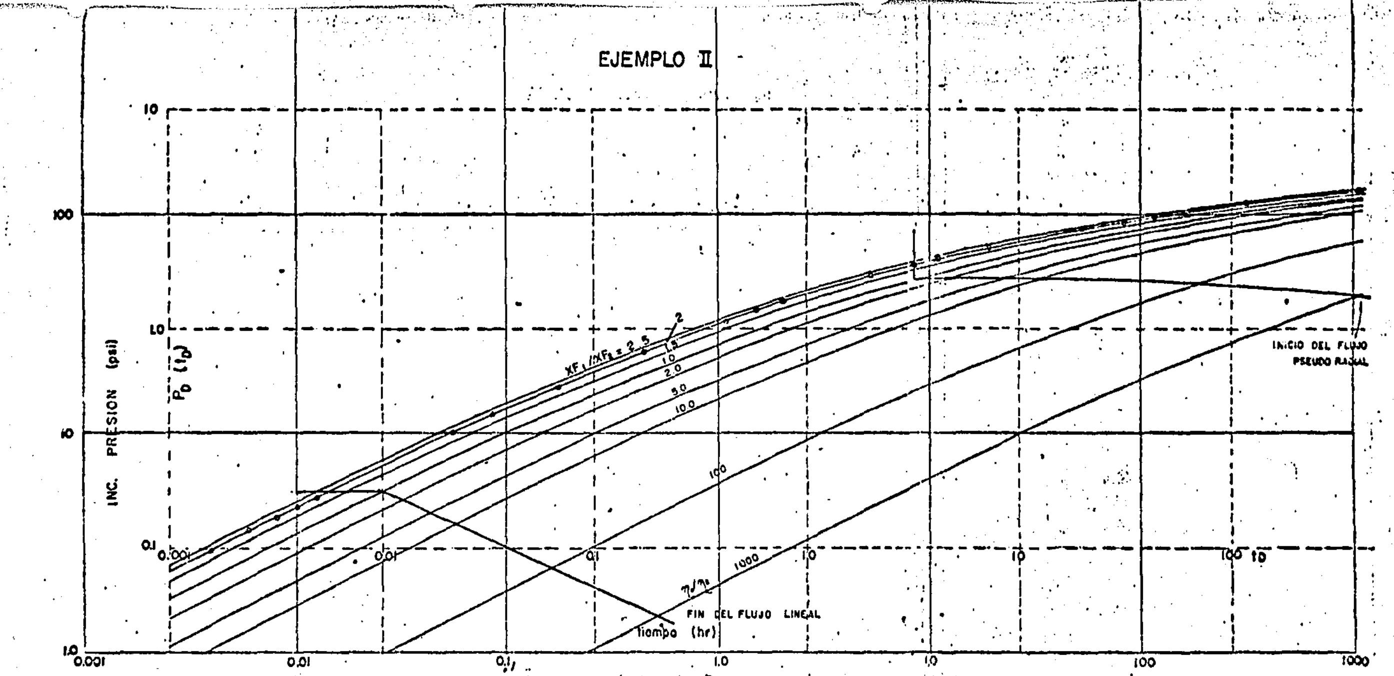


FIG. 34 Análisis de curva tipo de datos de decremento de presión

$$\left(\overline{\frac{kh}{\mu}}\right) = \frac{P_D}{\Delta P}\ 141.2\ q_w B \tag{33}$$

$$\frac{k_1}{x_{f_1}^2} = \frac{t_{Dxf}}{t} \cdot \frac{\phi_1 \mu_1 c_t}{2.64 \times 10^{-4}} \tag{34}$$

D Ejemplos de Aplicación

En el Apéndice D se presentan los datos y cálculos del análisis de dos pruebas sintéticas de decremento de presión, una cuando varía la relación de permeabilidades entre capas y la otra cuando la extensión de la fractura en una de las capas es mayor que en la otra.

El cálculo se efectuó combinando resultados, del análisis de los períodos del flujo lineal y pseudo-radial y del análisis de ajuste de curvas tipo, en forma sencilla y consistente, obteniendose datos característicos de cada estrato del yacimiento y la geometría de la fractura que los atraviesa.

V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en lo discutido en este trabajo se puede concluir que:

1) Se posee nueva información concerniente al análisis de curvas tipo para pozos con fractura vertical que penetra totalmente un yacimiento de dos estratos infinitos sin flujo cruzado y diferentes propiedades entre estratos y fluidos.

2) Con pruebas de decremento de presión convencionales se estiman las características de la formación y fractura en yacimientos estratificados.

3) Una combinación de resultados del análisis de los períodos de flujo y de ajuste de curvas tipo permite obtener información más completa y confiable.

4) El comportamiento de presión de un pozo con fractura vertical en un yacimiento de dos estratos sin flujo cruzado infinitos con la misma difusibidad hidráulica y extensión de fractura en ambos estratos y con capacidades de flujo iguales o diferentes ($RN = RXF = 1$, $RKH \geqslant 1$) es idéntico al comportamiento de un pozo con fractura vertical en un yacimiento de un solo estrato, para condiciones de flujo y presión uniforme en la fractura.

5) La relación de capacidades de flujo RKH es el factor predominante con respecto a las otras dos relaciones de propiedades, así cuanto mayor sea de uno, la curva de comportamiento de presión más se ajusta a la curva de un solo estrato fracturado.

Se recomienda ampliar el estudio para cubrir los siguientes objetivos:

1) Determinar en forma gráfica la distribución de presión en función de tiempo y distancia del pozo, ya sea en forma paramétrica en dos dimensiones o en tres dimensiones, para interpretación de pruebas de interferencia.

2) Obtener el comportamiento para el caso en que la presión inicial es diferente entre estratos.

3) Determinar el comportamiento de presión para el caso de n estratos en el sistema.

NOMENCLATURA

B = factor de volumen, volumen @ cy/volumen @ cs.

b_f = amplitud de la fractura.

C_t = compresibilidad total

h = espesor de la formación

k = permeabilidad de la formación

m = pendiente de la línea recta

P = presión

P_i = presión inicial

P_{wf} = presión de fondo fluyendo

P_D = presión adimensional

q = gasto del pozo

r_w = radio del pozo

r'_w = radio efectivo del pozo

s = pseudo daño

t = tiempo de flujo o de inyección

x_f = longitud de un lado de la fractura

ϕ = porosidad de la formación

μ = viscosidad

Indices

D = adimensional

f = fractura

f = fluyendo

i = inicial

L = lineal

p = producción

t = total

w = pozo

o = aceite

R = radial

REFERENCIAS

1.- Matthews, C. S. y Russell, D. G.:Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Series, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas (1967) 1.

2.- Coleman, S. P., Wilde, H. D., Jr., y Moore, T. V.: "Quantitative Effect of Gas-Oil Ratios on Decline of Average Rock Pressure" Trans A.I.M.E. (1930) 86, 174-184.

3.- Schilthuis, R. J.,: Active Oil And Reservoir Energy", Trans., AIME (1936) 118, 33-52.

4.- Moore, T. V., Schilthuis, R. J., y Hurts, W.: "The Determination of Permeability from Fied Data". Proc., API Bull 211 (1933) 4.

5.- Hurst, W.: "Water Influx into a Reservoir and its aplication to the Equation of Volumetric Balance". Trans., AIME (1943) 151, 57-72.

6.- van Everdingen, A. F. y Hurst, W.: The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs". Trans., AIME (1949) Vol. 186, 305.

7.- Petroleum Transactions Reprint Series N. 2, "Water Flooding". AIME. (1959)

8.- Petroleum Transactions Reprint Series N. 8, "Miscible Processes" AIME. (1965).

9.- Crichlow, H. B.: Moder Reservoir Engineering - A Simultation Approach; Prentice - Hall Inc., 1977.

10.- Darcy, H. "Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon" Victor Delmont, Paris (1856).

11.- Hubbert, K. M.: "Darcy's Law and the Field Equations of the Flow of Underground Fluids," Trans., AIME (1956) Vol. 207, 222-239.

12.- Muskat , M.: The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1937).

13.- Polobarinova-Kochina, P. Ya.: "Theory of Ground Water Movement", Traducido del ruso por J. M. R. DeWiest, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1962) 549.

14.- Bruce, W. A.: " An Electrical Device for Analyzing Oil Reservoir Behavior". Trans., AIME (1943) 157, 112.

15.- Dyes A. B. Kemp C. E. y Caudle B. H.: "Effect Of Fractures on Sweep-Out Pattern", Trans., AIME (1958) 213, 245.

16.- Scott, J. O.: The "Effect of Vertical Fractures on Transient Pressure Behavior of Wells", Jour. Pet. Tech. (Dic., 1963) 1365.

17.- Carslaw, H. S. y Jaeger, J. C.: Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press (1959).

18.- Olson, F. C. W. y Schultz, O. T.: "Temperatures in Solids During Heating or Cooling" Ind. and Eng. Chem. (1942) Vol. 34, 874.

19.- Masters, J. I.: "Some Applications in Physics of the P Function", J. Chem. Phys. (1955) Vol. 23, 1865-74.

20.- Nisle, R. G.: "The Effect of Partial Penetration on Pressure Build-Up in Oil Wells", Trans. AIME. (1958) 213, 85.

21.- Gringarten, A. C. y Ramey, H. J., Jr.: "A Comparison of Different Solutions to the Radial Flow Problems", submited for publication to the Society of Petroleum Engineers (AIME).

22.- Theis, C. V.: "The Relationship Between the Lowering of the Piezomatric Surface and the Rate and Duration of Discharge Using Ground-Water Storage"., Trans., AGU (1935) 519.

23.- Lord Kelvin (Sir William Thomson): "Mathematical and Physical Papers", Cambridge at the University Press (1884) Vol. II, 41.

24.- Muskat, M.: "Use or Data on Build-up of Bottom Hole Pressures", Trans., AIME (1937) 123, 44.

25.- Larson, V. C.: "Understanding the Muskat Method of Analysing Pressure Build-Up Curves", Journal of Canadian Petroleum Technology, Vol. 2, No. 3 (Fall, 1963).

26.- Russell, D. G.: "Extensions of Pressure Build-up Analysis Methods", Trans., AIME (1966) Vol. 237, 1624.

27.- Horner, D. R.: "Pressure Build-Up in Wells, "Proc., Third World Pet. Cong., E. J. Brill, Leiden (1951) 11, 503, 521.

28.- Miller, C. C., Dyes, A. B., y Hutchinson, C. A., Jr.: "Estimation of Permeability and Reservoir Pressure from Bottom-Hole Pressure Build-up Characteristics", Trans., AIME (1950) 189, 91-104

29.- Matthews, C. S., Brons, F., y Hazebroek, P.: " A Method for Determination of Average Pressure in a Bounded Reservoir," Trans., AIME (1954) 201, 182-191.

30.- Ramey, H. J., Jr., y Cobb, W. M.: "A General Pressure Buildup Theory for a Well in a Closed Drainage Area", J. Pet. Tech. (Diciembre 1971) 1493.

31.- Perrine, R. L.: "Analysis of Pressure Build-Up Curves", Drill. and Prod. Prac., API (1956) 482.

32.- Martín, J. C. : "Theoretical Foundation of Multiphase Pressure Buildup Analysis" J. Pet. Tech.(Oct. 1959) 321-323.

33.- Tracy, G. W.: "Why Gas Wells have Low Productivity", Oil and Gas J. (Agosto 6, 1956) 84.

34.- Howard, G. C. y Fast, C. R.:"Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension", Drill. & Prod. Prac., API (1958).

35.- McGuire, W. J. y Sikora, V. J.: "The Effect of Vertical Fractures on Well Productivity", Trans., AIME (1960) 219, 401.

36.- Prats, M. : "Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior—Incompressible Fluid Case", Soc. Pet. Eng. J. (Junio 1961), 105-108.

37.-Poollen H. K. Tinsley J. M. y Saunders, C. D.:"Hidraulic Fracturing — Fracture Flow Capacity vs. Well Productivity" Trans., AIME (1958), 213, 91-95.

38.- Tinsley, J. M. Williams, J. R., Jr., Tiner, R. L. y Malone, W. T.: "Vertical Fracture Height-Its-Effect on Steady-State Production Increase", J. Pet. Tech. (May. 1969), 633-638.

39.- Russell, D. G. y Truitt, N. E.: "Transient Pressure Behavior in Vertically Fractured Reservoirs", J. Pet. Tech. (Oct. 1964) 1159-1170; Trans., AIME, 231, Also Reprint Series, No. 9 - Pressure Analysis Methods, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas (1967) 149-160.

40.- Clark K. K.: "Transient Pressure Testing of Water Injection Well", J. Pet. Tech. (Junio 1968), 639.

41.- Millheim K. K., y Cichowicz L.: "Testing and Analyzing Low-Permeability Fractured Gas Well", J. Pet. Tech. (Feb. 1968) 193-198.

42.- Raghavan, R., Cady, G. V., y Ramey, H. J., Jr.: "Well-Test Analysis for Vertically Fractured Wells", J. Pet. Tech. (Agosto 1972) 1014-1020; Trans., AIME, 253.

43.- Gringarten, A. C., Ramey H. J., Jr., y Raghavan, R.: "Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture", Soc. Pet. Eng. J. (Agosto 1974) 347-360.

44.- Gringarten, A. C. y Ramey, H. J. Jr.: "Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well with a Single Horizontal Fracture, Partial Penetration or Restricted Entry", Soc.Pet.Eng. J. (Agosto 1974) 413-426; Trans., AIME, 257.

45.- Gringarten, A. C., Ramey, H. J., Jr.: y Raghavan, R.: "Applied Pressure Analysis for Fractured Wells", J. Pet. Tech. (Jul. 1975) 887-892; Trans., AIME, 259.

46.- Cinco H., Samaniego V., F., y Domínguez A. N. : "Transient Pressure Behavior for a Well with a Finite Conductivity Vertical Fracture", paper SPE 6014 presented at SPE-AIME 51 st Annual Fall Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Oct. 3-6, 1976.

47.- Agarwal R. G., Carter R. D., y Pollock C. B.: "Evaluation and Prediction of Reformance of Low Permeability Gas Well Stimulated by Massive Hydraulic Fracturing" Artículo SPE 6838, presentado en el 52 nd Annual Technical Conference and Exhibition of SPE of AIME, Denver Colorado (Oct.1977).

48.- Ramey H. J. Jr., Barker B., Arihara, N., Mao M. L. y Marques J. K.: "Pressure Transient Testing of Hidraulica-lly Fractured Wells" Artículo presentado en American Society Topical Meeting, Golden, Colorado (Abril 1977).

49.- Ramey, H. J. Jr.: "Practical Use Modern Well Test Analysis". SPE 5878 AIME. Presented at SPE-AIME 46 th annual California Regional Meeting. (Abril 9, 1976).

50.- Earlougher, R. C.: Advances in Well Test Analysis, Monograph Series, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas (1977).

51.- Cinco-Ley H. y Samaniego V. F., "Evaluación de un Fracturamiento Hidráulico por medio de Pruebas de Presiones". Congreso Panamericano de Ingeniería del Petróleo, CIPM, México, D. F., (1979).

52.- Gringarten A. C., Bourdet, D. P., Landel, P. A. y Kniazeff, V. J.: " A Comparison Belween Different Skin and Wellbore Storage Type-Curves for Early-time transient Analysis". AIME-SPE No. 8205, presentado en el 54 th en las Vegas, Nevada. Septiembre 23, 1979.

53.- Russell, D. G., y Prats, M.: "The Practical Aspects of Interlayer Crossflow". J. Pet. Tech. (Junio 1962), 589-594.

54.- Jacquard, P.: "Etude Mathematique du Drainage d' un Réservoir Hetérogéne", Rev. inst. franc. Pétrole (1960) XV, No. 10.

55.- Katz, M. L. y Tek, M. R.: "A Theoretical Study of Pressure Distribution and Fluid Flux in Bounded Stratified Porous Systems with Crossflow", Soc. Pet. Eng. Jour. (Marzo, 1962) 68-82.

56.- Russell, D. G. y Prats, M.: "Performance of Layered Reservoirs with Crossflow-Single-Compressible-Fluid Case", Soc. Pet. Eng. Jour. (Marzo, 1962) 53.

57.- Vacher, J. P. y Cazabat, V.: "Ecoulement des Fluides dans les Milieux Poreux Stratifies, Resultats Obtenus sur le Modéle du Bicouche Avec Communication", Rev. inst. franc. pétrole (1961) XVI, No. 14.

58.- Pélissier, F. y Séguier, P.: "Analyse Numérique des Equations des Bicouches", Rev. Inst. franc. pétrole (1961) XVI, No. 10.

59.- Pendergrass, J. D. y Berry, V. J., Jr.:"Pressure Transient Performance of a Multi-Layered Reservoir with Crossflow". Paper SPE-285 presented at Production Research Symposium, Tulsa, Okla., Abril 12-13, 1962.

60.- Lefkovits, H. C., Hazebroek, P., Allen, E. E. y Matthews, C. S.: " A Study of the Behavior of Bounded Reservoirs Composed of Stratified Layers", Soc. Pet. Eng. Jour. (Marzo 1961) 43.

61.- Horner, D. R.: "Pressure Behavior in a Well Producing from a Number of Different Horizons", Unpublished Shell Oil Co. Report.

62.- Tempelaar-Lietz, W.: "The Effect of the Rate of Oil Production upon the Performance of Wells Producing from More than One Horizon", Trans., AIME (1961) Vol. 222, 28.

63.- Duvaut, G.: "Drainage des Systéms Hétérogénes". Revue, Institute of French Petroleum, Octubre 1961, X, No. 10 .

64.- Gringarten, A. C. y Ramey, H. J., Jr.: "The Use of Source and Green's Functions in the Solution of Unsteady Flow Problems in Reservoirs", Soc. Pet. Eng. J. (Oct. 1973) 285-296.

65.- Papadopulos, I. S.: "Nonsteady Flow to Multiaquifer Wells", Journal of Geophysical Research, Vol. 71, No. 20 (1966) 4791.

66.- Kazemi, H.: "Pressure Build-up in Reservoir Limit Testing of Stratified Systems", Journal of Petroleum Technology. Abril, 1970, 503.

67.- Tariq, S. M. y Ramey, H. J., Jr.: Draw-down Behavior of a well with Storage and Skin Effect Communicating with Layers of Different RAdii and other Characteristics". AIME SPE No. 7453, presentado en la 53 th en Houston, Texas, Oct. 1o. de 1978.

68.- Gringarten, A. C., "The Use of Source and Greens's Function of Unsteady Flow Problems in Reservoirs" Pub. ITTE 71-9 Dept. of Civil Engineering U. of California of Berkeley (Dic. 1971).

69.- Francis B. Hildebrand; Advanced Calculus for Applications, Second Edition, Prentice Hall, Inc. (1976) Englewood Cliffs, N. J.

70.- Juan-Camas, I. "Determinación de las Propiedades de un Yacimiento Mediante Pruebas de Gasto en un Pozo a Presión Constante" Tesis para M. I. Petrolera (1976) U.N.A.M.

71.- Kreyszig, E. Matemáticas Aplicadas para Ingeniería, Vol. 2 Limusa (1976), 898.

72.- Murray R, Spiejel, Teoría y Problemas-Cálculo Superior, Libros Mc Graw-Hill, Serie de Compendios Schaums.

73.- Gringarten, A. C.: "Interpretation of Test in Fissured Reservoirs and Multilayered Reservoirs with Doubble Porosity Behavior; Theory and Practice", Artículo AIME-SPE No. 10044, presentado en el International Petroleum Exhibition and Technical Symposium of the SPE held in Beijing, China, Marzo de 1982.

74.- Bennett C. A., Reynolds A. C. y Raghavan R. V.; "Performance of Finite Conductivity Vertically Fractured Wells in Single-Layer Reservoirs" artículo AIME-SPE No. 11029. Presentado en el 57 th Annual Fall Meeting, New Orleans, L. A. Sept. 1982.

75.- Bennett C.A., Reynolds A. C. y Raghavan R. V.: Analysis of Finite Conductivity Fractures Intercepting Multilayer Reservoirs" Artículo <u>AIME-SPE No. 11030.</u> Presentado en el 57 th Annual Fall Meeting, New Orleans, L. A. Sept. 1982.

76.- Cobb W. M, Ramey H. J. Jr., y Miller F. C., "Well Test Analysis for Wells Producing Commingled Zones", <u>J. Pet. Tech.</u> (Enero 1972) 27-37. Trans., AIME, 253.

APENDICE A

Deducción de las ecuaciones de flujo para un pozo fracturado verticalmente en un yacimiento infinito.

Una de las soluciones de la ecuación de difusión usada para flujo en medios porosos es la forma propuesta por Nisle[20] de la solución de punto fuente instantáneo de Lord Kelvin[23], utilizada en conductividad de calor por Carslaw y Jaeger[17], definida para un medio isotrópico, homogéneo y con un gasto instantáneo en un punto fuente de un yacimiento infinito al tiempo t :

$$\Delta P(d,t) = \frac{q \; e^{-\frac{d^2}{4\eta t}}}{8\,\phi\, c_t\, (\pi \eta t)^{3/2}} \qquad \text{A-1}$$

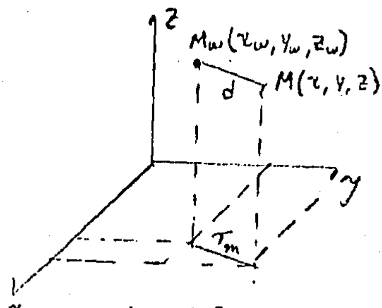


Fig. A-1

Si $\quad G(M, M_w, t) = \dfrac{e^{-\frac{d^2}{4\eta t}}}{8\,(\pi \eta t)^{3/2}}$

$$\Delta P(d,t) = \frac{q}{\phi\, c_t}\; G(M, M_w, t) \qquad \text{A-2}$$

Donde:

q gasto instantáneo.

$M(x,y,z)$ Es un punto en el que se define el cambio de presión al tiempo "t" (fig. A-1).

$M(x_w, y_w, z_w)$ Es un punto fuente que origina el cambio de presión debida a un gasto instantáneo al tiempo "τ" y $\tau < t$.

$$d^2 = (x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 + (z - z_w)^2 = r_m^2 + (z - z_w)^2$$

Con esta ecuación, el método propuesto por Gringarten[64] el cual hace uso de funciones de Green y el método de pozos imagen; se establece la solución de línea fuente, del plano fuente o un volumen fuente infinitos y/o limitados.

