

01170
lej. 1

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SECCION DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS QUE PRESENTA

JOEL ALONSO MENDEZ

Para obtener el grado de

MAESTRO EN INGENIERIA ELECTRICA

Créditos asignados a la tesis 12

JURADO:

DR. ROBERTO CANALES RUIZ Roberto Canales Ruiz

DR. ANTONIO ALONSO CONCHEIRO Antonio Alonso Concheiro

DR. MARCO ANTONIO MURRAY IASSO Marco Antonio Murray-Iasso

DR. ANDRES BUZO DE LA PEÑA Andrés Buzo de la Peña

DR. FEDERICO KUHLMANN RODRIGUEZ Federico Kuhlmann Rodriguez

01170
1984

COORDINADOR DE LA SECCION

DR. ANDRES BUZO DE LA PEÑA

SECRETARIO ACADEMICO

M. en I. GABRIELA MOELLER DE JALIFE



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

1.	INTRODUCCION	1
	1.1 Antecedentes	1
	1.2 Definición del problema	3
2.	FAMILIA DE MODELOS	6
	2.1 Estructuración	6
	2.2 Solución del modelo SIS2S4	9
	2.3 Solución del modelo SIS4	16
	2.4 Análisis de resultados	24
3.	ANÁLISIS DE SENSITIVIDAD	42
	3.1 Definiciones	42
	3.2 Modelo de sensibilidad	47
	3.3 Descripción de los parámetros	49
4.	SOLUCION DEL MODELO DE SENSITIVIDAD	58
	4.1 Planteamiento de la solución	59
	4.2 Análisis de resultados	60
5.	CONCLUSIONES	97
	5.1 Comparación de modelos	97
	5.2 Análisis de sensibilidad	98
	5.3 Absorbedor solar	100
6.	REFERENCIAS	102
	APENDICE A. Obtención del modelo base	105
	APENDICE B. Subrutinas	114

1. INTRODUCCION

1.1 Antecedentes

El presente trabajo se ubica dentro del proyecto en desarrollo desde ha ce varios años, de la planta solar del Instituto de Ingeniería, UNAM, y más específicamente dentro del diseño del sistema de control para la misma.

Se tienen como antecedentes directos:

a) Un modelo para un tubo absorbedor de un colector solar de tipo canal parabólico como los instalados en la planta solar, (1). Este modelo, formulado a partir de hipótesis poco restrictivas, consta de dos ecuaciones diferenciales parciales de 2° orden, no lineales y de tipo parabólico acopladas, de la forma:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} (t, z) = T_z x_1 (t, z) + g (t, z)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} (t, z) = S_z x_2 (t, z) + f (t, z)$$

donde x_1 es la temperatura del aceite que se calienta en el absorbedor y x_2 es la temperatura de las paredes del mismo; T_z y S_z son operadores diferenciales de 2° orden en la variable espacial Z ; $g(t, z)$ y $f(t, z)$ contienen a las entradas del sistema como son flujo de aceite, radiación solar y temperatura ambiente. Se supone conocida la temperatura de entrada del aceite al absorbedor y se fijan unas condiciones a la frontera.

b) Una familia de modelos, basada en el modelo mencionado y estructurada en el espíritu de la teoría de simplificación de modelos (3), que se obtiene al imponer al modelo base un conjunto de simplificaciones que se describirá en el siguiente capítulo.

En (2) se propone además, un enfoque para resolver las ecuaciones diferenciales de los modelos obtenidos, a partir de las ecuaciones integrales correspondientes, aunque no se obtienen ahí los resultados numéricos.

En el capítulo 2 se describe esta familia de modelos y se presenta la solución numérica de los modelos linealizados así como un análisis breve de los resultados.

1.2 Definición del problema

El propósito central del presente trabajo es hacer un análisis de sensibilidad del tubo absorbedor utilizando modelos mencionados en la sección anterior.

Dicho análisis consiste esencialmente en estudiar los efectos que producen variaciones paramétricas en la respuesta del sistema. Los principales objetivos y aplicaciones de tal estudio son:

- a) Jerarquizar la importancia relativa de los parámetros del sistema sobre su funcionamiento, lo que podría orientar el estudio del mismo en su diseño u operación.
- b) Considerar en el modelo final, aquel que se usará para fines de control, las variaciones de aquellos parámetros que fuese necesario para evitar que el modelo se aleje de la realidad en forma significativa.
- c) Buscar mayor precisión en la medición y/o estimación de aquellos parámetros que así lo requieran.
- d) Fijar límites de variación o tolerancias permisibles en los parámetros.

Intuitivamente una forma simple de hacer un análisis de sensibilidad consiste en resolver el modelo del sistema repetidamente con distintos valores de un parámetro, manteniendo los otros en un valor fijo. Como se puede imaginar fácilmente este método es impráctico y lo es cada vez más al aumentar el número de parámetros sujetos a variación.

A la fecha se han desarrollado diversos métodos para efectuar el análisis de sensibilidad, aplicables según el tipo de modelo disponible para el sistema existiendo una mayor cantidad de resultados cuando el modelo del sistema es de parámetros concentrados (4).

Los métodos requieren, en general, del desarrollo de un nuevo modelo, que llamaremos modelo de sensibilidad y cuyas variables dependientes son los coeficientes de sensibilidad definidos como:

$$\frac{\partial x_i}{\partial k_j} \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots,$$

donde x_i son las variables que caracterizan la dinámica del sistema (estados, salida) y k_j son los parámetros del mismo, que se suponen constantes. Dicho modelo de sensibilidad tiene la misma estructura matemática que el modelo original aunque no necesariamente es del mismo orden y su solución conjuntamente con la solución del modelo original con los parámetros en su valor nominal nos dará la evolución en el tiempo de los coeficientes de sensibilidad.

Cuando el modelo consiste de ecuaciones diferenciales parciales, pueden existir, además de parámetros constantes, parámetros que sean función de las variables independientes y el concepto de coeficiente de sensibilidad debe ampliarse.

En (5) se utiliza el concepto de derivada funcional para definir los coeficientes de sensibilidad en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales, y es tal que el cambio en las variables de interés

$\delta x_i(t, z)$ como resultado de perturbaciones en los parámetros $\delta k_j(z)$ y $\delta k_j(t)$ está dado por

$$\delta x_i(t, z) = \int \frac{\delta x_i(t, z)}{\delta k_j(\sigma)} \delta k_j(\sigma) d\sigma$$

y

$$\delta x_i(t, z) = \int \frac{\delta x_i(t, z)}{\delta k_j(\tau)} \delta k_j(\tau) d\tau$$

respectivamente y $\frac{\delta x_i(t, z)}{\delta k_j(\sigma)}$ y $\frac{\delta x_i(t, z)}{\delta k_j(\tau)}$ son las derivadas funcionales.

Puesto que nuestra familia de modelos consta de ecuaciones diferenciales parciales y se tienen parámetros en función de las variables independientes, se utilizará esta definición de los coeficientes de sensibilidad aunque se presentará y justificará en el capítulo 3 para los estados del sistema utilizando técnicas de análisis funcional y se verá que esta definición es equivalente a la derivada fuerte o de Frechet de los estados. En este mismo capítulo 3 se describirán los parámetros del modelo y se desarrollarán los modelos de sensibilidad.

En el capítulo 4 se presenta la solución de estos modelos utilizando para ello el enfoque y las técnicas sugeridas en (2) y finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones y planteamientos para trabajos futuros en esta área.

2. FAMILIA DE MODELOS

2.1 Estructuración

Esta familia está estructurada a partir del modelo S_0 dado por (Apéndice A); ($t \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$)

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - u(t) \frac{\partial x_1}{\partial z} - \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial t} = & \frac{v}{P_e} \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} + \lambda x_1 - \mu x_2 - \gamma x_2^4 + \alpha q(t) + \beta w(t) + \\ & + \gamma (w(t) - \Delta)^4 \end{aligned} \quad (2.2)$$

con las condiciones a la frontera:

$$x_1(t, 0) = v(t) \quad ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial z}(t, 1) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial z}(t, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial z}(t, 1) = 0 \quad (2.4)$$

y se suponen conocidas las condiciones iniciales.

Por diversas razones, relacionadas con la simulación y el control de los absorbedores, resulta de interés aplicar una o más de las siguientes simplificaciones[†]

- S1.- Despreciar la dependencia de h_1 (coeficiente de convección) de la temperatura y la velocidad del aceite.
- S2.- Despreciar la conducción axial tanto en el tubo como en el aceite, ésto equivale a tomar $P_e = \infty$ en el modelo.
- S3.- Linealizar el término de radiación (ésto conduce a modelos bilineales).
- S5.- Linealizar las ecuaciones en torno de un estado estacionario.

Cada ocasión que se aplique al modelo S_0 alguna de estas simplificaciones quedará planteado un nuevo modelo. Así la primera generación de modelos consta de 4 elementos y se puede representar como

$$(S1, S2, S3, S4) \quad (2.5)$$

La segunda generación, resultante de aplicar 2 de las simplificaciones, se le puede representar como

[†] En la referencia (2), donde se estructura esta familia se considera una simplificación más que consiste en discretizar en la variable z , pero ésto no será considerado aquí.

S1S1,	S1S2,	S1S3,	S1S4
S2S1,	S2S2,	S2S3,	S2S4
S3S1,	S3S2,	S3S3,	S3S4
S4S1,	S4S2,	S4S3,	S4S4

que resultaría en 16 modelos; sin embargo, fácilmente se puede observar que

- a) $S_i S_i = S_i$
- b) $S_i S_j = S_j S_i$, para $i, j \leq 3$
- c) $S_4 S_1$ no está definido
- d) S_3 está contenida en S_4
- e) $S_4 S_2 = S_2 S_4$

por lo que, la segunda generación queda representada por cinco elementos

$$(S1S2, \quad S1S3, \quad S1S4, \quad S2S3, \quad S2S4) \quad (2.6)$$

Utilizando las mismas consideraciones, los modelos de la tercera generación quedan representados por

$$(S1S2S3, \quad S1S2S4) \quad (2.7)$$

Quedando todos los posibles modelos, para este conjunto de simplificaciones, contenidos en (2.5) a (2.7).

Un análisis más detallado de estas generaciones de modelos se encuentra en (2).

Puesto que el propósito central de este trabajo es el hacer análisis de sensibilidad, se tomarán para tal efecto sólo los modelos $S1S4$ y $S1S2S4$,

que requieren de tener la solución en un estado estacionario de los modelos S1 y S1S2 respectivamente, y son los modelos que se detallarán y resolverán en las siguientes secciones. Y puesto que en la citada referencia no se obtienen soluciones numéricas, al final del capítulo se hará un análisis, aunque no exhaustivo, de los resultados numéricos de estos modelos lineales con la idea de, en trabajos futuros, seguir esta línea de investigación.

2.2 Solución del modelo S1S2S4

Este es, como se habrá apreciado, el modelo que reúne todas las simplificaciones propuestas, puesto que la S3 está implícita en S4.

Considérese primero la simplificación S1, esto es, supóngase que h_1 tiene un valor fijo, con esto δ_1 y δ_2 en la ec (2.1) serán constantes.

Aplicando la simplificación S2, haciendo $P_e = \infty$, desaparecerán los términos de segundo orden con lo que se tendrá el modelo S1S2:

S1S2:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -u(t) \frac{\partial x_1}{\partial z} - \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \lambda x_1 - \mu x_2 - \gamma x_2^4 + \alpha q(t) + \beta w(t) + \gamma (w(t) - \Delta)^4 \quad (2.9)$$

con la condición a la frontera

$$x_1(t, 0) = v(t)$$

Sean ahora las funciones $x_1^s(z)$, $x_2^s(z)$ una solución del modelo en un es-

tado estacionario del sistema para las entradas constantes

$$u(t) = u^S ; \quad v(t) = v^S ; \quad q(t) = q^S ; \quad w(t) = w^S$$

y perturbense estas entradas con

$$u(t) = u^S + du(t); \quad v(t) = v^S + dv(t); \quad q(t) = q^S + dq(t); \quad w(t) = w^S + dw(t)$$

sean además

$$\xi_j(t, z) = x_j(t, z) - x_j^S(z); \quad j = 1, 2$$

las correspondientes desviaciones de los estados del estado estacionario. Linealizando según técnicas usuales (6), que es en lo que consiste la simplificación S4, se obtiene el modelo.

S1S2S4:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = -u^S \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 - \rho(z) du(t) \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \lambda \xi_1 - \mu_r(z) \xi_2 + \alpha dq(t) + \beta_r dw(t) \quad (2.11)$$

con la condición a la frontera

$$\xi_1(t, 0) = dv(t) \quad (2.12)$$

donde

$$\rho(z) = \frac{dx_1^S}{dz}; \quad \mu_r(z) = \mu + 4 \gamma (x_2^S)^3; \quad \beta_r = \beta + 4 \gamma (w^S - \Delta)^3 \quad (2.13)$$

y con las condiciones iniciales

$$\xi_j(0, z) = 0 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (2.14)$$

considerando que el sistema está inicialmente en estado estacionario.

Como se podrá notar, se han eliminado algunas de las condiciones a la frontera y ésto es porque, por un lado, si se conservan, tendríamos un problema sobreespecificado y porque estas condiciones eliminadas sólo surgen al considerar la conducción axial, que es eliminada por la simplificación S2.

Para obtener la solución de este modelo se define el siguiente cambio de variable

$$\xi_1(t, z) = \phi(t, z) + dv(t) \quad (2.15)$$

suponiendo que $dv(t)$ es diferenciable, se llega al siguiente problema de valores iniciales y condiciones homogéneas a la frontera.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u^s \frac{\partial \phi}{\partial z} - \delta_1 \phi + \delta_2 \xi_2 - \rho(z) du(t) - \delta_1 dv(t) - (dv)'(t) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -\mu_r(z) \xi_2 + \lambda \phi + \lambda dv(t) + \alpha dq(t) + \beta_r dw(t) \quad (2.17)$$

$$\phi(0, z) = -dv(0); \quad \phi(t, 0) = 0 \quad (2.18)$$

$$\xi_2(0, z) = 0 \quad (2.19)$$

La ecuación (2.17) es una ecuación diferencial sólo respecto al tiempo por lo que su solución estará dada por

$$\xi_2(t, z) = \int_0^t e^{-\mu_r(t-\tau)} \{ \lambda \phi + \lambda dv(\tau) + \alpha dq(\tau) + \beta_r dw(\tau) \} d\tau \quad (2.20)$$

Puesto que ahora se tiene un problema de valores iniciales, vamos a reescribir la ec (2.16) como sigue

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = A \phi + \delta_2 \xi_2 + g(t, z) \quad (2.21)$$

$$\phi(0, z) = \phi_0(z) = -dv(0)$$

donde A es un operador diferencial dado por

$$A \phi(t, z) = -u^s \frac{\partial \phi}{\partial z} - \delta_1 \phi; \quad \phi(t, 0) = 0 \quad (2.22)$$

además

$$g(t, z) = -\rho(z) du(t) - \delta_1 dv(t) - (dv)'(t) \quad (2.23)$$

La solución a esta ecuación es de la forma

$$\phi(t, z) = T(t)\phi_0(z) + \int_0^t T(t-\tau) \left[\delta_2 \xi_2(\tau, z) + g(\tau, z) \right] d\tau \quad (2.24)$$

donde T(t) es un semigrupo fuertemente continuo (7).

Para determinar este semigrupo, consideremos el problema homogéneo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u^s \frac{\partial \phi}{\partial z} - \delta_1 \phi; \quad \phi(0, z) = \phi_0(z), \quad \phi(t, 0) = 0 \quad (2.25)$$

aplicando la transformada de Laplace respecto al tiempo

$$s \hat{\phi}(s, z) - \phi_0(z) = -u^s \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z}(s, z) - \delta_1 \hat{\phi}(s, z)$$

donde $\hat{\phi}(s, z) = L(\phi(t, z))$

rearrreglando términos, tenemos la siguiente ecuación diferencial sólo en en la variable z

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} + \frac{(s + \delta_1)}{u^s} \hat{\phi} = \frac{1}{u^s} \phi_0 ; \quad \hat{\phi}(s, 0) = 0 \quad (2.26)$$

cuya solución es

$$\hat{\phi}(s, z) = \frac{1}{u^s} \int_0^z e^{-\frac{(s+\delta_1)}{u^s}(z-\sigma)} \phi_0(\sigma) d\sigma \quad (2.27)$$

Como estamos considerando el problema homogéneo dado por (2.25), la ecuación (2.24) queda reducida a

$$\phi(t, z) = T(t) \phi_0(z) \quad (2.28)$$

aplicando a esta expresión la definición de la transformada de Laplace (7)

$$\hat{\phi}(s, z) = \int_0^\infty e^{-st} \phi(t, z) dt = \int_0^\infty e^{-st} T(t) \phi_0(z) dt \quad (2.29)$$

igualando las ecuaciones (2.27) y (2.29)

$$\int_0^\infty e^{-st} T(t) \phi_0(z) dt = \int_0^z e^{-\frac{(s+\delta_1)}{u^s}(z-\sigma)} \frac{1}{u^s} \phi_0(\sigma) d\sigma \quad (2.30)$$

definiendo $\sigma = z - u^s t$, con lo que $d\sigma = -u^s dt$ y substituyendo en (2.30)

$$\int_0^\infty e^{-st} T(t) \phi_0 dt = - \int_{z/u^s}^0 e^{-(s+\delta_1)t} \phi_0(z - u^s t) dt = \int_0^{z/u^s} e^{-st} e^{-\delta_1 t} \phi_0(z - u^s t) dt$$

por lo que $T(t)$ queda definido por

$$T(t) \phi_0(z) = \begin{cases} e^{-\delta_1 t} \phi_0(z - u^s t) & ; \quad z - u^s t \geq 0 \\ 0 & ; \quad z - u^s t < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Aplicando esta definición al 2º miembro de (2.24) y sustituyendo además la expresión (2.20) para $\xi_2(t, z)$:

$$T(t-\tau)\delta_2 \xi_2(\tau, z) = H(\xi)\delta e^{-\delta(t-\tau)} \int_0^\tau e^{-u_r(\xi)(\tau-\eta)} (\lambda \phi(\eta, \zeta) + \lambda v(\eta) + f(\eta)) d\eta \quad (2.32)$$

donde $f(t) = \alpha dq(t) + \beta_r dw(t)$

$$\zeta = z - u^s(t - \tau)$$

además

$$T(t-\tau)g(t, z) = H(z-u^s(t-\tau))e^{-\delta(t-\tau)} \left\{ -\rho(z-u^s(t-\tau))du(\tau) - \delta_1 dv(\tau) - (dv)'(\tau) \right\} \quad (2.33)$$

Finalmente

$$T(t) \phi_0(z) = -H(z-u^s t) e^{-\delta_1 t} dv(0) \quad (2.34)$$

Siendo $H(t)$ la función de Heaviside definida por

$$H(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

Sustituyendo (2.32) a (2.34) en (2.24)

$$\begin{aligned} \phi(t, z) = & -H(z-u^s t) e^{-\delta t} dv(0) + \delta \int_0^\tau e^{-u_r(\xi)(\tau-\eta)} (\lambda \phi(\eta_1, \zeta) + \\ & + \lambda v(\eta) + f(\eta)) d\eta d\tau + \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} (-\rho(\zeta)du(\tau) - \delta dv(\tau) - (dv)'(\tau)) d\tau \quad (2.35) \end{aligned}$$

donde

$$t_s = \begin{cases} 0 & ; \quad t \leq z/u^S \\ t - \frac{z}{u^S} & ; \quad t > z/u^S \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\zeta = z - u^S(t-\tau)$$

Utilizando (2.15) para obtener $\zeta_1(t, z)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \xi_1(t, z) - dv(t) &= \delta \lambda \int_{t_s}^t \int_0^\tau K(t-\tau, \tau - \eta, z) \xi_1(\eta, z - u^S(t-\tau)) d\eta d\tau + \\ &+ \delta \int_{t_s}^t \int_0^\tau K(t-\tau, \tau - \eta, z) (\alpha dq(\eta) + \beta_r dw(\eta)) d\eta d\tau - \\ &- \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} \rho(z - u^S(t-\tau)) du(\tau) d\tau - \delta \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} dv(\tau) d\tau - \\ &- \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} (dv)'(\tau) d\tau - H(z - u^S t) e^{-\delta t} dv(0) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde se puede evaluar la siguiente integral por partes:

$$\int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} (dv)'(\tau) d\tau = dv(t) - e^{-\delta(t-t_s)} dv(t_s) + \delta \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} dv(\tau) d\tau \quad (2.38)$$

y, utilizando (2.36):

$$e^{-\delta(t-t_s)} dv(t_s) = \begin{cases} e^{-\frac{\delta z}{u^S}} dv(t - z/u^S) & ; \quad t > z/u^S \\ e^{-\delta t} dv(0) & ; \quad t \leq z/u^S \end{cases} \quad (2.39)$$

el núcleo $K(t, \sigma, z)$ está dado por

$$K(t, \sigma, z) = e^{-\delta t} e^{-\mu_r(z-u^S t) \sigma} \quad (2.40)$$

Sustituyendo (2.38) y (2.39) en (2.37) resulta finalmente que $\xi_1(t, z)$ satisface la siguiente ecuación integral de tipo Volterra de segunda especie (8):

$$\begin{aligned} \xi_1(t, z) - \delta \lambda \int_{t_s}^t \int_0^\tau K(t-\tau, \tau-\eta, z) \xi_1(\eta, z-u^S(t-\tau)) d\eta d\tau = \\ = H(u^S t - z) e^{-\delta z/u^S} dv(t-z/u^S) - \int_{t_s}^t e^{-\delta(t-\tau)} \rho(z-u^S(t-\tau)) du(\tau) d\tau + \\ + \delta \int_{t_s}^t \int_0^\tau K(t-\tau, \tau-\eta, z) (\alpha dq(\eta) + \beta_r dw(\eta)) d\eta d\tau \end{aligned} \quad (2.41)$$

y $\xi_2(t, z)$ queda dada por la transformada integral (2.20) donde sustituimos la expresión (2.15):

$$\begin{aligned} \xi_2(t, z) = \lambda \int_0^t e^{-\mu_r(z)(t-\tau)} \xi_1(\tau, z) d\tau + \int_0^t e^{-\mu_r(z)(t-\tau)} (\alpha dq(\tau) + \\ + \beta_r dw(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3 Solución del modelo SIS4

Según la nomenclatura usada, al aplicar al modelo base (2.1) a (2.4) las simplificaciones S1 y S4 se obtiene el modelo:

SIS4:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial z^2} - u^S \frac{\partial \xi_1}{\partial z} - \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 - \rho(z) du(t) \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = \frac{v}{P_e} \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial z^2} + \lambda \xi_1 - \mu_r(z) \xi_2 + \alpha dq(t) + \beta_r dw(t) \quad (2.45)$$

Con las condiciones a la frontera

$$\xi_1(t, 0) = dv(t) \quad ; \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial z}(t, 1) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial z}(\delta, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial z}(t, 1) = 0 \quad (2.47)$$

y las condiciones iniciales nulas:

$$\xi_i(0, z) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.48)$$

Siendo ξ_i ($i=1,2$) igual que en la sección anterior, las desviaciones de los estados de un valor estacionario para entradas constantes. Los coeficientes $\rho(z)$, $\mu_r(z)$ y β_r quedan definidos igual que para el modelo S1S2S4 por la ecuación (2.11).

Igual que en el caso anterior se da una formulación integral de este modelo. Para ésto se obtienen funciones de Green para los operadores diferenciales de cada una de las dos ecuaciones (2.44) - (2.45) a partir de una expansión de los estados en términos de las funciones características de dichos operadores, (12).

Por conveniencia se define el siguiente cambio de variable

$$\xi_1(t, z) = \phi(t, z) + dv(t) \quad (2.49)$$

Con el que la ec (2.44) queda (asumiendo derivabilidad de $dv(t)$)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - u^s \frac{\partial \phi}{\partial z} - \delta_1 \phi + \delta_2 \xi_2 - \rho(z) du(t) - \delta dv(t) - (dv)'(t) \quad (2.50)$$

Con las condiciones a la frontera homogéneas:

$$\phi(t,0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}(t,1) = 0 \quad (2.51)$$

y la condición inicial:

$$\phi(0,z) = \phi_0(z) = -dv(0) \quad (2.52)$$

Los operadores diferenciales en la variable espacial z quedan definidos como sigue.

Para la ecuación (2.50) y considerando (2.51)

$$T_z y = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - u^s \frac{\partial y}{\partial z} - \delta y \quad (2.53)$$

con dominio dado por

$$D(T_z) = \left\{ y : y, y', y'' \in L^2(0,1) ; y(0) = 0, y'(1) = 0 ; \right. \\ \left. y, y' \text{ absolutamente continuas} \right\}$$

Para la ecuación (2.45) y considerando (2.47)

$$R_z \omega = \frac{v}{P_e} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \quad (2.54)$$

Con dominio dado por

$$D(R_z) = \left\{ \omega ; \omega, \omega', \omega'' \in L^2(0,1) ; \omega'(0) = 0, \omega'(1) = 0 ; \right. \\ \left. \omega, \omega' \text{ absolutamente continuas} \right\} \quad (2.55)$$

Definiendo, además, las funciones

$$g(t,z) = \delta \xi_2(t,z) - \rho(z) du(t) - \delta dv(t) - (dv)'(t) \quad (2.56)$$

$$f(t, z) = -\mu_r(z) \xi_2(t, z) + \lambda \xi_1(t, z) + \alpha dq(t) + \beta_r dw(t) \quad (2.57)$$

Podemos reescribir el modelo SIS4 como sigue

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = T_z \phi + g(t, z) \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = R_z \xi_2 + f(t, z) \quad (2.59)$$

con las condiciones iniciales

$$\phi(0, z) = \phi_0 \quad ; \quad \xi_2(0, z) = 0 \quad (2.60)$$

El problema de valores y funciones características para estas ecuaciones es el problema de encontrar todas las funciones $\psi_k(z)$ y $\phi_k(z)$ que satisfacen, respectivamente, a las siguientes ecuaciones diferenciales.

$$T_z \psi_k(z) = \mu_k \psi_k(z) \quad (2.61)$$

$$R_z \phi_k(z) = \lambda_k \phi_k(z) \quad (2.62)$$

Siendo μ_k y λ_k los correspondientes valores característicos.

Por lo que respecta al operador R_z , se trata de un operador autoadjunto y la solución de (2.62) es:

$$\lambda_k = -\frac{\nu \pi^2 k^2}{p_e} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.63)$$

$$\phi_k(z) = c_1 \cos(\pi kz) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

donde $c_1 = \sqrt{2}$ hace ortonormales estas funciones.

Para el operador T_z , la solución de (2.61) es

$$\mu_k = -\frac{\theta_k^2}{P_e} - \frac{P_e (u^S)^2}{4} - \delta \quad \theta_k \neq 0 \quad (2.65)$$

$$\psi_k(z) = c_2 e^{az} \operatorname{sen}(\theta_k z) ; \theta_k \neq 0 \quad (2.66)$$

donde

$$\tan \theta_k = -\frac{2 \theta_k}{P_e u^S} ; a = \frac{P_e u^S}{2} \quad (2.67)$$

El operador adjunto a T_z está dado por

$$T_z^+ y = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + u^S \frac{\partial y}{\partial z} - \delta y \quad (2.68)$$

$$D(T_z^+) = \left\{ y; y, y', y'' \in L^2(0,1); y(t,0)=0, u^S y(t,1) + \frac{1}{P_e} \frac{\partial y}{\partial z}(t,1)=0 \right\} \quad (2.69)$$

y, y' absolutamente continuas

Para este operador las funciones características son

$$\psi_k^+(z) = c_2 e^{-az} \operatorname{sen}(\theta_k z) ; \theta_k \neq 0 \quad (2.70)$$

donde a y θ_k están dados por (2.67) y c_2 se determina para protonormalizar las funciones características

$$\langle \psi_k, \psi_k^+ \rangle = 1$$

y es

$$c_2 = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2\theta_k} \operatorname{sen} 2\theta_k \right)^{-1/2} \quad (2.71)$$

Ahora, con el conocimiento de las funciones características y puesto que son conjuntos completos (10, cap 4); ésto es, forman una base para

$L^2(0,1)$, se puede hacer una expansión de los estados en términos de estas funciones

$$\phi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \psi_k(z) \quad (2.72)$$

$$\xi_2(\delta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \phi_k(z) \quad (2.73)$$

donde hay que determinar los coeficientes $\alpha_k(t)$ y $\beta_k(t)$.

