Universidad Nacional Autónoma de México
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERIA

MODELOS DE SIMULACION USO DEL SUELO-TRANSPORTE

T E S I S

QUE PRESENTA

JOSE ALEJANDRO VILLANUEVA EGAN

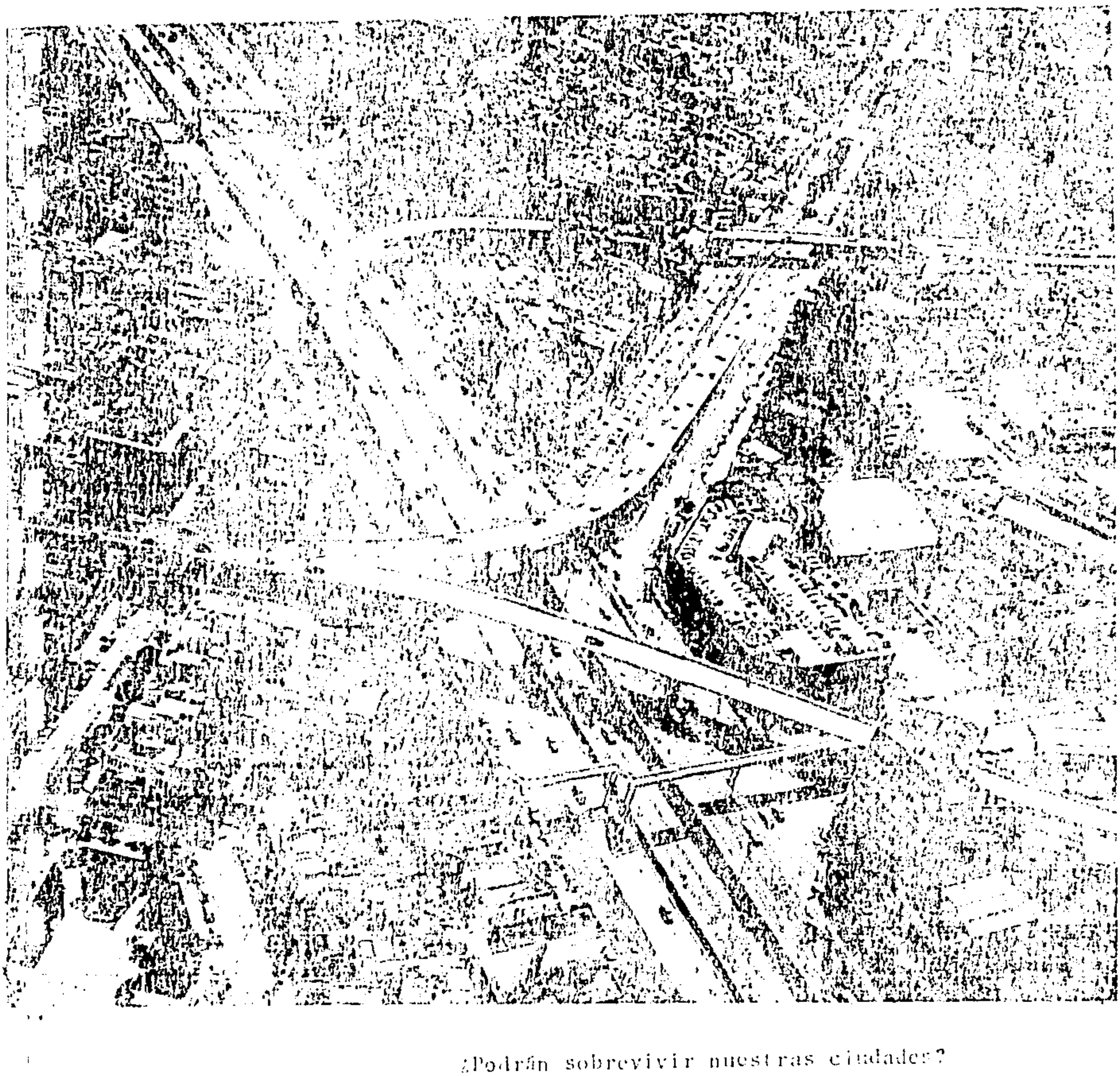
PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO D. F. 1982

CONTENIDO

INTRODUCCION



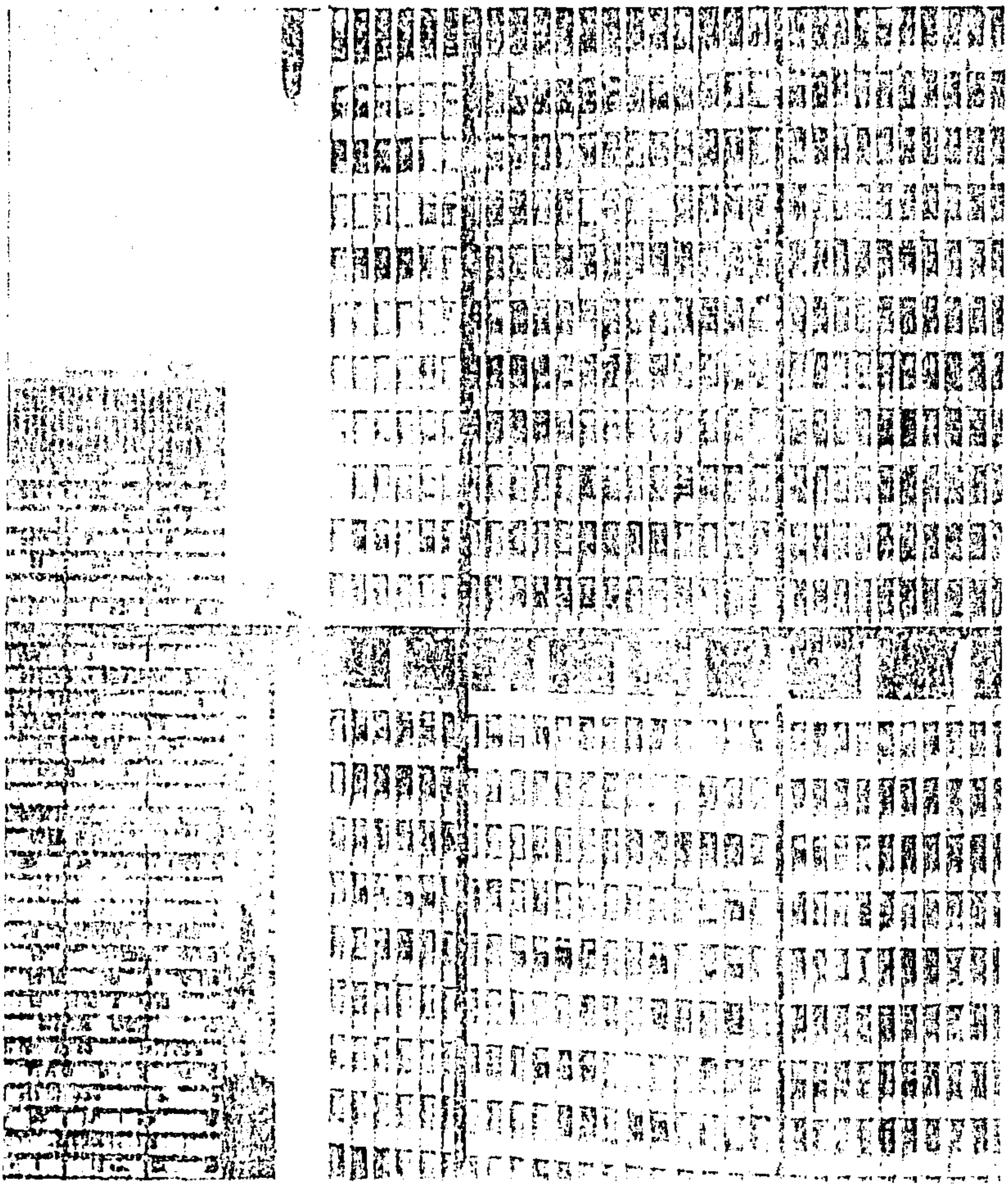
¿Podrán sobrevivir nuestras ciudades?
Walter Gropius, 1942.

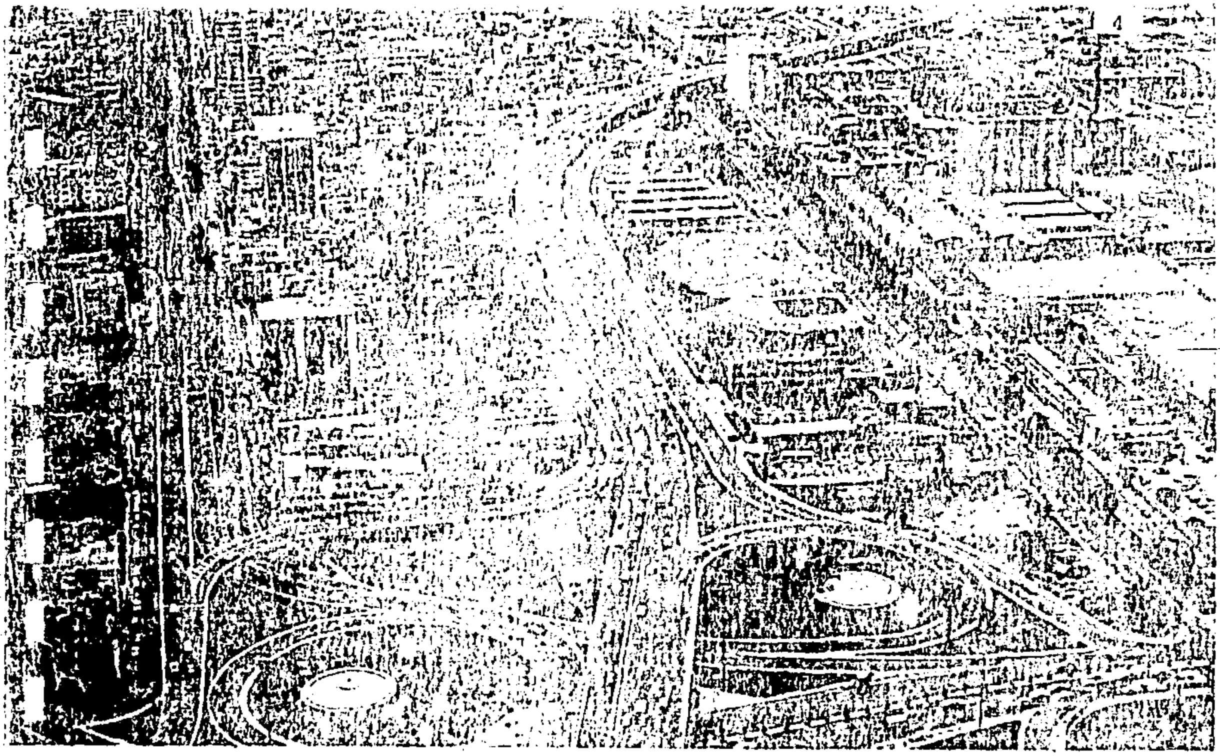
...a incontrolado crecimiento es una bomba de tiempo que nos acerca a un colapso urbano de inesperadas consecuencias.

Carlos Reyes Navarro,
Luis Humberto González, 1982.

1. MEGALOPOLIS

LAS CIUDADES GIGANTESCAS DE NUESTRO TIEMPO.





El impacto de la industrialización y la explosión demográfica urbana, ocasionada por el incontrolado crecimiento natural de la población y la exagerada migración del campo a la ciudad, han tenido como consecuencia la aparición de las megalópolis o ciudades gigantescas de nuestro tiempo.

Actualmente la población mundial está constituída por 4 000 millones de habitantes, de los cuales el 40% viven en los centros urbanos del planeta. Se espera que para el año 2 000 esta población será de 6 500 millones de habitantes y que el 60% de ellos vivirán en las ciudades.

La mayor parte de este crecimiento será absorbido por los países del Tercer Mundo, pero ninguno de ellos esta preparado para responder a este fenómeno de una manera eficiente y equitativa.

La tabla siguiente presenta los pronósticos de población (basados en un estudio de la Organización de las Naciones Unidas) para las principales ciudades del mundo. En ella se observa que dentro de escasos 18 años, las ciudades más grandes del orbe estarán en los países en vías de desarrollo.

TABLA A.

POBLACION ESPERADA PARA EL AÑO 2000 EN LAS PRINCIPALES CIUDADES DEL MUNDO.

Ciudades de los países en vías de desarrollo	Población esperada para el año 2000
1. Ciudad de México	35 000 000 hab.
2. Sao Paulo	26 000 000
3. Shangai	23 000 000
4. Pekín	22 000 000
5. Calcuta	21 000 000
6. Bombay	21 000 000
7. Río de Janeiro	20 000 000
8. Seúl	19 000 000
9. Yakarta	18 000 000
10. El Cairo	17 000 000
11. Karachi	17 000 000
12. Buenos Aires	14 000 000
13. Manila	13 000 000
14. Bogotá	10 000 000
15. Lagos	9 000 000
16. Kinshasa	8 000 000
17. Guadalajara (México)	8 000 000
18. Monterrey (México)	7 000 000

Ciudades de los países desarrollados	Población esperada para el año 2000
1. Tokio	30 000 000 hab.
2. Nueva York	23 000 000
3. Londres	14 000 000
4. París	13 000 000

2. UNA VISION APOCALIPTICA

...cuando el destino nos alcance...

La tragedia urbana en gestación, originada en el corazón del hombre, se presenta como un hecho casi inevitable si se continuan las tendencias actuales. El macabro escenario de los días negros que nos acechan puede describirse de la siguiente manera:

a. Hambrunas y racionamiento de los satisfactores fundamentales para la vida: agua, energéticos y alimentos.

b. Crisis en los servicios públicos.

c. Caos y parálisis urbana por la saturación de los sistemas de transporte individual y colectivo.

d. Mayor incidencia de enfermedades y muertes debido a la contaminación ambiental.

e. Alteraciones climatológicas ocasionadas por la extensa capa de concreto y asfalto.

f. Lucha por el espacio vital: vivienda digna y áreas verdes.

g. Neurósis y deshumanización de la población urbana. Aumento de la drogadicción y el alcoholismo.

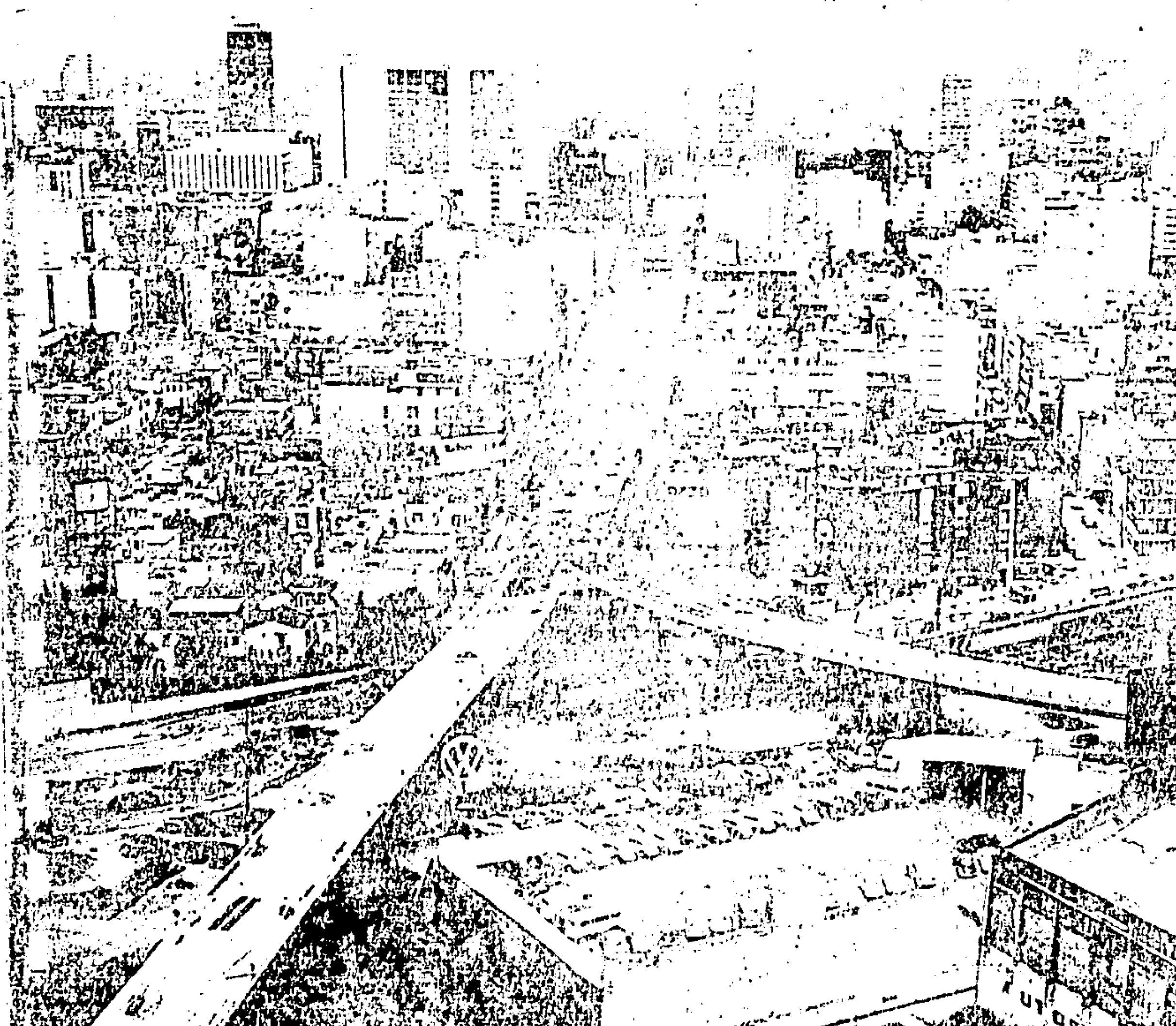
h. Aumento alarmante de la delincuencia: crímenes, asaltos, violencia y pandillerismo.

i. Estados policiacos y armamentización de la población.

j. Crisis gubernamental: levantamientos, guerrilla urbana y proliferación de juntas militares.

k. Desquiciamiento económico: inflación, devaluaciones monetarias, aumento del desempleo, la pobreza y la marginalidad.

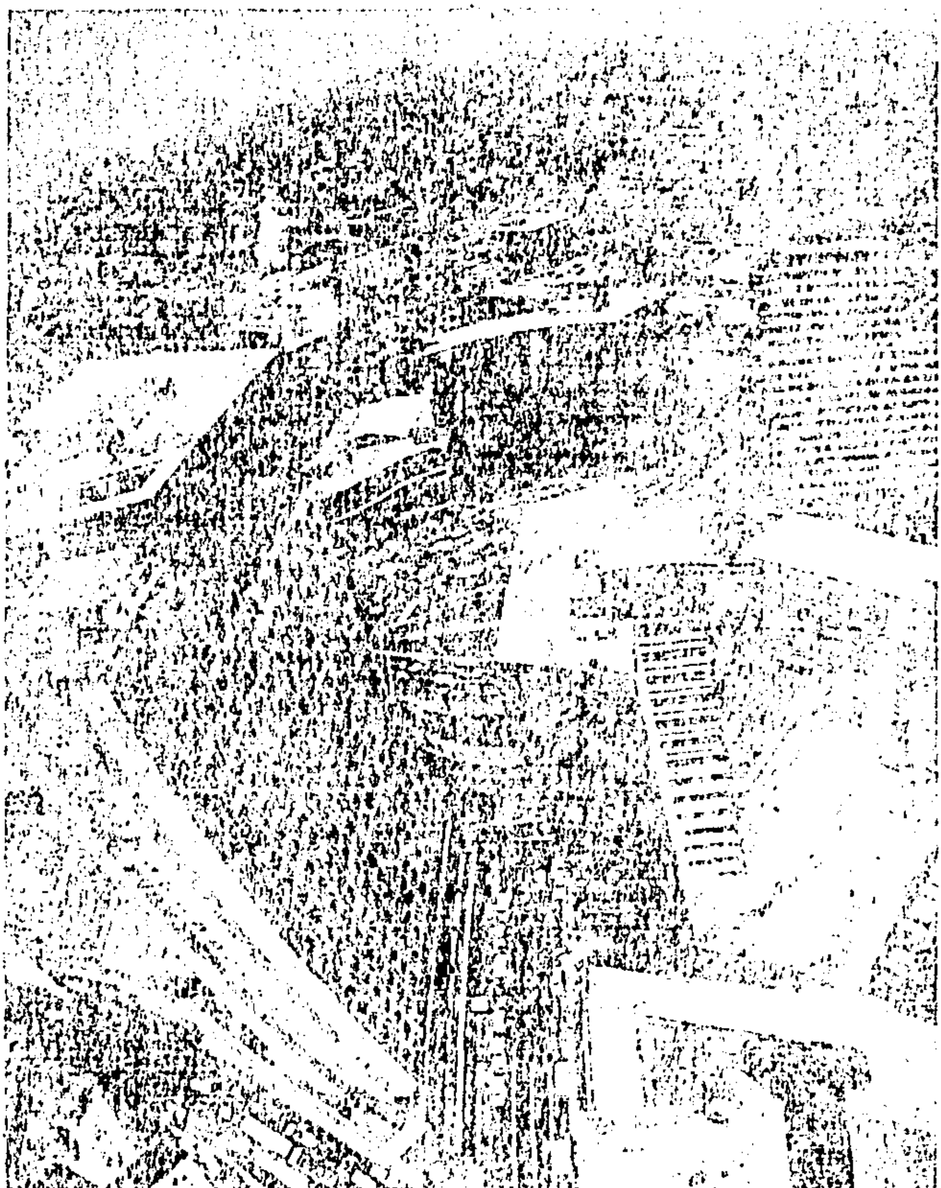
Todos estos son los aspectos detonantes de la bomba de tiempo que representan las enormes ciudades que no se desarrollan sino que simplemente crecen.



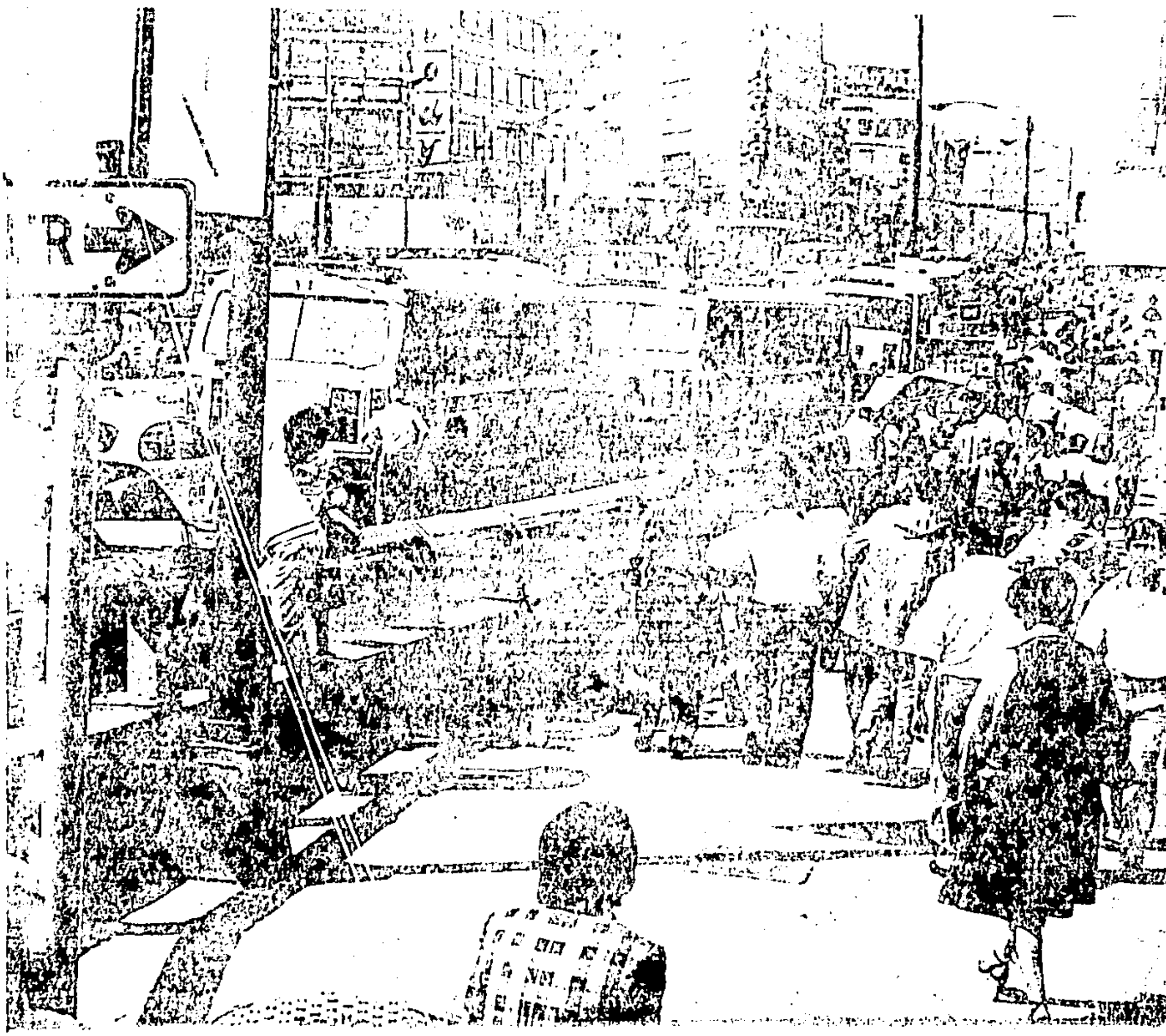
3. LA CIUDAD DE MEXICO

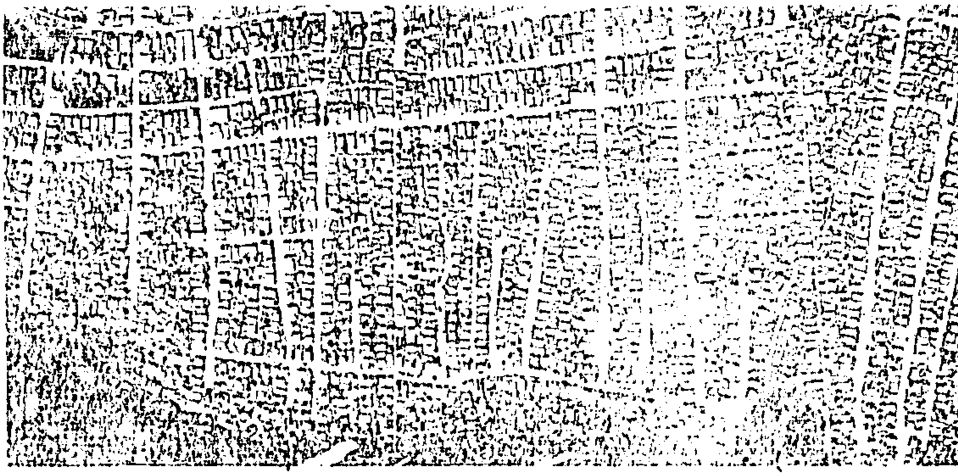
UNA EVIDENCIA CONTUNDENTE

...la ciudad más grande del mundo para el año 2000...



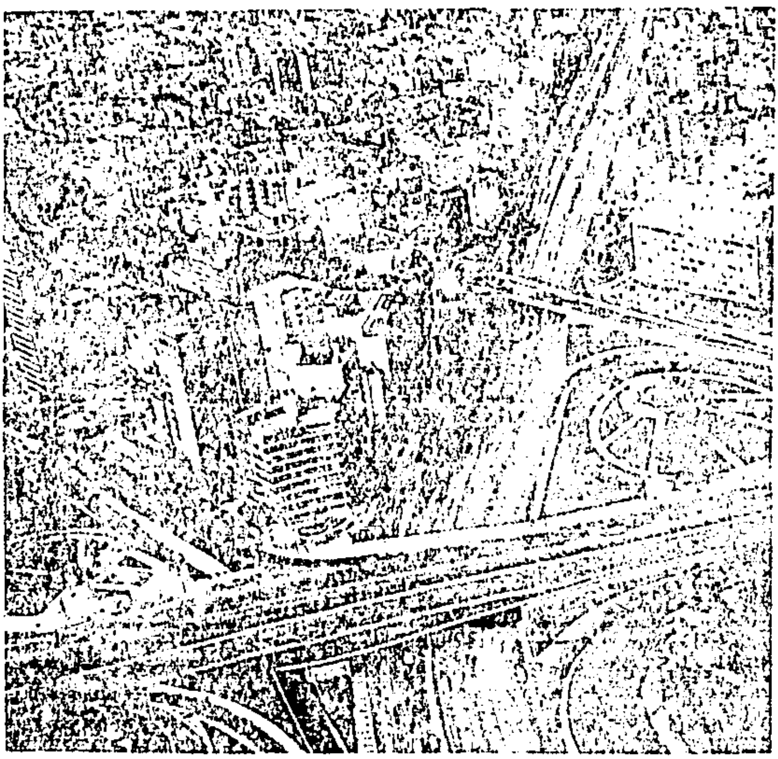
El área metropolitana de la Ciudad de México cuenta actualmente con casi 18 millones de habitantes y es la tercera ciudad más grande del mundo. Se supone que para el año 2000, esta población será de 35 millones, convirtiéndose así en la aglomeración urbana de mayor tamaño en todo el planeta. De llevarse a cabo este proceso de crecimiento, la Ciudad de México extenderá sus límites hasta las ciudades de Toluca, Cuernavaca, Puebla, Pachuca y Querétaro. En este contexto, el Ajusco se convertirá en un parque interior de la gran megalópolis.



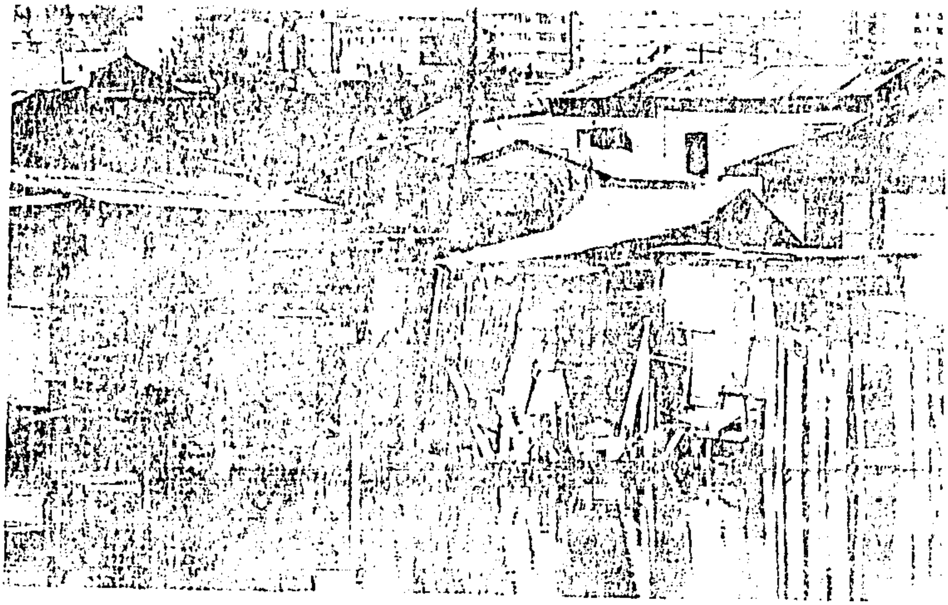


El crecimiento demográfico de la capital de la República Mexicana es del 5.8% anual en promedio (500 a 600 mil habitantes por año), pero en algunas de sus zonas es mucho mayor (28% en Netzahualcoyotl, 14% en Naucalpan, etc.). En el año de 1900 la población de la Ciudad de México era de 240 000 habitantes, lo cual significa que para estas fechas ha aumentado 78 veces su tamaño. Respecto a la migración campo-ciudad, se estima que diariamente llegan a la capital 10 mil personas, pero de estas solamente 1000 logran conseguir trabajo.

La extensión de la Ciudad de México es de 1500 kilómetros cuadrados aproximadamente, los cuales representan solamente el 0.18% del territorio nacional. Sin embargo, en esta pequeñísima porción se concentra el 23% de los habitantes de la República, el 57% de los automóviles, el 31% de la industria de transformación y el 60% de los profesionistas y empleados. En 1980 el presupuesto asignado al gobierno de la Ciudad de México representó el 25.4% del producto interno bruto del país.

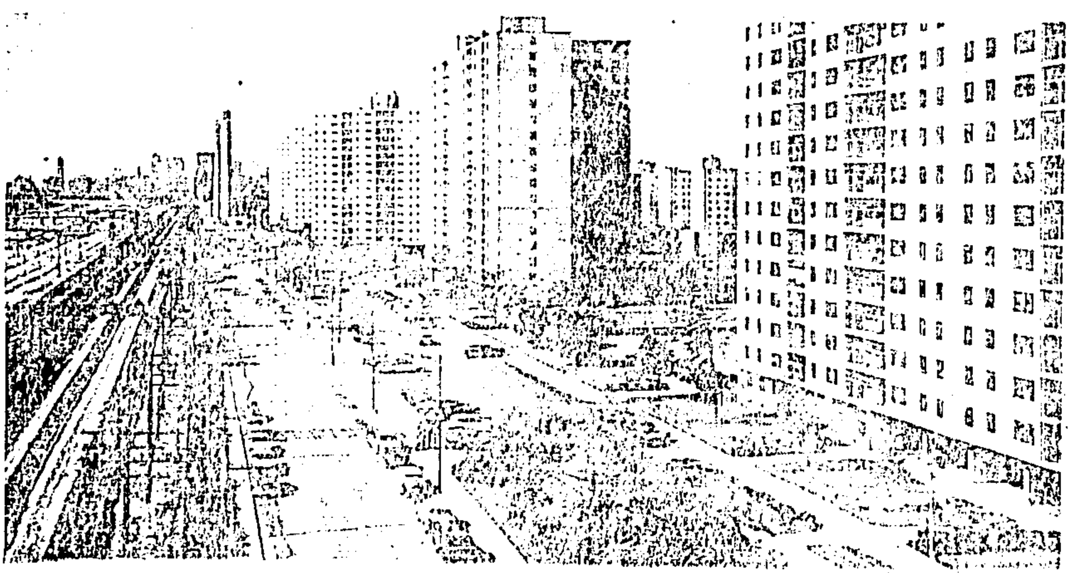


A pesar de esto, existe un profundo abismo económico entre sus habitantes, dado que el 83.1% de la población económicamente activa son asalariados, el 16% trabajan por su cuenta y solamente un 2.7% son empresarios y patrones. En la estructura ocupacional se observa que el 28% de la p.e.a. trabaja en las industrias de transformación, el 32% en los servicios y el 40% en la industria de la construcción y trabajos "informales".



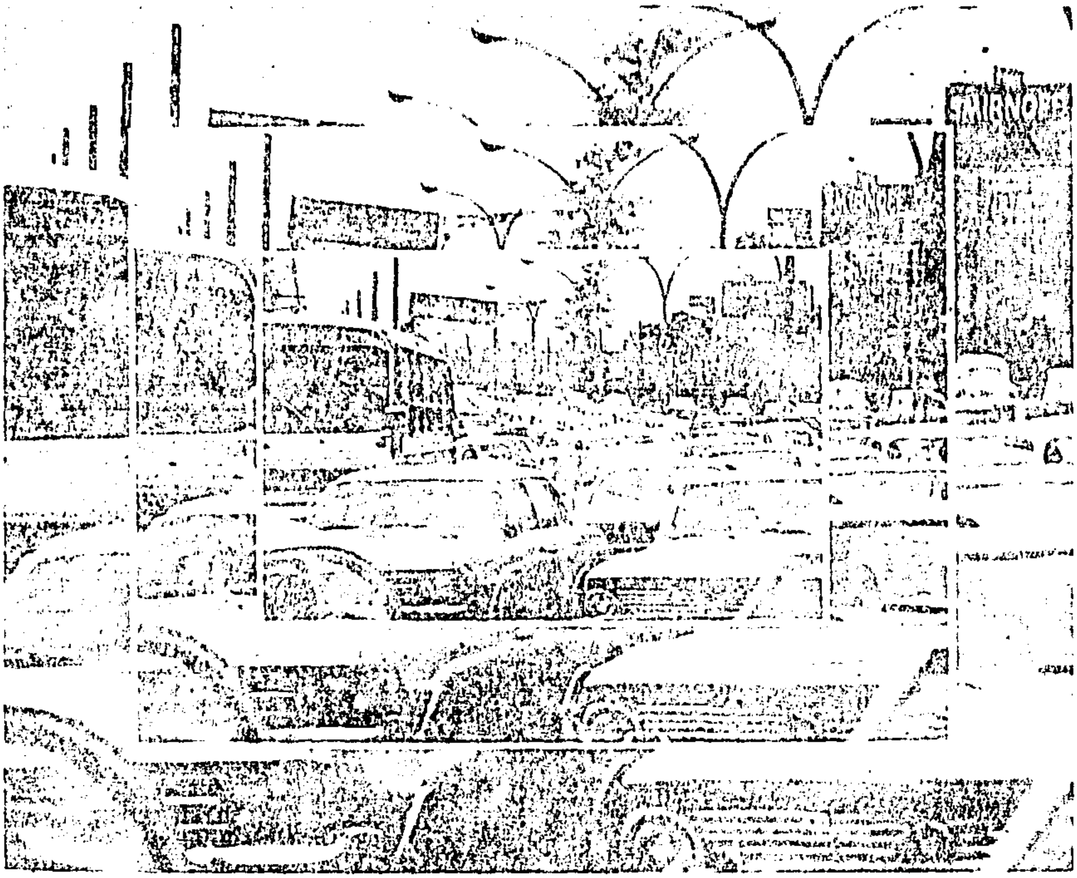
El problema de la vivienda es de graves proporciones en la Ciudad de México.

Actualmente son necesarias 450 000 viviendas nuevas por año, pero solamente se construyen 200 000. Existen 1 700 000 viviendas de arrentamiento y solamente 500 000 casas propias o condominios. El aumento de las rentas ha sido del 500% en los últimos diez años.



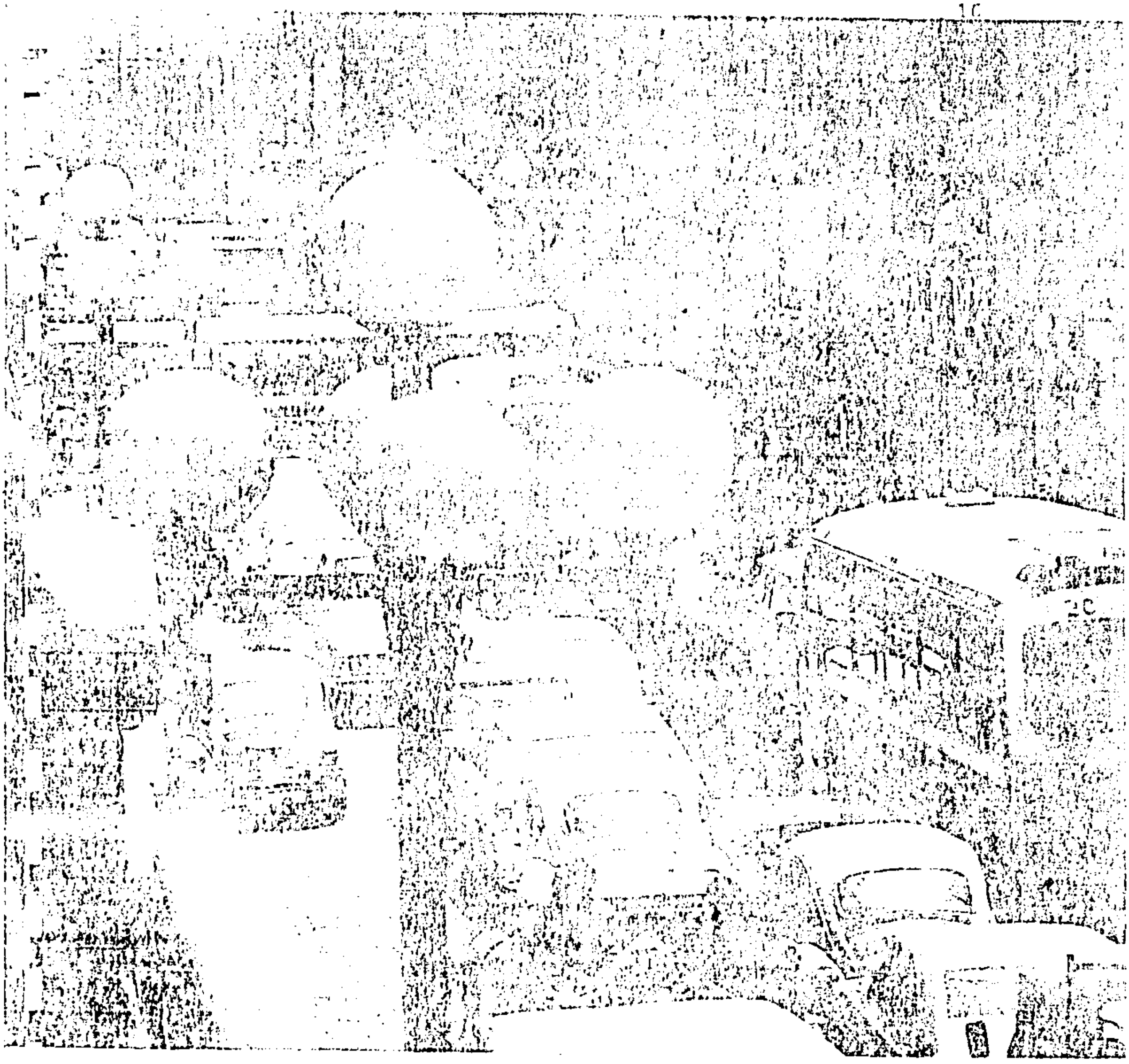
A partir de 1960 comenzó la ocupación ileagl de terrenos, existiendo actualmente 700 000 predios irregulares en 531 colonias, de las cuales el 60% de ellas están localizadas en tierras comunales, el 30% en ejidos y el 10% restante en terrenos de propiedad privada. Esta tendencia ha sido frenada recientemente mediante el uso de la fuerza pública, pero los invasores conocidos como "paracaidistas" están ahora muy bien organizados. En el centro de la ciudad existen aún las llamadas "ciudades perdidas".

...aspecto de una vecindad en una "ciudad perdida" de la Ciudad de México...

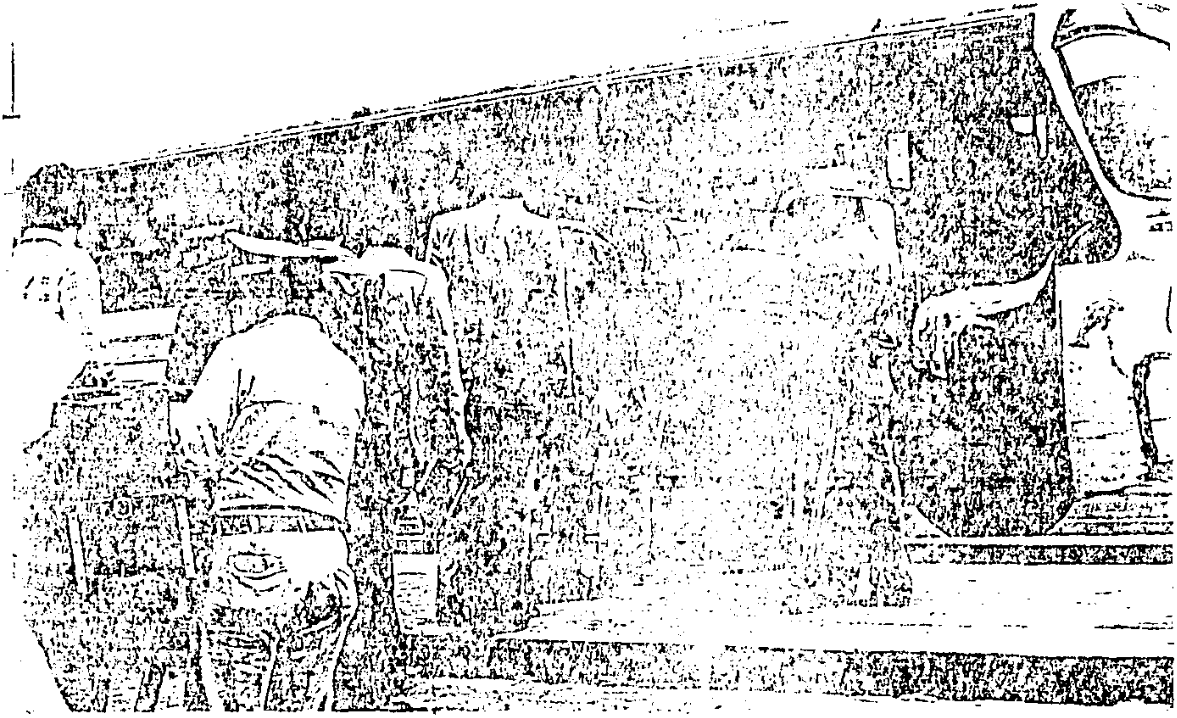


...arteriosclerósis del sistema circulatorio urbano...