<u>Línea fuente limitada</u> a partir del punto fuente en el origen,

$$\Delta P(\overline{PM},t) = \frac{q}{8\phi c_t (\pi\eta t)^{3/2}} \int_L e^{-\frac{\overline{PM}^2}{4\eta t}}\, dL \qquad \text{A-3}$$

ó $$\Delta P(\overline{PM},t) = \frac{q}{\phi c_t} \int_L G(M, M_w, t)\, dM_w$$

Donde $q = \frac{\text{gasto instantáneo}}{\text{longitud}}$

Si L es la dirección z; $L = Z_w$ y $dL = dZ_w = dM_w$ (fig. A-2)

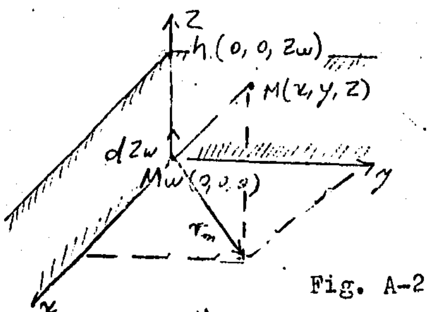


Fig. A-2

Mw punto fuente instantáneo

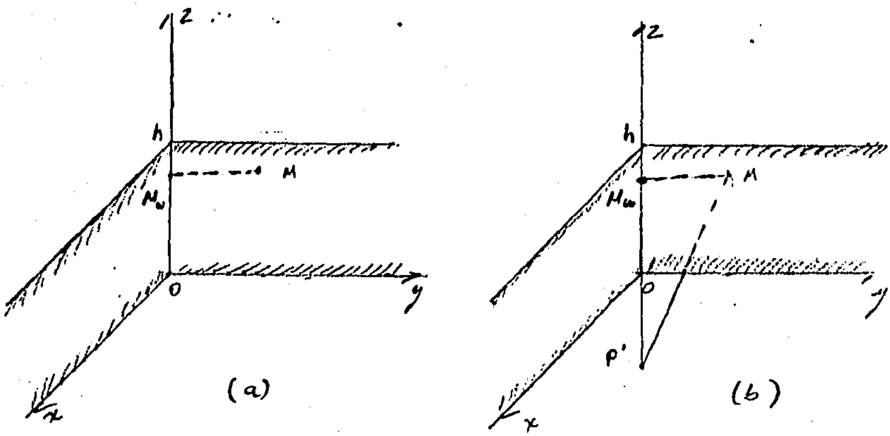
h longitud de la línea fuente

Substituyendo,

$$\Delta P(\overline{PM};t) = \frac{q}{\phi c_t} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r_m^2 + (z-z_w)^2}{4\eta t}}}{8(\pi\eta t)^{3/2}}\, dz_w \qquad \text{A-4}$$

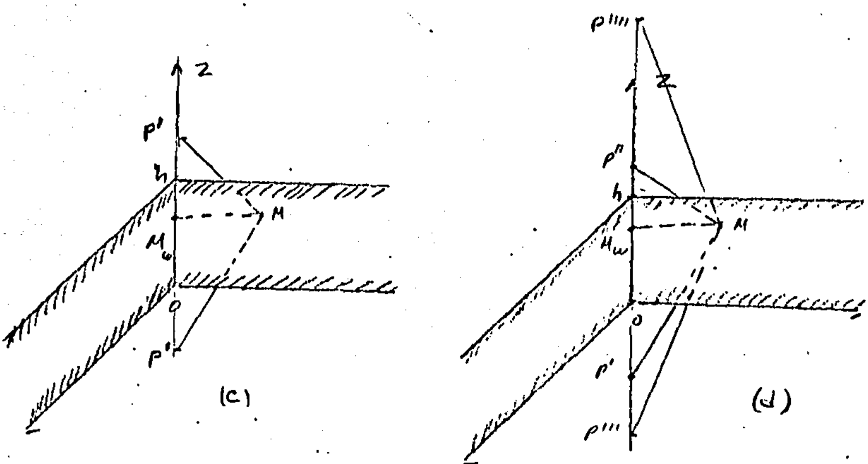
Para obtener las fronteras impermeables, arriba y abajo del estrato, se usa el método de imágenes.

Fig. A-3



M_ω un punto cualquiera de la línea fuente.

P' punto imagen del punto M_ω con respecto a la frontera inf.



P'' punto imagen del punto M_ω con respecto a la frontera sup.

P''' punto imagen del punto P'' con respecto a la frontera inf.

P'''' punto imagen del punto P' con respecto a la frontera sup., etc.

Sumando el efecto en los pozos imagen para compensar el desequilibrio causado por las dos superficies limitantes. (fig. A-3),

$$\Delta P(x,y,z,t) = \frac{q\, e^{-\frac{r_m^2}{4\eta t}}}{8\phi C_t (\pi\eta t)^{3/2}} \left\{ \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w-h)^2}{4\eta t}} + \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w+2h)^2}{4\eta t}} + \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w-3h)^2}{4\eta t}} \cdots\cdots \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w(-1)^n nh)^2}{4\eta t}} + \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w+h)^2}{4\eta t}} + \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w-2h)^2}{4\eta t}} + \cdots + \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w(-1)^{n+1} nh)^2}{4\eta t}} \right\} dz_w \qquad \text{A-5}$$

Simplificando,

$$\Delta P(x,y,z,t) = \frac{q\, e^{-\frac{r_m^2}{4\eta t}}}{8\phi C_t (\pi\eta t)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_0^h e^{-\frac{(z-z_w+nh)^2}{4\eta t}} dz_w$$

Se reduce en el límite a la función error.

$$\Delta P(x,y,z,t) = \frac{q\, e^{-\frac{r_m^2}{4\eta t}}}{8\phi C \pi \eta t} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_w)^2}{4\eta t}} \frac{dz_w}{\sqrt{4\eta t}} \qquad \text{A - 6}$$

Considerando que,

$$\frac{2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-z_w)^2}{4\eta t}} \frac{dz_w}{\sqrt{4\eta t}} = 1$$

$$\Delta P(x,y,t) = \frac{q\, e^{-\frac{r_m^2}{4\eta t}}}{4\pi \phi c_t \eta t} \qquad \text{A-7}$$

Es la solución de línea fuente instantánea para una capa infinita.

Plano fuente limitado en el plano " xz ", de la ecuación A-7,

$$\Delta P(x,y,t) = \int_L \frac{q\, e^{-\frac{r_m^2}{4\eta t}}}{4\pi \phi c_t \eta t}\, dL \qquad \text{A-8}$$

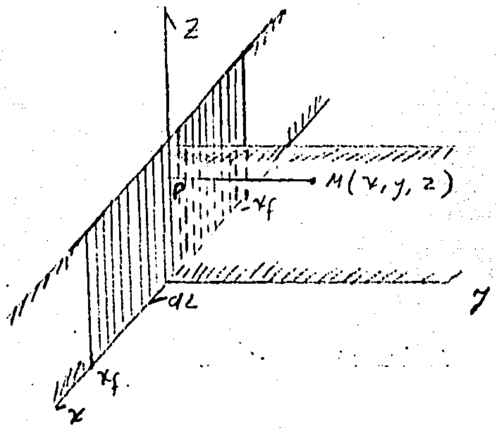


Fig. A-4

P un punto de la línea fuente

Si $L = x_w$ y $dL = dx_w$ (Fig A-4) entonces:

$$\Delta P(x,y,t) = \int_{-x_f}^{x_f} \frac{q\, e^{-\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}}}{4\pi \phi c_t \eta t}\, dx_w \qquad \text{A-9}$$

Donde q = Gasto instantáneo/área

Para un flujo contínuo.

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t \frac{q(\tau)\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{2\phi c_t \pi \sqrt{\eta(t-\tau)}} \int_{-x_f}^{x_f} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)}} \frac{dx_w\, d\tau}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{A-10}$$

Esta ecuación se puede resolver para dos casos:

1)- Para tiempos pequeños integrando en el órden señalado.

2)- Para tiempos grandes cambiando el órden de integración.

Tiempos Pequeños.

Para tiempos pequeños o solución lineal con q = cte. la ecuación A-10, se transforma con un cambio de variable;

Si $\mu = \frac{x-x_w}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}$; $d\mu = \frac{-dx_w}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}$.

$$dx_w = -d\mu \sqrt{4\eta(t-\tau)}$$

$$\Delta P(x,y,t) = -\int_0^t \frac{q\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \sqrt{\pi} \sqrt{\eta(t-\tau)}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}}^{\frac{x-x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}} e^{-\mu^2} d\mu\, d\tau \qquad \text{A-11}$$

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t \frac{q\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \sqrt{\pi} \sqrt{\eta(t-\tau)}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}}^{\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}} e^{-u^2} du\, d\tau \qquad \text{A-12}$$

Obteniéndose la ecuación básica para tiempos pequeños.

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t \frac{q\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \left[erf\left(\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right) + erf\left(\frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right)\right] d\tau$$ A-13

Tiempos Largos.

Para tiempos largos o solución radial y q = cte. la ecuación A-10 se puede reducir a;

$$\Delta P(x,y,t) = \int_{-x_f}^{x_f} \int_0^t \frac{q\, e^{-\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \pi \eta(t-\tau)}\, d\tau\, dx_w$$ A-14

Cambiando variable,

Si $$u = \frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)} \; ; \quad du = \frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)^2}\, d\tau$$

$$d\tau = \frac{4\eta(t-\tau)^2}{y^2+(x-x_w)^2}\, du$$

$$\Delta P(x,y,t) = \int_{x_f}^{x_f} \int_{\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{q\, e^{-\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\phi c_t \pi \eta(t-\tau)} \, \frac{4\eta(t-\tau)^2}{y^2+(x-x_w)^2}\, du\, dx_w$$ A-15

ó, $$\Delta P(x,y,t) = \int_{-x_f}^{x_f} \int_{\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{q}{4\phi c_t \pi \eta} \frac{e^{-u}}{u}\, du\, dx_w$$ A-16

Obteniéndose la ecuación básica para tiempos largos.

$$\Delta P\ (x, y, t) \doteq \frac{q}{4\phi c_t\, r\, \eta} \cdot \int_{-x_f}^{x_f} - Ei\left(-\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\,\eta\, t}\right)\, dx_w \qquad \text{A-17}$$

APENDICE B

Solución de las ecuaciones integrales básicas de flujo números A-13 y A-17 del Apéndice A, para tiempos pequeños y grandes respectivamente.

La presión en un punto cualquiera para tiempos pequeños en un yacimiento de un estrato infinito atravesado por un pozo fracturado hidráulicamente con orientación vertical, se define en la forma siguiente (Ec. 13, Apéndice A):

$$\Delta P(x, y, t) = \frac{q}{4\phi c_t} \int_0^t \frac{e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \left\{ erf \frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} + erf \frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \right\} d\tau \qquad \text{B-1}$$

Si definimos

$$F(x, t-\tau) = erf \frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} + erf \frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-2}$$

$$G(y, t-\tau) = e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-3} \qquad y \qquad E(t-\tau) = \frac{q}{4\phi c_t \sqrt{\pi\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-4}$$

entonces

$$\Delta P(x, y, t) = \int_0^t F(x, y, t-\tau)\, G(y, t-\tau)\, E(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{B-5}$$

Esta ecuación se puede integrar por varios métodos, tales como Transformada de Laplace, integración numérica, etc., en este trabajo se emplea un método analítico-numérico, el seguido por Gringarten[43] para tiempos pequeños usando el desarrollo de la serie asintótica de la función error[71], la cual es de la forma siguiente:

$$erf(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1.3}{2^2 x^5} - \cdots + \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n-1} x^{2n+1} (n-1)!} \right) \qquad \text{B-6}$$

Para n = 1, 2, 3..... (contando desde el 2o. término)

Esta expresión proporciona una buena aproximación para $x \geq 4$ con los dos primeros términos de la serie y con un mayor número de términos conforme $x \rightarrow 0$.

Para efectuar la integral aproximada se hizo uso de la fórmula de integral por partes, así:

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t F(x,t-\tau)\, G(y,t-\tau)\, E(t-\tau)\, d\tau$$

$$\Delta P(x,y,t) = \int_0^t v\, d\mu = \mu v - \int_0^t \mu\, dv \qquad \text{B-7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} v = G(y,t-\tau) & d\mu = F(x,t-\tau)\, E(t-\tau)\, d\tau \\ dv = dG(y,t-\tau) & \mu = \int_0^t F(x,t-\tau) E(t-\tau)\, d\tau \end{array}\right\} \qquad \text{B-8}$$

Pero para determinar "μ" es necesario volver a integrar por partes, así:

$$\mu = \int_0^t w\, ds = w s - \int_0^t s\, dw \qquad \text{B-9}$$

$$\left.\begin{array}{ll} w = F(x,t-\tau) & ds = E(t-\tau)\, d\tau \\ dw = dF(x,t-\tau) & s = \int_0^t E(t-\tau)\, d\tau \end{array}\right\} \qquad \text{B-10}$$

A continuación se procede a evaluar cada una de estas funciones e ir substituyendo en la ecuación correspondiente:

De la ec. B-2 se obtiene w para la ec. B-10

$$w = \operatorname{erf} \frac{x + x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} + \operatorname{erf} \frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-11}$$

Haciendo $L = \frac{x + x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}$ y substituyendo en la serie de la función error tenemos:

$$w = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-L^2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{2L^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2 L^5} + \cdots + \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n-1} L^{2n+1} (n-1)!} \right.$$

la cual se diferencia como:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-L^2} \left\{ \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1\cdot 3}{2L^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^2 L^6} \cdots - \frac{(-1)^n (2n-1)!\,(2n+1)}{2^{2n-1} L^{2n+1} (n-1)!} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2L}{\pi} e^{-L^2} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{2L^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2 L^5} - - - \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n-1} L^{2n+1} (n-1)!} \cdots \right) \right\} dL$$

$$dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-L^2} dL \,; \qquad \text{pero} \qquad dL = \frac{(x + x_f)\, d\tau}{2\sqrt{4\eta}\,(t-\tau)^{3/2}}$$

En forma semejante se define dL para el argumento $\frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}$ y obtenemos dw total.

$$dw = \frac{(x + x_f)\, e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\eta}\,(t-\tau)^{3/2}} d\tau + \frac{(x_f - x)\, e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{4\pi\eta}\,(t-\tau)^{3/2}} d\tau \qquad \text{B-12}$$

Ahora de la ec.B-4 obtenemos ds y s como indica la ecuación B-10.

$$ds = \frac{q}{4\phi c_c} \frac{d\tau}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-13}$$

$$s = \frac{q}{4\phi c_c \sqrt{\pi\eta}} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} d\tau$$

$$s = -\frac{q(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_c \sqrt{\pi\eta}} \Bigg|_0^t \qquad \text{B-14}$$

Substituyendo las ecuaciones B-12 y B-14 en la ecuación B-9 obtenemos lo siguiente:

$$-\int_0^t s\,dw = \int_0^t \frac{q(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}\left\{\frac{(x+x_f)\,e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{4\eta\pi}\,(t-\tau)^{3/2}} + \frac{(x_f-x)\,e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{4\eta\pi}\,(t-\tau)^{3/2}}\right\}d\tau$$

$$= \frac{q}{\phi c_t\pi}\int_0^t\left\{\frac{(x+x_f)}{4\eta(t-\tau)}\,e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}} + \frac{(x_f-x)}{4\eta(t-\tau)}\,e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}}\right\}d\tau$$

Pero si hacemos $R = \dfrac{c^2}{4\eta(t-\tau)}$; $dR = \dfrac{c^2\,4\eta\,d\tau}{(4\eta(t-\tau))^2}$

$$d\tau = \frac{4\eta(t-\tau)^2\,dR}{c^2} \quad y \quad c = x_f + x \quad ó \quad c = x_f - x$$

$$-\int_0^t s\,dw = \frac{q}{4\phi c_t\pi\eta}\int_0^t\left\{\frac{(x+x_f)\,4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\,e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}} + \frac{(x_f-x)\,4\eta(t-\tau)}{(x_f-x)^2}\,e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}}\right\}dR$$

Simplificando las expresiones tenemos:

$$-\int_0^t s\,dw = \frac{q}{4\phi c_t\pi\eta}\int_{\frac{c^2}{4\eta t}}^{\infty}\left\{\frac{c}{R}\,e^{-R} + \frac{c}{R}\,e^{-R}\right\}dR$$

De acuerdo a la expresión de la integral exponencial

$$\int_x^{\infty}\frac{e^{-R}}{R}\,dR = -\,Ei(-x)$$

$$-\int_0^t s\,dw = \frac{q}{4\phi c_t\pi\eta}\left\{-(x+x_f)\,Ei\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) - (x_f-x)\,Ei\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}\right)\right\}$$

B-15

Substituyendo las ecuaciones B-11, B-14 y B-15 en ecuación B-9 tenemos;

$$\mu = sw - \int_0^t s\,dw$$

$$\mu = \left\{ \frac{-q\,(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t \sqrt{\pi\eta}} \left[erf\,\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} + erf\,\frac{x_f-x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \right] \right\}_0^t +$$

$$\frac{q}{4\phi c_t \pi\eta}\left[-(x_f+x)\,E_i\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) - (x_f-x)\,E_i\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}\right)\right] \qquad \text{B-16}$$

Ahora se puede plantear la integral $\int_0^t u\,dv$ de la ecuación B-7 substituyendo los valores obtenidos de las ecuaciones B-16 y B-3.

$$v = e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}} \quad ; \quad dv = \frac{-y^2}{4\eta(t-\tau)^2}\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}\, d\tau \qquad \text{B-17}$$

$$\int_0^t \mu\,dv = \int_0^t \left\{ \frac{-q\,(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t \sqrt{\pi\eta}} \left[erf\,\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} + erf\,\frac{x_f-x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{q}{4\phi c_t \pi\eta}\left[-(x_f+x)\,E_i\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}\right) - (x_f-x)\,E_i\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}\right)\right]\right\} \left(\frac{-y^2}{4\eta(t-\tau)^2}\right) e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}\, d\tau$$

$$\text{B-18}$$

Para evaluar esta integral se hace uso del desarrollo de series asintóticas tanto para la función error como para la integral exponencial, por tal razón en lo siguiente, se vá resolviendo sumando por sumando.

Para el primer sumando de la ecuación B-18 que contiene una función error, ésta se substituye por la serie expresada en la ecuación B-6.

$$\int_0^t \frac{q\,y^2 (t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t \sqrt{\pi\eta}} \cdot \frac{e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\eta(t-\tau)^2}\; erf\,\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\; d\tau =$$

$$\int_0^t \frac{q\, y^2 (t-\tau)^{1/2}}{2\phi C_c \sqrt{\pi\eta}} \, \frac{e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\eta(t-\tau)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}} \left[\frac{1}{\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}} - \frac{1}{2\left(\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right)^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\left(\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right)^5} + \cdots + \frac{(-1)^n (2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!\left(\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right)^{2n+1}} \right] \right\} d\tau$$

n = 1, 2, 3 . . . (siendo n = 1 el 2o. término) B-19

<u>El lado derecho de la ecuación B-19</u> se puede expresar como:

$$\int_0^t \left\{ \frac{q\, y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi \sqrt{\pi}\, C_c (4\eta(t-\tau))^{3/2}} - \frac{q\, y^2 e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\, \pi\, C_c (4\eta(t-\tau))^{3/2}} \left[\frac{(4\eta(t-\tau))^{1/2}}{x+x_f} - \frac{(4\eta(t-\tau))^{3/2}}{2(x+x_f)^3} + \frac{3}{2^2}\frac{(4\eta(t-\tau))^{5/2}}{(x+x_f)^5} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!\,(4\eta(t-\tau))^{\frac{2n+1}{2}}}{2^{2n-1}(n-1)!\,(x+x_f)^{2n+1}} \right] \right\} d\tau$$

n = 1, 2, 3.... B-20

Simplificando los términos de tiempo,

$$\int_0^t \left\{ \frac{q\, y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi \sqrt{\pi}\, C_c (4\eta(t-\tau))^{3/2}} - \frac{q\, y^2 e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\, C_c\, \pi\, 4\eta(t-\tau)} \left[\frac{1}{x+x_f} - \frac{4\eta(t-\tau)}{2(x+x_f)^3} + \frac{3}{2^2}\frac{(4\eta(t-\tau))^2}{(x+x_f)^5} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!\,(4\eta(t-\tau))^n}{2^{2n-1}(n-1)!\,(x+x_f)^{2n+1}} \right] \right\} d\tau$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ B-21

Haciendo un cambio de variable y substituyendo <u>en el segundo término</u>

$$R = \frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)} \quad ; \quad dR = \frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)^2}\, d\tau$$

$$d\tau = \frac{4\eta(t-\tau)^2}{y^2+(x+x_f)^2}\, dR$$

B-22

$$\int_0^t \frac{q y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\sqrt{\pi}\, C_t\, 4\eta(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau - \int_{\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{q\, y^2 e^{-\frac{y^2+(x^2+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}\, 4\eta(t-\tau)}{\phi\, \pi\, C_t\, 4\eta\,[y^2+(x+x_f)^2]}\left(\frac{1}{x+x_f} - \frac{4\eta(t-\tau)}{2(x+x_f)^3} + \frac{3}{2^2}\frac{(4\eta(t-\tau))^2}{(x+x_f)^5} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!\,(4\eta(t-\tau))^n}{2^{2n-1}(n-1)!\,(x+x_f)^{2n+1}}\right) dR \qquad \text{B-23}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

Simplificando los términos y substituyendo R

$$\int_0^t \frac{q y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\sqrt{\pi}\, C_t\, 4\eta(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau - \int_{\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{q y^2 e^{-R}}{\phi\pi C_t 4\eta}\left(\frac{1}{(x+x_f)R} - \frac{y^2+(x+x_f)^2}{2(x+x_f)^3 R^2} + \frac{3}{2^2}\frac{(y^2+(x+x_f)^2)^2}{(x+x_f)^5 R^3} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!\,(y^2+(x+x_f)^2)^n}{2^{2n-1}(n-1)!\,(x+x_f)^{2n+1}R^{n+1}}\right) dR \qquad \text{B-24}$$

Definiendo los parámetros siguientes:

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= x+x_f \;; \quad C_3 = \frac{q\, y^2}{\phi\,\pi\, 4\eta\, C_t}\;; \quad C_4 = y^2 + C_2^2 \\ C_5 &= 4\eta t \;; \quad C_6 = \frac{C_4}{C_5} \end{aligned}\right\} \qquad \text{B-25}$$

Substituyendo los parámetros en el <u>segundo término de B-24</u>

$$-\int_{C_6}^{\infty} C_3\, e^{-R}\left[\frac{1}{C_2 R} - \frac{C_4}{2C_2^3 R^2} + \frac{3}{2^2}\frac{C_4^2}{C_2^5 R^3} + \cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!\,C_4^n}{2^{2n-1}(n-1)!\,C_2^{2n+1}R^{n+1}}\right) dR$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$ B-26

Expresando la integral término a término.

$$-\int_{C_6}^{\infty} \frac{C_3\, e^{-R}}{C_2\, R}\, dR + \int_{C_6}^{\infty} \frac{C_4 C_3\, e^{-R}}{2C_2^3 R^2}\, dR + \cdots + \int_{C_6}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!\, C_4^n\, C_3\, e^{-R}}{2^{n-1}(n-1)!\, C_2^{2n+1} R^{n+1}}\, dR$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$ 72 B-27

Para cada integral se define una serie asintótica de la forma

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-R}}{R^p}\, dR = e^{-x}\left(\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} \cdots\right)$$

$$\text{Si } p > 0 \quad y \quad x > 0 \qquad \text{B-28}$$

substituyendo en cada integral

$$-\frac{C_3}{C_2}\int_{C_6}^{\infty}\frac{e^{-R}}{R}\,dR = -\frac{C_3}{C_2}\,e^{-C_6}\left\{\frac{1}{C_6}-\frac{1}{C_6^2}+\frac{2\cdot 1}{C_6^3}-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{C_6^4}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{C_6^m\,0!}\cdots\right\}$$

$$+\frac{C_3C_4}{2C_2^2}\int_{C_6}^{\infty}\frac{e^{-R}}{R^2}\,dR = \frac{C_3C_4}{2C_2^3}\,e^{-C_6}\left\{+\frac{1}{C_6^2}-\frac{2\cdot 1}{C_6^3}+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{C_6^4}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}m!}{C_6^{m+1}\,1!}\right\}$$

$$-\frac{C_3C_4^2}{2^2C_2^5}\int_{C_6}^{\infty}\frac{e^{-R}}{R^3}\,dR = -\frac{C_3C_4^2}{2^2C_2^5}\,e^{-C_6}\left\{\frac{1}{C_6^3}-\frac{3}{C_6^4}+\cdots\frac{(-1)^{m-1}(m+1)!}{C_6^{m+2}\,2!}\right\}$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}}\frac{(2n-1)!\,C_3C_4^n}{(n-1)!\,C_2^{2n+1}}\int_{C_6}^{\infty}\frac{e^{-R}}{R^{n+1}}\,dR = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!\,C_3C_4^n e^{-C_6}}{2^{2n-1}(n-1)!\,C_2^{2n+1}}\Bigg\{$$

$$\frac{1}{C_6^{n+1}}-\frac{n+1}{C_6^{n+2}}+\frac{(n+1)(n+2)}{C_6^{n+3}}-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{C_6^{n+4}}\cdots\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{C_6^{n+m}\,n!}\cdots\Bigg\} \qquad \text{B-29.}$$

Pero si cada serie se simplifica con las relaciones,

$$C_5 = \frac{C_4}{C_6} \; ; \; \ldots\ldots \; C_5^{\,n} = \frac{C_4^{\,n}}{C_6^{\,n}}$$

respectivamente, la serie de series se expresa simplemente por;

$$\frac{C_3}{C_2}\left\{ Ei(-C_6) + e^{-C_6} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \frac{C_5^{\,n}}{C_2^{\,2n}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!\, C_6^{\,m}} \right\} \qquad \text{B-30}$$

Pasando la expresión a las variables originales;

$$-\frac{q\,y^2}{4\pi\eta\phi C_t (x+x_f)}\left\{ Ei\left(-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) + e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \frac{(4\eta t)^n}{(x+x_f)^{2n}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!} \frac{(4\eta t)^m}{(y^2+(x+x_f)^2)^m} \right\} \qquad \text{B-31}$$

Por lo tanto, substituyendo la función B-31 en el segundo sumando de la integral B-20 y ésta es el primer sumando de la ecuación B-18 se tiene:

$$\int_0^t \frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\sqrt{\pi}\,\phi C_t\,(4\eta(t-\tau))^{3/2}} + \frac{q\,y^2}{4\pi\eta\phi C_t(x+x_f)}\left\{ Ei\left(-\right.\right.$$

$$\left.\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) + e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$$

$$\cdot \frac{(4\eta t)^n}{(x+x_f)^{2n}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!} \frac{(4\eta t)^m}{(y^2+(x+x_f)^2)^m} \left.\right\} \qquad \text{B-32}$$

El segundo sumando de la ecuación B-18 se integra en forma similar al primero, pero antes es necesario modificarlo ligeramente para simplificar después la solución.