Para los términos independientes del modelo, usando el teorema de Riesz-Fischer (9). Se puede hacer la siguiente expansión

$$g(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \phi_k(z) \quad (2.74)$$

$$f(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k(z) \quad (2.75)$$

donde los coeficientes están dados por

$$g_k = \langle \psi_k^+(z), g(t, z) \rangle \triangleq \int_0^1 \psi_k^+(\sigma) g(t, \sigma) d\sigma \quad (2.76)$$

$$f_k = \langle \phi_k(z), f(t, z) \rangle \quad (2.77)$$

Sustituyendo (2.72) a (2.75) en (2.61) y (2.62) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\alpha_k(t)}{dt} \psi_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \mu_k \psi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \psi_k(z) \quad (2.78)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\beta_k(t)}{dt} \phi_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \lambda_k \phi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k(z) \quad (2.79)$$

reacomodando términos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z) \left\{ \frac{d \alpha_k(t)}{dt} - \mu_k \alpha_k(t) - g_k \right\} = 0 \quad (2.80)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(z) \left\{ \frac{d \beta_k(t)}{dt} - \lambda_k \beta_k(t) - f_k \right\} = 0 \quad (2.81)$$

y dada la independencia lineal de las ψ_k , se requiere que se cumpla

$$\frac{d \alpha_k(t)}{dt} - \mu_k \alpha_k(t) = g_k(z) ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.82)$$

$$\frac{d \beta_k(t)}{dt} - \lambda_k \beta_k(t) = f_k(t) ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.83)$$

con las condiciones iniciales dadas por

$$\alpha_k(0) = \langle \psi_k^+, \phi_0 \rangle \quad (2.84)$$

$$\beta_k(0) = \langle \phi_k, \xi_2(0, z) \rangle = 0 \quad (2.85)$$

La solución de (2.82) y (2.83) es de la forma

$$\alpha_k(t) = e^{\mu_k t} \alpha_k(0) + \int_0^t e^{\mu_k(t-\tau)} g_k(\tau) d\tau ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.86)$$

$$\beta_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau ; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.87)$$

Substituyendo (2.86) y (2.87) en (2.72) y (2.73) respectivamente

$$\phi(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\mu_k t} \int_0^1 \psi_k^+(\sigma) \psi_0 d\sigma \right\} \psi_k(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{\mu_k(t-\tau)} \int_0^1 \psi_k^+(\sigma) g(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \right\} \psi_k(z) \quad (2.88)$$

$$\xi_2(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \int_0^1 \phi_k(\sigma) f(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \right\} \phi_k(z) \quad (2.89)$$

cambiando el orden de integral y sumatoria

$$\phi(t, z) = - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \psi_k^+(\sigma) \psi_k(z) dv(\sigma) d\sigma + \int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k(t-\tau)} \psi_k^+(\sigma) \psi_k(z) g(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \quad (2.90)$$

$$\xi_2(t, z) = \int_0^t \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k(t-\tau)} \phi_k(\sigma) \phi_k(z) f(\tau, \sigma) d\sigma d\tau \quad (2.91)$$

donde los términos involucrados en las sumatorias, se pueden definir como las funciones de Green; ésto es

$$G(t, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t} \psi_k^+(\sigma) \psi_k(z) \quad (2.92)$$

$$F(t, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \phi_k(\sigma) \phi_k(z) \quad (2.93)$$

Con lo que finalmente, y utilizando (2.49), (2.56) y (2.57):

$$\begin{aligned} \xi_1(t, z) = & \delta \int_0^t \int_0^1 G(t-\tau, z, \sigma) \xi_2(\tau, \sigma) d\sigma d\tau - \int_0^t \int_0^1 G(t-\tau, z, \sigma) \rho(\sigma) du(\tau) d\sigma d\tau - \\ & - \int_0^t \int_0^1 G(t-\tau, z, \sigma) \{ \delta dv(\tau) + (dv)'(\tau) \} d\sigma d\tau - \int_0^1 G(t, z, \sigma) dv(\sigma) d\sigma + d\sigma(t) \quad (2.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2(t, z) = & - \int_0^t \int_0^1 F(t-\tau, z, \sigma) \mu_r(\sigma) \xi_2(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \lambda \int_0^t \int_0^1 F(t-\tau, z, \sigma) \xi_1(\tau, \sigma) d\sigma d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^1 F(t-\tau, z, \sigma) \{ \alpha d_q(\tau) + \beta_r d_w(\tau) \} d\sigma d\tau \quad (2.95) \end{aligned}$$

Son la formulación integral del modelo SIS4, que consiste en un sistema de dos ecuaciones integrales de 2a. especie de tipo Fredholm-Volterra.

2.4 Análisis de resultados

En este capítulo se comparan cualitativa y cuantitativamente los modelos linealizados del absorbedor descritos en las secciones anteriores.

Tal comparación permite explicar cómo se pasa de un modelo descrito por ecuaciones parabólicas cuando se considera difusión axial (modelo S1S4) a un modelo descrito por ecuaciones hiperbólicas al eliminar tal término de difusión (simplificación S2).

En las secciones anteriores se llevó a los dos modelos a una formulación en ecuaciones integrales tanto en la variable tiempo (t) como en la variable distancia (z). Para obtener la solución numérica de estas ecuaciones se aplicó la transformada de Laplace en el tiempo para tener ecuaciones integrales sólo respecto a z , y una vez resueltas, se antitransforman numéricamente.

2.4.1 Modelo S1S2S4

Este modelo está dado por las ecuaciones (2.8) a (2.10) y las expresiones que se utilizan para la solución numérica, aplicando la transformada de Laplace son:

$$\hat{\xi}_1(s, z) = e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u s} z} d\hat{v}(s) + \int_0^z e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u s}(z - \sigma)} \frac{1}{u s} (\delta_2 \hat{\xi}_2(s, \sigma) - \rho(\sigma) d\hat{u}(s)) d\sigma \quad (2.96)$$

$$\hat{\xi}_2(s, z) = \frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \hat{\xi}_1(s, z) + \frac{\alpha d\hat{q}(s) + \beta_r d\hat{w}(s)}{s + \mu_r(z)} \quad (2.97)$$

donde podemos sustituir la 2a. ecuación en la 1a. para tener la siguiente ecuación integral para $\hat{\xi}_1(s, z)$:

$$\hat{\xi}_1(s, z) - \frac{\delta_2 \lambda}{u^s} \int_0^z \hat{K}(s, z, \sigma) \hat{\xi}_1(s, \sigma) d\sigma = F(s, \sigma) \quad (2.98)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_i(s, z) &= L \{ \xi_i(t, z) \} \quad ; \quad i = 1, 2 \\ \hat{K}(s, z, \sigma) &= \frac{e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u^s} (z - \sigma)}}{s + \mu_r(\sigma)} \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} F(s, z) &= e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u^s} z} d\hat{v}(s) - \frac{1}{u^s} \left\{ \int_0^z \rho(\sigma) e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u^s} (z - \sigma)} d\sigma \right\} d\hat{u}(s) + \\ &+ \frac{\delta_2}{u^s} \left\{ \int_0^z K(s, z, \sigma) d\sigma \right\} \left\{ \alpha d\hat{q}(s) + \beta_r d\hat{w}(s) \right\} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Queda definida la solución, en términos de la transformada de Laplace, por las ecuaciones (2.97) y (2.98). Para la solución de este modelo se desarrolló una subrutina en Fortran para resolver ecuaciones integrales de tipo Volterra de la 2a. especie aproximando la integral según las fórmulas de integración de Newton-Cotes (13); para la transformada inversa de Laplace se utilizó el algoritmo descrito en (14) y todo el programa se implantó en una computadora Burroughs B-7800 usando precisión simple (en el apéndice B se presenta un listado de las subrutinas).

La solución nominal sobre lo que se linealiza se fijó de acuerdo con condiciones de operación especificadas en (1) con los siguientes valores de las entradas

$$q^S = 165.335$$

$$w^S = 20$$

$$u^S = 1$$

$$v^S = 210$$

que permiten obtener el aceite con una temperatura de aproximadamente 250°C a la salida del absorbedor. Esta solución en estado estable (fig 1) se obtuvo resolviendo el modelo S1S2 (ecs 2.5 a 2.7) anulando las derivadas respecto al tiempo y para las entradas constantes dadas utilizando para ello el método de Newton, (5).

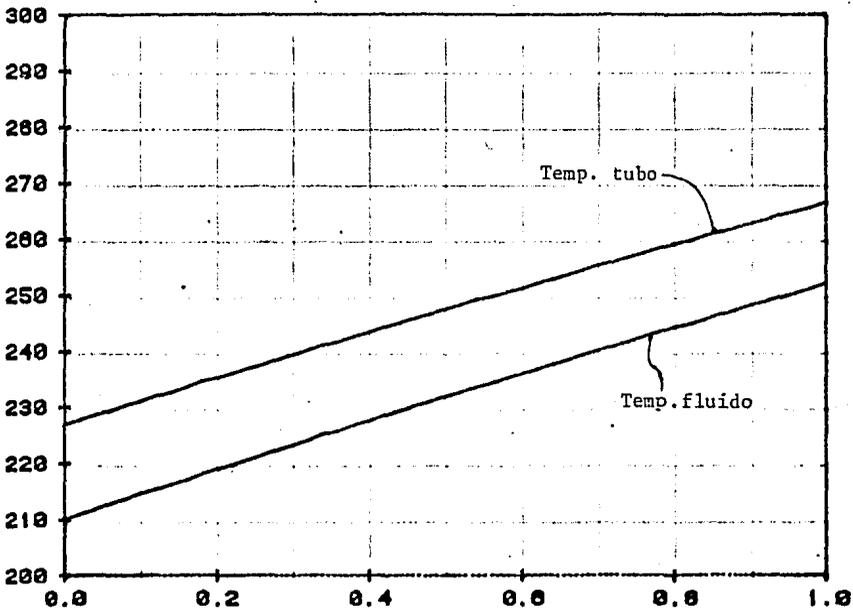


FIG 1. SOLUCION EN ESTADO ESTABLE PARA EL MODELO S1S2S4

Para analizar el comportamiento de este modelo se aplicaron entradas escalón, por separado, con los siguientes valores:

$$dq(t) = 16.5335 u_{-1}(t)$$

$$dw(t) = 21 u_{-1}(t)$$

$$du(t) = 0.1 u_{-1}(t)$$

$$dv(t) = 2.0 u_{-1}(t)$$

donde $u_{-1}(t)$ es el escalón unitario.

Las gráficas de las temperaturas del tubo y el fluido en 10 puntos del absorbedor equidistantes entre sí, se muestran en las figs 2 a 9 y de estos resultados se puede decir lo siguiente.

- En (1) se resuelve el modelo del absorbedor utilizando aproximaciones de diferencias finitas y se hacen algunos análisis básicos que no tendría caso repetir aquí, sólo cabe mencionar que las diferencias entre la solución en estado estacionario obtenidas aquí y allá difieren en lo esperado teniendo en cuenta que aquí se toma como constante el coeficiente de convección entre tubo y fluido h_1 (simplificación S1).
- A reserva de hacer una comparación más detallada de los métodos numéricos para la solución a partir de las ecuaciones integrales o de las ecuaciones diferenciales; la experiencia personal, después de utilizar ambas estrategias en el mismo modelo (aproximaciones en diferencias finitas en (1) y métodos de integración numérica aquí), es que resulta más sencillo, y rápido, resolver las ecuaciones integrales. Esta ventaja aunada al conocimiento que se adquiere de la naturaleza matemá

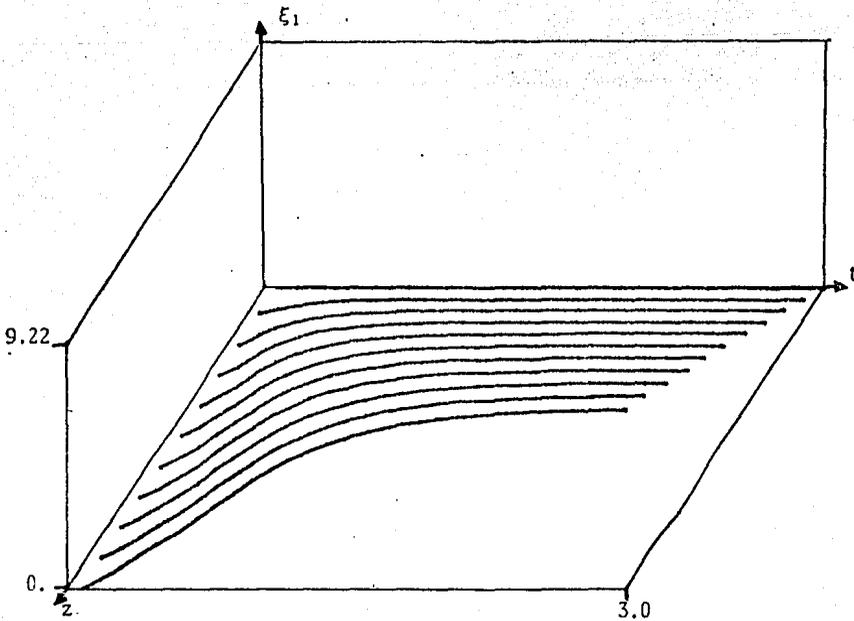


Fig 2.2 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la radiación solar. Temperatura de fluido.

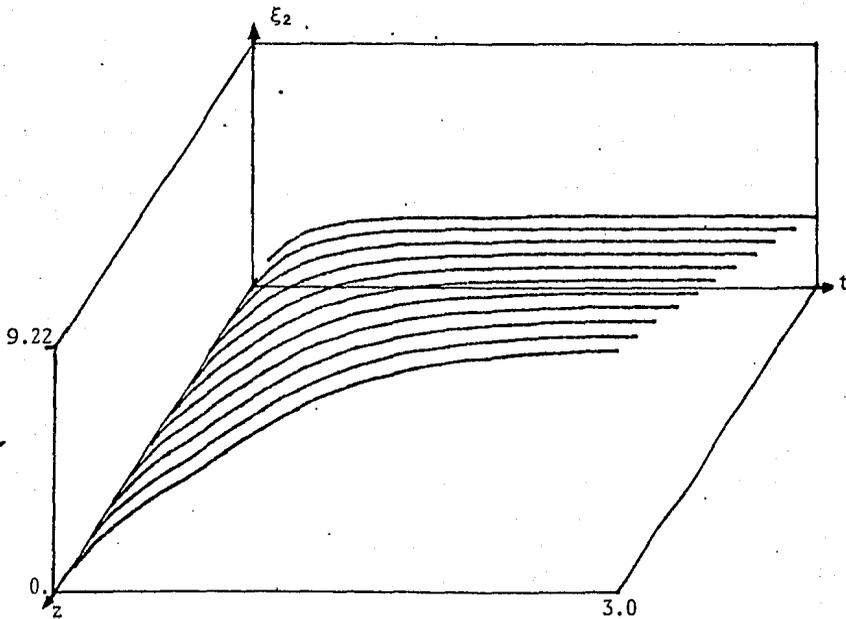


Fig 2.3 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la radiación solar. Temperatura del tubo.

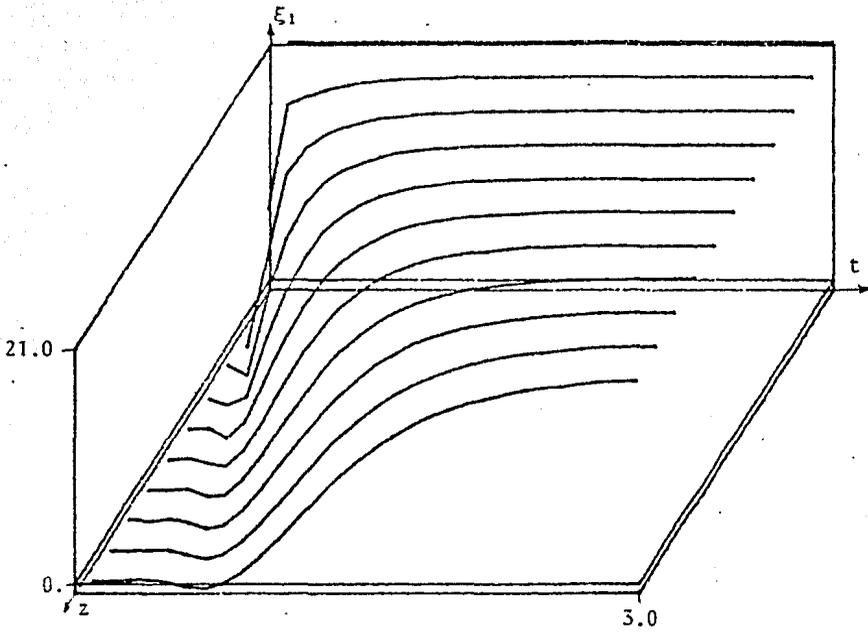


Fig 2.4 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la temperatura de entrada. Temperatura del fluido.

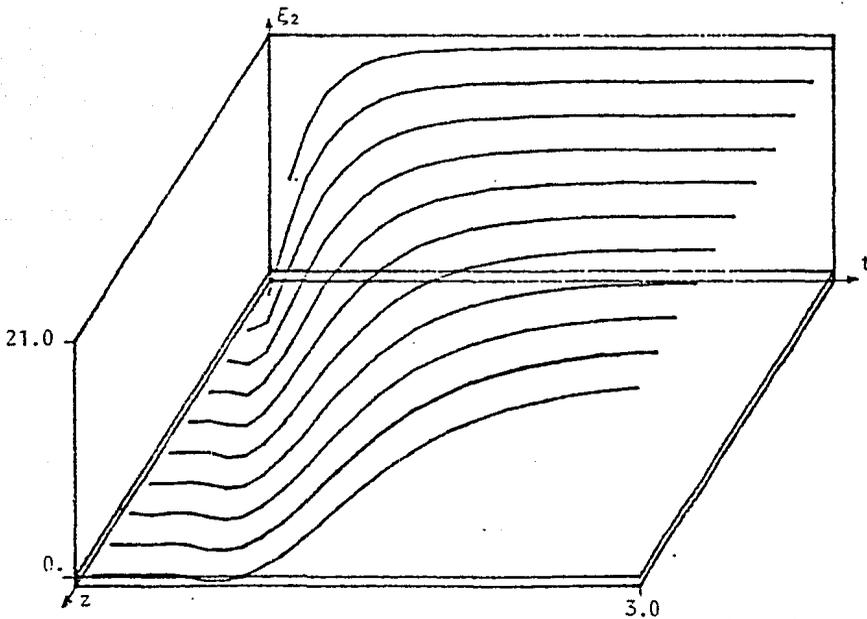


Fig 2.5 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la temperatura de entrada. Temperatura del tubo.

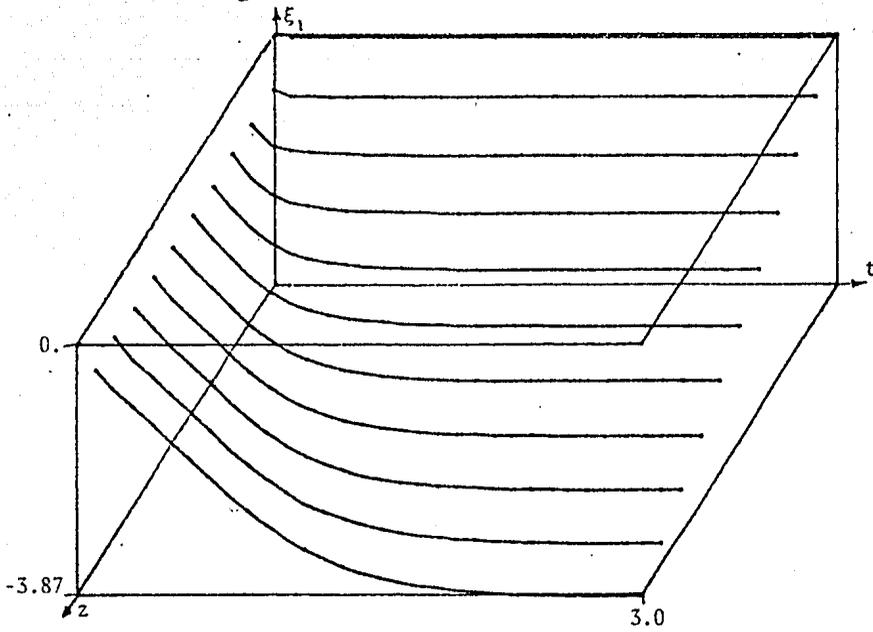


Fig 2.6 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en el flujo.
Temperatura del fluido.

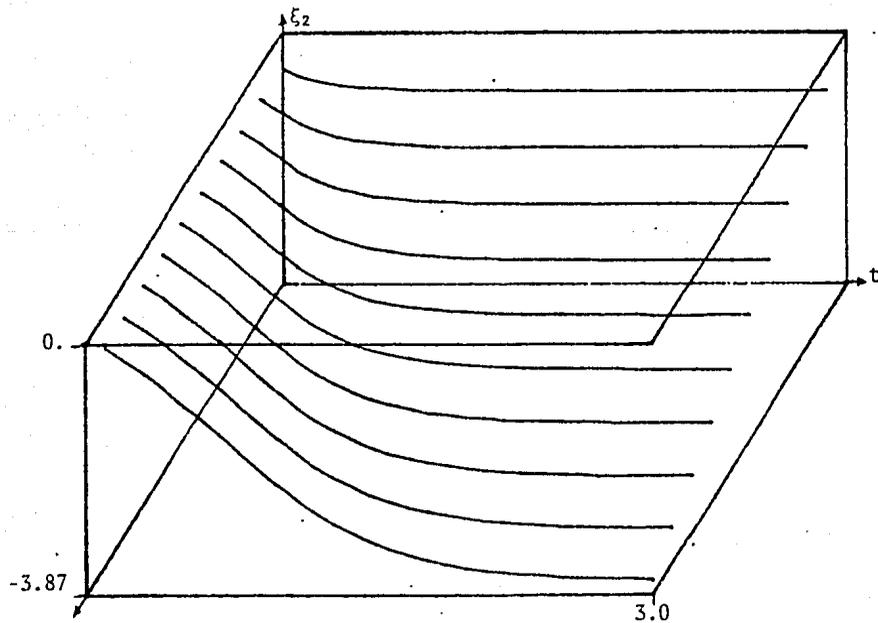


Fig. 2.7 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en el flujo.
Temperatura del tubo.

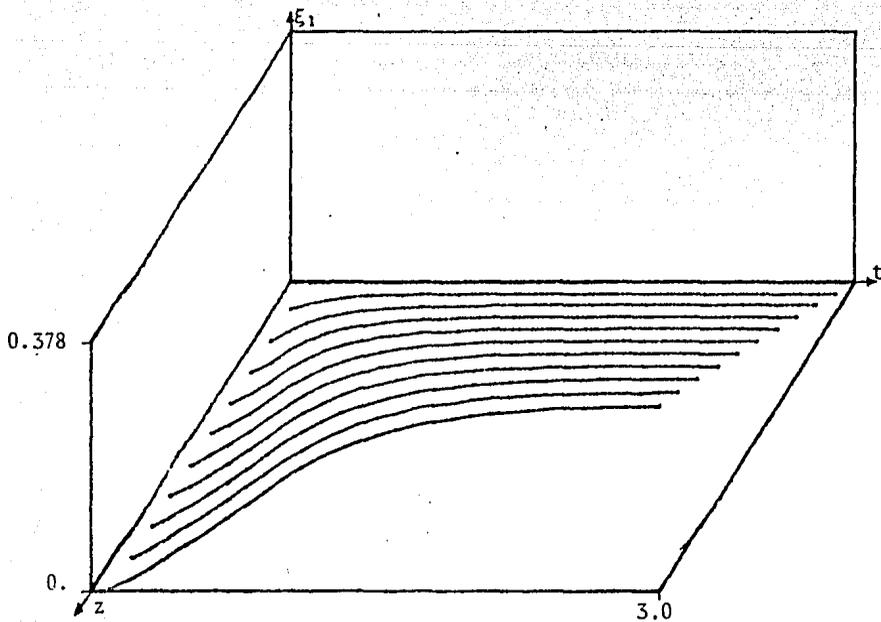


Fig 2.8 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la temperatura ambiente. Temperatura del fluido.

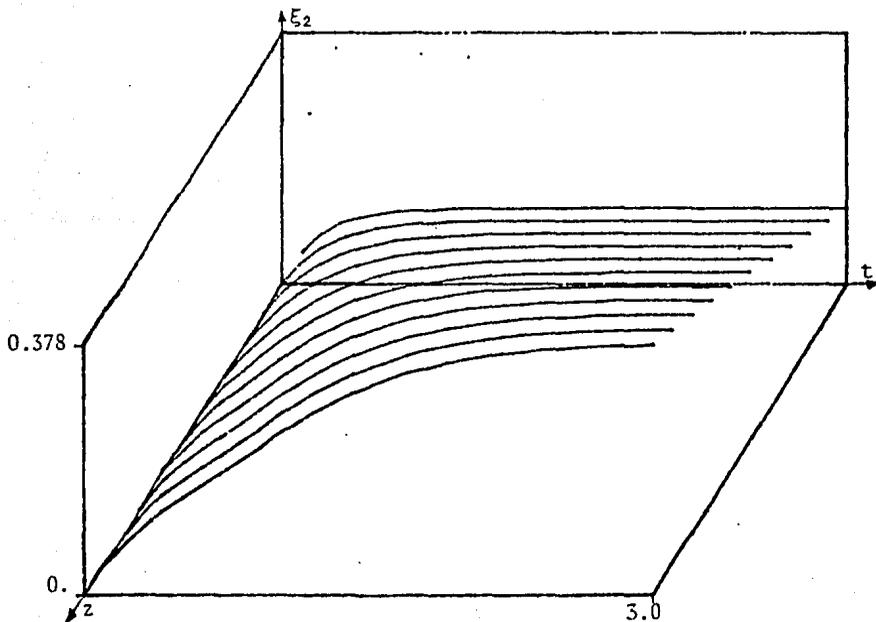


Fig 2.9 Respuesta del modelo S1S2S4 para un escalón en la temperatura ambiente. Temperatura del tubo.

tica del modelo al pasar las ecuaciones diferenciales a la formulación integral justifican el utilizar esta estrategia de solución.

- En las figs 4 y 5 se aprecian oscilaciones en los instantes iniciales; estas son producto de errores numéricos del algoritmo de inversión de transformadas de Laplace usado. A continuación se muestra una gráfica (fig 10) con la antitransformada de:

$$F(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-bs}$$

con $b = 1$ que representa un retraso en el tiempo de b unidades y que da una forma aproximada de las curvas de temperatura en las figs 4 y 5; la función en el tiempo es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < t < b \\ (1 - e^{-t+b}) & ; \quad t \geq b \end{cases}$$

y en la gráfica se aprecian las imprecisiones del algoritmo. Sin embargo este algoritmo tiene la ventaja de requerir la evaluación de la función en s en pocos puntos (10 en todos los resultados presentados) y los errores pueden llegar a ser menores del 0.1% (14) cuando la función en el tiempo no tiene valores muy cercanos a cero.

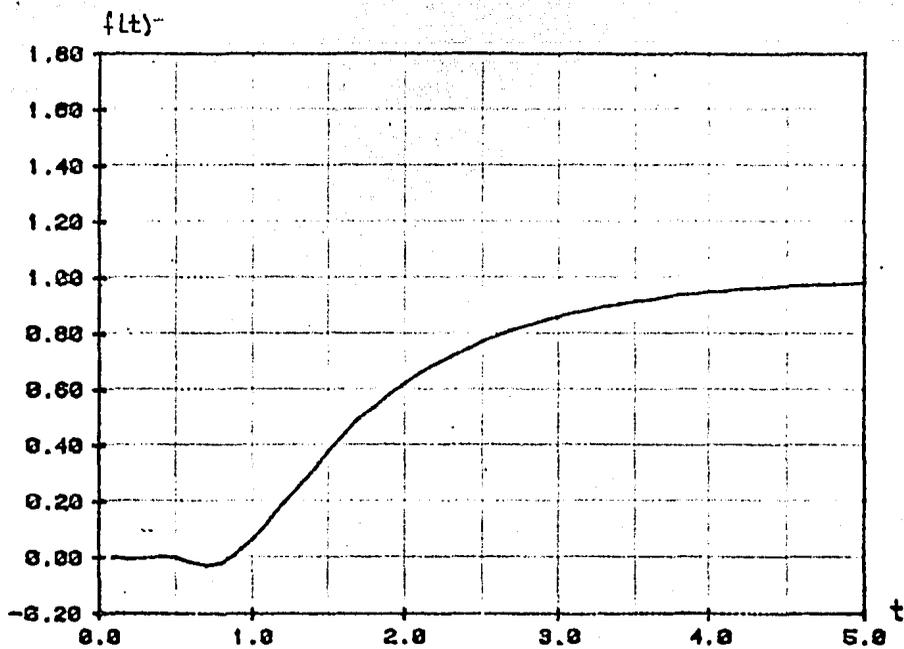


Fig 2.10 Antitransformada de $F(s) = \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} e^{-s}$

2.4.2 Modelo S1S4

Este es el modelo dado por (2.44) a (2.48) que incluye la defusión axial de calor.

Para obtener la solución numérica de este modelo, se utilizó también aquí la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1(s, z) = & \{1 + (s + \delta_1) \int_0^1 G(s, z, \sigma) d\sigma\} \hat{d}v(s) + \int_0^1 G(s, z, \sigma) \rho(\sigma) \hat{d}u(s) d\sigma - \\ & - \delta_2 \int_0^1 G(s, z, \sigma) \hat{\xi}_2(s, \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_2(s, z) = & \int_0^1 F(s, z, \sigma) \mu_r(\sigma) \hat{\xi}_2(s, \sigma) d\sigma - \lambda \int_0^1 F(s, z, \sigma) \xi_1(s, \sigma) d\sigma - \\ & - \int_0^1 F(s, z, \sigma) \hat{R}(s) d\sigma \end{aligned} \quad (2.102)$$

donde $\hat{R}(s) = \alpha \hat{d}q(s) + \beta_r \hat{d}w(s)$, $G(s, z, \sigma)$ y $F(s, z, \sigma)$ son las transformadas de Laplace de las funciones de Green asociadas a los operadores diferenciales (2.53) y (2.54) respectivamente.