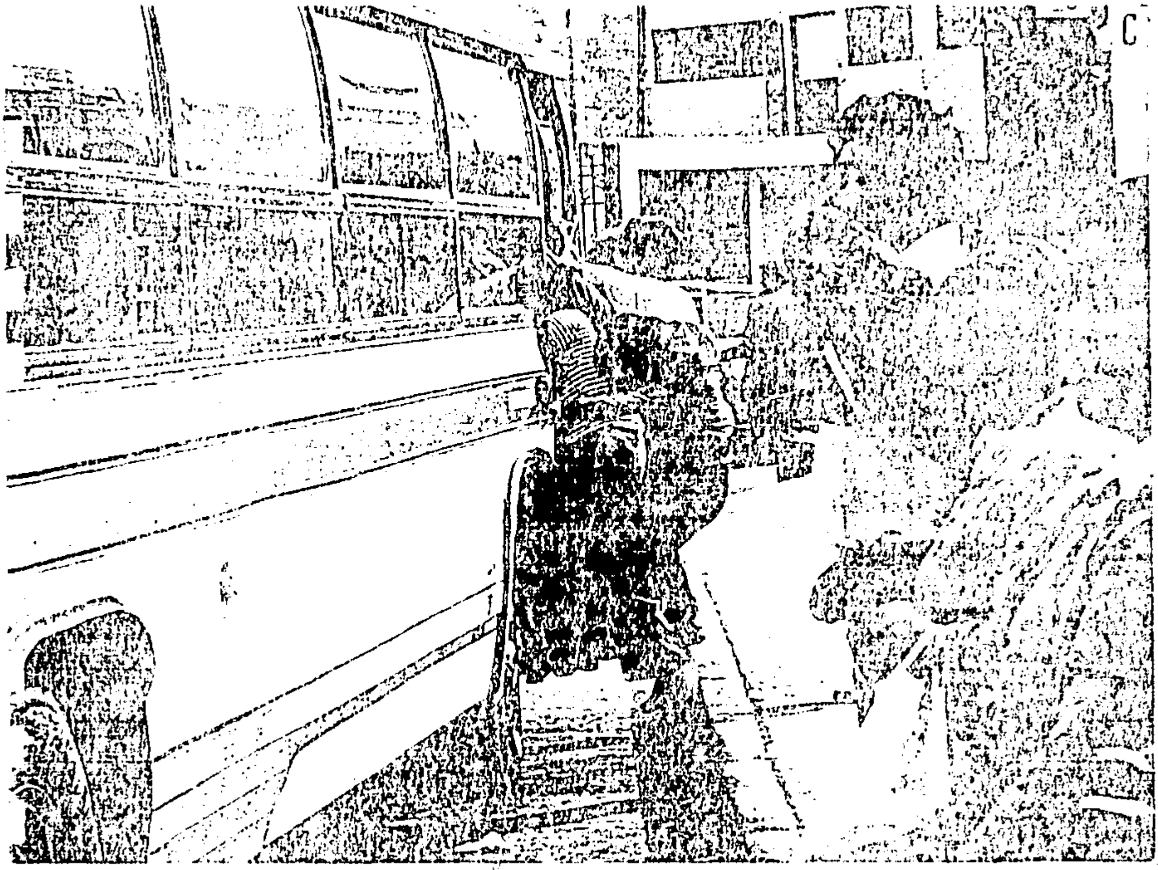
Con respecto al problema del transporte, actualmente circulan 2.5 millones de vehículos que consumen 16 millones de litros de gasolina al día. El transporte individual se impone al colectivo ya que el número de automóviles se incrementa en 200 000 unidades por año, haciendo que el Periférico, el Circuito Interior y los Ejes Viales se saturen en las horas "pico" del tráfico.



Solamente el 3% de los vehículos que circulan en la capital son de transporte colectivo y movilizan al 79% de la población. El 40% de los viajes-persona se llevan a cabo en 780 autobuses urbanos. Estos vehículos tardan hasta dos horas en atravesar la ciudad utilizando la red vial ortogonal.

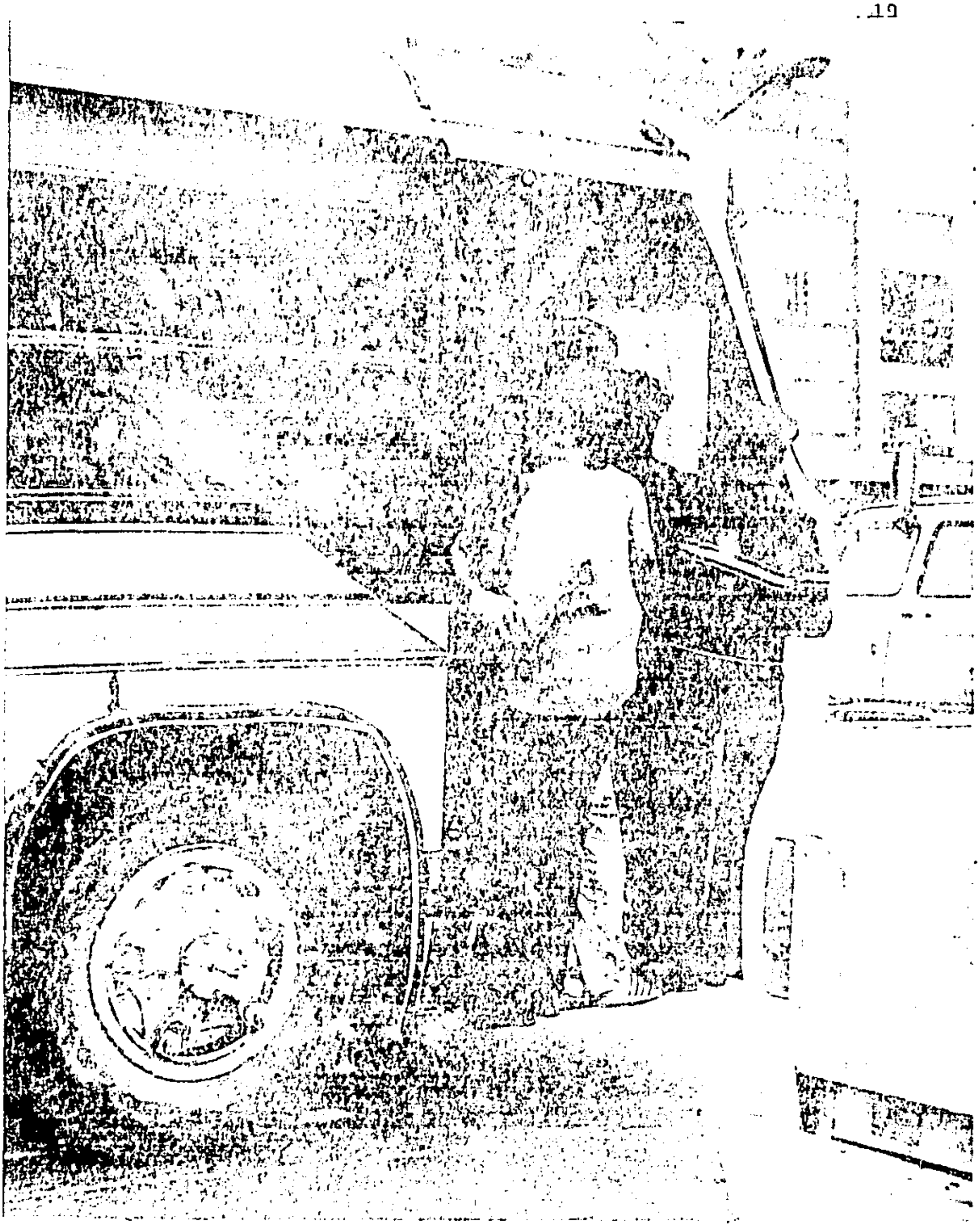


...para abordarlos, el usuario debe esperar de 15 a 30 minutos...

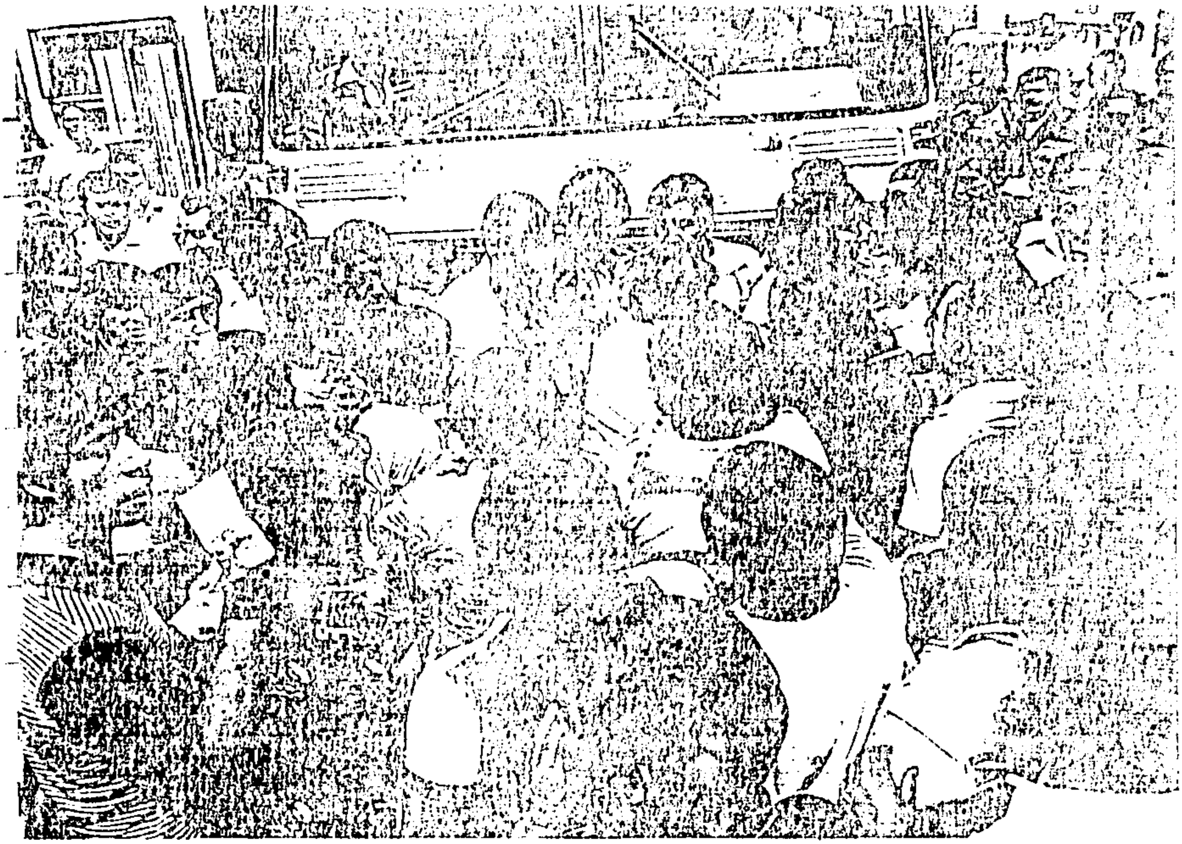


...a pesar de estar diseñados para 43 pasajeros, llegan a subir hasta 95 personas, aún con el riesgo de que pierdan la vida...

La muncipalización de los autobuses urbanos ha sido solamente una medida demagógica más, no resuelve el problema pero sí aumenta la necesidad de subsidios. Además, la contaminación atmosférica ha aumentado en forma alarmante, debido a que los nuevos autobuses arrojan "una nube negra" a lo largo de su recorrido.

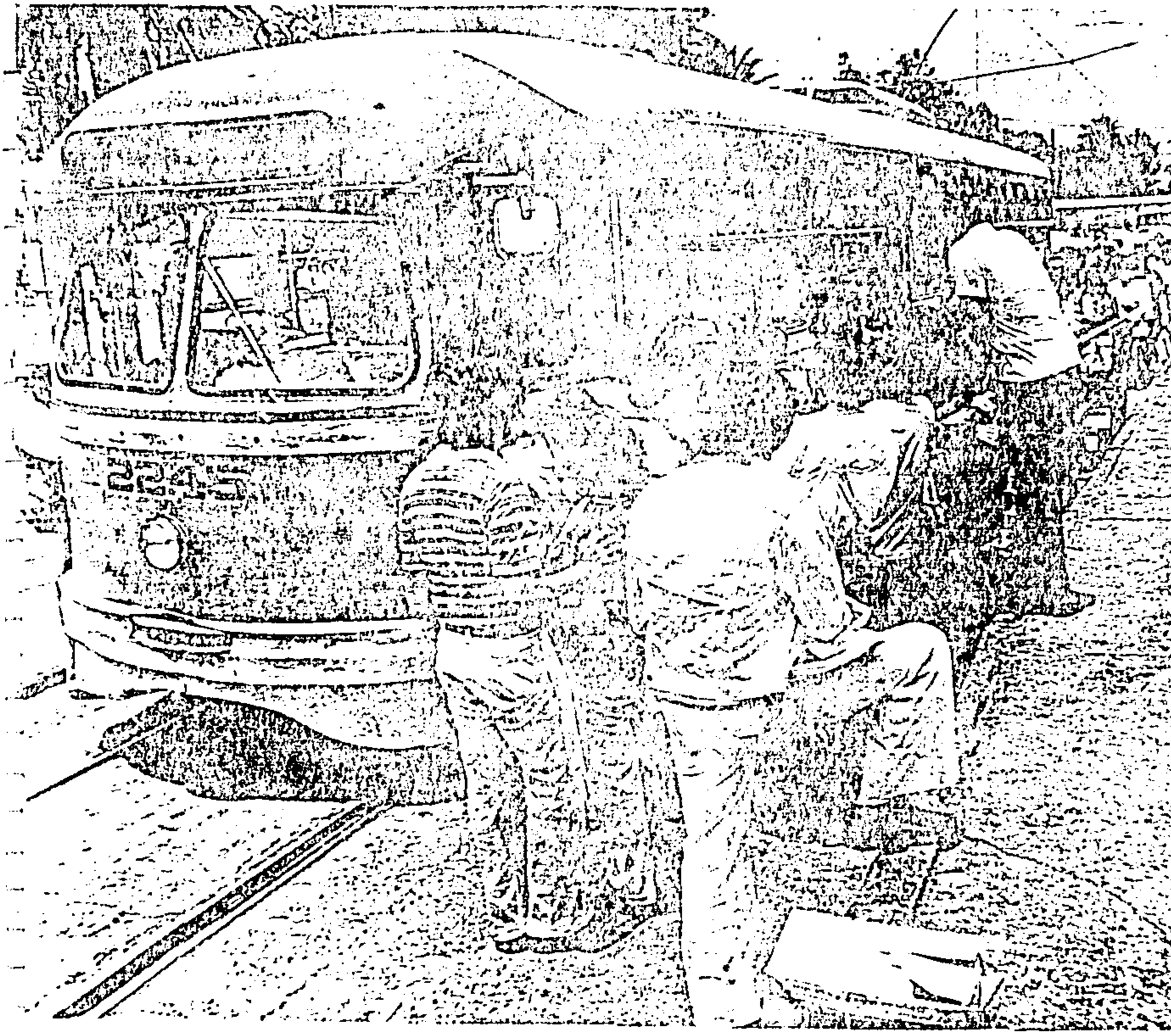


...pásele para atrás...



...luchas por el control del transporte urbano...

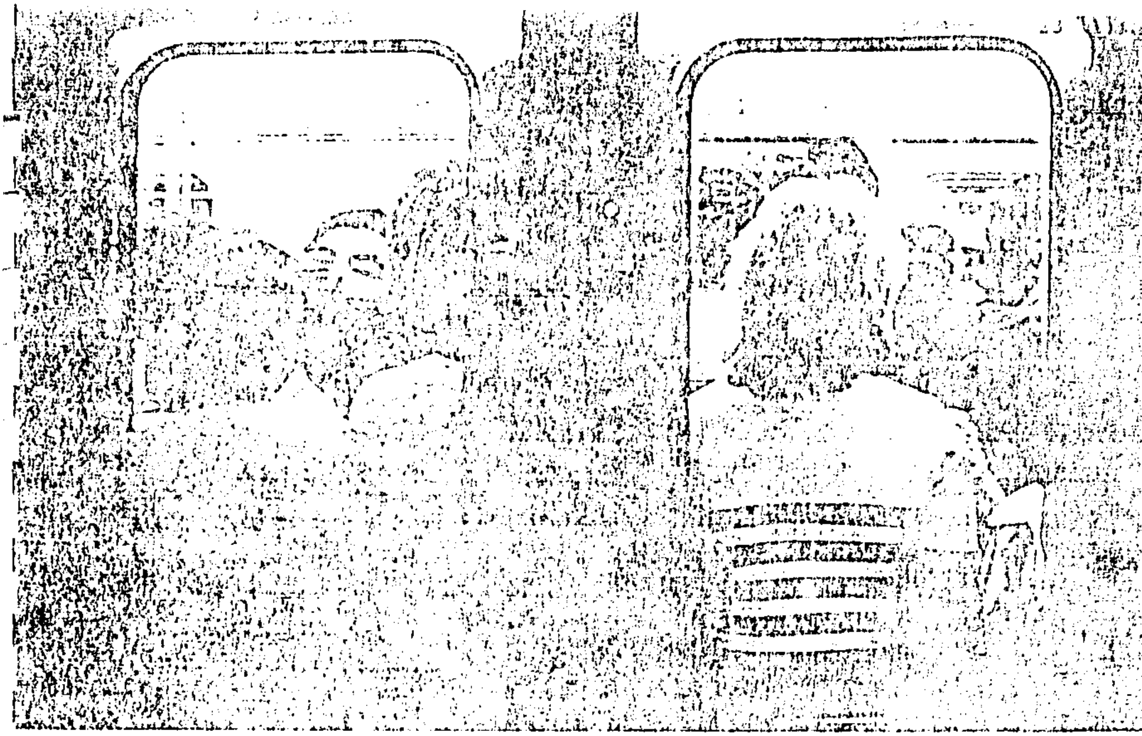
Debido a las duras jornadas de trabajo intenso en las horas de mayor congestionamiento del tráfico, la gran mayoría de los conductores de los autobuses urbanos padecen de neurósis aguda. Los usuarios de este servicio y los automovilistas, sufren las consecuencias.



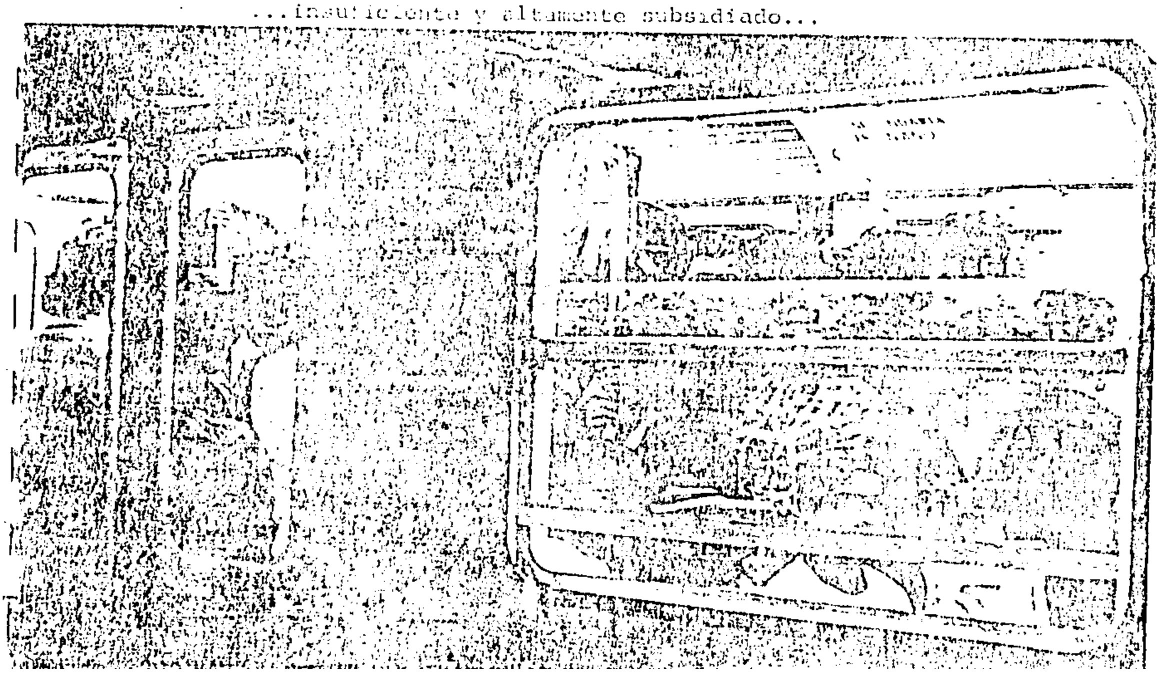
...no contaminan y son de tarifas bajas, pero están a punto de desaparecer...

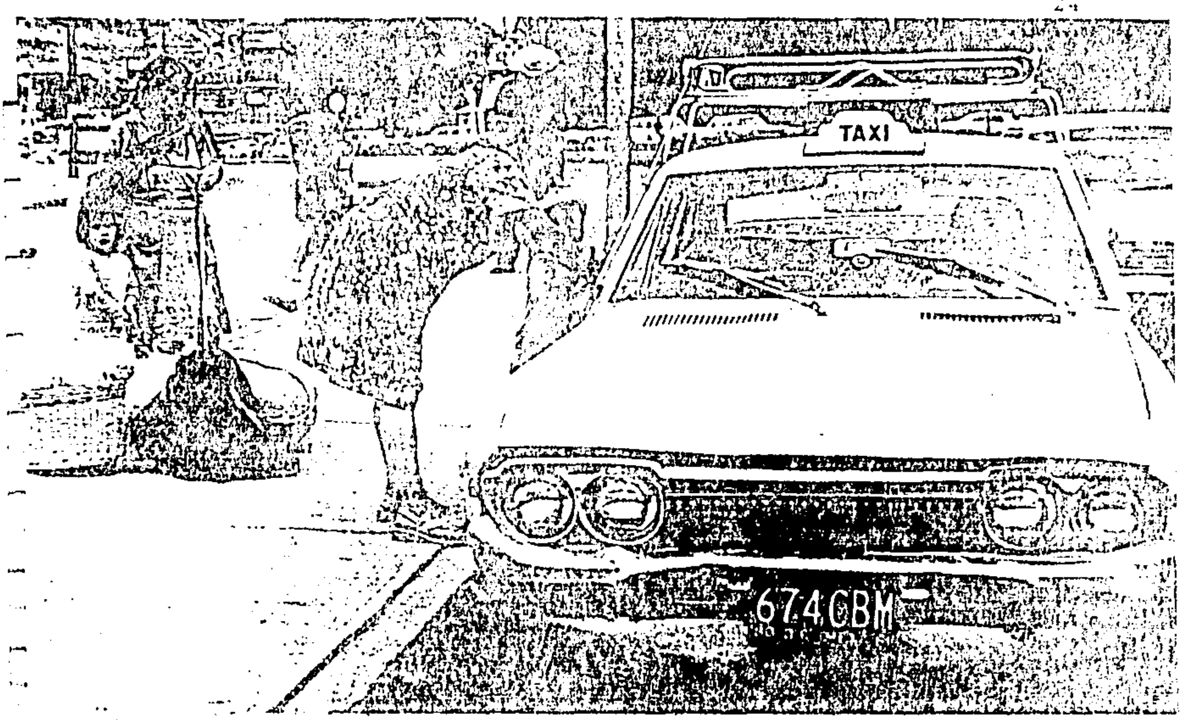
Los cambios que se han hecho en la circulación favorecen sola mente a los automovilistas, pero perjudican grandemente a las personas que viajan en autobús, tranvía o trolebús.

El Sistema de Transporte Colectivo (METRO) es utilizado diariamente por 3.5 millones de personas a pesar de que su capacidad es de 2.5 millones de pasajeros. Las interrupciones en su servicio han ocasionado graves caos en la ciudad. Deben planificarse mejor las rutas de su recorrido, el número de pasajeros a captar, el número de trenes, el tamaño de las estaciones y los servicios de transporte complementario.



...insuficiente y altamente subsidiado...

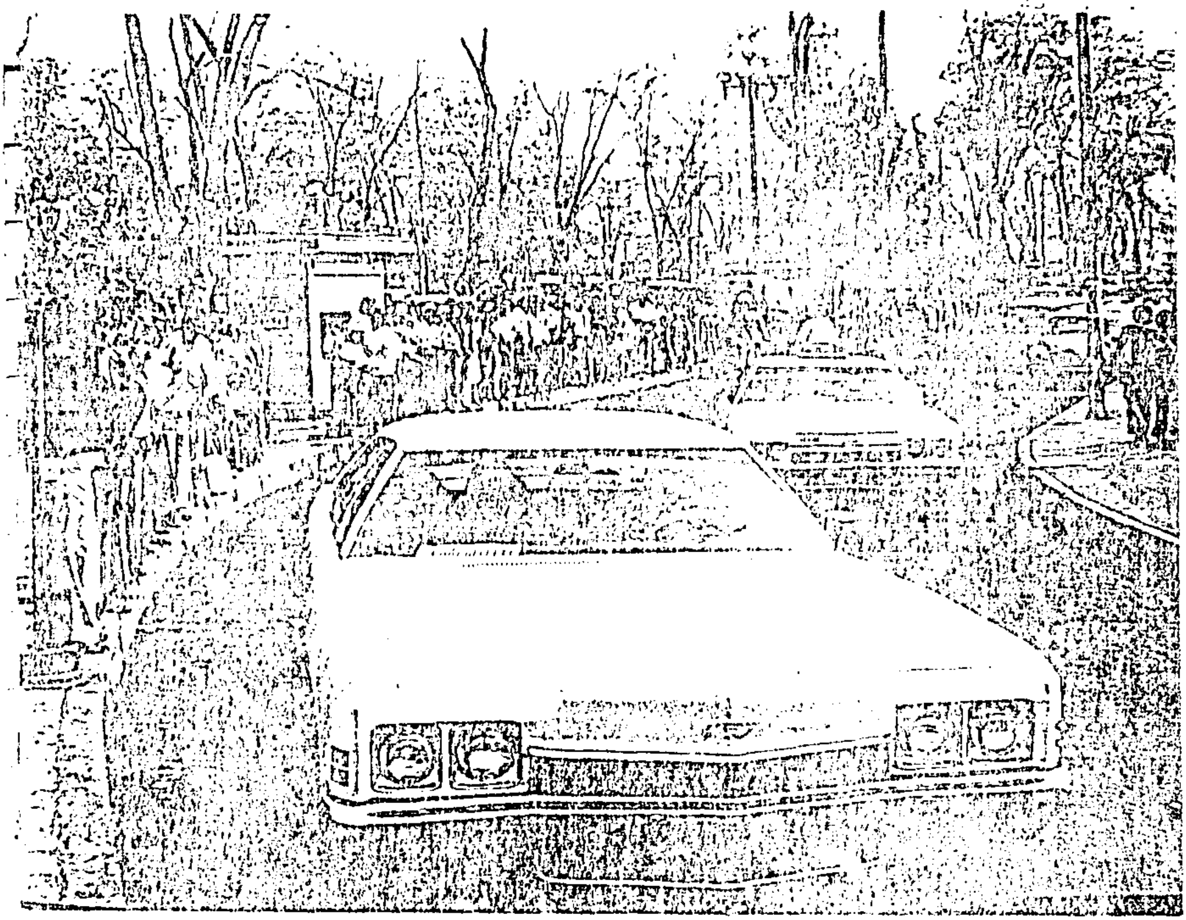




...ya voy a entregar...

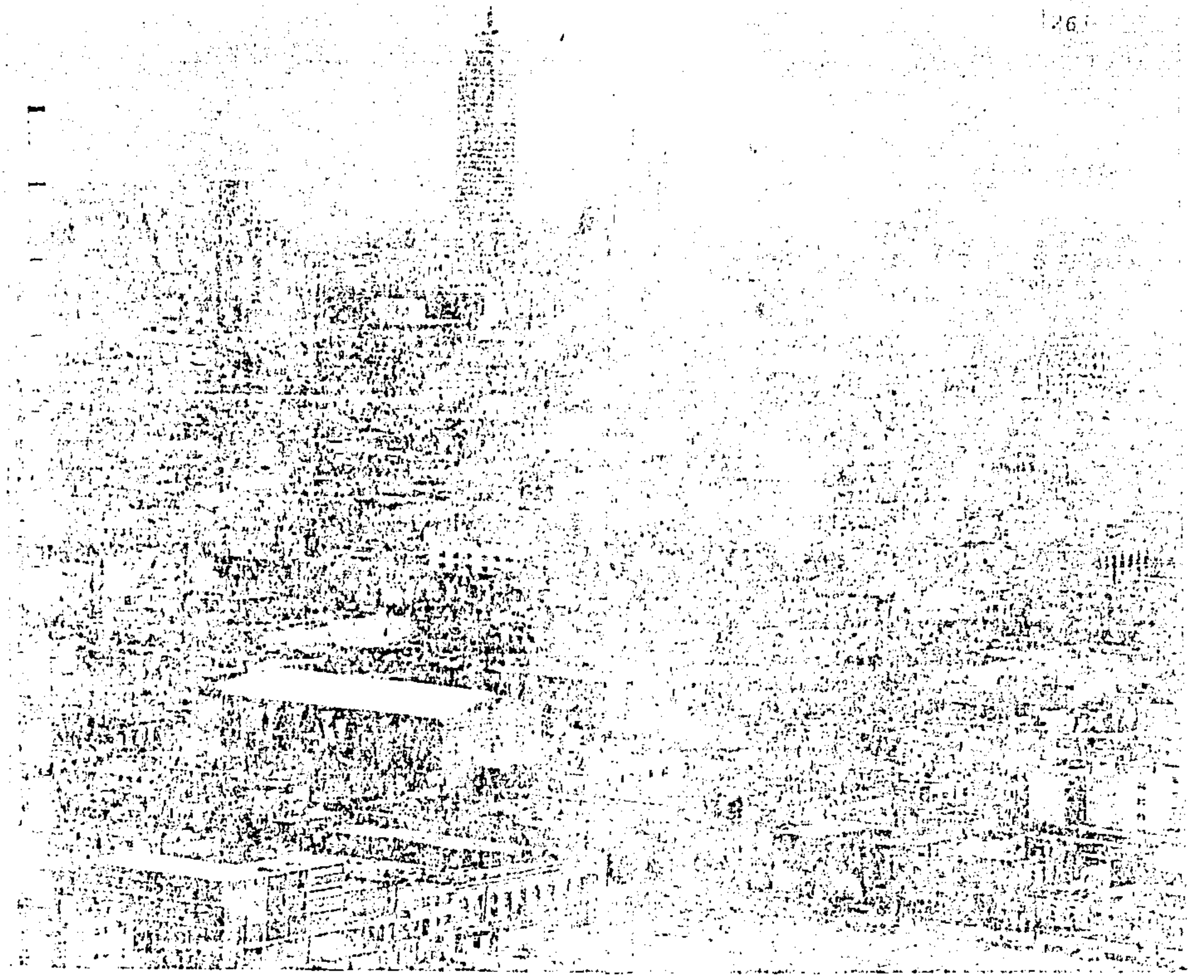
El servicio de taxis está prácticamente fuera de todo control gubernamental. Fijan tarifas arbitrarias que están fuera del alcance de la mayor parte de los capitalinos.

El público usuario se desespera diariamente por los abusos de los taxistas. Es ya un clamor popular la petición de que se les sancione drásticamente para poner fin a su actitud, que está fuera de toda consideración para quienes tienen que utilizar este medio de transporte.



No obstante que el servicio de "peseros" ayuda a remediar la insuficiencia del transporte colectivo, sus tarifas son considerablemente mayores, haciendolo inaccesible a las gentes de escasos recursos.

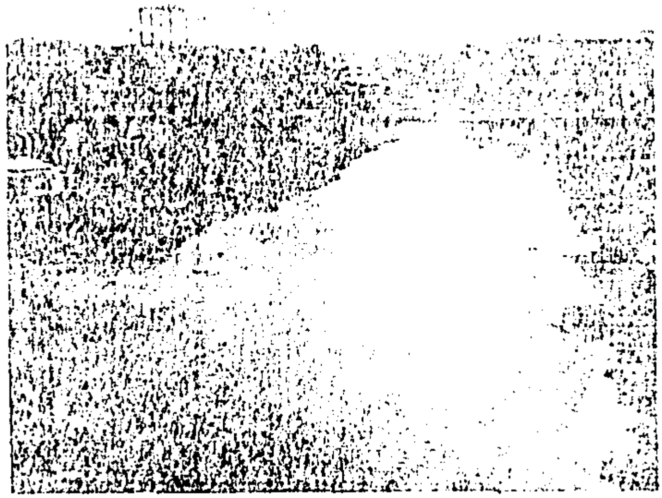
Sin embargo, para conseguir este servicio a las horas de ir al trabajo, es necesario hacer largas filas de espera.



Un breve análisis del problema de la contaminación ambiental nos indica que el Valle de México está agotando su capacidad de defensa y regeneración ecológica, debido a las 800 000 mil toneladas de contaminantes arrojados sobre el agua, el aire y el suelo. La inconciencia de los industriales, de los empresarios y de la población misma, hace que esta situación se agrave día con día. Las autoridades irresponsables no toman las medidas adecuadas para resolver este problema.

...Se estima que para el año 2000 el promedio de vida del capitalino será de 40 años aproximadamente y se calcula que un individuo de esa edad sin haber fumado nunca tendrá los pulmones como un individuo de provincia de 70 años que halla fumado toda su vida...

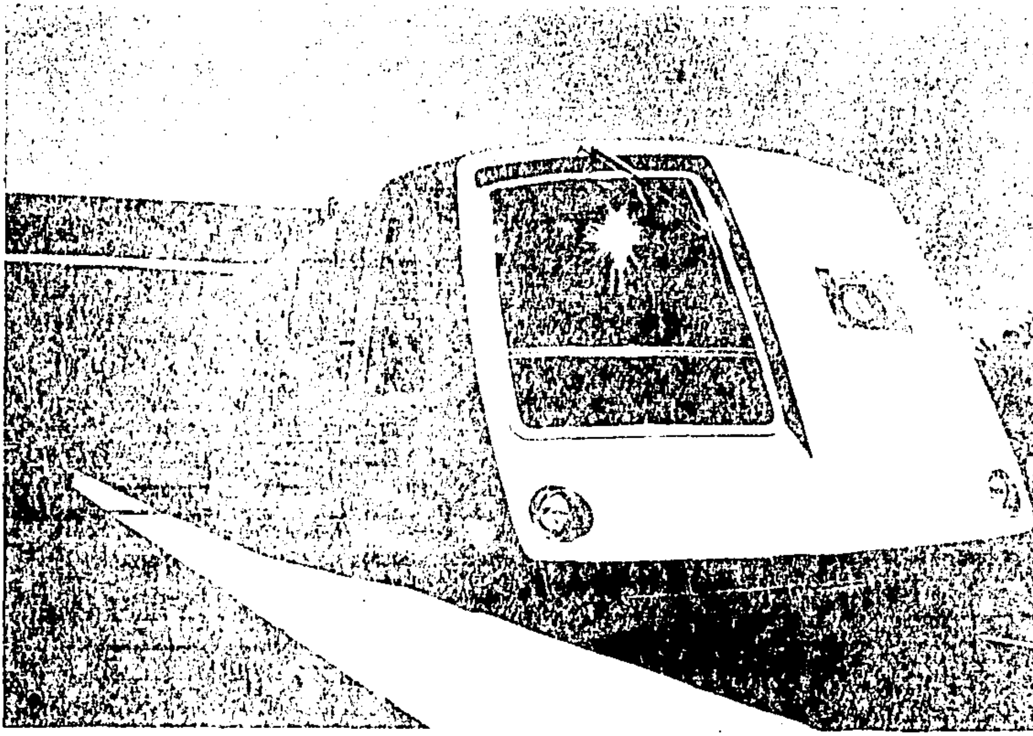
Ótros problemas sumamente graves y costosos de solucionar son el de la provisión de agua y el de los servicios de limpia.



4. USO DEL SUELO Y TRANSPORTE URBANO EN LOS PAISES SUBDESARROLLADOS.

El uso del suelo y el transporte son los factores más importantes del desarrollo urbano, ya que condicionan la configuración física y la eficiencia de los asentamientos humanos. Las grandes ciudades de hoy no podrían existir sin las ventajas del transporte moderno, que facilita el intercambio de bienes y servicios. Sin embargo, esta tecnología es desarrollada en los países con ingresos mucho mayores a los obtenidos en los países en vías de desarrollo.

En los países "ricos" o desarrollados, que tienen además tasas pequeñas de crecimiento demográfico, se ha puesto énfasis en la obtención de espacios más amplios para la actividad residencial, mediante la utilización de sistemas de transporte individual y colectivo muy costosos. Así, sus patrones de expansión espacial están constituidos por el distrito central de negocios que concentra las actividades económico-financieras y los suburbios cuya función principal es la habitacional. Esto requiere una alta capacidad de los sistemas de transporte en los períodos "picos" de movimiento de la casa al trabajo.

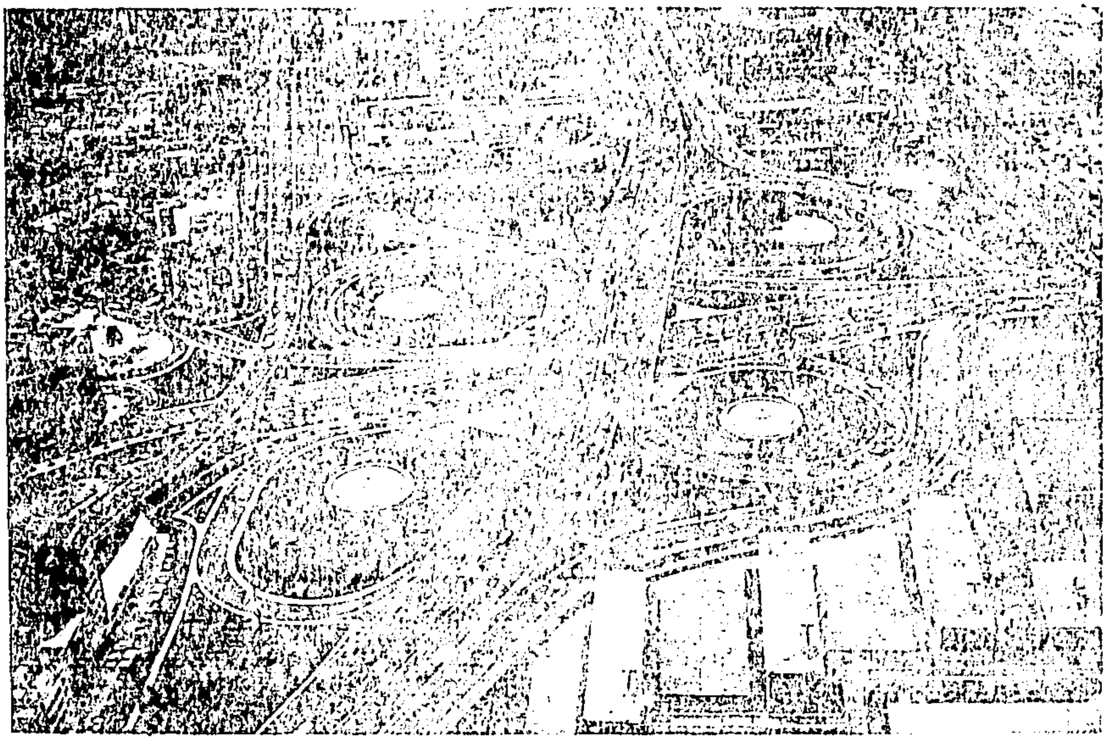


Como ejemplo de este tipo de ciudades están Nueva York, Londrés, París y Tokio.

Las ciudades de los países en vías de desarrollo están siguiendo patrones de crecimiento semejantes. Las actividades de los negocios y las industrias tienden a concentrarse y las zonas habitacionesles tienden a dispersarse. Al aumentar el tamaño de estas ciudades la longitud de los viajes se hace mayor. En una ciudad de un millón de habitantes, el viaje promedio al trabajo es de cinco kilómetros aproximadamente, mientras que en una ciudad de cinco millones de habitantes, este tipo de viajes es de diez kilómetros en promedio.

Obviamente, al aumentar la distancia se incrementan los costos del transporte.

Si los patrones actuales de utilización del suelo se continúan, será inevitable hacer viajes más largos al trabajo. El costo de estos viajes será prohibitivo para los habitantes más pobres, que no pueden localizarse céntricamente debido a que las rentas son muy altas y por consecuencia tienen que ubicarse de manera desventajosa con respecto a su trabajo, aumentando así sus gastos en transporte y sus tiempos de recorrido.



...aspecto de una parte del sistema vial en la Ciudad de México...

...las ciudades de los países en vías de desarrollo están copiando los patrones de expansión espacial de las ciudades de los países desarrollados...

El transporte colectivo es el más económico pero es insuficiente y sus rutas no cubren toda la ciudad. Los camiones hacen demasiado tiempo en sus recorridos y los taxis tienen tarifas casi inalcanzables debido a que están prácticamente fuera del control gubernamental y a la congestión del tráfico en las horas "pico". El aumento del precio de los automóviles hace que estos sean solamente accesibles a los grupos de mayor ingreso.

La ampliación de las líneas del sistema de transporte colectivo (METRO) es muy costosa, sin embargo su expansión es de primordial importancia para los grupos de ingreso más bajo. Muchos de los sistemas de transporte colectivo están muy mal administrados y requieren altísimos subsidios. Las restricciones financieras impiden su expansión a una tasa de crecimiento suficientemente rápida para satisfacer el crecimiento de la ciudad.