Dado que,

$$\operatorname{erf} \frac{x_f - x}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} = -\operatorname{erf} \frac{x - x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}} \qquad \text{B-33}$$

$$\int_0^t \frac{q(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t\sqrt{\pi\eta}} \frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\eta(t-\tau)^2}\left(-\operatorname{erf} \frac{x-x_f}{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}\right) = \int_0^t \frac{q\, y^2(t-\tau)^{1/2}}{2\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}$$

$$\frac{e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\eta(t-\tau)^2}\Bigg\{-1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{(x-x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}\left[\frac{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}{x-x_f} - \left(\frac{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}{x-x_f}\right)^3 \frac{1}{2} + \right.$$

$$\left.\cdots + \frac{(-1)^n(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\left(\frac{\sqrt{4\eta(t-\tau)}}{x-x_f}\right)^{2n+1}\right]\Bigg\}\, d\tau \; ; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad \text{B-34}$$

El 2o. sumando de B-18 tiene por solución:

$$-\int_0^t \frac{q\, y^2\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\sqrt{\pi}\, c_t\,(4\eta(t-\tau))^{3/2}} - \frac{q y^2}{4\eta\,\phi\,\pi c_t\,(x-x_f)}\Bigg\{E_i\left(-\frac{y^2+(x-x_f)^2}{4\eta t}\right) + e^{-\frac{y^2+(x-x_f)^2}{4\eta t}}$$

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\frac{(4\eta t)^n}{(x-x_f)^{2n}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!}\frac{(4\eta t)^m}{(y^2+(x-x_f)^2)^m}\Bigg\} \qquad \text{B-35}$$

El tercer sumando de la ecuación B-18 contiene la integral exponencial, que se substituye por la serie asintótica siguiente:

$$-Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\right) \qquad \text{B-36}$$

n= 1, 2, 3 .....

Substituyendo en el tercer sumando:

$$\int_0^t -\frac{Y^2 e^{-\frac{Y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{4\eta(t-\tau)^2}\frac{q}{4\phi\, c_t \pi\eta}\left[-(x+x_f)\; E_i\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}\right)\right] d\tau =$$

$$\int_0^t -\frac{Y^2 e^{-\frac{Y^2}{4\eta(t-\tau)}} q}{\pi\phi c_t (4\eta(t-\tau))^2}\left\{(x+x_f)\, e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}\left[\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2} - \left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. 2\left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)^3 - 2\times 3\left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)^4 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)^n \cdots\right]\right\} d\tau$$

$n = 1, 2, 3 \cdots$ B- 37

Simplificando el lado derecho de la ecuación:

$$-\int_0^t \frac{e^{-\frac{Y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)}}\; q\, Y^2\, (x+x_f)}{\phi\, c_t\, \pi\, (4\eta(t-\tau))^2}\left\{\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)\right\} d\tau$$

Cambiando de variable en el lado derecho de la ecuación;

$$R = \frac{Y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)} \quad ; \quad dR = \frac{Y^2+(x+x_f)^2}{4\eta(t-\tau)^2}\, d\tau \quad ; \quad d\tau = \frac{4\eta(t-\tau)^2}{Y^2+(x+x_f)^2}\, dR$$

Substituyendo en el lado derecho de la ecuación B 37;

$$-\int_{\frac{Y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{e^{-R}\; q\, Y^2\, (x+x_f)}{\phi c_t \pi (4\eta(t-\tau))^2}\;\frac{4\eta(t-\tau)^2}{Y^2+(x+x_f)^2}\left\{\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x+x_f)^2}\right)^n\right\} dR$$

Reordenando,

$$-\frac{q\, Y^2 (x+x_f)}{\phi c_t\, \pi\, 4\eta}\int_{\frac{Y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}^{\infty} e^{-R}\left\{\sum_{n=1}^{n}(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{(Y^2+(x+x_f)^2)^{n-1}}{R^n\,(x+x_f)^{2n}}\right\} dR$$

de donde se obtiene:

$$- \frac{q y^2}{4\pi \eta \phi C_t} \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{(y^2 + (x+x_f)^2)^{n-1}}{(x+x_f)^{2n-1}} \int_{\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}^{\infty} \frac{e^{-R}}{R^n} \, dR$$

Substituyendo las integrales por sus respectivas series asintóticas segun la ecuación B-28 y resumiendo;

$$- \frac{q y^2 e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{4\pi \eta \phi C_t} \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{(y^2+(x+x_f)^2)^{n-1}}{(x+x_f)^{2n-1}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1} (n+m-1)!}{n!} \left(\frac{4\eta t}{y^2+(x+x_f)^2} \right)^{n+m}$$

Reagrupando términos en x e y

$$\frac{q y^2 e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{4\pi \eta \phi C_t} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+x_f)^{2n-1}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!} \frac{(4\eta t)^{n+m}}{(y^2+(x+x_f)^2)^{m+1}} \qquad \text{B-38}$$

El tercer sumando de la ecuación B-18 corresponde a la suma de funciones en B-38.

Para el cuarto y último sumando de la ecuación B-18 la integral se resuleve en forma similar al tercer sumando.

$$-\int_0^t \frac{q y^2 e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}}{\phi C_t \pi (4\eta(t-\tau))^2} \left\{ -(x_f - x) \, Ei\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)} \right) \right\} d\tau =$$

$$- \frac{q y^2 (x_f - x)}{\pi \phi C_t \cdot (4\eta)^2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta(t-\tau)}} \left\{ \frac{4\eta t}{(x_f-x)^2} - \right.$$

$$\left. \left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x_f-x)^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x_f-x)^2} \right)^3 - \dots (-1)^{n-1}(n-1)! \left(\frac{4\eta(t-\tau)}{(x_f-x)^2} \right)^n \right\} d\tau$$

n = 1, 2, 3...... B-39

La solución de la integral se reduce a:

$$\frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2+(x_f-x)^2}{4\eta t}}}{4\phi\, C_t\, \pi\, \eta} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x_f-x)^{2n-1}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)}{n!} \frac{(4\eta t)^{n+m}}{(y^2+(x_f-x)^2)^{m+1}} \qquad \text{B-40}$$

Con ésto la integral de la ecuación B-18 es la suma de las funciones B-32, B-35, B-38 y B-40.

$$\int_0^t \mu\, dv = \int_0^t \frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\sqrt{\pi}\, C_t\,(4\eta(t-\tau))^{3/2}}\, d\tau + \frac{q\,y^2}{4\eta\phi\pi C_t}\Big[\frac{1}{x+x_f} Ei\Big(-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\Big) + e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \frac{(4\eta t)^n}{(x+x_f)^{2n+1}} \sum_{m=1}^{m}$$

$$\frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!} \frac{(4\eta t)^m}{(y^2+(x+x_f)^2)^m}\Big] - \int_0^t \frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2}{4\eta(t-\tau)}}}{\phi\sqrt{\pi}\, C_t\,(4\eta(t-\tau))^{3/2}}\, d\tau + \frac{q\,y^2}{4\eta\phi\pi C_t}\Big[$$

$$-\frac{1}{x-x_f} Ei\Big(-\frac{y^2+(x-x_f)^2}{4\eta t}\Big) - e^{-\frac{y^2+(x-x_f)^2}{4\eta t}} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \frac{(4\eta t)^n}{(x-x_f)^{2n+1}}$$

$$\sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{m!} \frac{(4\eta t)^m}{(y^2+(x-x_f)^2)^m}\Big] + \frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{4\eta\phi C_t\pi} \cdot$$

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x+x_f)^{2n-1}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!} \frac{(4\eta t)^{n+m}}{(y^2+(x+x_f)^2)^{m+1}}$$

$$+ \frac{q\,y^2\, e^{-\frac{y^2(x_f-x)^2}{4\eta t}}}{4\phi\eta C_t\pi} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n (n-1)!}{(x_f-x)^{2n-1}} \sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{m-1}(n+m-1)!}{n!}$$

$$\frac{(4\eta t)^{n+m}}{(y^2+(x_f-x)^2)^{m+1}} \qquad \text{B-41}$$

La cual se reduce a;

$$\int_0^t \mu\, dv = \frac{q\, y^2}{4\pi\eta\phi c_t}\left\{\frac{1}{x+x_f} Ei\left(-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) - \frac{1}{x-x_f} Ei\left(-\frac{y^2+(x-x_f)^2}{4\eta t}\right) + \sum_{n=1}^{n}\sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{n+m}(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}(4\eta t)^{n+m} e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}\left[\frac{e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{(x+x_f)^{2n+1}(y^2+(x+x_f)^2)^m} - \frac{e^{-\frac{(x-x_f)^2}{4\eta t}}}{(x-x_f)^{2n+1}(y^2+(x-x_f)^2)^m}\right] + \sum_{n=1}^{n}\sum_{m=1}^{m} \frac{(-1)^{n+m-1}(n+m-1)!(4\eta t)^{n+m}}{n} e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}\left[\frac{e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{(x+x_f)^{2n-1}(y^2+(x+x_f)^2)^{m+1}} + \frac{e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}}}{(x_f-x)^{2n-1}(y^2+(x_f-x)^2)^{m+1}}\right]\right\}$$

B-42

Con lo cual ya se ha definido todas las partes de la ecuación B-7 o sea;

$$\Delta P(x,y,t) = \mu v - \int_0^t \mu\, dv$$

B-7

Substituyendo resultados en el miembro derecho de B-7 tenemos;

$$\Delta P(x,y,t) = \frac{q\sqrt{t}\, e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}}{2\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}\left[erf\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta t}} + erf\frac{x_f-x}{\sqrt{4\eta t}}\right] + \frac{q\, e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}}{4\eta\phi c_t\pi}$$

$$\left[-(x+x_f)\, Ei\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) - (x_f-x)\, Ei\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}\right)\right] + \frac{q\, y^2}{4\phi\eta\pi c_t}\left\{-\frac{1}{x+x_f}\right.$$

$$Ei\left(-\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) - \frac{1}{x_f-x} Ei\left(-\frac{y^2+(x_f-x)^2}{4\eta t}\right) + \sum_{n=1}^{n}\sum_{m=1}^{m}\frac{(-1)^{n+m-1}(2n-1)!\,(4\eta t)^{n+m}}{2^{2n-1}(n-1)!\,n!}$$

$$e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}\left[\frac{e^{-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}}}{(x+x_f)^{2n+1}(y^2+(x+x_f)^2)^m} + \frac{e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}}}{(x_f-x)^{2n+1}(y^2+(x_f-x)^2)^m}\right] +$$

$$+\sum_{n=1}^{n}\sum_{m=1}^{m}\frac{(-1)^{n+m}(n+m-1)!\,(4\eta t)^{n+m}}{n}\,e^{-\frac{y^2}{4\eta t}}\Bigg[$$

$$\frac{e^{-\frac{(x+x_f)^2}{}}}{(x+x_f)^{2n-1}\,\left(y^2+(x+x_f)^2\right)^{m+1}}+\frac{e^{-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}}}{(x_f-x)^{2n-1}\,\left(y^2+(x_f-x)^2\right)^{m+1}}\Bigg]\Bigg\}$$

B-43

Para el caso de determinar la presión en la fractura $, y=0$:

$$\Delta P(x,t)=\frac{q\sqrt{t}}{2\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}\left[\operatorname{erf}\frac{x+x_f}{\sqrt{4\eta t}}+\operatorname{erf}\frac{x_f-x}{\sqrt{4\eta t}}\right)+\frac{q}{4\phi c_t\eta\pi}$$

$$\left[-(x+x_f)\,Ei\left(-\frac{(x+x_f)^2}{4\eta t}\right)-(x_f-x)\,Ei\left(-\frac{(x_f-x)^2}{4\eta t}\right)\right.$$ B-44

y para el caso especial de presión en el pozo $, x=0$;

$$\Delta P(t)=\frac{q\sqrt{t}}{\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}\operatorname{erf}\frac{x_f}{\sqrt{4\eta t}}-\frac{q\,x_f}{2\phi c_t\eta\pi}\,Ei\left(-\frac{x_f^2}{4\eta t}\right)$$

Donde para tiempos pequeños $Ei(-x)=0$ y $\operatorname{erf}(x)=1$

$$\Delta P(t)=\frac{q\sqrt{t}}{\phi c_t\sqrt{\pi\eta}}$$ B-45

La ecuación B-43 se empleará en un estudio posterior, por ahora solo haremos uso de la solución simplificada para el caso de $y=0$, $x_f\geq|x|$.

Siguiendo el mismo trabajo básico de Gringarten[43], la ecuación No. A-17 del Apéndice A se resuelve para el caso de tiempos largos por un método numérico-analítico, para el cual también se utiliza un desarrollo en serie de la función integral exponencial, de la que se requiere utilizar más términos entre más se aproxima su argumento a 1.

$$-Ei(-x) = -Ln(\gamma x) + x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot n!} \qquad \text{B-46}$$

Donde $\gamma = 1.781073$

$Ln\ \gamma = 0.577216$ $\qquad |x| < 1.0$

Constante de Euler = 0.577216

La ecuación A-17 del Apéndice A, para tiempos largos;

$$\Delta P(x, y, t) = -\frac{q}{4\pi\phi c_t \pi \eta}\int_{-x_f}^{x_f} Ei\left(-\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right) dx_w \qquad \text{B-47}$$

Substituyendo la serie;

$$\Delta P(x, y, t) = \frac{q}{4\pi\phi c_t \pi \eta}\int_{-x_f}^{x_f}\left\{-Ln\left(1.781073\,\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right) + \frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot 3!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^n\right\} dx_w \qquad \text{B-48}$$

Integrando primeramente la parte logarítmica;

$$\int_{-x_f}^{x_f} -Ln\left(1.781073\,\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) dx_w = \int_{-x_f}^{x_f}\left\{Ln\,4\eta t - 0.577216 - Ln\left(y^2 + (x-x_w)^2\right)\right\} dx_w = \int_{-x_f}^{x_f}\left\{Ln\,4\eta t - 0.577216\right\} dx_w - \int_{-x_f}^{x_f} Ln\left(y^2 + (x-x_w)^2\right)$$

$$dx_w = 2x_f\left(Ln\,\eta t + 0.80907\right) + \int_{-x_f}^{x_f} Ln\left(y^2+(x-x_w)\right)(-dx_w) \qquad \text{B-49}$$

Cambiando variable en el segundo término;

$$x = x - x_w \quad ; \quad dx = -dx_w$$

El segundo término se transforma a;

$$\int_{x+x_f}^{x-x_f} Ln\,(y^2+x^2)\,dx = x\,Ln\,(x^2+y^2)\Big|_{x+x_f}^{x-x_f} - 2\int_{x+x_f}^{x-x_f} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx \qquad \text{B-50}$$

$$\int_{x+x_f}^{x-x_f} Ln(y^2+x^2)\,dx = x\,Ln(x^2+y^2) - 2(x-y) \not{t}\, \tan\frac{x}{y}\Big|_{x+x_f}^{x-x_f} \qquad \text{B-51}$$

Substituyendo límites de la integral;

$$(x-x_f)\,Ln\left(y^2+(x-x_f)^2\right) - (x+x_f)\,Ln\left(y^2+(x+x_f)^2\right) - 2\,(x-x_f) +$$

$$2(x+x_f) + 2y \not{t}\, \tan\frac{x-x_f}{y} - 2y \not{t}\, \tan\frac{x+x_f}{y} \qquad \text{B-52}$$

Pero;

$$A \begin{cases} -y \not{t}\, \tan\dfrac{x-x_f}{y}\ ; & \tan(-\alpha\, y) = \dfrac{-x-x_f}{y}\ ; \quad \tan\alpha\, y = \dfrac{x_f-x}{y} \\[2ex] y \not{t}\, \tan\dfrac{x+x_f}{y}\ ; & \tan\beta\, y = \dfrac{x+x_f}{y}\ ; \quad \tan\beta\, y = \dfrac{x_f+x}{y} \end{cases}$$

De donde;

$$\tan y(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{x_f-x}{y} + \dfrac{x+x_f}{y}}{1 - \dfrac{x_f-x}{y}\,\dfrac{x+x_f}{y}} = \frac{x_f-x+x+x_f}{y\ \dfrac{(y^2-(x_f-x)(x+x_f))}{y^2}} = \frac{2x_f\,y}{y^2+x^2-x_f^2}$$

Regresando a la expresión en A

$$y\,(\alpha+\beta) \not{t}\, \tan\frac{2x_f\,y}{r^2-x_f^2} = -y \not{t}\, \tan\frac{2x_f\,y}{r^2-x_f^2} \qquad \text{B-53}$$

Substituyendo la ec. B 53 en ec. B 51:

$$\int_{x+x_f}^{x-x_f} Ln(y^2+x^2)\,dx = x\,Ln(x^2-y^2) - 2(x-y) \not{t}\, \tan\frac{x}{y}\Big|_{x+x_f}^{x-x_f}$$

$$= (x-x_f)\,Ln\left(y^2+(x-x_f)^2\right) - (x+x_f)\,Ln\left(y^2+(x+x_f)^2\right) + 4x_f\ -$$

$$2y \not{t}\, \tan\frac{2x_f\,y}{r^2-x_f^2} \qquad \text{B-54}$$

Substituyendo la ec. B 54 en ec. B 49;

$$\int_{-x_f}^{x_f} -\mathrm{Ln}\left(1.781073\,\frac{y^2+(x+x_f)^2}{4\eta t}\right) dx_w = 2x_f\left(\mathrm{Ln}\,\eta t + 2.80\text{[illegible]}\right) +$$

$$(x-x_f)\,\mathrm{Ln}\left(y^2+(x-x_f)^2\right)-(x+x_f)\,\mathrm{Ln}\left(y^2+(x+x_f)^2\right)-2y\tan^{-1}\frac{2x_f\,y}{r^2-x_f^2} \qquad \text{B-55}$$

Integrando la serie Geométrica;

$$\int_{-x_f}^{x_f}\left\{\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}-\frac{1}{2\cdot 2!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^2+\frac{1}{3\cdot 3!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^3\cdots\right.$$

$$\left.\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^n\right\} dx_w \qquad n=1,2,3\cdots \qquad \text{B-56}$$

Para un término cualquiera de la serie;

$$\int_{-x_f}^{x_f}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^n dx_w$$

Haciendo un cambio de variable;

$$u = x - x_w \quad ; \quad du = -dx_w$$

Aplicando el desarrollo del "Binomio de Newton";

$$\left(\frac{1}{4\eta t}\right)^n\int_{x-x_f}^{x+x_f}(y^2+u^2)\,du = \sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\;\frac{y^{2(n-m)}\left((x+x_f)^{2m+1}-(x-x_f)^{2m+1}\right)}{(2m+1)\,(4\eta t)^n}$$

Generalizando a la serie Geométrica;

$$\int_{-x_f}^{x_f}\left(\frac{y^2+(x-x_w)^2}{4\eta t}\right)^n dx_w = \sum_{n=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}}{m!\,(n-m)!}$$

$$\frac{y^{2(n-m)}\left((x+x_f)^{2m+1}-(x-x_f)^{2m+1}\right)}{n\,(2m+1)\,(4\eta t)^n} \qquad \text{B-57}$$

Substituyendo ambos resultados ec. B 57 y ec. B 55 en ec. B 48;

$$\Delta P(x,y,t) = \frac{q}{4\phi C_t \pi \eta}\Big\{ 2x_f\left(Ln\ \eta t + 2.80907\right) + (x-x_f)\ Ln\left(y^2+(x-x_w)^2\right) - (x+x_f)\ Ln\left(y^2+(x+x_f)^2\right) - 2y\ \tan^{-1}\frac{x_f\ y}{r^2-x_f^2} + \sum_{n=1}^{n}\sum_{m=0}^{n}$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n(2m+1)\,m!\,(n-m)!}\ \frac{y^{2(m-n)}\left((x+x_f)^{2m+1}-(x-x_f)^{2m+1}\right)}{(4\eta t)^n}\Big\} \qquad \text{B-58}$$

La ecuación B-58 se usará en un estudio posterior, por ahora solo se empleará la región de la fractura, $y = 0,\ |x| \leq x_f$;

$$\Delta P(x,t) = \frac{q}{4\phi C_t \pi \eta}\Big\{ 2x_f\left(Ln\ \eta t + 2.80907\right) + (x-x_f)\ Ln(x-x_f)^2 - (x+x_f)\ Ln(x+x_f)^2 \Big\} \qquad \text{B-59}$$

si $x = 0$

$$\Delta P(t) = \frac{q}{4\phi C_t \pi \eta}\ 2x_f\left(Ln\ \eta t + 2.80907 - 2 Ln\ x_f\right) \qquad \text{B-60}$$

APENDICE. C

Solución del modelo.

Se determina el gasto y presión adimensionales en la fractura de cada capa del sistema compuesto por dos estratos infinitos, sin flujo cruzado y produciendo a través de un pozo fracturado hidráulicamente con orientación vertical, que las penetra completamente y las comunica a través de la fractura.