En la sección 2.3 se obtuvieron expresiones para estas funciones de Green a partir de expansión de los estados en funciones características; dichas expresiones son, después de aplicar la transformada de Laplace:

$$F(s, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k^+(\sigma) \psi_k^-(z)}{s - \mu_k}$$

$$F(s, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k^+(\sigma) \phi_k(z)}{s - \lambda_k}$$

Sustituyendo las expresiones para las funciones y valores característicos

$$G(s, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_2^2 e^{a(z-\sigma)} \operatorname{sen}(G_k z) \operatorname{sen}(G_k \sigma)}{s - \left(-\frac{G_k^2}{P_e} - \frac{P_e (u^S)^2}{4} - \delta \right)}$$

$$F(s, z, \sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_1^2 \cos(k \pi z) \cos(k \pi \sigma)}{s - \left(-\frac{\nu}{P_e} \pi^2 k^2 \right)}$$

donde

$$a = \frac{P_e u^S}{2} \quad ; \quad \text{ten } \theta_k = -\frac{2 \theta_k}{P_e u^S}$$

Dada la magnitud del número de Peclet ($P_e = 32 \times 10^6$) el evaluar estas series es algo sumamente impráctico dado que la convergencia es lenta y los errores de redondeo son difíciles de estimar o controlar. Para determinar, al menos cualitativamente, la forma en que el modelo con difusión se acerca al modelo sin difusión al aumentar el número de Peclet, se utilizó otra forma de obtener las funciones de Green, como expresiones cerradas a partir de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo (11). Estas funciones son:

a) $\sigma \leq z$

$$G(s, z, \sigma) = \frac{P_e \left[e^{-(a-b)\sigma} - e^{-(a+b)\sigma} \right] \left[(a+b) e^{(a-b)(z-1)} - (a-b) e^{(a+b)(z-1)} \right]}{ab \left[(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)} \right]}$$

$$F(s, z, \sigma) = -\frac{\alpha}{s} \cos h(\alpha \sigma) \left(\frac{\cos h(\alpha z)}{\tan h(\alpha)} - \operatorname{sen} h(\alpha z) \right)$$

b) $\sigma \geq z$

$$G(s, z) = \frac{P_e \left[e^{(a+b)z} - e^{(a-b)z} \right] \left[(a+b)e^{-(a+b)\sigma} e^{-(a-b)\sigma} - (a-b)e^{-(a-b)\sigma} e^{-(a+b)\sigma} \right]}{ab \left[(a-b)e^{-(a+b)\sigma} - (a+b)e^{-(a-b)\sigma} \right]}$$

$$F(s, z, \sigma) = -\frac{\alpha}{s} \cos h(\alpha z) \left(\frac{\cos h(\alpha \sigma)}{\tan h(\alpha)} - \operatorname{sen} h(\alpha z) \right)$$

donde

$$a = \frac{P_e u^s}{2} ; \quad b = \frac{P_e}{2} \sqrt{(u^s)^2 + 4 \frac{(\delta_1 + s)}{P_e}} ; \quad \alpha = \sqrt{\frac{P_e s}{v}}$$

Aún con estas expresiones, la evaluación numérica sigue siendo impráctico.

Desarrollando las expresiones y dadas las magnitudes relativas de los términos, se mostrará como se simplifican para llegar al modelo sin difusión cuando $P_e \rightarrow \infty$.

Analícemos primero la función $G(s, z, \sigma)$ considerando que; si $P_e \rightarrow \infty$.

$$a \rightarrow \infty ; \quad b \rightarrow \infty$$

$$\frac{2b}{P_e} = \sqrt{(u^s)^2 + 4 \frac{(\delta_1 + s)}{P_e}} ; \quad \frac{2b}{P_e} \rightarrow u^s$$

$$(a+b) = \frac{P_e}{2} \left(u^s + \sqrt{(u^s)^2 + 4 \frac{(\delta_1 + s)}{P_e}} \right) ; \quad (a+b) \rightarrow \infty$$

$$(a-b) = \frac{-2(\delta_1 + s)}{u^s \left[1 + \sqrt{1 + 4 \frac{(\delta_1 + s)}{P_e (u^s)^2}} \right]} ; \quad (a-b) \rightarrow -\frac{(\delta_1 + s)}{u^s}$$

a) $\sigma \leq z$

$$G(s, z, \sigma) = \frac{P_e \left[(a+b)e^{-(a-b)} e^{(a-b)(z-\sigma)} - e^{(a-b)z} e^{-(a+b)\sigma} \right] - (a-b)e^{-(a+b)}}{2b \left[(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)} \right]}$$

$$\frac{\left[e^{(a+b)z} e^{-(a-b)\sigma} - e^{(a+b)(z-\sigma)} \right]}{2b \left[(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)} \right]}$$

dadas las consideraciones anteriores:

$$\frac{(a+b) e^{-(a-b)}}{(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)}} = \frac{1}{\frac{(a-b)}{(a+b)} e^{-2a} - 1} \rightarrow -1$$

$$\frac{(a-b) e^{-(a+b)}}{(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)}} = \frac{1}{1 - \frac{(a+b)}{(a-b)} e^{2b}} \rightarrow 0$$

y, en el caso del segundo de estos coeficientes:

$$\frac{1}{1 - \frac{(a+b)}{(a-b)} e^{2b}} \left[e^{(a+b)z} e^{-(a-b)} - e^{(a+b)(z-\sigma)} \right]$$

La mayor magnitud de este término es cuando $z = \sigma = 1$:

$$\frac{1}{1 - \frac{(a+b)}{(a-b)} e^{2b}} \left[e^{2b} - 1 \right]$$

que claramente tiende a cero al crecer P_e , por tanto:

$$G(s, z, \sigma) \rightarrow G_1^*(s, z, \sigma) = -\frac{1}{u^s} \left[e^{-\frac{(\delta_1 + s)}{u^s} (z-\sigma)} - e^{-(a-b)z} e^{-(a+b)\sigma} \right]$$

y, puesto que $(a+b) \rightarrow \infty$ si $P_e \rightarrow \infty$, el segundo término se anula para $\sigma > 0$ y se llega a:

$$G_1^*(s, z, \sigma) = -\frac{1}{u^s} e^{-\frac{\delta_1 + s}{u^s} (z - \sigma)} \quad (2.103)$$

b) $\sigma \geq z$

$$G(s, z, \sigma) = \frac{P_e \left\{ (a+b) e^{-(a-b)} \left[e^{(a+b)(z-\sigma)} - e^{(a-b)z} e^{-(a+b)\sigma} \right] - \right.}{ab \left[(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)} \right]}$$

$$\left. - \frac{(a-b) e^{-(a+b)} \left[e^{(a+b)z} e^{-(a-b)\sigma} - e^{(a-b)(z-\sigma)} \right] \right\}}{2b \left[(a-b) e^{-(a+b)} - (a+b) e^{-(a-b)} \right]}$$

Utilizando los mismos argumentos que para $\sigma \leq z$, se llega a:

$$G(s, z, \sigma) \rightarrow G_2^*(s, z, \sigma) = -\frac{1}{u^s} \left[e^{(a+b)(z-\sigma)} - e^{(a-b)z} e^{-(a+b)\sigma} \right] \quad (2.104)$$

donde los dos términos se anulan para $\sigma > z$, por tanto

$$G_2^*(s, z, \sigma) = 0 \quad ; \quad \sigma > z$$

Sustituyendo las expresiones simplificadas (2.103) y (2.104) de $G(s, z, \sigma)$ en (2.4.6) se tiene:

$$\hat{\xi}_1(s, z) = \{1 + (s+d_1)\} \int_0^z G_1^*(s, z, \sigma) d\hat{v}(s) + \int_0^z G_1^*(s, z, \sigma) \rho(\sigma) d\hat{u}(s) d\sigma -$$

$$- \delta_2 \int_0^z G_1^*(s, z, \sigma) \hat{\xi}_2(s, \sigma) d\sigma$$

donde, si se efectua la integral del primer término del lado derecho de la igualdad, se llega a la ecuación (2.4.1) que expresa la solución del modelo sin difusión.

Para el caso particular del absorbedor, estas expresiones simplificadas de $G(s, z, \sigma)$ son válidas para $|\sigma - z| > 10^{-7}$; es decir, los términos que se eliminan sólo tienen valores significativos en ese rango de valores de la variable de integración σ .

Por lo que respecta a la función $F(s, z, \sigma)$ se tiene que

$$\int_0^1 F(s, z, \sigma) d\sigma = -\frac{1}{s}$$

además, si $P_e \rightarrow \infty$ $\alpha \rightarrow \infty$ y la $\tanh(\alpha) \rightarrow 1$ y:

$$F(s, z, \sigma) = F^*(s, z, \sigma) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{s} \left[e^{\alpha(\sigma-z)} + e^{-\alpha(\sigma+z)} \right] ; & \sigma \leq z \\ -\frac{\alpha}{s} \left[e^{\alpha(z-\sigma)} + e^{-\alpha(z+\sigma)} \right] ; & \sigma \geq z \end{cases} \quad (2.105)$$

más aún:

$$F^*(s, z, \sigma) \rightarrow \begin{cases} 0 & ; \sigma \neq z \\ -\frac{\alpha}{s} & ; \sigma = z \end{cases}$$

y F^* tiene todas las características de una función impulso, como se puede apreciar en la fig 11 donde se grafica

$$f(\sigma) = -s F^*(s, z, \sigma)$$

para $z = 0.5$ y valores de α de 5, 10 y 20; F^* dada por (2.105).

A partir de ésto, si sustituimos la expresión

$$F^*(s, z, \sigma) = -\frac{1}{s} \delta(\sigma - z)$$

Siendo $\delta(\sigma - z)$ un impulso unitario aplicado en $\sigma = z$; en la ecuación (2.4.7) es fácil llegar a la ecuación (2.4.2) que expresa la solución del modelo sin difusión.

Como ya se dijo antes, una comparación más detallada, sobre todo numérica, de los modelos con y sin difusión para el caso particular del absorbedor es impráctica.

El desarrollo de esta sección justifica, por un lado, la eliminación de la difusión en el modelo del absorbedor para efectos prácticos y, por otro lado, presenta una forma alternativa de analizar modelos matemáticos dados por ecuaciones diferenciales parciales ante simplificaciones como la analizada.

Como comentario final sólo queda el dejar la inquietud de que con una familia de modelos distinta (o esta misma, con distintos valores) podría obtenerse una mayor riqueza en las comparaciones planteadas, sobre todo en el aspecto numérico.

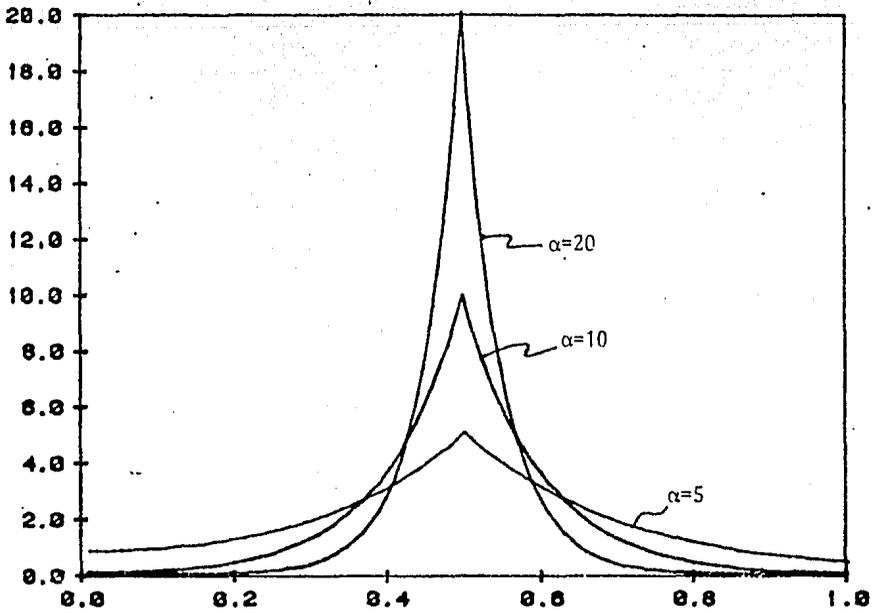


Fig 2.11 Gráfica de $f(\sigma) = -sF^*(s, z, \sigma)$ para $z=0.5$

3. ANALISIS DE SENSITIVIDAD

3.1 *Definiciones*

En realidad el concepto de análisis de sensibilidad es simple y lo defi
nimos como "el estudio de los efectos que producen variaciones paramé-
tricas en la respuesta del sistema" y la información de la sensibilidad
de un sistema está contenida en los coeficientes de sensibilidad defini
dos como la siguiente derivada

$$\frac{\partial u_i}{\partial k_j} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

donde las u_i son las variables que describen la dinámica del sistema o
aquellas que sean función de los parámetros k_j y sobre las que se desee
conocer los efectos de variaciones mencionadas.

De aquí se desprende que un análisis como éste debe estar ligado a un propósito de diseño predeterminado donde se definirán o se determinarán las variables u_i .

Pero la simplicidad del concepto no implica necesariamente simplicidad en el análisis mismo, y es que la complejidad en la obtención de los coeficientes de sensibilidad es la misma o mayor que la de la solución del modelo del sistema y éste depende de la estructura del modelo.

Cuando el modelo del sistema es de parámetros concentrados hay una variedad amplia de definiciones para los coeficientes de sensibilidad y formas asociadas para su obtención de las que la referencia (4) es una buena recopilación con una amplia bibliografía.

Sin embargo, para el caso de modelos de parámetros distribuidos sólo se encontró un trabajo (5) que utiliza un modelo de este tipo para el desarrollo del modelo de sensibilidad y contempla el caso de parámetros que son función de las variables independientes sin hacer simplificaciones antes de hacer el análisis. En este capítulo se presentan estas ideas justificándolas usando conceptos de análisis funcional y se aplican al modelo S1S2S4 del absorbedor[†] usando las técnicas de solución presentadas en el capítulo 2.

Se parte de la formulación integral del modelo:

$$\xi_1(t, z) - \int_0^t T(t-\tau) \{ \Delta \xi_2(\tau, z) + g_1(\tau, z) \} d\tau = dv(t) - T(t)dv(0) \quad (3.1)$$

[†] Dados los resultados obtenidos en el capítulo 2 se considera ya sólo este modelo para el análisis de sensibilidad.

$$\xi_2(t, z) = \int_0^t e^{-\mu_r(t-\tau)} \{ \lambda \xi_1(\tau, z) + g_2(\tau, z) \} d\tau \quad (3.2)$$

se define como coeficiente de sensibilidad de los estados ξ_i a la derivada de Frechet, si existe, denotada:

$$\frac{\delta \xi_i}{\delta k_j}(t, z) \quad (3.3)$$

para determinar estas derivadas a partir de las ecuaciones del modelo definimos los espacios:

$$K = \begin{cases} R & ; \text{ si } k_j \text{ no es función de } t \text{ o } z \\ L_2(0, 1) & ; \text{ si } k_j \text{ es función de } z \\ L_2(0, \infty) & ; \text{ si } k_j \text{ es función de } t \end{cases}$$

$$X = \{ (\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in L_2((0, \infty) \times (0, 1)) \}$$

y expresaremos las ecuaciones (3.1) y (3.2) como

$$G(k, \xi) : K \times X \rightarrow R$$

tal que

$$G(k, \xi) = 0$$

consta de 2 elementos, uno para cada una de las ecuaciones (3.1) y (3.2). Definimos también la región:

$$\Omega_r = \{ (k, \xi) : \| k - \bar{k} \| \leq r, \| \xi - \bar{\xi} \| \leq r \}$$

donde \bar{k} y $\bar{\xi}$ denotan valores nominales.

Haciendo uso del teorema sobre funciones implícitas (16, pag 294) la diferencial de Frechet de ξ respecto a k en \bar{k} satisface la ecuación:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta \xi(\bar{k}) = - \left[\frac{\partial}{\partial k} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta k \quad (3.4)$$

donde los argumentos \bar{k} y $\bar{\xi}$ denotan evaluación en los valores nominales; siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- i) $G(\bar{k}, \bar{\xi}) = 0$
- ii) $\frac{\partial}{\partial \xi} G(k, \xi)$ existe en cada $(k, \xi) \in \Omega_r$ y es continua
- iii) $G(k, \xi)$ es continua en Ω_r
- iv) $\left(\frac{\partial}{\partial \xi} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right)^{-1}$ existe en $(R \times X)$.
- v) $\frac{\partial}{\partial k} G(k, \xi)$ existe en Ω_r y es continua en $(\bar{k}, \bar{\xi})$

Una vez asegurado el cumplimiento de estas condiciones podemos hablar de la ecuación (3.4) como modelo de sensibilidad, tiene la misma estructura que el modelo del sistema con diferencia sólo en los términos no homogéneos, y su solución nos dará los coeficientes de sensibilidad (3.3), pero dado que δk puede ser función de alguna de las variables independientes y las derivadas parciales indicadas en (3.4) son operadores, no siempre será posible despejar simplemente y resolver directamente para la derivada, lo que obliga a considerar por separado los dos casos:

- a) cuando k no es función de t o de z
- b) cuando k es función de t o de z

En (a) se considera a aquellos parámetros que en el desarrollo del modelo se suponen constantes y que están sujetos a variaciones, en general, por imprecisión en el cálculo o medición, tolerancias de fabricación, en vejecimiento lento (comparado con las constantes de tiempo del sistema).

En (b) se incluye a aquellos parámetros que en el desarrollo del modelo aparecen como función explícita de alguna de las variables independientes.

En el caso (a) es válido expresar el modelo de sensibilidad como:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \frac{\delta \xi}{\delta k} (\bar{k}) = - \left[\frac{\partial}{\partial k} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \quad (3.5)$$

y resolverlo directamente para la derivada.

En el caso (b) no es válido despejar de esta manera y es necesario buscar formas alternativas, bien sea para obtener la derivada misma o alguna caracterización de ella como sería a través del teorema de Frechet-Riesz (9, pag 142) usando el producto interno:

$$\delta \xi_i = \langle D_f, \delta k \rangle \quad (3.6)$$

que es la forma propuesta en (5), donde denominan a D_f como la derivada funcional, y que consiste en lo siguiente.

A partir de la ecuación (3.4) se aplica el producto interno con funciones arbitrarias $\psi(t, z)$:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \delta \xi, \psi \right\rangle = \left\langle - \frac{\partial}{\partial k} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \delta k, \psi \right\rangle$$

reescribiendo esta ecuación usando el operador adjunto:

$$\left\langle \delta \xi, \left(\frac{\partial}{\partial \xi} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \right)^+ \psi \right\rangle = \left\langle - \frac{\partial}{\partial k} G(\bar{k}, \bar{\xi}) \delta k, \psi \right\rangle$$

y a través de la elección adecuada de condiciones terminales y a la frontera para el problema adjunto, tratar de llegar a expresiones como la (3.6) e identificar por analogía la derivada funcional.

Aunque este método puede resultar atractivo y de fácil aplicación, tiene el inconveniente de ser demasiado costoso, ya que el fijar condiciones terminales al problema adjunto implica la necesidad de resolverlo para cada instante de tiempo y cada punto en z y salvo que se tengan expresiones explícitas para la solución, puede resultar prohibitivo.

En la siguiente sección se desarrollará el modelo de sensibilidad para el absorbedor y posteriormente se hará una descripción breve de los parámetros del mismo.

3.2 Modelo de sensibilidad

Se parte de las ecuaciones (3.1) y (3.2), a las que aplicando la transformada de Laplace llegamos a las ecuaciones (2.97) y (2.98) que transcribimos:

$$\hat{\xi}_1(s, z) - \frac{\Delta_2 \lambda}{u s} \int_0^z K(s, z, \sigma) \hat{\xi}_1(s, \sigma) d\sigma = F(s, z) \quad (3.7)$$

$$\hat{\xi}_2(s, z) = \frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \hat{\xi}_1(s, z) + \frac{\alpha \hat{dq} + \beta_r \hat{dw}}{s + \mu_r(z)} \quad (3.8)$$

donde $K(s, z, \sigma)$ y $F(s, z)$ están dadas por (2.99) y (2.100).

Expresando este modelo como:

$$G_1(k, \xi) = \hat{\xi}_1(s, z) - \frac{\Delta_2 \lambda}{u s} \int_0^z K(s, z, \sigma) \hat{\xi}_1(s, \sigma) d\sigma - F(s, z) = 0$$

$$G_2(k, \xi) = \hat{\xi}_2(s, z) - \frac{\lambda \xi_1(s, z)}{s + \mu_r(z)} - \frac{\alpha \hat{dq} + \beta_r \hat{dw}}{s + \mu_r(z)} = 0$$

podemos aplicar directamente el teorema sobre funciones implícitas ya que se satisfacen todas las condiciones enumeradas en la sección anterior (Apéndice C) siendo las expresiones siguientes:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G_1(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta \xi = \delta \xi_1(s, z) - \int_0^z \bar{K}(s, z, \sigma) \delta \xi_1(s, \sigma) d\sigma$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} G_2(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta \xi = \delta \xi_2(s, z) - \frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \delta \xi_1(s, z)$$

además:

$$\left[\frac{\partial}{\partial k} G_1(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta k = - \int_0^z \frac{\partial k}{\partial k}(s, z, \sigma) \bar{\xi}_1(s, \sigma) \delta k d\sigma - \frac{\partial F}{\partial k} \delta k$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial k} G_2(\bar{k}, \bar{\xi}) \right] \delta k = - \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \right] \bar{\xi}_1(s, z) \delta k - \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{\alpha \hat{dq} + \beta_r \hat{dw}}{s + \mu_r(z)} \right] \delta k$$

escribiendo estos términos como la ecuación (3.4) tenemos el modelo de sensibilidad para el absorbedor.

$$\delta \xi_1(s, z) - \int_0^z \bar{K}(s, z, \sigma) \delta \xi_1(s, \sigma) d\sigma = \int_0^z \frac{\partial \bar{K}}{\partial k}(s, z, \sigma) \bar{\xi}_1(s, \sigma) \delta k d\sigma + \frac{\partial F}{\partial k} \delta k \quad (3.9)$$

$$\delta \xi_2(s, z) - \frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \delta \xi_1(s, z) = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\lambda}{s + \mu_r(z)} \right) \bar{\xi}_1(s, z) \delta k + \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\alpha dq + \beta_r dw}{s + \mu_r(z)} \right) \delta k \quad (3.10)$$

donde $(\bar{\cdot})$ indica evaluación con valores nominales de los parámetros.

Estas dos ecuaciones junto con las (3.7) y (3.8) nos dan los coeficientes de sensibilidad en el dominio de la transformada de Laplace.

3.3 Descripción de los parámetros

Los parámetros que aparecen en las ecuaciones (3.7) y (3.8) (λ , β_r , etc) son agrupamientos de los parámetros básicos del sistema que resultan al desarrollar el modelo base (Apéndice A) y dado que no tienen significación física relevante, no tendría mucho valor hacer análisis de sensibilidad respecto a ellos.

A continuación se describen brevemente los parámetros básicos del absorbedor y respecto de los cuales se plantean modelos de sensibilidad.

3.3.1 Parámetros de la superficie selectiva

Al tubo absorbedor se le cubre con una superficie selectiva que es la que determina el comportamiento del absorbedor en la transferencia de calor por radiación, del sol al tubo y del tubo al ambiente, mediante 2 parámetros, absortancia y emitancia.

Tanto la absorptancia como la emitancia dependen de la distribución en longitud de onda de la radiación y esta distribución depende de la temperatura del cuerpo emisor, y es esta característica lo que le puede dar selectividad a una superficie[†]. Si consideramos que el 98% de la radiación solar está distribuida con longitud de onda menor de 3.0 μm y que sólo el 1% de la radiación de un cuerpo negro a 250°C ocurre a longitudes de onda menores de 3.0 μm sería deseable tener una superficie con la característica ideal mostrada en la figura 3.1 ya que de la ley de Kirchoff (18) se sabe que

$$\rho_{\lambda} = 1 - \alpha_{\lambda} = 1 - \epsilon_{\lambda}$$

donde el subíndice denota una longitud de onda dada.

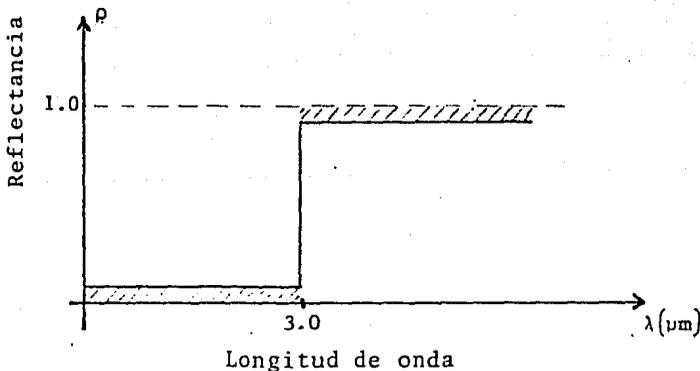


FIG 3.1 Característica ideal de una superficie selectiva

[†] En aplicaciones solares con temperaturas de trabajo menores, las pérdidas por radiación no son tan relevantes para buscar superficies selectivas cercanas al ideal.

Un material que se acerca a esta característica, y que es el usado en los colectores descritos, es el cromo negro que tiene una característica como la mostrada en la figura 3.2 (18).

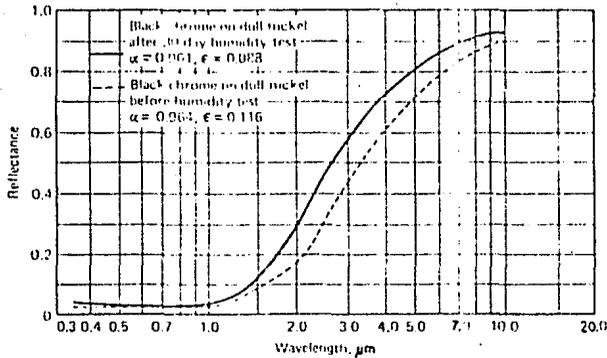


FIG 3.2 Reflectancia vs. longitud de onda para cromo negro

Los valores nominales utilizados y que son en realidad un promedio sobre el rango de espectro adecuado son:

$$\alpha = 0.87$$

$$\epsilon = 0.09$$

Como se puede apreciar en la figura estos parámetros sufren variaciones con el envejecimiento del material lo que depende en general, de la calidad del depositado de la superficie.

3.3.2 Coeficientes de convección

Estos determinan la transferencia de calor por convección del tubo al fluido (h_i) y del tubo al medio ambiente (h_o); describiremos primero el h_i .

Este coeficiente depende, además de las propiedades de los materiales, de la temperatura y régimen de flujo del fluido, así como de la rugosidad de la superficie y de la geometría de los elementos que intervienen. Las expresiones que se encuentran en la literatura para estimar este coeficiente se obtienen, en general, mediante correlaciones de grupos adimensionales con experimentos realizados en laboratorio llegando a tener, en el mejor de los casos, desviaciones de $\pm 40\%$ entre el valor predicho por la expresión usada y el valor real. Además de esta incertidumbre, la variación más importante de este coeficiente es con el régimen de flujo (en (19) se hace un análisis breve de estas variaciones, de donde se tomó la figura 3.3) siendo tal que se introduce un elemento (intensificador de calor) para asegurar que se tiene un régimen de flujo turbulento independientemente de la temperatura del fluido y del flujo másico.

En este trabajo se hace la simplificación máxima sobre este coeficiente al aproximarlos por un valor constante que es un valor intermedio de las variaciones predichas por la expresión (3.11) para las temperaturas del fluido nominales a la entrada y salida del absorbedor

$$h_i = 70 + 0.018 \dot{m}^{0.8} T_1 \quad (3.11)$$

$$h_i = 400$$

donde: \dot{m} - flujo; T_1 - temperatura del fluido

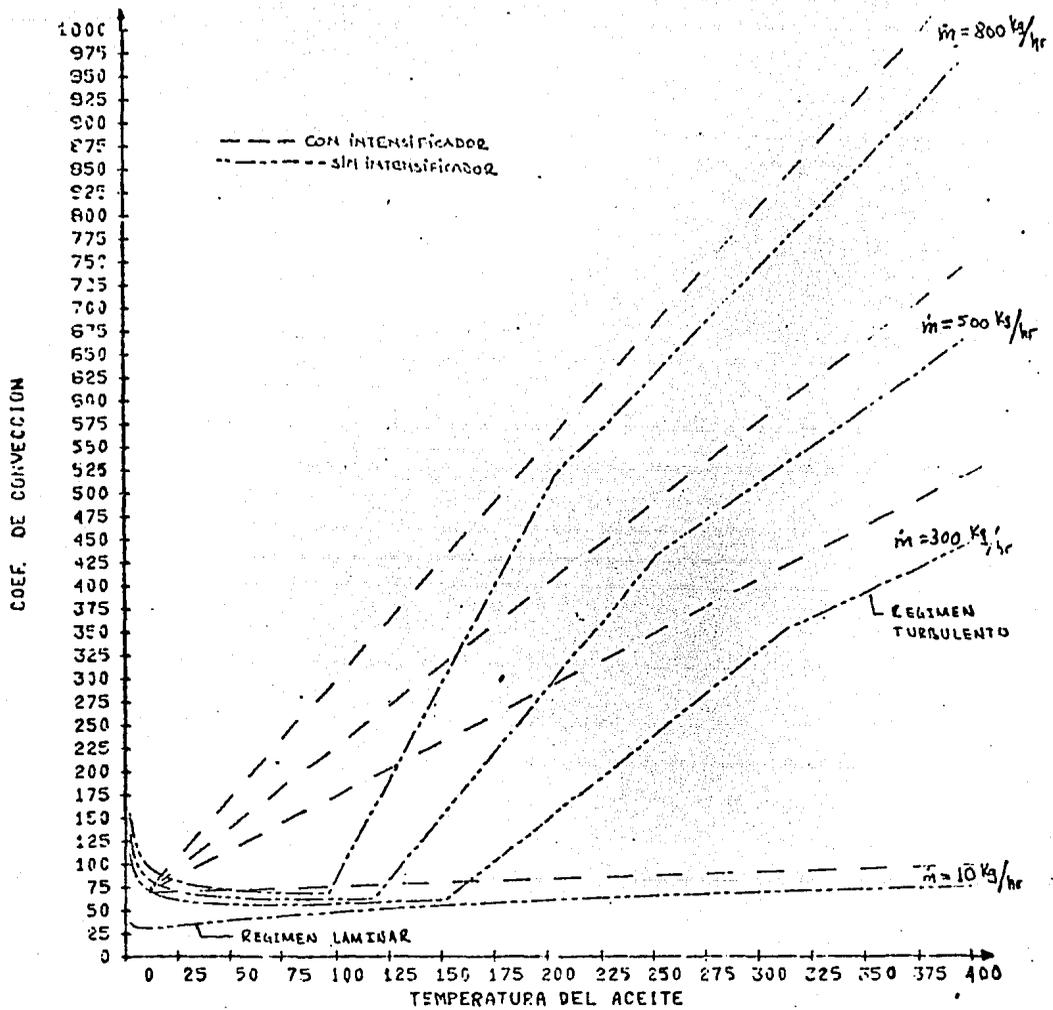


Fig. 3.3 Coeficientes de convección con y sin intensificador de transferencia de calor para diferentes valores de flujo másico.