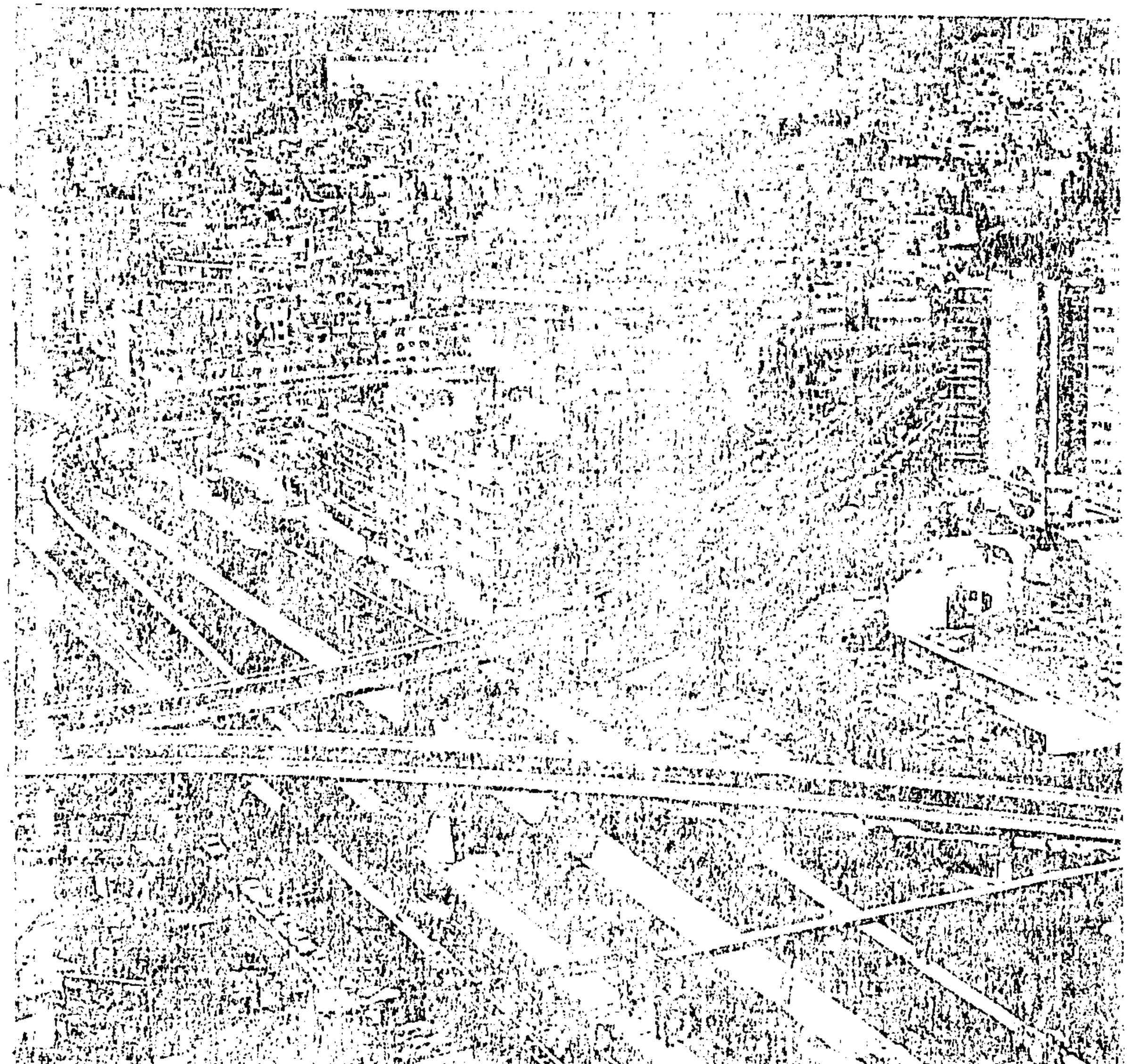
Los sistemas privados de transporte (taxis y "peseros") ayudan a remediar las deficiencias de los sistemas públicos pero sus tarifas son mucho mayores.

El crecimiento de las ciudades de los países en vías de desarrollo no puede ni debe seguir los patrones espaciales de los países desarrollados. La localización de los empleos y las viviendas debe ser más contigua con el objeto de reducir los costos de transporte y hacer que los grupos de menor ingreso tengan mayor acceso a las oportunidades de trabajo.

Calcuta, Bombay, la Ciudad de México, Seúl, Shangai y Pekín, las cuales tendrán más de veinte millones de habitantes para el año 2000, ocuparán mucho más espacio del que ocupan actualmente. El tener un Metro como el de Nueva York o el de París, está fuera de sus posibilidades económicas. Sus patrones de crecimiento deben estar formados por múltiples núcleos autosuficientes. El desarrollo de un sistema de transporte eficiente en estas megalópolis es de vital importancia y no puede posponerse si se quiere que den acomodo a su crecimiento de población de una manera eficiente y equitativa.

5. INTERACCION DEL USO DEL SUELO Y EL TRANSPORTE URBANO.

A través del análisis del fenómeno urbano, los planificadores han identificado la existencia de una relación dinámica de retroalimentación entre estas dos variables.



Las características de los usos del suelo, tales como el tipo de uso, su densidad, su localización relativa y sus facilidades de acceso, condicionan la naturaleza del tráfico generado en el área urbana que ocupan, siendo esto el factor determinante de la adecuación de las redes de transporte circundantes.

A su vez, los sistemas de transporte tienen un impacto substancial sobre el tipo y desarrollo de los usos del suelo localizados a lo largo de su recorrido.

Debido a esta interdependencia, la congestión del tráfico en las grandes ciudades no puede remediarse con la ampliación de las redes de transporte existentes, ni con la construcción de nuevos sistemas. Las inveriones en transporte provocan cambios en los usos del suelo, haciendo aparecer, por lo general, desarrollos comerciales y habitacionales incontrolados e inesperados. Estos generan un aumento del tráfico en la zona, el cual sobrepasa la capacidad para la que fue planeada la nueva facilidad de transporte. Así, esta se ve saturada al poco tiempo de ser inaugurada. Esto se debe a la acción de los especuladores, que al enterarse de la construcción o ampliación de un sistema de transporte, compran terrenos en las zonas aledañas, con el objeto de hacer inversiones en inmuebles de oficinas, centros comerciales, fraccionamientos residenciales y parques industriales. De esta manera, al proporcionar mejor acceso a las zonas que anteriormente no lo tenían, surgen nuevos usos del suelo que generan una demanda mayor de transporte, haciendo que el nuevo sistema se vuelva obsoleto prematuramente. Además, el ampliar las redes de transporte, favorece la ocupación de las zonas rurales contiguas a la ciudad, haciendo que esta se extienda cada vez más a través de suburbios densamente poblados, los cuales a su vez requieren de nuevas inversiones en transporte. En realidad, este es el proceso mediante el cual se expanden las áreas metropolitanas.

Los gobiernos no deben construir más vías de transporte hasta que se acabe el dinero o el espacio, ya que la demanda siempre irá en aumento y nunca será satisfecha.

Una política más adecuada, consiste en relocalizar la demanda y limitar la construcción de desarrollos comerciales y habitacionales a lo largo del recorrido de los sistemas de transporte.

Para solucionar verdaderamente el problema de la congestión del tráfico, se pueden proponer las metas siguientes:

a. Lograr un balance entre el nivel de servicio de los sistemas de transporte y los usos del suelo a los que sirven.

b. Controlar el acceso y la circulación de vehículos en las vías rápidas.

c. Reservar una cantidad suficiente de terreno a lo largo de las facilidades de transporte, para satisfacer las necesidades de crecimiento en el futuro.

Para alcanzar estas metas, pueden considerarse dos enfoques diferentes pero complementarios.

1. Microcontroles.

Establecen un control sobre los usos del suelo a un nivel muy detallado en las zonas aledañas a las facilidades de transporte. Se deben identificar, el tipo, la densidad y la localización de los usos del suelo, con el objeto de determinar los lugares de acceso a las vías de transporte, el diseño geométrico de las mismas y las áreas necesarias para estacionamientos.

2. Macrocontroles.

Mediante este enfoque, se intenta controlar globalmente, el ti po, la densidad y la localización de los grandes generadores de tráfico para toda el área metropolitana.

Esto se hace con el objeto de compatibilizar los niveles y las características del tráfico con la capacidad de las redes de transporte.

Para lograrlo, es necesario considerar las siguientes características de los usos del suelo:

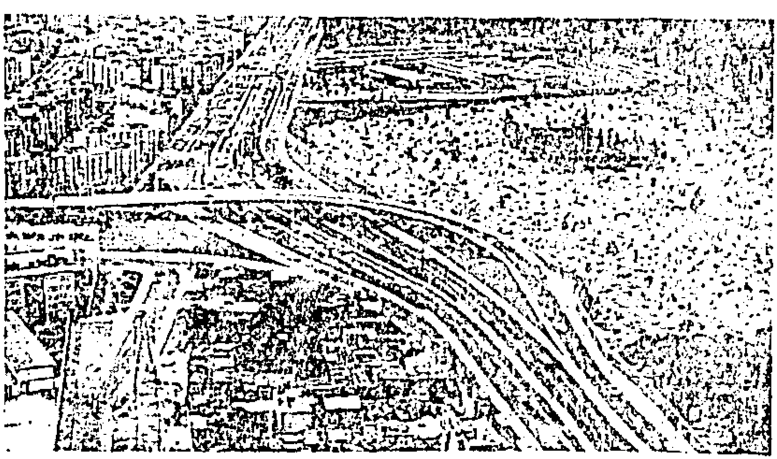
a. Cantidad de tráfico generado por unidad de superficie del uso del suelo o por piso contruído.

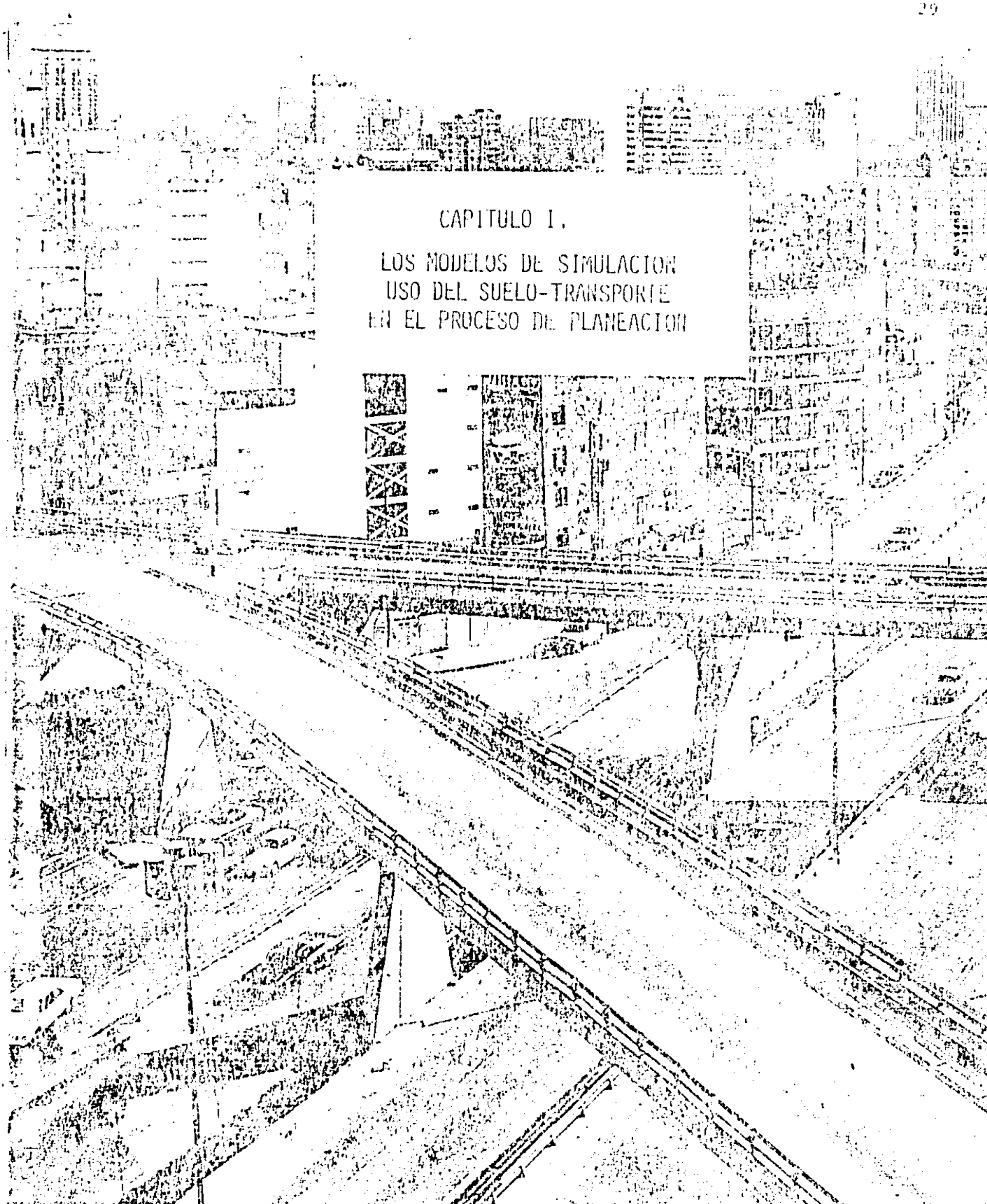
b. Distribución temporal de los volúmenes máximos del tráfico generado por un uso del suelo (horas "pico").

c. Dirección del movimiento del tráfico generado (orígen y destino).

d. Composición del tráfico generado (tipos de vehículo y su ocupación).

En síntesis, la esencia de la solución radica en la modificación de la organización espacial de las metrópolis mediante planes integrales de uso del suelo y transporte. Las herramientas más útiles en este proceso son los modelos de simulación computarizados que se describen en este trabajo.





CAPITULO I.

LOS MODELOS DE SIMULACION USO DEL SUELO-TRANSPORTE EN EL PROCESO DE PLANEACION

I. LOS MODELOS DE SIMULACION USO DEL SUELO-TRANSPORTE EN EL PROCESO DE PLANEACION.

...planeación vs. proyección...
...participación vs. imposición...
...sinergía de técnicas...
...sinergía hombre-máquina...

A partir de los últimos años de la década de los cincuentas se han utilizado cada vez con mayor frecuencia los modelos de simulación computarizados para analizar los efectos de políticas alternativas que puedan guiar el desarrollo de los centros urbanos. Sin embargo, su utilidad ha sido limitada debido a que solamente han servido para fines de proyección estadística y no propiamente para explicar las causas y los efectos del crecimiento urbano. Si se quiere diseñar el futuro de una ciudad o una gran área metropolitana este conocimiento es de vital importancia, ya que solo mediante él es posible encontrar la forma en la que podemos orientar y modificar su organización y su estructura espacial. Además, los constructores de los modelos han descuidado la integración de estas técnicas con los nuevos enfoques de planeación y no han aprovechado verdaderamente las ventajas que ofrece la moderna tecnología de la informática. Otro factor aún más importante para lograr una mayor adecuación de estos modelos es el que los modeladores y los planificadores se concienticen acerca de la magnitud y la gravedad de los problemas latentes que pueden presentarse en la actualidad y en el futuro cercano.

En este capítulo se presenta una alternativa que pretende considerar estos aspectos. Si tratamos de conjuntar las ventajas del análisis cuantitativo de los modelos de simulación, la creatividad y la flexibilidad inherentes en el enfoque de planeación prospectiva y la capacidad para el manejo interactivo y la representación gráfica de información de las computadoras modernas encontramos una sinergía de técnicas que proporciona mayor eficiencia al proceso de análisis y solución de la problemática urbana.

En este enfoque se enfatiza la participación coordinada de planificadores, gobernantes, expertos en múltiples disciplinas y representantes de los diferentes grupos que integran la sociedad. Las técnicas de planeación son consideradas como un sistema que permite su aplicación adecuada en los diferentes niveles de análisis y la retroalimentación mutua entre ellas. La computadora es simplemente una extensión de las facultades del hombre y no una "caja negra" que proporciona soluciones ajenas a su intelecto.

El diagrama de la figura I.1 muestra las principales componentes computacionales del sistema de planeación del uso del suelo y el transporte.

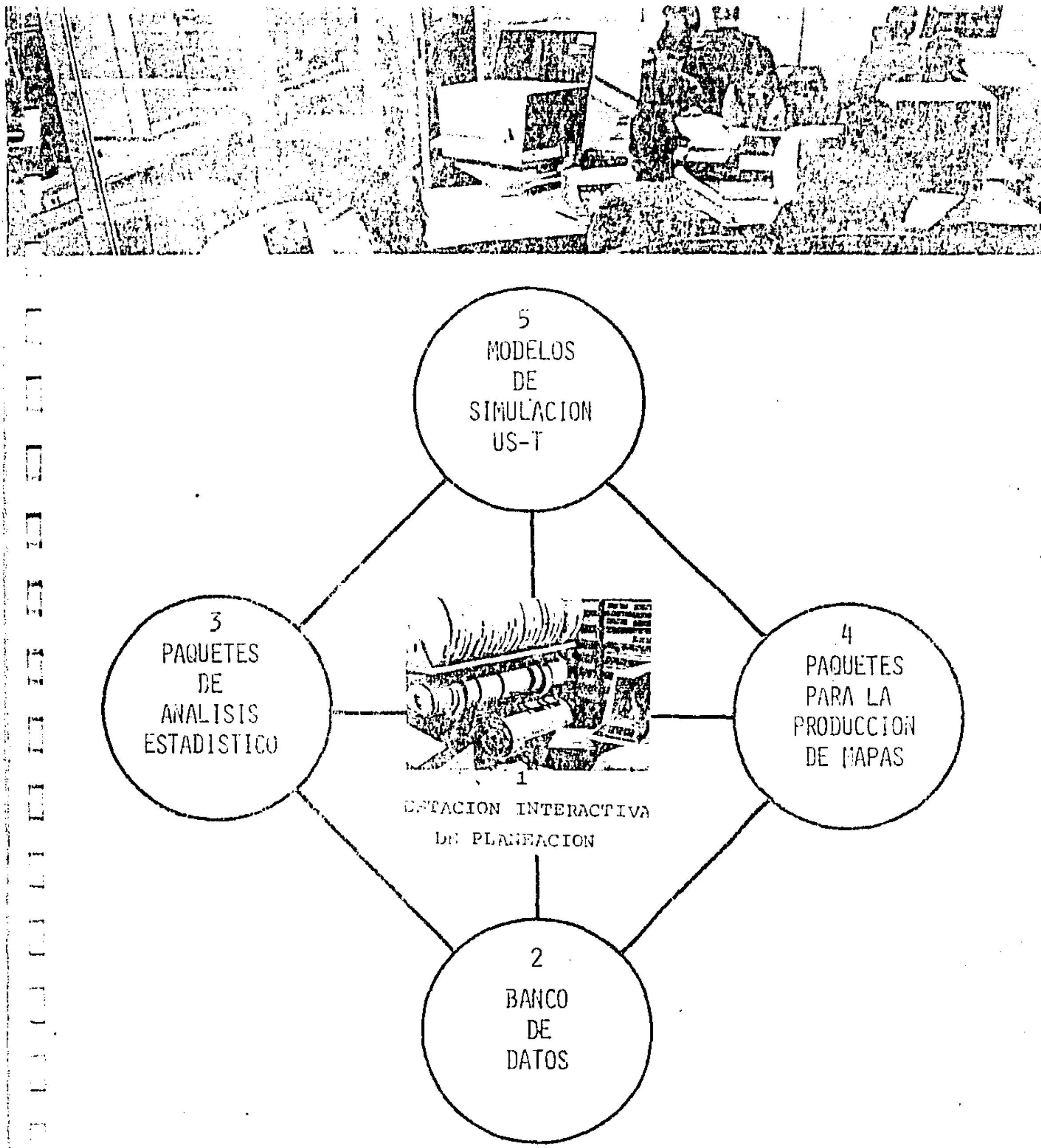
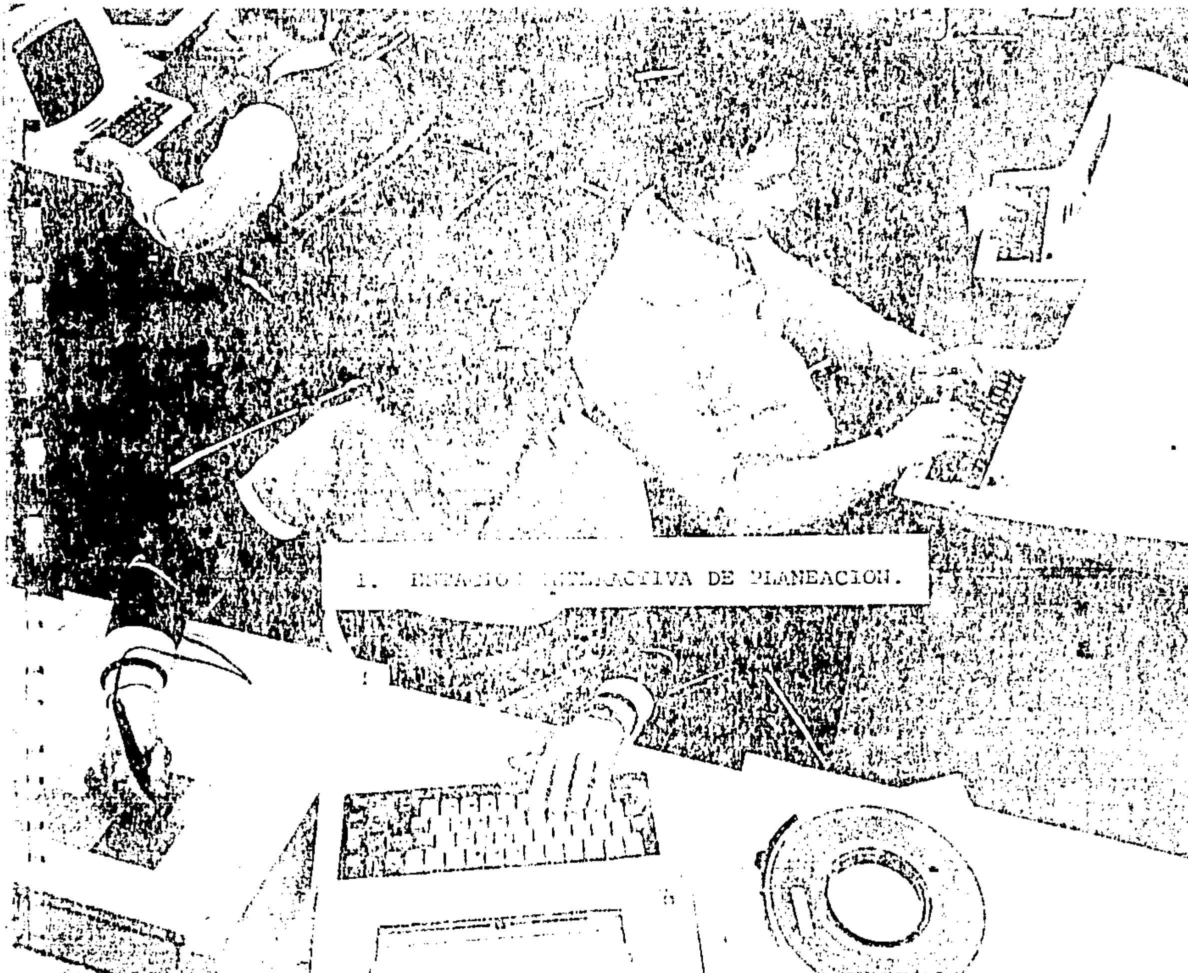


Figura I.1. Componentes principales del sistema de cómputo para apoyar el proceso de planeación del uso del suelo y el transporte.



1. ESTACION INTERACTIVA DE PLANEACION.

Es el vehículo para comunicarse con la computado, alimentándole datos y recibiendo resultados de ella de manera instantánea. Puede tener diferentes configuraciones y estar basada en microproceszdores, minicomputadoras, computadoras grandes o en alguna combinación de ellas. Básicamente está constituida por terminales remotas tales como pantallas con tubo de rayo catódico en blanco y negro o en color, dispositivos periféricos de graficación electromecánicos o electrostáticos y dispositivos de digitalización para la alimentación de información geográfica.

Algunos ejemplos de estas terminales interactivas y de los dispositivos de graficación y de digitalización se muestran en las figuras I.2a a la I.2k.

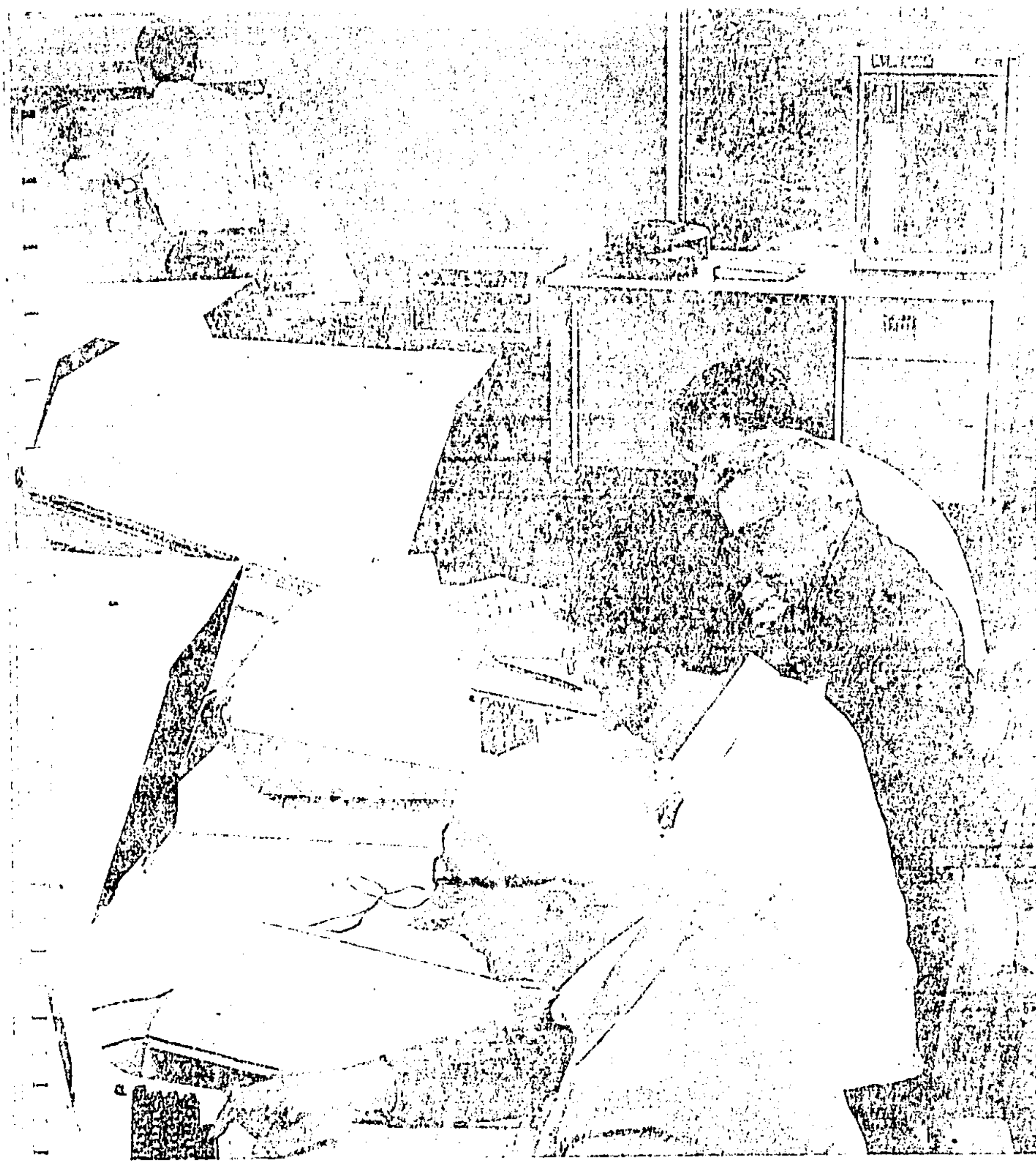


Figura I.2a. Visita general de un sistema interactivo de cómputo para planeación, compuesto por una combinación de microprocesadores, terminales remotas y dispositivos periféricos de digitalización/graficación.

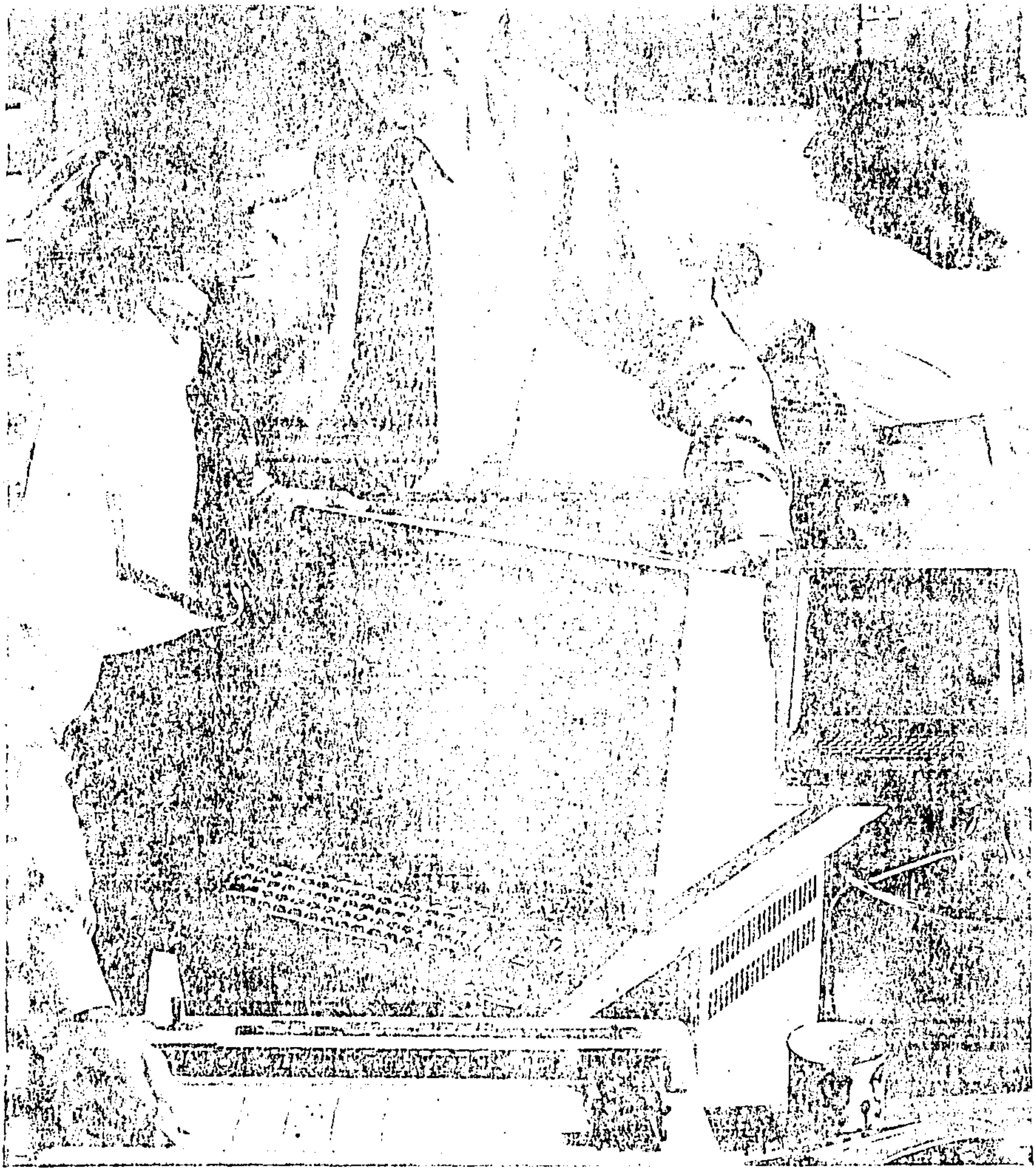


Figura 1.2b. Sistema interactivo de computo para planeación compuesto por tres dispositivos interconectados, un digitalizador, una pantalla con tubo de rayo catódico (disponibles en diferentes tamaños) y un graficador digital de escritorio.

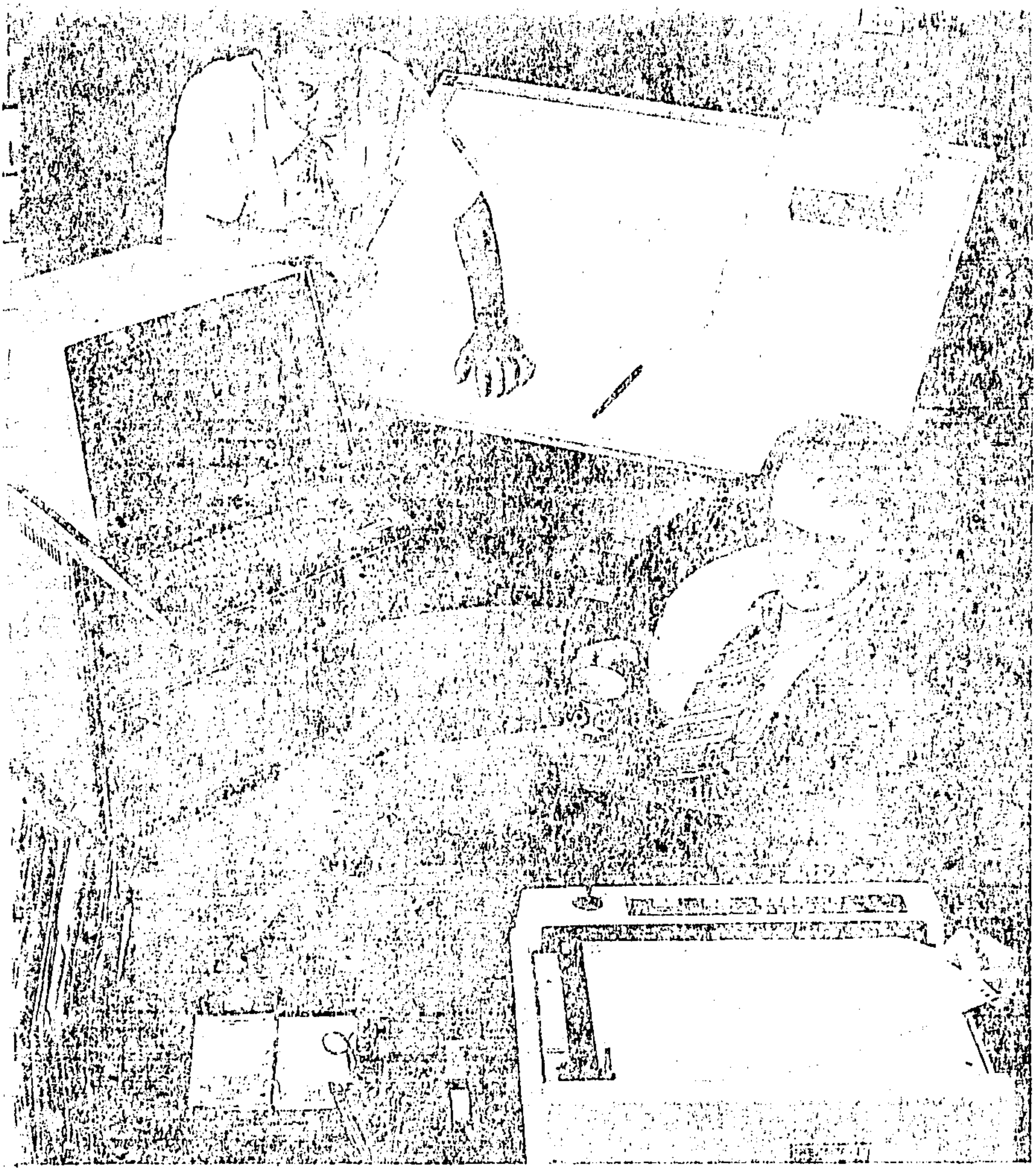


Figura [illegible].20. Vista general del sistema anterior donde se puede apreciar que es apropiado para utilizarse como un instrumento de apoyo individual en cualquier oficina de planeación. Además, es uno de los de más bajo costo.

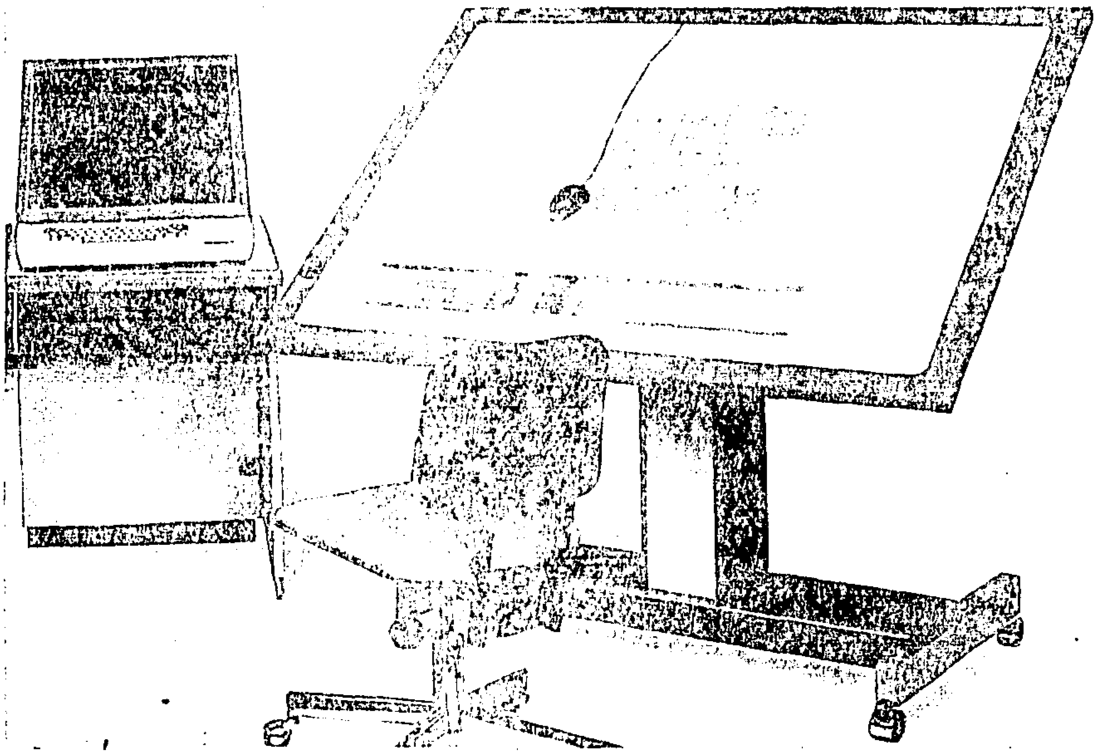


Figura I.2d. Sistema interactivo de graficación y digitalización que incluye soporte de programación. Este tipo de sistemas son fáciles de utilizar por usuarios con escasos conocimientos de computación. Las funciones de digitalización pueden realizar fuera de línea para minimizar el tiempo de utilización del procesador central.

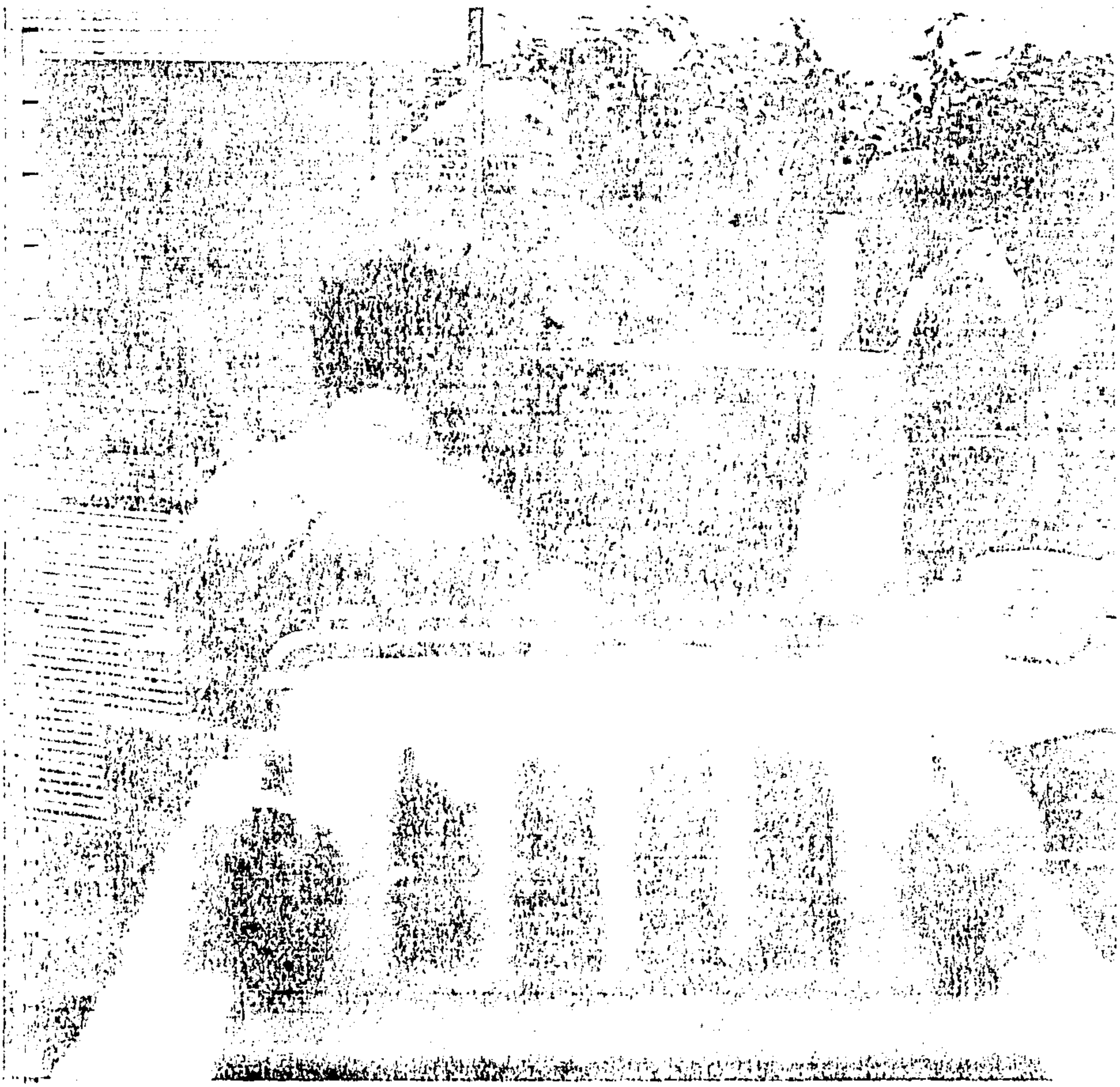


Figura I.2c. Estación interactiva de planeación compuesta por múltiples terminales remotas consistentes en pantallas e impresoras que tienen la capacidad de producir gráficas a color.