La ecuación de comportamiento de presión para la primera capa produciendo en forma independiente cuando $y=0$, $|x|<x_f$. es;

$$\Delta P_1(x,t) = \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{4\phi_1 c_{t_1} \pi \eta_1 (t-\tau)} \int_{-x_{f_1}}^{x_{f_1}} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{4\eta_1(t-\tau)}} \, dx_w \, d\tau \qquad \text{C-1}$$

Para la segunda capa;

$$\Delta P_2(x,t) = \int_0^t \frac{q_2(\tau)}{4\phi_2 c_{t_2} \pi \eta_2 (t-\tau)} \int_{-x_{f_2}}^{x_{f_2}} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{4\eta_2(t-\tau)}} \, dx_w \, d\tau \qquad \text{C-2}$$

Debido a que la presión instantánea en la fractura es la misma para las dos capas $\Delta P_1(x,t) = \Delta P_2(x,t)$. La presión y tiempo adimensionales se definen en la forma siguiente;

$$P_D(x_D, t_D) = \frac{2\pi k_1 h_1 \Delta P_1(x,t)}{q_w B \mu_1} = \frac{2\pi k_1 h_1 \Delta P_2(x,t)}{q_w B \mu_1} \qquad \text{C-3}$$

$$t_{Dx_f} = \frac{\eta_1 t}{x_{f_1}^2} = \frac{k_1 t}{\phi_1 c_{t_1} \mu_1 x_f^2} \qquad \text{C-4}$$

$$x_{D_w} = \frac{x_w}{x_{f_1}} \quad ; \quad x_D = \frac{x}{x_{f_1}} \qquad \text{C-5}$$

Substituyendo las ecuaciones C-3, C-4, C-5, en C-1 se tiene:

$$P_D(x_D,t_D)^{+} = \frac{2\pi K_1 h_1 x_{f_1}^3}{q_w B\mu_1 4\phi_1 \eta_1 \pi_1 x_{f_1}^2}\int_0^{t_D}\frac{q_1(\tau)}{(t_D-\tau)}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x_D-x_{Dw})^2}{4(t_D-\tau)}}\, dx_{Dw}\, d\tau$$

Pero $q_{w_1}(\tau) = 2x_{f_1} h_1\, q_1(\tau)$ C-6

Simplificando:

$$P_D(x_D,t_D) = \int_0^{t_D}\frac{q_{w_1}(\tau)}{4 q_w B(t_D-\tau)}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x_D-x_{Dw})^2}{4(t_D-\tau)}}\, dx_{Dw}\, d\tau \qquad \text{C-7}$$

Substituyendo las ecuaciones C-3, C-4 y C-5, en C-2 se tiene:

$$P_D(x_D,t_D) = \frac{2\pi K_1 h_1}{q_w B\mu_1}\,\frac{\eta_1 x_{f_1}}{4\pi\phi_2 c_{t_2}\eta_2\eta_1}\int_0^{t_D}\frac{q_2(\tau)}{(t_D-\tau)}\int_{-\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}}^{\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}} e^{-\frac{(x_D-x_{Dw})^2}{4(t_D-\tau)}}\, dx_{Dw}\, d\tau$$

Multiplicando y dividiendo por la misma cantidad se mantiene la la igualdad:

$$P_D(x_D,t_D) = \frac{2\pi K_1 h_1}{q_w B\mu_1}\,\frac{x_{f_1}}{\phi_2 c_{t_2}}\,\frac{1}{4\pi\eta_2}\,\frac{x_{f_2}}{x_{f_2}}\,\frac{h_2}{h_2}\,\frac{\mu_2}{\mu_2}\,\frac{\mu_1}{\mu_1}\,\frac{\phi_1 c_{t_1}}{\phi_2 c_{t_2}}\,\frac{K_2 K_1}{K_2 K_1}$$

$$\int_0^{t_D}\frac{q_2(\tau)}{t_D-\tau}\int_{-\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}}^{\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}} e^{-\frac{(x_D-x_{Dw})^2}{4(\eta_2/\eta_1)(t_D-\tau)}}\, dx_{Dw}\, d\tau$$

Ordenando términos,

$$P_D(x_D,t_D) = \frac{\phi_1\mu_1 c_{t_1} K_2}{\phi_2\mu_2 c_{t_2} K_1}\,\frac{K_1}{\phi_1\mu_1 c_{t_1}\eta_2}\,\frac{x_{f_1}}{x_{f_2}}\,\frac{K_1 h_1 \mu_2}{K_2 h_2 \mu_1}$$

$$\int_0^{t_D}\frac{2x_{f_2} h_2 q_2(\tau)}{4 q_w B(t_D-\tau)}\int_{-\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}}^{\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}} e^{-\frac{(x_D-x_{Dw})^2}{4\eta_1/\eta_2 (t_D-\tau)}}\, dx_{Dw}\, d\tau$$

+ Se usa t_D por t_{Dx_f} para simplificar las expresiones a menos que se señale otro significado.

Simplificando los términos la ec. C-2 se expresar como;

$$P_D(x_D, t_D) = \frac{x_{f_1}}{x_{f_2}} \frac{K_1 h_1 \mu_2}{K_2 h_2 \mu_1} \int_0^{t_D} \frac{q_{w_2}(\tau)}{4 q_w B(t_D-\tau)} \int_{-\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}}^{\frac{x_{f_2}}{x_{f_1}}} e^{-\frac{(x_D - x_{D_w})^2}{4 \eta_1/\eta_2 (t_D-\tau)}} \, d x_w \, d\tau \qquad \text{C-8}$$

Donde: $q_{w_2}(\tau) = 2 x_{f_2} h_2 q_2(\tau)$

Definiendo relaciones adimensionales:

$$\left.\begin{aligned} RKH &= \frac{\mu_2 K_1 h_1}{\mu_1 K_2 h_2} ; \quad RxF = \frac{x_{f_2}}{x_{f_1}} ; \quad RN = \frac{\eta_1}{\eta_2} \\ RN &= \frac{K_1 \phi_2 \mu_2 C_{t_2}}{K_2 \phi_1 \mu_1 C_{t_1}} ; \quad C_1 = RxF \cdot RKH \end{aligned}\right\} \qquad \text{C-9}$$

Simplificando y substituyendo C-9 en C-8 se tiene:

$$P_D(x_D, t_D) = C_1 \int_0^{t_D} \frac{q_{w_2}(\tau)}{4 q_w B(t_D-\tau)} \int_{-\frac{1}{RxF}}^{\frac{1}{RxF}} e^{-\frac{(x_D - x_{D_w})^2}{4/RN (t_D-\tau)}} \, d x_{D_w} \, d\tau \qquad \text{C-10}$$

Ahora bién, debido a que la presión instantánea en la fractura es la misma para ambas capas, podemos igualar las ecuaciones C-7 y C-10 en la forma siguiente:

$$\int_0^{t_D} \frac{q_{w_1}(\tau)}{4 q_w B(t_D-\tau)} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x_D - x_{D_w})^2}{4(t_D-\tau)}} \, d x_{D_w} \, d\tau =$$

$$= C_1 \int_0^{t_D} \frac{q_{w_2}(\tau)}{4 q_w B (t_D - \tau)} \int_{-\frac{1}{RXF}}^{\frac{1}{RXF}} e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4/RN(t_D - \tau)}} dx_{Dw} \, d\tau \qquad \text{C-11}$$

Definiendo los gastos adimensionales como:

$$q_{D_1}(\tau) = \frac{q_{w_1}(\tau)}{q_w B} \qquad y \qquad q_{D_2}(\tau) = \frac{q_{w_2}(\tau)}{q_w B}$$

La condición de gasto constante en el pozo se reduce a:

$$q_w B = q_{w_1}(\tau) + q_{w_2}(\tau) \quad \therefore \quad q_{D_1}(\tau) + q_{D_2}(\tau) = 1 \qquad \text{C-11'}$$

Substituyendo C 11' en C-11

$$\int_0^{t_D} \frac{q_{D_1}(\tau)}{4(t_D - \tau)} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4(t_D - \tau)}} dx_{Dw} \, d\tau + C_1 \int_0^{t_D} \frac{q_{D_1}(\tau)}{4(t_D - \tau)} \int_{-\frac{1}{RXF}}^{\frac{1}{RXF}} e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4/RN(t_D - \tau)}} dx_{Dw} \, d\tau = C_1 \int_0^{t_D} \frac{1}{4(t_D - \tau)} \int_{-\frac{1}{RXF}}^{\frac{1}{RXF}} e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4/RN(t_D - \tau)}} dx_{Dw} \, d\tau \qquad \text{C-12}$$

Para simplificar se define lo siguiente:

$$F_1(x_D, t_D - \tau) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4(t_D - \tau)}}}{4(t_D - \tau)} dx_{Dw}$$

$$F_2(x_D, t_D - \tau) = \int_{-\frac{1}{RXF}}^{\frac{1}{RXF}} \frac{e^{-\frac{(x_D - x_{Dw})^2}{4/RN(t_D - \tau)}}}{4(t_D - \tau)} dx_{Dw}$$

Además, para el caso de diferente extensión de fractura en las capas y que se cumpla la condición de $\Delta P_1 = \Delta P_2$, en el caso del modelo de conductividad infinita, la coordenada X debe ser menor que la longitud de la fractura, por lo tanto,

$x_1 = 0.732\, x_{f_1}$ y $x_2 = 0.732\, x_{f_2}$ ó $x_{D_1} = 0.732$ y $x_{D_2} = 0.732/RXF$, dado que se está empleando el modelo de conductividad uniforme, en base al trabajo de Gringarten[43].

La función F_2 se transforma a:

$$F_2(x_D, t_D-\tau) = \int_{-\frac{1}{RXF}}^{\frac{1}{RXF}} \frac{e^{-\frac{(x_D/RXF - x_{D_w})^2}{4/RN(t_D-\tau)}}}{4(t_D-\tau)}\, dx_{D_w}$$

La ecuación C-12 se transforma a:

$$\int_0^{t_D} q_{D_1}(\tau)\left\{F_1(x_D, t-\tau) + C_1 F_2(x_D, t-\tau)\right\} d\tau = \int_0^{t_D} C_1 F_2(x_D, t-\tau)\, d\tau \qquad \text{C-13}$$

Para valores fijos de x_D;

$$F_1(x_D, t-\tau) = F_1(t-\tau) \quad y \quad F_2(x_D, t-\tau) = F_2(t-\tau)$$

La ecuación C-13 tiene la forma de "Integral de Superposición de Duhamel"[69], para su solución se puede discretizar para la función $q_{D_1}(\tau)$ y por lo tanto resolverse para este gasto adimensional[70] en la forma siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{D_{1i}} \int_{t_{D_{i-1}}}^{t_{D_i}} \left\{F_1(t_{D_n}-\tau) + C_1 F_2(t_{D_n}-\tau)\right\} d\tau = \int_0^{t_{D_n}} C_1 F_2(t_{D_n}-\tau)\, d\tau$$

Aplicando los propiedades de los límites de la integral tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{D1i}\left\{\int_0^{t_{Di}}\left[F_1(t_{Dn}-\tau)+C_1F_2(t_{Dn}-\tau)\right]d\tau-\int_0^{t_{Di-1}}\left[F_1(t_{Dn}-\tau)\right.\right.$$

$$\left.\left.+C_1F_2(t_{Dn}-\tau)\right]d\tau\right\}=\int_0^{t_{Dn}}C_1F_2(t_{Dn}-\tau)d\tau. \qquad \text{C-14}$$

La expresión $\int_0^{t_{Di}} F_1(t_{Dn}-\tau)d\tau$ se puede simplificar mediante un cambio de variable en la forma siguiente:

$$t_D' = t_{Dn}-\tau \; ; \quad d\tau = -dt_D'$$

$$\int_0^{t_{Di}} F_1(t_{Dn}-\tau)\,d\tau = -\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{Di}} F_1(t_D')dt_D' = I_1(t_{Dn})-I_1(t_{Dn}-t_{Di})$$

La función I (t_D') es la integral de la función F (t_D') y representa el valor de la presión adimensional para un pozo fracturado con modelo de flujo uniforme o conductividad infinita en la fractura de una capa, dependiendo del valor de x_D , para un gasto constante o gasto adimensional de uno.

De la ecuación C-14 podemos obtener el valor del gasto para un tiempo cualquiera t_{Dn} , donde n= 1, 2, 3, ... n, en la forma siguiente:

Para N = 1

$$q_{D1i}\left\{\int_0^{t_{D1}}\left[F_1(t_{D1}-\tau)+C_1F_2(t_{D1}-\tau)\right]d\tau-\int_0^{t_{D0}}\left[F_1(t_{D1}-\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.C_1F_2(t_{D1}-\tau)\,d\tau\right\}=\int_0^{t_{D1}}C_1F_2(t_{D1}-\tau)\,d\tau.$$

Haciendo $t_D' = t_D-\tau$; $dt_D' = -d\tau$ y $t_{D0}=0$ tenemos;

$$q_{D1}\left\{-\int_{t_{D1}}^{0}\left[F_1(t_D')+C_1F_2(t_D')\right]dt_D'\right\}=-\int_{t_{D1}}^{0}C_1F_2(t_D')\,dt_D'$$

Integrando y despejando q_{D11} se tiene:

$$q_{D_{11}} \left\{ I_1(t_{D_1}) + c_1 I_2(t_{D_1}) \right\} = c_1 I_2(t_{D_1})$$

$$q_{D_{11}} = \frac{c_1 I_2(t_{D_1})}{I_1(t_{D_1}) + c_1 I_2(t_{D_1})}$$

Para N = 2

$$q_{D_{11}} \left\{ \int_0^{t_{D_1}} \left[F_1(t_{D_2} - \tau)\, d\tau + c_1 F_2(t_{D_2} - \tau) \right] d\tau - \int_0^0 \left[F_1 \right.\right.$$

$$\left.\left. (t_{D_2} - \tau) + c_1 F_2(t_{D_2} - \tau) \right] d\tau \right\} + q_{D_{12}} \left\{ \int_0^{t_{D_2}} \left[F_1(t_{D_2} - \tau) + c_1 F_2(t_{D_2} - \tau) \right.\right.$$

$$\left.\left. \right] d\tau - \int_0^{t_{D_1}} \left[F_1(t_{D_2} - \tau) + c_1 F_2(t_{D_2} - \tau) \right] d\tau \right\} = \int_0^{t_{D_2}} c_1 F_2(t_{D_2} - \tau)\, d\tau$$

Haciendo $t_D' = t_{D_2} - \tau$; $dt_D' = -d\tau$ tenemos:

$$q_{D_{11}} \left\{ - \int_{t_{D_2}}^{t_{D_2} - t_{D_1}} \left[F_1(t_D') + c_1 F_2(t_D') \right] dt_D' \right\} + q_{D_{12}} \left\{ - \int_{t_{D_2}}^{0} \left[F_1(t_D') + c_1 F_2(t_D') \right] dt_D' \right.$$

$$\left. + \int_{t_{D_2}}^{t_{D_2} - t_{D_1}} \left[F_1(t_D') + c_1 F_2(t_D') \right] dt_D' \right\} = - \int_{t_{D_2}}^{0} F_2(t_D')\, dt_D'$$

Integrando y despejando $q_{D,2}$ se tiene:

$$q_{D12} = \frac{c_1 I_2(t_{D_2}) + q_{D11} \left\{ -I_1(t_{D_2}) - c_1 I_2(t_{D_2}) + I_1(t_{D_2} - t_{D_1}) + \right.}{I_1(t_{D_2} - t_{D_1}) + c_1 I_2(t_{D_2} - t_{D_1})}$$

$$\underline{\left. c_1 I_2(t_{D_2} - t_{D_1}) \right\}}$$

De donde

$$q_{D12} = \frac{C_1 I_2(t_{D2}) + q_{D11}\{I_1(t_{D2}-t_{D1}) - I_1(t_{D2}) + C_1(I_2(t_{D2}-t_{D1}) - I_2(t_{D2}))\}}{I_1(t_{D2}-t_{D1}) + C_1 I_2(t_{D2}-t_{D1})}$$

Para N = 3

$$q_{D11}\left\{\int_0^{t_{D1}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau - \int_0^{t_{D0}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau\right\}$$

$$+ q_{D12}\left\{\int_0^{t_{D2}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau - \int_0^{t_{D1}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau\right\}$$

$$+ q_{D13}\left\{\int_0^{t_{D3}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau - \int_0^{t_{D2}}[F_1(t_{D3}-\tau) + C_1 F_2(t_{D3}-\tau)]d\tau\right\} =$$

$$\int_0^{t_{D3}} C_1 F_2(t_{D3}-\tau)\, d\tau$$

Haciendo $t_D' = t_D - \tau$ y $dt_D' = -\,d\tau$. tenemos:

$$q_{D11}\left\{-\int_{t_{D3}}^{t_{D3}-t_{D1}}[F_1(t_D') + C_1 F_2(t_D')]\,dt_D'\right\} +$$

$$q_{D12}\left\{-\int_{t_{D3}}^{t_{D3}-t_{D2}}[F_1(t_D') + C_1 F_2(t_D')]\,dt_D + \int_{t_{D3}}^{t_{D3}-t_{D1}}[F_1(t_D') + C_1 F_2(t_D')]\,dt_D'\right\} +$$

$$q_{D13}\left\{-\int_{t_{D3}}^{0}[F_1(t_D') + C_1 F_2(t_D')]\,dt_D' + \int_{t_{D3}}^{t_{D3}-t_{D2}}[F_1(t_D') + C_1 F_2(t_D')]\,dt_D'\right\} = -$$

$$\int_{t_{D3}}^{0} C_1 F_2(t_D')\, dt_D'$$

Integrando;

$$q_{D11}\left\{ I_1(t_{D3}) - I_1(t_{D3}-t_{D1}) + c_1\left[I_2(t_{D3}) - I_2(t_{D3}-t_{D1}) \right\} + \right.$$

$$q_{D12}\left\{ I_1(t_{D3}) - I_1(t_{D3}-t_{D2}) + c_1\left[I_2(t_{D3}) - I_2(t_{D3}-t_{D2}) \right) + I_1(t_{D3}-t_{D1}) - \right.$$

$$I_1(t_{D3}) + c_1\left[I_2(t_{D3}-t_{D1}) - I_2(t_{D3}) \right] \} +$$

$$q_{D13}\left\{ I_1(t_{D3}) + c_1 I_2(t_{D3}) + I_1(t_{D3}-t_{D2}) - I_1(t_{D3}) + c_1\left[I_2(t_{D3}-t_{D2}) - \right.\right.$$

$$I_2(t_{D3})\Big] \Big\} = c_1 I_2(t_{D3})$$

Despejando q_{D13} se tiene:

$$q_{D13} = \frac{c_1 I_2(t_{D3}) + q_{D11}\left\{ I_1(t_{D3}-t_{D1}) - I_1(t_{D3}) + c_1\left[I_2(t_{D3} - \right.\right.}{I_1(t_{D3}-t_{D2}) + c_1 I_2(t_{D3}-t_{D2})}$$

$$\frac{\left.\left. t_{D1}) - I_2(t_{D3})\right]\right\} + q_{D12}\left\{ I_1(t_{D3}-t_{D2}) - I_1(t_{D3}-t_{D1}) + \right.}{I_1(t_{D3}-t_{D2}) + c_1 I_2(t_{D3}-t_{D2})}$$

$$\frac{\left. c_1\left[I_2(t_{D3}-t_{D2}) - I_2(t_{D3}-t_{D1}) \right] \right\}}{I_1(t_{D3}-t_{D2}) + c_1 I_2(t_{D3}-t_{D2})}$$

Para N = N

$$q_{D11}\left\{\int_0^{t_{D1}}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1F_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau-\int_0^{0}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1F_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau\right\}+$$

$$q_{D12}\left\{\int_0^{t_{D2}}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1F_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau-\int_0^{t_{D1}}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1F_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau\right\}+$$

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

$$+q_{Dn}\left\{\int_0^{t_{Dn}}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1F_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau-\int_0^{t_{Dn-1}}[F_1(t_{Dn}-\tau)+c_1I_2(t_{Dn}-\tau)]d\tau\right\}=$$

$$\int_0^{t_{Dn}}c_1F_2(t_{Dn}-\tau)\,d\tau$$

Haciendo $t_D'=t_{Dn}-\tau$; $dt_D'=-d\tau$ tenemos:

$$q_{D11}\left\{-\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D1}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'\right\}+$$

$$q_{D12}\left\{-\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D2}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'+\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D1}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'\right\}+$$

$$q_{D13}\left\{-\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D3}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'+\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D2}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'\right\}+$$

$$q_{D14}\left\{-\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D4}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'+\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{D3}}[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')]\,dt_D'\right\}+$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$q_{D1n}\left\{-\int_{t_{Dn}}^{0}\left[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')\right]dt_D'+\int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{Dn-1}}\left[F_1(t_D')+c_1F_2(t_D')\right]dt_D'\right\}=$$

$$-\int_{t_{Dn}}^{0}c_1F_2(t_D')\,dt_D'$$

Integrando tenemos:

$$q_{D11}\left\{I_1(t_{Dn})-I_1(t_{Dn}-t_{D1})+c_1\left(I_2(t_{Dn})-I_2(t_{Dn}-t_{D1})\right)\right\}+$$

$$q_{D12}\left\{I_1(t_{Dn})-I_1(t_{Dn}-t_{D2})+c_1\left(I_2(t_{Dn})-I_2(t_{Dn}-t_{D2}\right)-I(t_{Dn})\right.$$
$$\left.+I_1(t_{Dn}-t_{D1})+c_1\left(-I_2(t_{Dn})+I_2(t_{Dn}-t_{D1})\right)\right\}+$$

$$q_{D13}\left\{I_1(t_{Dn})-I_1(t_{Dn}-t_{D3})+c_1\left(I_2(t_{Dn})-I_2(t_{Dn}-t_{D3})\right)-\right.$$
$$\left.I_1(t_{Dn})+I_1(t_{Dn}-t_{D2}+c_1\left(-I_2(t_{Dn})+I_2(t_{Dn}-t_{D2})\right)\right\}+$$

\- - - - - - - - - - - - - - - -
\- - - - - - - - - - - - - - - -
\- - - - - - - - - - - - - - - -

$$q_{D1n}\left\{I_1(t_{Dn})+c_1I_2(t_{Dn})-I_1(t_{Dn})+I_1(t_{Dn}-t_{Dn-1})+c_1\left[-I_2(t_{Dn})\right.\right.$$
$$\left.\left.+I_2(t_{Dn}-t_{Dn-1})\right]\right\}=c_1I_2(t_{Dn})$$

Simplificando la suma:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_{D1i} \left\{ -I_1(t_{Dn}-t_{Di}) + I_1(t_{Dn}-t_{Di-1}) + C_1\left[-I_2(t_{Dn}-t_{Di}) + I_2(t_{Dn}-t_{Di-1}) \right] \right\} + q_{D1n}\left\{ I_1(t_{Dn}-t_{Dn-1}) + C_1 I_2(t_{Dn}-t_{Dn-1}) \right\} = C_1 I_2(t_{Dn})$$

$$q_{D1n} = \frac{C_1 I_2(t_{Dn}) + \sum_{i=1}^{n-1} q_{D1i} \left\{ \begin{array}{l} I_1(t_{Dn}-t_{Di}) - I_1(t_{Dn}-t_{Di-1}) \\ C_1\left[I_2(t_{Dn}-t_{Di}) - I_2(t_{Dn}-t_{Di-1}) \right] \end{array} \right\}}{I_1(t_{Dn}-t_{Dn-1}) + C_1 I_2(t_{Dn}-t_{Dn-1})} \qquad \text{C-15}$$

Con los gastos conocidos a cualquier tiempo, la presión de cada capa se determina discretizando las ecuaciones (en forma adimensional) correspondientes a la C-7 y C-10 en la forma siguiente:

Para la capa uno:

$$P_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_{D1}(\tau) F_1(r_D, t_D-\tau)\, d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{n} q_{D1i} \int_{t_{D1i}}^{t_{Di}} F_1(r_D, t_D-\tau)\, d\tau$$

$$P_D(r_D, t_D) = q_{D1i} \left\{ \int_0^{t_{Di}} F_1(r_D, t_D-\tau)\, d\tau - \int_0^{t_{Di-1}} F_1(r_D, t_D-\tau)\, d\tau \right\}$$

$$\text{si } t_D' = t_D - \tau;\ dt_D' = -d\tau \ \text{ y } \ r_D = \text{cte.}$$

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D1i} \left\{ \int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{Di}} F_1(t_D')\, dt_D' + \int_{t_{Dn}}^{t_{Dn}-t_{Di-1}} F_1(t_D')\, dt_D' \right\}$$

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D,i} \left\{ -I_1(t_{D_n} - t_{D,i}) + I_1(t_{Dn}) + I_1(t_{D_n} - t_{D_{i-1}}) - I(t_{D_1}) \right\}$$

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D1i} \left\{ I_1(t_{D_n} - t_{D_{i-1}}) - I_1(t_{D_n} - t_{D_i}) \right\} \qquad \text{C-16}$$

Para la 2a. capa por similitud tenemos:

$$P_D(t_D) = \sum_{i=1}^{n} q_{D_{2i}} \, C_1 \left\{ I_2(t_{D_n} - t_{D_{i-1}}) - I_1(t_{D_n} - t_{D_i}) \right\} \qquad \text{C-17}$$

Para calcular el comportamiento del gasto y presión adimensionales con las ecuaciones discretizadas C-15, C-16 y C-17 definidas con funciones integrales y expresadas con variables adimensionales y con las relaciones de las propiedades de los dos estratos que forman el yacimiento, se interpolan los valores de $I_1(t_D')$ e $I_2(t_D')$ de los resultados obtenidos de calcular

$$\int_0^{t_D} q_{D_1}(\tau) F_1(t_D') \, dt_D' \quad e \quad \int_0^{t_D} q_{D_2}(\tau) F_2(t_D') \, d\tau_D' \; ; \qquad \text{para } q_D(\tau) = 1$$

con las soluciones B-44 y B- 59 para tiempos pequeños y grandes respectivamente expresadas en la forma adimensional siguiente:

Capa I

Tiempos Pequeños

$$P_D(t_D) = \sqrt{\frac{\pi t_D}{4}} \left\{ erf \frac{Y_D + 1}{\sqrt{4 t_D}} + erf \frac{1 - Y_D}{\sqrt{4 t_D}} \right\} +$$

$$\frac{1}{4}\left\{-(\gamma_D+1)\,Ei\left(-\frac{(1+\gamma_D)^2}{4t_D}\right)-(1-\gamma_D)\,Ei\left(-\frac{(1-\gamma_D)^2}{4t_D}\right)\right\} \qquad \text{C-18}$$

Tiempos Largos

$$P_D(t_D) = \frac{1}{2}\left(Ln\ t_D + 2.80907\right) + \frac{1}{4}\left((\gamma_D-1)\,Ln\,(\gamma_D-1)^2 - (\gamma_D+1)\,Ln\,(\gamma_D+1)^2\right)$$

C-19

CAPA II

Tiempos Pequeños

$$P_D(t_D) = \sqrt{\frac{\pi\ t_D\ C_1^2}{4\ RN}}\left\{erf\ \frac{\gamma_D+1}{\sqrt{\frac{4R\gamma F^2}{RN}t_D}} + erf\ \frac{1-\gamma_D}{\sqrt{\frac{4R\gamma F^2}{RN}t_D}}\right\} +$$

$$\frac{C_1}{4R\gamma F}\left\{-(\gamma_D+1)\,Ei\left(-\frac{(\gamma_D+1)^2}{\frac{4R\gamma F^2}{RN}t_D}\right)-(1-\gamma_D)\,Ei\left(-\frac{(1-\gamma_D)^2}{\frac{4R\gamma F}{RN}t_D}\right)\right\}$$

C-20

Tiempos Largos

$$P_D(t_D) = \frac{C_1}{2R\gamma F}\left[Ln\ t_D/RN + 2.80907\right] + \frac{C_1}{4R\gamma F}\left[(\gamma_D-1)\ Ln\left(\frac{\gamma_D-1}{R\gamma F}\right)^2\right.$$

$$\left.-(\gamma_D+1)\ Ln\left(\frac{\gamma_D+1}{R\gamma F}\right)^2\right] \qquad \text{C-21}$$

APENDICE D

Ejemplos de aplicación del modelo.