Para el coeficiente de convección exterior (h_o) se utiliza una expresión empírica que relaciona este coeficiente con la velocidad del viento obtenida, al igual que h_i , mediante correlaciones de datos experimentales con grupos adimensionales. En este trabajo se considera constante la velocidad del viento en 5 m/seg con lo que se obtiene

$$h_o = 4.9 + 3.267 V = 21.35 \quad (3.12)$$

3.3.3 Propiedades del aceite

En forma explícita sólo intervienen la densidad y el calor específico. Para estos parámetros, el fabricante proporciona las siguientes expresiones con validez para temperaturas entre 37.7°C y 260°C:

$$\rho_1 = 883.7 - 62.97 \times 10^{-2} T_1 \quad (3.13)$$

$$c_1 = 0.4322 + 8.678 \times 10^{-4} T_1 \quad (3.14)$$

donde T_1 es la temperatura del aceite. Se utilizaron los siguientes valores, que son el valor medio en el rango de validez:

$$\rho_1 = 783 \text{ kg/m}^3$$

$$c_1 = 0.571 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$$

3.3.4 Propiedades del absorbedor

Al igual que para el fluido, sólo aparecen explícitamente la densidad y el calor específico tomados de la literatura (18) para el cobre:

$$\rho_2 = 8795 \text{ kg/m}^3$$

$$c_2 = 0.1 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$$

3.3.5 Geometría del colector

Aparecen en forma explícita tres parámetros de la geometría del colector: diámetros interior y exterior del absorbedor y apertura del espejo con los siguientes valores nominales:

$$\phi_i = 0.0255 \text{ m}$$

$$\phi_o = 0.0286 \text{ m}$$

$$a = 2.5 \text{ m}$$

3.3.6 Entradas

Aún cuando estrictamente no se les puede llamar parámetros, es posible tratarlos en la misma manera y hacer análisis de sensibilidad respecto a ellos ya que siempre estarán sujetos a variaciones por imprecisiones en medición y factores como el clima y conocer la sensibilidad del sistema respecto a las entradas puede dar información útil.

a) Radiación solar. En la figura 3.4 se muestran dos curvas de la radiación solar para un día soleado y un día nublado que dan una clara idea de las variaciones que se pueden esperar. El valor usado para la solución estacionaria en torno a la que se linealiza fue estimado como promedio esperado en la zona donde está instalada la planta solar.

b) Temperatura ambiente.

Se tomó un valor arbitrario de 20°C para la solución estacionaria que trata de estar cerca del promedio esperado durante las horas que podría operar la planta en un día.

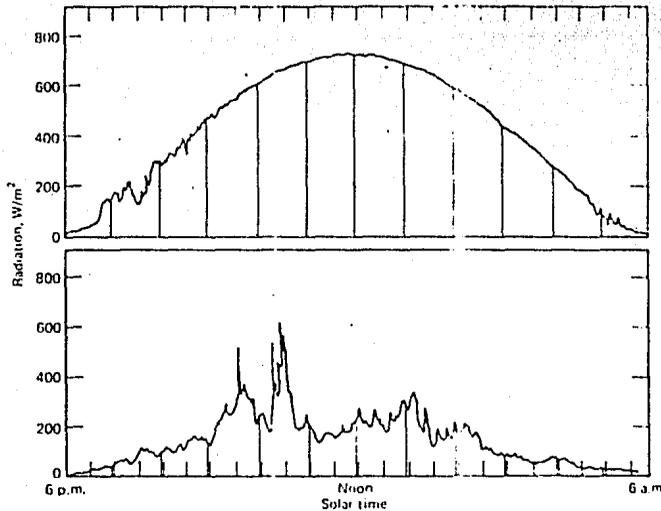


FIG 3.4 Radiación Solar Total.

c) Flujo de aceite.

Se le considera la variable de control y su valor nominal fue estimado, para obtener aproximadamente 250°C a la salida del colector, como 250 kg/hr.

d) Temperatura de entrada.

Se supone un valor nominal de 210°C y está sujeto a variaciones dadas por la dinámica de otros elementos de la planta y de la forma de operación de la misma.

Estos son los parámetros para los que se resuelve, o por lo menos se plantea un modelo de sensibilidad. No están agotadas las posibilidades, pero en este trabajo sólo se desea dejar planteado un método para hacer análisis

sis de sensibilidad formalmente y los resultados numéricos obtenidos para el absorbedor deben verse más bien como un ejemplo y una guía para uso posterior en el diseño.

4. SOLUCION DEL MODELO DE SENSITIVIDAD

Como se mencionó en la sección 3.1, la solución del modelo depende de qué clase de parámetro se esté analizando, para el caso de parámetros que no son función de las variables independientes se resuelve en la misma forma que el modelo del sistema, como se describirá en la siguiente sección, con lo que se obtuvieron resultados para los parámetros mencionados en las secciones 3.3.1 a la 3.3.5 utilizando los valores de las entradas que se usaron en el capítulo 2.

Para el caso de parámetros función de alguna de las variables independientes, como son las entradas, se da el planteamiento de la solución según el método propuesto en (5) pero no se obtuvieron resultados numéricos debido al alto tiempo de procesador que sería necesario y aunque se trató de llegar a obtener una forma de solución más eficiente para este caso, debido a limitaciones de tiempo no se logró un resultado positivo.

4.1 Planteamiento de la solución

Para parámetros que no son función de las variables independientes y a partir de (3.7) a (3.10) se siguen los siguientes pasos para cada parámetro:

- a) Dada la transformada de Laplace de las entradas, resolver la ecuación integral (3.7) y evaluar la expresión (3.8) con los valores nominales de los parámetros.
- b) Resolver la ecuación integral (3.9) usando la información obtenida en (a) y evaluando, cuando sea necesario, con los valores nominales de los parámetros.
- c) Evaluar la ecuación (3.10) usando los resultados de (a) y (b).
- d) Antitransformar numéricamente los resultados de (b) y (c).

Para parámetros que son función de alguna de las variables independientes el método propuesto en (5) sigue los siguientes pasos para cada parámetro con la diferencia, respecto al caso anterior que obtiene el modelo de sensibilidad de la formulación en ecuaciones diferenciales del modelo del sistema. Este se puede obtener también con el teorema sobre funciones implícitas descrito en el capítulo anterior tras verificar el cumplimiento de las condiciones dadas.

- a) Aplicar el producto interno con funciones arbitrarias a las ecuaciones del modelo de sensibilidad.

- b) Determinar el operador adjunto del modelo de sensibilidad.
- c) Fijar las condiciones a la frontera y condiciones terminales para el problema adjunto que permitan obtener expresiones del tipo de la (3.6) e identificar por analogía la derivada funcional.
- d) Resolver, analítica o numéricamente, el modelo del sistema y el problema adjunto con valores nominales de los parámetros.
- e) Evaluar las expresiones obtenidas en (c) para la derivada funcional.

4.2 *Análisis de resultados*

Puesto que se aplicaron las entradas por separado y los valores elegidos son más bien arbitrarios, se hará una comparación de los resultados para cada entrada. En las tablas 4.1 y 4.2 se dan los valores máximos que alcanzan los coeficientes de sensibilidad para cada entrada, indicándose con una T si éste valor máximo ocurre como un transitorio y llega a un estado estacionario de magnitud menor y con una E si el valor máximo ocurre en el estado estacionario.

4.2.1 Radiación solar

En las figuras (4.1) a (4.10) se muestran los resultados obtenidos para esta entrada, de donde se puede decir lo siguiente:

- La respuesta del absorbedor es mucho más sensible a variaciones en la absortancia que de la emitancia de la superficie selectiva.

- La sensibilidad respecto al coeficiente de convección exterior es mayor que respecto del coeficiente de convección interior.
- Para este último, el coeficiente de sensibilidad del fluido presenta un transitorio y tiende a regresar a cero y la magnitud máxima es de las más bajas comparada con el resto de los parámetros.
- La sensibilidad respecto a la densidad del aceite tiene poca significación, los valores máximos, de magnitud pequeña, ocurren en transitorios de corta duración y se atenúan al paso por el absorbedor.
- La sensibilidad respecto a la densidad del tubo es la de menor magnitud y su valor máximo ocurre cuando la temperatura del tubo está aproximadamente en un 72% del valor final regresando a cero en el estado estacionario.
- Los coeficientes de sensibilidad respecto al calor específico tanto del tubo como del fluido son los que alcanzaron la magnitud mayor entre todos los parámetros, pero dada la magnitud de estos parámetros y el tipo de variaciones esperadas, no implica situaciones críticas. Cabe destacar la forma que tiene el coeficiente para el calor específico del fluido (fig 4.7) en el estado estacionario que muestra una variación a lo largo del absorbedor que puede ser importante en la determinación de una longitud óptima.
- El resultado obtenido para la apertura del espejo da una magnitud que puede ser importante para el diseño de los espejos, aunque debe recordarse que aquí no se consideran aún el efecto de imperfecciones en el espejo y el efecto del envolvente.

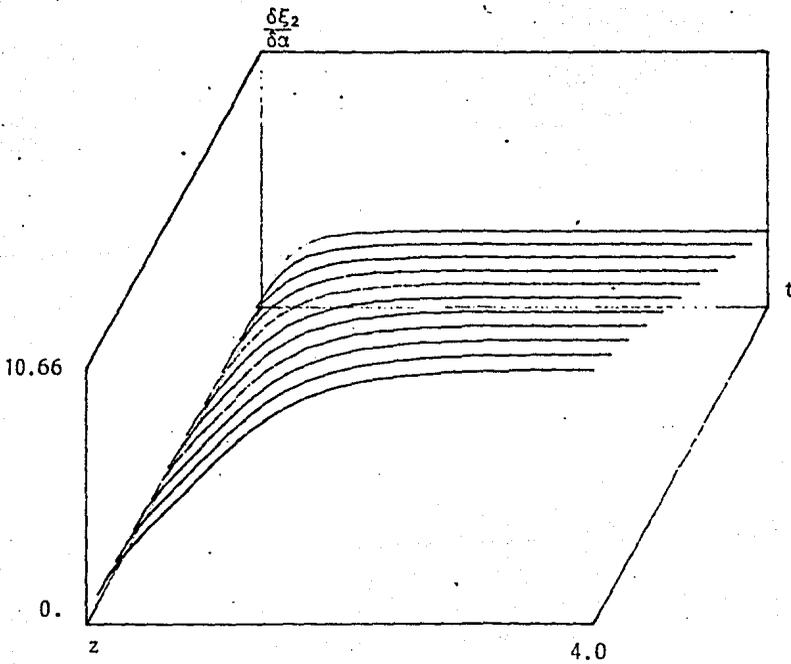
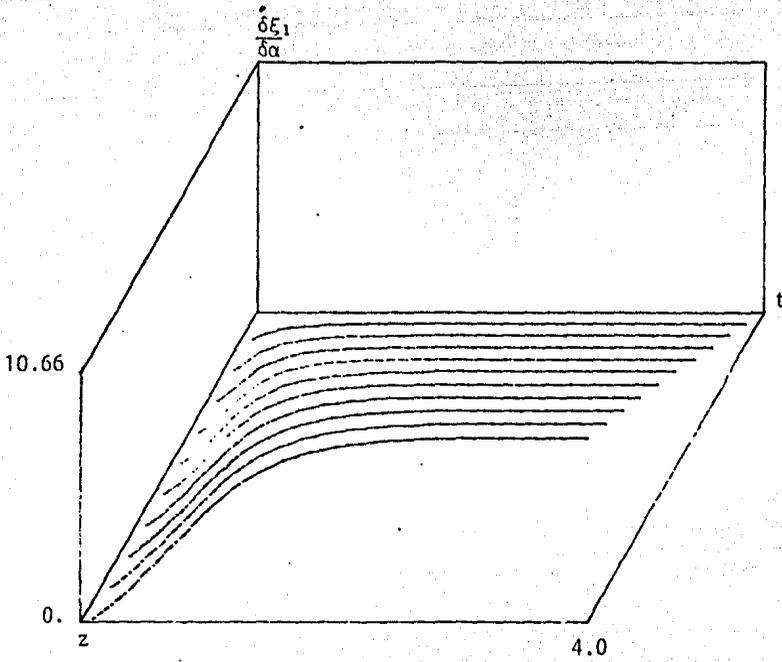


Fig 4.1 Coeficientes de sensibilidad respecto de la absorptancia cuando la entrada es un escalón en la radiación solar.

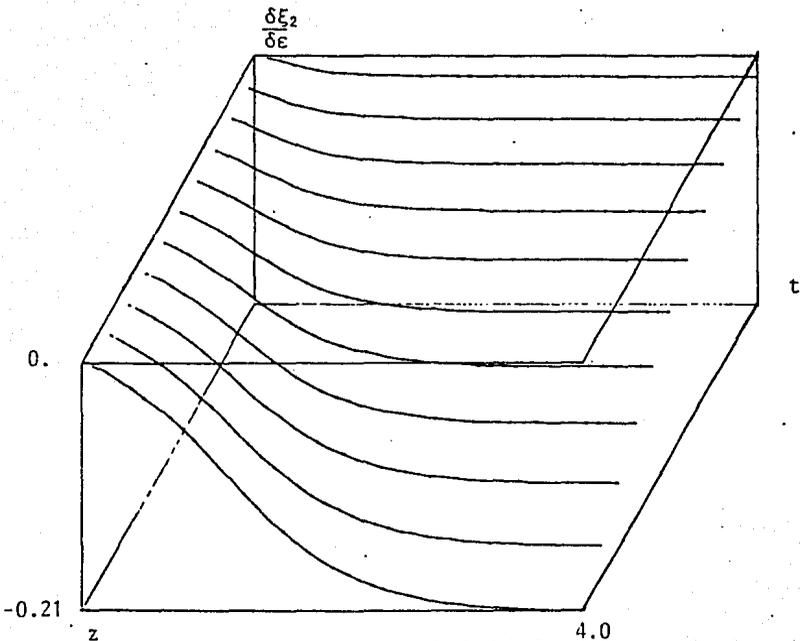
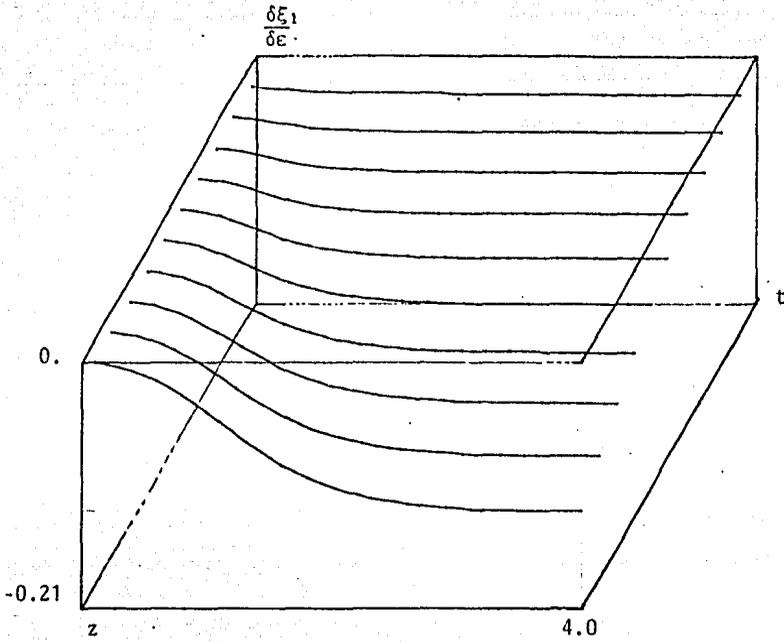


Fig 4.2 Coeficientes de sensibilidad respecto de la emitancia para un escalón en la radiación solar.

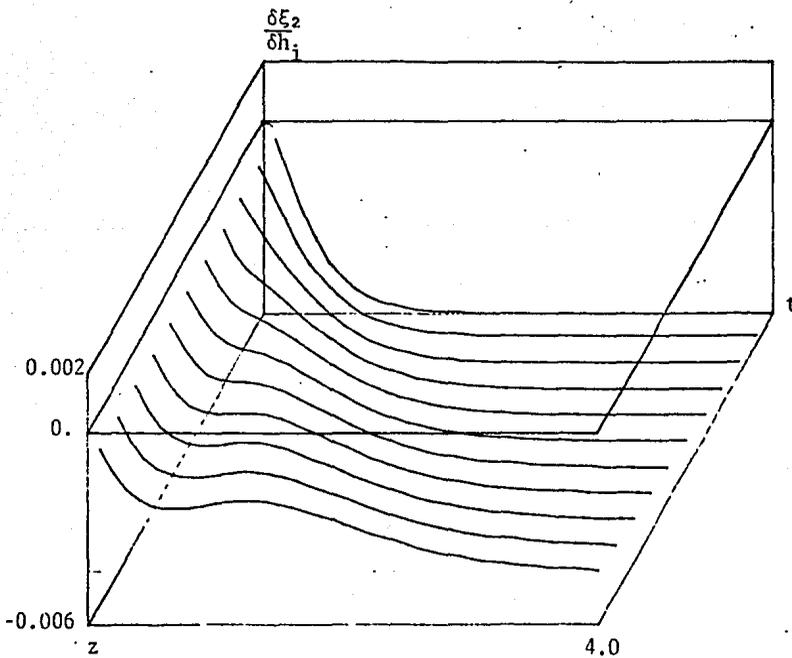
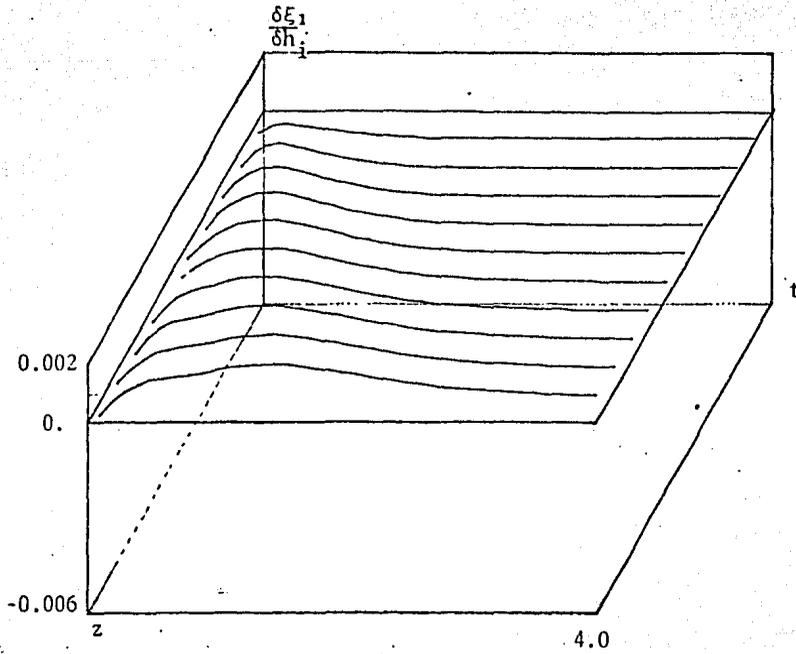


Fig 4.3 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección interior para un escalón en la radiación solar.

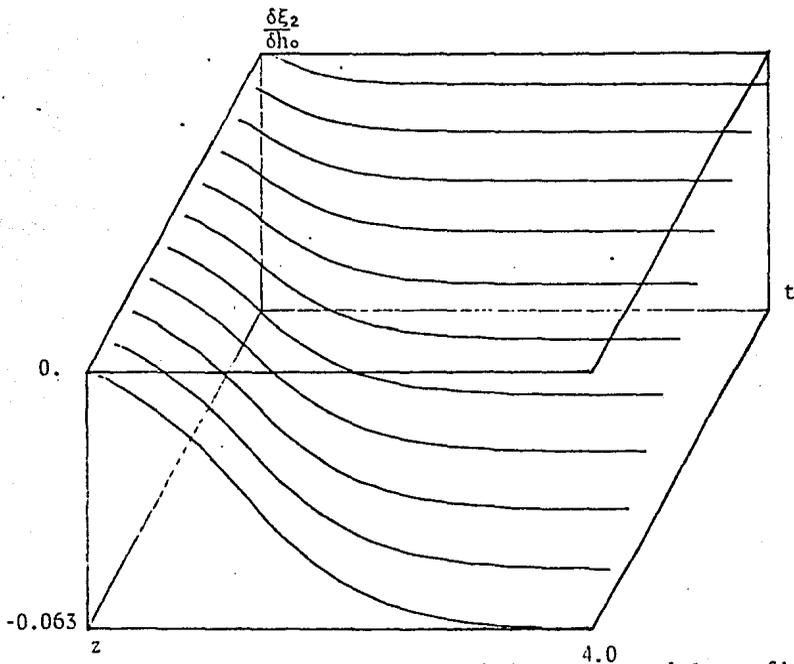
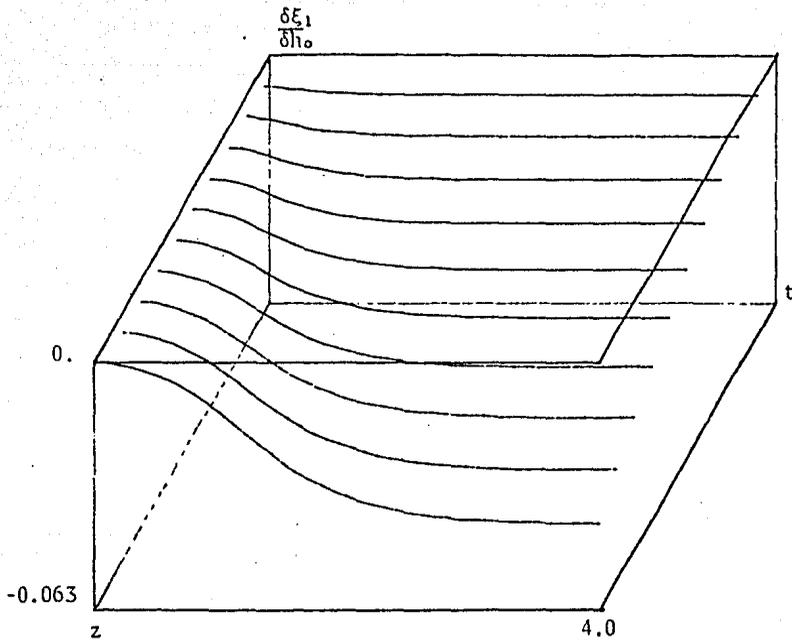


Fig 4.4 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección exterior para un escalón en la radiación solar.

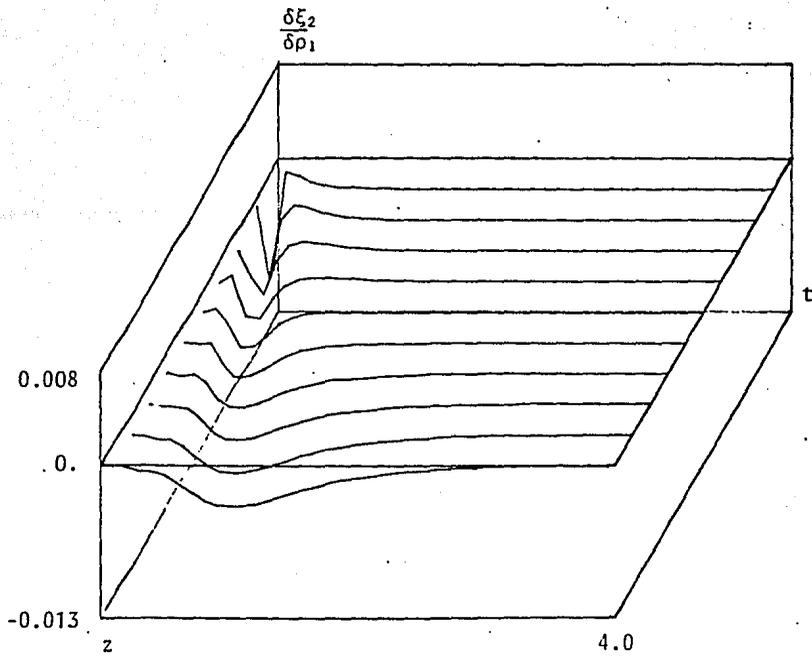
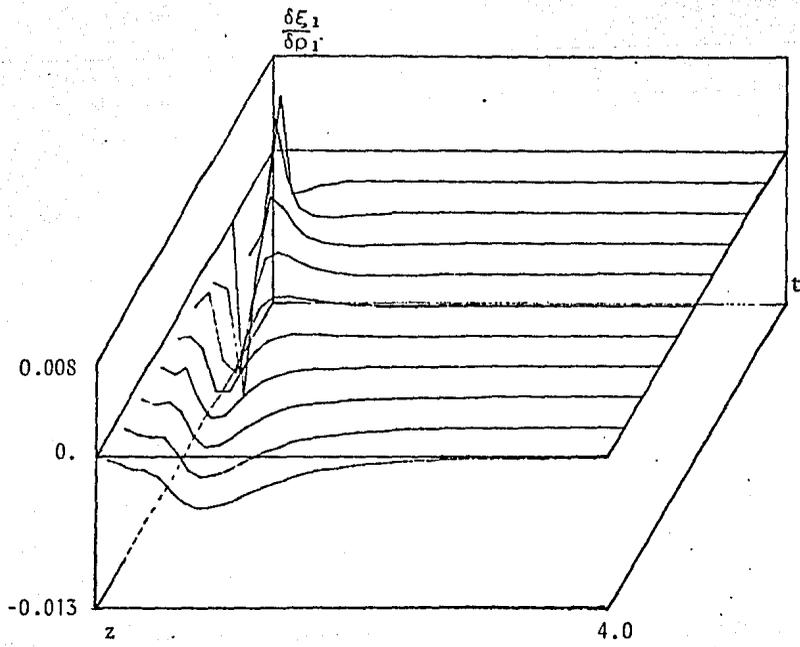


Fig 4.5 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del fluido para un escalón en la radiación solar.