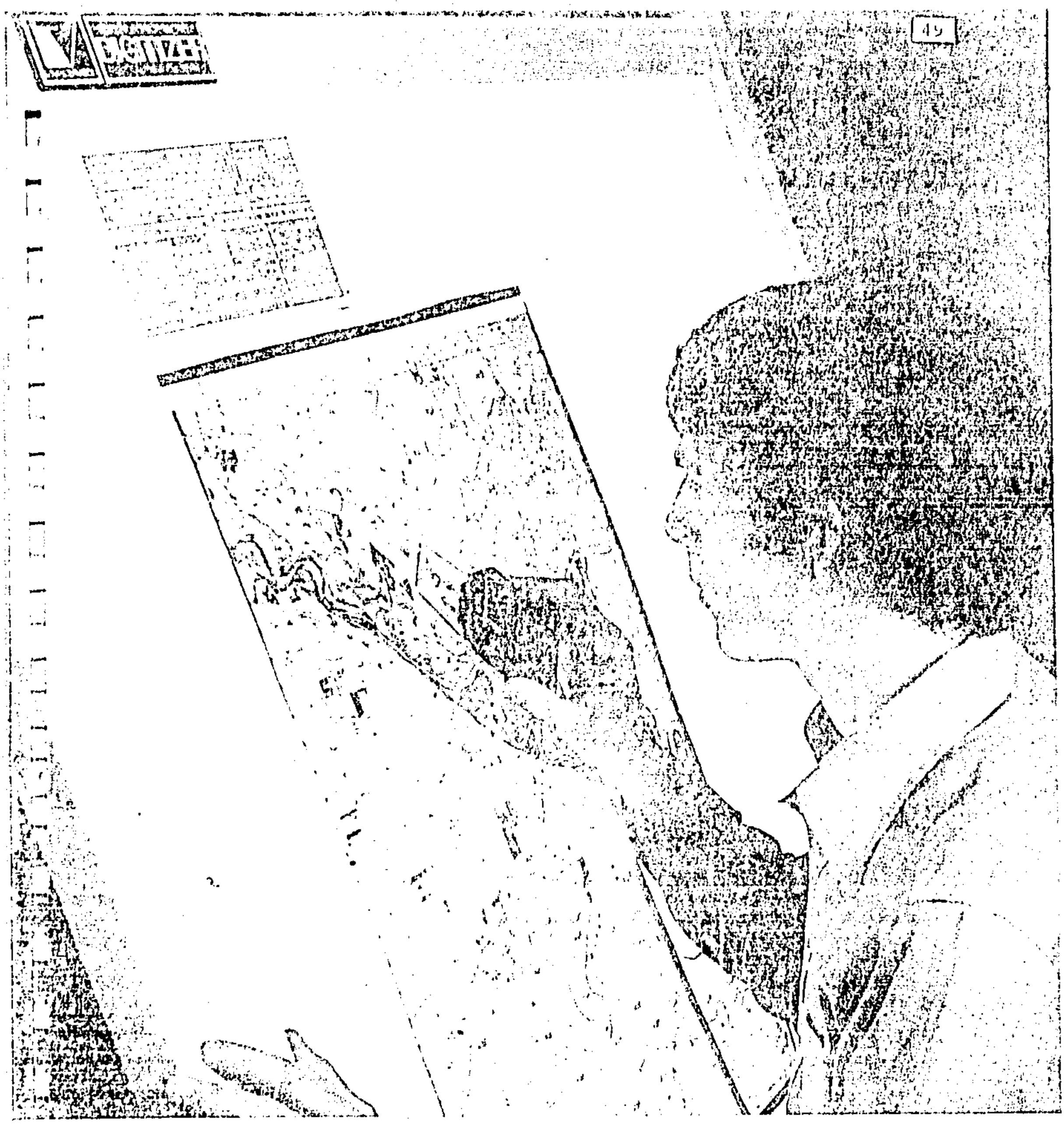
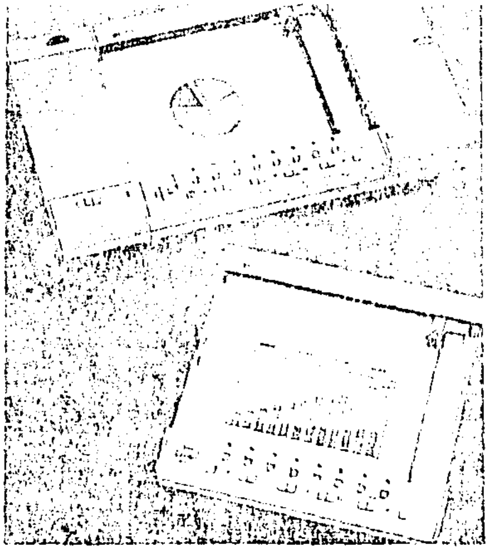


Figura I.2f. Digitalizador con cursor que permite enviar simultáneamente señales X y Y. El operador indica un punto particular (que puede ser el punto inicial de una línea) y oprime un botón para determinar sus coordenadas automáticamente y registrarlas en forma tal que puedan ser procesadas por una computadora o un dispositivo de graficación.



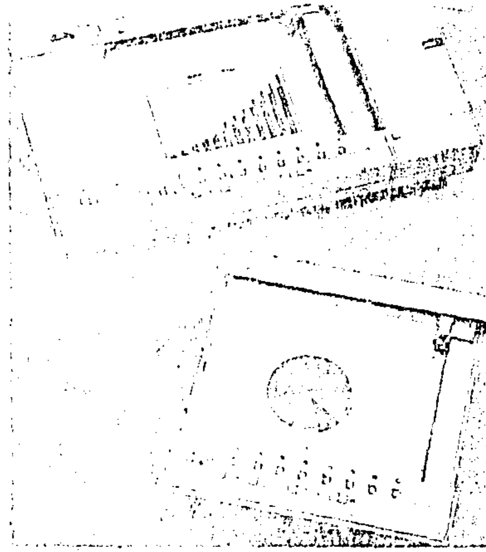
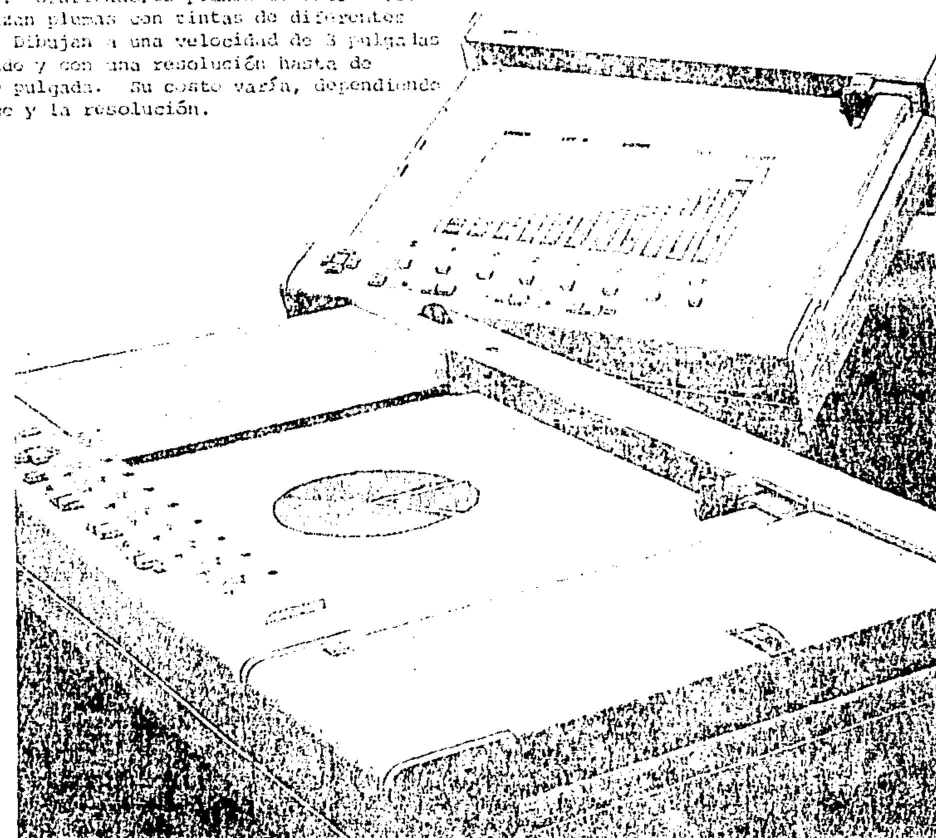


Fig. I.2g. Graficadores planos de escritorio que utilizan plumas con tintas de diferentes colores. Dibujan a una velocidad de 3 pulgadas por segundo y con una resolución hasta de 0.0005 de pulgada. Su costo varía, dependiendo del tamaño y la resolución.



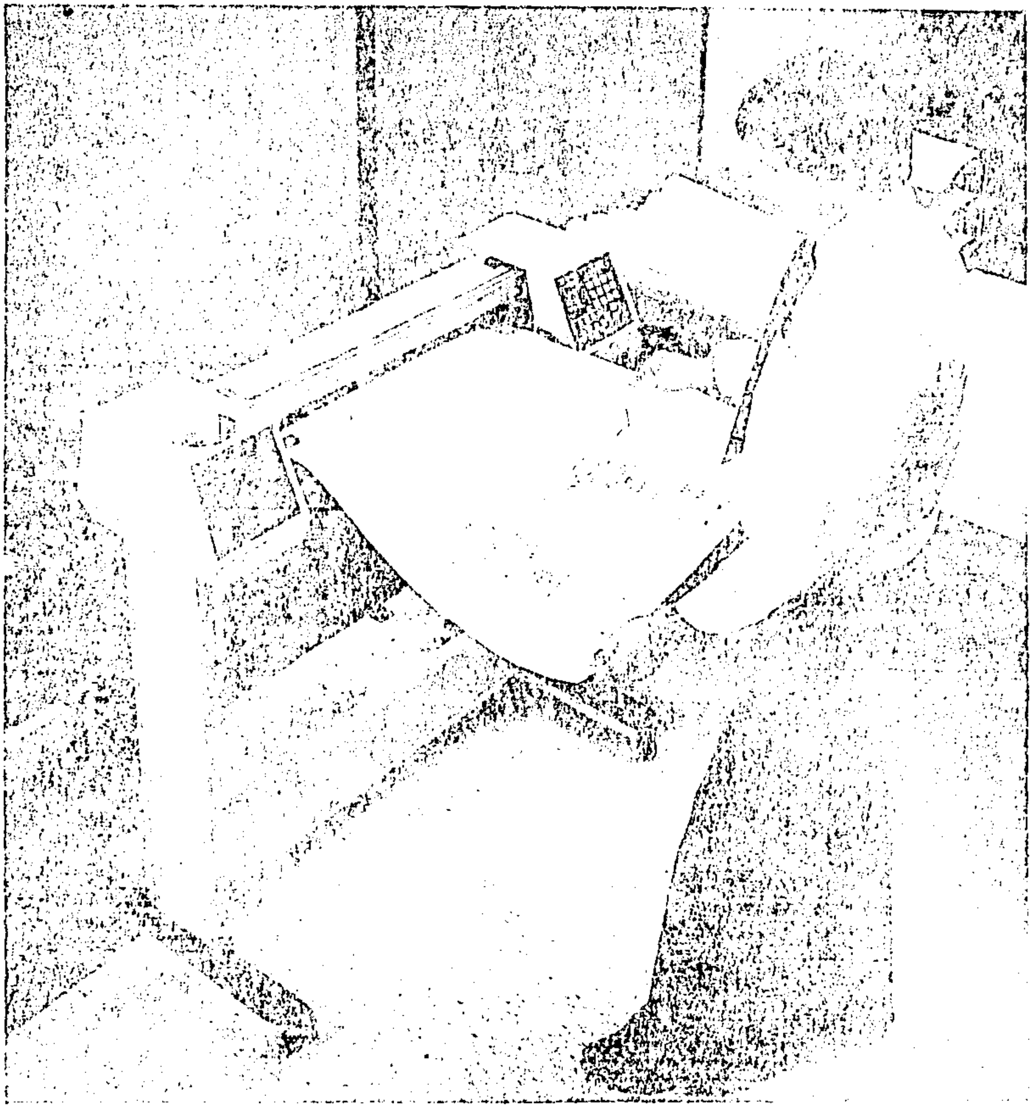


Figura I.2h. Graficador de tambor con un sistema inteligente para controlar un carrusel con varias plumas. Combina la complejidad en el cómputo con la facilidad de utilización. Puede dibujar sobre papel o polyester.

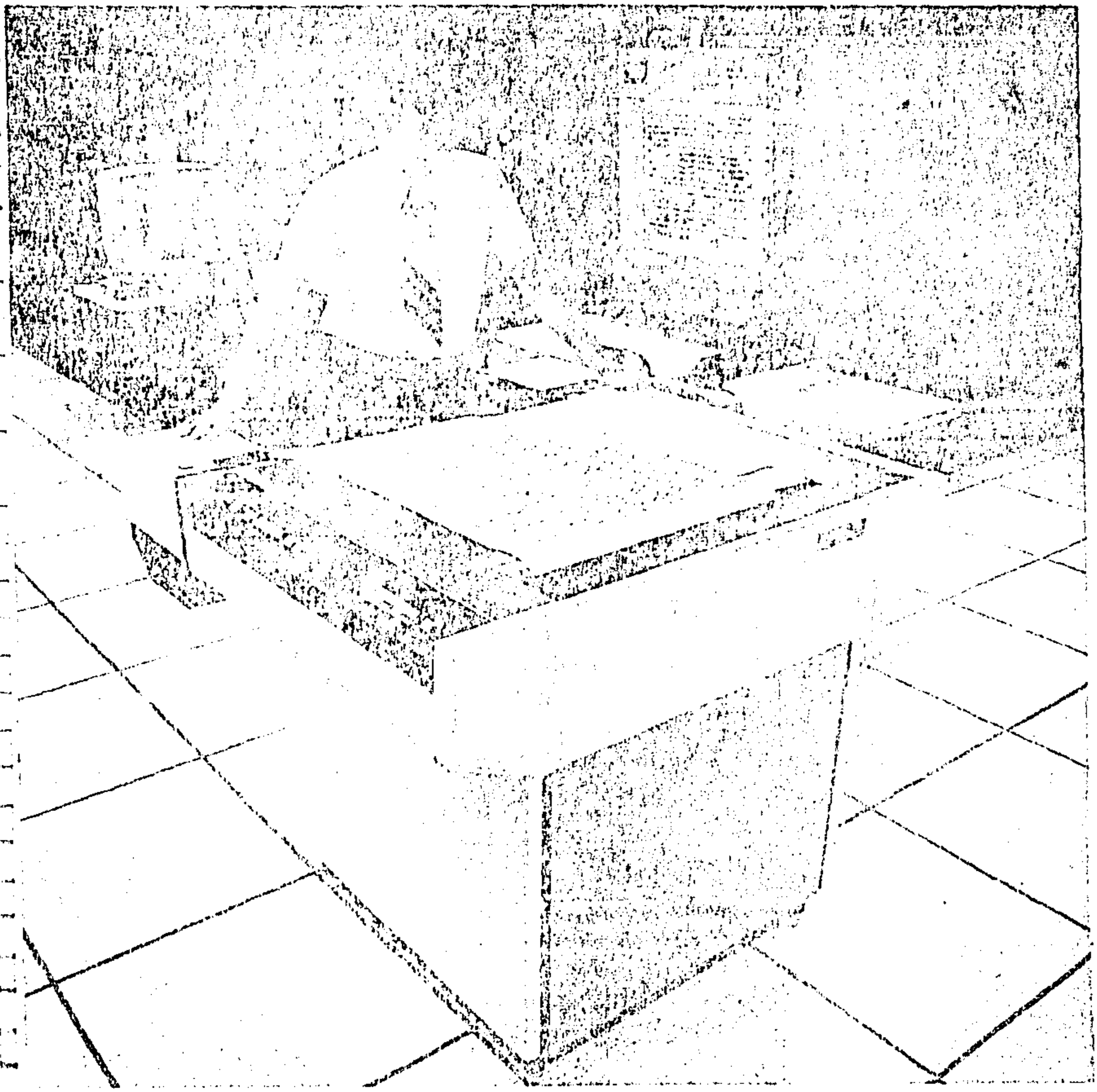


Figura I.21. Graficador electrostático. Estos dispositivos utilizan para graficar un sistema de rastreo muy similar al de las copiadoras Xerox. Grafican a una velocidad de 1 pulgada por segundo en todo el ancho del papel, que puede ser hasta de 72 pulgadas. Son más rápidos que los graficadores de pluma, pero son más caros.

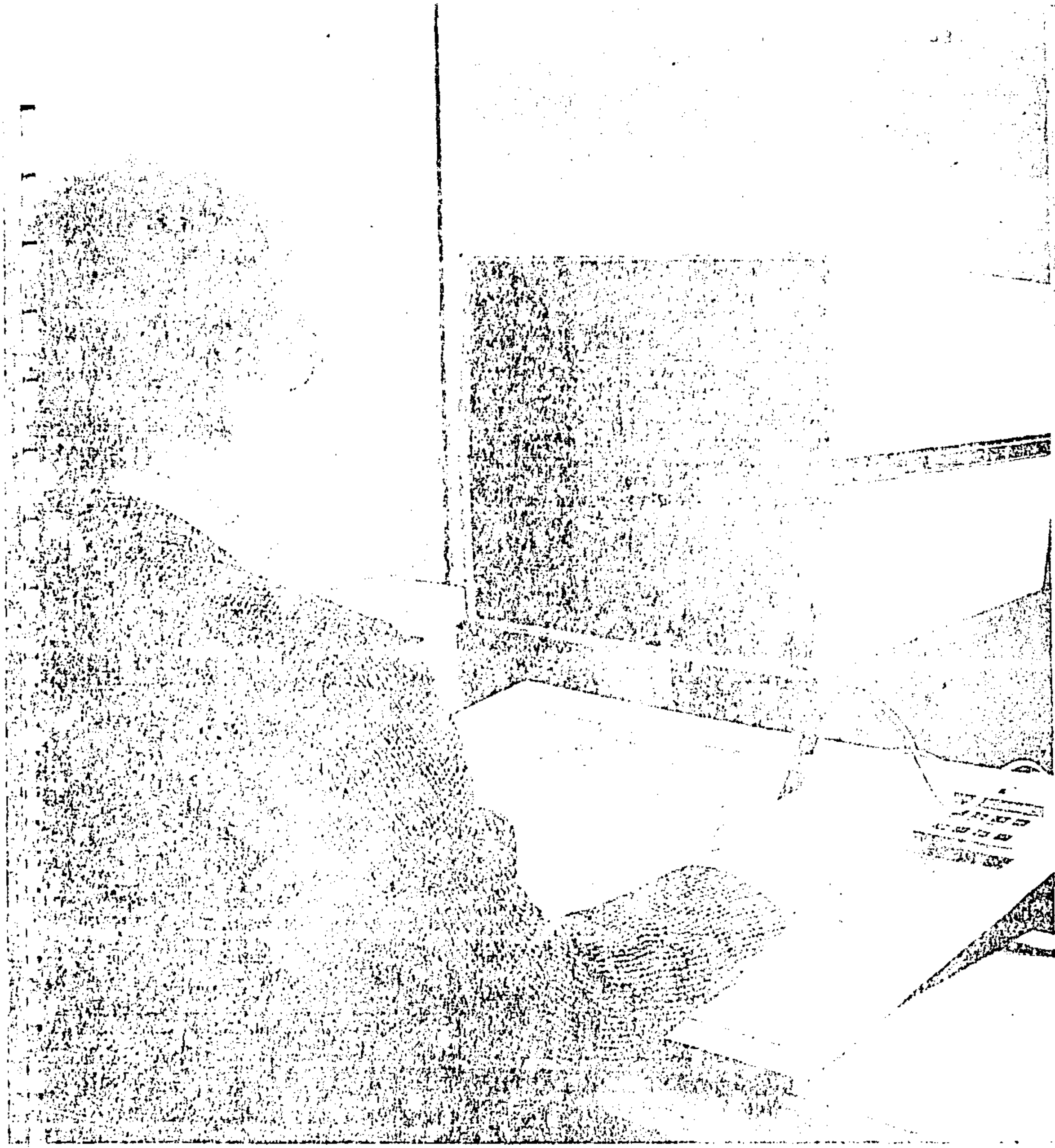


Figura 1.2j Pantalla con tubo de rayo catódico y tableta para el control de instrucciones de ejecución. La pantalla puede ser de imagen fija o dinámica, y operar utilizando la técnica de vectores o de rastreo. La tableta es sensitiva al contacto de una pluma magnética, y contiene un menú de operaciones.

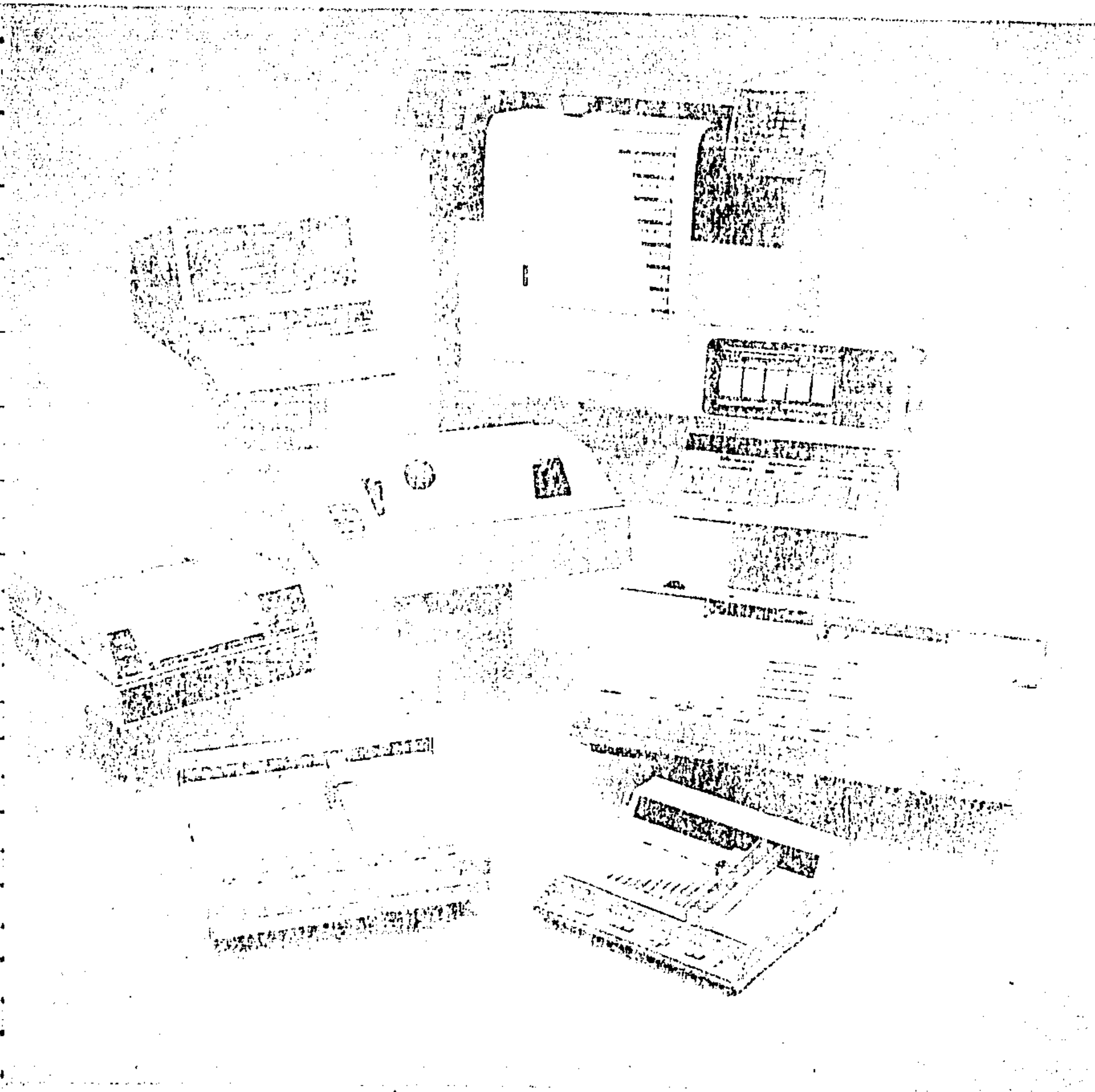


Figura I.2k. Variedad de dispositivos de graficación de la misma marca. Esto elimina los problemas de compatibilidad, pudiéndose diseñar así combinaciones de los mismos según sean las necesidades de los usuarios.

2. BANCO DE DATOS

Debe tener la capacidad para almacenar y manejar la información contenida en los siguientes archivos:

a. Archivo de la base geográfica. Está constituído por las coordenadas de los puntos que determinan los contornos de las zonas en las que se divide el área urbana de interés.

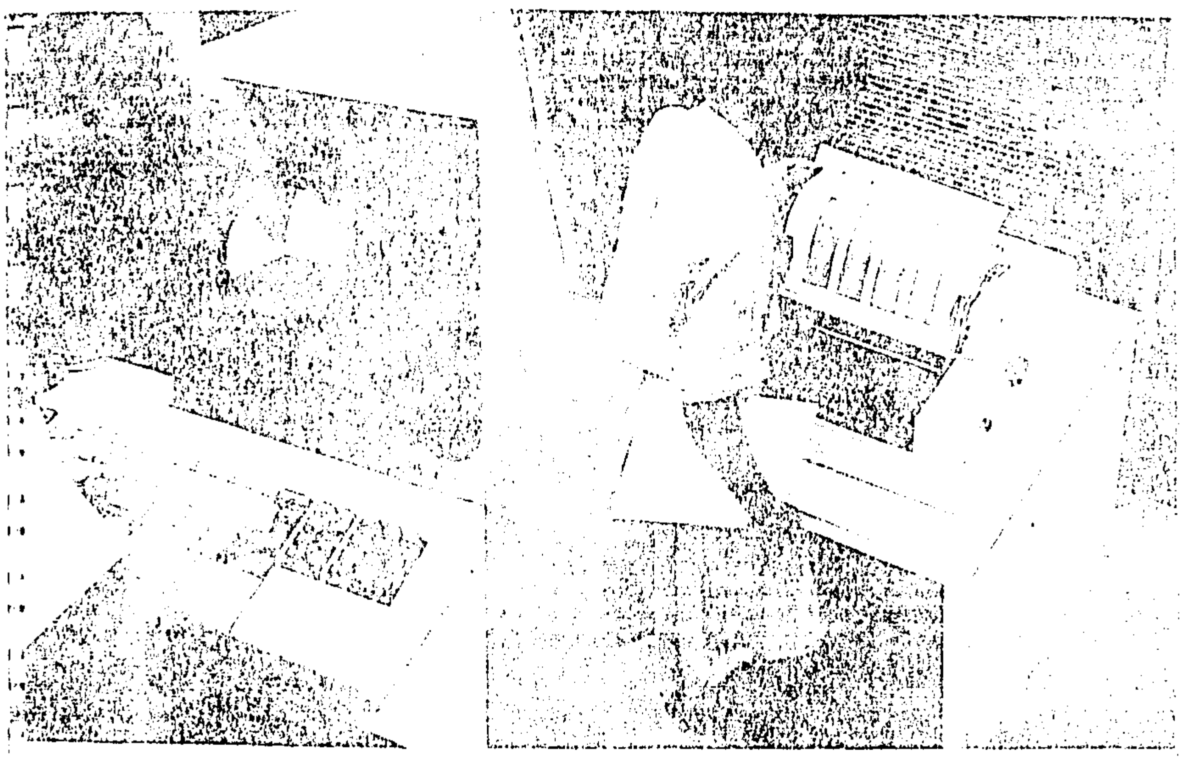
b. Archivo de datos del año base. Contiene información socioeconómica, de los usos del suelo y de la capacidad y la utilización los sistemas de transporte y las redes de servicios.

c. Archivos de resultados. Almacenan la información producida en cada una de las etapas del proceso para que pueda ser utilizada en otras etapas posteriores.

.500	342.500	342.500	347.500	347.500
.000	349.000	349.000	350.000	350.000
.500	242.500	242.500	242.500	242.500
.000	235.000	235.000	232.500	232.500
.000	115.000	115.000	115.000	115.000
.000	115.000	115.000	115.000	115.000
.000	1.065.000	1.065.000	1.065.000	1.065.000
.000	1.075.000	1.075.000	1.075.000	1.075.000
.000	2.040.000	2.030.000	2.030.000	2.030.000
.000	2.015.000	2.015.000	2.015.000	2.000.000
.000	1.475.000	1.475.000	1.475.000	1.475.000
.000	1.475.000	1.475.000	1.475.000	1.475.000
.500	267.500	267.500	267.500	[illegible]
.500	267.500	267.500	267.500	267.500
.500	222.500	222.500	222.500	[illegible]
.500	222.500	222.500	222.500	[illegible]
.000	320.000	320.000	322.500	[illegible]
.000	320.000	325.000	325.000	[illegible]
.000	300.000	300.000	302.500	[illegible]
.500	307.500	312.500	312.500	[illegible]
.000	265.000	265.000	267.500	[illegible]
.500	267.500	272.500	272.500	[illegible]
.500	270.000	270.000	272.500	[illegible]
.000	270.000	275.000	275.000	[illegible]
.500	240.000	240.000	242.500	[illegible]
.000	250.000	255.000	255.000	[illegible]
.500	240.000	240.000	242.500	[illegible]
.000	245.000	250.000	250.000	[illegible]
000	275.000	275.000	280.000	[illegible]
000	280.000	280.000	280.000	[illegible]
000	265.000	265.000	270.000	[illegible]
000	270.000	270.000	270.000	[illegible]
500	92.500	92.500	92.500	[illegible]
500	102.500	102.500	102.500	[illegible]
500	182.500	182.500	182.500	[illegible]
500	192.500	192.500	192.500	[illegible]

3. PAQUETES DE ANALISIS ESTADISTICO

Es necesario contar con un conjunto de programas para computadora que sirvan para apoyar la calibración de los modelos y el análisis estadístico de los datos y los resultados en las diferentes etapas del proceso de planeación. La mayoría de las computadoras en el mercado tienen paquetes de programas bien documentados y de fácil utilización que contienen los procedimientos básicos de la estadística descriptiva el muestreo y la inferencia estadística.



Además, estos paquetes tienen la capacidad para graficar los resultados del análisis o almacenarlos de alguna manera para que puedan ser utilizados por paquetes de graficación más sofisticados.

Algunos ejemplos de este tipo de gráficas se muestran en la figura I.3.

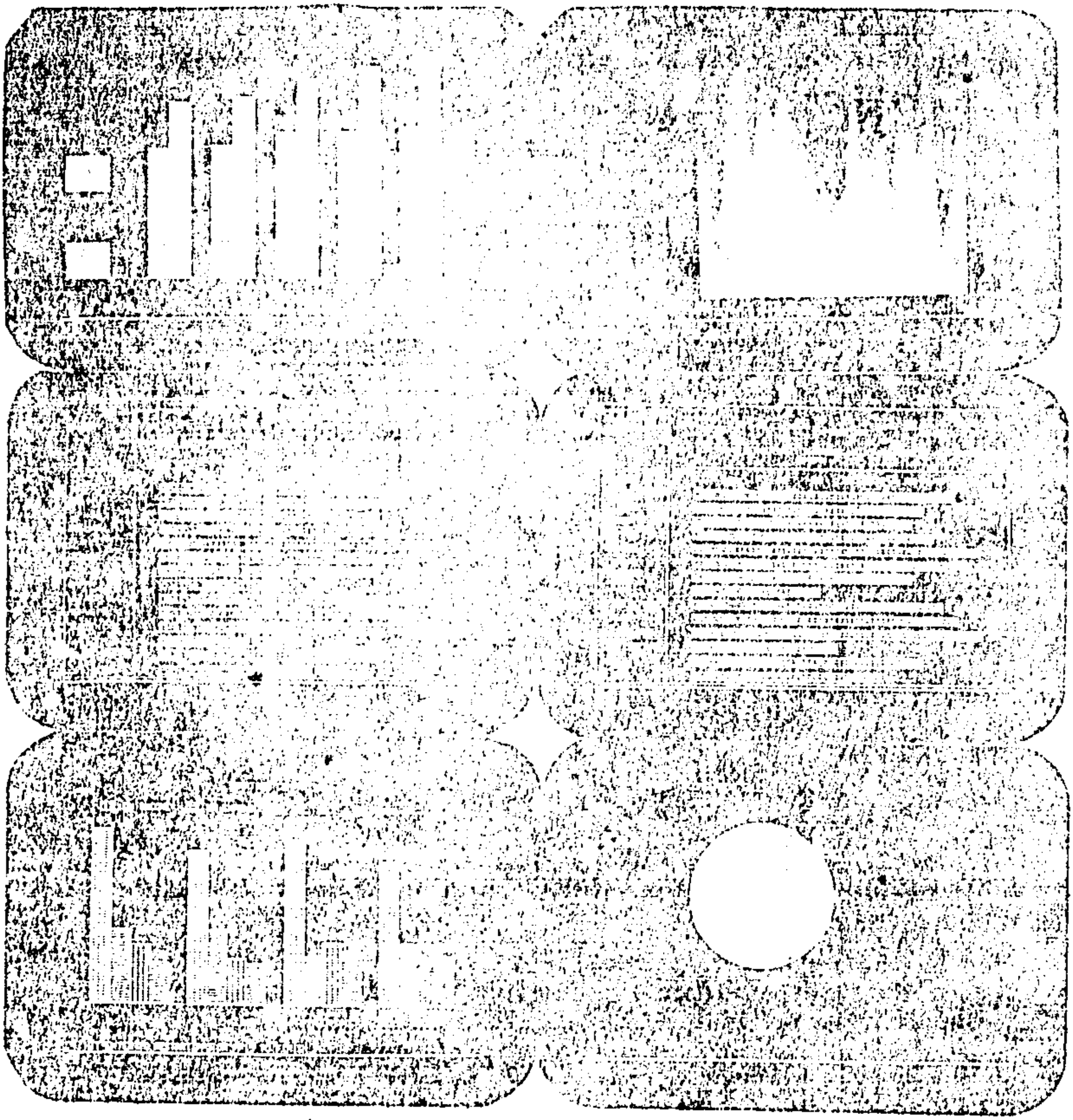
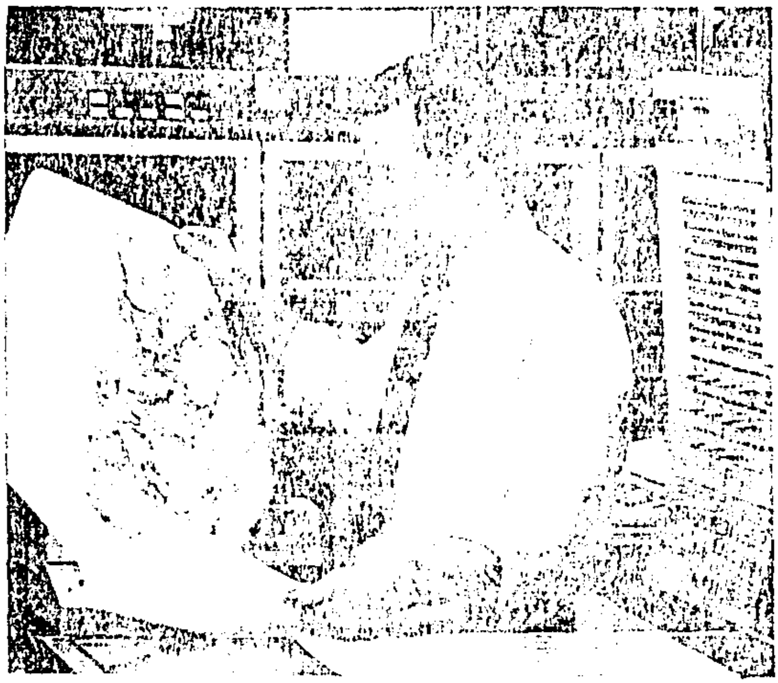


Figura [illegible]. Histogramas, [illegible] y diagramas circulares producidos por paquetes para el análisis estadístico que incluyen programas de graficación.

4. PAQUETES PARA LA PRODUCCION DE MAPAS.



Estos paquetes estructuran y analizan la información contenida en el archivo de la base geográfica para producir mapas temáticos que permiten visualizar con mayor claridad la distribución espacial de las variables contenidas en el archivo del año base y en los archivos de resultados.

Existe en el mercado una gran variedad de programas versátiles y de diferentes costos que pueden ser utilizados por diversas marcas de computadoras y diferentes tipos de dispositivos electrónicos de graficación.

Algunos ejemplos de los resultados que proporcionan estos programas se ilustran en las figuras I3.a a la I.3k.

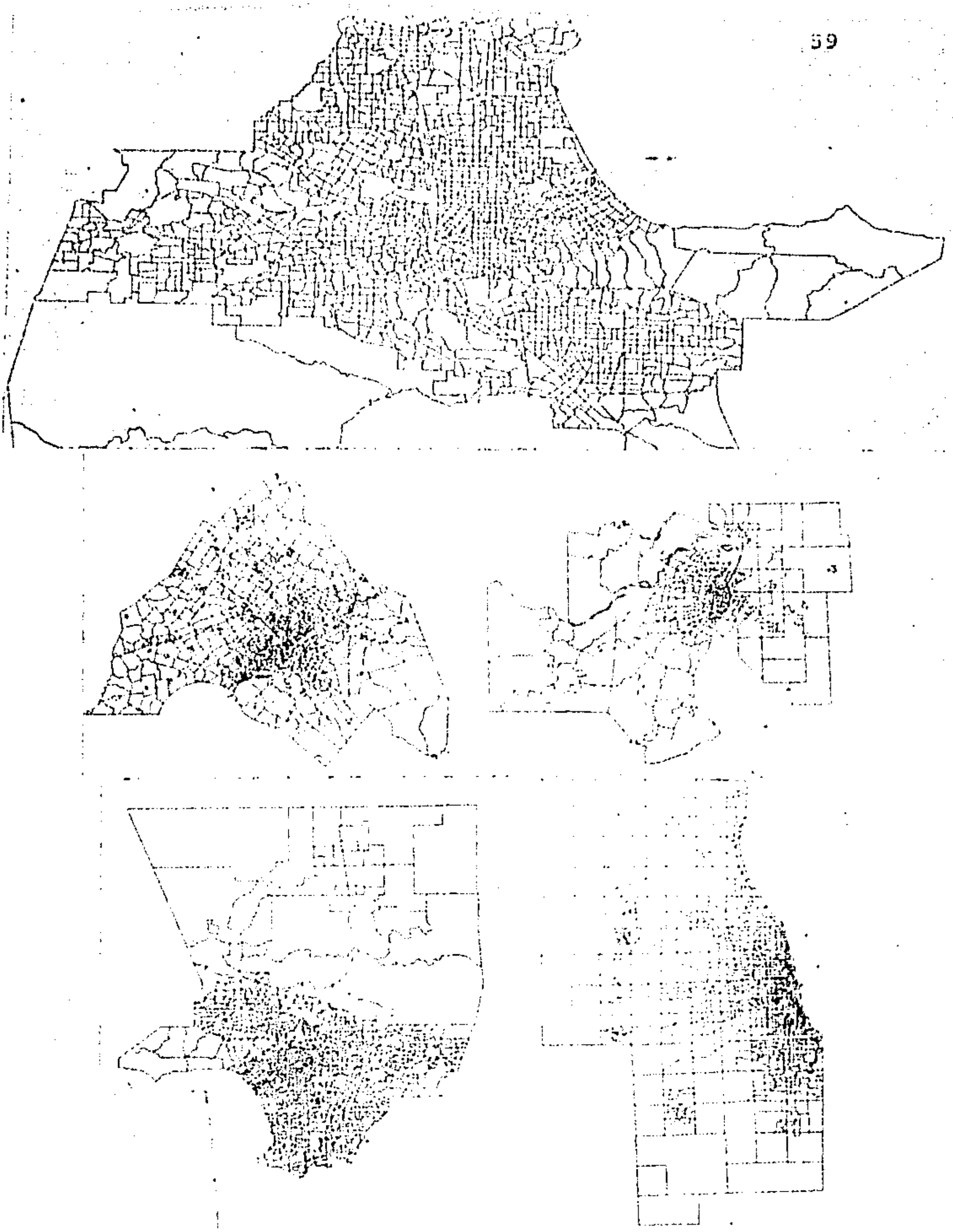


Figura I.4a. Representación gráfica de archivos de bases cartográficas que pueden estar estructuradas en diferentes formas. El nivel de detalle (número de puntos considerados) depende del propósito del estudio y del tipo de dispositivo de graficación a utilizar.

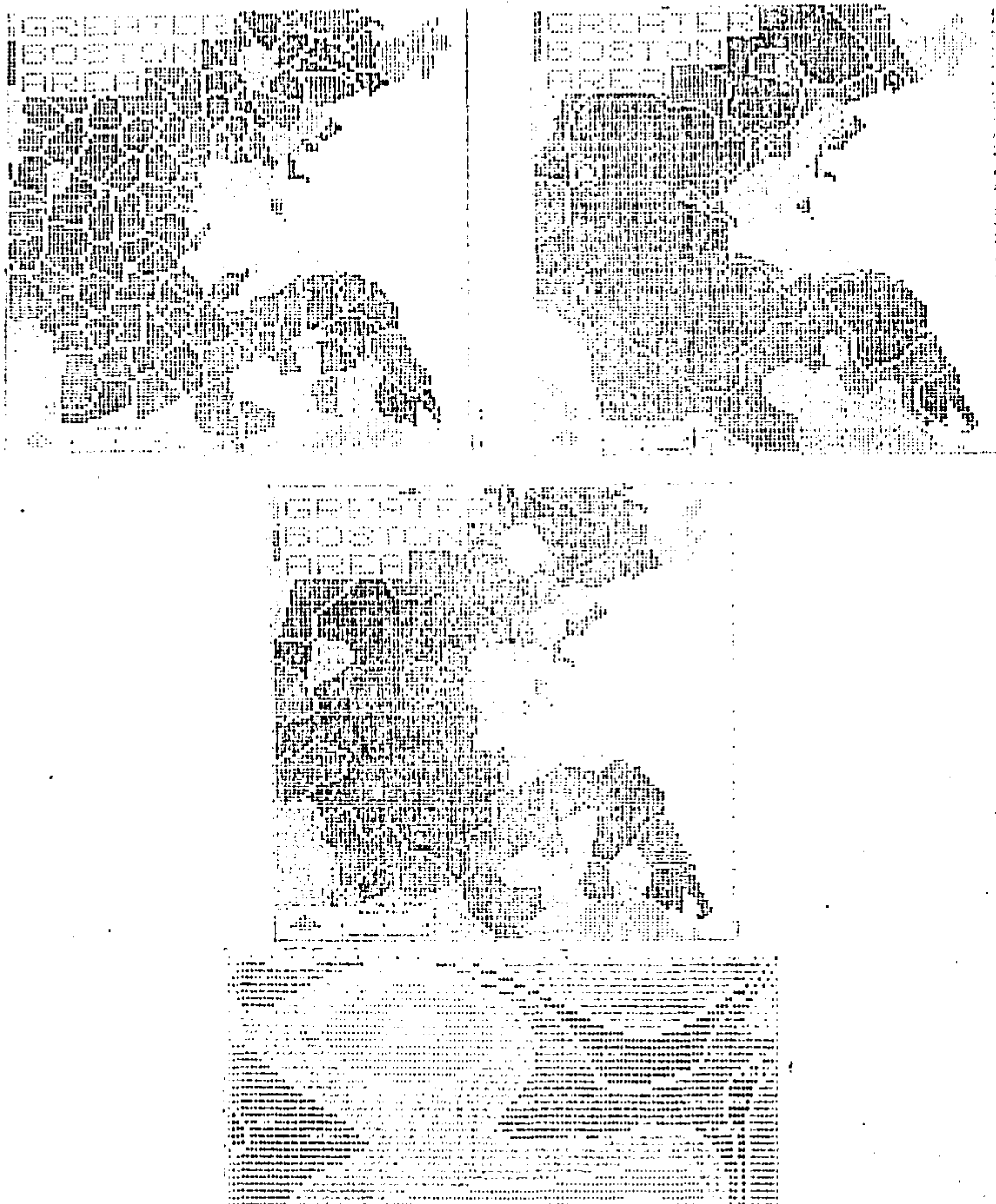


Figura I.4b. Mapas temáticos producidos mediante una impresora de líneas, utilizando la técnica de superposición de carácteres.