Se analizan dos ejemplos con datos sintéticos de pruebas de decremento de presión de pozo con fractura vertical que atraviesa un yacimiento de dos estratos infinitos sin flujo cruzado.

Datos del Ejemplo I

t (hora)	$\sqrt{t}$ (hora)	P_{wf} (psi)	ΔP * (psi)
0.0	0.0	3 200.0	0.0
0.01 (36 seg)	0.1	3 196.6	3.53
0.05 (3 min)	0.224	3 192.2	7.82
0.08 (4.8 min)	0.283	3 190.0	9.95
0.1 (6.0 min)	0.316	3 188.9	11.10
0.3 (18 min)	0.548	3 181.4	18.62
1.0	1.000	3 168.5	31.48
1.5	1.225	3 162.7	37.25
2.0	1.414	3 158.1	41.87
5.0		3 140.0	59.95
8.0		3 128.8	71.22
10.0		3 123.0	77.01
20.0		3 105.1	94.89
50.0		3 075.8	124.24
80.0		3 061.6	138.41
100.0		3 053.7	146.27
300.0		3 016.5	183.54

* $\Delta P = P_i - P_{wf}$

t (hora)	$\sqrt{t}$ (hora)	P_{wf} (psi)	ΔP (psi)
1000.0		2 976.2	223.82
3000.0		2 939.4	260.51
5000.0		2 922.5	277.48
8000.0		2 906.9	293.12

$q_o = 50 \ bls/día$ $\quad h_1 = h_2 = 10 ft$ $\quad r_w = 0.25 ft$

$B_o = 1.125 \ \frac{bls@cy}{bls@cs}$ $\quad \phi_1 = \phi_2 = 0.2$

$\mu_1 = \mu_2 = 0.5 \ cp$ $\quad C_{t_1} = C_{t_2} = 10^{-5} \ psi^{-1}$

Análisis de la Prueba de Presión del Ejemplo I

a) Análisis de ajuste con curvas tipo.

De la figura 33:

ΔP = 59.9 psi	P_D = 0.906	RXF = 1	RN = 5
t = 5 hr	t_D = 0.66	RKH = 5	conduct. inf.

Los primeros puntos se presentan en el período de flujo lineal y los posteriores a t = 50 hrs. en el de pseudo-radial.

De la ecuación 33,

$$\overline{\left(\frac{Kh}{\mu}\right)} = 141.2 \ q_w \ B \ \frac{P_D}{\Delta P} = 141.2 \times 50 \times 1.125 \times \frac{0.906}{59.9} = 120.4 \ \frac{mD \cdot ft}{cp}$$

De la ecuación 34,

$$\frac{K_1}{x_{f_1}^2} = \frac{t_D}{t} \ \frac{\phi_1 \mu_1 C_{t_1}}{0.000264} = \frac{0.66}{5} \ \frac{0.2 \times 0.5 \times 10^{-5}}{0.000264}$$

$$\frac{K_1}{x_{f_1}^2} = 0.0005 \ mD \ ft^2$$

Pero, $\left(\overline{\frac{Kh}{\mu}}\right) = \frac{K_1 h_1}{\mu_1} + \frac{K_2 h_2}{\mu_2} = (RKH + 1)\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2$

$$\left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2 \doteq \frac{120.4}{6} = 20.07 \qquad y \qquad \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 = 100.33$$

$$K_1 = \frac{100.33 \times 0.5}{10} = 5.017 \text{ mD} \qquad y \qquad K_2 = \frac{20.07 \times 0.5}{10} = 1.004 \text{ mD}$$

$$x_{f_1}^2 = \frac{5.017}{5 \times 10^{-4}} = 10\,033 \text{ ft}^2 \quad ; \quad x_{f_1} = 100.16 \text{ ft}.$$

$$y \; x_{f_2} = 100.16 \text{ ft}.$$

b) Análisis del período de flujo lineal.

De la figura 29:

$m_L = 35.3$ psi/hr

De la ecuación 30,

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{K x_f h}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_i = \frac{4.064\, q_w B}{m_L} = \frac{4.064 \times 50 \times 1.125}{35.3} = 6.476$$

Del ajuste de curva tipo RKH = 5, RN = 5 y RXF = 1

la solución más sencilla es cuando $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\phi_1 C_{t_1}}{\phi_2 C_{t_2}} = 1$

Pero, $\left(\frac{K x_f h}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_1 + \left(\frac{K x_f h}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_2 = \left(1 + \frac{RKH \cdot RXF}{\sqrt{RN}}\right)\left(\frac{K x_f h}{\mu \sqrt{\eta}}\right)_2$

$$1 + \frac{RKH \cdot RXF}{\sqrt{RN}} = 3.236 = 6.476\, \frac{\mu_2 \sqrt{\eta_2}}{K_2 h_2 x_{f_2}}$$

$$\frac{K_2 h_2 x_{f_2}}{\mu_2 \sqrt{\eta_2}} = 2. \quad ; \quad \sqrt{K_2} = \frac{2\sqrt{0.5}}{\sqrt{.2 \times 10^{-5} \times 10^3}} = 1$$

$$K_2 = 1\, mD \quad y \quad K_1 = 5\, mD$$

El daño en la fractura es pequeño o no existe debido a que la extrapolación de la recta llega a la presión inicial.

c) Análisis del período de flujo pseudo-radial.

De la figura 31,

$m_R = 76.2$ psi/ciclo y $P_{1\,hr} = 3205$ psi

De la ecuación 31,

$$\frac{\overline{Kh}}{\mu} = \frac{162.6\, q_w B}{m_R} = \frac{162.6 \times 50 \times 1.125}{76.2} = 120.03\ \frac{mD\ ft}{cp}$$

De la ecuación 32,

$$s = 1.151 \left\{ \frac{P_i - P_{1\,hr}}{m_R} - \log\left(\frac{5}{0.2 \times 5 \times 10^{-5} \times 0.25^2}\right) + 3.23 \right\}$$

$$s = 1.151 \left\{ \frac{3200 - 3205}{76.2} - \log\left(\frac{5}{0.2 \times 0.00005 \times .25^2}\right) + 3.23 \right\}$$

$s = -5.45425$

$$r_w' = e^{-s} = 58.43\ ft$$

De la figura 22, $r_w' = 0.58\, x_f = 58.1\ ft$

La aproximación obtenida da confiabilidad de haber seleccionado la curva tipo y líneas rectas adecuadas.

Datos del Ejemplo II

t (hora)		$\sqrt{t}$ (hora)	p_{wf} (psi)	Δp^* (psi)
0.0		0.0	2 650.0	0.0
0.0025	(9 seg)	0.05	2 647.8	2.16
0.004	(14.4 seg)	0.063	2 647.2	2.80
0.006	(21.6 seg)	0.077	2 646.6	3.43
0.008	(28.8 seg)	0.089	2 646.0	3.95
0.01	(36 seg)	0.100	2 645.6	4.41
0.012	(43.2 seg)	0.110	2 645.2	4.82
0.055	(3.3 min)	0.235	2 640.1	9.86
0.083	(5. min)	0.288	2 638.2	11.82
0.18	(10.8 min)	0.424	2 633.6	16.36
0.35	(21 min)	0.592	2 628.6	21.38
1.1			2 617.0	32.95
1.56			2 613.1	36.85
2.05			2 609.5	40.46
5.26			2 597.5	52.54
8.3			2 590.1	59.86
11.0			2 585.8	64.22
19.0			2 577.3	72.74
52.0			2 561.7	88.28
82.0			2 554.7	95.27
116.0			2 549.4	100.60
321.0			2 533.8	116.19
1058.0			2 515.6	134.44
3141.0			2 498.0	151.04
5038.0			2 491.8	158.25

$q_o = 250$ bls/día

$B_o = 1.136 \dfrac{bls@cy}{bls@cs}$

$\mu_1 = \mu_2 = 0.8$ cp.

$h_1 = h_2 = 69$ ft

$\phi_1 = \phi_2 = 0.039$

$r_w = 0.1979$ ft.

$c_{t_1} = c_{t_2} = 1 \times 10^{-6}$ psi^{-1}

Análisis de la Prueba de Presión del Ejemplo II

a) Análisis de ajuste con curvas tipo.

De la figura 34:

$\Delta P = 40.46$ psi	$P_D = 1.33$	RXF = 2	RN = 1
$t = 2.05$ hrs.	$t_D = 0.78$	RKH = 1	conductividad infinita.

Los primeros puntos se presentan en el período de flujo lineal y los posteriores a $t = 8.3$ horas en el de pseudo-radial.

De la ecuación 33,

$$\left(\frac{\overline{Kh}}{\mu}\right) = 141.2\, q_w B \frac{P_D}{\Delta P} = 141.2 \times 250 \times 1.136 \frac{1.33}{40.46}$$

$$= 1319 \frac{mD\ ft}{cp}$$

$$\left(\frac{\overline{Kh}}{\mu}\right) = \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 + \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2 \quad ; \quad \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_1 = \left(\frac{Kh}{\mu}\right)_2 = 659.79$$

$$K_1 = \frac{659.79 \times 0.8}{69} = 7.65 \text{ mD} = K_2$$

De la ecuación 34,

$$\frac{k_1}{x_{f_1}^2} = \frac{\phi_1 \mu_1 c_{t_1}}{0.000264} \frac{t_D}{t} = \frac{0.039 \times 0.8 \times 17 \times 10^{-6}}{0.000264} = 0.000765$$

$$x_{f_1}^2 = \frac{7.65}{0.000765} = 10\,000\ ft^2;\quad x_{f_1} = 100 ft \ \ y \ \ x_{f_2} = 50 ft$$

b) Análisis del período de flujo lineal.

De la figura 30:

$$m_l = 44.22\ psi/\sqrt{hr}$$

De la ecuación 30,

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{k x_f h}{\mu \sqrt{\eta}} \right)_i = \frac{4.064\, q_w B}{m_l} = \frac{4.064 \times 250 \times 1.136}{44.2} = 26.1$$

Del ajuste de curva tipo RXF = 2, RN = 1 y RKH = 1

la solución más sencilla es cuando $\frac{k_1}{k_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$

$$y \quad x_{f_1} / x_{f_2} = 2$$

Pero,

$$\left(\frac{k x_f h}{\mu \sqrt{\eta}} \right)_1 + \left(\frac{k x_f h}{\mu \sqrt{\eta}} \right)_2 = \left(1 + \frac{RKH \cdot RXF}{\sqrt{RN}} \right) \left(\frac{k x_f h}{\mu \sqrt{\eta}} \right)_2$$

$$\frac{RKH \cdot RXF}{\sqrt{RN}} + 1 = 26.2 \frac{\mu_2 \sqrt{\eta_2}}{k_2 h_2 x_{f_2}}; \quad \frac{k_2 h_2 x_{f_2}}{\mu_2 \sqrt{\eta_2}} = \frac{26.1}{3} = 8.7$$

$$\sqrt{k_2} = \frac{8.7 \sqrt{.8}}{\sqrt{0.039 \times 17} \times 10^{-3} \times 69 \times 50} = 2.77$$

$$k_2 = 7.67\ mD = k_1$$

El daño en la fractura es pequeño o no existe debido a que la recta se extrapola a $P_i - P_{w_f} = 0$.

c) Análisis del período de flujo pseudo-radial.

De la figura 32:

m_R = 35.0 psi/ciclo $\qquad\qquad$ P_{1hr} = 2621.5 psi

De la ecuación 31,

$$\left(\frac{\overline{kh}}{\mu}\right) = \frac{162.6\, q_w B}{m_R} = \frac{162.6 \times 250 \times 1.136}{35} = 1319.35$$

$$\frac{k_1 h_1}{\mu_1} = 659.65 \quad ; \quad k_1 = \frac{659.65 \times 0.8}{69} = 7.65 \text{ mD}$$

$$k_2 = 7.65 \text{ mD}$$

De la ecuación 32,

$$S = 1.151 \left\{ \frac{P_i - P_{1hr}}{m_R} - \log\left(\frac{k_1}{\phi_1 \mu_1 c_{t_1} r_w^2}\right) + 3.23 \right\}$$

$$S = 1.151 \left\{ \frac{2650 - 2621.5}{35} - \log k_1 + \log\left(0.8 \times 0.039 \times 17 \times 10^{-6} \times 0.1979^2\right) + 3.23 \right\}$$

$$S = -4.187 - \frac{1}{2} \ln k_1$$

De la figura 22: para RXF = 2

$$e^{-s} r_v = 0.36 \quad r_f = 36 \quad ; \quad e^{-s} = \frac{36}{0.1979} = 181.9$$

$$-s = \ln 181.9 = 5.203 \quad ; \quad s = -5.203$$

igualando el valor de s

$$\frac{1}{2} \ln K_1 = 5.203 - 4.187 = 1.016 \quad ; \quad K_1 = 7.63 \text{ md}$$

A pesar de lo sensible de la función logarítmo se obtuvo una buena aproximación, lo que indica la confiabilidad de la solución de la curva tipo y pendientes de las rectas de interpretación.

APENDICE E

Programa de cómputo.

En esta sección se describe brevemente las partes y el funcionamiento del algorítmo en lenguaje fortran, de las expresiones matemáticas que definen el comportamiento de presión y gasto adimensionales con respecto al tiempo del sistema estuadiado.

Datos del programa

Los datos del programa son solo siete números enteros que evaluan a siete variables de control, que se describen a continuación:

Columnas	Variable	Descripción de la variable
1 - 3	NTD	Número de Intervalos de tiempo (Máximo 130)
4 - 5	IRD	Número en base al cual en el programa se define el valor máximo Y_D (máximo)
6 - 7	TRN	Número de relaciones RN (máximo 10)
8 - 9	TRXF	Número de relaciones RXF (máximo 5)
10 - 11	ITSR	Swish para realizar el cálculo numérico (>0) o algebraico (≤ 0) de las soluciones de Gringarten y Ramey.
12 - 13	IRDI	Número en base al cual en el programa se define el valor inicial de Y_D
14 - 15	IRH	Número de relaciones RKH (máximo 5)

Funcionamiento del programa

El programa está diseñado en tal forma que con pequeñas correcciones (ya definidas) se puede calcular el comportamiento de la presión en un punto cualquiera recuperando los resultados en una matriz para graficarse en 3 dimensiones (radio adimensional, tiempo adimensional y presión adimensional).

Actualmente el programa solo calcula el comportamiento de la presión en el pozo y a 0.732 r_s del pozo, calculando las soluciones de Gringarten y Ramey siguiendo un método numérico o algebraico. Los resultados se obtienen graficados en dos dimensiones y en diferentes formas; en papel natural, en semilogarítmico y en logarítmico y un listado de resultados finales e intermedios, para comprobar los resultados (listado a suprimirse).

El programa está compuesto de las siguientes partes:

Programa principal	Determina los gastos y presiones adimensionales.
Subrutina SPDIA	Determina las soluciones de Gringarten y Ramey con las ecuaciones 21 y 24 del Apéndice A.
Subrutina SPDIN	Determina las soluciones de Gringarten y Ramey con el método de Integral Sipson Aplicada a la expresión 20 para tiempos pequeños del Apéndice A.
Función FLAGR	Función de interpolación.
Función EXPF	Calcula la Integral exponencial.
Subrutina ESCR	Imprime los resultados intermedios y finales de cada comportamiento para su comprobación.

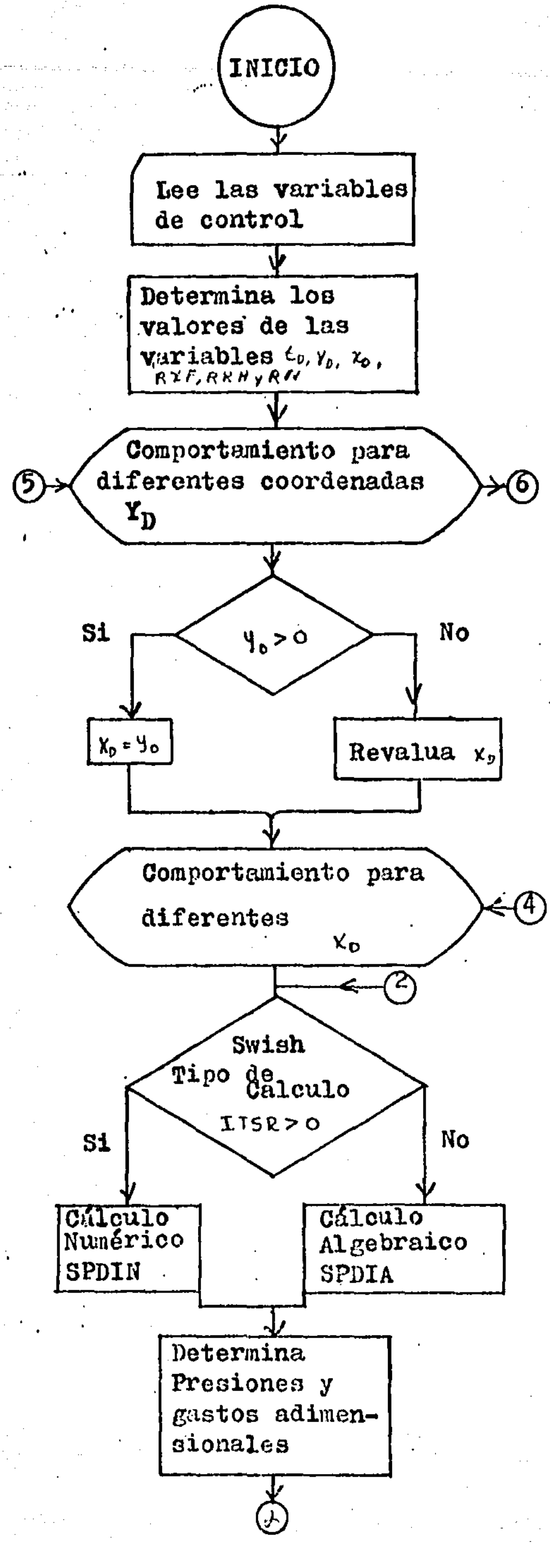
Subrutina ESCT — Acumula los resultados en matrices para graficarlos en 3 dimensiones cuando $Y > 0$.

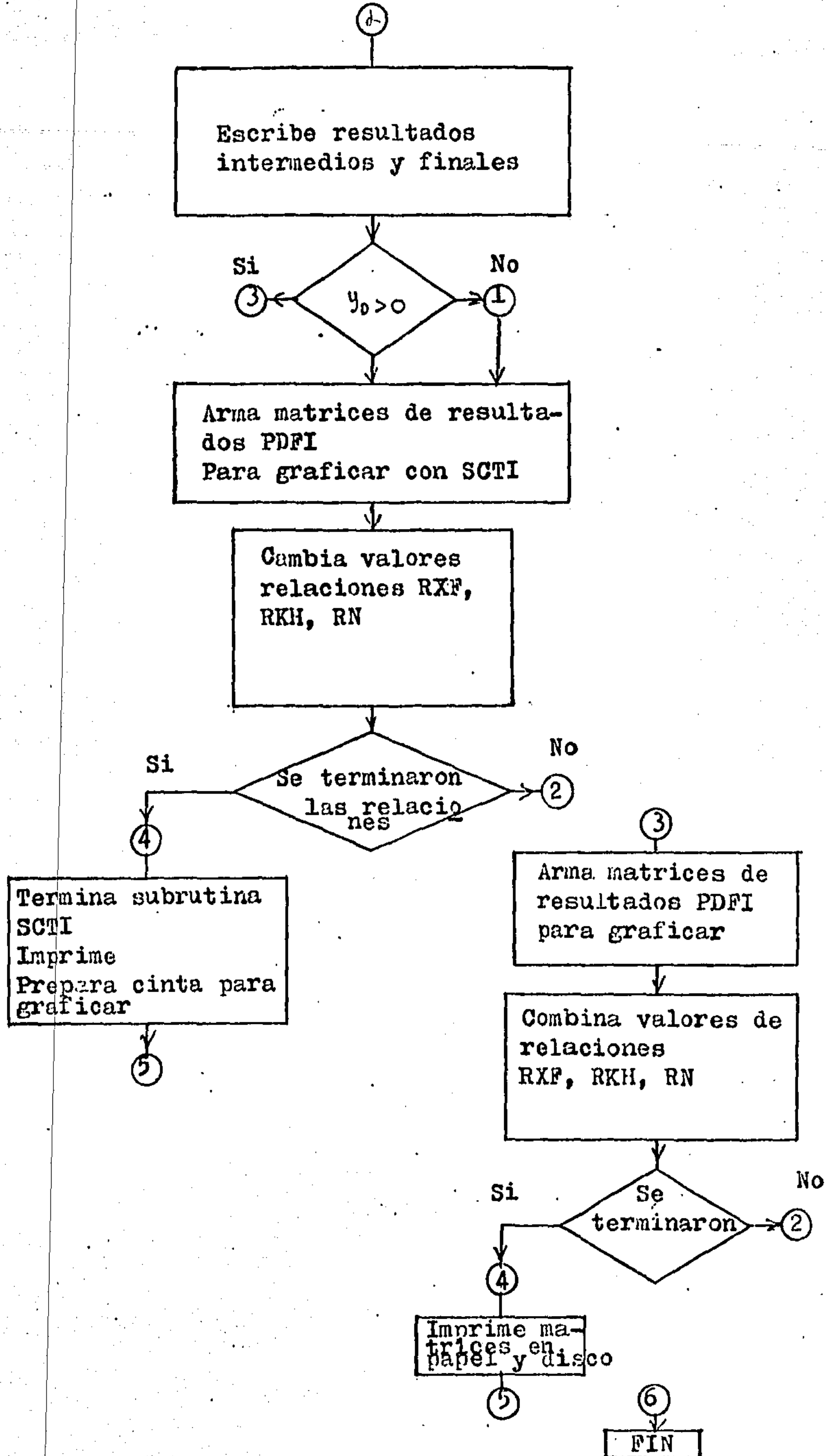
Subrutina ESCTI — Acumula los resultados en matrices y prepara la cinta de graficado en dos dimensiones, cuando $Y = 0$.