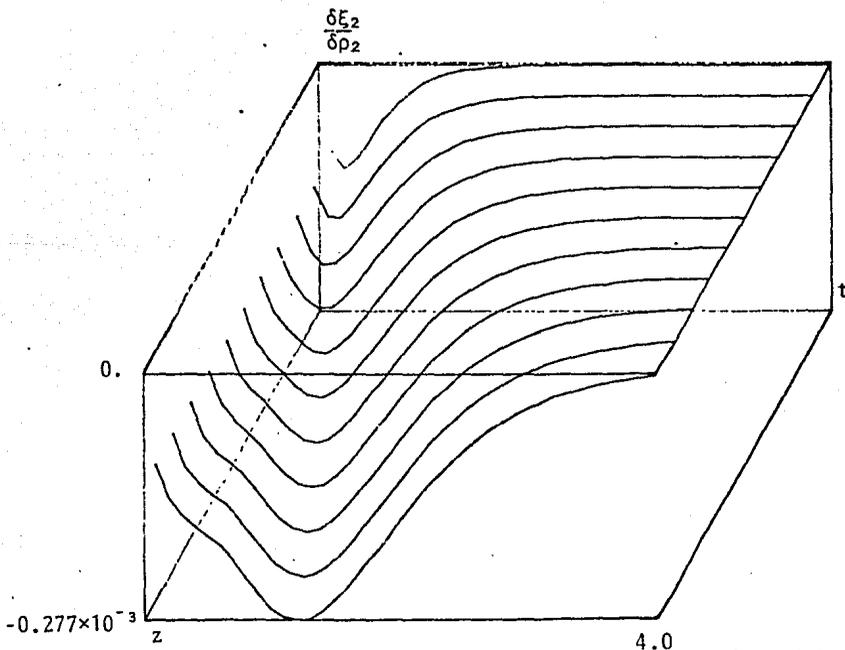
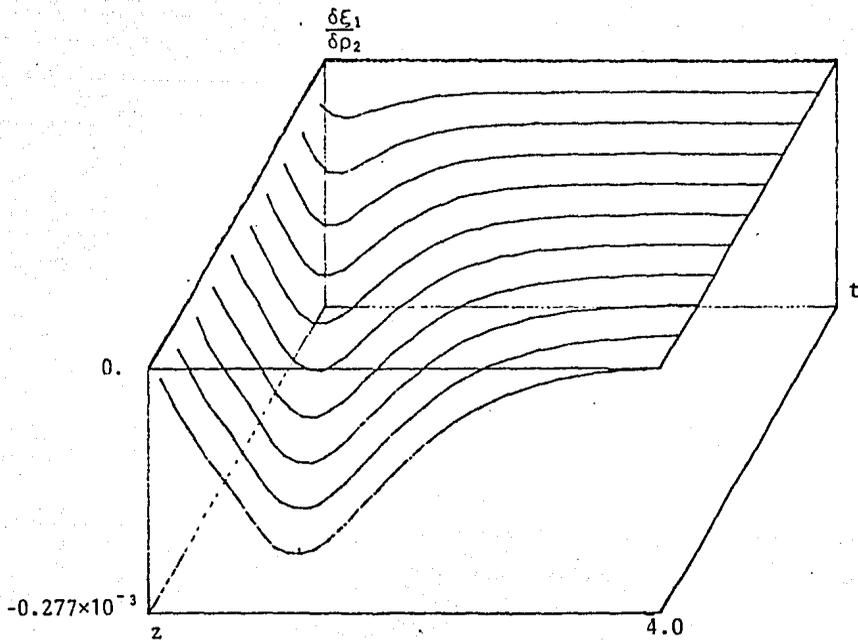


Fig 4.6 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del tubo para un escalón en la radiación solar

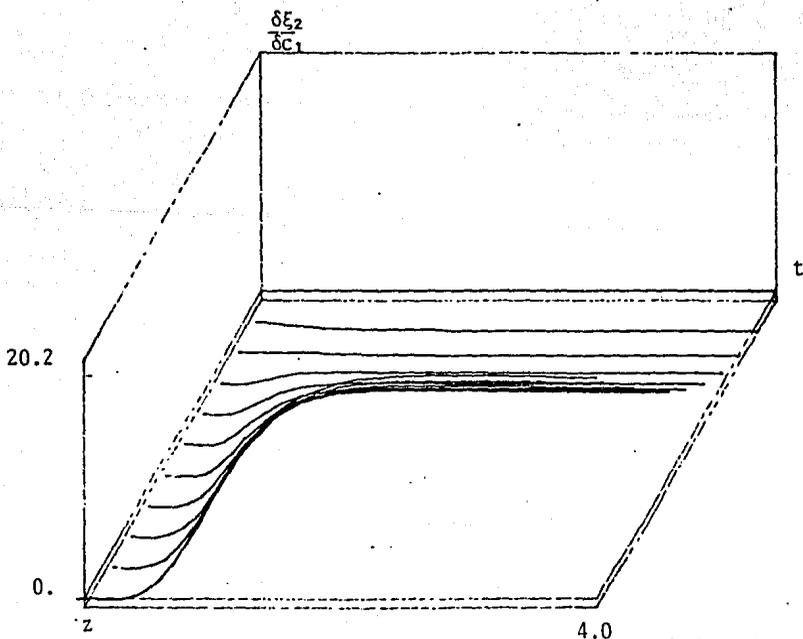
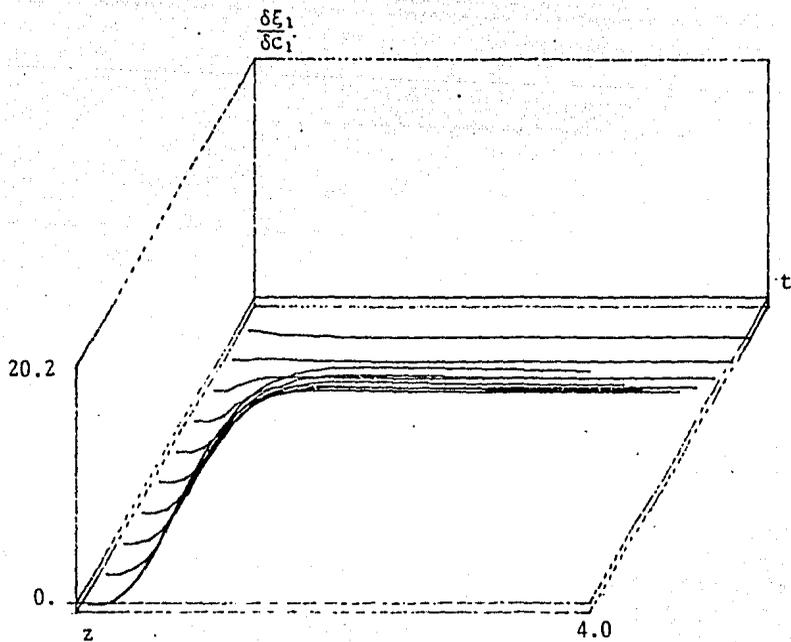


Fig 4.7 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del fluido para un escalón en la radiación solar.

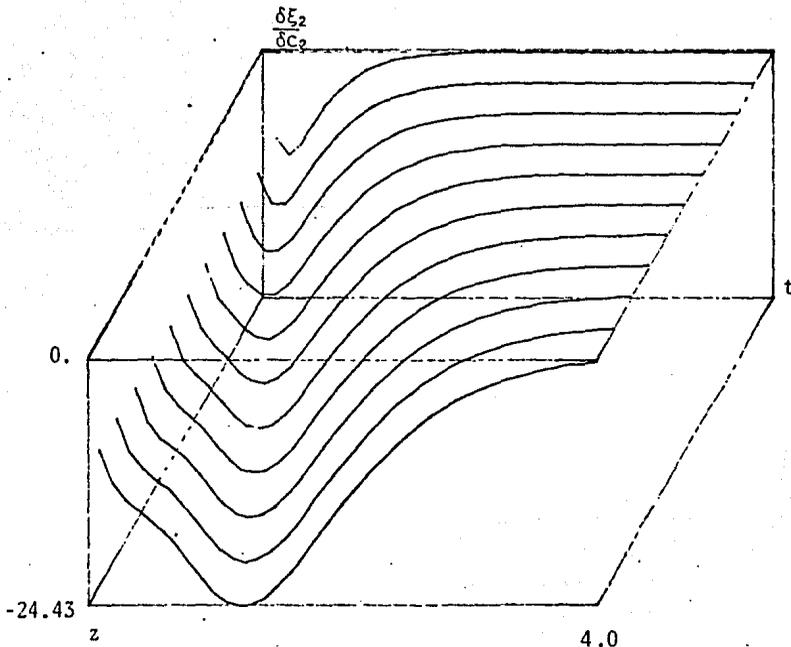
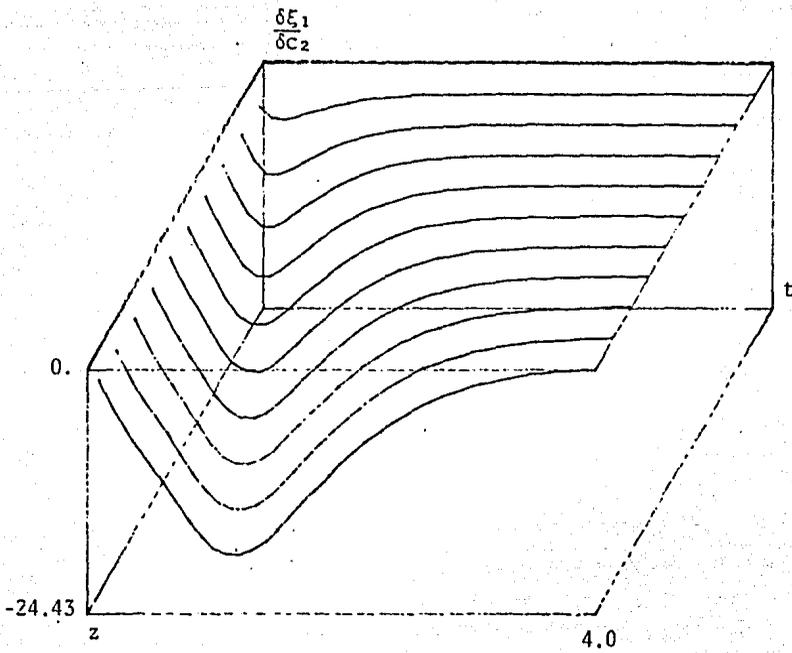


Fig 4.8 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del tubo para un escalón en la radiación solar.

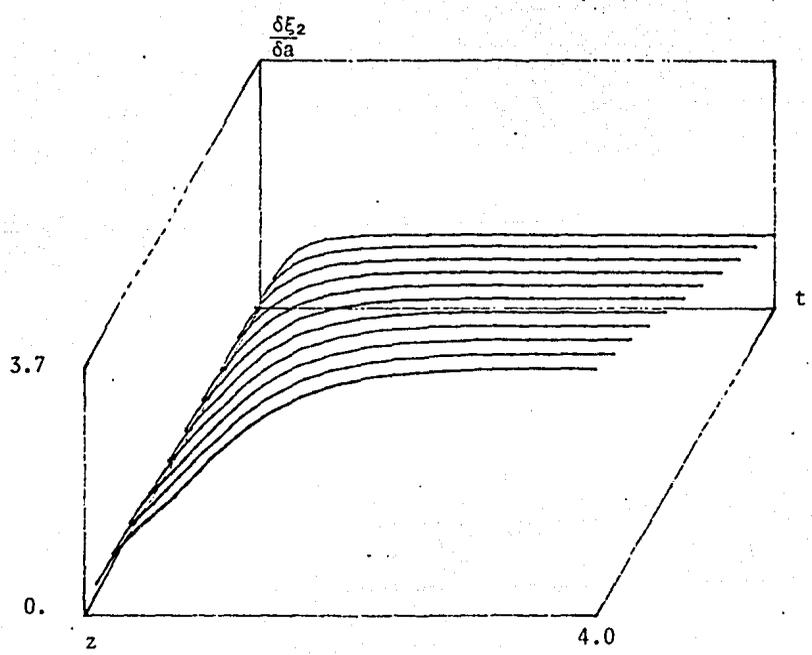
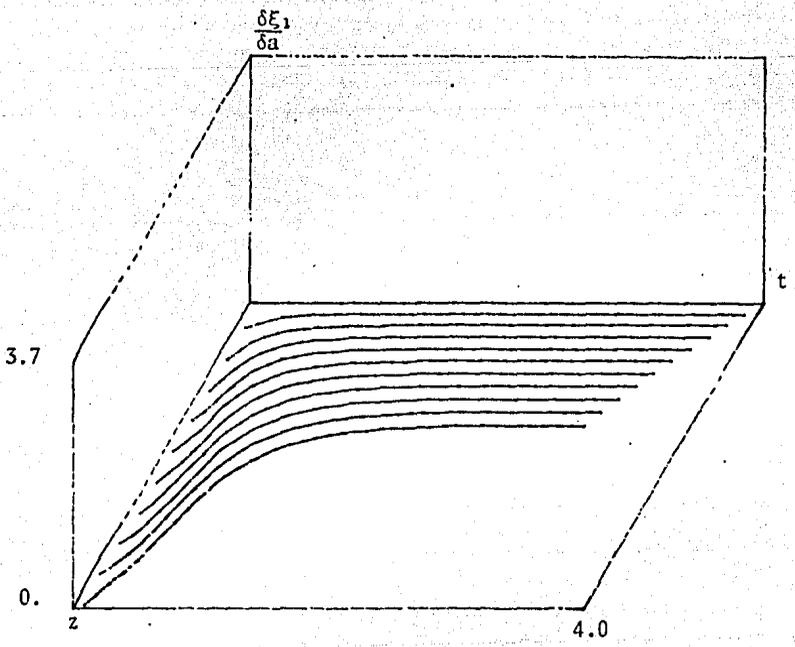


Fig 4.9 Coeficientes de sensibilidad respecto de la apertura del espejo para un escalón en la radiación solar.

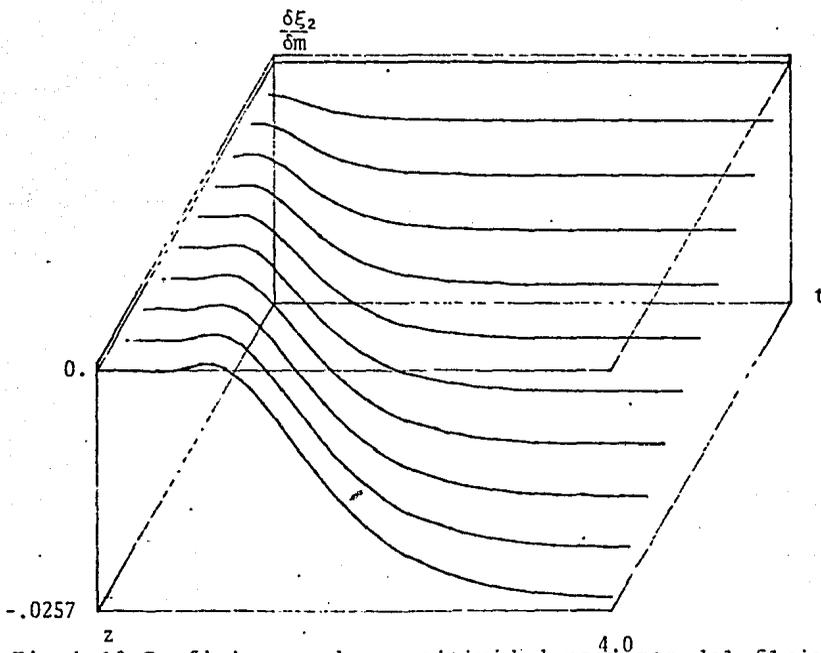
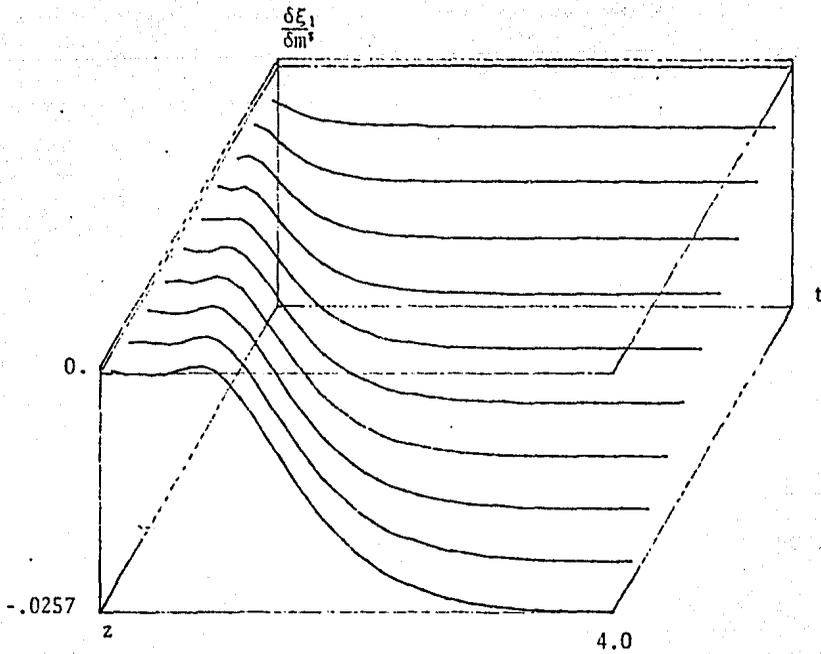


Fig 4.10 Coeficientes de sensibilidad respecto del flujo nominal para un escalón en la radiación solar.

- Aún cuando el coeficiente para el flujo nominal presenta una magnitud baja (comparada con otros parámetros) ésta debe tomarse en cuenta al analizar el resto de las condiciones nominales del punto de operación, que no se hizo aquí por no aparecer explícitamente en el modelo linealizado.

Todas estas observaciones tienen validez para el punto nominal seleccionado y no necesariamente será válida para otro cualquiera que se elija.

4.2.2 Temperatura ambiente

En las figuras (4.11) a (4.17) se muestran los resultados de donde se puede decir lo siguiente:

- Para el coeficiente de convección exterior (h_o) hay un cambio de signo en el coeficiente de sensibilidad respecto del obtenido con un escalón en la radiación disminuyendo la magnitud máxima alcanzada.
- Para el resto de los parámetros se conserva el comportamiento comentado para la radiación solar disminuyendo sólo las magnitudes máximas alcanzadas.

4.2.3 Flujo de aceite

Los resultados para esta entrada se muestran en las figuras (4.18) a (4.24).

- La sensibilidad de la temperatura del fluido respecto del coeficiente de convección interior presenta un transitorio más rápido que en

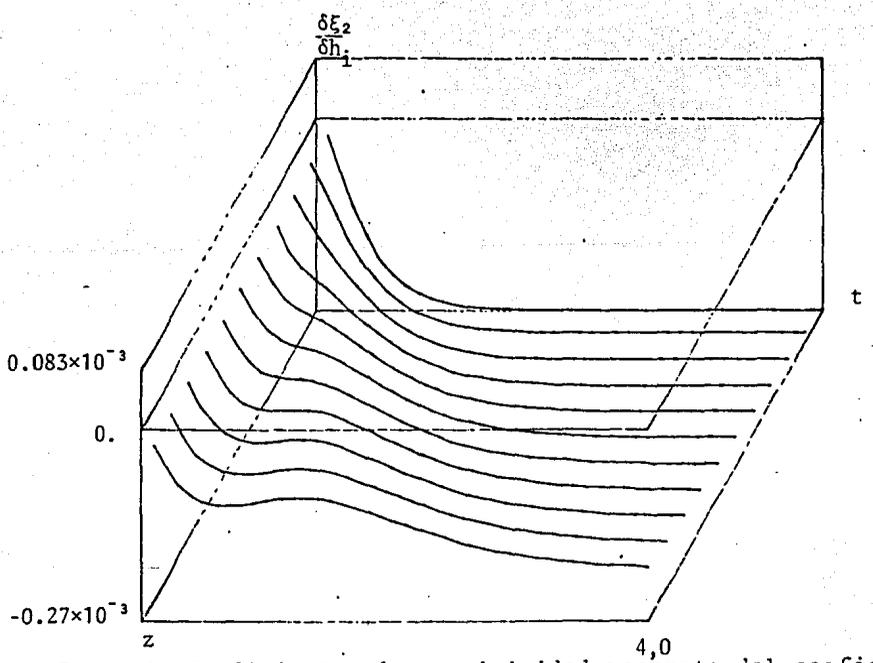
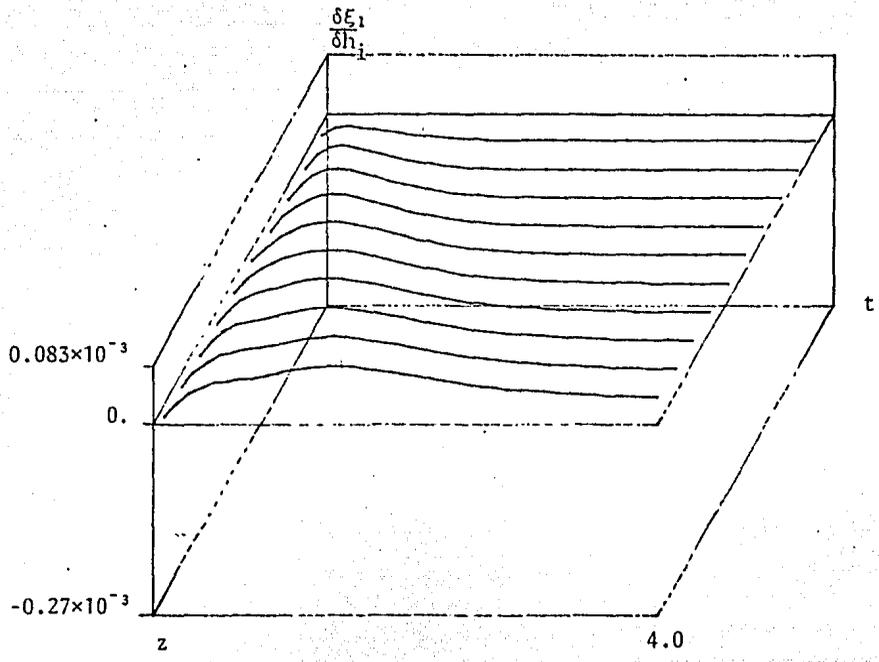


Fig 4.11 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección interior para un escalón en la temp. ambiente.

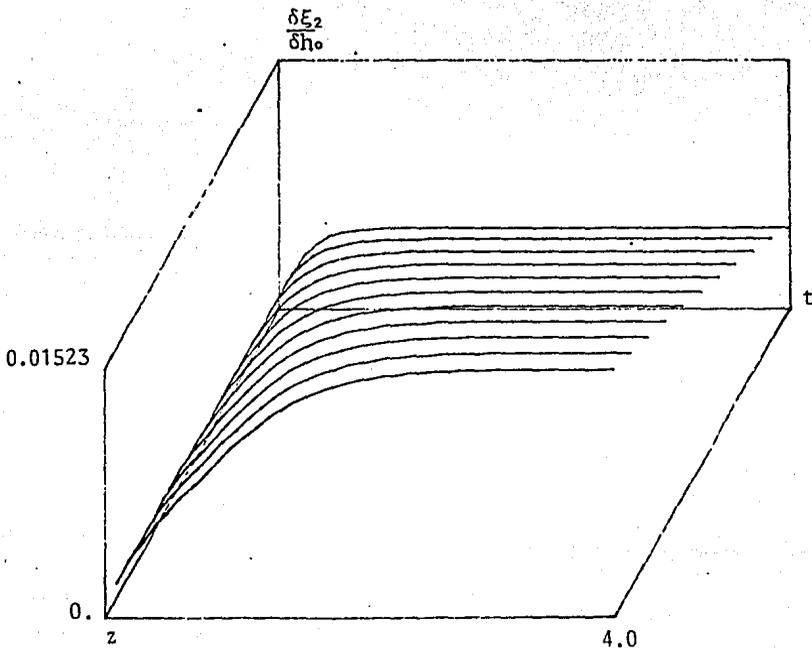
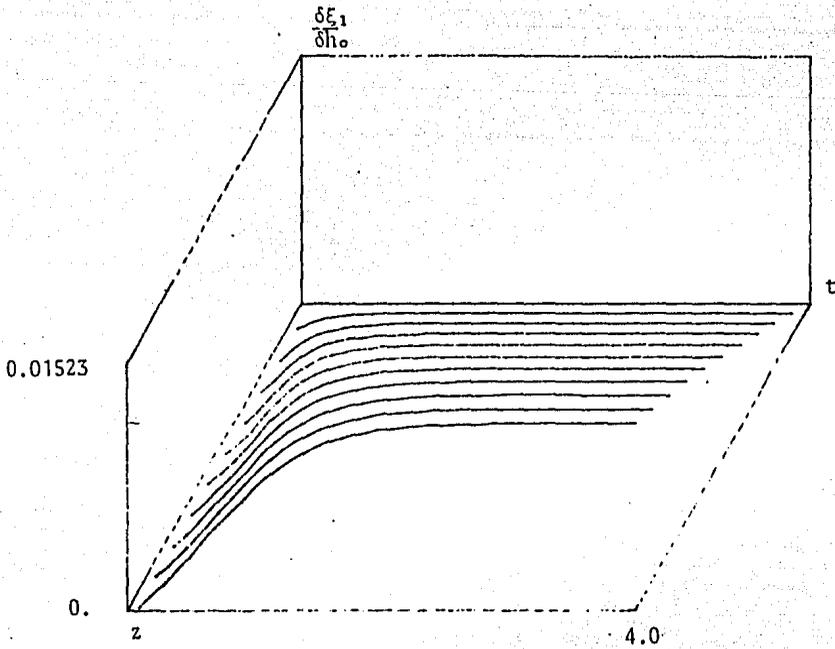


Fig 4.12 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección exterior para un escalón en la temp. ambiente.

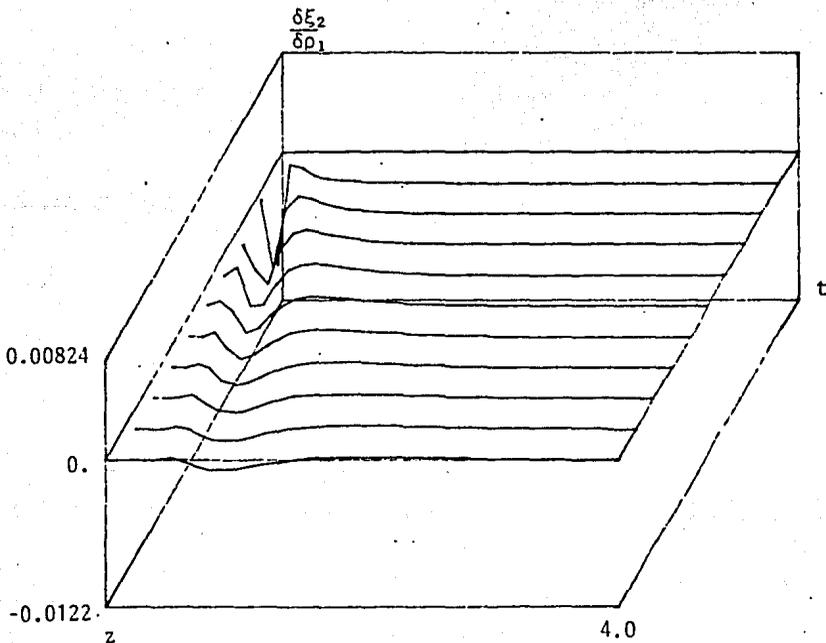
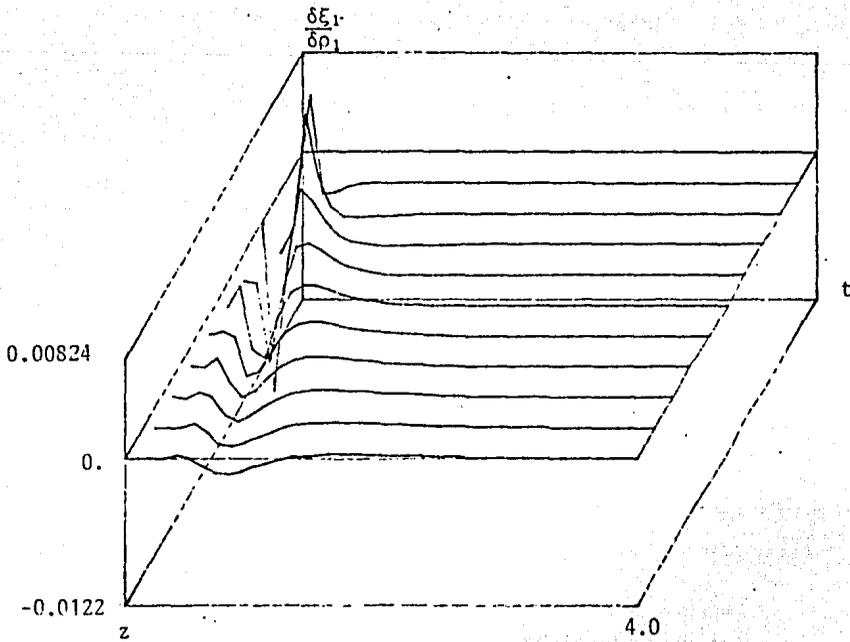


Fig 4.13 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del fluido para un escalón en la temperatura ambiente.

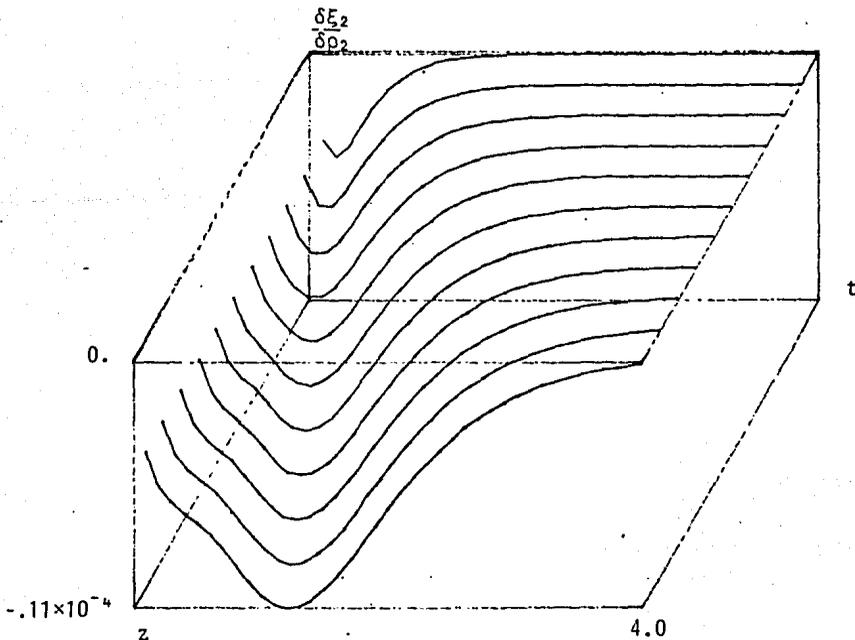
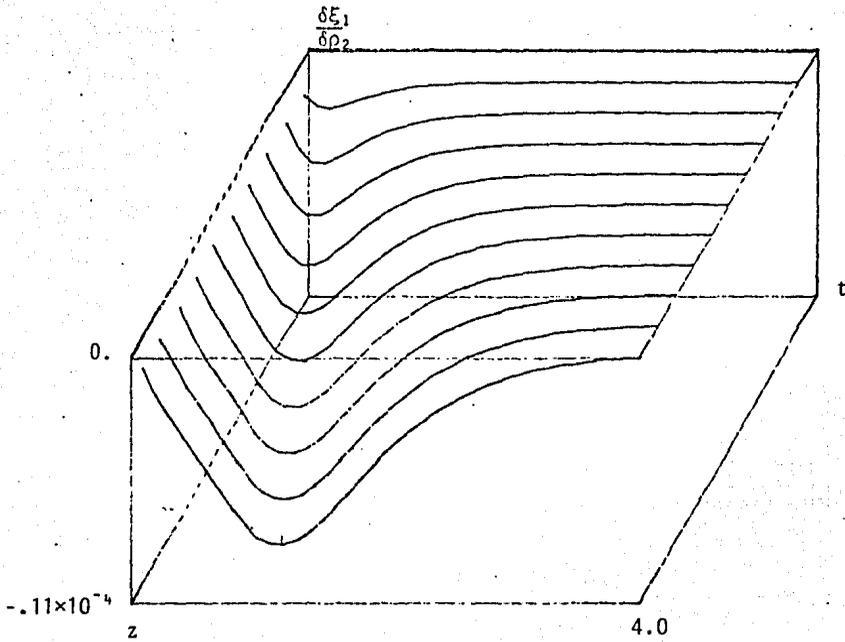


Fig 4.14 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del tubo para un escalón en la temperatura ambiente.