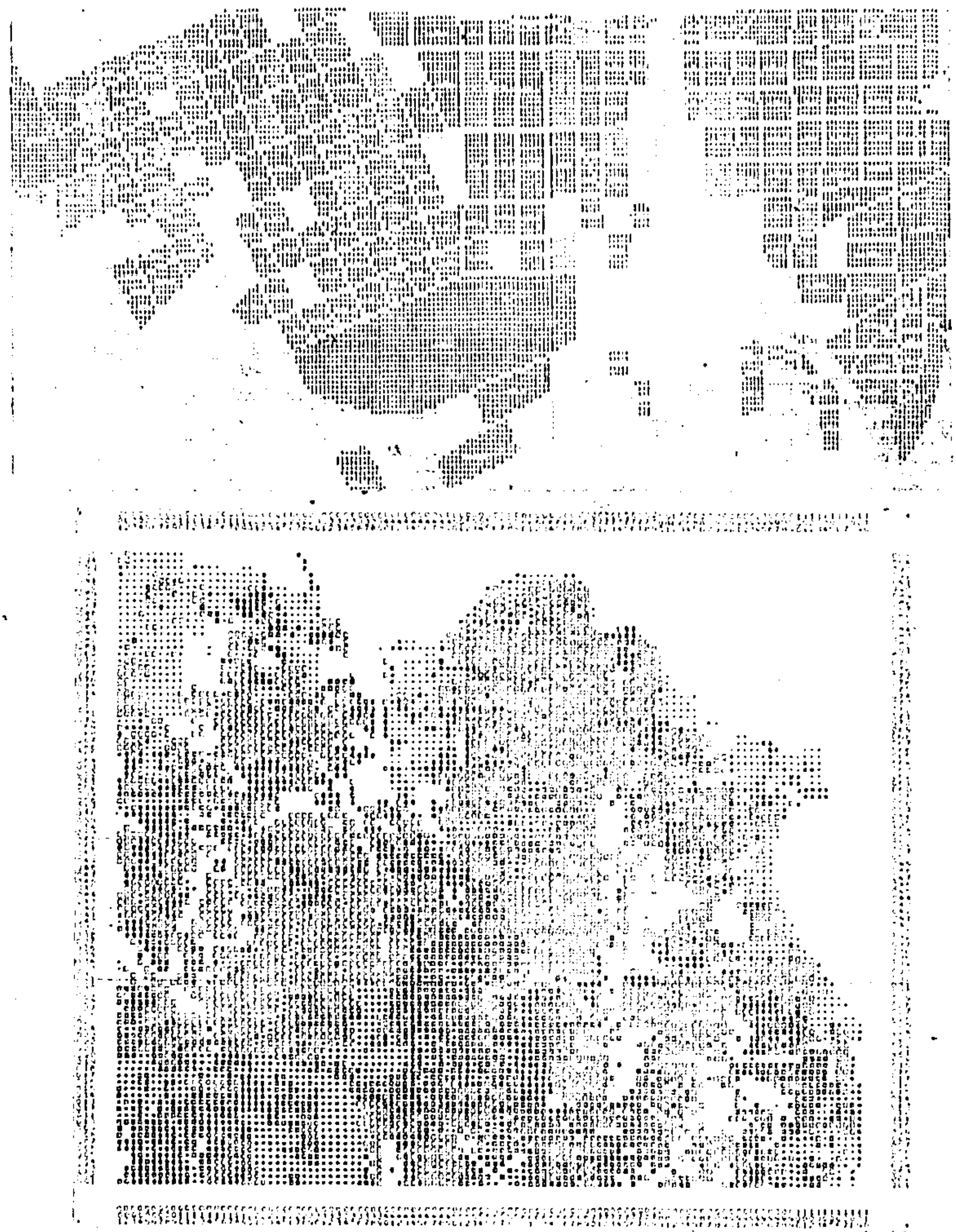


Figura I.4c Los mapas producidos mediante una impresora de líneas, puden ser de diferentes tipos: coropletas, isopletas, de proximidad, de tendencias, reticulares, etc.

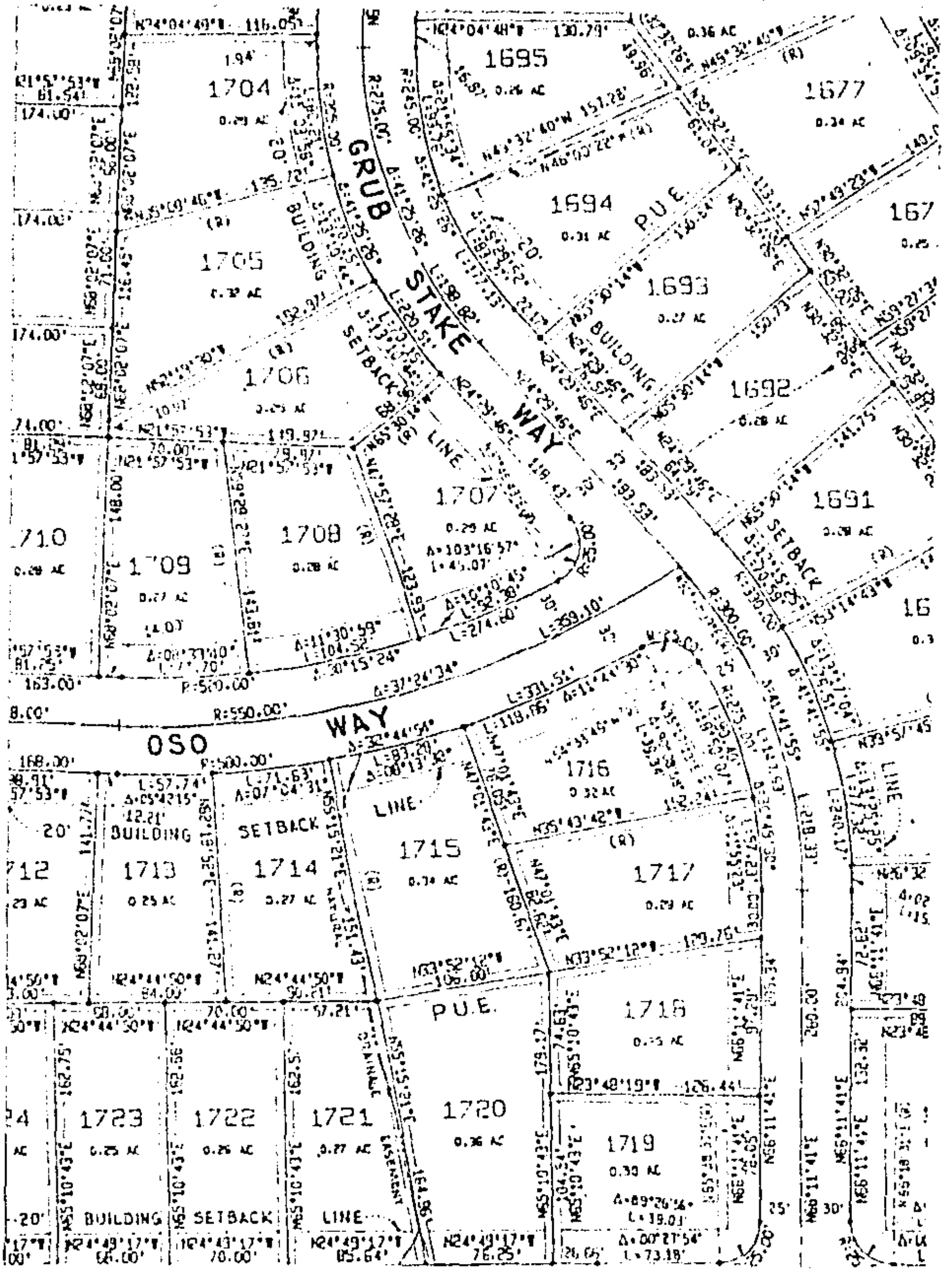


Figura 1.4d. Mapa urbano producido medinate un graficador digital de pluma. El soporte de programación en este caso se obtiene gratuitamente al comprar el equipo.

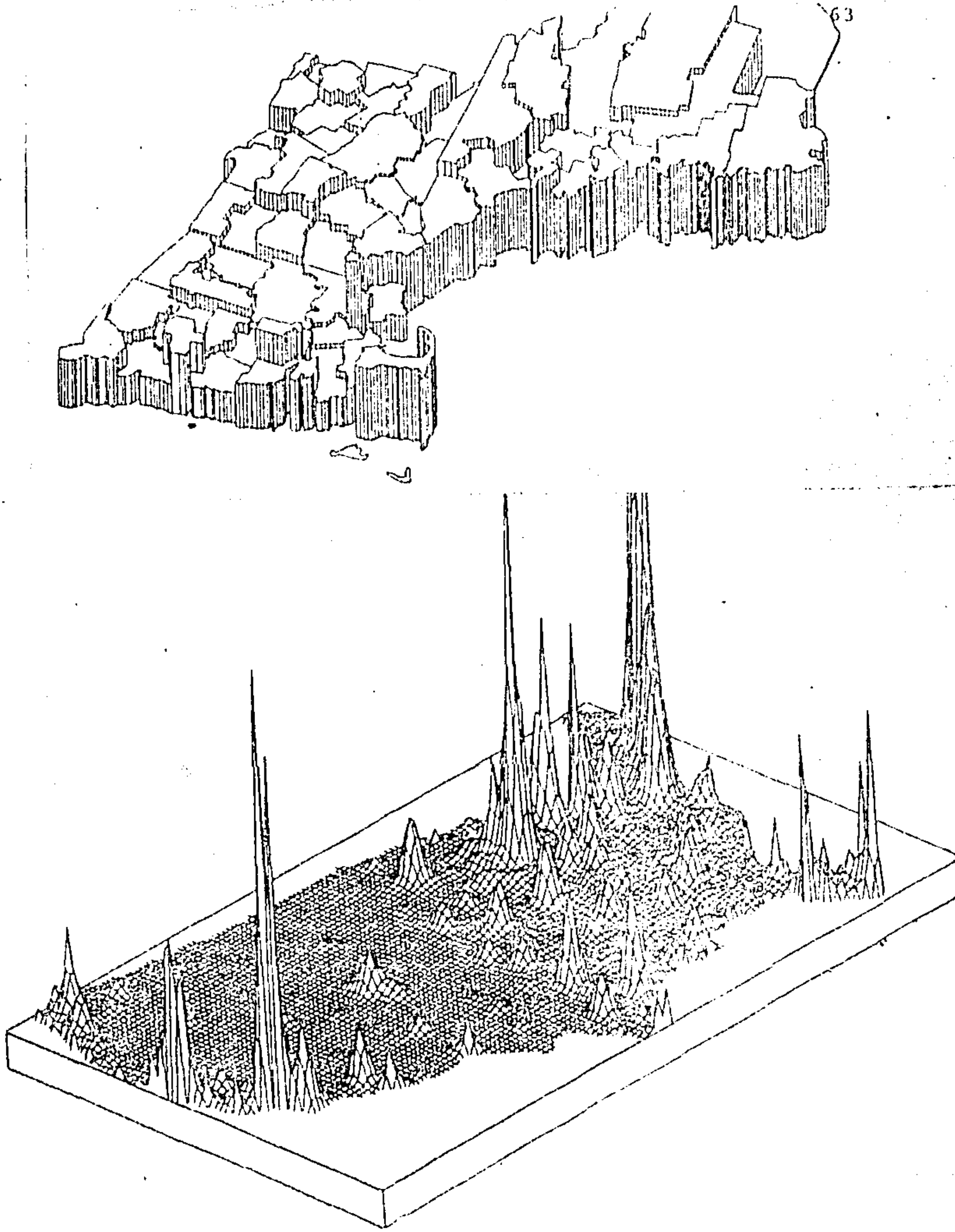


Figura I.4e. Superficies estadísticas contínuas y discretas que pueden producirse mediante un graficador (electromecánico o electrostático) o también mediante una pantalla con tubo de rayo catódico.

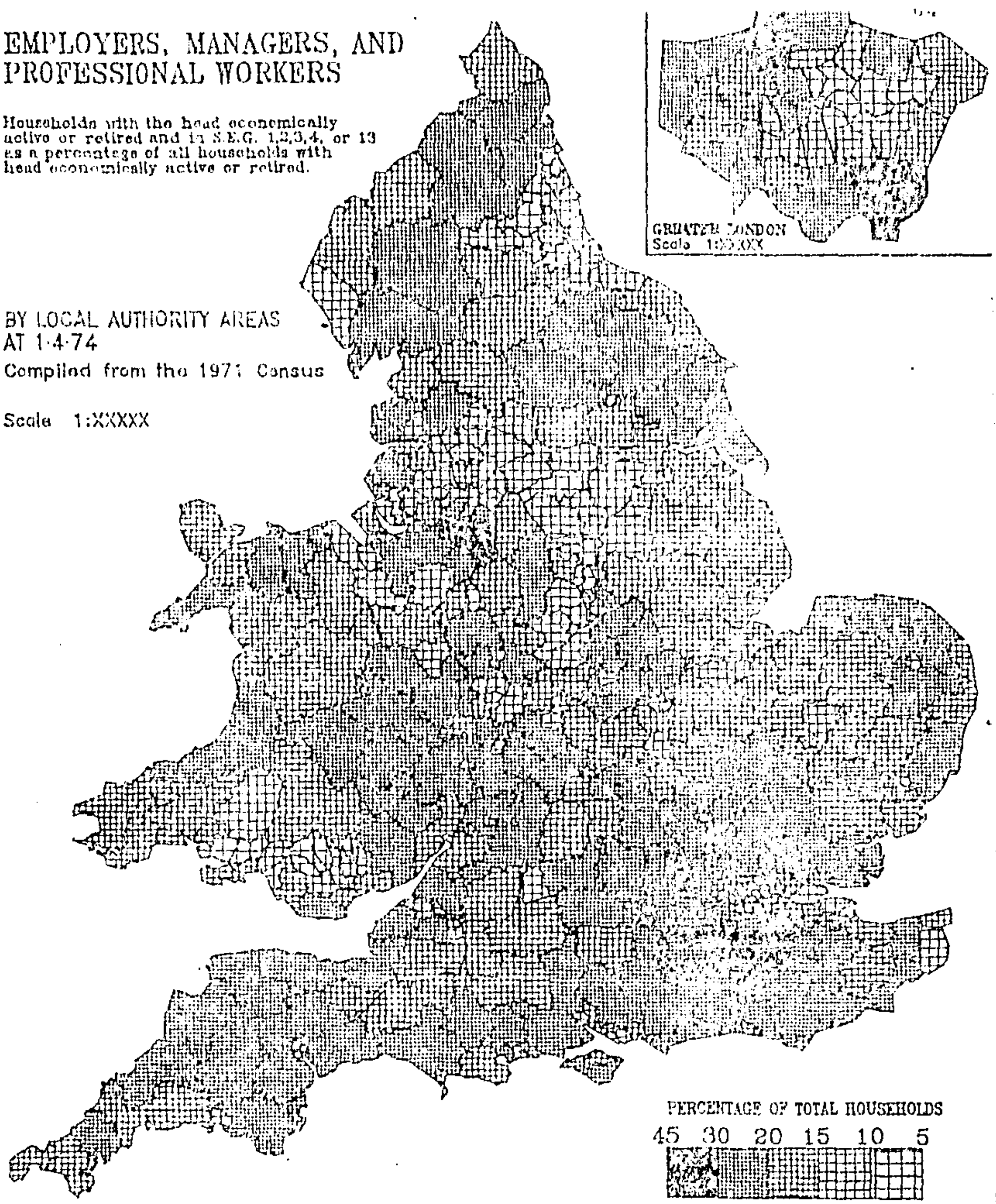


Figura 1.42. Mapa urbano con información socio-económica producido mediante un graficador electrostático.

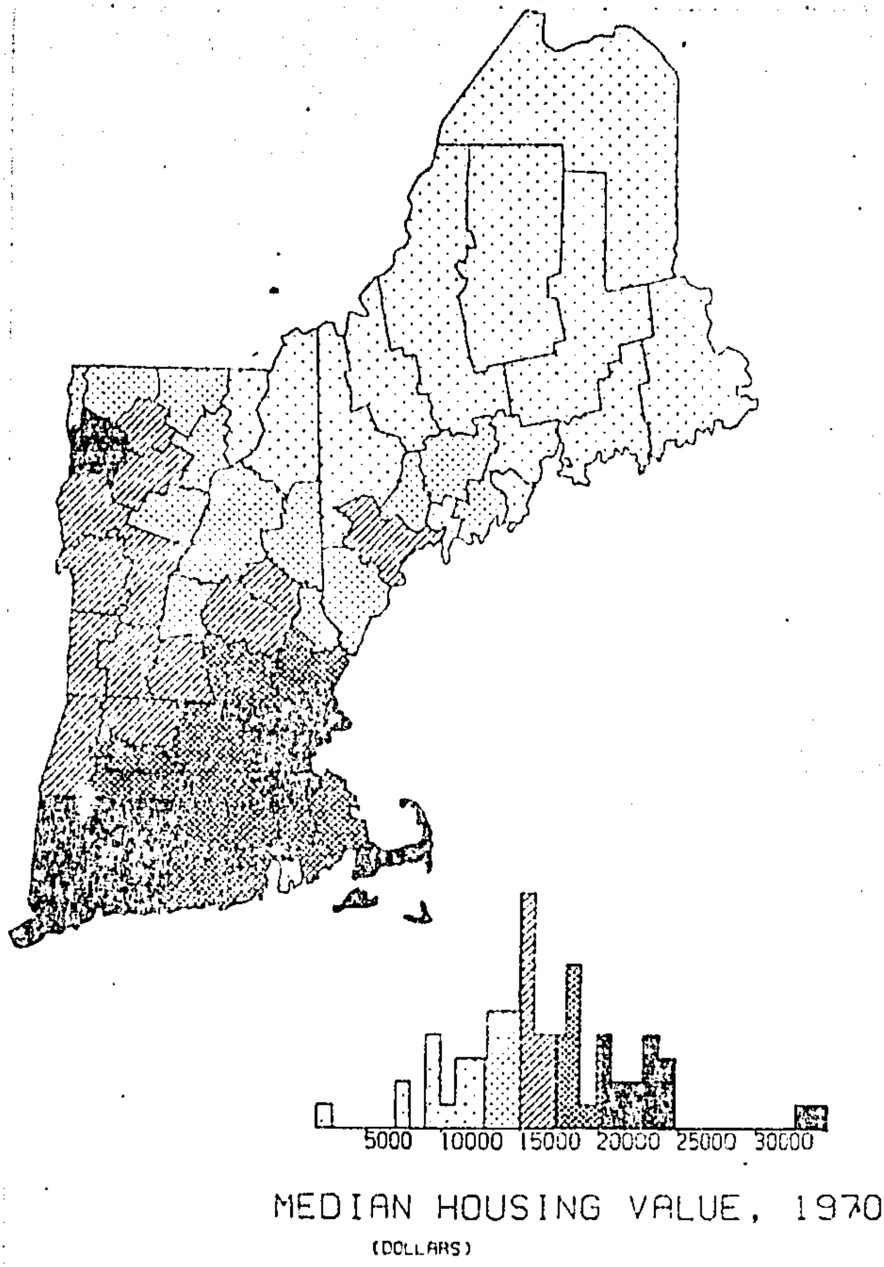
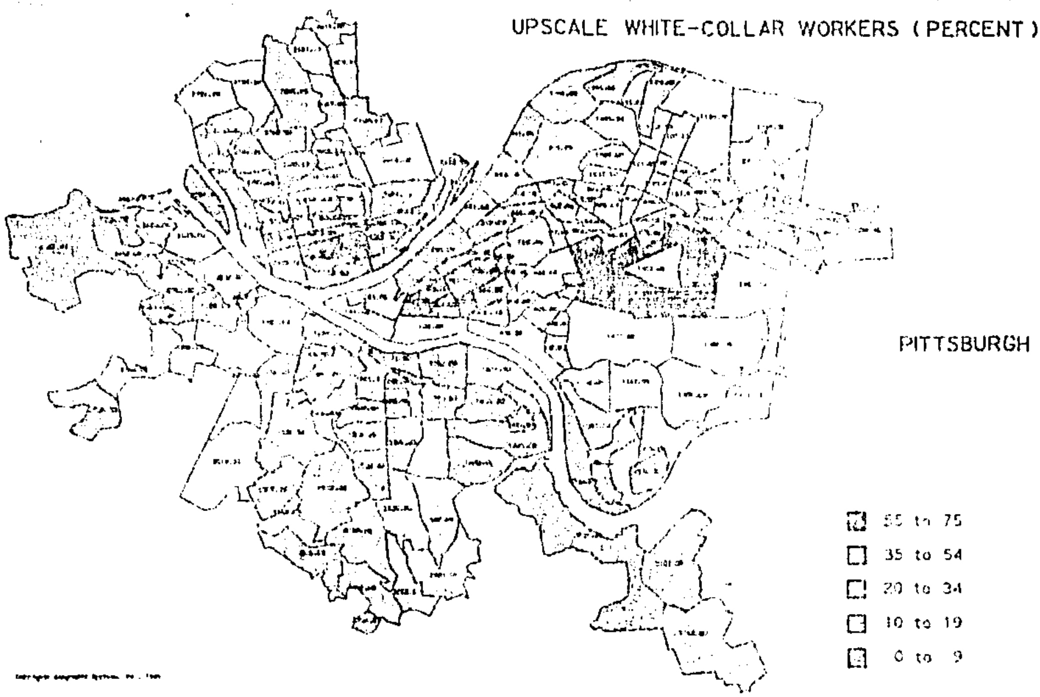


Figura I.4g Mapa con información estadística producide mediante un sistema de análisis geográfico y graficación, que puede ser utilizado por diferentes dispositivos de graficación.



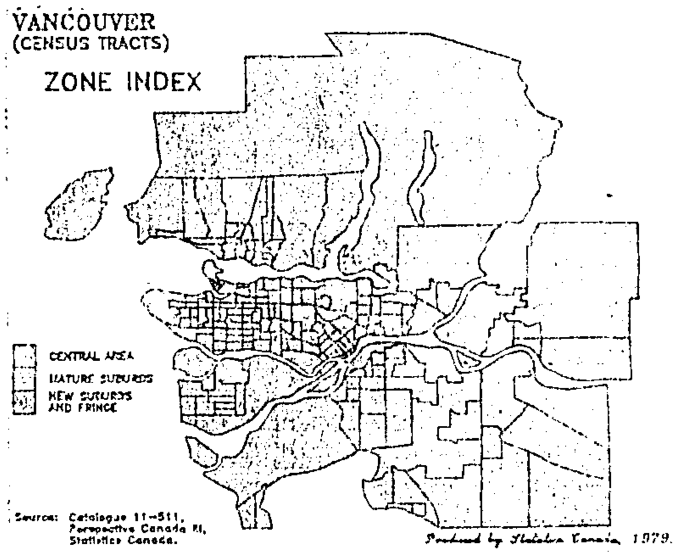


Figura I.4h Mapas urbanos a color de calidad media, producidos por programas que permiten la supersición de diferentes conjuntos de datos y que tienen la capacidad de imprimir textos y letreros.

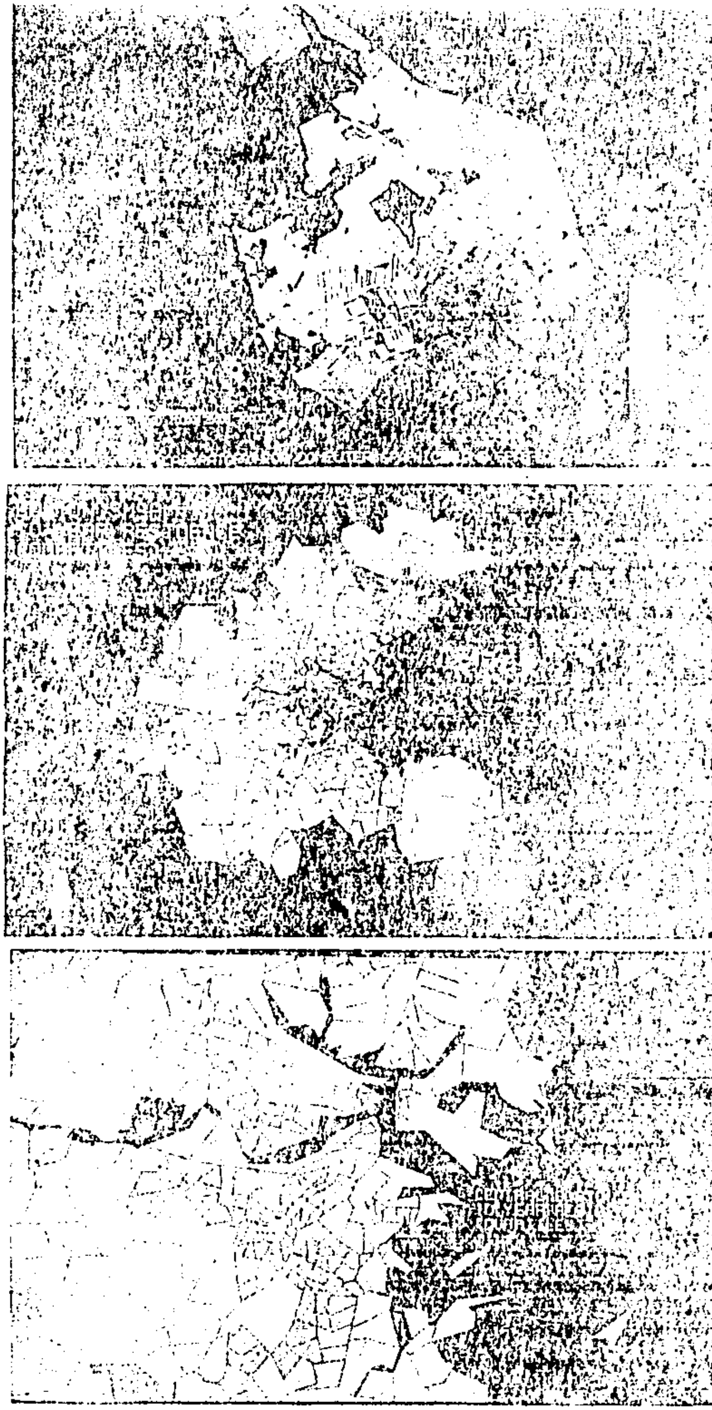


Figura I.4i. Mapas urbanos a color de alta calidad, producidos mediante una pantalla interactiva que permite la recuperación selectiva de información relacionada con diferentes zonas del área de estudio.

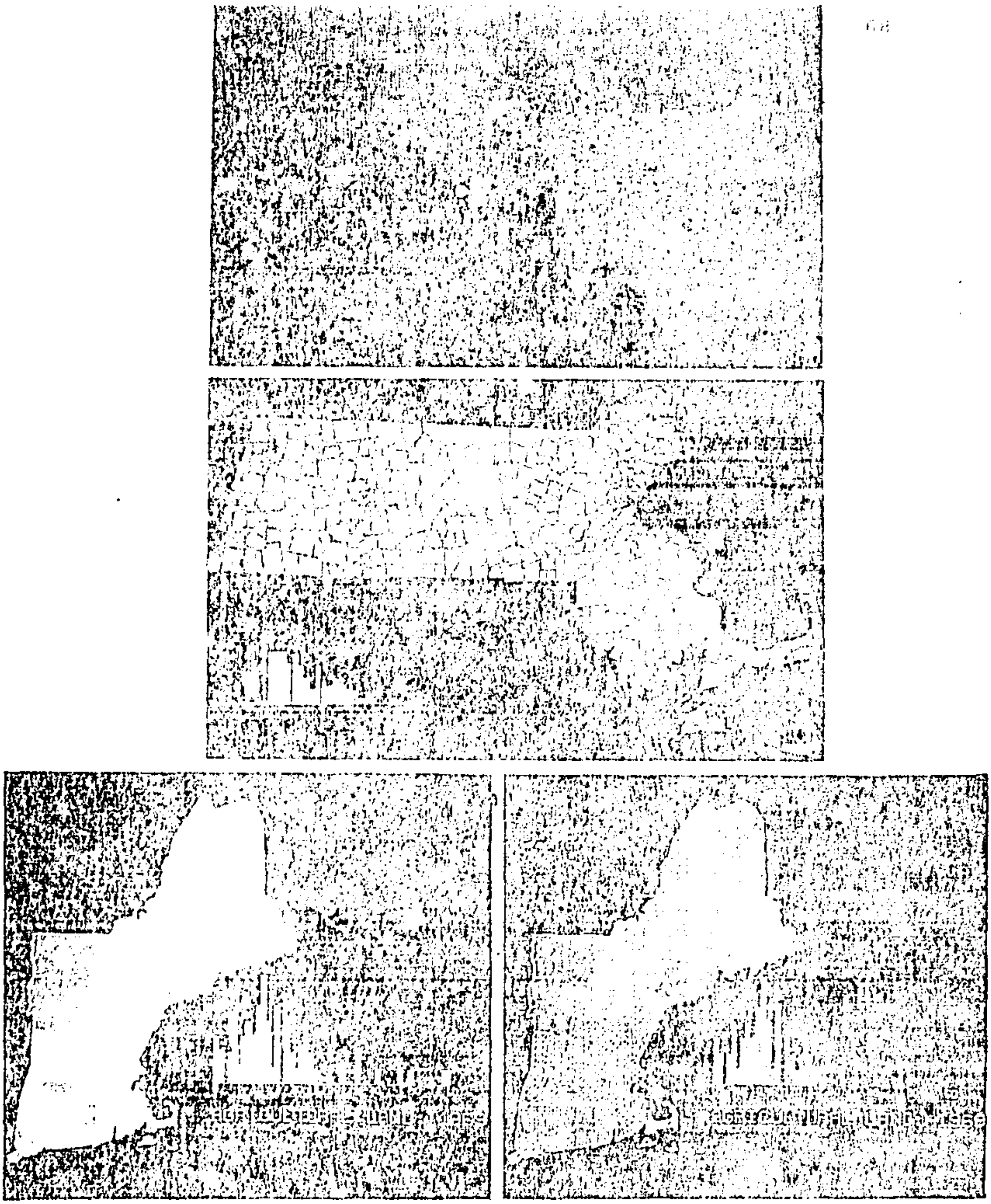


Figura I.[illegible]. Mapas producidos mediante una pantalla a color y un programa que permite la utilización de una gran variedad de cosméticos gráficos.

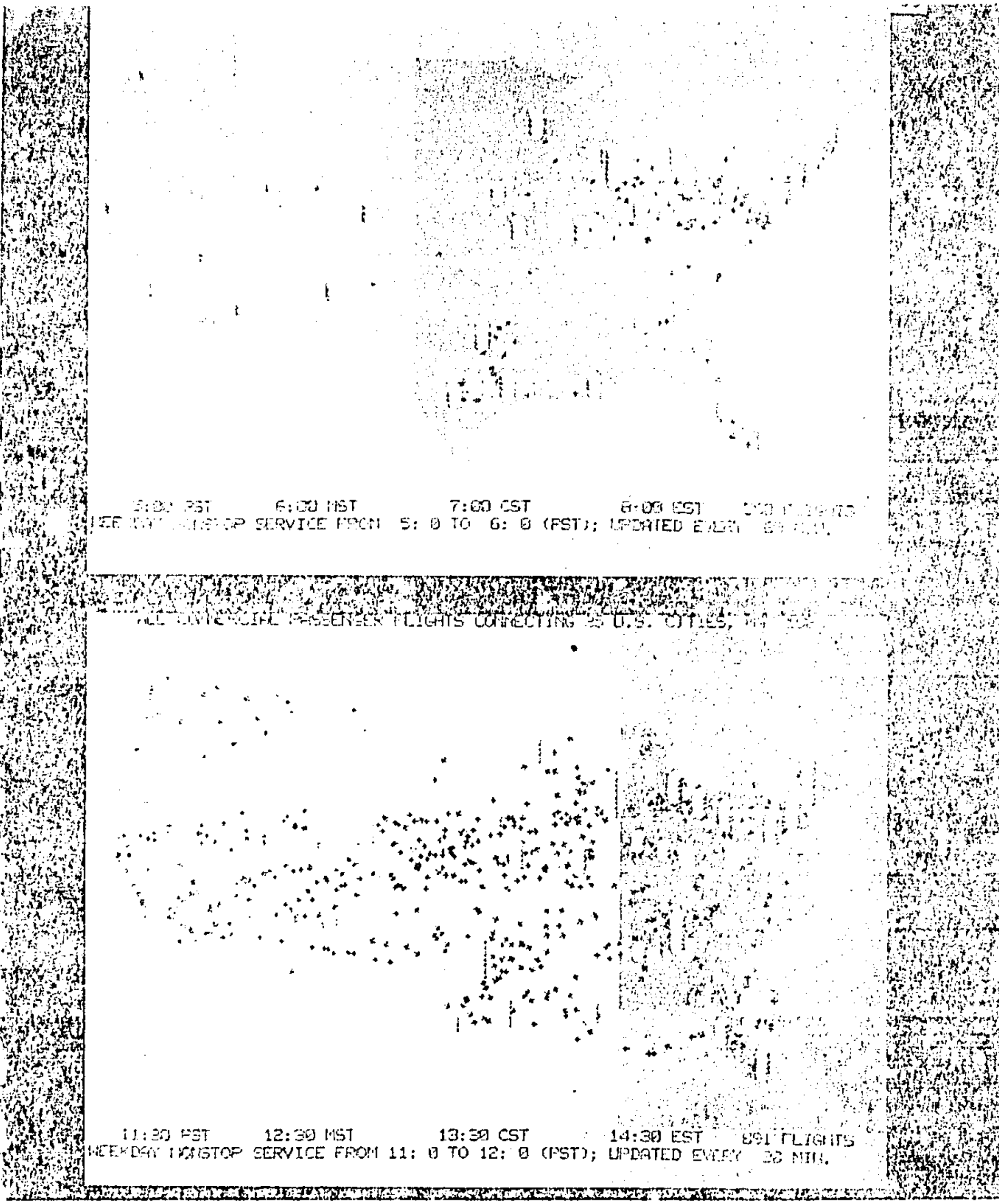
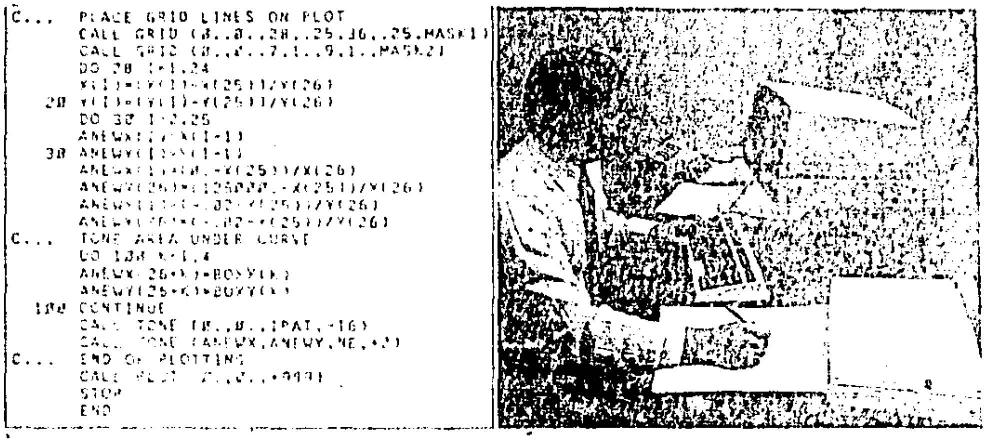


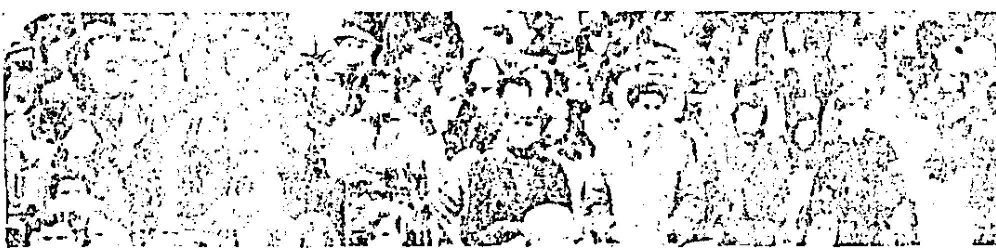
Figura I.4k. Imágenes de una secuencia dinámica de mapas a color que permite analizar un fenómeno en el tiempo y en el espacio.

5. MODELOS DE SIMULACION.



Estos modelos deben estar interconectados de manera tal que los resultados producidos por un modelo puedan alimentar a otros de utilización subsiguiente. Para la planeación del uso del suelo y el transporte se debe contar básicamente con los siguientes tipo de modelos:

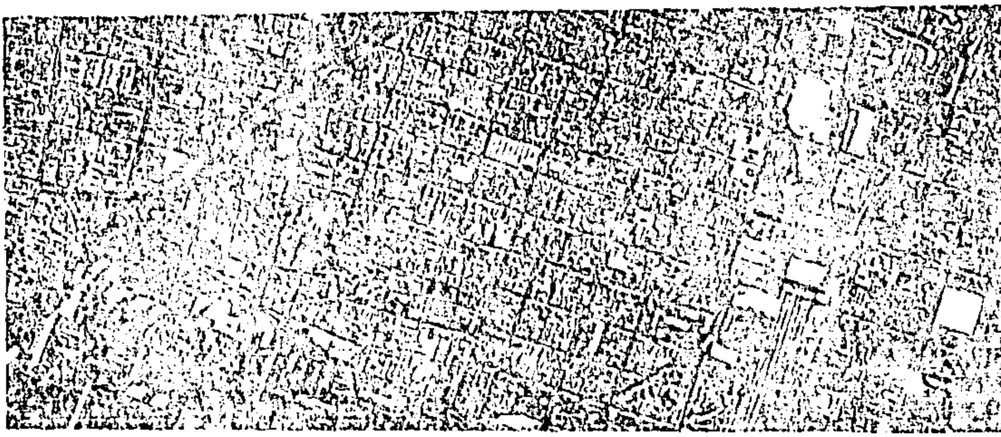
a. Modelos económico-demográficos.



Estiman bajo diferentes suposiciones el crecimiento del empleo, la población y el ingreso como respuesta a los factores sociales y económicos que afectan el comportamiento y la dinámica de la región en la que está ubicada el área urbana de interés.

Estos modelos utilizan generalmente conceptos de la base económica, análisis de insumo-producto, relaciones de la dinámica demográfica (migración, natalidad, estratos y supervivencia, etc) y conjuntos estructurados de opiniones informadas.

b. Modelos de uso del suelo.



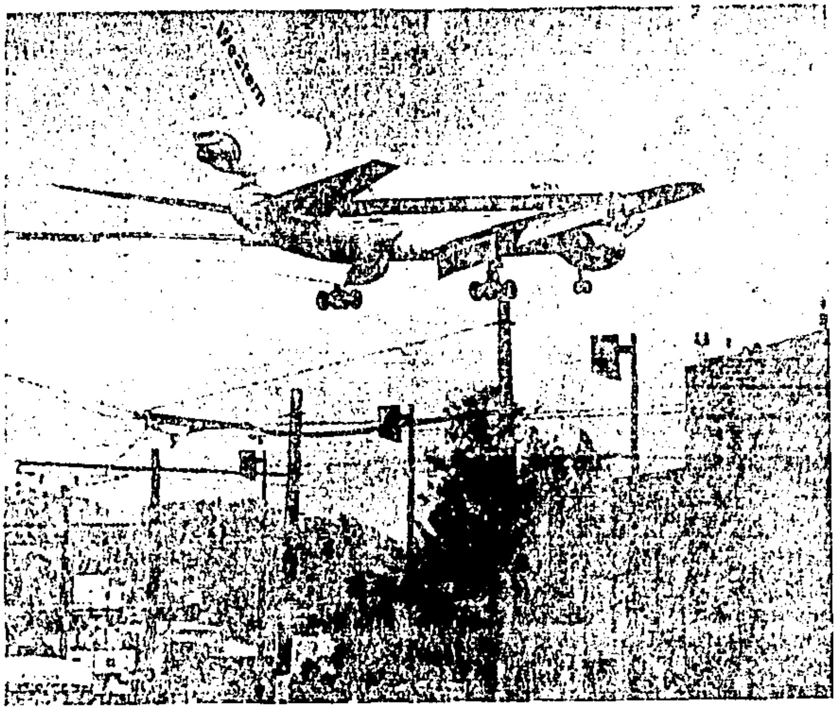
Estos modelos distribuyen espacialmente el crecimiento total de la población y las actividades urbanas en las zonas en las que se divide el área urbana bajo estudio. Esta distribución se hace mediante la consideración de las características particulares de cada zona con respecto a la infraestructura existente, la facilidad de acceso, la disponibilidad de suelo urbano y vivienda, los usos actuales del suelo, la zonificación y las restricciones sobre la densidad de uso propuestas o en vigor, etc.

Estos modelos son también conocidos como modelos de localización de las actividades urbanas y son de gran utilidad en la formulación y evaluación de políticas relacionadas con los programas de construcción de viviendas, las reformas fiscales sobre la propiedad de terrenos e inmuebles y otros cambios en el sistema urbano. Es necesario lograr que estos modelos describan explícitamente los tipos de comportamiento localizacional de las actividades urbanas tales como los patrones de búsqueda de la población al tratar de conseguir una vivienda.

c. Modelos del transporte.

Estos modelos utilizan los resultados de los modelos de uso del suelo para estimar la demanda probable de transporte (generación de viajes), la distribución espacial del tráfico (origen y destino), la utilización de los diferentes medios de transporte individual y colectivo (elección de modo) y los volúmenes de tráfico en las redes de transporte urbano (asignación a la red), permitiendo así la identificación de los grandes problemas de congestionamiento. Mediante su utilización es posible analizar los efectos de las inversiones y políticas de operación en los sistemas de transporte, la introducción de nueva tecnología para el transporte urbano y de otros cambios, tales como el impacto del aumento del precio de la gasolina sobre el número de viajes en automóvil, etc.

d. Modelos de evaluación.



Estos modelos ayudan a determinar los impactos colaterales o secundarios de los esquemas de utilización del suelo y de los sistemas de transporte propuestos.

Además, realizan un análisis de costo y beneficio de las diferentes alternativas.

Utilizados conjuntamente, los modelos de uso del suelo y los modelos de transporte permiten identificar los controles adecuados para redistribuir el crecimiento urbano y lograr combinaciones más eficientes de los usos del suelo que reduzcan las necesidades de transporte urbano en las ciudades.

Un factor importante para el diseño de estos modelos es el que pueda generar resultados confiables y sensitivos al nivel de detalle geográfico requerido en las diferentes aplicaciones de planeación. Para lograr esto se ha propuesto el desarrollo de modelos urbanos con múltiples niveles de desagregación geográfica.

A pesar de que se han hecho pocos intentos de este tipo, es posible diseñar combinaciones de modelos que desagreguen el área urbana bajo estudio en niveles sucesivos de detalle geográfico, permitiendo la retroalimentación entre los diferentes niveles para asegurar factibilidad y consistencia. Esto es de gran utilidad debido a que el análisis urbano puede ajustarse a la geografía detallada del problema considerado y complementar bases de datos recolectas mediante diferentes sistemas de zonificación.

Entre las aplicaciones potenciales de este tipo de modelos se incluyen las siguientes:

a. Generación de esquemas generales de alternativas de uso del suelo y transporte seguidos por distribuciones más detalladas de alternativas particulares.

b. Conservación de las estrategias regionales en la planeación y control del desarrollo urbano.

c. Elaboración de pronósticos a nivel regional utilizando la información producida por modelos que trabajan con sistemas de zonificación detallada.

d. Análisis global de planes zonales de uso del suelo y transporte.

e. Coordinación del gobierno de una ciudad y sus subdivisiones políticas.

Sin embargo, es necesario evitar que los modelos resulten complicados y que requieran demasiados datos para su operación.

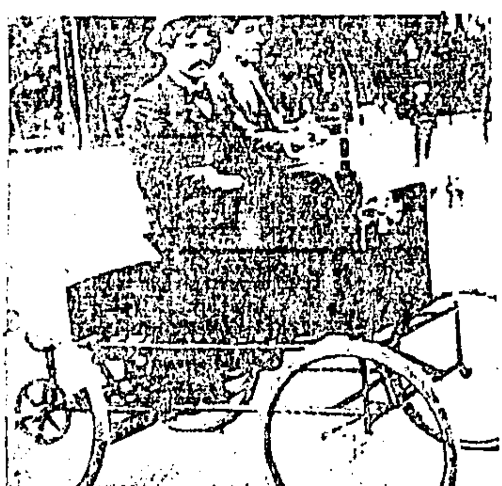
FASES DEL PROCESO DE PLANEACION

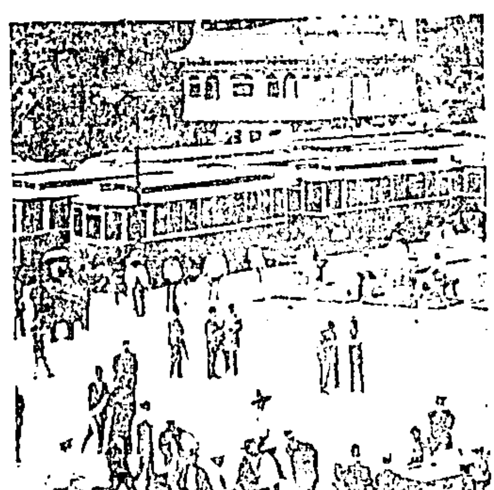
El proceso de planeación del uso del suelo y el transporte puede considerarse constituído por cuatro fases. Las interacciones entre ellas son en ambos sentidos ya que estas fases no son de ninguna manera partes de un proceso secuencial, sino que todas ellas en su conjunto constituyen un proceso gestáltico.