Se usan las subrutinas de CALCOMP complementadas con las SCLOGX, SCLOGY, SCRCV, SNRL, RNDIB, RYFDIB, RHDIB, para obtener cuadrículas y letreros en las gráficas.

DIAGRAMA DE FLUJO

(Solo se considera el valor de $Y_D = 0$)


INICIO
Lee las variables de control
Determina los valores de las variables t_D, Y_D, x_D, RXF, RRH y RH
Comportamiento para diferentes coordenadas Y_D
5
6
Si
$Y_D > 0$
No
$X_D = Y_D$
Revalua X_D
Comportamiento para diferentes X_D
4
2
Swish Tipo de Calculo
ITSR > 0
Si
No
Cálculo Numérico SPDIN
Cálculo Algebraico SPDIA
Determina Presiones y gastos adimensionales
1



Escribe resultados intermedios y finales
Si
No
$y_0 > 0$
Arma matrices de resultados PDFI Para graficar con SCTI
Cambia valores relaciones RXF, RKH, RN
Si
No
Se terminaron las relaciones
Termina subrutina SCTI Imprime Prepara cinta para graficar
Arma matrices de resultados PDFI para graficar
Combina valores de relaciones RXF, RKH, RN
Si
No
Se terminaron
Imprime matrices en papel y disco
FIN

NOMENCLATURA

Programa Principal

Símbolo	Descripción
TD	Tiempo adimensional
PDI	Solución de Gringarten y Ramey capa I
PD2	Solución de Gringarten y Ramey Capa II
PDF1	Presión adimensional capa I
PDF2	Presión adimensional capa II
QD1	Gasto adimensional capa I
QD2	Gasto adimensional capa II
RD	Radio adimensional del punto a considerar
XD	Coordenada adimensional del punto a considerar
YD	Coordenada adimensional del punto a considerar
REN	Relaciones RN a considerar
REXF	Relaciones RXF a considerar
REH	Relaciones RKH a considerar
NTD	Número de intervalos de tiempo
IRD	Número en base al cual se define la Y_D máxima
IRDI	Número en base al cual se define la Y_D inicial
IRN	Número de relaciones RN
IRXF	Número de relaciones RXF
IRH	Número de relaciones RKH
ITSR	Swish para definir el tipo de cálculo
I5	Número de valores X_D a considerar
IP	Indice de Y_D
JFP	Indice de X_D
KL2	Contador para limitar la impresión de resultados

Símbolo	Descripción
ICV	Contador del número de RN usados
ICV1	Contador del número de RXF usados
ICV2	Contador del número de RKH usados
A, D	Variables para ensayos
AS, DS	Variables para ensayos
AQD1, AQD2	Variables para ensayos
VAE1, VAE2	Variables para ensayos

Función FLAGR

X	Arreglo de la variable independiente
Y	Arreglo de la variable función
XARG	Valor de X al que se desea conocer Y
IDEG	Grado de interpolación
NPTS	Número de puntos

Subrutinas SPDIA, SPDIN, ESCR

Continúan con la misma nomenclatura del programa principal.

Función EXPF

X	El límite inicial de la integral exponencial

Subrutina ESCT

Continúa con la misma nomenclatura del programa principal

MATN	Matriz de resultados de presiones adimensionales variando RN y Y_D

Símbolo	Descripción
MATRD	Matriz auxiliar para impresión de MATN
MATXF	Matriz de resultados de presiones adimensionales variando RXF y Y_D
MATRX	Matriz auxiliar para impresión de MATXF
MATRH	Matriz de resultados de presiones adimensionales variando RKH y Y_D
MATH	Matriz auxiliar para impresión de MATRH

Subrutina ESCTI

Continúa con la misma nomenclatura del programa principal.

Se siguen y evaluan las variables del sistema de dibujo CALCOMP

MATN	Matriz de resultados de presión adimensional variando RN y X_D
MATXF	Matriz de resultados de presión adimensional variando RXF y X_D
MATRH	Matriz de resultados de presión adimensional variando RKH y X_D
MATQN	Matriz de resultados de gasto adimensional variando RN y X_D
MATQF	Matriz de resultados de gasto adimensional variando RXH y X_D
MATQH	Matriz de resultados de gasto adimensional variando RKH y X_D