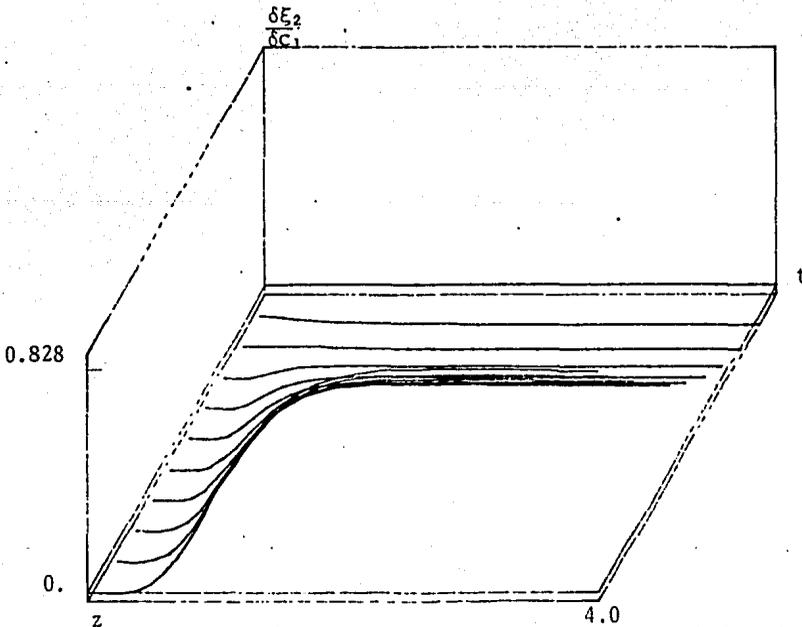
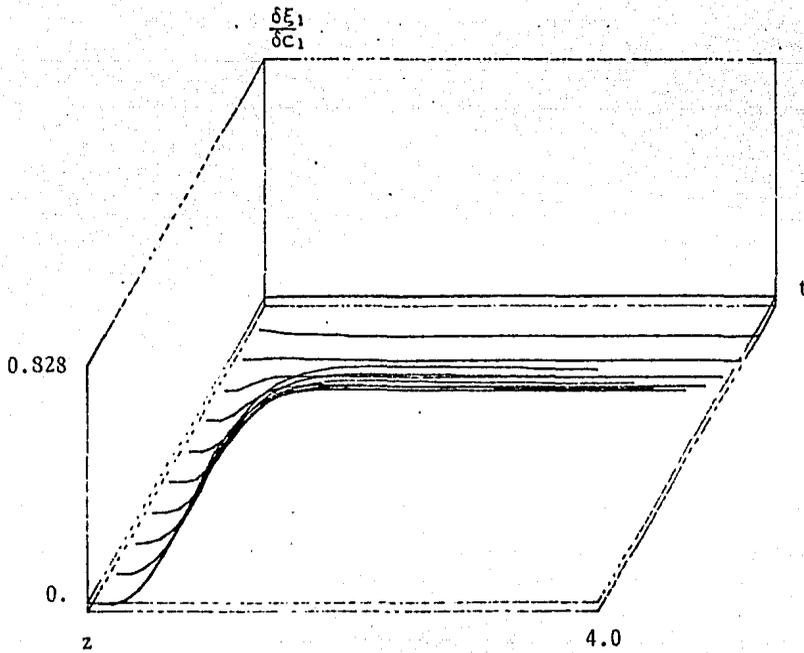


Fig 4.15 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del fluido para un escalón en la temperatura ambiente.

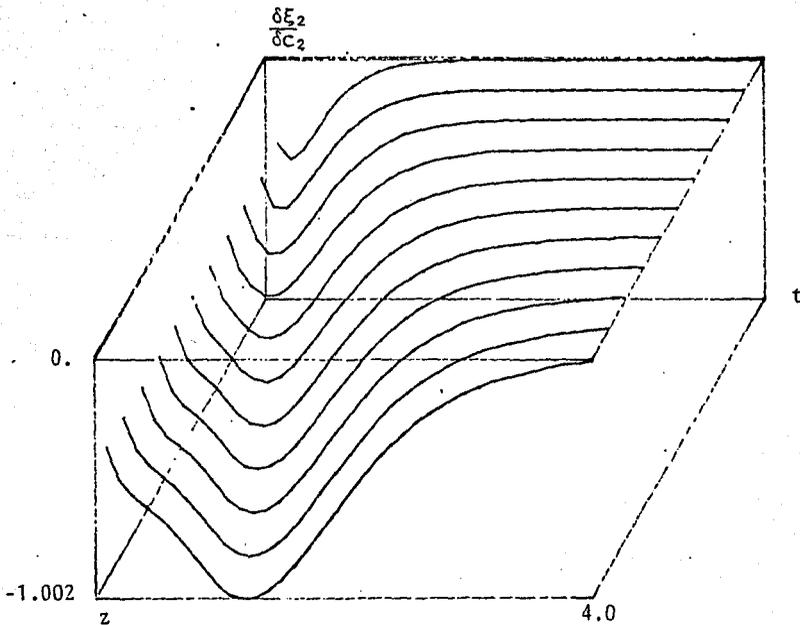
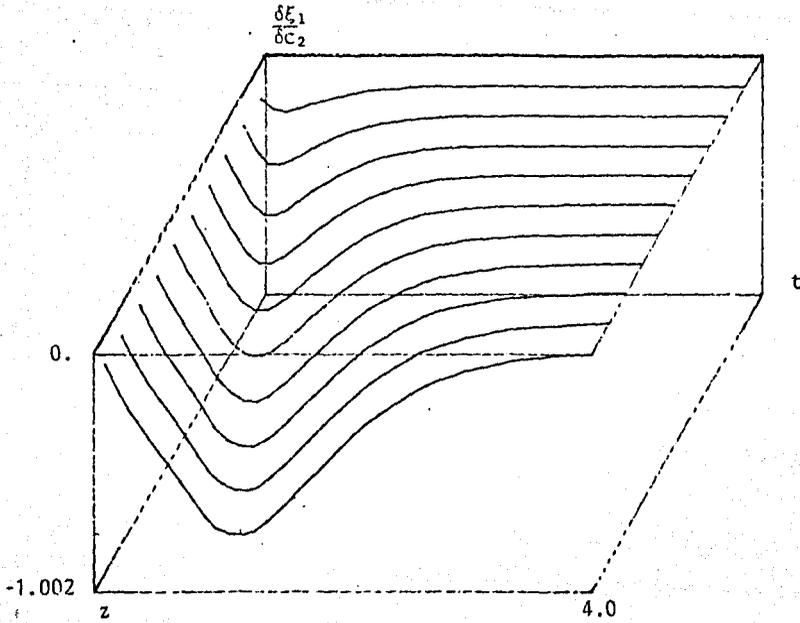


Fig 4.16 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del tubo para un escalón en la temperatura ambiente.

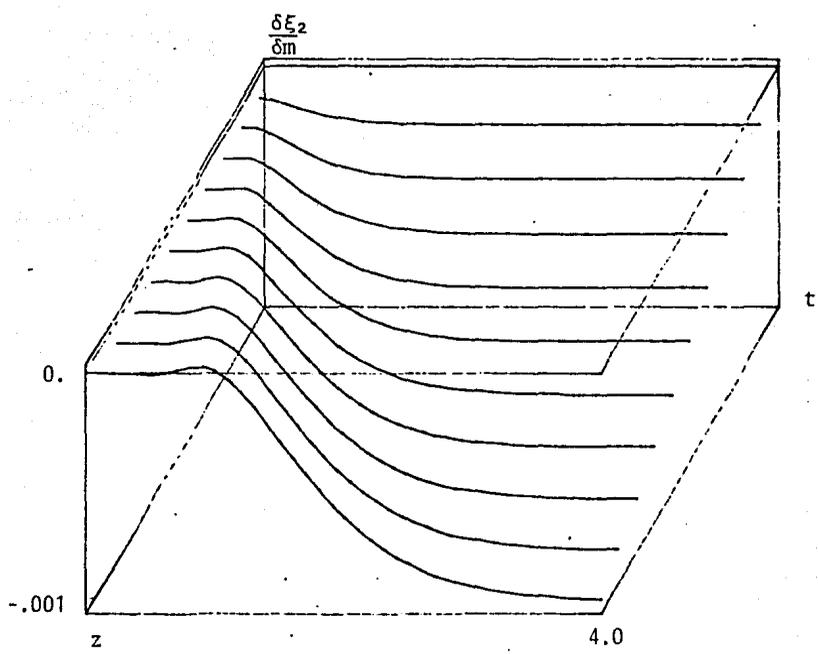
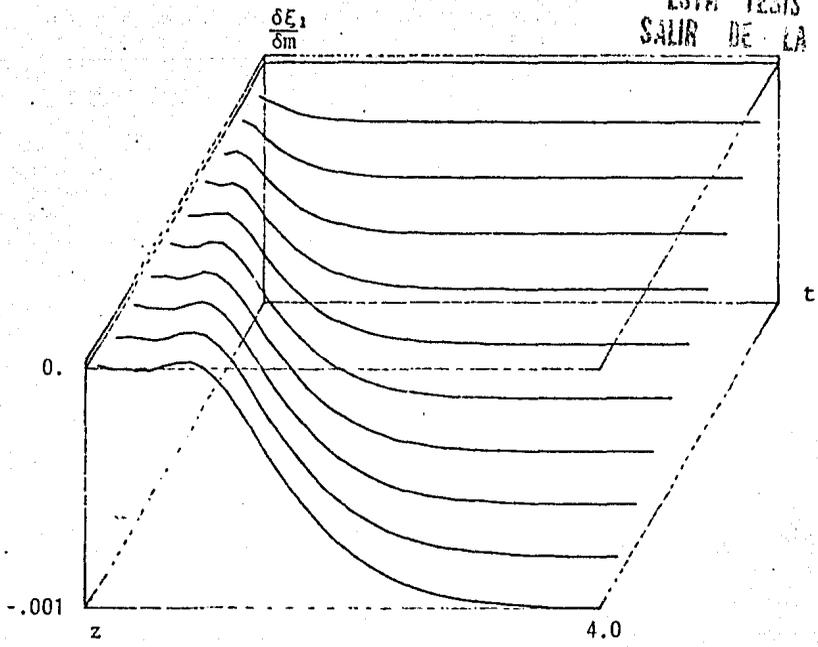
ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Fig 4.17 Coeficientes de sensibilidad respecto del flujo nominal para un escalón en la temperatura ambiente.

los casos anteriores y para la temperatura del tubo se presenta el valor máximo en un transitorio, manteniéndose el signo respecto del obtenido en 4.2.2 .

- Para el coeficiente de convección exterior se presenta una variación más pronunciada a lo largo del absorbedor en el estado estacionario manteniéndose el signo respecto del obtenido en 4.2.2 .
- Para el resto de los parámetros se presenta un cambio de signo respecto del obtenido en 4.2.2 .
- El coeficiente de sensibilidad respecto del calor específico del fluido llega a un máximo cuando la temperatura del fluido esté aproximadamente en 75% de su valor final regresando a un valor final cercano a cero.
- El coeficiente de sensibilidad respecto al flujo nominal presenta variaciones menores a lo largo del absorbedor en el estado estacionario respecto de los dos casos anteriores.

4.2.4 Temperatura de entrada

Los resultados se muestran en las figuras (4.25) a (4.31).

- En este caso todas las curvas, excepto la de h_o , tienden a regresar a cero en el estado estacionario.
- Todos los coeficientes, excepto el de flujo nominal, cambian signo respecto del obtenido en 4.2.3 .

- Las magnitudes máximas alcanzadas son las mayores entre las 4 entradas.

En muchos de los resultados se observan algunas pequeñas oscilaciones producto, como se muestra en el capítulo 2, de imprecisiones de la rutina de antitransformación usada.

TABLA 4.1 Magnitud máxima de los coeficientes de sensibilidad de la temperatura del fluido a la salida del absorbedor

parámetro \ entrada	dQ	dW	du	dv
c ₁	20.2 E	0.828 E	-1.5714 T	14.91 T
c ₂	- 18.18 T	- 0.7571 T	6.714 T	- 61.5 T
α	7.93 E	--	--	--
a	2.75 E	--	--	--
ε	- 0.1265 E	--	--	--
h ₀	- 0.0413 E	0.0115 E	0.0133 E	- 0.125 E
m ^s	- 0.0257 E	- 0.001 E	0.0892 E	0.0981 T
ρ ₁	- 0.0052 T	- 1.17x10 ⁻³ T	1.6x10 ⁻³ T	- 0.0125 T
h _i	0.002 T	0.83x10 ⁻⁴ T	0.6x10 ⁻³ T	- 0.0063 T
ρ ₂	- 2.06x10 ⁻⁴ T	- 0.83x10 ⁻⁵ T	0.76x10 ⁻⁴ T	- 0.7x10 ⁻³ T

TABLA 4.2 Magnitud máxima de los coeficientes de sensibilidad de la temperatura del tubo a la salida del absorbedor

parámetro \ entrada	dQ	dW	du	dv
c ₂	-24.43 T	-1.002 T	9.955 T	-76.87 T
c ₁	18.76 E	0.7781 E	-1.368 T	13.0 T
α	10.66 E	--	--	--
a	3.7 E	--	--	--
ε	- 0.21 E	--	--	--
h ₀	- 0.063 E	0.0152 E	0.022 E	- 0.16 E
m ^s	- 0.0245 E	-0.94x10 ⁻³ E	0.085 E	0.0807 T
ρ ₁	- 0.004 T	-0.7x10 ⁻³ T	0.0014 T	- 0.0105 T
h _i	- 0.0043 E	-0.2x10 ⁻³ E	-0.001 T	0.0056 T
ρ ₂	- 0.27x10 ⁻³ T	-0.11x10 ⁻⁴ T	0.11x10 ⁻³ T	- 0.87x10 ⁻³ T

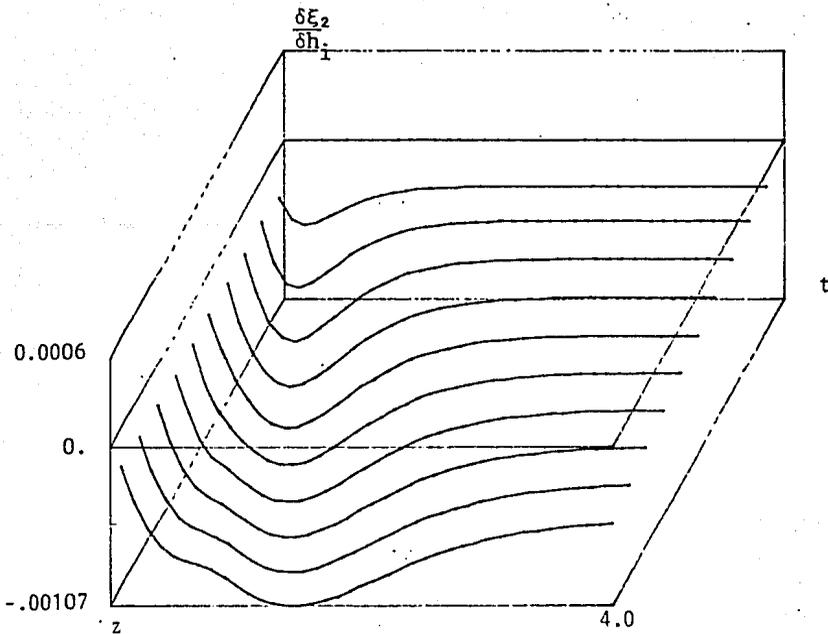
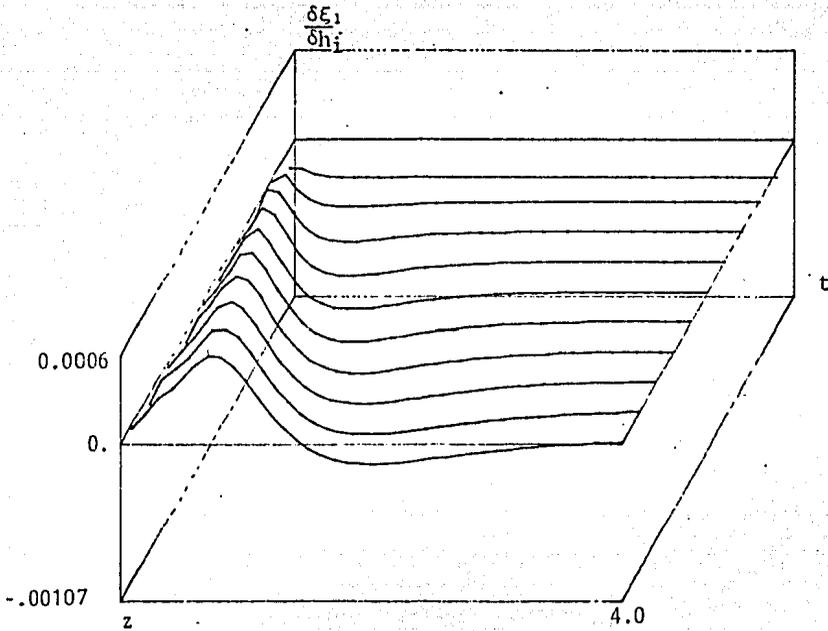


Fig 4.18 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección interior para un escalón en el flujo.

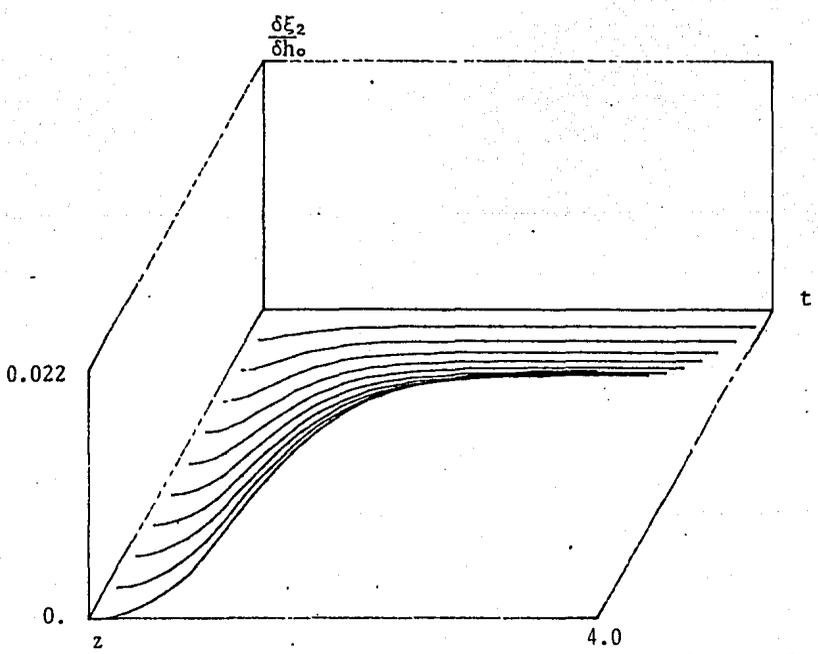
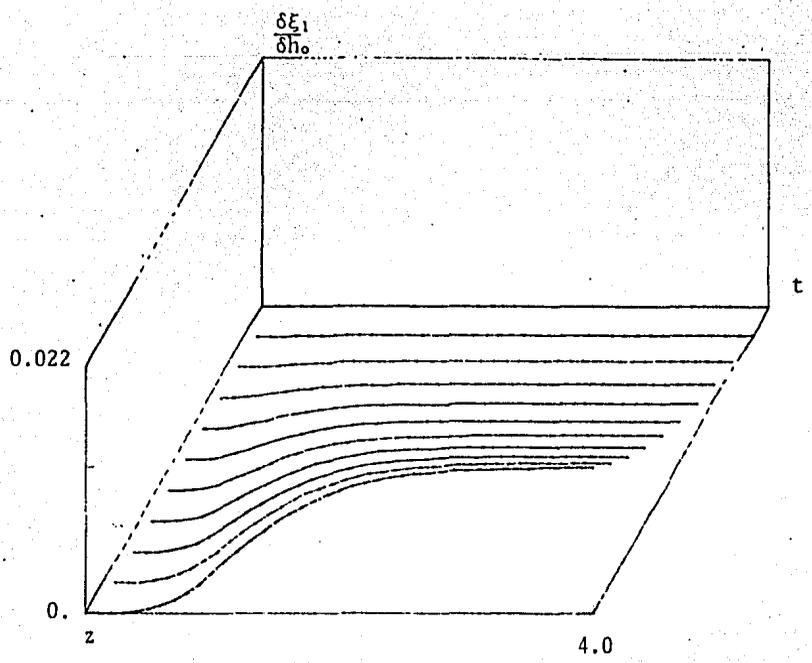


Fig 4.19 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección exterior para un escalón en el flujo.

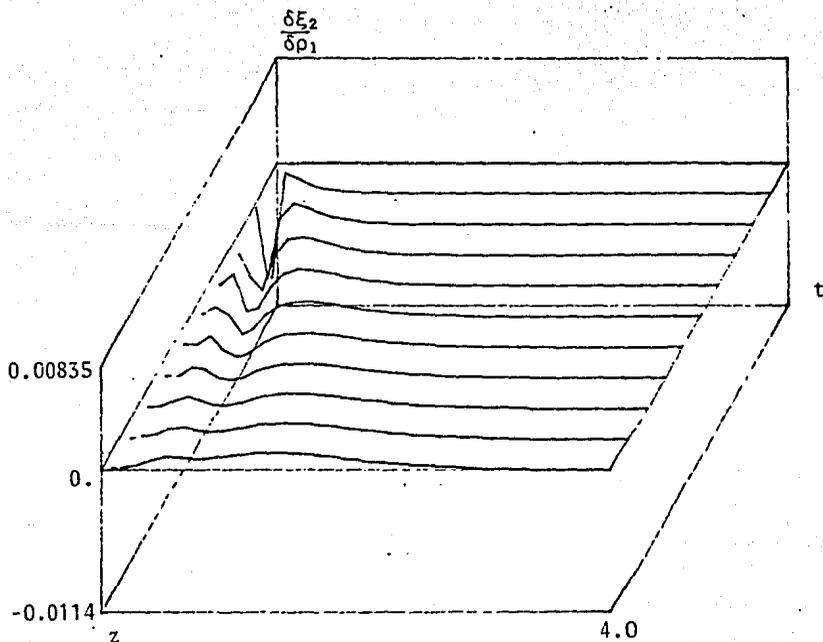
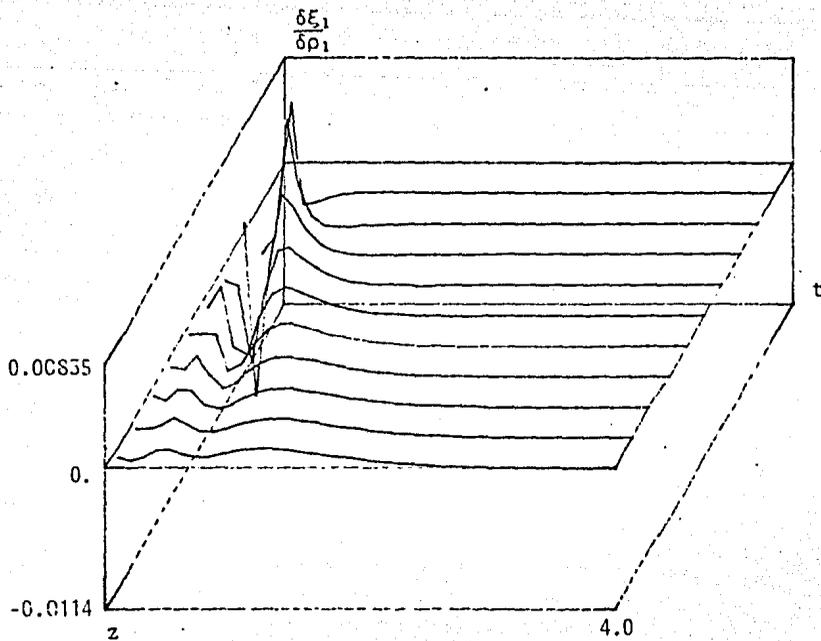


Fig 4.20 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del fluido para un escalón en el flujo.

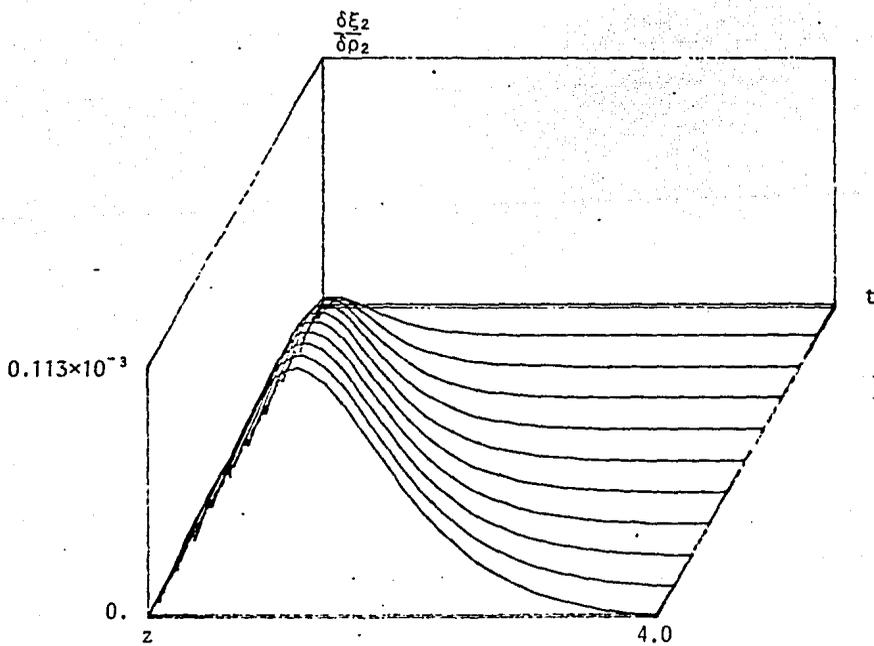
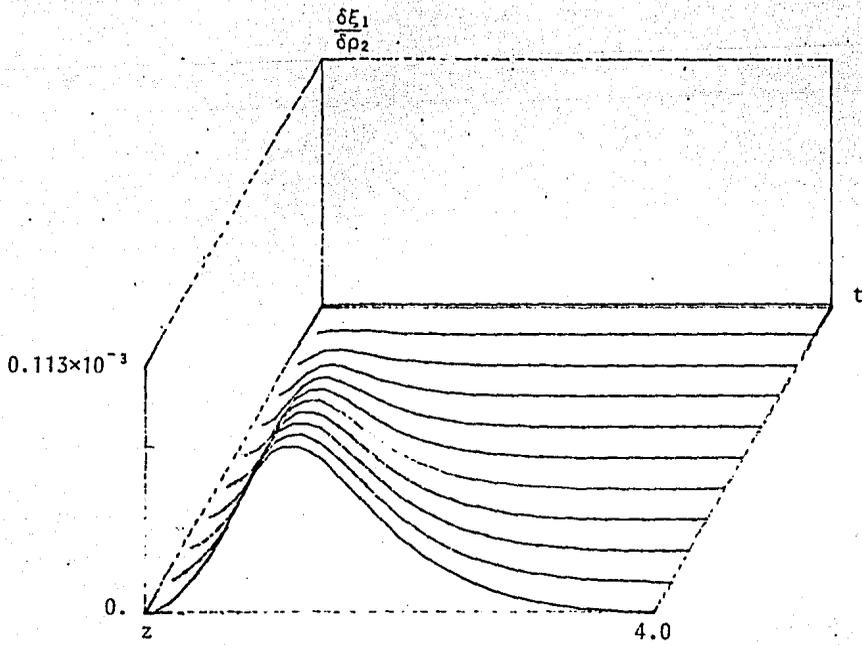


Fig 4.21 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del tubo para un escalón en el flujo.