En el enfoque que aquí se presenta, el proceso de planeación forma parte de un sistema de administración más amplio, en el que se contemplan, además de la planeación, los aspectos de ejecución y control.

En el diagrama de la figura I.5 se muestran de manera general estas fases y sus interacciones. Puede observarse además, que el aspecto central del proceso es la consulta popular, para poder determinar lo que la sociedad, en su conjunto, desea para el sistema urbano.

A continuación del diagrama, se describe de manera más detallada cada una de las fases y las actividades que las constituyen.





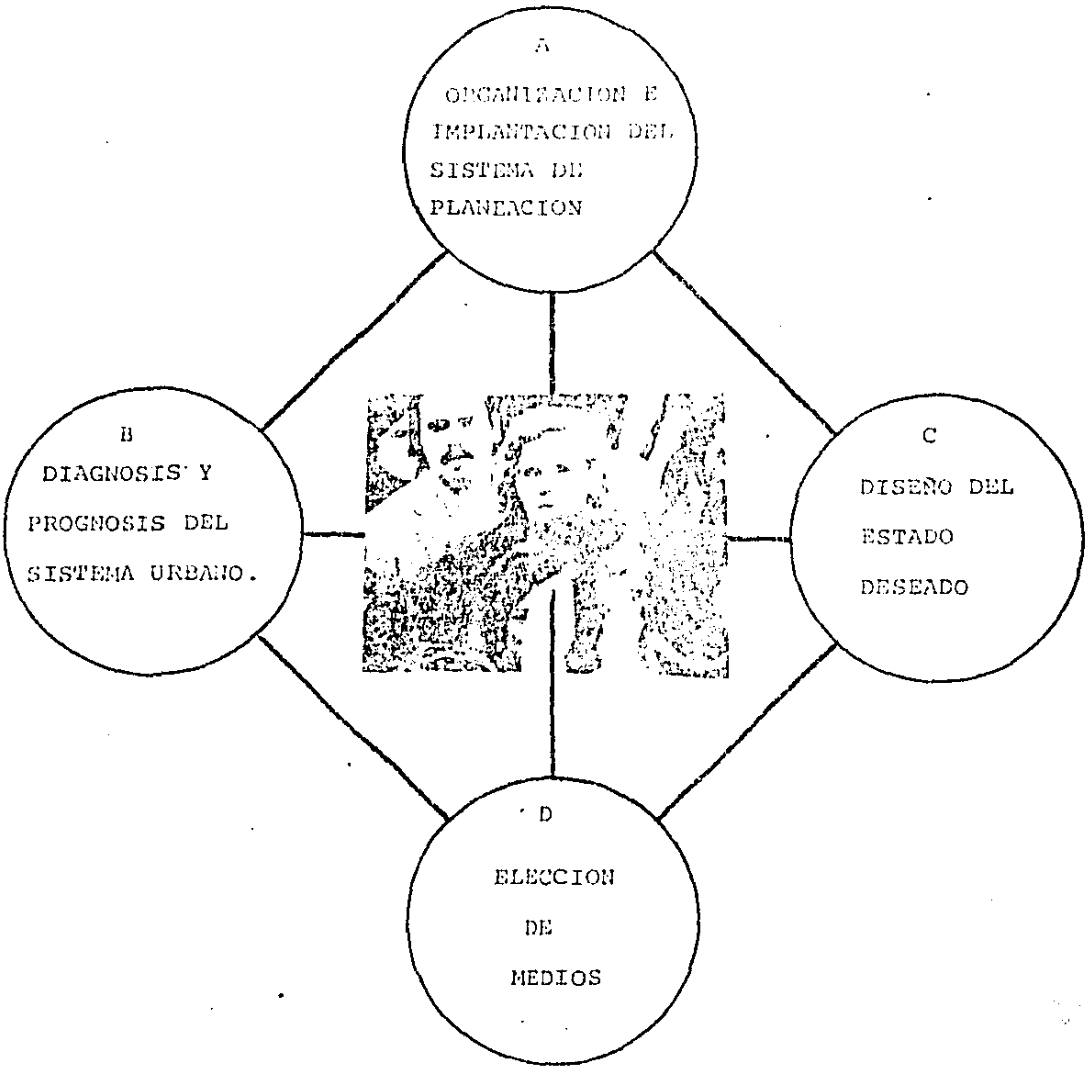
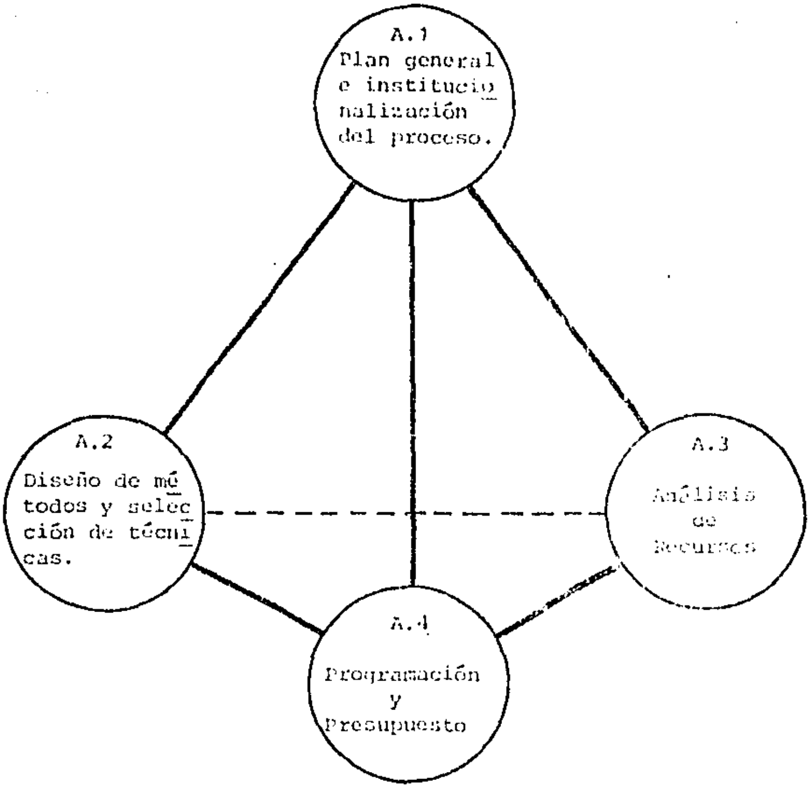


Fig. I.5. Fases del proceso de planeación propuesto.

A. ORGANIZACION E IMPLANTACION DEL SISTEMA DE PLANEACION.

Esta fase del proceso de planeación se puede considerar constituída por cuatro eventos interrelacionados:



A.1 Planeación general e institucionalización del proceso de planeación urbana.

La planeación urbana como todo proceso social que requiere la concertación del gobierno y los grupos de individuos que conforman la sociedad, requiere el reconocimiento institucional para tener una base sólida sobre la cual se pueda iniciar y continuar el proceso. Para lograrlo, es necesaria la acción promotora de uno o más individuos que vaya encaminada a la concientización de los gobernantes en turno, los representantes de los grupos sociales y los personales de reconocido mérito en los campos de la ciencia y el arte que tengan influencia sobre la opinión pública.

Una vez que se haya obtenido el consentimiento de estos grupos para participar en el proceso de planeación, es necesario presentar un anteproyecto a las más altas autoridades de la ciudad y de la nación para conseguir el financiamiento necesario para la elaboración del plan general para el desarrollo del sistema de planeación urbana. Este deberá realizarse por un grupo interdisciplinario de expertos en urbanismo, informática y análisis de sistemas, los cuales deben considerar desde el principio y en todo momento las opiniones y los puntos de vista de los encargados de la administración pública y de los representantes de los sectores sociales. Trabajando de esta manera se obtendrá más facilmente la aprobación gubernamental y la colaboración de la ciudadanía.

Este plan debe especificar las características que debe tener el nuevo sistema de planeación urbana, su alcance, los cambios que deben hacerse al sistema en vigor, el horizonte de planeación que se va a considerar, los períodos en los que se va a subdividir este horizonte y los mecanismos de evaluación de resultados, retroalimentación y control del proceso.

A.2 Diseño de métodos y selección de técnicas.

Una vez establecido el método general del proceso de planeación, es necesario diseñar detalladamente los métodos particulares para cada una de sus fases, seleccionando y adecuando las técnicas o instrumentos analíticos disponibles. Para esto, se deben examinar sus requerimientos de información y los resultados que proporcionan, haciendo también una distinción entre las actividades que se realizan por los grupos humanos y las que se llevan a cabo mediante una computadora.

En estas últimas, es necesario identificar las facilidades de computación disponibles en términos de equipo electrónico y de soporte de programación, especificando además la conveniencia de su compra, renta, desarrollo o de la contratación de consul toria externa.

Con respecto al análisis de los requerimientos de información del proceso, se deben especificar los criterios para controlar la calidad de los datos, ya que esto es un factor determinante de la confiabilidad de los resultados que se obtengan. Solamente deben considerarse los datos necesarios para formular las hipótesis que se desean probar y para apoyar las decisiones que se van a tomar.

Con respecto a los modelos de simulación, se deben establecer las características que deben tener para ser entendibles, confiables y eficientes. Esto puede lograrse mediante el análisis de la literatura especializada en el ramo y de los reportes técnicos de los modelos existentes, examinando su base teórica, su estructura interna y sus características operativas. Existen diferentes técnicas para evaluar la eficiencia de los modelos de simulación, entre estas se encuentran las siguientes:

a. Análisis estructural.

Esta técnica examina conjuntamente la base teórica, el algoritmo y los programas para computadora del modelo, con el objeto de determinar el grado de acoplamiento y la consistencia lograda entre ellos, así como su relación con los requerimientos establecidos por el usuario.

b. Pruebas de sensitividad.

Estas pruebas consisten en la comparación de los resultados del modelo obtenidos al utilizar diferentes conjuntos de datos, suposiciones y cambios de parámetros. Esta técnica ayuda a determinar el rango de condiciones dentro del cual se puede aplicar confiablemente el modelo.

c. Diagramas de flujo.

Los diagramas de flujo de los programas para computadora del modelo permiten determinar si este está operando adecuadamente para simular el fenómeno bajo estudio.

d. Consenso y discusión ordenada.

Las técnicas de consenso permiten realizar varios ciclos de retroalimentación mediante preguntas y respuestas hasta que se establezca una opinión general de grupo. Alternativamente, las técnicas de discusión ordenada, tales como el debate dialéctico, permiten analizar puntos de vista opuestos acerca de un conjunto comunmente aceptado de hechos; ambas técnicas tienen aplicabilidad selectiva en la evaluación de modelos.

e. Escenarios.

La prueba de modelos mediante escenarios que utilizan conjuntos alternativos de suposiciones, ayuda a determinar su rango de aplicabilidad y su ubicación en un contexto operativo de planeación.

En la práctica se pueden utilizar combinaciones de las técnicas anteriores para obtener una visión más clara de los costos y los beneficios de un modelo.

Los métodos y las técnicas utilizadas deben retroalimentarse de acuerdo a los adelantos metodológicos y tecnológicos en cada uno de los períodos de planeación.

A.3 Análisis de recursos.

En cada uno de los períodos de planeación se requiere especificar la cantidad y la calidad de los recursos necesarios para llevar a cabo las diferentes actividades del proceso. Para es to se deben analizar los siguientes aspectos.

a. Recursos humanos.

Determinación de los requerimientos de personal técnico capacitado, sus remuneraciones y los procedimientos para su selección.

b. Recursos físicos.

Especificación de la superficie y la localización adecuada de los locales, el tipo de mobiliario y los medios de comunicación necesarios para llevar a cabo las actividades del proceso, considerando sus costos y/o sus rentas.

c. Recursos financieros.

Identificación de las formas y las fuentes probables de financiamiento para cubrir los gastos necesarios en la implantación y la operación del sistema de planeación urbana.

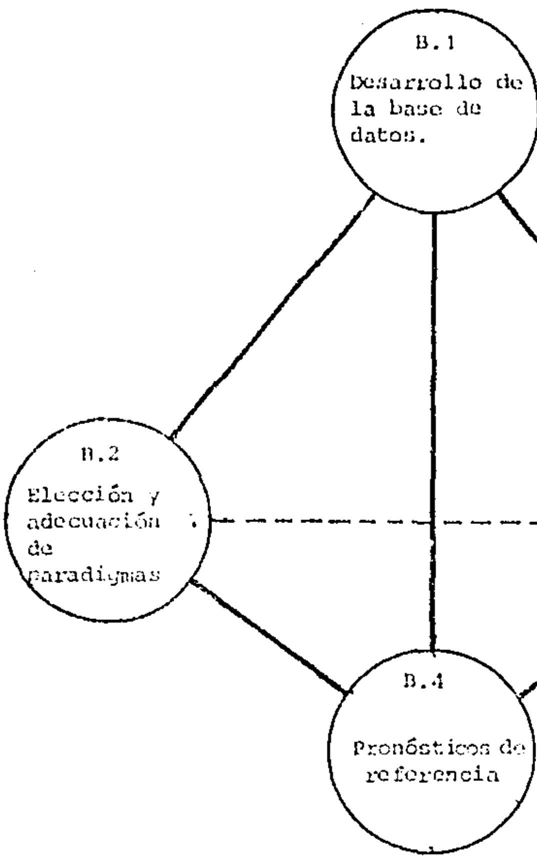
A.4 Programación y presupuesto.

Mediante las técnicas de presupuesto por programa y de la ruta crítica se debe establecer un mecanismo para programar con flexibilidad el calendario de las actividades, sus interacciones y la asignación de recursos en el tiempo.

Además, es conveniente elaborar un manual de organización y métodos que sirva de guía para el buen funcionamiento del sistema.

B. DIAGNOSIS Y PROGNOSIS DEL SISTEMA URBANO.

A su vez, esta fase del proceso esta constituída por cuatro eventos interrelacionados, los cuales se muestran en el diagrama siguiente:



B.1 <u>Desarrollo de la base de datos</u>

Este evento está constituído por cuatro actividades, las cuales se describen a continuación:

a. Diseño del banco de datos.

Se deben especificar las capacidades que debe tener el banco de datos para almacenar, recuperar, manipular, analizar y representar la información acerca del desarrollo histórico y el estado actual del sistema urbano.

La organización de los archivos debe diseñarse en tal forma que sirvan como fuentes y receptores secuenciales de información para las diferentes etapas del proceso de planeación.

b. Recolección de información.

De acuerdo con los requerimientos de información establecidos y los recursos disponibles, se deben identificar las fuentes y los medios de recolección de datos. A través de las técnicas de muestreo se pueden diseñar y llevar a cabo censos, encuestas y aforos para determinar el estado actual del sistema urbano. Su desarrollo histórico puede ser observado a través de los estudios realizados en años anteriores.

Para iniciar este proceso es necesario hacer una partición o zonificación del área urbana bajo estudio. El tamaño de las zonas depende del nivel de detalle geográfico adecuado para el estudio y del tiempo, los recursos y la información disponibles. Si se cree necesario, es posible desarrollar un sistema con múltiples niveles de desagregación geográfica.

c. Codificación y almacenamiento de los datos.

Los datos recolectados deben ser registrados en tarjetas perforadas, cintas o discos magnéticos, o en algún otro medio de almacenamiento de información, para que puedan ser utilizados por una computadora. La información geográfica o cartográfica puede ser digitalizada manualmente o en forma automática mediante un dispositivo electrónico digitalizador.

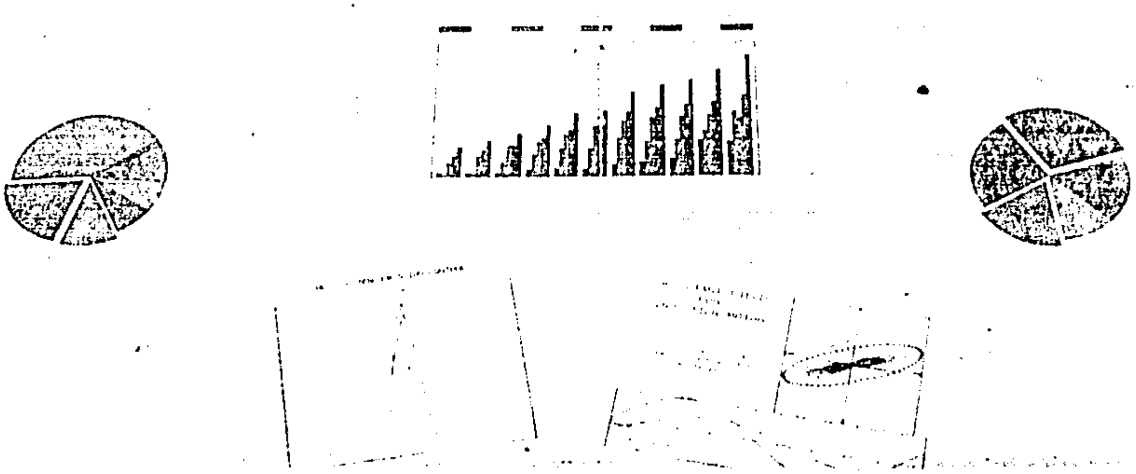
d. Análisis estadístico de los datos.

Mediante los procedimientos de la estadística descriptiva, se deben analizar y presentar los datos en forma de histogramas, distribuciones, gráficas, mapas temáticos y superficies estadisticas. También es necesario llevar a cabo otros procedimientos tales como correlaciones y análisis de series de tiempo.

B.2 Elección y adecuación de paradigmas

Con el propósito de integrar los hechos aislados expresados en los datos (conocimiento existencial) y dar una explicación de su ocurrencia (conocimiento causal), es necesario elegir y adecuar paradigmas provenientes de diferentes ciencias que sirvan como marco teórico de referencia para la elaboración del diagnóstico del estado actual del sistema y para preveer su posible desarrollo en el futuro si se continúan las tendencias actuales.

Siguiendo las pautas del método científico, las teorías de los paradigmas (aspecto lógico) deben ser sometidas a pruebas estadísticas (aspecto empírico) para que con este procedimiento puedan crearse paradigmas más adecuados en la búsqueda de medios para alcanzar estados más favorables del sistema.

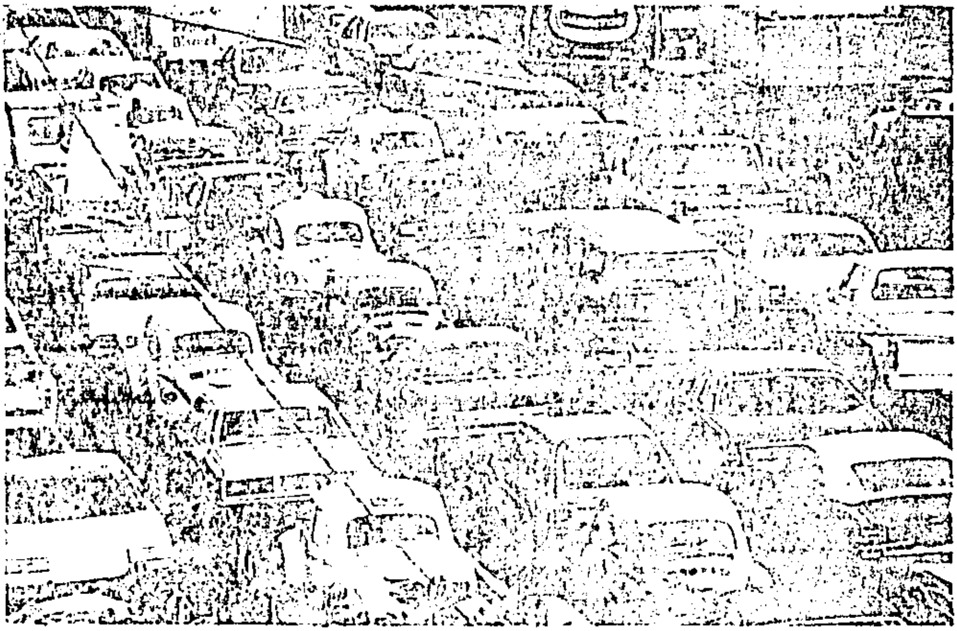


B.3 Diagnóstico del estado actual del sistema

Esta actividad consiste en la descripción y explicación de la situación actual, mediante la aplicación de los paradigmas elegidos y la utilización de los resultados obtenidos en el análisis estadístico.

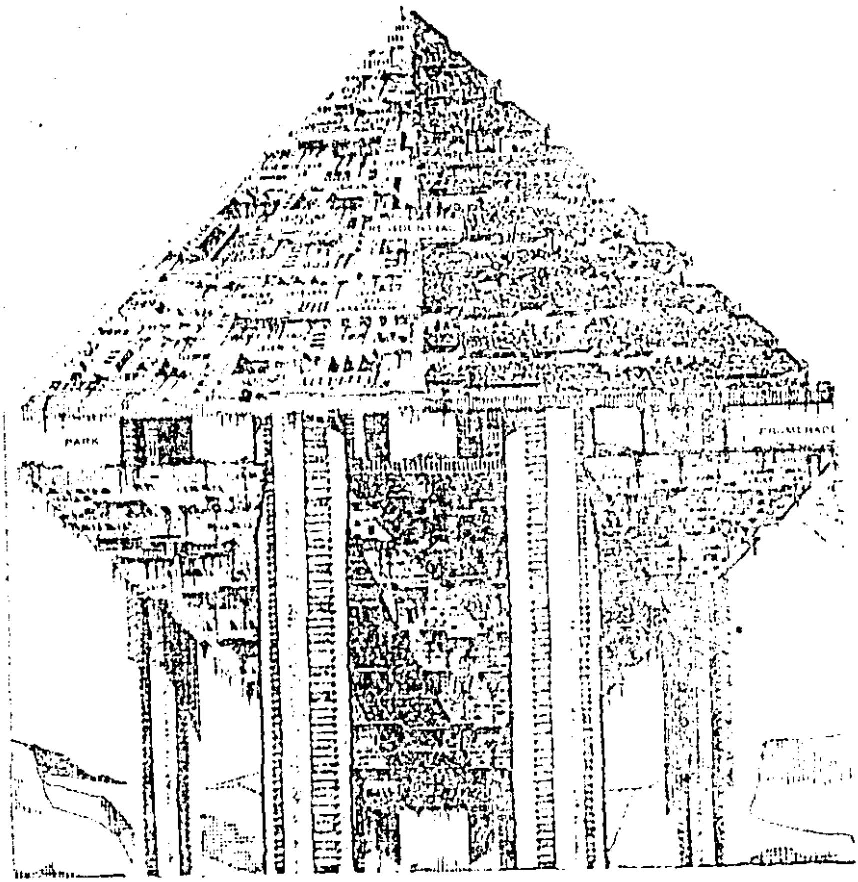
Una técnica adecuada para hacer esta descripción es la de los escenarios, en la cual, la escena o estado actual puede describirse mediante la integración de un conjunto de eventos significativos, la especificación de su frecuencia, de sus relaciones de causa-efecto y de las circunstancias en las que ocurrieron. También deben incluirse hipótesis acerca del comportamiento y la dinámica del sistema.

B.4 Pronósticos de referencia



Tomando como base el análisis estadístico de los datos en series de tiempo (tendencia, estacionalidad, ciclos y aleatoriedad) y las opiniones estructuradas de expertos, deben elaborarse pronósticos acerca del comportamiento probable del sistema, si se continuaran las tendencias actuales. Estos pronósticos sirven solamente como punto de referencia para el diseño del estado deseado. Para describirlos, puede utilizarse también la técnica de escenarios.

C. DISEÑO DEL ESTADO DESEADO O ESTADO NORMATIVO

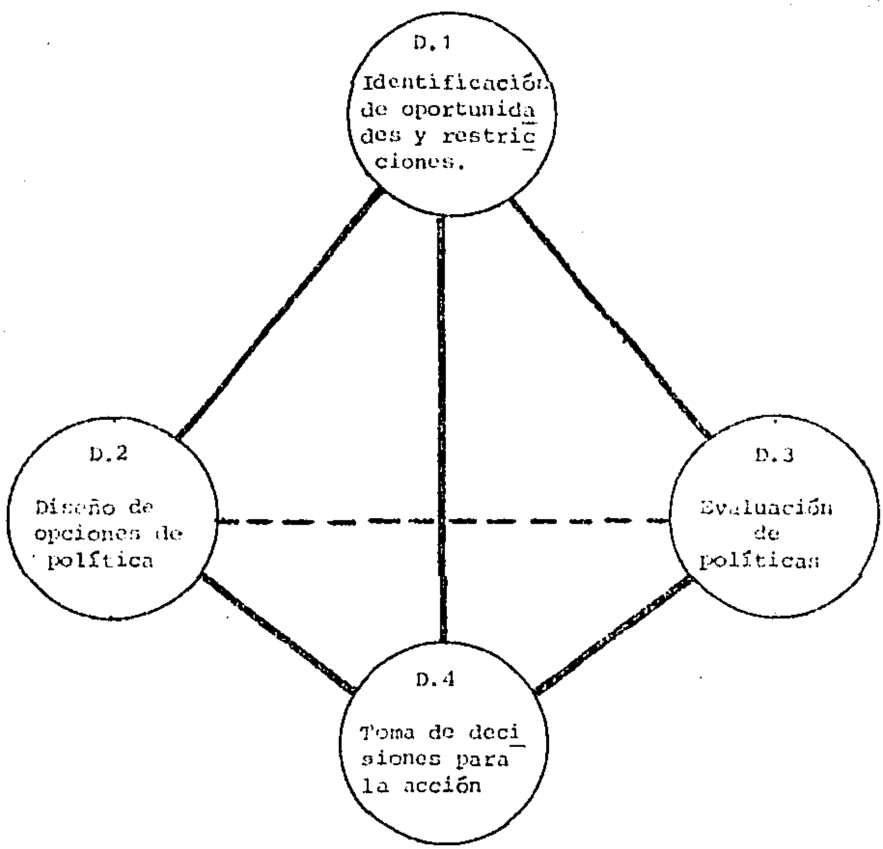


A partir del diagnóstico del estado actual y los pronósticos de referencia, se debe diseñar un estado para el sistema que exprese los ideales que la sociedad desea que éste alcance. Estos ideales deben ser recogidos mediante un amplio proceso de consulta con gobernantes, expertos y representantes de los sectores sociales. Puede utilizarse para esto, una vez más, la técnica de escenarios.

A este estado deseado se le da también el nombre de estado normativo.

D. ELECCION DE MEDIOS.

Esta fase del proceso de planeación está constituída también por cuatro eventos interrelacionados, los cuales se muestran en el siguiente diagrama:



D.1 <u>Identificación de oportunidades y restricciones</u>

> ...todo problema puede convertirse en una oportunidad...

A través de un análisis detallado de la situación actual y de las tendencias observadas, se deben identificar las oportunidades que presentan las inovaciones tecnológicas, los recursos naturales y la disposición de la juventud para el cambio social.

No obstante, es necesario también identificar los factores que representan las limitaciones de tipo físico, económico y social para alcanzar el estado deseado del sistema urbano. Estas restricciones implican seguir el siguiente criterio:

"Hacer más con menos".

D.2 Diseño de opciones de política

Las políticas representan los controles para guiar el desarrollo urbano hacia el estado deseado del sistema.

Cada política está constituída por un conjunto de estrategias; cada estrategia está formada por un conjunto de tácticas; cada táctica representa un conjunto de acciones.

Así, en el proceso de planeación, se pueden estructurar los medios para alcanzar el estado deseado, partiendo de lo general a lo particular o alternativamente, de lo particular a lo general.

Esto es:

políticas → estrategias → tácticas → acciones

o

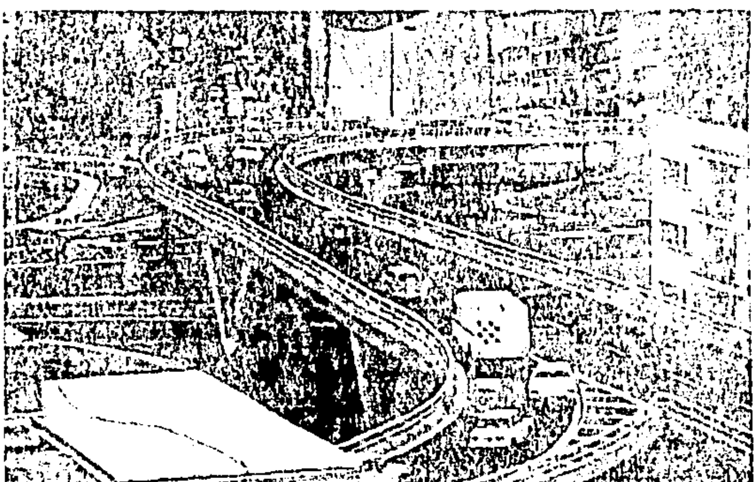
acciones → tácticas → estrategias → políticas

El proceso de confección y adopción de políticas está determinado por el reparte del poder entre los grupos o facciones que constituyen el sistema político en vigor y por el momen to histórico en el que se realiza. Sin embargo, la aceptación o el rechazo de una política está fundamentado en la ideología y la cultura de los pueblos.

En este contexto, se pueden diferenciar las macropolíticas internacionales que condicionan a las políticas nacionales que a su vez son el resultado de la interacción de las políticas partidistas o micropolíticas. Las políticas urbanas son parte de la política nacional y se reflejan en los controles de uso del suelo, las inversiones en transporte, las cargas fiscales, la dotación de servicios, etc.

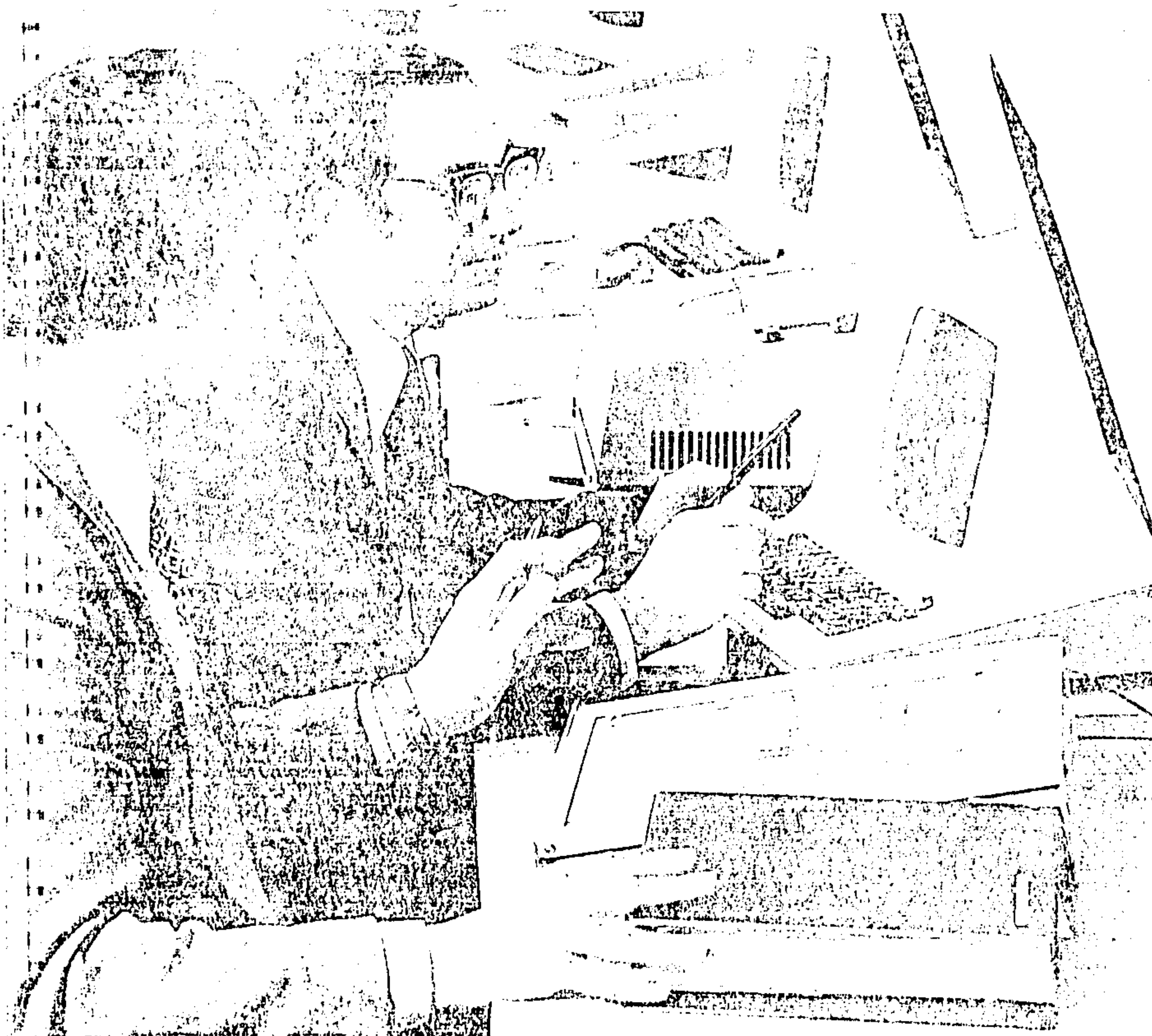
Existen diferentes métodos para diseñar opciones de política, tales como las Políticas Delfos, las técnicas de discusión ordenada y los juegos de simulación, entre otros.

Lógicamente, se deben diseñar diferentes opciones de política (considerando sus subdivisiones: estrategias, tácticas y acciones) para cada uno de los períodos de planeación, es decir para pasar de una escena o estado del sistema al siguiente, hasta que se alcance el estado deseado.



D.3 Evaluación de políticas

Es precisamente en esta parte del proceso de planeación donde intervienen los modelos de simulación, con el propósito de evaluar los efectos probables de las diferentes opciones de política de uso del suelo y transporte sobre la organización espacial del área urbana bajo estudio. Para ello, es necesario llevar a cabo los pasos que se describen a continuación.



a. Formulación matemática de los modelos de simulación.

Tomando como base la estructura teórica de los paradigmas elegidos y las relaciones encontradas mediante el análisis estadístico de los datos, se deben escoger las formas matemáticas más adecuadas para representar el comportamiento y la dinámica del sistema urbano.

Esta elección debe hacerse tomando en consideración las restricciones computacionales y las ventajas de los métodos numéricos existentes para la resolución de sistemas matemáticos complejos. Un ejemplo de esto es el caso en el que se utilizan ecuaciones en diferencias finitas en lugar de sistemas de ecuaciones diferenciales.

b. Programación en computadora de los modelos.

Los algoritmos utilizados deben representarse mediante diagramas de flujo para que puedan ser programados utilizando un lenguaje de programación (Fortran, Algol, Pascal, etc.) o un sistema de simulación (DYNAMO, GASTP IV, etc.), dependiendo del problema considerado y de las facilidades computacionales disponibles.

La programación de los diferentes modelos y submodelos debe ser consistente, con el objeto de lograr el acoplamiento necesario para que los resultados de un modelo puedan ser utilizados por otros, dentro del proceso de simulación.

Una vez que se haya revisado la lógica de los programas mediante corridas de prueba, estos deben ser documentados en manuales para el operador y para los usuarios.

El conjutno de modelos programados debe integrarse para constituir lo que se conoce con el nombre de "paquete", el cual debe tener la capacidad de interactuar con la base de datos y los otros programas o paquetes del sistema de planeación (estadística, mapeo, graficación, etc.).

c. Calibración de los modelos.

La calibración consiste en la estimación de los valores de los parámetros del modelo que optimicen el valor de alguna estadística que representa la bondad de ajsute entre los resultados del modelo y las observaciones contenidas en la base de datos.

Existen diferentes procedimientos estadísticos para la calibración de modelos. Para elegir uno de ellos, es necesario considerar el grado de complejidad en la programación y el tiempo que requieren para correrse en una computadora.

El calibrar un modelo con un alto nivel de precisión estadística puede lograr que el modelo llegue a tener una gran capacidad para simular adecuadamente el comportamiento del sistema urbano en el pasado, pero esto no garantiza que el modelo pueda ser de utilidad para describir tal comportamiento en el futuro. Este problema puede solucionarse mediante la consulta con los tomadores de decisiones y los expertos, para obtener procedimientos de calibración menos precisos desde el punto de vista estadístico, pero más adecuados desde el punto de vista del comportamiento del sistema urbano.

Utilizando la información contenida en la base de datos se deben realizar corridas en computadora de los modelos para analizar y evaluar los resultados que proporcionan. Si estos no satisfacen los criterios de aceptación establecidos, se deben modificar los valores de los parámetros o en dado caso las formas matemáticas escogidas, los algoritmos o los programas para computadora, hasta que se obtengan resultados satisfactorios. Un procedimiento importante en este paso es la realización de pruebas de sensitividad de los modelos.

d. Utilización interactiva de los modelos de simulación para la evaluación de opciones de política.

Mediante la utilización de los modelos de simulación se pueden cuantificar los efectos probables de las políticas de uso del suelo y transporte sobre la organización espacial y el desarrollo de los sistemas de transporte del área urbana bajo estudio. Para esto, las políticas deben traducirse en cambios de parámetros y cambios en las bases de datos.

De manera interactiva se pueden evaluar las políticas diseñadas para pasar de una escena o estado del sistema al siguiente. Si los resultados no son satisfactorios, pueden modificarse las políticas, haciendo los cambios pertinentes mediante el uso de las terminales de la estación interactiva de planeación.

Una vez que se obtiene una escena o estado intermedio satisfactorio dada una opción de política, se actualiza la base de datos y se calibran nuevamente los modelos utilizando los resultados obtenidos como datos. Esto tiene por objeto hacer que los modelos incorpo-en esta información para poder describir de manera más adecuada el comportamiento del sistema urbano en el futuro, tratando de evitar en esta manera, que sus resultados sean simplemente proyecciones de tipo estadístico.

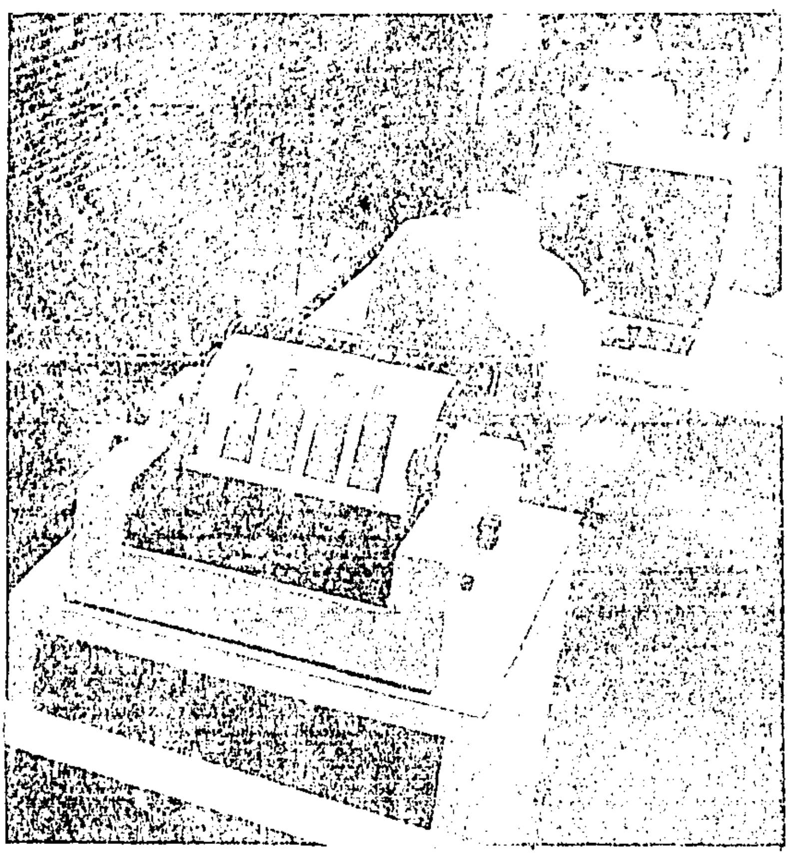
Debido a que este procedimiento es interactivo, se puede pasar al análisis de las políticas para el siguiente período de planeación o almacenar los resultados obtenidos para su utilización posterior.

Este es en realidad un enfoque determinista para el análisis de los efectos de las políticas de uso del suelo y transporte, ya que al final de cada corrida de los modelos se llega a una escena resultante única, pero es también posible efectuar arias corridas para cada opción de política mediante simulaciones tipo Montecarlo, con el objeto de llegar a varias escenas probables y de ahí obtener la escena promedio, lo cual es una base más confiab le para tomar decisiones. Para esto, es necesario solamente introducir un procedimiento iterativo adicional.

En los diagramas de las figuras 1.5a y 1.5b se muestrasn respectivamente el funcionamiento del enfoque determinista y del enfoque probabilista para la evaluación de políticas.

El conjunto de escenas o estados del sistema obtenidos como resultados de la evaluación de una opción de política constituye lo que se puede llamar "escenario intermedio factible".

Sin embargo, todos estos escenarios intermedios deben conducir a la escena o estado deseado para el sistema urbano.



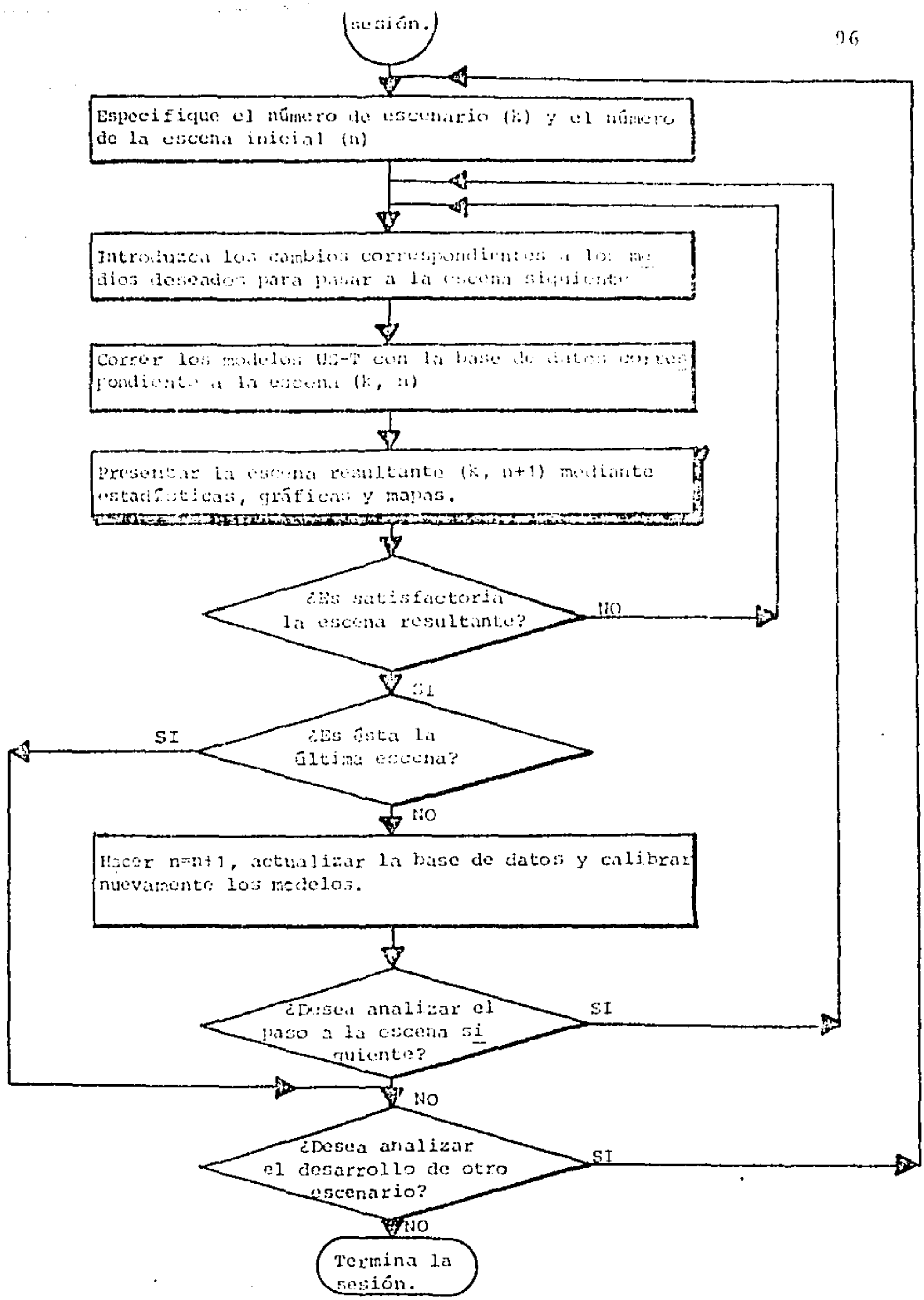


Figura I.6a. Diagrama de flujo del proceso interactivo para la evaluación determinista de opciones de política.