Símbolo	Descripción
C	Valor inicial del eje
A 1	Puntos del eje a considerar

Subrutinas complementarias para dibujo de gráficas con CALCOMP

Subrutinas SCLOGX, SCLOGY

Continúan con la nomenclatura de ESCTI

X, Y	Coordenadas del punto inicial

Subrutinas SCRU y SNRL

AX, AY	Coordenadas iniciales de los ejes a dibujar
XI	Incremento de coordenadas

Subrutina RNDIB, RXFDIB, RHDIB

X, Y	Coordenadas para empezar a escribir simbología en la gráfica

```
      PROGRAM CPDYF (INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6= OUTPUT,TAPE2=/420,
     1TAPE7)
      DIMENSION XDF(5), TD(130),PD1(130),PD2(130),PDF1(130),PDF2(130),
     1QD1(130),QD2(130),AQD1(130),AQD2(130),VAE1(130),VAE2(130),RD(12),
     2XD(12),YD(12),REN(10),REXF(5),REH(5),A(12),D(12),AS(12),DS(12)
      DATA REN(1),REN(2),REN(3),REN(4)/ 1.0,2.0,5.0,10.0/,RD(1),XD(1),
     1YD(1),TD(1),PD1(1),PD2(1),QD1(1),QD2(1),AQD1(1),AQD2(1),VAE1(1),
     2VAE2(1) / 12*0.0/,ICV,ICV1,ICV2/3*1/,RD(2)/1.00      /,REH(1),
     3REXF(1),REH(4) /2*1.0,10.0/,XDF(1),XDF(2)/0.,0.732 /,REH(3)/5./,
     4XD(2),YD(2)/2*.707107/,PDF1(1),PDF2(1)/2*0.0/,REH(2)/2./
C                NOMENCLATURA
C                PROGRAMA PRINCIPAL
C        TD      TIEMPO ADIMENSIONAL
C        PD1     SOLUCION DE GRINGARTEN Y RAMEY CAPA I
C        PD2     SOLUCION DE GRINGARTEN Y RAMEY CAPA II
C        PDF1    PRESION ADIMENSIONAL CAPA I
C        PDF2    PRESION ADIMENSIONAL CAPA II
C        QD1     GASTO ADIMENSIONAL CAPA I
C        QD2     GASTO ADIMENSIONAL CAPA II
C        RD      RADIO ADIMENSIONAL DEL PUNTO A CONSIDERAR
C        XD      COORDENADA ADIMENSIONAL DEL PUNTO A CONSIDERAR
C        YD      COORDENADA ADIMENSIONAL DEL PUNTO A CONSIDERAR
C        REN     RELACIONES RN A CONSIDERAR
C        REXF    RELACIONES RXF A CONSIDERAR
C        REB     RELACIONES RKH A CONSIDERAR
C        NTD     NUMERO DE INTERVALOR DE TIEMPO
C        IRD     NUMERO EN BASE AL CUAL SE DEFINE LA YD MAXIMA
C        IRD1    NUMERO EN BASE AL CUAL SE DEFINE LA YD INICIAL
C        IRN     NUMERO DE RELACIONES RN
C        IRXF    NUMERO DE RELACIONES RXF
C        IRH     NUMERO DE RELACIONES RKH
C        ITSR    SWISH PARA DEFINIR EL TIPO DE CALCULO
C        IS      NUMERO DE VALORES XD A CONSIDERAR
C        IP      INDICE DE YD
C        JEP     INDICE DE XD
C        KL2     CONTADOR PARA LIMITAR LA IMPRESION DE RESULTADOS
C        ICV     CONTADOR DEL NUMERO DE RN USADOS
C        ICV1    CONTADOR DEL NUMERO DE RXF USADOS
C        ICV2    CONTADOR DEL NUMERO DE RKH USADOS
C        A,D     VARIABLES PARA ENSAYOS
C        AS,DS   VARIABLES PARA ENSAYOS
C        AQD1    VARIABLES PARA ENSAYOS
C        AQD2    VARIABLES PARA ENSAYOS
C        VAE1    VARIABLES PARA ENSAYOS
C        VAE2    VARIABLES PARA ENSAYOS
      REH(5) = 100.
      TD4=ALOG(10.)
      YNVE= 0.0
      READ(5,1) NTD,IRD,IRN,IRXF,ITSR,IRD1,IRH
    1 FORMAT (I3,6I2)
      DO 20 I=3,IRD
      N = I - 2
      RD5 = N
      RD2 = RD5/3.
      RD3 = TD4*RD2
      RD(I) = EXP(RD3)
      XD(I)=RD(I)*(0.7071068)
   20 YD(I)=XD(I)
      DO 21 I=5,IRN
   21 REN(I)= REN(I-1)*10.
      DO 22 I=2,NTD
      N=I-2
      TD2 = -3. + N *0.05
```

```
      TD(I) = EXP(T05)
   22 CONTINUE
      DO 23 I = 2,IRXF
   23 REXF(I)= REXF(I-1)+ 0.5
      DO 24 I=IRD1,IRD
      RH=REH(I)
      RN=REN(I)
      RXF=REXF(I)
      IP = 1
      JFP=1
      NTD1 = NTD
      IF(YD(I).LE.0.0) I5=2
      IF(YD(I).GT.0.0) I5=1
      DO 24 JF =1,I5
      IF(YD(I))53,53,75
   53 XD(JF) = XDF(JF)
      JFP = JF
   75 CONTINUE
      KL2 =0
      YNVE= YNVE+1
      WRITE(6,999) YNVE
  999 FORMAT(1X,F10.5)
      IF (ITSK)50,50,51
C$    CALLS
   50 CALL CPDIA (TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,IP,JFP)
      GO TO 600
   51 CALL CPDIN (TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,A,D,IP,JFP)
  600 CONTINUE
      IF(KL2.LE. 0) GO TO 52
      IF (ITSK)55,55,56
C$    CALLS
   55 CALL CPDIA (TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,IP,JFP)
      GO TO 57
   56 CALL CPDIN (TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,A,D,IP,JFP)
      GO TO 57
   52 DO 14 J=1,NTD1
   14 PD2(J) = PD1(J)
   57 QD1(2) = PD2(2) /(PD1(2) + PD2(2))
      QD2(2) = 1. - QD1(2)
      AQD1(2) = QD1(2)
      AQD2(2) = QD2(2)
      VAE1(2) = QD1(2)* TD(2)
      VAE2(2) = QD2(2)* TD(2)
      PDF1(2) = QD1(2) *PD1(2)
      PDF2(2) = QD2(2) *PD2(2)
      DO 27 L =3,NTD1
      PXQ1 = 0
      PXQ11 = 0.
      PXQ2 = 0
      N = L
      SQD1 = 0.
      LM1 = L - 1
      DO 28 K = 2,LM1
      DTD1 = TD(L) -TD(K-1)
      DTD2 = TD(L) -TD(K)
      PD111=FLAGR(TD,PD1,DTD1,3,NTD1)
      PD112=FLAGR(TD,PD1,DTD2,3,NTD1)
      PD121=FLAGR(TD,PD2,DTD1,3,NTD1)
      PD122=FLAGR(TD,PD2,DTD2,3,NTD1)
      PXQ1 = PXQ1 +QD1(K) *(PD111 - PD112)
      PXQ11 = PXQ11 +  QD1 (K) *(PD121 - PD122)
   28 PXQ2 = PXQ2 +QD2(K) *(PD121 - PD122)
      SQD1 = PXQ11+PXQ1
      DTD = TD(N) - TD(N-1)
      PD1X = FLAGR (TD,PD1,DTD,3,NTD1)
```

```
      QD1(L) = (PD2(L) - SQD1) / (PD11 + PD12)
      QD2(N) = 1. - QD1(N)
      AQD1(N) = AQD1(N-1) +QD1(N)
      AQD2(N) = AQD2(N-1) +QD2(N)
      VAE1(N) = VAE1(N-1) +QD1(N) * DTD
      VAE2(N) = VAE2(N-1) +QD2(N) * DTD
      PDF1(L) = PXQ1 + QD1(L) *PD11
   27 PDF2(L) = PXQ2 + QD2(L) * PD12
      DO 5 ICOR= 2, NTD1
                  PDF1(ICOR) = PDF1(ICOR) / (RH/(RH+1.))
    5 CONTINUE
      KL2 = KL2 +1
      CALL ESCR(IP,JF,YD,XD,RN,RXF,RH,TD,PDF1,PDF2,QD1,QD2,PD1,PD2,AQD1,
     1AQD2,VAE1,VAE2,NTD1)
      IF(YD(IP).LE.0.) GO TO 1000
      IF(YD(IP).GT.0.) GO TO 2000
 1000 CALL ESCT1 (ICV,IRN,ICV1,IRXF,JFP, NTD1, PDF1, TD, QD1,ICV2,IRH,
     1PDF2)
      GO TO 1001
 2000 CALL ESCT(ICV,IRN,ICV1,IRXF,IP,NTD1,PDF1,IFD,IRDI,ICV2,IRH)
 1001 CONTINUE
      IF(KL2.GE.25) GO TO 10
      IF(YD(1))58,58,59
   58 CONTINUE
      ICV = ICV + 1
      IF(ICV-IRN)500,500,501
  500 CONTINUE
      RN = REN(ICV )
      GO TO  600
  501 ICV1= ICV1+1
      IF(ICV1-IRXF)502,502,504
  502 RN = REN(1)
      RXF = REXF(ICV1)
      G O TO 600
  504 ICV2= ICV2 + 1
      IF(ICV2-IRH) 520,520,521
  520 RXF = REXF(1)
      RH = REH(ICV2)
      GO TO 600
  521 RH = REH(1)
      RXF=REXF(1)
      RN=REN(1)
      ICV2 =1
      ICV1 =1
      ICV  =1
      XD(2)= YD(2)
      XD(3)= YD(3)
      XD(4)= YD(4)
      XD(5)= YD(5)
      GO TO 24
   59 ICV = ICV +1
      IF (ICV -IRN) 506,506,507
  506 RN = REN (ICV)
      GO TO 600
  507 ICV1 = ICV1+1
      IF(ICV1 - IRXF)508,508,510
  508 RXF = REXF(ICV1)
      RN = REN(1)
      GO TO 600
  510 ICV2= ICV2 + 1
      IF(ICV2-IRH) 530,530,531
  530 RXF = REXF(1)
      RH = REH(ICV2)
      GO TO 600
  531 RH = REH(1)
```

```
      ICV1 =1
      ICV =1
   24 CONTINUE
   10 STOP
      END
      FUNCTION FLAGR (X,Y,XARG,IDEG,NPTS)
      DIMENSION X(NPTS),Y(NPTS)
C                FUNCION FLAGR INTERPOLA VALORES DE LA FUNCION
C     SIMBOLO             DESCRIPCION
C     X          ARREGLO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C     Y          ARREGLO DE LA VARIABLE FUNCION
C     XARG       VALOR DE X AL QUE SE DESEA CONOCER Y
C     IDEG       GRADO DE INTERPOLACION
C     NPTS       NUMERO DE PUNTOS
      N = IABS (NPTS)
      N1= IDEG + 1
      L = 1
      IF (X(2).GT.X(1)) GO TO 1
      L = 2
    1 GO TO (2,3),L
    2 IF (XARG.LE. X(1)) GO TO 4
      IF (XARG.GE. X(N)) GO TO 5
      GO TO 6
    3 IF (XARG.GE. X(1)) GO TO 4
      IF (XARG.LE. X(N)) GO TO 5
      GO TO 6
    4 FLAGR = Y(1)
      RETURN
    5 FLAGR = Y(N)
      RETURN
    6 GO TO (10,20),L
   10 DO 11 MAX =N1,N
      IF (XARG.LT.X(MAX)) GO TO 12
   11 CONTINUE
   20 DO 21 MAX =N1,N
      IF (XARG.GT. X(MAX)) GO TO 12
   21 CONTINUE
   12 MIN = MAX - IDEG
      FACTOR = 1.
      DO 7 I = MIN,MAX
      IF ( XARG.NE. X(I))GO TO 7
      FLAGR = Y(I)
      RETURN
    7 FACTOR = FACTOR * (XARG - X(I))
      YEST = 0.
      DO 9 I = MIN,MAX
      TERM = Y(I)* FACTOR / (XARG - X(I))
      DO 8 J = MIN,MAX
      IF ( I.NE.J) TERM = TERM /(X(I)- X(J))
    8 CONTINUE
    9 YEST = YEST + TERM
      FLAGR = YEST
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CPDIA(TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,IP,JFP)
      DIMENSION TD(130),YD( 12), XD( 12),PD1(130),PD2(130)
C                 SUBRUTINAS SPDIA   CALCULA LAS SOLUCIONES DE GRINGARTEN Y RAMEY
C                 CONTINUAN CON LA MISMA NOMENCLATURA DEL PROGRAMA PRINCIPAL
      IF(YD(IP).LE.0.0) IP1=JFP
      IF(YD(IP).GT.0.0) IP1=IP
      C1 =  XD(IP1)+ 1.
      C2 =1. - XD(IP1)
      DO 1 I =2,NTD1
       C3 = (4*TD(I))**0.5
      C5 = RN**0.5/RXF
```

```
      C7 = C2 * C5 / C3
      C10 = C6**2
      C11 = C7**2
      IF(XD(IP1).GT.0.0.AND.C11.LT.0.001) GO TO 6
      IF(C11.LT.0.01)GO TO 6
      P = 3.14159
      C14= ((P* TD(I)/RN)**0.5 /2.)*RXF * RH
      C15 = RH* 0.25
      IF(RN-1.) 2,2,3
    2 IF(RXF-1.)4,4,3
    4 IF(RH -1.)5,5,3
C$    CALLS
    5 PD1(I) = C14     * (ERF (C6 ) + ERF (C7 )) + C15      *( C1* EXPF(
     1 C10) + C2 * EXPF (  C11))
      GO TO 1
C$    CALLS
    3 PD2(I) =C14      *(ERF (C6 ) +  ERF (C7 )) + C15      *( C1* EXPF(
     1 C10) + C2 * EXPF (  C11))
      GO TO 1
    6 B1 = TD(I) /RN
      B7 = RH*0.25
      B8 = (C1/RXF)**2.
      B9 = (( XD(IP1) -1.)/RXF)**2.
      IF (RN -1.)21,21,22
   21 IF(RXF -1.)23,23,22
   23 IF(RH  -1.)24,24,22
C$    CALLS
   24 PD1(I) = 0.5 *RH  *(ALOG (B1) + 2.80907) + B7 * (-C2 *ALOG (B9)
     1- C1 *ALOG (B8) )
      GO TO 1
C$    CALLS
   22 PD2(I) = 0.5 *RH  *(ALOG (B1) + 2.80907) + B7 * (-C2 *ALOG (B9)
     1- C1 *ALOG (B8))
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE  CPDIN (TD,YD,XD,RN,RH,RXF,PD2,PD1,NTD1,A,D,IP,JFP)
      DIMENSION TD(130),YD( 12),PD2(130),PD1(130),A(12),D(12),XD(12)
      DIMENSION FUN1(1001),TDH(1001)
C              SUBRUTINAS SPDIN   CALCULA LAS SOLUCIONES DE GRINGARTEN Y RAMEY
C              CONTINUAN CON LA MISMA NOMENCLATURA DEL PROGRAMA PRINCIPAL
      IF(YD(IP).GT.0.0) IP1=IP
      IF(YD(IP).LE.0.0) IP1=JFP
      B4 =XD(IP1)+ 1.
      B5 = 1.       - XD(IP1)
      DO 1 I =2,NTD1
      IF(I.GT.2) GO TO 11
      DIV =300.
      AH = TD(I) / DIV
      TDH(1) = 0.0
      FUN1(1) = 0.0
   11 IDIV1 = DIV + 1
      DO  5 IA=2,IDIV1
      IAM = IA -1
      TDH(IA) = TDH(IAM) + AH
      B2 =(4./RN * TDH(IA))**0.5
      B26 = B4/(B2 *RXF)
      B27 = B5/(B2 * RXF)
      FUN1(IA) = RH* RXF/4. * (3.14159/(RN* TDH(IA)))**0.5
     1*( ERF(B26)+ ERF(B27))
    5 CONTINUE
      IDV2 = DIV - 1
      SUMA = 0.0
      DO 6 IAI=2,IDV2,2
      IAIP = IAI + 1
```

```
    6 CONTINUE
      IDIV = DIV
      IF (RN -1.0)6,8,4
    8 IF (RXF-1.0)9,9,4
    9 PD1(I) = (SUMA + FUNI(1) + FUNI(IDIV1) + 4.*FUNI(IDIV))*(AH/3.)
      PD1(I) = PD1(I-1) + PD1(I)
      GO TO 2
    4 PD2(I) = (SUMA + FUNI(1) + FUNI(IDIV1) + 4.*FUNI(IDIV))*(AH/3.)
      PD2(I) = PD2(I-1) + PD2(I)
    2 AH =TD(I+1) / DIV               -TD(I    ) / DIV
      FUNI(1) = FUNI(IDIV1)
      TDH(1) = TDH(IDIV1)
      IF(TD(I).GT.10.   ) DIV = 600.
      IF(TD(I).GT.100.  ) DIV =1000.
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE  ESCR (IP,JF,YD,XD,RN,RXF,RH,TD,PDF1,PDF2,QD1,QD2,
     1PD1,PD2,AQD1,AQD2,VAE1,VAE2,NTD1)
      DIMENSION YD(12),XD(12),TD(130),PDF1(130),PDF2(130),QD1(130),
     1QD2(130),PD1(130),PD2(130),AQD1(130),AQD2(130),VAE1(130),VAE2(130)
C                SUBRUTINAS ESCR   IMPRIME RESULTADOS INTERMEDIOS  Y FINALES
C                CONTINUAN CON LA MISMA NOMENCLATURA DEL PROGRAMA PRINCIPAL
      IF(YD(IP))5,5,6
    6 WRITE  (6,12)
         WRITE  (6,4)YD(IP),XD(IP),RN,RXF,RH
      WRITE  (6,14)
      WRITE  (6, 7)(TD(K),PDF1(K),PDF2(K),QD1(K),QD2(K),K=1,NTD1)
      WRITE  (6,16)
      WRITE  (6, 8)(TD(K),PD1(K),PD2(K),AQD1(K),AQD2(K),VAE1(K),VAE2(K),
     1K=1,NTD1)
      GO  TO 10
    5 WRITE  (6,12)
      WRITE  (6,4)YD(IP),XD(JF),RN,RXF,RH
      WRITE  (6,14)
      WRITE  (6,7)  (TD(K),PDF1(K),PDF2(K),QD1(K),QD2(K),K=1,NTD1)
      WRITE  (6,16)
      WRITE  (6,8)  (TD(K),PD1(K),PD2(K),AQD1(K),AQD2(K),VAE1(K),VAE2(K),
     1K=1,NTD1)
    4 FORMAT  (10X,5(F10.5,8X))
    7 FORMAT  (10X,5F10.5,/)
    8 FORMAT  (10X,7F12.5,/)
   12 FORMAT(10X,≠     YD      ≠,8X,≠      XD      ≠,8X,≠     RN      ≠,8X,≠    RXF
     1      ≠,8X,≠        RH≠)
   14 FORMAT(10X,≠       TD            PDF1         PDF2          QD1            QD2 ≠)
   16 FORMAT(10X,≠        TD             PD1          PD2               AQD1
     1    AQD2          VAE1          VAE2≠)
   10 RETURN
      END
      FUNCTION EXPF (X)
C                FUNCION EXPF  CALCULA LA FUNCION INTEGRAL EXPONENCIAL
C         SIMBOLO            DESCRIPCION
C         X             EL LIMITE INICIAL DE LA INTEGRAL EXPONENCIAL
      IF(X.LE.-740.)X=-740.
      IF(X.GT.670.) X=670.
      IF (X.GT.60.)GO TO 120
    9 IF (X.LE.2.3)GO TO 100
      ARG = 4./X
      RES =(0.249999999 +ARG*( -0.062498589 + ARG*(0.031208561+ARG
     1*(-0.022951979 +ARG*(0.020412099+ARG*(-0.017555779 +ARG*(0.0117232
     2273 +ARG*(-0.0049362007+ ARG*(0.00094427614))))))))
      RES =  EXP(-X)*ARG*RES
      GO TO 130
  100 IF(X.LT.0.) GO TO 120
      IF(X.EQ.0.) GO TO 110
```

```
     1662+X*(0.0016066906+X*(-0.00023148392+X*(2.833759D-05+X*(-3.09960
     24E-6+X*(3.0726221E-07+X*(-2.763583E-08+X*(2.1915699E-09+X*(-1.6826
     3592E-10+X*(1.5796675E-11+X*(-1.0317602E-12))))))))))))))
      GO TO 130
  110 RES = 1.E75
      GO TO 130
  120 RES = 0.0
  130 EXPF = RES
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ESCT (ICV,IRN,ICV1,IRXF,IP,NTD1,PDF1,IRD,IRD1,ICV2,IRH)
      DIMENSION PDF1(130),MATN(11,26, 6),MATXF(11,26, 5),MATRD(11,26),
     1MATRX(11,26),MATRH(11,26,6),MATH(11,26)
      REAL MATN,MATXF,MATRD,MATRX,MATRH,MATH
C                SUBRUTINA ESCT   FORMA MATRICES DE RESULTADOS PARA GRAFICAR EN
C       TRES DIMENSIONES
C                CONTINUA CON LA MISMA NUMENCLATURA DEL PROGRAMA PRINCIPAL
C     SIMBOLO             DESCRIPCION
C     MATN      MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESIONES ADIMENSIONALES VARIANDO RN Y
C     MATRD     MATRIZ AUXILIAR PARA IMPRESION DE MATN
C     MATXF     MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESIONES ADIMENSIONALES VARIANDO RXF
C     MATRX     MATRIZ AUXILIAR PARA IMPRESION DE MATXF
C     MATRH     MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESIONES ADIMENSIONALES VARIANDO RKH
C     MATH      MATRIZ AUXILIAR PARA IMPRESION DE MATRH
      LFN = 5LTAPE2
      IFL = IRD - IRD1 + 1
      IPF = IP + 1 - IRD1
      IF (ICV.GT.IRN) GO TO 5
      DO 20 IG=2,NTD1,5
      IMX= (IG -2)/5 + 1
   20 MATN(IPF,IMX,ICV) = PDF1(IG) * 100.
      GO TO 100
    5 CONTINUE
      IF(ICV1.GT.IRXF) GO TO 80
      DO 30 IG=2,NTD1,5
      IMX= (IG -2)/5 + 1
   30 MATXF(IPF,IMX,ICV1) = PDF1(IG) * 100.
      GO TO 100
   80 CONTINUE
      DO 82 IG=2,NTD1,5
      IMX = (IG- 2)/5 +1
   82 MATRH(IPF,IMX,ICV2) = PDF1(IG) * 10
      IF(IP.EQ.IRD) GO TO 40
      GO TO 100
   40 CONTINUE
      DO 1 IPFA = 1,IFL
      DO 1 IMX=1,26
      MATRH(IPFA,IMX,1)= MATN(IPFA,IMX,1)
    1 MATXF(IPFA,IMX,1)= MATN(IPFA,IMX,1)
      IF(IRN .EQ.1) GO TO 60
      DO 52 K=1,IRN
      DO 52 I=1,IFL
      DO 53 J=1,26
   53 MATRD (I,J) = MATN (I,J,K)
      WRITE (2,10) (MATRD(I,J),J=1,26)
   52 CONTINUE
   60 CONTINUE
      IF(IRXF.EQ.1) GO TO 70
      DO 55 K=1,IRXF
      DO 55 I=1,IFL
      DO 56 J=1,26
   56 MATRX (I,J) = MATXF(I,J,K)
      WRITE (2,10) (MATRX(I,J),J=1,26)
   55 CONTINUE
   70 CONTINUE
```

```
      DO 83 K=1,IKH
      DO 83 I=1,IFL
      DO 84 J=1,26
   84 MATH(I,J) = MATKH(I,J,K)
      WRITE(2,10) (MATH(I,J),J=1,26)
   83 CONTINUE
   87 CONTINUE
   10  FORMAT(1X,26F10.6)
  100 RETURN
      END
      SUBROUTINE ESCTI (ICV,IRN,ICV1,IRXF, JEP, NTD1, PDF1 , TP, QD1,
     1 ICV2,IKH,PDF2)
      DIMENSION PDF1(130),MATN(2,26,6), MATXF(2,26,5),TP(130),QD1(130),
     1AY(28),TP1(28),MATQN(2,26,6), MATQF(2,26,5), IBUF(1000),
     1 MATKH(2,26,5),MATQH(2,26,5),PDF2(130),MATN2(2,26,6),MTXF2(2,26,5)
     1,MTKH2(2,26,5)
      INTEGER A1
      REAL MATN,MATXF,MATQN,MATQF,MTN,MTXF,MATKH,MATQH,MATN2,MTXF2,
     1 MTKH2
C               SUBRUTINA ESCTI FORMA MATRICES DE RESULTADOS Y PREPARA GRAFICAS
C        DE DOS DIMENSIONES
C               CONTINUA CON LA MISMA NOMENCLATURA DEL PROGRAMA PRINCIPAL
C       SIMBOLO          DESCRIPCION
C       MATN    MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESION ADIMENSIONAL VARIANDO RN Y XD
C       MATXF   MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESION ADIMENSIONAL VARIANDO RXF Y XD
C       MATKH   MATRIZ DE RESULTADOS DE PRESION ADIMENSIONAL VARIANDO RKH Y XD
C       MATQN   MATRIZ DE RESULTADOS DE GASTO ADIMENSIONAL VARIANDO RN Y XD
C       MATQF   MATRIZ DE RESULTADOS DE GASTO ADIMENSIONAL VARIANDO RXH Y XD
C       MATQH   MATRIZ DE RESULTADOS DE GASTO ADIMENSIONAL VARIANDO RKH Y XD
C       C       VALOR INICIAL DEL EJE
C       A 1     PUNTOS DEL EJE A CONSIDERAR
C               SUBRUTINAS COMPLEMENTARIAS PARA DIBUJO DE GRAFICAS CON CALCOMP
C               SUBRUTINAS SCLOGX SCLOGY
C               SUBRUTINAS SCRU Y SNRL  SRCA  LINE
C               SUBRUTINA RNDIE RXFDIB RHLIB
C               SE SIGUEN Y EVALUAN LAS VARIABLES DEL SISTEMA DE DIBUJO CALCOMP
      IF(ICV.GT.IRN) GO TO 5
      DO 20 IG=2,NTD1,5
      IMX = (IG - 2)/5 +1
      MATN(JEP,IMX,ICV) = PDF1(IG)
         MATN2 (JEP,IMX,ICV) = PDF2(IG)
      MATQN(JEP,IMX,ICV) = QD1(IG)
   20 CONTINUE
      GO TO 100
    5 CONTINUE
      IF(ICV1.GT.IRXF) GO TO 51
      DO 30 IG=2,NTD1,5
      IMX = (IG - 2)/5 +1
      MATXF(JEP,IMX,ICV1)=PDF1(IG)
         MTXF2 (JEP,IMX,ICV1)= PDF2(IG)
      MATQF(JEP,IMX,ICV1)= QD1(IG)
   30 CONTINUE
      GO TO 100
   51 CONTINUE
      DO 52 IG=2,NTD1,5
      IMX = (IG-2)/5 +1
      MATKH(JEP,IMX,ICV2) = PDF1(IG)
         MTKH2 (JEP,IMX,ICV2)= PDF2(IG)
      MATQH(JEP,IMX,ICV2) =  QD1(IG)
   52 CONTINUE
      IF(ICV2.EQ.IKH .AND.JEP.EQ.2) GO TO 40
      GO TO 100
   40 CONTINUE
      DO 10 IG=2,NTD1,5
      IMX = (IG - 2)/5 +1
```

```
      TP (IMX) = ALOG10(TP(IG)) + 3.
   10 CONTINUE
      TP2 = TP1(7)
      TP3 = TP1(8)
      TP4 = TP1(9)
      TP5 = TP1(10)
      DO 800 I=1,2
      DO 800 J=1,26
      MATRH(I,J,1) =MATN(I,J,1)
      MATQH(I,J,1) =MATQN(I,J,1)
      MATXF(I,J,1) = MATN(I,J,1)
      MTRH2(I,J,1) = MATN2(I,J,1)
      MTXF2(I,J,1) = MATN2(I,J,1)
  800 MATQF(I,J,1) = MATQN(I,J,1)
      WRITE (6,15)
      WRITE(6,12)(((MATN (I,J,K),J=1,26),K=1,IRN),I=1,2)
      WRITE (6,16)
      WRITE(6,12)(((MATXF(I,J,K),J=1,26),K=1,IRXF),I=1,2)
      WRITE (6,19)
      WRITE(6,12)(((MATRH(I,J,K),J=1,26),K=1,IRH),I=1,2)
      WRITE (6,17)
      WRITE(6,12)(((MATQN(I,J,K),J=1,26),K=1,IRN),I=1,2)
      WRITE (6,18)
      WRITE(6,12)(((MATQF(I,J,K),J=1,26),K=1,IRXF),I=1,2)
      WRITE (6,24)
      WRITE(6,12)(((MATQH(I,J,K),J=1,26),K=1,IRH),I=1,2)
   12 FORMAT(1X,2(10(2( 13F10.7,/))))
   15 FORMAT(1X,7HMATN = )
   16 FORMAT(1X,7HMATXF= )
   17 FORMAT(1X,7HMATQN= )
   18 FORMAT(1X,7HMATQF= )
   19 FORMAT(1X,7HMATRH= )
   24 FORMAT(1X,7HMATQH= )
      CALL PLOTS(IBUF,1000,7)
      CALL FACTOR(0.3937)
      CALL PLOT (2.,50.,-3)
      DO  70 K=1,2
      C=1.E-03
      A1=57.
      E= 40.
      E1 =26.66666666
      CALL SCLOGX(A1,C,E,E1)
      C = 0.001
      A1 = 39.
      CALL SCLOGY(A1,C,E,E1)
      CALL SYMBOL (E/2.-9.0, E1 + 1.2, 0.71,25HCOMPORTAMIENTO DE PRESION
     1,0.,25)
      CALL SYMBOL (E/2.-3.6, E1 , 0.71,10HCURVA TIPO,0.,10)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (0.,-3.,0.36, 9HFIG.    .-,0.0,9)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.36,60HDECREMENTO DE PRESION DE UN POZO CO
     1N FRACTURA VERTICAL EN UN,0.0,60)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-3.5,0.36,65H YACIMIENTO ESTRATIFICADO INFINITO
     1SIN FLUJO CRUZ/DO CUANDO VARIA,0.0, 65)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.0,0.36,69H ESPESOR, LONGITUD DE FRACTURA O PO
     1ROSIDAD Y/O COMPRESIBILIDAD DE UNA,0.0,69)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.5,0.36,64H CAPA A LA OTRA DEL SISTEMA  DURANT
     1E LOS TRES PERIODOS DE FLUJO.,0.0, 64)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL PLOT (8.5,5.5,3)
      CALL PLOT (11.0,    5.5,2)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL ANDIB(8.5       ,4.0        ,E,E1,1)
      CALL RXFDIB(8.5      ,4.5        ,E,E1,2)
      CALL RHDIB( 8.5      , 5.0       ,E,E1,2)
```

```
      DO  60 J=1,1,N
      TP(26) = 0.0
      TP(27) = 6./E
      DO  50 I=1,25
      MTN= MATN(K,I,J)
   50 AY(I) = ALOG10(MTN)
      AY(26) = -3.
      AY(27) = 0.15
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
   60 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT (16.5,    5.5,3)
      CALL DASHP(19.5,5.5,0.5)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB(16.5     ,5.0      ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(16.5     ,4.0      ,E,E1,1)
      CALL  RHDIB(16.5     , 4.5     ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 160 J=1,IRXF
      DO 150 I=1,25
      MTXF = MATXF(K,I,J)
      AY(I) = ALOG10(MTXF)
  150 CONTINUE
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
  160 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT (24.5,   5.5,3)
      CALL DASHP(27.5,5.5,0.1)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL   RNDIB( 24.5    , 5.0      ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(24.5     ,4.5      ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(24.5     ,4.0      ,E,E1,1)
      IES = 0
      DO  65 J=1,IRH
      DO  55 I=1,25
   55 AY(I) = ALOG10(MATRH(K,I,J))
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
   65 IES = IES + 1
      IF(K.EQ.1)
     1     CALL SYMBOL (E/2.-3.5,E1-1.,0.5 ,14HFLUJO UNIFORME,0.,14)
      IF(K.EQ.2)
     1     CALL SYMBOL (E/2.-4.5,E1-1.,0.5 ,17HCONDUCT. INFINITA,0.,17)
      CALL RECT( -4.0,-5.5,34.7,48.,0.,3)
      IF (K.EQ.2) GO TO 110
      CALL PLOT (0.,-40.,-3)
  110 CONTINUE
   70 CONTINUE
      CALL PLOT(55.,40.,-3)
      DO 270 K=1,2
      C=1.E-03
      A1=57.
      E = 26.
      E1 =20.
      CALL SCLOGX(A1,C,E,E1)
      CALL SNKL(0.,0.,0.5,21)
      CALL SYMBOL (E/2.-9.0, E1 + 1.2, 0.71,25HCOMPORTAMIENTO DE PRESION
     1,0.,25)
      CALL SYMBOL (E/2.-6.8,E1    ,0.71,19HFLUJO PSEUDO-RADIAL,0.,19)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (0.,-3.,0.36, 9HFIG.    .-,0.0,9)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.36,60HDECREMENTO DE PRESION DE UN POZO CO
     1N FRACTURA VERTICAL EN UN,0.0,60)
```

```
     1SIN FLUJO CRUZADO CUANDO VARIA,0.0, 65)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.0,0.36,69H ESPESOR, LONGITUD DE FRACTURA O PO
     1ROSIDAD Y/O COMPRESIBILIDAD DE UNA,0.0,69)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.5,0.36,71H CAPA A LA OTRA DEL SISTEMA  DURANT
     1E EL PERIODO DE FLUJO PSEUDO-RADIAL.,0.0,71)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL PLOT ( 1.,E1-2.5,3)
      CALL PLOT (3.5,E1-2.5,2)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( 1.       ,E1-4.     ,E,E1,1)
      CALL RXFDIB(1.        ,E1-3.0    ,E,E1,2)
      CALL  RHDIB(  1.0     ,E1- 3.0   ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 260 J=1,IRN
      TP(26) = 0.0
      TP(27) = 6./26.
      DO 250 I=1,25
  250 AY(I) = MATN (K,I,J)
      AY(26) = 0.0
      AY(27) = 0.5
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
  260 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT ( 9.,E1-2.5,3)
      CALL DASHP(11.5,E1-2.5,0.5)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( 9.0      ,E1-3.     ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(9.0       ,E1-4.0    ,E,E1,1)
      CALL  RHDIB(  9.0     ,E1- 3.5   ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 460 J=1,IRXF
      DO 450 I=1,25
  450 AY(I) = MATXF(K,I,J)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
  460 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(3)
      CALL PLOT (17.,E1-2.5,3)
      CALL DASHP(19.5,E1-2.5,0.1)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( 17.0    ,E1-3.     ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(17.      ,E1-3.5    ,E,E1,2)