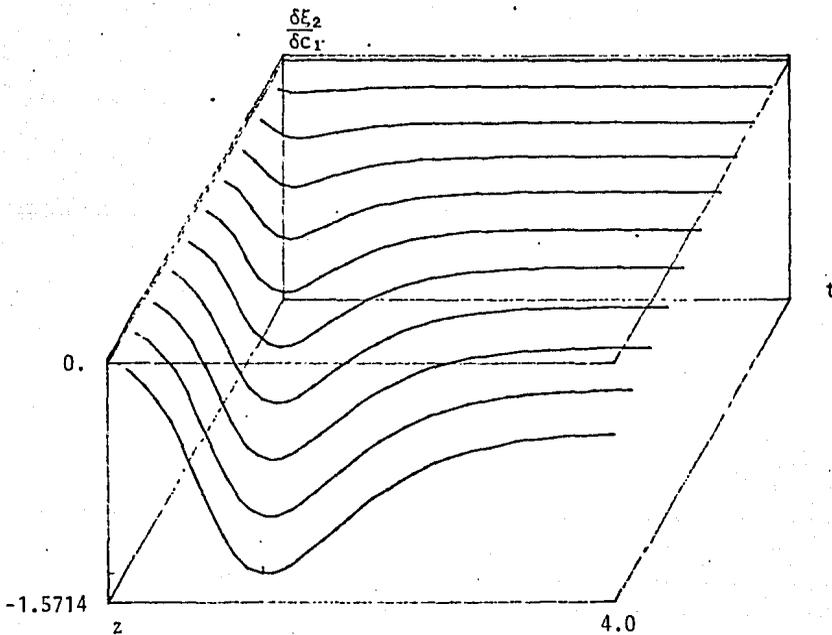
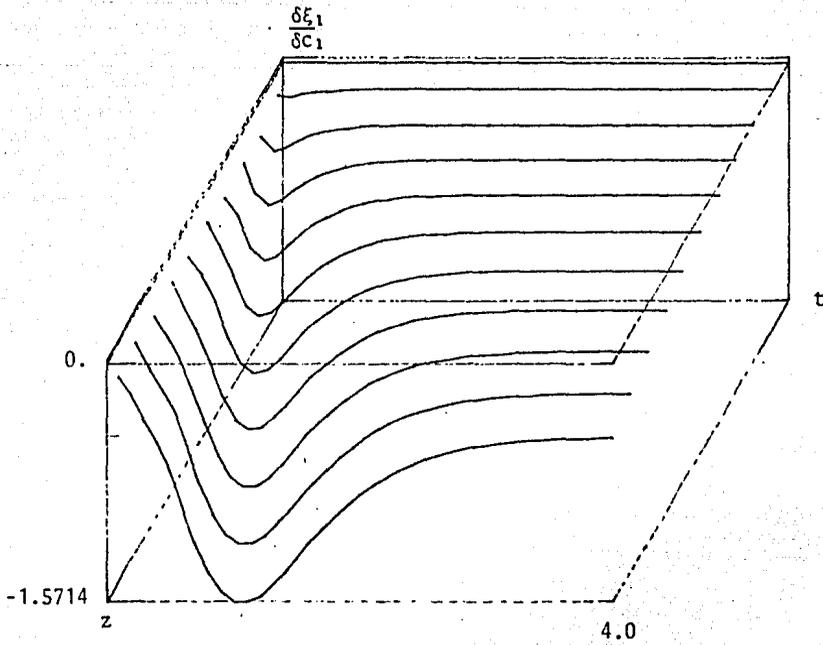


Fig 4.22 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del fluido para un escalón en el flujo.

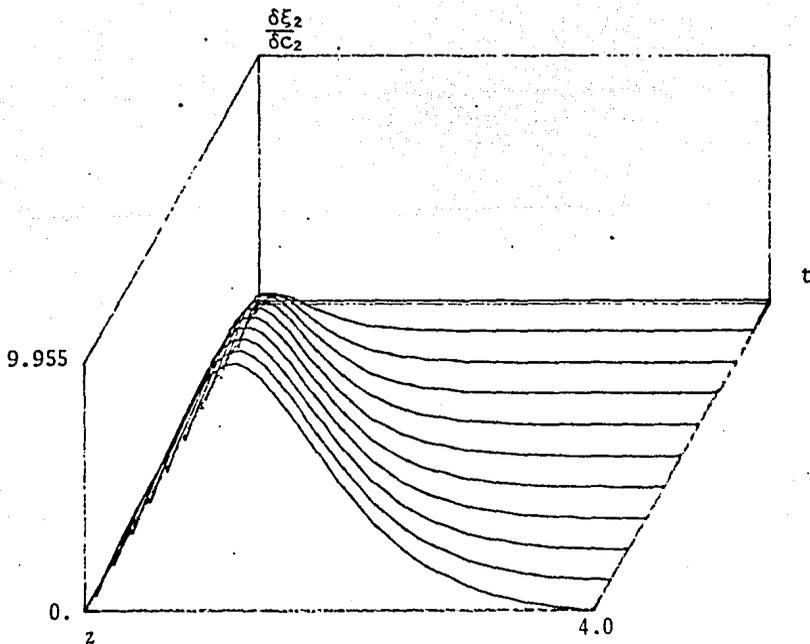
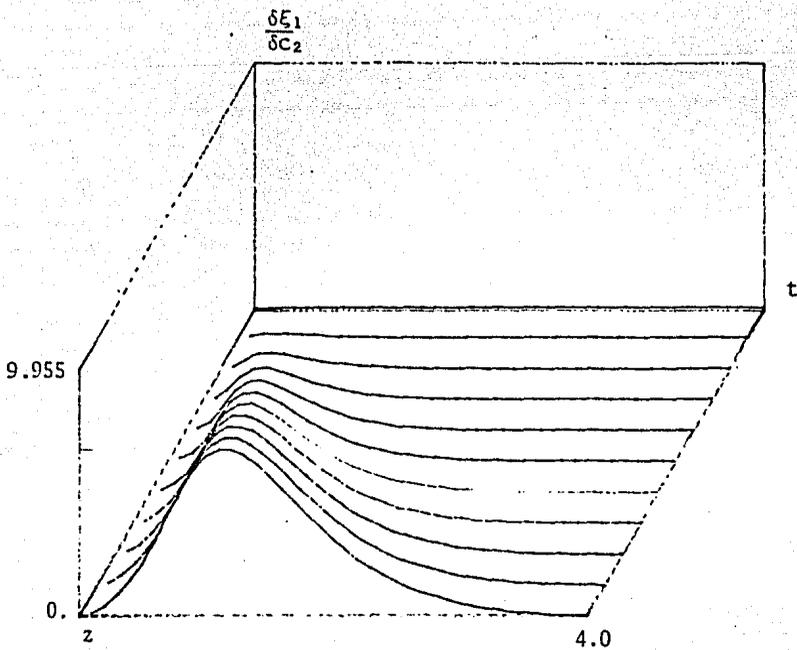


Fig 4.23 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del tubo para un escalón en el flujo.

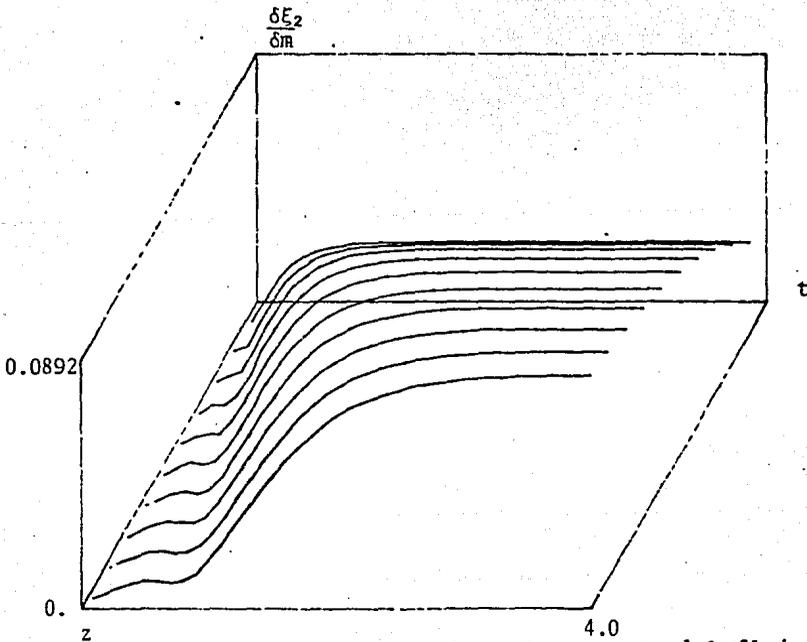
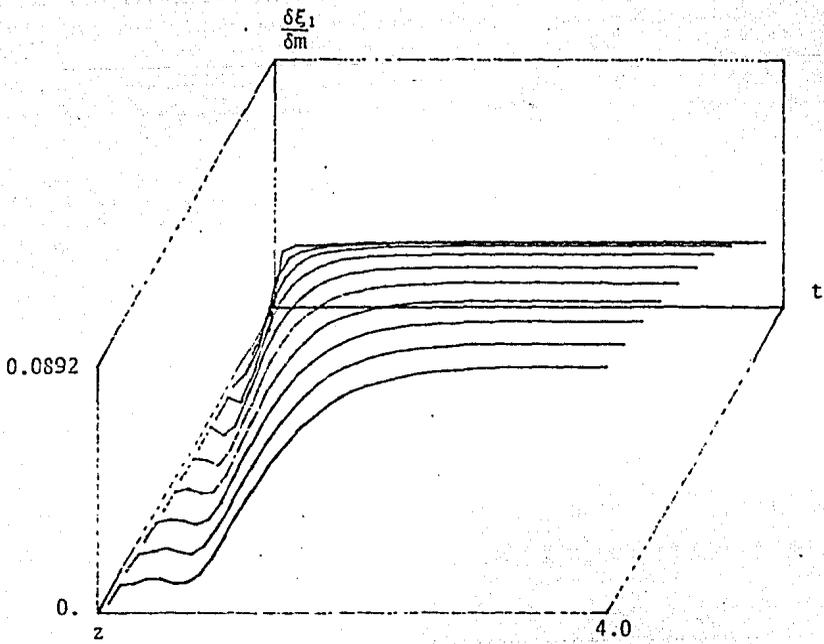


Fig 4.24 Coeficientes de sensibilidad respecto del flujo nominal para un escalón en el flujo.

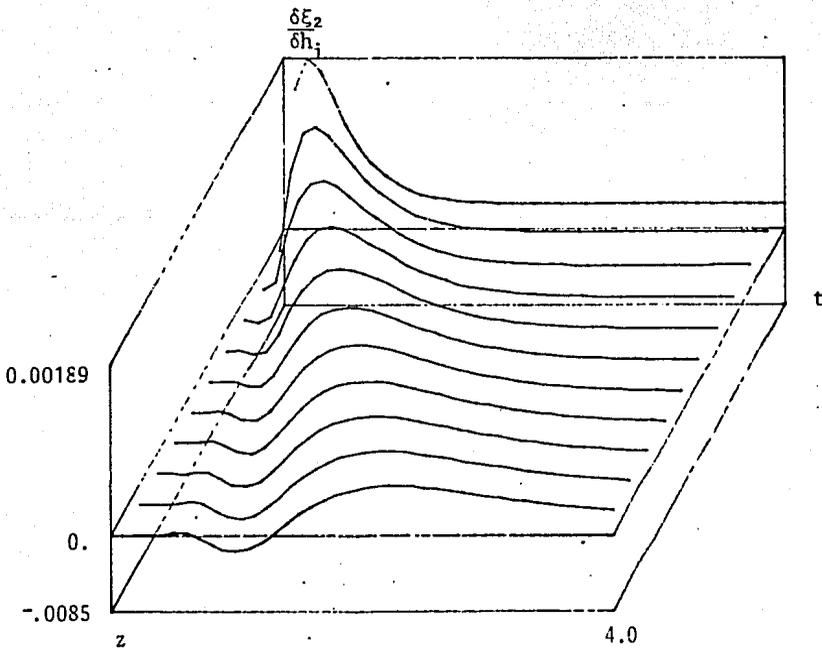
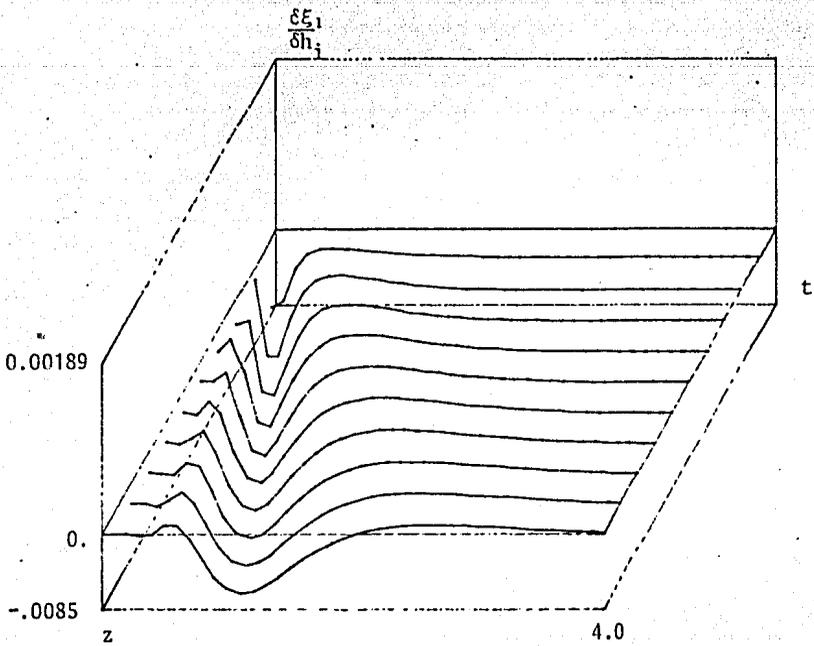


Fig 4.25 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección interior para un escalón en la temp. de entrada

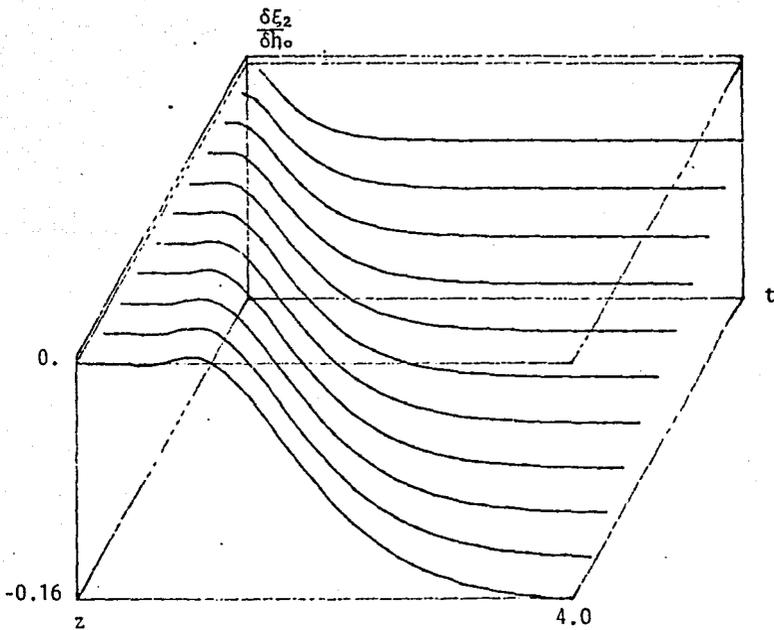
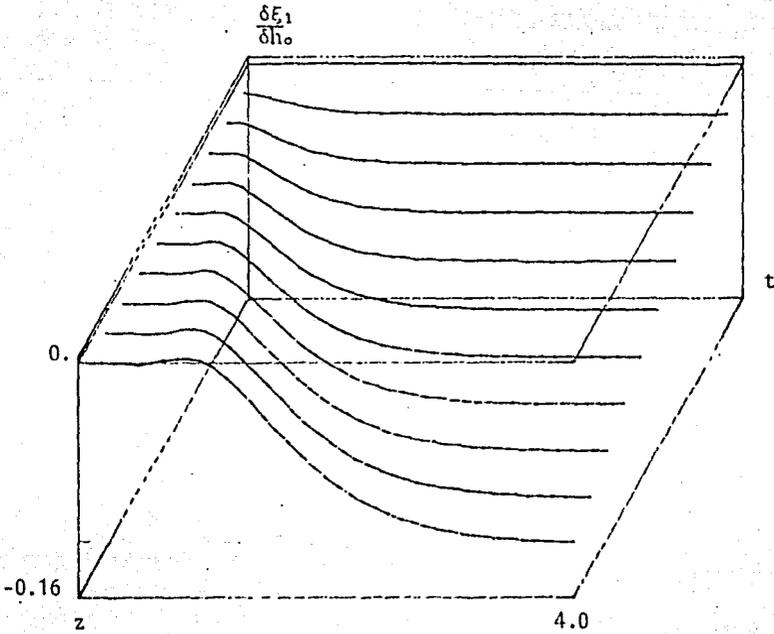


Fig 4.26 Coeficientes de sensibilidad respecto del coeficiente de convección exterior para un escalón en la temp. de entrada

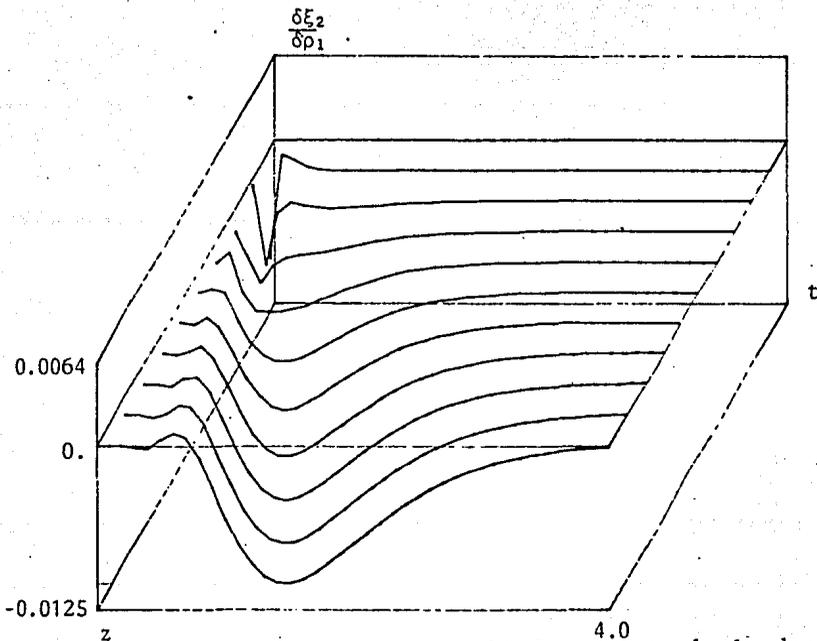
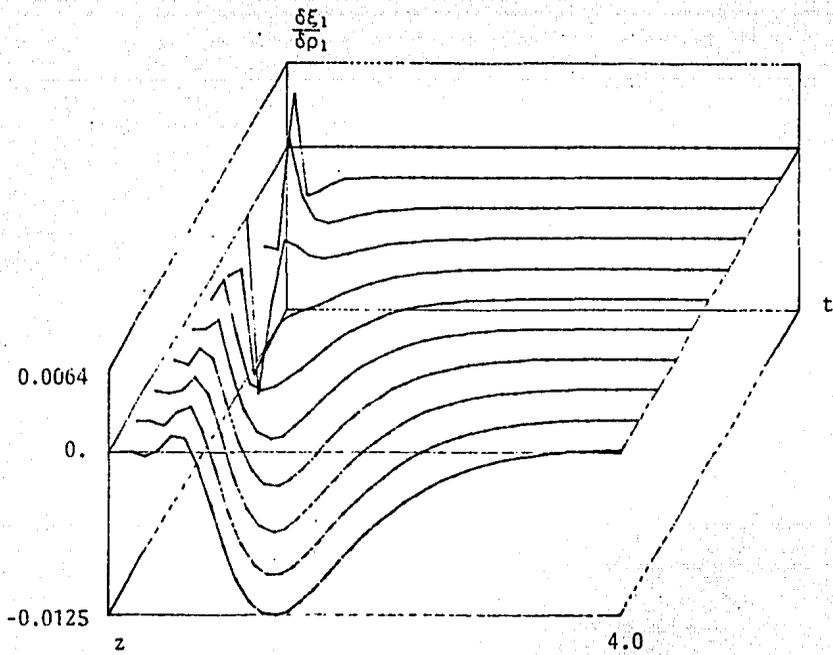


Fig 4.27 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del fluido para un escalón en la temperatura de entrada.

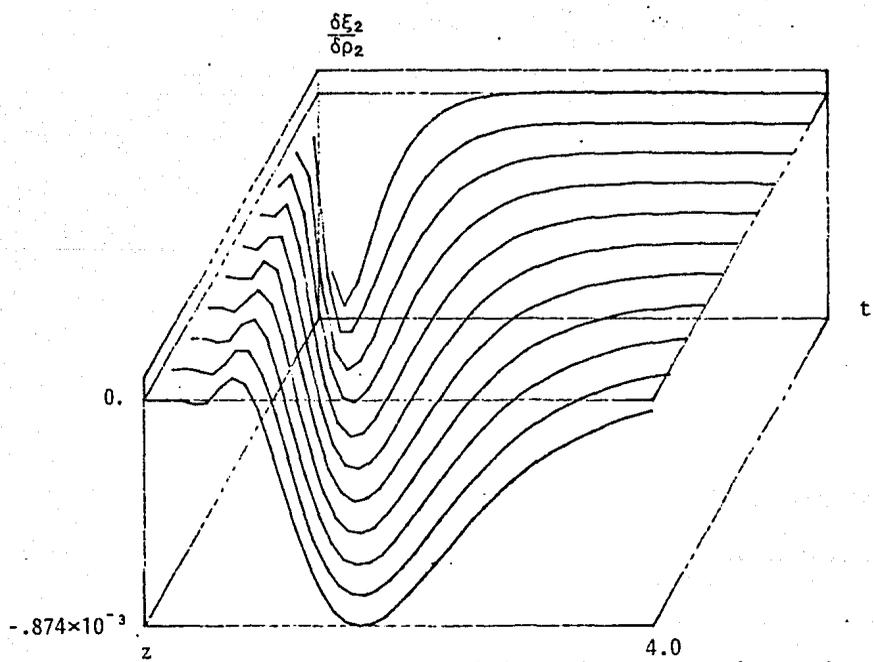
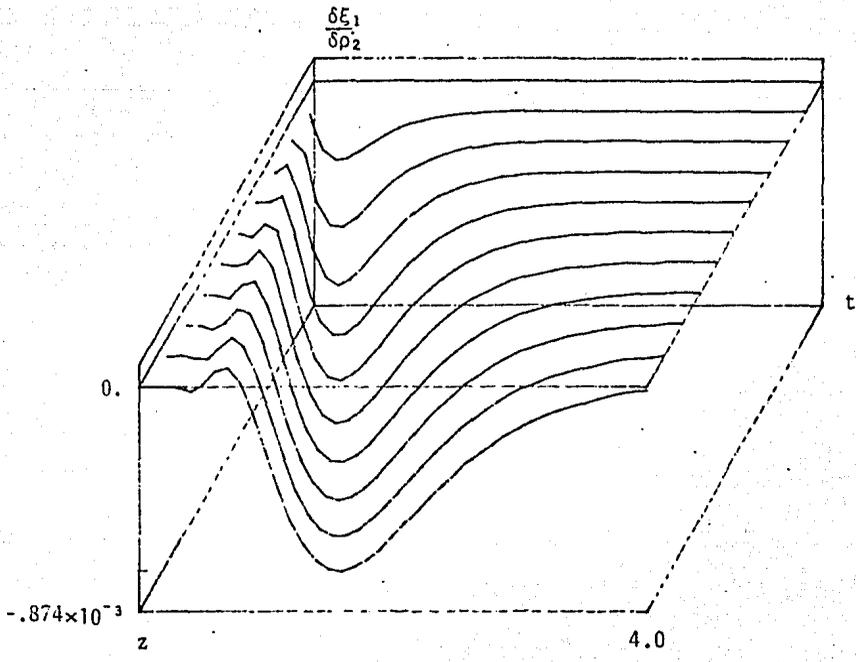


Fig 4.28 Coeficientes de sensibilidad respecto de la densidad del tubo para un escalón en la temperatura de entrada.

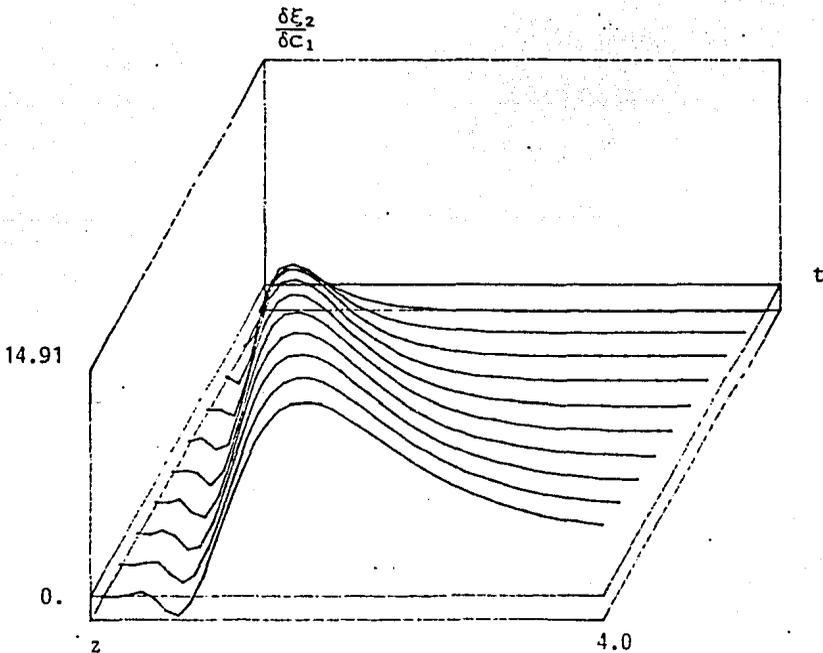
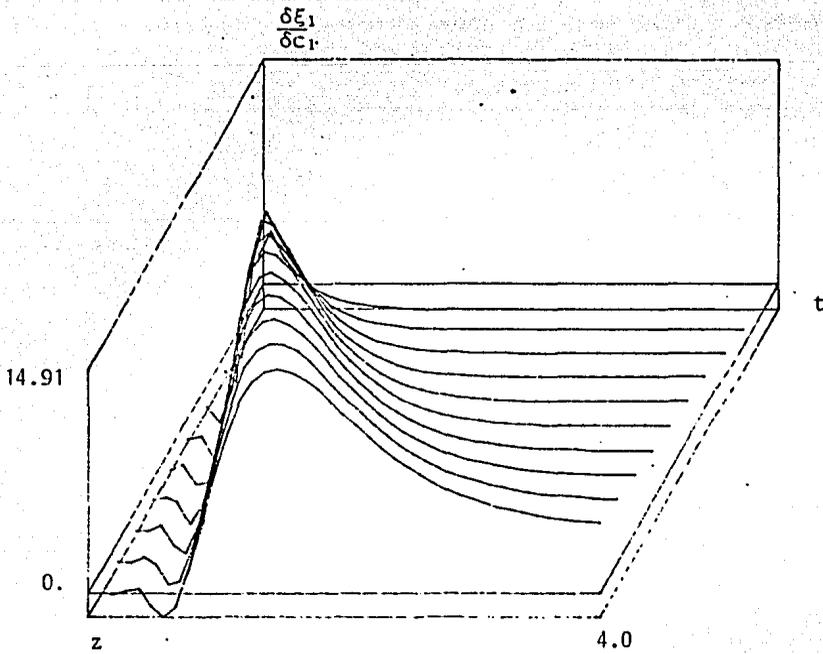


Fig 4.29 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del fluido para un escalón en la temperatura de entrada.

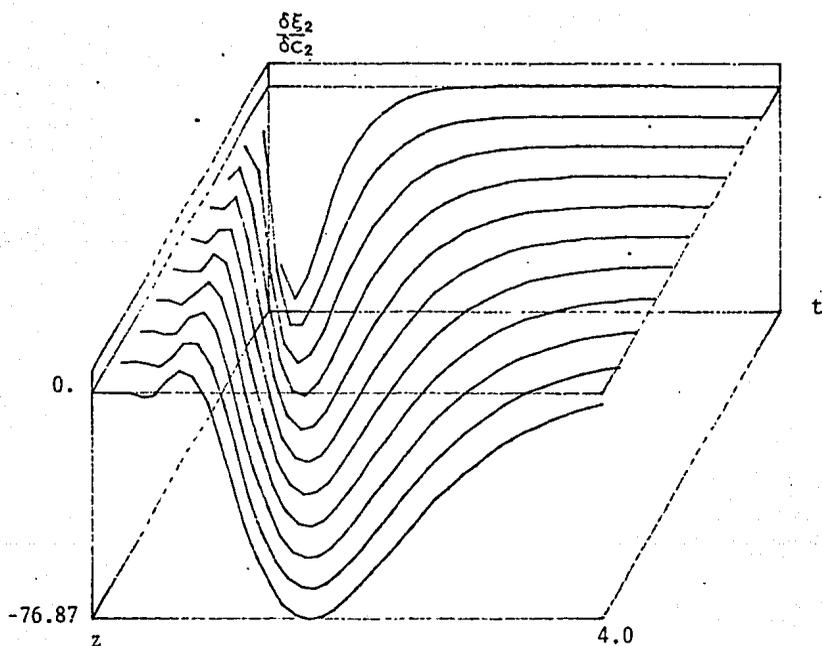
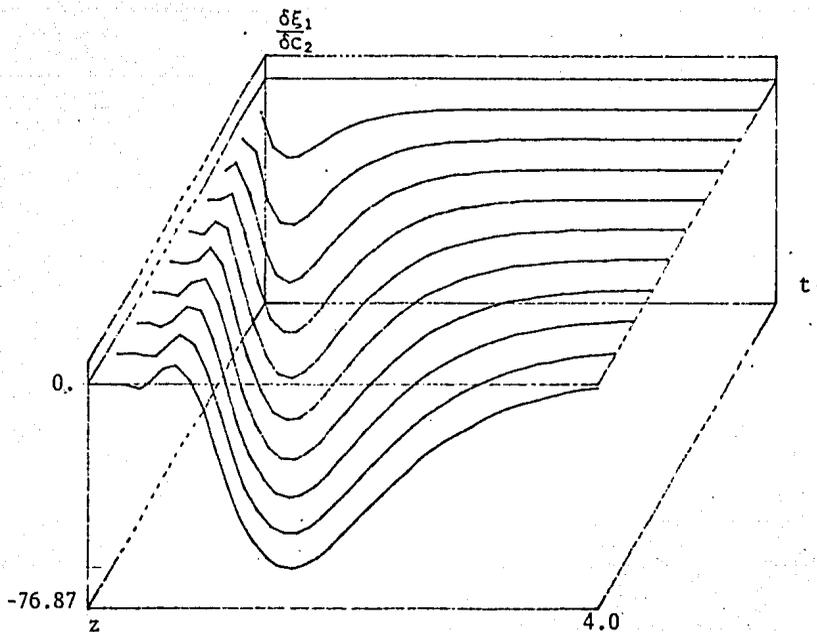


Fig 4.30 Coeficientes de sensibilidad respecto del calor específico del tubo para un escalón en la temperatura de entrada.