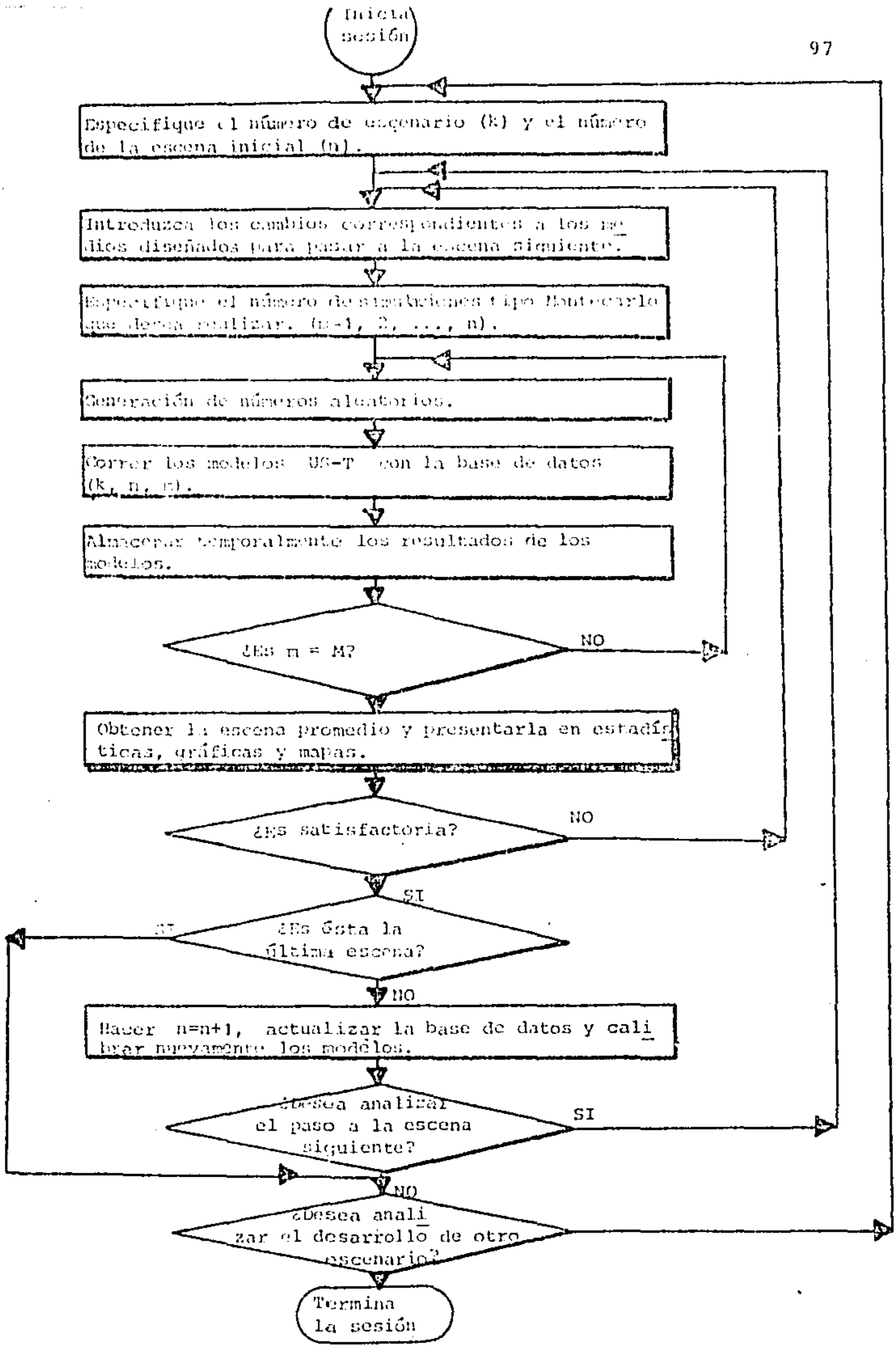


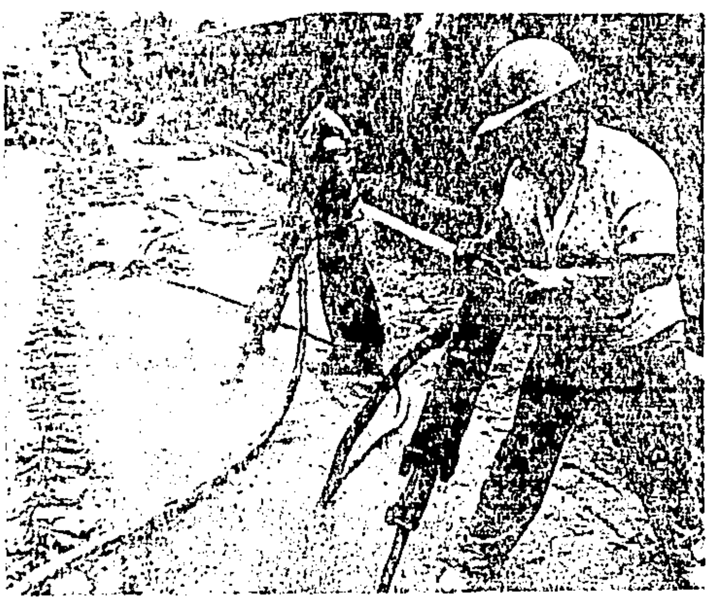
Figura I.6b. Diagrama de flujo de la evaluación de opciones de política con un enfoque probabilista.

D.4 Toma de decisiones para la acción

Dentro del conjunto de escenarios intermedios factibles, se debe escoger uno de ellos, el cual junto con la escena o estado deseado constituirá el escenario normativo que servirá de base para la formulación de los programas de desarrollo urbano.

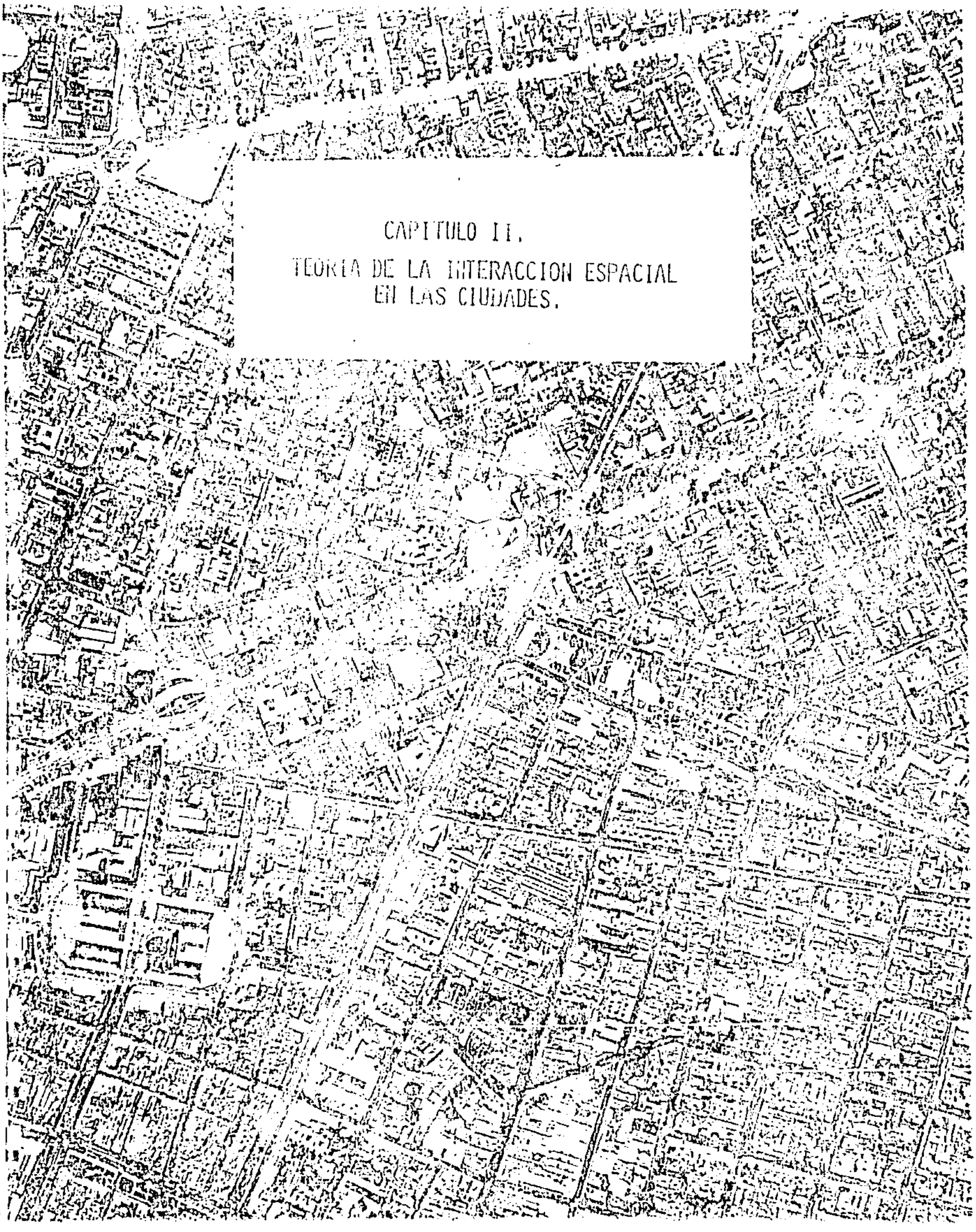
La aceptación de las políticas correspondientes al escenario normativo por parte de los grupos y sectores sociales, es un factor esencial para alcanzar el éxito.

Los resultados de las políticas, estrategias, tácticas y acciones en la práctica, deben observarse sistemáticamente para retroalimentar el proceso de planeación.



CAPITULO II.

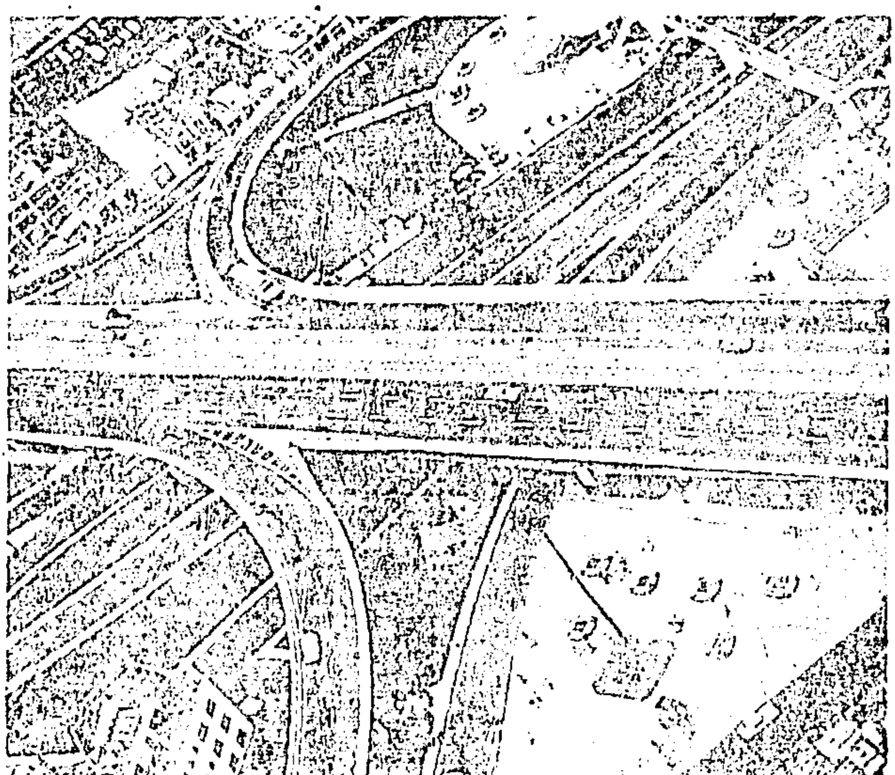
TEORIA DE LA INTERACCION ESPACIAL EN LAS CIUDADES.



II. TEORIA DE LA INTERACCION ESPACIAL EN LAS CIUDADES.

Definiciones:

1. Un área de estudio dividida en zonas i, j.
2. T_{ij} es la interacción entre la zona i y la zona j.
3. O_i es el flujo total de interacción saliendo de la zona i. (T_{i*}).
4. D_j es el flujo total de interacción con destino en la zona j. (T_{*j}).
5. $W_i^{(1)}$ y $W_j^{(2)}$ son los actractivos de las zonas de orígen y destino.
6. c_{ij} es el costo del viaje entre la zona i y la zona j.
7. N es el número de zonas.



HIPOTESIS:

La interacción entre la zona i y la zona j es proporcional a O_i, D_j y a alguna función decreciente del costo de viaje c_{ij}.

RESTRICCIONES:

$$T_{i*} = \sum_{j=1}^{N} T_{ij} = O_i \tag{2.1}$$

$$T_{*j} = \sum_{i=1}^{N} T_{ij} = D_j \tag{2.2}$$

MODELO BASICO:

$$T_{ij} = k\, O_i\, D_j\, f(c_{ij}) \tag{2.3}$$

En el caso de que O_i y D_j sean conocidas, la constante k tiene que escogerse en tal forma que se satisfagan las restricciones (2.2) y (2.3). Para esto, se sustituye el valor de T_{ij} dado por (2.3) en la ecuación (2.1):

$$\sum_{j=1}^{N} k\, O_i\, D_j = k\, O_i \sum_{j=1}^{N} D_j\, f(c_{ij}) = O_i \tag{2.4}$$

por tanto:

$$k = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} D_j\, f(c_{ij})} \tag{2.5}$$

FAMILIA DE MODELOS:

A. MODELO SIN RESTRICCIONES.

$$T_{ij} = k\, W_i^{(1)}\, W_j^{(2)}\, f(c_{ij})$$

k = constante de proporcionalidad.

O_i y D_j se desconocen y se reemplazan por $W_i^{(1)}$ y $W_j^{(2)}$.

k no depende de i ni de j, ya que no tiene que satisfacerse ninguna restricción.

B. MODELO CON LA PRODUCCION RESTRINGIDA.

$$T_{ij} = A_i\, O_i\, W_j^{(2)}\, f(c_{ij}) \qquad (2.6)$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} W_j^{(2)}\, f(c_{ij})} \qquad (2.7)$$

O_i es conocida, D_j se desconoce y se reemplaza por $W_j^{(2)}$.

A_i es un factor de proporcionalidad que depende de i y que garantiza que se cumpla la primera restricción.

C. MODELO CON LA ATRACCION RESTRINGIDA.

$$T_{ij} = W_i^{(1)}\, B_j\, D_j\, f(c_{ij}) \qquad (2.8)$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} W_i^{(1)}\, f(c_{ij})} \qquad (2.9)$$

D_j es conocida, O_i se desconoce y se reemplaza por $W_i^{(1)}$.

B_j es un factor de proporcionalidad que depende de j y que garantiza que se cumpla la segunda restricción.

D. MODELO CON LA PRODUCCION Y LA ATRACCION RESTRINGIDAS.

$$T_{ij} = A_i \; B_j \; O_i \; D_j \; f(c_{ij}) \tag{2.10}$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} B_j \; D_j \; f(c_{ij})} \tag{2.11}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} A_i \; O_i \; f(c_{ij})} \tag{2.12}$$

O_i y D_j son conocidas.

A_i y D_j son factores de proporcionalidad que garantizan que se cumplan las restricciones y se obtienen al sustituir el valor de T_{ij} en las restricciones (2.2) y (2.3).

CUADRO RESUMEN DE LA FAMILIA
DE MODELOS.

INTERACCION = FACTOR (S) X MASA X MASA X FUNCION DE DISTRIBUCION.

Caso	Interaccion	Factores	Masa	Masa	Función de distribución
A	T_{ij}	k	$W_i^{(1)}$	$W_j^{(2)}$	$f(c_{ij})$
B	T_{ij}	A_i	O_i	$W_j^{(2)}$	$f(c_{ij})$
C	T_{ij}	B_j	$W_i^{(1)}$	D_j	$f(c_{ij})$
D	T_{ij}	A_i, B_j	O_i	D_j	$f(c_{ij})$

FORMA DE CONSTRUIR UN MODELO.

1. Especificar la variable de interacción T_{ij}.
2. Analizar la naturaleza de los términos de masa para determinar el tipo de modelo y los factores de proporcionalidad.
3. Decidir como medir la masa.
   (Unidades en totales de flujo o índices compuestos de actractivo).
4. Medir el costo de interacción.
   (Componentes y sus ponderaciones).
5. Elección de la función de costo.
   (Experimentar con varias funciones y escoger la que logre el mejor ajuste).
6. Diseño del sistema zonal.
   (Número y tamaño de las zonas. Si las zonas son de tamaño diferente, el índice de atractivo se debe modificar).

CONCEPTOS IMPORTANTES:

A. Los términos de gravitación "masa" y "función de costo" son usados por conveniencia en la terminología y por su precedencia histórica. Esta familia de modelos se deriva de los métodos de máxima entropía, ya que una analogía estadística es más apropiada que la analogía gravitacional determinista.

b. Los términos de masa, la medida de costo de viaje y la forma de la función de costo, son los términos básicos del modelo.

c. Los términos de masa son conocidos y dados exógenamente.

d. Se debe evitar los modelos hagan estimaciones y pronósticos dependientes del tamaño de las zonas cuando estas son de tamaño diferente.

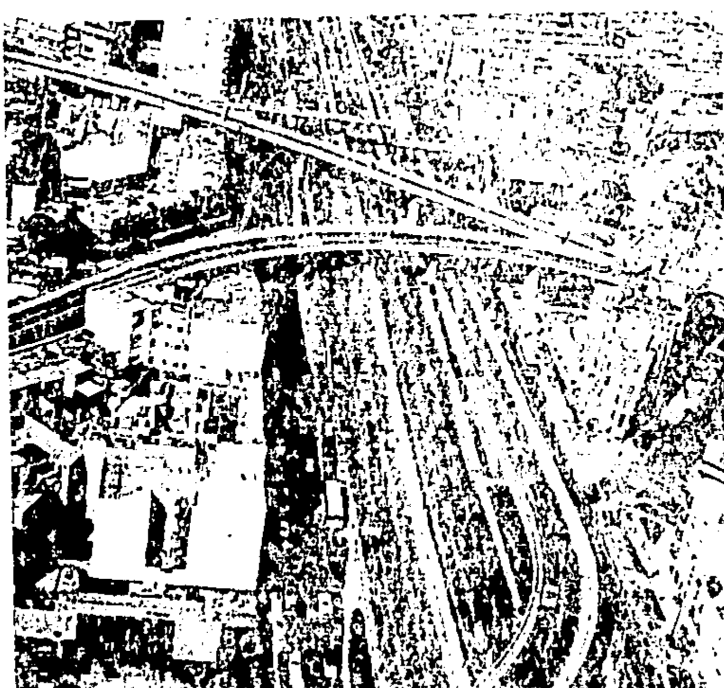
e. Para medir el "costo de viaje" se debe utilizar una medida compuesta de sus diferentes componentes: dinero, tiempo de espera, tiempo de recorrido, confort, etc. Esta medida debe ser apropiada al tipo de interacción espacial considerada.

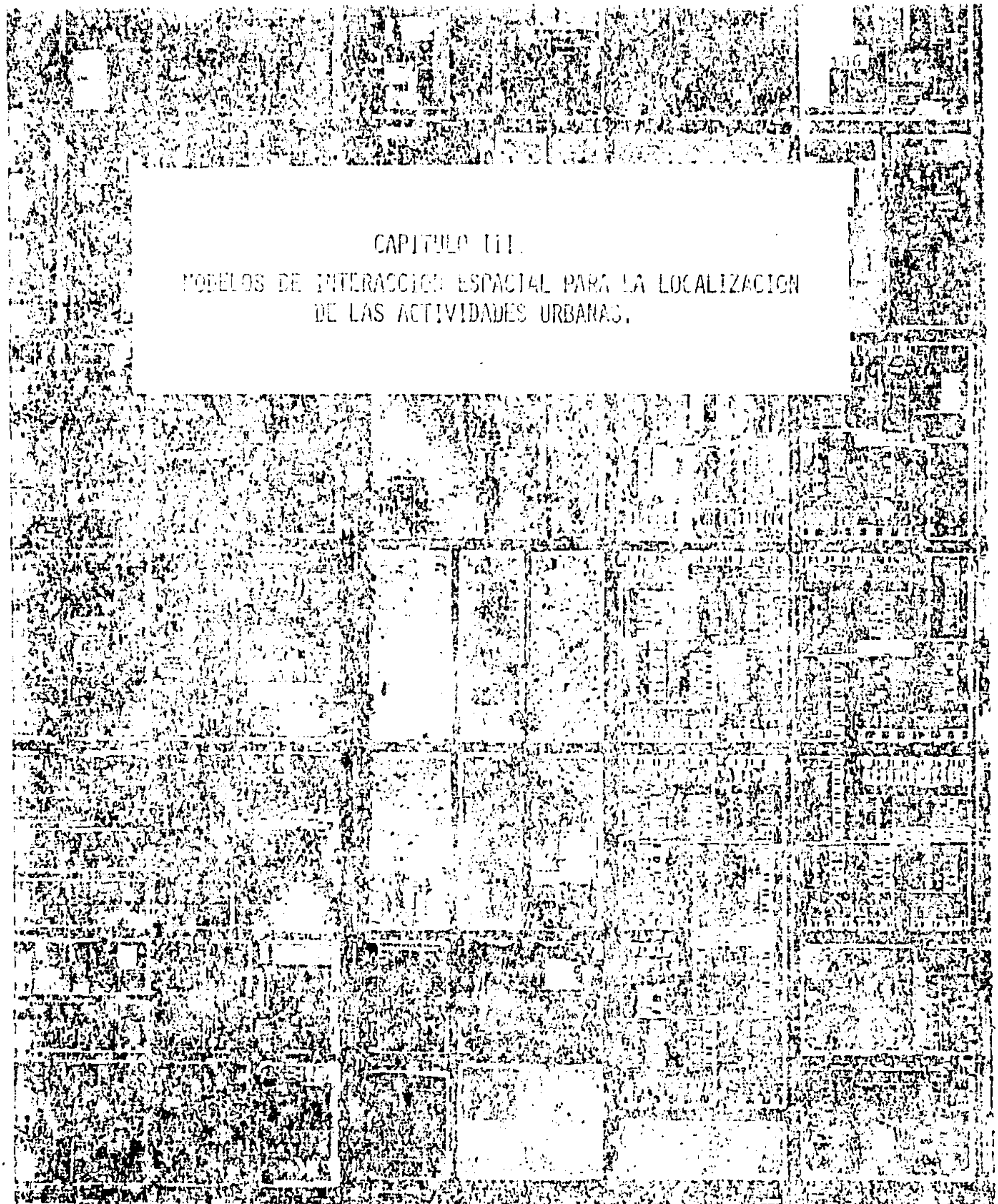
f. Para escoger la forma de la función de costo, lo mejor es encontrarla empíricamente (la que ajuste mejor los pronósticos del modelo a las observaciones), tomando también en consideración las percepciones del viajero.

Los modelos de máxima entropía utilizan una función exponencial negativa:

$$e^{-\beta\, c_{ij}}$$

g. En los modelos de máxima entropía se consideran los flujos como promedios estadísticos de una variedad de micro-comportamientos del sistema.





CAPITULO III.

MODELOS DE INTERACCION ESPACIAL PARA LA LOCALIZACION DE LAS ACTIVIDADES URBANAS.

III. MODELOS DE INTERACCION ESPACIAL PARA LA LOCALIZACION DE LAS ACTIVIDADES URBANAS:

LOCALIZACION DE LA ACTIVIDAD RESIDENCIAL.

Hipótesis 1: Las familias localizan su domicilio con respecto a los lugares de empleo.

Hipótesis 2: El porcentaje de gente que trabaja en una cierta localización y que vive en otra localización particular, decrece con la distancia (o costo del viaje) entre las dos localizaciones.

La mayoría de los modelos de localización residencial, tales como el de Lowry suponen que:

$$P_i = g \sum_j E_j \, f(c_{ij}) \qquad (3.1)$$

donde:

P_i = Población de la zona i

E_j = empleo en la zona j.

f = función decreciente del costo de viaje interzonal c_{ij}.

g = costante calculada para garantizar que P_i sume un total de población P.

$$\sum_i P_i = P \qquad (3.2)$$

Si T_{ij} es el número de trabajadores que viven en i y trabajan en j, entonces la ecuación (3.1) está suponiendo que:

$$T_{ij} = E_j \, f(c_{ij}) \qquad (3.3)$$

lo cual pone la interacción en forma explícita.

Vamos a usar ahora los principios de máxima entropía para derivar la ecuación (3.3).

Hay que tomar en cuenta la definición de entropía; así, construimos una distribución de probabilidad definiendo:

$$P_{ij} = \frac{T_{ij}}{E_j} \tag{3.4}$$

donde:

P_{ij} = probabilidad de que un trabajador de la zona j viva en la zona i.

Entonces, la entropía de esa distribución de probabilidad puede considerarse como:

$$S_j = \sum_j P_{ij} \ln P_{ij} \tag{3.5}$$

Debemos ahora maximizar S_j sujeta a:

$$\sum_j P_{ij} = 1, \tag{3.6}$$

$$\sum_j P_{ij}\, c_{ij} = \bar{c}_j \tag{3.7}$$

donde:

$\bar{c}_j$ = costo promedio del viaje al trabajo de los trabajadores de la zona j.

En el caso del modelo de Lowry podemos sustituir la restricción (3.6) por una de la forma (3.2) con una constante de proporcionalidad k que se calcula para garantizar que las E_j sumen un total de empleos E.

Entonces:

$$P_{ij} = \frac{T_{ij}}{kE_j}.$$

Si maximizamos S_j sujeta solamente a (3.7), tenemos:

$$P_{ij} = \exp(-\beta_j\ c_{ij}), \tag{3.8}$$

donde β_j es el multiplicador Lagrangiano asociado a la ecuación (3.7).

Si sustituimos en (3.8) P_{ij} por su valor T_{ij}/kE_j y despejamos, obtenemos:

$$T_{ij} = kE_j\ \exp(-\beta_j\ c_{ij}) \tag{3.9}$$

y entonces definimos:

$$f_j\ (c_{ij}) = k\ \exp(-\beta_j\ c_{ij}). \tag{3.10}$$

Si suponemos que β_j es independiente de j, en tal forma que $f_j\ (c_{ij}) = f(c_{ij})$, la ecuación (3.9) es equivalente a la ecuación (3.3) que corresponde a los modelos tipo Lowry.

Si maximizamos S_j sujeta a (3.6) y (3.7), y suponemos que β_j es independiente de j, tenemos:

$$T_{ij} = B_j\ E_j\ \exp(-\beta\ c_{ij}), \tag{3.11}$$

$$B_j = \left[\sum_i \exp(-\beta\ c_{ij})\right]^{-1}. \tag{3.12}$$

donde B_j es el multiplicador Lagrangiano asociado a la ecuación (3.8).

La distribución de los residentes P_i se obtiene mediante la sumatoria usual.

Las ecuaciones (3.11) y (3.12) constituyen el modelo más sencillo para representar la siguiente hipótesis:

"La distribución de los trabajadores en las zonas habitacionales con respecto a la localización de su empleo, es generada por relaciones conocidas de viaje-costo".

En este modelo la "accesibilidad" a las zonas de empleo es el único atributo considerado de las zonas habitacionales.

Entonces, puede considerarse a V_i^α como una medida del atractivo relativo de vivir en la zona i, resultando:

$$T_{ij} = B_j \, V_i^\alpha \, E_j \, \exp\,(-\beta \, c_{ij}), \tag{3.13}$$

$$B_j = \left[\sum_i V_i^\alpha \exp\,(-\beta \, c_{ij})\right]^{-1}, \tag{3.14}$$

Puede considerarse también un mecanismo para restringir la capacidad de las zonas para alojar a la población.

MODELO PARA LA LOCALIZACION DEL CONSUMO EN LOS CENTROS COMERCIALES.

Definiciones:

S_{ij} = Flujo de consumo de los residentes de la zona i en los centros comerciales de la zona j.

e_i = Gasto promedio de los residentes de la zona i en bienes de consumo.

P_i = Población de la zona i.

W_j = Factor de ponderación asociado con la zona j como una aproximación de su atractivo comercial.

c_{ij} = costo del viaje de la zona i a la zona j.

El modelo es de máxima entropía con la producción restringida. Lo que importa obtener es S_{*j} o sea el volúmen de ventas de los centros comerciales en las zonas j.

$$S_{ij} = A_i \ (c_i P_i) \ W_j^{\alpha} \exp \ (-\beta \ c_{ij}) \tag{3.15}$$

donde:

$$A_i = \left[\sum_j W_j \ \exp(-\beta \ c_{ij}) \right]^{-1}, \tag{3.16}$$

Sujeto a:

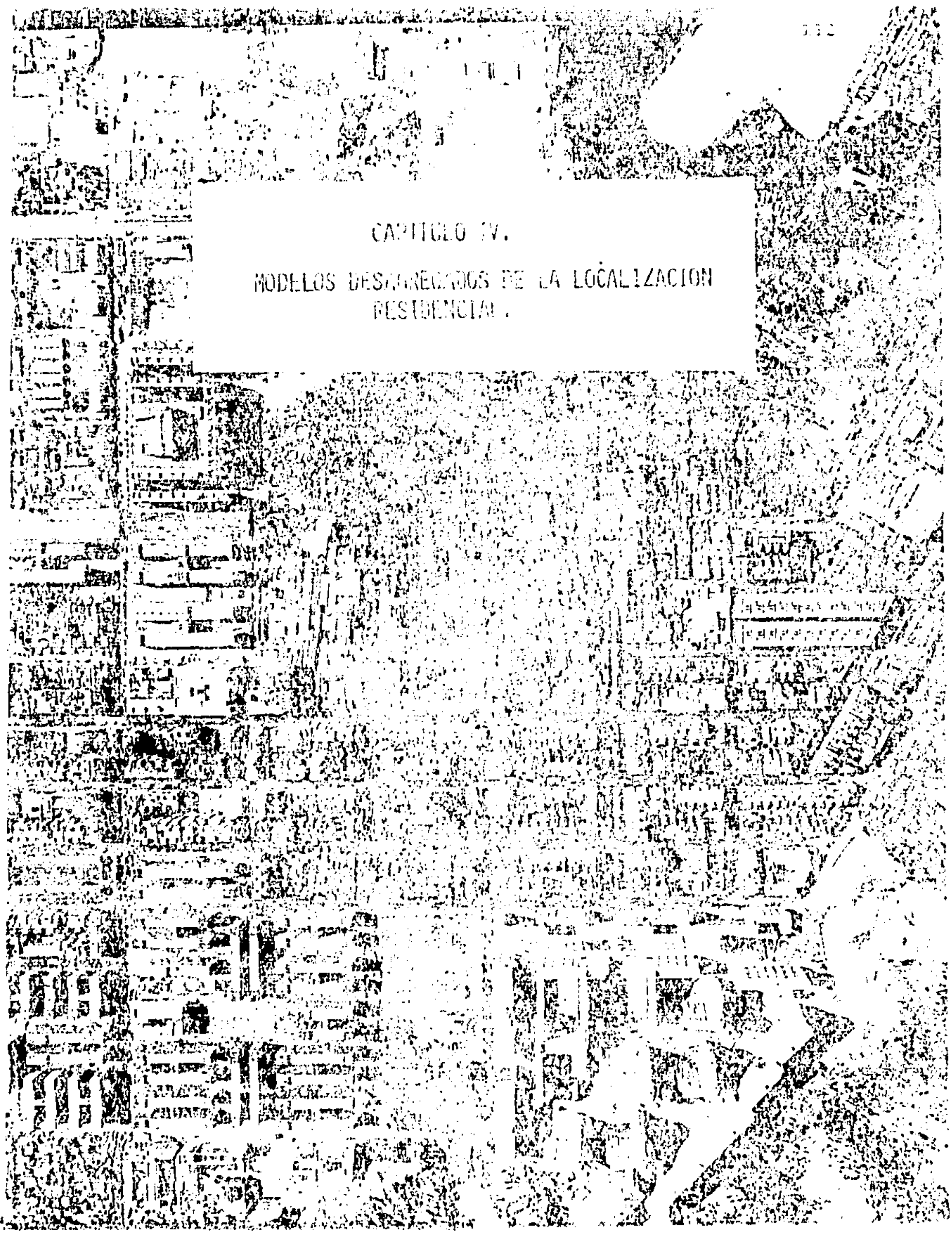
$$\sum_j S_{ij} = c_i P_i$$

El modelo puede desagregarse por tipo de persona y disponibilidad de automóvil, para diferenciar el comercio en el centro del comercio en la periferia.

La suposición de que todos los bienes de consumo son homogéneos con respecto al comportamiento del consumo que ellos generan, debe ser desagregada, para correr el modelo en forma separada con diferentes tipos de bienes.

Debido a que el modelo no es de atracción restringida, se supone implícitamente lo siguiente:

"Dada una distribución de poder de compra, los centros comerciales se desarrollan en los lugares más accesibles a ese poder a través del término $\exp \ (-\beta \ c_{ij})$, tomando en cuenta solamente las economías de escala (a través del término W_j^{α}), ya que no existe ninguna otra restricción sobre S_{*j}.



CAPITULO IV.

MODELOS DESAGREGADOS DE LA LOCALIZACION RESIDENCIAL.

IV. MODELOS DESAGREGADOS DE LOCALIZACION RESIDENCIAL.

La demanda de los individuos por espacio habitable en una localización particular dentro del sistema urbano puede considerarse como parte de la Teoría del comportamiento del consumidor.

El espacio puede considerarse como un bien económico que puede comprarse ó rentarse por los consumidores.

Los consumidores tratan de maximizar su utilidad U al comprar un conjunto de bienes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La utilidad está asociada a las diferentes combinaciones de estos bienes, y se maximiza sujeta a las restricciones del presupuesto del consumidor.

Se dice que:

$$U = U\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) \tag{4.1}$$

y se maximiza sujeto a:

$$w = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i = 0 \tag{4.2}$$

donde:

w = salario ó ingreso.

p_i = precio del bien i.

Para maximizar (4.1) se construye un Lagrangiano L:

$$L = U\left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right) + \psi\left(w - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i\right) \tag{4.3}$$

donde ψ es el multiplicador indeterminado.

Diferenciando (4.3) con respecto a x_i e igualando a cero, las ecuaciones resultantes conducen a las condiciones de primer orden para un máximo, así:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = U_{x_i} - \psi P_i = 0 \tag{4.4}$$

$i=1,2,\ldots m$

donde U_{x_i} es la diferencia.

Manipulando (4.4), las condiciones de primer orden pueden escribirse como:

$$\frac{U_{x_i}}{U_{x_j}} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i \neq j \tag{4.5}$$

Estas ecuaciones pueden interpretarse de la siguiente manera:

"el equilibrio ocurre cuando el cociente de las utilidades marginales es igual al cociente de los precios".

La diferenciación de (4.3) con respecto a ψ hace que se satisfagan las restricciones presupuestales en (4.2).

MODIFICACION

Para un individuo en el mercado, la función de utilidad puede ser:

$$U = z^a q^b \tag{4.6}$$

que es una función de:

q = cantidad demandada de espacio habitable.

z = compuesto de otros bienes.

a y b son parámetros que reflejan la importancia relativa de q y z.

La ecuación (4.6) debe maximizarse sujeta a las restricciones:

$$w - v_z - s(r)q - cr = 0 \qquad (4.7)$$

donde:

v = precio del compuesto de bienes z.

s(r) = precio ó renta del espacio demandado q en la zona r.

c = costo unitario del transporte.

r = distancia entre la localización del empleo y la localización de la vivienda.

La maximización de (4.6) sujeta a las condiciones presupuestales conduce a dos condiciones de primer orden:

$$\frac{aq}{bz} = \frac{v}{s(r)} \qquad (4.8)$$

$$\frac{ds(r)}{dr} q = - c \qquad (4.9)$$

Esta última ecuación implica que el costo marginal de la compra de espacio en r debe ser igual a los ahorros marginales en el costo del transporte.

Las funciones de demanda explícitas para la cantidad de espacio demandado en cualquier localización y la demanda para el compuesto de bienes, pueden encontrarse expresando q y z una en términos de la otra en (4.8) y sustituyendo en (4.7), así:

$$q = \frac{\eta(w-cr)}{s(r)} \tag{4.10}$$

$$z = \frac{(1-\eta)\ (w-cr)}{v} \tag{4.11}$$

donde: $\eta = \frac{b}{(a+b)}$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) implican que el gasto total en espacio y en bienes demandados en cualquier localización r, son proporciones constantes del presupuesto.

CRITERIOS PARA LA DESAGREGACION DE LOS MODELOS.

Los modelos de localización residencial pueden desagregarse de acuerdo a los siguientes criterios:

1. Grupos de ingreso de la población.
2. Niveles de salarios en los empleos.
3. Tipos de vivienda.
4. Variación en los precios de la vivienda debida a su locali zación geográfica.

HIPOTESIS SIMPLIFICADORA.

Para evitar tratar la estructura familiar se considera solamen te un trabajador ó persona económicamente activa por vivienda.

DEFINICIONES.

T_{ij}^{kw} = número de trabajadores (p.e.a.) que viven en la zona i en una casa tipo k y que trabajan en la zona j ga nando un salario w. (Haciendo la suposición de que el salario es la única fuente de ingreso).

H_i^k = número de viviendas tipo k en la zona i.

E_j^w = número de empleos con salario w en la zona j.

k = índice que representa el tamaño, antiguedad y condición de la vivienda.

c_{ij} = "costo" debido al viajar de la zona i a la zona j.

RESTRICCIONES

La variable de interacción T_{ij}^{kw} debe satisfacer las siguientes restricciones:

$$\sum_j \sum_w T_{ij}^{kw} = H_i^k \qquad (4.12)$$

$$\sum_i \sum_k T_{ij}^{kw} = E_j^w \qquad (4.13)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^{kw} c_{ij} = C^w \qquad (4.14)$$

Los tipos de viviendas y niveles de salarios están representados en grupos discretos.

Estas restricciones dan lugar a un conjunto interconectado de modelos de interacción espacial restringidos doblemente.

CONCEPTOS IMPORTANTES.

a. Al considerar el parámetro de transporte C^w se hace im plícito incluir a β como β^{w}, lo que significa que la longitud del viaje trabajo-casa es una función del ingreso.

b. Al introducir H_{i}^{k} y E_{j}^{w} como información exógena que requieren los modelos, se comienza a representar el lado de la oferta en el mercado de la vivienda y el empleo.

c. Es necesario considerar una restricción adicional que exprese el hecho de que los trabajadores (p.e.a.) vivirán solamente en viviendas que puedan pagar (dentro de ciertos límites).

OTRAS DEFINICIONES.

p_{i}^{k} = precio de una vivienda tipo k en la zona i.

q^{w} = porcentaje promedio del ingreso (menos el costo del transporte) que un individuo del nivel de ingreso w gasta en vivienda.

Para integrar estas dos variables se incorpora una distribución que muestra la dispersión del gasto real en vivienda con respecto a la media y que relaciona esto con la variable precio p_{i}^{k}. Para comparar este gasto con el costo real en dinero del viaje al trabajo se considera la variable siguiente:

c'_{ij} = costo real del viaje al trabajo pagado en dinero.

Con el propósito de simplificar aún más, se puede hacer la suposición de que esta distribución es normal, para lo cuál se añade la restricción siguiente:

$$\sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^{kw} \left[P_i^k - q^w \left(w - c'_{ij} \right) \right]^2 = \sigma w^2 \qquad (4.15)$$

A partir de esto se puede maximizar la entropía sujeta a las restricciones (4.12) hasta la (4.15), así:

$$S = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_w l_n \, T_{ij}^{kw}! \qquad (4.16)$$

Para lograrlo, formamos el Lagrangiano:

$$\begin{aligned} \delta = & \sum_i \sum_j \sum_k \sum_w l_n \, T_{ij}^{kw}! \; - \\ & - \sum_i \sum_k \lambda_i^{(1)k} \left(\sum_j \sum_w T_{ij}^{kw} - H_i^k \right) - \\ & - \sum_j \sum_w \lambda_j^{(2)w} \left(\sum_i \sum_k T_{ij}^{kw} - E_j^w \right) - \\ & - \sum_w \beta^w \left(\sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^{kw} \, c_{ij} - C^w \right) - \\ & - \sum_w \mu^w \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k \left[\phi_i^k - q^w \left(w - c'_{ij} \right) \right]^2 - \sigma w^2 \right\} \end{aligned} \qquad (4.17)$$

donde $\lambda_i^{(1)k}$, $\lambda_j^{(2)w}$, β^w y μ^w son los multiplicadores Lagrangianos asociados a las ecuaciones (4.12) hasta la (4.15).

Resolviendo resulta:

$$\frac{\partial \, \delta}{\partial \, T_{ij}^{kw}} = 0 \qquad (4.18)$$

que con las restricciones produce la siguiente ecuación:

$$T_{ij}^{kw} = A_i^k \, B_j^w \, H_i^k \, E_j^w \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right)$$

$$\exp\left\{-\mu^w\left[p_i^k - q^w\left(w - c'_{ij}\right)\right]^2\right\} \tag{4.19}$$

donde:

$$A_i^k = \frac{\exp\left[-\lambda_i^{(1)k}\right]}{H_i^k} \tag{4.20}$$

$$B_j^w = \frac{\exp\left[-\lambda_j^{(2)w}\right]}{E_j^w} \tag{4.21}$$

Usando las ecuaciones (4.12) y (4.13) podemos obtener A_i^k y B_j^w, así:

$$A_i^k = \left(\sum_j \sum_w B_j^w \, E_j^w \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right)\right.$$

$$\left.\exp\left\{-\mu^w\left[p_i^k - q^w\left(w - c'_{ij}\right)\right]^2\right\}\right)^{-1} \tag{4.22}$$

$$B_j^w = \left(\sum_i \sum_k A_i^k \, H_i^k \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right)\right.$$

$$\left.\exp\left\{-\mu^w\left[p_i^k - q^w\left(w - c'_{ij}\right)\right]^2\right\}\right) \tag{4.23}$$

La calibración de este modelo es complicada pero no intratable.

ELIMINACION DE LA HIPOTESIS SIMPLIFICADORA.

Para esto, se hacen las hipótesis siguientes:

1. Solamente el ingreso del jefe de familia es relevante para la localización residencial.

2. Todo el ingreso familiar es relevante.

3. Suposiciones "intermedias".

PRIMERA HIPOTESIS.

Se define:

$T_{ij}^{kwn'}$ = número de trabajadores (p.e.a.) que viven en la zona i, en una vivienda tipo k y que trabajan en la zona j con un salario w.

$n' = 1$ si es jefe de familia;

$n' = 0$ si no lo es.

Sea:

r = número promedio de trabajadores (p.e.a.) en las familias (ó grupos poseedores de vivienda).

De acuerdo a lo anterior la ecuación (4.12) puede escribirse en la forma:

$$\sum_{j} \sum_{w} \sum_{n'} \frac{T_{ij}^{kwn'}}{r} = H_i^k \qquad (4.24)$$

o alternativamente en la forma:

$$\sum_{j}\sum_{w}\sum_{n'} \delta_{n'1}\, T_{ij}^{kwn'} = H_i^k \tag{4.25}$$

la cuál expresa la condición de que las viviendas sean asignadas a jefes de familias.