      CALL  RHDIB( 17.0    ,E1- 4.0   ,E,E1,1)
      IES = 0
      DO 265 J=1,IRH
      DO 255 I=1,25
  255 AY(I) = MATRH(K,I,J)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
  265 IES = IES + 1
      IF(K.EQ.1)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-3.5,E1-1.,0.5 ,14HFLUJO UNIFORME,0.,14)
      IF(K.EQ.2)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-4.5,E1-1.,0.5 ,17HCONDUCT. INFINITA,0.,17)
      CALL RECT( -3.5,-5.5,28., 33.,0.,3)
      IF (K.EQ.2) GO TO 113
      CALL PLOT (0.,-35.,-3)
  113 CONTINUE
  270 CONTINUE
      CALL PLOT(40.,35.,-3)
      DO 570 K=1,2
      C=1.E-03
      A1=57.
      E = 26.
```

```
      CALL SCLOGX(1,C,E,E1)
      CALL SNRL(0.,0.,0.05,21)
      CALL SYMBOL (E/2.-8.2, E1 + 1.2, 0.71,23HCOMPORTAMIENTO DE GASTO,
     10.,23)
      CALL SYMBOL (E/2.-5.0, E1 , 0.71,14HDE LA CAPA UNO,0.,14)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (0.,-3.,0.36, 9HFIG.    ,-,0.0,9)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.36,63HCOMPORTAMIENTO DEL GASTO DE UN POZO
     1 CON FRACTURA VERTICAL EN UN,0.0,63)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-3.5,0.36,65H YACIMIENTO ESTRATIFICADO INFINITO
     1SIN FLUJO CRUZADO CUANDO VARIA,0.0, 65)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.0,0.36,69H ESPESOR, LONGITUD DE FRACTURA O PO
     1ROSIDAD Y/O COMPRESIBILIDAD DE UNA,0.0,69)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.5,0.36,64H CAPA A LA OTRA DEL SISTEMA  DURANT
     1E LOS TRES PERIODOS DE FLUJO.,0.0, 64)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL PLOT (E+1.0,E1,3)
      CALL PLOT (E+3.5,E1,2)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( E+1.    ,E1-0.5  ,E,E1,1)
      CALL RXFDIB(E+1.     ,E1-3.0  ,E,E1,2)
      CALL  RHDIB(E+1.0    ,E1- 3.5 ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 560 J=1,IRN
      TP(26) = 0.0
      TP(27) = 6./26.
      DO 550 I=1,25
  550 AY(I) = MATQN(K,I,J)
      AY(26) = 0.0
      AY(27) = 0.05
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,1)
  560 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT (E+1.0,E1-7.,3)
      CALL DASHP (E+3.5,E1- 7.0,.5)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( E+1.    ,E1-10.5 ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(E+1.     ,E1-7.5  ,E,E1,1)
      CALL  RHDIB(E+1.0    ,E1-10.0 ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 360 J=1,IRXF
      DO 350 I=1,25
  350 AY(I) = MATQF(K,I,J)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,2)
  360 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(3)
      CALL PLOT (E+1.0,E1-14.0,3)
      CALL DASHP (E+3.5,E1-14.0,.1)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( E+1.    ,E1-17.5 ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(E+1.     ,E1-17.0 ,E,E1,2)
      CALL  RHDIB(E+1.0    ,E1-14.5 ,E,E1,1)
      IES = 0
      DO 565 J=1,IRH
      DO 555 I=1,25
  555 AY(I) = MATQH(K,I,J)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
      CALL LINE(TP,AY,25,1,1,IES,3)
  565 IES = IES + 1
      IF(K.EQ.1)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-3.5,E1-1.,0.5 ,14HFLUJO UNIFORME,0.,14)
      IF(K.EQ.2)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-4.5,E1-1.,0.5 ,17HCONDUCT. INFINITA,0.,17)
```

```
      IF (K.EQ.2) GO TO 116
      CALL PLOT (0.,-35.,-3)
  116 CONTINUE
  570 CONTINUE
      CALL PLOT(47.,35.,-3)
      DO 670 K=1,2
      E1 = 20.
      CALL SCRCU(0.,0.,0.02,27)
      CALL SNRL(0.,0.,0.025,21)
      CALL SYMBOL (E/2.-9.0, E1 + 1.2, 0.71,25HCOMPORTAMIENTO DE PRESION
     1,0.,25)
      CALL SYMBOL (E/2.-4.7,E1    ,0.71,13HFLUJO LINEAL ,0.,13)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (0.,-3.,0.36, 9HFIG.     .-,0.0,9)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.36,60HDECREMENTO DE PRESION DE UN POZO CO
     1N FRACTURA VERTICAL EN UN,0.0,60)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-3.5,0.36,65H YACIMIENTO ESTRATIFICADO INFINITO
     1SIN FLUJO CRUZADO CUANDO VARIA,0.0, 65)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.0,0.36,69H ESPESOR, LONGITUD DE FRACTURA O PO
     1ROSIDAD Y/O COMPRESIBILIDAD DE UNA,0.0,69)
      CALL SYMBOL ( 0.0,-4.5,0.36,64H CAPA A LA OTRA DEL SISTEMA  DURANT
     1E EL PERIODO DE FLUJO LINEAL.,0.0, 64)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL PLOT (E-3.0,E1,3)
      CALL PLOT (E-0.5,E1,2)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL RNDIB( E-3.     ,E1- 0.5 ,E,E1,1)
      CALL RXFDIB(E-3.0    ,E1- 3.0 ,E,E1,2)
      CALL RHDIB(E-3.0     ,E1- 3.5 ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 660 J=1,IRN
      I5 = 10
      TP1( 7) = TP2
      TP1( 8) = TP3
      TP1( 9) = TP4
      TP1(10) = TP5
      DO 650 I=1,26
      AY(I) = MATN2(K,I,J)
      IF (AY(I).GT.0.5) GO TO 651
  650 CONTINUE
  651 I5 = I - 1
      IF(I5.GT.10) I5= 10
      I6 = I5 + 1
      I7 = I5 + 2
      TP1(I6) = 0.5
      TP1(I7) = E/26.
      AY(I6) = 0.0
      AY(I7) = 0.025
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,1)
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,1)
  660 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT (E-3.0,E1- 7.0,3)
      CALL DASHP (E- 0.5,E1- 7.0,0.5)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( E-3.     ,E1-10.5 ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(E-3.0     ,E1- 7.5 ,E,E1,1)
      CALL  RHDIB(E-3.0     ,E1-10.0 ,E,E1,2)
      IES = 0
      DO 760 J=1,IRXF
      TP1( 7) = TP2
      TP1( 8) = TP3
      TP1( 9) = TP4
      TP1(10) = TP5
      I5 = 10
```

```
      AY(I) = MTXE2(K,I,J)
      IF (AY(I).GT.0.5) GO TO 751
  750 CONTINUE
  751 I5 = I - 1
      IF(I5.GT.10) I5= 10
      I6 = I5 + 1
      I7 = I5 + 2
      TP1(I6) = 0.0
      TP1(I7) = .5/26.
      AY(I6) = 0.0
      AY(I7) = 0.025
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,2)
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,2)
  760 IES = IES + 1
      CALL NEWPEN(3)
      CALL PLOT (E-3.0,E1-14.0,3)
      CALL DASHP (E- 0.5,E1-14.0,0.1)
      CALL PLOT (0.0,0.0,3)
      CALL  RNDIB( E-3.    ,E1-17.5 ,E,E1,2)
      CALL RXFDIB(E-3.0    ,E1-17.0 ,E,E1,2)
      CALL  RHDIB(E-3.0    ,E1-14.5 ,E,E1,1)
      IES = 0
      DO 665 J=1,IRH
      I5 = 10
      TP1( 7) = TP2
      TP1( 8) = TP3
      TP1( 9) = TP4
      TP1(10) = TP5
      DO 655 I=1,26
      AY(I) = MTRH2(K,I,J)
      IF (AY(I).GT.0.5) GO TO 656
  655 CONTINUE
  656 I5 = I - 1
      IF(I5.GT.10) I5= 10
      I6 = I5 + 1
      I7 = I5 + 2
      TP1(I6) = 0.0
      TP1(I7) = .5/26.
      AY(I6) = 0.0
      AY(I7) = 0.025
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,3)
      CALL LINE(TP1,AY,I5,1,1,IES,3)
  665 IES = IES + 1
      IF(K.EQ.1)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-3.5,E1-1.,0.5 ,14HFLUJO UNIFORME,0.,14)
      IF(K.EQ.2)
     1    CALL SYMBOL (E/2.-4.5,E1-1.,0.5 ,17HCONDUCT. INFINITA,0.,17)
      CALL RECT( -3.5,-5.5,28., 33.,0.,3)
      IF (K.EQ.2) GO TO 119
      CALL PLOT (0.,-35.,-3)
  119 CONTINUE
  670 CONTINUE
      CALL PLOT(60.,0.0,999)
  100 RETURN
      END
      SUBROUTINE SCLOGX(A1,C,F,E1)
      DIMENSION Z(75),X(600),Y(600)
      INTEGER A1
C                 LA SUBRUTINA DIBUJA EL EJE X EN ESCALA LOG CON ANOTACIONES Y LAS
C                 LINEAS VERTICALES DE LA CUADRICULA
C                 CONTINUAN CON LA NOMENCLATURA DE ESCT1
C       SIMBOLO          DESCRIPCION
C                X Y COORDENADAS PARA MOVER LA PLUMA
C       A 1       PUNTOS DEL EJE A CONSIDERAR
C       C         VALOR INICIAL DEL EJE
```

```
      NCLOS = (L1 - 3)/9
      N =-1
      Z(1) = 0
      DO 3 I=2,IED,9
      Z(I)   = 1.*10.**N
      Z(I+1)= 2.*10.**N
      Z(I+2)= 3.*10.**N
      Z(I+3)= 4.*10.**N
      Z(I+4)= 5.*10.**N
      Z(I+5)= 6.*10.**N
      Z(I+6)= 7.*10.**N
      Z(I+7)= 8.*10.**N
      Z(I+8)= 9.*10.**N
    3 N = N+ 1
      X(1) = 1
      I = 1
      DO 23 M = 11,IED,9
      J2 = M + 2
      DO 24 J = M,J2
      J3 = M - 9
      J5 =J3 + 4
      I = I + 1
      DO 21 L =J3,J5
      X(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   21 CONTINUE
      X(I) = Z(J) + Z(KIL)
      J6 =J5 + 1
      I = I + 1
      DO 22 L = J6,M
      X(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   22 CONTINUE
      X(I) = Z(J) + Z(KIL)
   24 CONTINUE
      MM3 = M + 3
      MM5 = M + 5
      MM6 = M + 6
      MM8 = M + 8
      DO 26 J=MM3,MM5
      J3 = M - 8
      I = I + 1
      DO 27 L = J3,M,2
      X(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   27 CONTINUE
      X(I) = Z(J) + Z(KIL)
   26 CONTINUE
      DO 29 J = MM6,MM8
      J3 = M - 5
      I = I + 1
      DO 30 L=J3,M,5
      X(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   30 CONTINUE
      X(I) = Z(J) + Z(KIL)
   29 CONTINUE
   23 CONTINUE
      ACLOS = NCLOS
      Z(75) = ACLOS/E
      IED =           63* NCLOS + 1
```

```
      Y(I) = 0.0
    4 X(I) = ALOG10(X(I)) /Z(75)
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      DO 10 I =2,IED,2
      CALL PLOT (X(I  ),0.,3)
      CALL  PLOT(X(I),E1,2)
      IF(I+1.GT.IED) GO TO 10
      CALL PLOT (X(I+1),E1 ,3)
      CALL  PLOT(X(I+1),0.0,2)
   10 CONTINUE
      CALL NEWPEN(1)
      CALL PLOT (X(1),0.0,3)
      CALL PLOT (X(1),E1 ,2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      N=0
      DO 5 IA=1,IED,63
      CALL NUMBER(X(IA)-0.5,-0.6,0.36,  10.     ,0.,-1)
      D = ALOG10(C)
      CALL NUMBER(  999.,-0.6,0.18,D+N,0.,-1)
      DO 11 IB=2,9
      BI = IB
      X(IB) = X(IA) + ALOG10(BI) /Z(75)
      IF(X(IB).GT.E) GOTO 12
      CALL NUMBER(X(IB) +.05,-.23,0.18,BI,0.0,-1)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
    5 N = N + 1
      NCHAR = 20
      BX= E/2.- NCHAR/2. *0.533 -3.
      CALL SYMBOL(BX,-1.8,0.533,20HTIEMPO  ADIMENSIONAL,0.,20)
      BX = BX + NCHAR * 0.533 + 0.6
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL  (999.0,-1.68  ,0.4,            14H T = 0.000264T,0.0,14)
      CALL SYMBOL  (BX    ,-2.22  ,0.4,           12H       OU  X ,0.0,12)
      CALL SYMBOL  (BX+3.6,-2.32 ,0.2  ,4HT   F,0.0,4)
      CALL SYMBOL   (BX+4.4,-1.92 , 0.2,  1H2,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL SYMBOL  (BX    ,-2.22  ,0.4,           12H       / C    ,0.0,12)
      CALL SYMBOL  (BX+.1,-1.6    ,0.2 , 1HD,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL  (999., -1.9 ,  0.2,  1HX,0.0,1)
      CALL SYMBOL  (999., -2.0 ,  0.2,  1HF,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,0.500, 1)
      CALL SYMBOL  (BX+1.2,-1.9  , 0.4, 18H------------------,0.0,18)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SCLOGY(A1,C,E,F1)
      DIMENSION Z(75),X(600),Y(600)
      INTEGER A1
C              LA SUBRUTINA DIBUJA EL EJE Y EN ESCALA LOGARITMICA CON
C              ANOTACIONES Y LAS LINEAS HORIZONTALES DE LA CUADRICULA
C              CONTINUAN CON LA NOMENCLATURA DE ESCT1
C      SIMBOLO              DESCRIPCION
C      X  Y            COORDENADAS PARA MOVER LA PLUMA
C      C          VALOR INICIAL DEL EJE
C      A 1        PUNTOS DEL EJE A CONSIDERAR
      IED = A1 +7
      NCLOS = (A1 - 3)/9
      N =-1
      Z(1) = 0
      DO 3 I=2,IED,9
      Z(I)   = 1.*10.**N
      Z(I+1)= 2.*10.**N
```

```
      Z(I+3)= 4.*10.**N
      Z(I+4)= 5.*10.**N
      Z(I+5)= 6.*10.**N
      Z(I+6)= 7.*10.**N
      Z(I+7)= 8.*10.**N
      Z(I+8)= 9.*10.**N
    3 N = N+ 1
      Y(1) = 1
      I = 1
      DO 23 M = 11,IED,9
      J2 = M + 2
      DO 24 J = M,J2
      J3 = M - 9
      J5 =J3 + 4
      I = I + 1
      DO 21 L =J3,J5
      Y(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   21 CONTINUE
      Y(I) = Z(J) + Z(KIL)
      J6 =J5 + 1
      I = I + 1
      DO 22 L = J6,M
      Y(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   22 CONTINUE
      Y(I) = Z(J) + Z(KIL)
   24 CONTINUE
      MM3 = M + 3
      MM5 = M + 5
      MM6 = M + 6
      MM8 = M + 8
      DO 26 J=MM3,MM5
      J3 = M - 8
      I = I + 1
      DO 27 L = J3,M,2
      Y(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   27 CONTINUE
      Y(I) = Z(J) + Z(KIL)
   26 CONTINUE
      DO 29 J = MM6,MM6
      J3 = M - 5
      I = I + 1
      DO 30 L=J3,M,5
      Y(I) = Z(J) + Z(L)
      I = I + 1
      KIL = L
   30 CONTINUE
      Y(I) = Z(J) + Z(KIL)
   29 CONTINUE
   23 CONTINUE
      ACLOS = NCLOS
      Z(75) = ACLOS/E1
      IED =              63* NCLOS + 1
      DO 4 I=1,IED
      X(I) = 0.0
    4 Y(I) = ALOG10(Y(I)) /Z(75)
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      DO 10 I =2,IED,2
      CALL PLOT ( 0.,Y(I   ),3)
```

```
      IF(I+1.GT.IED) GO TO 10
      CALL PLOT (E  ,Y(I+1),3)
      CALL  PLOT(0.,Y(I+1),2)
   10 CONTINUE
      CALL NEWPEN(1)
      CALL PLOT (0.0,Y(1),3)
      CALL PLOT (E  ,Y(1),2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      N=0
      DO 5 IA=1,IED,63
      CALL NUMBER(-1.5,Y(IA)   ,0.36,  10.     ,0.,-1)
      D = ALOG10(C)
      CALL NUMBER(999.,Y(IA)+0.3,0.18,D+N,0.,-1)
      DO 11 IB=2,9
      BI = IB
      Y(IB) = Y(IA) + ALOG10(BI) /Z(75)
      IF(Y(IB).GT.E1)GOTO 12
      CALL NUMBER(-.23,Y(IB)+0.05,0.18,BI,0.0,-1)
   12 CONTINUE
   11 CONTINUE
    5 N = N + 1
      NCHAR = 20
      BY=E1/2.- NCHAR/2. *0.533 -3.8
      CALL SYMBOL(-2.7,BY ,0.533,21HPRESION  ADIMENSIONAL,90.,21)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.40 , 2H P, 90.0,2)
      CALL SYMBOL (-2.6 ,999.,0.2 , 1H0,  90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.7 ,999.,0.4 , 1H=,  90.0,1)
         BY = BY + NCHAR * 0.533 +1.4
      CALL SYMBOL (-3.03,BY    ,.4 ,12H          P -P, 90.0,12)
      CALL SYMBOL (-2.40,BY    ,.4 ,15H          141.2  Q,90.0,15)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (-3.03,BY+.6,.4 , 2H K,90.0,2)
      CALL SYMBOL (999.,BY+.6,0.4 , 4H   H,90.0,4)
      CALL SYMBOL (-2.40,BY+.6,.4 , 5H  U,90.0,5)
      CALL SYMBOL (-2.5 ,BY  ,0.6 , 4H ( ), 90.0,4)
      CALL SYMBOL (-2.5,BY+2.2,.2 , 1H1,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.3,BY+5.2,.2 , 1HW,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.93 ,BY+3.6,.2,1HI,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.93,BY+4.8,.2, 2HWF,90.0,2)
      CALL SYMBOL (-2.40,BY    ,.4 ,13H             O,  90.0,13)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,0.500, 1)
      CALL SYMBOL (-3.3,BY+0.8,.4 , 4H----,90.0,4)
      CALL SYMBOL (-2.7,BY+0.8,.4 , 5H-----, 90.0,5)
      CALL SYMBOL (-2.7,BY+2.8,.4 ,12H------------,90.0,12)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SCRCU (AX  , AY ,XI,IED)
      DIMENSION X(30),Y(30)
C               LA SUBRUTINA DIBUJA EL EJE X EN ESCALA NATURAL CON ANOTACIONES
C               Y LAS LINEAS VERTICALES DE LA CUADRICULA
C               CONTINUAN CON LA NOMENCLATURA DE ESCTI
C     SIMBOLO              DESCRIPCION
C     AX AY     COORDENADAS INICIALES DE LOS EJES A DIBUJAR
C     XI        INCREMENTO DE COORDENADAS
      X(1) = AX
      Y(1) = AY
      DO 1 I=2,IED
      X(I) = I -1.
    1 Y(I) = 0.0
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      DO 10 I =2,IED,2
      CALL PLOT (X(I  ),0.,3)
      CALL PLOT (X(I),20.,2)
```

```
      CALL PLOT (X(I+1),20.,3)
      CALL PLOT (X(I+1),0.0,2)
   10 CONTINUE
      CALL NEWPEN(1)
      CALL PLOT (X(1),0.0,3)
      CALL PLOT (X(1),20.,2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      DO 5 IA=1,IED,2
      XIA2 = X(IA) *X1
    5 CALL NUMBER (X(IA)-0.4,-0.5,0.36,    XIA2     ,0.,2)
      NCHAR = 20
      BX= 13. - NCHAR/2. *0.533 - 4.5
      CALL SRCA(BX,-1.7,0.5333,20.)
      CALL SYMBOL(BX,-1.7,0.533,20HTIEMPO  ADIMENSIONAL,0.,20)
      BX1 = BX + 1.6 + NCHAR * .533
      CALL SRCA (BX1, -2.0,0.7,1.5)
      BX1 = 3.6 + BX1
      CALL SRCA (BX1, -2.22,1.0,5.0)
      BX = BX + NCHAR * 0.533
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL  (BX   ,-1.68  ,0.4, 22H     T     = 0.000264T,0.0,22)
      CALL SYMBOL  (BX   ,-2.22  ,0.4, 20H                 OU  X ,0.0,20)
      CALL SYMBOL  (BX+6.8,-2.32 ,0.2  ,4HT   F,0.0,4)
      CALL SYMBOL  (BX+7.6,-1.92 , 0.2,  1H2,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      CALL SYMBOL  (BX   ,-2.22  ,0.4, 20H                 / C   ,0.0,20)
      CALL SYMBOL  (BX+2.,-1.8   ,0.2 , 1HO,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL  (999., -1.9 ,  0.2,  1HX,0.0,1)
      CALL SYMBOL  (999., -2.0 ,  0.2,  1HF,0.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,0.667, 1)
      CALL SYMBOL  (BX+5.2,-1.9  , 0.4, 14H--------------,0.0,14)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SNRL( AX , AY  ,Y1,IED)
      DIMENSION  X(23), Y(23)
C           LA SUBRUTINA DIBUJA EL EJE Y EN ESCALA NATURAL CON ANOTACIONES Y
C           LAS LINEAS HORIZONTALES DE LA CUADRICULA
C           CONTINUAR CON LA NOMENCLATURA DE ESCT1
C     SIMBOLO          DESCRIPCION
C     AX  AY    COORDENADAS INICIALES DE LOS EJES A DIBUJAR
C     X1        INCREMENTO DE COORDENADAS
      X(1) = AX
      Y(1) = AY
      DO 1 I=2,IED
      A = I -1
      X(I) = X(1)
      Y(I) = Y(1) + A
    1 CONTINUE
      CALL NEWPEN(2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      DO 10 I =2,IED,2
      CALL PLOT ( 0.,Y(I   ),3)
      CALL PLOT (26.,Y(I),2)
      IF(I+1.GT.IED) GO TO 10
      CALL PLOT (26.,Y(I+1),3)
      CALL PLOT (0.0,Y(I+1),2)
   10 CONTINUE
      CALL NEWPEN(1)
      CALL PLOT (0.0,Y(1),3)
      CALL PLOT (26.,Y(1),2)
      CALL PLOT(0.,0.,3)
      ESC = (Y(IED) - Y(1))/(20. * Y1)
      DO 5 I=1,IED,2
```

```
    5 CALL NUMBER (-1.5 ,Y(1), 0.30,YM1,0.,2)
      BY = 10.- 21.*0.533/2. - 3.8
      NCHAR = 21
      IF (Y1.EQ.0.05) GO TO 3
      CALL SYMBOL (-2.2 ,BY,0.533, 21HPRESION  ADIMENSIONAL,90.,21)
      CALL SYMBOL (999.,999.,0.40 , 2H P, 90.0,2)
      CALL SYMBOL (-2.1 ,999.,0.2 , 1HD,   90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.2 ,999.,0.4 , 1H=,   90.0,1)
          BY = BY + NCHAR * 0.533 +1.4
      CALL SYMBOL (-2.53,BY   ,.4 ,12H         P -P, 90.0,12)
      CALL SYMBOL (-1.90,BY   ,.4 ,15H         141.2  B,90.0,15)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 ,  -1)
      CALL SYMBOL (-2.53,BY+.6,.4 , 2H K,90.0,2)
      CALL SYMBOL (999.,BY+.6,0.4 , 4H   H,90.0,4)
      CALL SYMBOL (-1.90,BY+.6,.4 , 3H  U,90.0,3)
      CALL SYMBOL (-2.1 ,BY  ,0.6 , 4H ( ), 90.0,4)
      CALL SYMBOL (-2.0,BY+2.2,.2 , 1H1,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-1.8,BY+5.2,.2 , 1HW,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.53 ,BY+3.6,.2,1HI,90.0,1)
      CALL SYMBOL (-2.53,BY+4.8,.2, 2HWF,90.0,2)
      CALL SYMBOL (-1.90,BY    ,.4 ,13H            Q,  90.0,13)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,0.500, 1)
      IF (Y1.GT.0.025)
     1CALL SYMBOL (-2.8,BY+0.8,.4 , 4H----,90.0,4)
      CALL SYMBOL (-2.2,BY+0.8,.4 , 5H-----, 90.0,5)
      CALL SYMBOL (-2.2,BY+2.8,.4 ,15H---------------,90.0,15)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
      GO TO 4
    3 CALL SYMBOL(- 2.2, BY,0.533,19HGASTO  ADIMENSIONAL,90.,19)
      BY = BY + NCHAR * 0.533 +1.0
      CALL SYMBOL (-2.2,BY, 0.4, 15H              B,90.0,15)
      CALL SYMBOL (-2.1,BY+0.8,0.2,25HD                       ,90.0,25)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-999.0,999.0,1.0 , -1)
      CALL SYMBOL (-2.2,BY, 0.4,16H Q = Q (T) / Q  ,90.0,16)
      CALL SYMBOL (-2.1,BY+0.7,0.2,25H      1                W,90.0,25)
      CALL SYMBOL (-2.0,BY+1.0,0.2, 1H1,90.0,1)
      CALL SYMBOL (1.0,0.0,-1.0,999.0,1.0,1)
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE ANDIB(X,Y,E,E1,LF)
      DIMENSION B(6)
C               LA SUBRUTINA ESCRIBE LOS LETREROS QUE IDENTIFICAN A LA GRAFICA Y
C               LA SIMBOLOGIA DE LAS CURVAS
C     SIMBOLO              DESCRIPCION
C     X   Y      COORDENADAS PARA EMPEZAR A ESCRIBIR SIMBOLOGIA EN LA GRAFICA
      IF(LF.EQ.2) GO TO 2
      B(1)= 1.
      B(2)=2.
      B(3)= 5.
      B(4)= 10.
      B(5)= 100.
      B(6)= 1000.
      DO 1 I=1,5
      I2 = I-1
      A=Y -I2*0.5 + 0.12
      CALL SYMBOL(X,A,0.24,I2,0.,-1)
      A = A - 0.12
      CALL SYMBOL(999.,A,0.24,7HN1/N2 =,0.,7)
      CALL NUMBER(999.,A,0.24,B(I),0.0,0)
    1 CONTINUE
      GO TO 4
    2 CONTINUE
      CALL SYMBOL(X,Y,  0.24,9HN1/N2 = 1,0.,9)
    4 CONTINUE
```

```
      END
      SUBROUTINE RXFD1B(X,Y,E,E1,LF)
      DIMENSION B(5)
C             LA SUBRUTINA ESCRIBE LOS LETREROS QUE IDENTIFICAN A LA GRAFICA
C             LA SIMBOLOGIA DE LAS CURVAS
C     SIMBOLO           DESCRIPCION
C     X  Y      COORDENADAS PARA EMPEZAR A ESCRIBIR SIMBOLOGIA EN LA GRAFICA
      IF(LF.EQ.2) GO TO 2
      B(1) =1.
      B(2)= 1.5
      B(3)= 2.0
      B(4)= 2.5
      B(5) = 3
      DO 1 I=1,5
      I2=I-1
      A=Y - I2*0.5+ .12
      CALL SYMBOL (X,A,0.24,I2,0.,-1)
      A = A - 0.12
      CALL SYMBOL (999.,A,0.24,9HXF1/XF2 =,0.0,9)
      CALL NUMBER (999.,A,0.24,B(I),0.0,1)
    1 CONTINUE
      GO TO 4
    2 CONTINUE
      CALL SYMBOL(X,Y, 0.24,11HXF1/XF2 = 1,0.,11)
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RHD16(X,Y,E,E1,LF)
      DIMENSION B(5)
C             LA SUBRUTINA ESCRIBE LOS LETREROS QUE IDENTIFICAN A LA GRAFICA
C             LA SIMBOLOGIA DE LAS CURVAS
C     SIMBOLO           DESCRIPCION
C     X  Y      COORDENADAS PARA EMPEZAR A ESCRIBIR SIMBOLOGIA EN LA GRAFICA
      IF (LF.GT.1) GO TO 2
      B(1)= 1.
      B(2)=2.
      B(3)= 5.
      B(4)= 10.
      B(5) = 100.
      DO 1 I=1,5
      I2 = I-1
      A=Y -I2*0.5 + 0.12
      CALL SYMBOL(X,A,0.24,I2,0.,-1)
      A = A - 0.12
      CALL SYMBOL(999.,A,0.24,9HKH1/KH2 =,0.,9)
      CALL NUMBER (999.,A,0.24,B(I),0.0,1)
    1 CONTINUE
      GO TO 4
    2 CONTINUE
      IF (LF.EQ.2) CALL SYMBOL (X,Y , 0.24,11HKH1/KH2 = 1,0.0,11)
      IF (LF.EQ.3) CALL SYMBOL (X,Y , 0.24,11HKH1/KH2 =10,0.0,11)
      IF (LF.EQ.4) CALL SYMBOL (X,Y , 0.24,11HKH1/KH2=100,0.0,11)
    4 CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SRCA (XX,YY,AA,PTS)
C             LA SUBRUTINA ESCRIBE EL LETRERO DE RAIZ CUADRADA DEL TIEMPO
C             ADIMENSIONAL
      Y = YY
      X = XX
      A = AA
      A = A + A/5.
      X = X - A
      Y = Y + A/2.
      CALL SYMBOL (X + A/8. ,Y,A/8.,1H2,0.0,1)
```

```
      X = X + A/4.
      Y = Y - A/2.
      CALL PLOT (X,Y,2)
      X = X + A/4.
      Y = Y + A
      CALL PLOT (X,Y,2)
      X = X + PTS * A * 0.8333 + A
      CALL PLOT (X,Y,2)
      CALL PLOT (0.,0.,3)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE LINE (XARRAY,YARRAY,NPTS,INC,LINTYP,INTEQ,L12)
      DIMENSION  XARRAY(1) ,YARRAY(1)
C     LA SUBRRUTINA DIBUJA LAS CURVAS
      LMIN = NPTS*INC+1
      LDX  = LMIN+INC
      NL   = LMIN-INC
      FIRSTX = XARRAY(LMIN)
      DELTAX = XARRAY(LDX )
      FIRSTY = YARRAY(LMIN)
      DELTAY = YARRAY(LDX)
      CALL WHERE (XN,YN,DF)
      DF=AMAX1(ABS((XARRAY(1 )-FIRSTX)/DELTAX-XN),
     1           ABS((YARRAY(1 )-FIRSTY)/DELTAY-YN) )
      DL=AMAX1(ABS((XARRAY(NL)-FIRSTX)/DELTAX-XN),
     1           ABS((YARRAY(NL)-FIRSTY)/DELTAY-YN) )
      IPEN = 3
      ICODE = -1
      NT = IABS(LINTYP)
      IF (LINTYP) 7,6,7
    6 NT = 1
    7 IF (DF-DL) 9,9,8
    8 NF = NL
      NA = ((NPTS-1)/NT)*NT+NT-(NPTS-1)
      KK = -INC
      GO TO 10
    9 NF = 1
      NA = NT
      KK = INC
   10 IF (LINTYP) 11,12,13
   11 IPENA = 3
      ICODEA = -1
      LSW = 1
      GO TO 15
   12 NA = LDX
   13 IPENA = 2
      ICODEA = -2
      LSW = 0
   15 DO 30 I =1,NPTS
      XN = (XARRAY(NF) -FIRSTX)/ DELTAX
      YN = (YARRAY(NF) -FIRSTY)/ DELTAY
      IF (NA-NT) 20,21,22
   20 IF (LSW) 23,22,23
   21 CONTINUE
      IF (L12.EQ.1.OR.I.EQ.1) CALL SYMBOL(XN,YN,0.16,INTEQ,0.0,ICODE)
      IF (L12.EQ.2.AND.I.GT.1)CALL DASHP(XN,YN,0.5)
      IF (L12.EQ.2.AND.I.GT.1)CALL SYMBOL(XN,YN,0.16,INTEQ,0.0,-1)
      IF (L12.EQ.3.AND.I.GT.1)CALL DASHP(XN,YN,0.1)
      IF (L12.EQ.3.AND.I.GT.1)CALL SYMBOL(XN,YN,0.16,INTEQ,0.0,-1)
      NA = 1
      GO TO 25
   22 CONTINUE
      IF (L12.EQ.1.OR.I.EQ.1) CALL PLOT (XN,YN,IPEN)
      IF (L12.EQ.2.AND.I.GT.1)CALL DASHP(XN,YN,0.5)
      IF (L12.EQ.3.AND.I.GT.1)CALL DASHP(XN,YN,0.1)
```

```
25 NF = NF +KK
   ICODE = ICODEA
   IPEN = IPENA
30 CONTINUE
   RETURN
   END
```