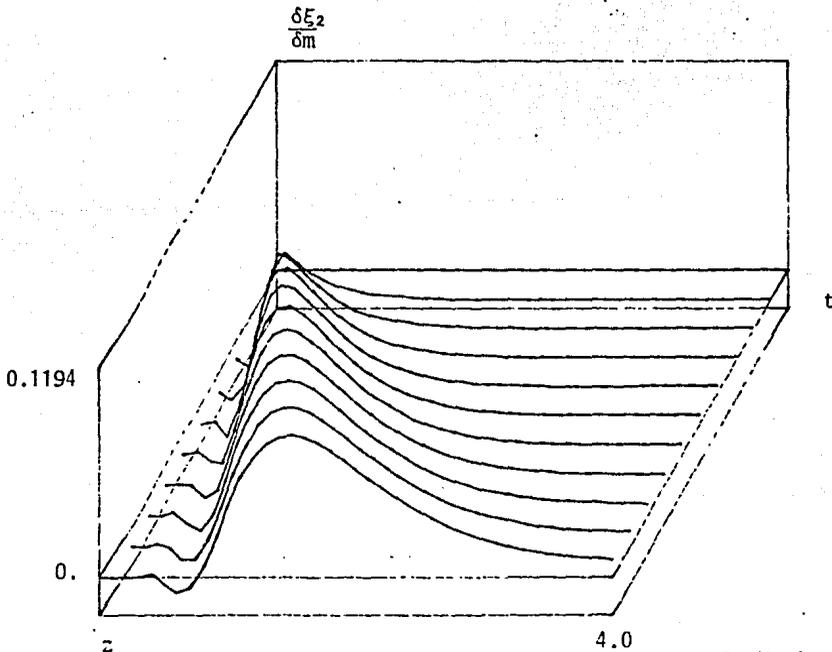
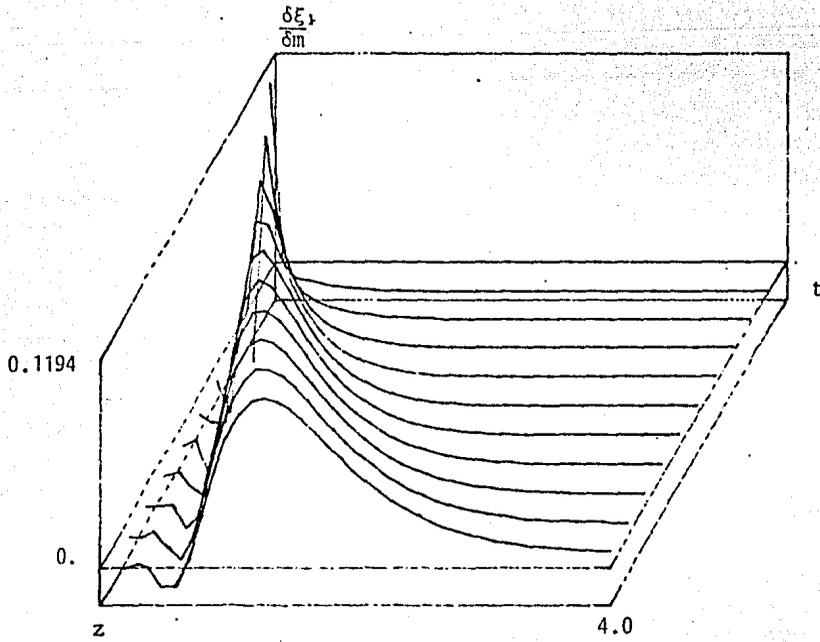


Fig 4.31 Coeficientes de sensibilidad respecto del flujo nominal para un escalón en la temperatura de entrada.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta resultados analíticos en las dos partes de que consta, primero en el terreno de la comparación de modelos sujetos a distintas simplificaciones y posteriormente en el análisis de sensibilidad de sistemas de parámetros distribuidos, sin llegar a la experimentación física, la que se realizará en trabajos posteriores.

Este capítulo consta de 3 secciones; en la primera se dan algunas conclusiones relativas a los 2 primeros capítulos y en las otras 2 secciones restantes se presentan conclusiones sobre el análisis de sensibilidad en lo general y particulares para el caso del absorbedor solar.

5.1 *Comparación de modelos*

1. El pasar un modelo de ecuaciones diferenciales a una formulación

en ecuaciones integrales permite analizar la validez de ciertas simplificaciones además de ganar en el conocimiento de la estructura del modelo.

2. En general, las ecuaciones integrales presentan mejor comportamiento en la solución numérica que las ecuaciones diferenciales.
3. La comparación total, y más detallada, de toda la familia de modelos descrita, queda por hacerse siendo recomendable buscar otro juego de valores para los parámetros que den un número de Peclet de menor magnitud.
4. En este trabajo y los trabajos previos, sólo se ha utilizado un juego de condiciones a la frontera que difícilmente se tendrán en la realidad. En trabajos futuros éste debe ser un punto que debe tomarse en cuenta con más detalle, ya que estas condiciones juegan un papel importante en la solución del modelo y las hipótesis hechas sobre este punto pueden ser demasiado restrictivas.

5.2 *Análisis de sensibilidad*

1. El análisis de sensibilidad siendo una herramienta en el diseño será más útil cuanto más completo sea el modelo del sistema de que se parta.
2. En este trabajo se presenta un método para obtener modelos de sensibilidad de sistemas de parámetros distribuidos y una forma de solución de los mismos dependiendo del tipo de parámetro que se esté analizando distinguiendo dos casos: parámetros que no son función

de las variables independientes y se suponen como constantes en el desarrollo del modelo y parámetros que son una función explícita de las variables independientes y así se expresan en el desarrollo del modelo.

3. Esta clasificación de los parámetros se hace en función de que cada uno de ellos requiere una forma de solución del modelo de sensibilidad distinta, salvo que se hagan simplificaciones adicionales al fijar los parámetros variables en un valor de la variable independiente y hacer el análisis para distintos valores.
4. Para los parámetros del primer tipo se da una forma de solución que es descrita en la sección 4.1 y se obtienen resultados numéricos para el modelo del absorbedor.
5. Para los parámetros del segundo tipo se describe el método propuesto en (5) que, aunque de fácil aplicación, resulta ser demasiado costoso siendo recomendable continuar los esfuerzos por encontrar formas alternativas de solución para este caso. Esto es importante porque la riqueza de los resultados que se obtengan será mayor cuanto menos simplificaciones se hagan.
6. Los resultados numéricos obtenidos para el absorbedor sólo son un ejemplo del método propuesto. Para una mayor riqueza de resultados se hace necesario, a partir de lo obtenido aquí y la experiencia de los diseñadores, planear experimentos físicos o numéricos para cada parámetro que se estime necesario analizar.
7. Aunque sólo se hace el análisis de sensibilidad para los estados del

sistema, nada impide aplicar los mismos conceptos y método a las variables de interés que se definan, en el diseño del sistema, en el desarrollo del control del sistema, en su operación, etc, como pueden ser eficiencias, índices de optimización (performance index), salidas del sistema que no sean estados, etc.

8. Para sistemas no lineales se puede aplicar este método siendo necesario que en el desarrollo del modelo de sensibilidad se asegure el cumplimiento de las condiciones del teorema sobre funciones implícitas dadas en el capítulo 3.
9. Para sistemas no lineales y aún para lineales existe la posibilidad de utilizar un enfoque estadístico para hacer análisis de sensibilidad asociando distribuciones de probabilidad a los parámetros (20).

5.3 *Absorbedor solar*

1. En las tablas 4.1 y 4.2 se enlistan los parámetros según su importancia dados los resultados obtenidos.
2. Los resultados obtenidos nos dan la sensibilidad del absorbedor a variaciones en los parámetros alrededor del valor nominal dado y son válidos sólo para ese punto nominal.
3. En la elección del aceite debe buscarse principalmente que tenga alto calor específico igualmente que al elegir el material del tubo absorbedor, sin importar la densidad que tengan, siempre que conserven sus características a las temperaturas de operación dadas.

4. En el análisis detallado que se haga sobre un parámetro debe considerarse su relación con el resto de los parámetros y si variaciones en uno implican variaciones en otros.
5. En la elección de la superficie selectiva debe buscarse aquella que de mayor absorptancia y la mantenga a lo largo del tiempo lo más posible aún cuando esto implique aumentar la emitancia.
6. Para estas condiciones nominales es más importante la estimación del coeficiente de convección exterior que el interior.
7. Si el valor de la apertura del espejo se incrementa por vencimiento de su estructura, este defecto en la concentración se puede ver compensado por la sensibilidad positiva de las temperaturas.
8. Para obtener la sensibilidad del sistema respecto del punto de operación habrá que dejar en el modelo explícitamente como parámetros las entradas nominales que no aparecen y aplicar el método en la misma forma.
9. Siendo el flujo de aceite la variable de control, conocer la sensibilidad del sistema respecto del mismo permitirá estimar el esfuerzo de control necesario para llevarlo al punto deseado.

6. REFERENCIAS

1. Alonso, y Capistran, J. "Modelado y Control de un Colector Solar Tipo Canal Parabólico", Tesis de Licenciatura; Facultad de Ingeniería, UNAM, 1981
2. Hernández, D.B. y Alonso, A. "Modelos de un Absorbedor Solar" Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM (proy 2110), agosto 1982
3. Zeigler, B.P. "Theory of Modelling and Simulation", John Wiley & Sons, 1976, 435 p.
4. Frank, P.M., "Introduction to System Sensitivity Theory", Academic Press, New York; 1978, 386 p.
5. Koda, M. et al "Sensitivity Analysis of Partial Differential Equations with Applications to Reaction and Diffusion Processes"; Journal of comp. phys. 30, 259-282 (1979)
6. Rall, L.B., "Computational Solution of Nonlinear Operator Equations", John Wiley & Sons, 1967

7. Belleni-Morante, A., "*Applied Semigroups and Evolutions Equations*", Clarendon Press-Oxford; 1979, 387 p.
8. Hochstadt, H., "*Integral Equations*"; John Wiley & Sons, New York, 1973
9. Taylor, A.E., "*Introduction to Functional Analysis*", 2a ed; John Wiley & Sons, 1980, 467 p.
10. Miller, R.K., "*Ordinary Differential Equations*"; Academic Press, 1982
11. Churchill, R.V., "*Operational Mathematics*", 3a ed; Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD, Tokyo 1972, 481 p.
12. Brogan, W.L., "Optimal Control Theory Applied to Systems Described by Partial Differential Equations"; en "*Advances in Control Systems Theory and Applications*" editado por C.T. Leondes Vol. 6, 1968, Academic Press, pp. 222-316
13. Carnahan, B., "*Applied Numerical Methods*"; John Wiley & Sons, INC, 1969, 604 p.
14. Stehfest, H., "Algorithm 368, Numerical Inversion of Laplace Transforms (D5)" Comm. of the ACM, Vol 13, N° 1, enero 1970, pp. 47-49
15. Linz, P., "*Theoretical Numerical Analysis*", John Wiley & Sons, New York, 1979
16. Wouk, A., "*A course of Applied Functional Analysis*"; John Wiley & Sons, 1979, 443 p.

17. Duffie, J.A., "Solar Engineering of Thermal Processes"; John Wiley & Sons, 1980, 762 p.
18. Alonso, A. et al "Subsistema de Control del Generador Solar, Modelos y Simulación de un Absorbedor"; elaborado para SEPAFIN, Informe del Instituto de Ingeniería, UNAM, (proyecto 9133), febrero 1981
19. Cukier, R.I., et al "Nonlinear Sensitivity Analysis of Multiparameter Model Systems", Journal of Comp. Phys. 26, N° 1, enero 1978 pp.

APENDICE A. OBTENCION DEL MODELO BASE.

En trabajos precedentes (1) -(2), se ha descrito con detalle el colector y como se llega al modelo base de que se parte en este trabajo y aquí só lo se hará un resumen de tal desarrollo por completez.

El colector solar de tipo canal parabólico consta de: (figura A.2)

- a) Un espejo de tipo canal parabólico con un elemento seguidor del sol incorporado.
- b) Un tubo metálico absorbedor cuyo eje longitudinal coincide con el eje focal del espejo.
- c) Un tubo envolvente de vidrio, cuyo eje longitudinal coincide con el del tubo absorbedor.

Por el interior del absorbedor circula aceite, el cual recoge el calor de la radiación solar.

Para llegar a las ecuaciones diferenciales parciales que se utilizan como modelo del colector se utilizan las siguientes hipótesis (formuladas y agrupadas como en (2)):

Hipótesis fundamentales

- H1 El sistema opera en forma determinística
- H2 Se conserva la materia y la energía

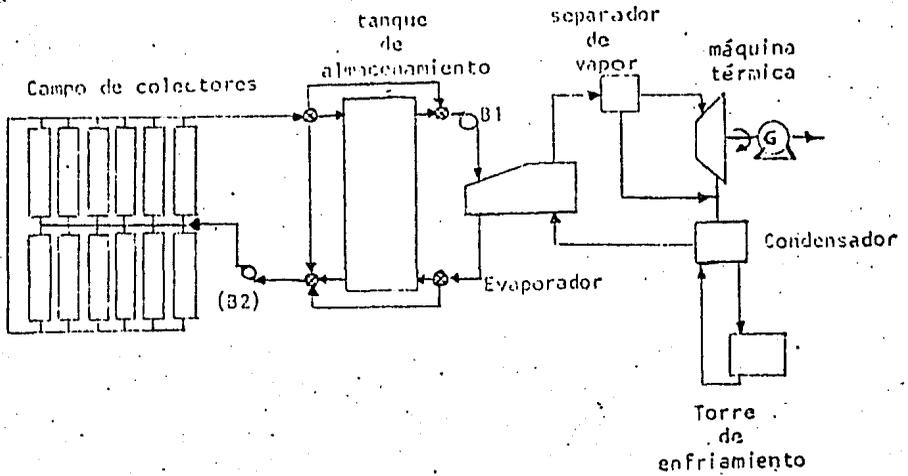


Fig A.1 Esquema de la planta

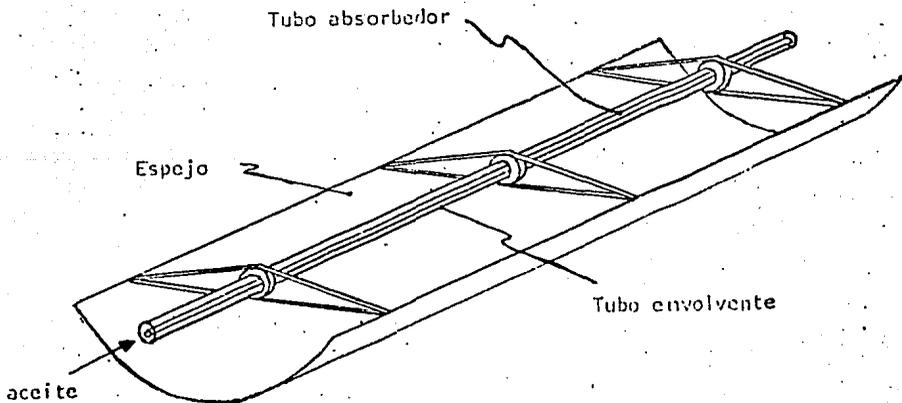


Fig A.2 Colector utilizado para la captación de energía solar.

Hipótesis estructurales

- H3 El espejo tiene sección transversal uniforme y parabólica; el tubo absorbedor tiene secciones circulares concéntricas, centradas en el foco de la parábola.
- H4 La única fuente térmica es el sol, cuya radiación llega bajo la forma de rayos paralelos al eje de la parábola.
- H5 La radiación solar incide sobre el absorbedor de manera uniforme.
- H6 El tubo envolvente no almacena energía.
- H7 Los extremos del absorbedor se encuentran térmicamente aislados.
- H8 Las únicas pérdidas de energía se dan por convección y radiación al medio ambiente, cuya temperatura no varía por ello.

Hipótesis operativas

- H9 El fluido es incompresible y no hay caída de presión.
- H10 No hay gradientes radiales ni de temperatura, ni de velocidad.

Hipótesis constitutivas

- H11 El calor se transmite al fluido por convección a través de una película y dentro del tubo se transfiere por conducción y arrastre convectivo.
- H12 La convección a través de una película es lineal en la diferencia de temperatura. El coeficiente de proporcionalidad depende de la velo-

cidad y la temperatura del fluido según una ley conocida.

- H13 La conducción de calor sigue la ley de Fourier.
- H14 La entalpia de una porción de fluido es proporcional a la masa de la misma y su temperatura absoluta.
- H15 Con la posible excepción del coeficiente de película hacia el interior del tubo, los coeficientes de transporte, densidades, calores específicos y dimensiones geométricas son constante y de valor conocido.
- H16 La radiación sigue la ley de Stefan-Boltzmann.
- H17 La temperatura de cielo difiere de la ambiente en una cantidad positiva conocida.

Hipótesis de accesibilidad

- H18 Tanto el gasto en masa como la temperatura de entrada al absorbedor se pueden manipular a voluntad[†].
- H19 La intensidad de radiación solar, así como la temperatura ambiente, varían en el tiempo de una manera conocida, pero no alterable a voluntad.
- H20 Se mide la temperatura del tubo en un número finito de puntos a lo largo del colector

[†] Dentro de límites impuestos por el equipo auxiliar, como las bombas de circulación. En la práctica manejar a voluntad la temperatura de entrada resulta más difícil que regular el gasto en masa, por lo que sólo es te último será empleado como variable de control.

H21 No hay pérdidas de calor en la corriente que sale del absorbedor y su temperatura se alcanza ya desde el interior del mismo.

Hipótesis de regularidad

H22 Las temperaturas del tubo y fluido son dos veces continuamente diferenciables.

H23 Las funciones de entradas son continuas; h_i es lipschitziana.

Tomando en cuenta estas hipótesis y denotando con subíndice 1 a la sección que ocupa el fluido y con subíndice 2 a la que ocupa el tubo absorbedor. Sean $T_1, T_2: (0, \infty) \times (0, \ell) \rightarrow R$ funciones tales que $T_i(t, z)$ representa la temperatura absoluta en la sección i , z unidades a partir de la entrada y t instantes de tiempo después de iniciada la operación.

Las hipótesis H2, H13 a H15 y H21 permiten plantear representaciones para la tasa de acumulación de energía y al transporte por arrastre convectivo y por conducción. Tomando en cuenta además las hipótesis estructurales, las operativas y el resto de las hipótesis constitutivas junto con H18 y H19, resulta entonces que T_1 y T_2 satisfacen las condiciones:

$$\rho_1 C_1 A_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = k_1 A_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \dot{m}(t) C_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} + P_i h_i(T_1, \dot{m}(t)) (T_2 - T_1) \quad (A.1)$$

$$\rho_2 C_2 A_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = k_2 A_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - P_i h_i(T_1, \dot{m}(t)) (T_2 - T_1) - P_o h_o(T_2 - T_a(t)) -$$

$$- \sigma \epsilon P_o (T_2^4 - (T_a(t) - \Delta)^4) + \alpha a Q(t) \quad (A.2)$$

donde para $j = 1, 2$ y $t \geq 0$

ρ_j	densidad	} del material de la sección j
C_j	calor específico	
k_j	conductividad térmica	
A_j	área de la sección transversal	
P_i/P_o	perímetro interno/externo del tubo absorbedor	
a	apertura del espejo	
α	absortencia del tubo	
ϵ	emitancia del tubo	
σ	constante de Stefan-Boltzmann	
Δ	corrección empírica para la temperatura de cielo	
\dot{m}	gasto en masa del aceite	
T_a	temperatura ambiente	
Q	radiación solar por unidad de área	
h_o	coeficiente exterior de película	
h_i	coeficiente interior de película	

Para determinar las condiciones a la frontera, se hace uso de H18, H2, H13, H21 y H7:

$$T_1(t, 0) = T_o(t) \quad ; \quad \frac{\partial T_1}{\partial z}(t, \ell) = 0 \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z}(t, 0) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial T_2}{\partial z}(t, \ell) = 0 \quad (A.4)$$

y dadas las condiciones iniciales, basta que T_o , T_a , \dot{m} y Q sean continuas y que h_i sea lipschitziana (H22) para garantizar la existencia y unicidad

de la solución del modelo.

Para simplificar las ecuaciones se hace un escalamiento de las variables para llegar a modelos adimensionales. En este trabajo se hace:

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{z}{\zeta}$$

$$x_j = \frac{T_j}{\theta_j} \quad ; \quad j = 1, 2$$

donde τ tiene dimensiones de tiempo, ζ de longitud y θ_j de temperatura absoluta.

Estas substituciones transforman (A.1) a (A.4) en:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \bar{t}} = K_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \bar{z}^2} - u(\bar{t}) \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} - \delta_1(x_1, u(\bar{t})) x_1 + \delta_2(x_1, u(\bar{t})) x_2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \bar{t}} = K_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial \bar{z}^2} + \lambda(x_1, u(\bar{t})) x_1 - u(x_1, u(\bar{t})) x_2 - \gamma x_2^4 + \beta w(\bar{t}) +$$

$$+ \gamma (w(\bar{t}) - \Delta)^4 + \alpha q(\bar{t})$$

donde se han suprimido las barras en \bar{t} y \bar{z} para simplificar la notación, y donde

$$K_j = \frac{\tau k_j}{\rho_j C_j \zeta^2} \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (A.5)$$

$$\gamma = \frac{\sigma \tau \epsilon P_0 \theta_2^3}{\rho_2 C_2 A_2} \quad (A.6)$$

$$\beta = \frac{\tau P_0 h_0}{\rho_2 C_2 A_2} ; \Delta = \frac{\Delta}{\theta_2} \quad (A.7)$$

y α son constantes conocidas, en tanto que

$$u(t) = \frac{\tau W(\tau t)}{\rho_1 A_1 \zeta} \quad (\text{A.8})$$

$$W(t) = \frac{T_a(\tau t)}{\theta_2} \quad q(t) = \frac{a \tau Q(\tau t)}{\rho_2 C_2 A_2 \theta_2} \quad (\text{A.9})$$

Finalmente

$$\delta_1 = \frac{\tau P_i h_i}{\rho_1 C_1 A_1}; \delta_2 = \frac{\theta_2}{\theta_1} \delta_1 \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda = \frac{\tau P_i h_i}{\rho_2 C_2 A_2}; \mu = \beta + \frac{\theta_2}{\theta_1} \lambda$$

Por otra parte, las condiciones a la frontera se transforman en

$$x_1(t, 0) = v(t) \quad \frac{\partial x_1}{\partial z}(t, \ell/\zeta) = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial z}(t, 0) = 0 \quad \frac{\partial x_2}{\partial z}(t, \ell/\zeta) = 0$$

donde

$$v(t) = \frac{T_o(\tau t)}{\theta_1} \quad (\text{A.11})$$

Si fijamos $\zeta = \ell$ y $\theta_1 = \theta_2 = T_r$ siendo T_r una temperatura de referencia; y fijando τ igual al tiempo de residencia del aceite en el absorbedor:

$$\tau = \frac{\ell}{u_r}$$

donde u_r es un valor nominal de velocidad, el modelo S_o resultante tiene

la forma:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - u(t) \frac{\partial x_1}{\partial z} - \delta x_1 + \delta x_2 \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{v}{P_e} \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} + \lambda x_1 - \mu x_2 - \gamma x_2^4 + \alpha q(t) + \beta W(t) + \\ + \gamma (W(t) - \Delta)^4 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde δ , λ y μ son funciones conocidas de x_1 y u

$$v = \frac{k_1 C_1 \rho_1}{k_1 C_2 \rho_2} \quad (\text{A.14})$$

y P_e es el número de Peelet dado por

$$P_e = \frac{\rho_1 C_1 \ell u}{k_1} \quad (\text{A.15})$$

Las condiciones a la frontera se transforman en

$$x_1(t,0) = v(t) \quad \frac{\partial x_1}{\partial z}(t,1) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial z}(t,0) = 0 \quad \frac{\partial x_2}{\partial z}(t,1) = 0 \quad (\text{A.17})$$

APENDICE B. SUBROUTINAS.

WORKFILE: VOLTY2 (17/17/83)

```

100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
400
410
420
430
440
450
460
470
480
490
500
510
520
530
540
550
560
5700

```

```

C *****
C *
C * SUBROUTINA FORTRAN PARA LA SOLUCION DE ECUACIONES INTE-
C * GRALES DE TIPO VOLTERRA DE SEGUNDA ESPECIE.
C *
C * DESARROLLADA EN EL INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAH.
C * DICIEMBRE DE 1983.
C * PROGRAMADOR: JOEL ALONSO MENDEZ.*
C *
C *****
C
C VARIABLES DE ENTRADA:
C
C RL - CONSTANTE QUE MULTIPLICA AL TERMINO INTEGRAL
C N - NUMERO DE PUNTOS EN QUE SE DIVIDE EL INTERVALO
C H - INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE
C F - FUNCION PARA EVALUAR EL TERMINO NO HOMOGENEO
C RKER - FUNCION PARA EVALUAR EL NUCLEO DE LA ECUACION
C
C VARIABLES DE SALIDA:
C
C Y - ARREGLO UNIDIMENSIONAL CON LOS VALORES DE LA SOLU-
C CION DE LA ECUACION EN LOS N PUNTOS.
C
C SUBPROGRAMAS REQUERIDOS:
C
C F(ZH,H) - FUNCION QUE EVALUA EL TERMINO NO HOMOGENEO
C EN EL PUNTO ZH = H*H.
C
C RKER(ZH,ZI,H,I) - FUNCION QUE EVALUA EL NUCLEO DE LA ECUACION
C ZI = H*I VARIABLE DE INTEGRACION
C ZH = H*H LIMITE SUPERIOR DE INTEGRACION
C
C PESO(H,H,W) - SUBROUTINA FORTRAN QUE DA LOS VALORES DE LOS
C PESOS PARA EL CALCULO DE LA INTEGRAL POR
C CUADRATURA USANDO LAS REGLAS DE SIMPSON.
C
C SUBROUTINE VOLTY(Y,RL,N,H,F,RKER)
C
C DIMENSION Y(0:N),W(0:50)
C W=0
C Y(0)=0
C Y(1)=F(H,1)
C DO I=2,N
C W=0
C CALL PESO(H,H,W)
C CALL RKER(H,H,1,1)
C
C CALCULO DE Y(I):
C
C F1=RL*(H/2)**2*Y(0)+Y1
C F2=RL*(H/2)**2*(RKER(H/2,0,0,0)*Y(0)+RKER(H/2,H/2,0,0)*
C Y(0)+F2/2)+F(H/2,-1)
C Y(I)=(RL*(H/2)**2*(RKER(H/2,0,0)*Y(0)+RKER(H,H/2,1,0)*
C F2+RKER(H/2,0,0)*Y1
C
C DO 1 N=2,N
C XH=H*H

```

```

5300      CALL FES0(M,H,W)
5400      XK=0.
5500      SUM=0.
5600      DO 2 K=0,M-1
5700      XK=XK+H
5800      SUM=SUM+W(K)*RHER(XH,XK,XI,H,W)*Y(K)
5900      2 CONTINUE
6000      Y(M)=CF(XH,H)+RL*(SUM)/(1-RL*W(M)*RHER(XH,XI,H,W))
6100      1 CONTINUE
6200      RETURN
6300      END
6400
6500      C
6600      SUBROUTINE FES0(H,H,W)
6700      DIMENSION W(0:M)
6800      IF(M.EQ.0)CALL EXIT
6900      IF(M.GT.1) GO TO 5
7000      W(0)=H/2.
7100      W(1)=H/2.
7200      RETURN
7300      5 W(0)=H/3.
7400      IF(M.EQ.3) W(0)=0.
7500      L=M/2
7600      LI=2*L
7700      IF(M.NE.LI) GO TO 2
7800      DO 1 K=1,M-1
7900      W(K)=H*(3.-(-1)**K)/3.
8000      1 CONTINUE
8100      W(M)=H/3.
8200      RETURN
8300      2 IF(M.EQ.3) GO TO 3
8400      DO 4 K=1,M-4
8500      W(K)=H*(3.-(-1)**K)/3.
8600      4 CONTINUE
8700      3 W(M-3)=W(0)+3.*H/8.
8800      W(M-2)=2.*H/8.
8900      W(M-1)=W(M-2)
9000      W(M)=3.*H/8.
9100      RETURN
9200      END
9300      C

```