Para asegurar que todos los trabajadores (p.e.a.) estén en correspondencia con los empleos, la ecuación (4.13) resulta:

$$\sum_{i}\sum_{k}\sum_{n'} T_{ij}^{kwn'} = E_j^w \tag{4.26}$$

El costo total del viaje al trabajo, ecuación (4.14), toma la forma siguiente:

$$\sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{n'} T_{ij}^{kwn'}\, c_{ij} = C^w \tag{4.27}$$

Así, el equivalente de la ecuación (4.15) es:

$$\sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{n'} T_{ij}^{kwn'}\, \delta_{n'1} \left[p_i^k - q^w \left(w - c'_{ij} \right) \right]^2 = \sigma w^2 \tag{4.28}$$

donde $\delta_{n'1}$ asegura que solamente el jefe de familia contribuye al pago de la vivienda.

Para derivar una forma específica del modelo de máxima entropía, se utiliza la ecuación (4.24) que implica que los trabajadores (p.e.a.) "dependientes" forman una proporción constante del total en cada zona.

Así, maximizando:

$$S = -\Sigma l_n \, T_{ij}^{kwn'} \Big| \tag{4.29}$$

sujeta a las restricciones (4.24), (4.26), (4.27) y (4.28).

De esto, resulta:

para $n' = 1$:

$$T_{ij}^{kwn'} = A_i^k \, B_j^w \, r \, H_i^k \, E_j^w \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right)$$

$$\exp\left\{-\mu^w \left[P_j^k - q^w \left(w - c'_{ij}\right)\right]^2\right\} \tag{4.30}$$

para $n' = 0$.

$$T_{ij}^{kw0} = A_i^k \, B_j^w \, r \, H_i^k \, E_j^w \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right) \tag{4.31}$$

donde:

$$A_i^k = \frac{\exp\left(-\lambda_i^{(1)k}\right)}{r \, H_i^k} \tag{4.32}$$

$$B_j^w = \frac{\exp\left(-\lambda_j^{(2)w}\right)}{E_j^w}, \tag{4.33}$$

$\lambda_i^{(1)k}$, $\lambda_j^{(2)w}$, β^w y μ^w son los multiplicadores Lagrangianos asociados a las ecuaciones (4.24), (4.26), (4.27) y (4.28).

A_i^k y B_j^w se obtienen sustituyendo de (4.30) y (4.31) en (4.24) y (4.26).

β^w y μ^w se obtienen mediante el proceso normal de calibración.

SEGUNDA HIPOTESIS.

(Todo el ingreso familiar contribuye al pago de la vivienda).

Los salarios individuales w se agrupan simultáneamente en ingresos familiares I para familias ó grupos poseedores de vivienda con más de un trabajador (p.e.a.).

Se regresa a la notación T_{ij}^{kw}.

Además se postula que se conoce ó se puede encontrar una distribución $\Pi(w/I)$, que es la probabilidad de que un "ganador" de salario w esté en una familia de ingreso I.

Las restricciones (4.24), (4.26), (4.27) y (4.28) se convierten en:

$$\sum_j \sum_w \frac{T_{ij}^{kw}}{r} = H_i^k \tag{4.34}$$

$$\sum_i \sum_k T_{ij}^{kw} = E_j^w \tag{4.35}$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}^{kw} c_{ij} = C^w \tag{4.36}$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \frac{\Pi(w/I)\ T_{ij}^{kw}}{r}\left[P_i^k - q^I\left(I-c_{ij}\right)\right]^2 = \sigma_{wI}^2 \tag{4.37}$$

donde:

$\Pi(w/I)\ T_{ij}^{kw}$ = número de "ganadores" de salario w, miembros de familias de ingreso I.

Así, la ecuación (4.37) implica que todos los trabajadores (p.e.a.) se localizan de acuerdo a su ingreso familiar.

Se considera una debilidad de este modelo el hecho de que en la ecuación (4.37) aparecen los costos individuales de transporte en lugar de los costos familiares ó del jefe de familia. Sin embargo, es una buena aproximación.

El modelo de máxima entropía correspondiente, toma la forma siguiente:

$$T_{ij}^{kw} = A_i^k \; B_j^w \; H_i^k \; E_j^w \; \exp\left(-\beta^w c_{ij}\right)$$

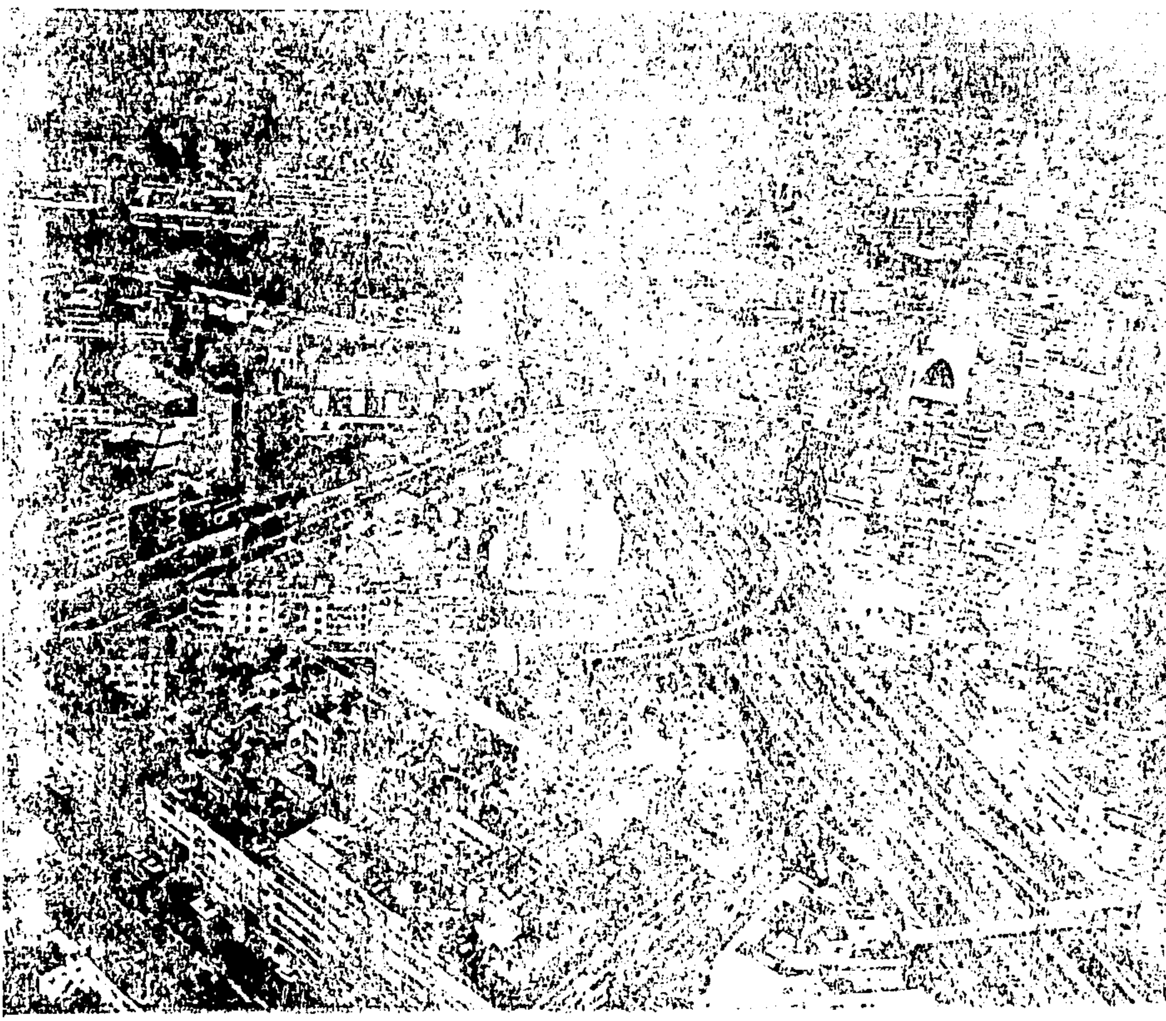
$$\exp\left\{-\mu^{wI} \; \frac{\Pi(w/I)}{r}\left[P_i^k - q^I\left(I-c'_{ij}\right)\right]^2\right\} \qquad (4.38)$$

donde β^w y μ^{wI} son multiplicadores Lagrangianos;

A_i^k y B_j^w están relacionadas a multiplicadores Lagrangianos y toman valores en la forma usual.

CAPITULO V.

CALIBRACION DE LOS MODELOS URBANOS DE INTERACCION ESPACIAL.



V. CALIBRACION DE LOS MODELOS URBANOS DE INTERACCION ESPACIAL.

La primera fase en la operación de un modelo de interacción espacial consiste en encontrar los valores de los parámetros del modelo que producen la mejor correspondencia entre las predicciones del modelo y la realidad observada, expresada mediante la base de datos. Esta bondad de ajuste puede medirse mediante diferentes estadísticas, tales como el coeficiente de correlación.

En general, puede decirse que la calibración de un modelo consiste en encontrar los valores de los parámetros que produzcan el mejor valor de alguna estadística, así como en la elección de la estadística misma.

METODOS EXISTENTES PARA LA CALIBRACION DE MODELOS.

Para calibrar los modelos de interacción espacial, el método que se utiliza comúnmente consiste en la transformación de las ecuaciones del modelo a una forma lineal. Esto puede lograrse de las maneras siguientes:

a. El modelo no restringido es intrínsecamente lineal y por tanto, puede utilizarse el análisis de regresión lineal para estimar los valores de sus parámetros.

   Como se sabe, la ecuación del modelo no restringido es la siguiente:

$$T_{ij} = GO_i D_j f(C_{ij})$$

   en la cual se puede utilizar la forma más conocida de la función de costo, ó sea:

$$f(c_{ij}) = d_{ij}^{-\lambda}$$

Así, la ecuación del modelo puede reescribirse como:

$$T_{ij} = GO_iD_jd_{ij}^{-\lambda} \qquad (5.1)$$

Al designar a $\left\{T_{ij}^{*}\right\}$ como la distribución de viajes observada, el problema estadístico consiste en encontrar el valor del parámetro λ asociado a esta distribución.

Manipulando la ecuación (5.1) y utilizando una transformación logarítmica, se deriva la siguiente ecuación lineal en sus parámetros:

$$\ln\left(\frac{T_{ij}^{*}}{O_iD_j}\right) = \ln G - \lambda \ln d_{ij} + \xi_{ij} \qquad (5.2)$$

donde ξ_{ij} representa el término de error.

El $\ln G$ y λ pueden calcularse mediante el análisis de regresión lineal bivariado. Para medir la bondad de ajuste pueden utilizar todas las estadísticas lineales conocidas.

b. Las ecuaciones de los demás modelos de la familia de modelos de interacción espacial, son intrínsecamente no lineales.

En este caso, se pueden estimar los valores de sus parámetros mediante el método de mínimos cuadrados, en el cual es necesario minimizar la función:

$$\Phi = \sum_i \sum_j \left\{T_{ij}^{*} - T_{ij}\right\}^2 \qquad (5.3)$$

Si en las ecuaciones de un modelo existen K parámetros λ_k, donde $k = 1, 2, \ldots, K$, la minimización de (5.3) produce K ecuaciones normales de la forma:

$$\sum_i \sum_j \left(T_{ij}^{*} - T_{ij}\right) \frac{\partial T_{ij}}{\partial \lambda_k} = 0 \qquad (5.4)$$

Generalmente, estas ecuaciones tienen que resolverse iterativamente, y las derivadas parciales incluídas en ellas deben evaluarse númericamente.

c. Linealización de las ecuaciones del modelo utilizando el Teorema de Taylor.

Este es un método alternativo al de los mínimos cuadrados descrito anteriormente.

Partiendo de las primeras aproximaciones a los parámetros, designadas por λ_k^m, las ecuaciones de interacción espacial se desarrollan en series de potencias, y posteriormente se expresan en términos de primer orden. Para lograr esto se procede de la manera siguiente: los términos de segundo orden y de ordenes mayores no se toman en cuenta, porque se supone que su contribución en el desarrollo es pequeña; obviamente, esta suposición es válida solamente cuando λ_k^m es una buena aproximación del mejor valor (desconocido) de λ_k. Así, se tiene que:

$$T_{ij}^{*} \simeq T_{ij}(m) + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial T_{ij}(m)}{\partial \lambda_k^m} \left(\lambda_k - \lambda_k^m \right) \tag{5.5}$$

Para mayor claridad, las variables de (5.5) puede redefinirse de la siguiente manera:

$$Y_{ij}(m) = T_{ij}^{*} - T_{ij}(m)$$

$$X_{ij}^{k}(m) = \frac{\partial T_{ij}(m)}{\partial \lambda_k^m}$$

$$a_k(m) = \lambda_k - \lambda_k^m$$

Al sustituir, de acuerdo a estas definiciones, (5.5) adquie re una forma lineal, la cual se puede rearreglar para obtener:

$$Y_{ij}(m) = \sum_k a_k(m)\ X_{ij}^k(m) + \xi_{ij} \quad . \tag{5.6}$$

donde ξ_{ij} es un término de error, el cual, se supone, tiene una distribución aleatoria.

Los parámetros $a_k(m)$ de (5.6) se pueden estimar mediante el método de mínimos cuadrados y los nuevos valores de λ_k se calculan a partir de:

$$\lambda_k^{m+1} = \lambda_k^m + a_k(m) \tag{5.7}$$

Así, λ_k^{m+1} sustituye a λ_k^m en la ecuación (5.5) y el proceso de iteración continúa hasta alcanzar un límite de convergencia.

d. Desarrollo de las ecuaciones del modelo utilizando el teorema de Maclaurin.

Para encontrar el parámetro λ en un modelo de distribución de viajes con un solo parámetro, se ha demostrado que las derivadas de tal modelo son relativamente fáciles de evaluar cuando λ es igual a cero.

Utilizando el teorema de Maclaurin, las ecuaciones de interacción espacial pueden desarrollarse en series de potencias alrededor del punto donde λ es igual a cero, así, el mejor valor de λ se calcula a partir de:

$$\bar{C}^* = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda d^r \bar{C}}{r!\, d\lambda^r} \right)_{\lambda=0} \quad . \tag{5.8}$$

donde $\bar{C}^*$ es la longitud media de viaje observada y $\bar{C}$

es la longitud media de viaje pronosticada.

Para resolver el polinomio de (5.8) se puede utilizar cualquier método estándar, como por ejemplo el método de Newton.

ESTIMACION ESTADISTICA EN LOS MODELOS URBANOS.

Para ilustrar algunos de los métodos de estimación estadística y sus aplicaciones en la modelación urbana, utilízaremos el modelo restringido en la producción para la localización del consumo de la población urbana. No obstante que la ejemplificación de los métodos se referirá específicamente a este modelo, también se indicará la forma en que su utilización puede ser generalizada para los demás modelos de interacción espacial y para otros modelos con diferentes estructuras paramétricas.

El modelo restringido en la producción para la localización del consumo queda establecido por las siguientes ecuaciones:

$$S_{ij} = A_i \; c_i \; P_i \; W_j^{\lambda_1} \; d_{ij}^{-\lambda_2} \tag{5.9}$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j W_j^{\lambda_1} \; d_{ij}^{-\lambda_2}} \tag{5.10}$$

donde:

S_{ij} = Flujo del gasto en consumo entre los residentes de la zona i y los comercios de la zona j.

P_i = Población de la zona i.

c_i = Gasto promedio en consumo percápita en la zona i.

W_j = Medida de la atracción comercial de la zona j.

d_{ij} = Distancia entre la zona i y la zona j.

λ_1, λ_2 = Parámetro del modelo.

El modelo está sujeto a la siguiente restricción sobre el gasto en consumo:

$$\sum_j S_{ij} = c_i P_i \tag{5.11}$$

Las ventas de los comercios en la zona j se calculan a partir de

$$S_j = \sum_i S_{ij} \tag{5.12}$$

Además, es obvio que el gasto total en consumo de todo el sistema urbano debe ser igual a las ventas totales de todos los comercios, o sea:

$$\sum_i \sum_j S_{ij} = \sum_j S_j = \sum_i c_i P_i$$

Para itnroduçir el concepto de máxima verosimilitud como un instrumento para estimar estadísticas relevantes para los modelos de interacción espacial, es necesario convertir a una forma probabilística el modelo dado por (5.9) y (5.10). Luego, si se hacen las siguientes definiciones:

$$C_i = c_i P_i$$

y

$$C = \sum_i C_i,$$

el modelo de localización del consumo puede escribirse como:

$$S_{ij} = CP_{ij}, \tag{5.13}$$

donde además de la notación anterior se tiene:

C = Gasto total en consumo del sistema urbano.

C_i = Gasto to-al en consumo de la zona i.

p_{ij} = Probabilidad de que un residente de la zona i consuma en la zona j.

Esta probabilidad está definida por la ecuación:

$$p_{ij} = p_i \, \Lambda_i \, W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2} \tag{5.14}$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{\sum_j W_j^{\lambda_1} \, d_{ij}^{-\lambda_2}} \tag{5.15}$$

$$p_i = \frac{C_i}{\sum_i C_i} \tag{5.16}$$

Si se sustituyen (5.14), (5.15) y (5.16) por sus equivalentes en (5.13), puede observarse que esta última toma una forma idéntica al modelo restringido en la producción para la localización del consumo dado por (5.9).

La probabilidad de interacción p_{ij} se puede expresar también mediante el producto de la probabilidad condicional $p(j/i)$ y la probabilidad marginal $p(i)$:

$$p_{ij} = p\,(j/i)\; p(i) \tag{5.17}$$

La probabilidad condicional $p(j/i)$ es la probabilidad de que un residente consuma en la zona j, dado que vive en la zona i. La probabilidad marginal $p(i)$ es la probabilidad de que un consumidor viva en la zona i. De acuerdo a (5.14), se considera que estas probabilidades toman la forma siguiente:

$$p(j/i) = A_i \, W_j^{\lambda_1} \, d_{ij}^{-\lambda_2} \tag{5.18}$$

$$p(i) = p_i \tag{5.19}$$

La probabilidad de los i, j eventos o viajes observados, está definida como:

$$s_{ij} = \frac{S^*_{ij}}{\sum_i \sum_j S^*_{ij}} = \frac{S^*_{ij}}{S} \tag{5.20}$$

donde se observa que $S = C$.

El principio de máxima verosimilitud puede ser utilizado para derivar estimadores relevantes de los parámetros de la formulación de $\{p_{ij}\}$ a partir de las proporciones de las frecuencias observadas $\{s_{ij}\}$.

EL PRINCIPIO DE MAXIMA VEROSIMILITUD.

La función verosimilitud L para las S^*_{ij} observaciones independientes, es equivalente a la distribución multinomial:

$$L = \prod_i \prod_j p_{ij}^{S^*_{ij}} . \tag{5.21}$$

De acuerdo con el principio de máxima verosimilitud, los valores de los parámetros de las p_{ij} que maximizan a L (o equivalentemente a lnL) sujetos a cualquier conjunto de restricciones, son sus mejores estimaciones. Es importante notar que en esta forma, lnL es equivalente al concepto de entropía utilizado en la mecánica estadística, y por lo tanto, el problema aquí expuesto es semejante al de la maximización de la entropía. Sin embargo, para encontrar estos parámetros óptimos es necesario asegurar que las $p(j/i)$ y las P(i) obedezcan las leyes de probabilidad establecidas en las ecuaciones siguientes:

$$\sum_j p(j/i) = 1, \tag{5.22}$$

$$\sum_i p(i) = 1 . \tag{5.23}$$

Estas restricciones pueden incorporarse mediante la maximización de la forma Lagrangiana siguiente:

$$L^* = \ln L - \sum_i \mu_i \left[\sum_j p(j/i) - 1\right] - \gamma \left[\sum_i p(i) - 1\right] \tag{5.24}$$

donde μ_i, $i = 1, 2, \ldots, I$, y γ son multiplicadores de Lagrange. Utilizando las ecuaciones (5.17), (5.18) y (5.19), podemos escribir la ecuación (5.20) en forma completa de la manera siguiente:

$$L^* = \sum_i \sum_j S^*_{ij} \left\{\ln A_i + \lambda_1 \ln W_j - \lambda_2 \ln d_{ij} + \ln p_i\right\}$$
$$- \sum_i \mu_i \left[\sum_j (A_i W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2}) - 1\right] - \gamma \left(\sum_i p_i - 1\right) \tag{5.25}$$

Para encontrar el máximo de L^* con respecto a A_i, p_i, λ_1 y λ_2, es necesario resolver las siguientes ecuaciones, las cuáles se obtienen al diferenciar (5.25) y haciendo las derivadas parciales iguales a cero. Estas ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{\partial L^*}{\partial A_i} = \frac{\sum_j S^*_{ij}}{A_i} - \mu_i \sum_j W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2} = 0 \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_1} = \sum_i \sum_j S^*_{ij} \ln W_j - \sum_i \mu_i \left(\sum_j A_i W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2} \ln W_j \right) = 0 \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \lambda_2} = \sum_i \sum_j S^*_{ij} \ln d_{ij} + \sum_i \mu_i \left(\sum A_i W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2} \ln d_{ij} \right) = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial P_i} = \frac{\sum_j S^*_{ij}}{P_i} - \gamma = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mu_i} = \sum_j A_i W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2} - 1 = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \gamma} = \sum_i P_i - 1 = 0 \quad (5.31)$$

Rearreglando (5.30) y sustituyendo en (5.26), el multiplica dor de Lagrange μ_i se calcula como:

$$\mu_i = \sum_j S^*_{ij} \quad (5.32)$$

y de (5.30) obtenemos:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j W_j^{\lambda_1} d_{ij}^{-\lambda_2}} \quad (5.33)$$

Las ecuaciones (5.29) y (5.31) se puede rearreglar para dar:

$$\delta = \sum_i \sum_j S^*_{ij} = S \quad (5.34)$$

y por lo tanto:

$$P_i = \frac{\sum_j S^*_{ij}}{\sum_i \sum_j S^*_{ij}} = \sum_j s_{ij} \quad (5.35)$$

Entonces, (5.32) y (5.35) dan

$$\mu_i = P_i \sum_i \sum_j S^*_{ij} = P_i\, S \qquad (5.36)$$

Sustituyendo (5.36) en (5.28) y rearreglando obtenemos:

$$\left\{\sum_i \sum_j P_i\, A_i\, W_j^{\lambda_1}\, d_{ij}^{-\lambda_2}\, \ln d_{ij}\right\} \sum_i \sum_j S^*_{ij} = \sum_i \sum_j S^*_{ij}\, \ln d_{ij} \qquad (5.37)$$

De manera análoga, sustituyendo (5.36) en (5.27) resulta:

$$\left\{\sum_i \sum_j P_i\, A_i\, W_j^{\lambda_1}\, d_{ij}^{-\lambda_2}\, \ln W_j\right\} \sum_i \sum_j S^*_{ij} = \sum_i \sum_j S^*_{ij}\, \ln W_j \qquad (5.38)$$

Ahora, es posible reunir las cuatro ecuaciones relevantes de este análisis asociadas a λ_1, λ_2, A_i y P_i. A continuación, se reinterpretan las ecuaciones (5.37) y (5.38) y se reestablecen las ecuaciones (5.33) y (5.35). Por lo tanto, las mejores estimaciones de los parámetros del modelo pueden encontrarse al resolver las ecuaciones siguientes:

$$\sum_i \sum_j P_{ij}\, \ln d_{ij} = \sum_i \sum_j s_{ij}\, \ln d_{ij} \qquad (5.39)$$

$$\sum_i \sum_j P_{ij}\, \ln W_j = \sum_i \sum_j s_{ij}\, \ln W_j \qquad (5.40)$$

$$A_i = \frac{1}{\sum_j W_j^{\lambda_1}\, d_{ij}^{-\lambda_2}} \qquad \left[(5.33)\right]$$

$$P_i = \sum_j s_{ij} \qquad \left[(5.35)\right]$$

De acuerdo con el análisis anterior, se concluye el principio fundamental para la calibración de los modelos urbanos, basándose en el método de máxima verosimilitud. Este principio es tablece que cada uno de los parámetros del modelo está asociado a una ecuación particular. Así, el problema de la calibración de un modelo se reduce a la solución de tantas ecuaciones como incógnitas (parámetros) se tengan. Consecuentemente, la calibración de un modelo urbano, puede lograrse solamente cuando existan tantas estadísticas a ser optimizadas como parámetros se tengan que encontrar.

SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE MAXIMA VEROSIMILITUD.

De las cuatro ecuaciones de estimación dadas anteriormente, (5.33) y (5.35) pueden calcularse directamente con los datos exógenos y cualquier conjunto de valores de los parámetros. No obstante, la solución de (5.39) y (5.40) requiere encontrar los valores de λ_1 y λ_2 que satisfagan a esas ecuaciones.

A continuación se describirán algunos métodos para calcular esos valores de los parámetros. Para facilitar la comprensión de los métodos, las ecuaciones (5.39) y (5.40) pueden reescribirse de la manera siguiente:

$$\min F_1(\lambda_1, \lambda_2) = \min \left| \sum_i \sum_j p_{ij} \ln d_{ij} - \sum_i \sum_j s_{ij} \ln d_{ij} \right| = 0 \tag{5.41}$$

$$\min F_2(\lambda_1, \lambda_2) = \min \left| \sum_i \sum_j p_{ij} \ln W_j - \sum_i \sum_j s_{ij} \ln W_j \right| = 0 \tag{5.42}$$

Algunos métodos utilizan una estadística basada en una combinación de (5.41) y (5.42):

$$\min \Lambda \ (\lambda_1, \lambda_2) = \min \left[F_1(\lambda_1, \lambda_2) + F_2 \ (\lambda_1, \lambda_2) \right] = 0 \tag{5.43}$$

La ecuación (5.41) se refiere al costo medio por viajar expresado en la ecuación (5.39) y la ecuación (5.42) es otra forma de la (5.40) que puede considerarse como la ecuación del beneficio medio por viajar. Los valores mínimos globales de (5.41) y (5.42), y por lo tanto de (5.43), ocurren solamente cuando las estimaciones de los costos y beneficios medios por viajar son iguales a los valores observados.

Las ecuaciones (5.41), (5.42) y (5.43) son intrínsecamente no lineales y los métodos para su solución pueden dividirse en dos clases:

A. Métodos numéricos.
B. Procedimientos de búsqueda.

Existen varios métodos numéricos para la solución de ecuaciones no lineales; en este trabajo se describirán solamente dos, el primero está basado en iteraciones simples y el segundo es una extensión del método de Newton-Raphson.

Los procedimientos de búsqueda se enfocan generalmente a problemas de optimización no restringida y usualmente, se distingue entre procedimientos de busqueda directa y los de búsqueda mediante el gradiente.

Los procedimientos de búsqueda directa no requieren la evaluación de las derivadas de la función objetivo; pero los de búsqueda mediante el gradiente utilizan estas derivadas para guiar la dirección de la búsqueda. En este trabajo se analizarán solamente los procedimientos de búsqueda directa, porque son los más eficientes cuando las derivadas se evalúan mediante métodos numéricos y no analíticamente como es el caso.

Los procedimientos de búsqueda directa se clasifican en tres tipos:

a. Tabulares.
b. Secuenciales.
c. Cuadráticos.

Los procedimientos tabulares reducen progresivamente la región de búsqueda, como por ejemplo la búsqueda mediante los números de Fibonacci y la sección áurea.

Los procedimientos secuenciales analizan la función objetivo utilizando diseños factoriales que son expandidos ó contraídos al ir progresando la búsqueda. Un ejemplo de estos es la búsqueda mediante el método Simplex.

Finalmente, los procedimientos cuadráticos dependen de un proceso para encontrar el mínimo de una cuadrática en un número especificado de iteraciones; como ejemplo de estos se tiene el método de Powell.

A continuación se describirán más ampliamente cada uno de estos métodos para la solución de las ecuaciones de máxima verosimilitud en los modelos de interacción espacial.

A. METODOS NUMERICOS

1. Iteracciones de primer orden.

Para resolver las ecuaciones (5.41) y (5.42) se recurre a un proceso de primer orden basado en iteraciones simples. En cada iteración m, el beneficio medio por viajar $\bar{W}^m$ y el costo medio por viajar $\bar{C}^m$ se calculan utilizando λ_1^m y λ_2^m respectivamente.

$$\bar{W}^m = \sum_i \sum_j \bar{p}_{ij}\ (m)\ \ln W_j \tag{5.44}$$

$$\bar{C}^m = \sum_i \sum_j p_{ij}\ (m)\ \ln d_{ij} \tag{5.45}$$

A continuación, se calculan los nuevos valores de los parámetros λ_1^{m+1} y λ_2^{m+1}. Este cálculo se hace mediante la ponderación de los valores previos de acuerdo a los cocientes dados en las ecuaciones siguientes:

$$\lambda_1^{m+1} = \lambda_1^m \frac{\bar{W}^*}{\bar{W}^m} \tag{5.46}$$

$$\lambda_2^{m+1} = \lambda_2^m \frac{\bar{C}^m}{\bar{C}^*} \tag{5.47}$$

Utilizando estos valores, se recalculan las ecuaciones (5.44) y (5.45); el proceso continúa de esta manera hasta que se alcanza un límite de convergencia.

Este método converge de modo extremadamente lento y por lo tanto, es costosa su aplicación; sin embargo, puede utilizarse para tener buenas aproximaciones iniciales de λ_1 y λ_2, que pueden servir de insumo para otro método.

2. Método de Newton-Raphson

El método aquí descrito está basado en una extensión del método de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones con dos o más incógnitas. En este método se calculan los mejores valores de λ_1 y λ_2, utilizando buenas aproximaciones iniciales λ_1^m y λ_2^m.

$$\lambda_1 = \lambda_1^m + \varepsilon_1 \tag{5.48}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^m + \varepsilon_2 \tag{5.49}$$

donde ε_1 y ε_2 son las diferencias entre los mejores valores y los valores aproximados. Para encontrar ε_1 y ε_2, se uti liza el teorema de Taylor para desarrollar las funciones dadas en (5.41) y (5.42) alrededor de λ_1^m y λ_2^m. Por ejemplo, el desarrollo de la función dada en (5.41) es:

$$F_1(\lambda_1 + \varepsilon_1, \lambda_2 + \varepsilon_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}^{*}D^r F_1(\lambda_1^m, \lambda_2^m) \tag{5.50}$$

donde:

$$ {}^{*}D^r = \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\right)^r_{\lambda_k = \lambda_k^m} \tag{5.51}$$

Si los términos ε_1 y ε_2 de (5.51) son pequeños (significando esto que λ_1^m y λ_2^m son buenas aproximaciones iniciales), entonces, los valores aproximados de la función se obtienen al truncar (5.50), dejando solamente los términos de primer orden.

De esta manera, desarrolladno (5.41) y (5.42) alderredor de los puntos λ_1^m, λ_2^m y truncando, resultan:

$$F_1\left(\lambda_1^m + \varepsilon_1, \lambda_2^m + \varepsilon_2\right) \simeq F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right) + \varepsilon_1 \frac{\partial F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_1^m} + \varepsilon_2 \frac{\partial F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_2^m} \tag{5.52}$$

$$F_2\left(\lambda_1^m + \varepsilon_1, \lambda_2^m + \varepsilon_2\right) \simeq F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right) + \varepsilon_1 \frac{\partial F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_1^m} + \varepsilon_2 \frac{\partial F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_2^m} \tag{5.53}$$

Rearreglando (5.52) y (5.53) se obtienen dos ecuaciones linea les con dos incógnitas, las cuáles pueden calcularse mediante cualquier método estándar.

Para mayor claridad, la estructura de este sistema de ecuaciones se pone en notación matricial:

$$
-\begin{bmatrix} F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right) \\ \\ F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_1^m} & \dfrac{\partial F_1\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_2^m} \\ \\ \dfrac{\partial F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_1^m} & \dfrac{\partial F_2\left(\lambda_1^m, \lambda_2^m\right)}{\partial \lambda_2^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{5.54}
$$

La ecuación matricial (5.54) en el caso de K parámetros es:

$$
- F = \Delta\varepsilon \tag{5.55}
$$

donde F y ε son vectores columna de $1 \times K$ y Δ es una matríz de $K \times K$.

Cuando el determinante de la matriz Δ es diferente de cero, entonces la solución de (5.55) esta dada por:

$$
\varepsilon = - \Delta^{-1} F \tag{5.56}
$$

A continuación, se calculan los nuevos valores de los parámetros de la manera siguiente:

$$
\lambda_1^{m+1} = \lambda_1^m + \varepsilon_1 \tag{5.57}
$$

$$
\lambda_2^{m+1} = \lambda_2^m + \varepsilon_2 \tag{5.58}
$$

Estos valores sustituyen a los utilizados previamente en

(5.55) y entonces, las ecuaciones (5.55), (5.56), (5.57) y (5.58) son reiteradas hasta alcanzar un límite de convergencia.

Este método es más eficiente que el anterior, pero necesita de buenas aproximaciones iniciales para lograr convergencia. Además, debido a que las derivadas en (5.54) son evaluadas numéricamente, la magnitud de los incrementos utilizados para determinar el valor de $\partial \lambda_1$ y de $\partial \lambda_2$, afectan también la convergencia de este método.

B. PROCEDIMIENTOS DE BUSQUEDA.

1. Búsqueda directa utilizando los números de Fibonacci y la sección áurea.

El procedimiento de búsqueda basado en las series de enteros positivos conocidos como números de Fibonacci, es un método de optimización para encontrar la localización del valor máximo o mínimo de una función, donde la información acerca de la forma de esa función se va generando paso a paso.

Se considera una función como la indicada en la figura 5.1. Con el propósito de facilitar la explicación, supongamos que esta función representa el valor del coeficiente de correlación para valores diferentes del parámetro λ de las ecuaciones del siguiente modelo:

$$S_{ij} = A_i \; c_i \; P_i \; W_j \; d_{ij}^{-\lambda}$$

donde:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j W_j \; d_{ij}^{-\lambda}}$$

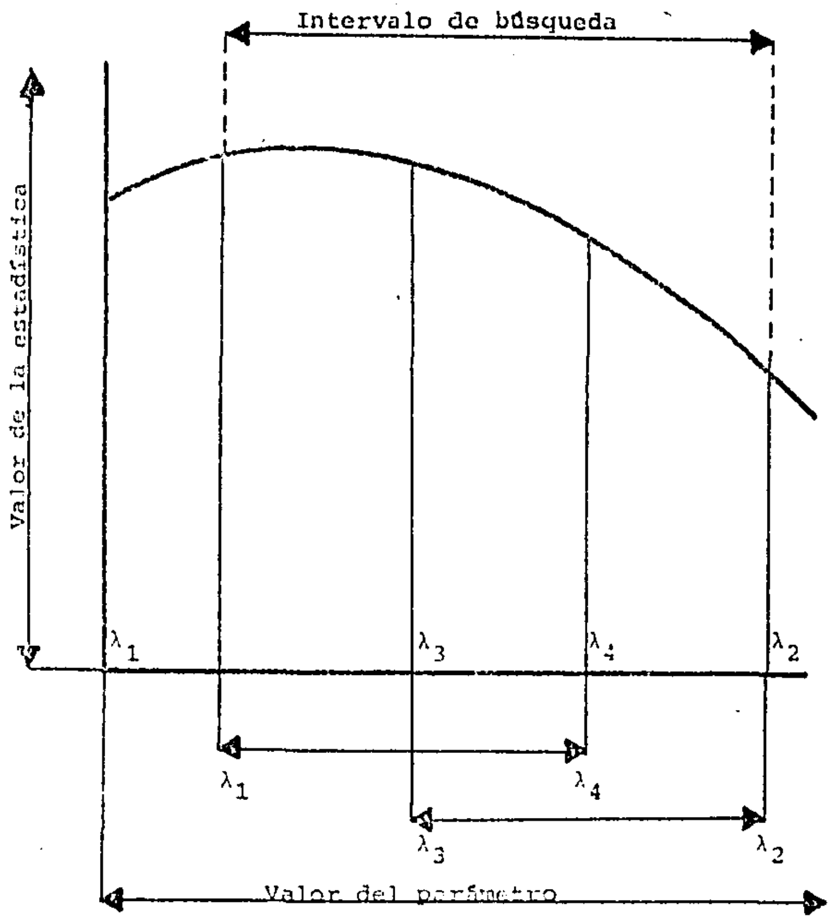


Figura 5.1

Primeramente, se supone que el valor máximo de la función está localizado en un intervalo dado, en este caso $[\lambda^1, \lambda^2]$. A continuación, se escogen dos evaluaciones adicionales de la función, tales que:

$$\lambda^1 < \lambda^3, < \lambda^4 < \lambda^2$$

Entonces, si $f(\lambda^3) \geq f(\lambda^4)$, el máximo se encuentra en el intervalo $[\lambda^1, \lambda^4]$, pero si $f(\lambda^3) \leq f(\lambda^4)$, el máximo se encuentra en el intervalo $[\lambda^2, \lambda^3]$. Si se hacen más eva luaciones de la función en el intervalo resultante, obviamente se hará cada vez más pequeño el intervalo de búsqueda.

Una estrategia óptima para escoger la localización de λ^3 y λ^4 se basa en los números de Fibonacci. Estos números están definidos por la sucesión

$$\left.\begin{aligned} U_o &= U_1 = 1, \\ U_n &= U_{n-1} + U_{n-2}, \; n \geq 2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.59)$$

Si se especifica un númeto total N de evaluaciones de la función, entonces, en la k-ésima iteración el rango de valores del parámetro se reduce al intervalo $[\lambda^{1,k}, \lambda^{2,k}]$, dentro del cual se escogen $\lambda^{3,k}$ y $\lambda^{4,k}$ para efectuar otras dos evaluaciones adicionales de la función, de modo que:

$$\lambda^{3,k} = \frac{U_{N-1-k}}{U_{N+1-k}} \left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k}\right) + \lambda^{1,k} \qquad (5.60)$$

$$\lambda^{4,k} = \frac{U_{N-k}}{U_{N+1-k}} \left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k}\right) + \lambda^{1,k} \qquad (5.61)$$

Utilizando (5.60) y (5.61), las evaluaciones finales de la función dadas en $\lambda^{3,N-1}$ y $\lambda^{4,N-1}$ coinciden en el punto medio del intervalo $[\lambda^{1,N-1}, \lambda^{2,N-1}]$. Por lo tanto, uno de los nuevos parámetros digamos $\lambda^{3,N-1}$ se desplaza con relación a $\lambda^{4,N-1}$ en un número pequeño ε, entonces:

$$\lambda^{3,N-1} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \left(\lambda^{2,N-1} - \lambda^{1,N-1}\right) + \lambda^{1,N-1} \qquad (5.62)$$

$$\lambda^{4,N-1} = \frac{1}{2} \left(\lambda^{2,N-1} - \lambda^{1,N-1}\right) + \lambda^{1,N-1} \qquad (5.63)$$

Después de N evaluaciones de la función, el intervalo res tante ξ^N es a lo sumo:

$$\xi^N = \frac{1}{U_N}\left(\lambda^{2,1} - \lambda^{1,1}\right) + c \qquad (5.64)$$

por lo tanto, para cualquier reducción del intervalo de búsqueda, U_N se determina utilizando una tabla de Fibonacci.

En el método aquí descrito, se necesitan dos evaluaciones de la función para iniciar el proceso, pero después de esto, se requiere solamente de una evaluación adicional en cada iteración. Por ejemplo, si en la figura 5.1, el máximo se encuentra en el intevalo $\left[\lambda^{3,k},\ \lambda^{4,k}\right]$ en la k-ésima iteración, entonces, en la iteración siguiente se calcula $\lambda^{4,k+1}$ con la fórmula:

$$\lambda^{4,k+1} = \frac{U_{N-(k+1)}}{U_{N+1-(k+1)}}\left(\lambda^{4,k} - \lambda^{1,k}\right) + \lambda^{1,k} \qquad (5.65)$$

y sustituyendo en esta ecuación a $\lambda^{4,k}$ por su valor dado en (5.61), resulta:

$$\lambda^{4,k+1} = \frac{U_{N-(k+1)}}{U_{N+1-(k+1)}}\left[\frac{U_{N-k}}{U_{N+1-k}}\left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k}\right) + \lambda^{1,k} - \lambda^{1,k}\right] + \lambda^{1,k}$$

$$= \frac{U_{N-1-k}}{U_{N+1-k}}\left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k}\right) + \lambda^{1,k} = \lambda^{3,k} \qquad (5.66)$$

El resultado de esta última ecuación se debe a las propiedades de simetría del método. Sin embargo, existe un problema al utilizarlo; en muchos casos, no pueden efectuarse las N evaluaciones de la función debido a que es imposible determinar el intervalo final requerido. POr ejemplo, el proceso de búsqueda puede detenerse cuando la diferencia entre los valores de la bondad de ajuste calculados en iteraciones sucesi vas cae dentro de un cierto límite.

Para tratar estos casos, se generaliza este método y se formula la búsqueda llamada búsqueda mediante la sección áurea.

Búsqueda mediante la sección áurea.

Los números de Fibonacci pueden calcularse utilizando la ecuación de Binet:

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \tag{5.67}$$

si utilizamos este cálculo en las ecuaciones (5.60) y (5.61), los cocientes de los números de Fibonacci son aproximadamente constantes para cualquier n grande. Haciendo $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, estos cocientes estan dados por:

$$\frac{U_{n-1}}{U_{n+1}} \simeq \frac{1}{\phi^2} = \frac{\phi - 1}{\phi} \tag{5.68}$$

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} \simeq \frac{1}{\phi} \tag{5.69}$$

Estas ecuaciones proporcionan un cálculo aproximado de los números de Fibonacci.

La ecuación (5.68) es aproximadamente igual a 0.382 y (5.69) es aproximadamente igual a 0.618. Cuando N no se conoce, se pueden utilizar estos valores en (5.60) y (5.61) obteniendose:

$$\lambda^{3,k} = 0.382 \left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k} \right) + \lambda^{1,k} \tag{5.70}$$

$$\lambda^{4,k} = 0.618 \left(\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k} \right) + \lambda^{1,k} \tag{5.71}$$

Este esquema computacional se conoce como la búsqueda mediante la sección áurea. Esta sección es una proporción que fue utilizada ampliamente en el arte y la arquitectura griega y se obtiene al dividir un segmento de línea en dos partes desiguales, en tal forma que el cociente del segmento total y la parte mayor es igual al cociente de la parte mayor y la parte menor.

Esto puede demostrarse dividiendo el intervalo de búsqueda de la figura 5.1, en tal forma que:

$$\frac{\lambda^{2,k} - \lambda^{1,k}}{\lambda^{4,k} - \lambda^{1,k}} = \frac{\lambda^{4,k} - \lambda^{1,k}}{\lambda^{2,k} - \lambda^{4,k}} = \phi \tag{5.72}$$

Esta ecuación puede verificarse fácilmente si a partir de (5.68) se hacen las sustituciones adecuadas en (5.71). ϕ se conoce como el número de la sección áurea.

Este procedimiento de búsqueda es aproximadamente un 13% más lento que el de la búsqueda mediante los números de Fibonacci, pero en la práctica, es más fácil de programar. Además, si se utiliza con propósitos experimentales, es más flexible, ya que si se requiere, el número de evaluaciones de la función se puede encontrar de antemano. Así, después de k iteraciones, el intervalo de búsqueda se reduce a:

$$\lambda^{2,k+1} - \lambda^{1,k+1} = (0.618)^{k} \left(\lambda^{1,2} - \lambda^{1,1}\right) \tag{5.73}$$

Si se desea reducir el intervalo a un tamaño específico, es necesario determinar el valor de k. Esto se logra al transformar (5.73) en:

$$k = \ln \left(\frac{\lambda^{2,k+1} - \lambda^{1,k+1}}{\lambda^{2,1} - \lambda^{1,1}}\right) / \ln\ (0.618) \tag{5.74}$$

Para aplicar este método en la calibración de modelos con K

parámetros, es necesario formular el procedimiento de búsqueda en términos multivariados, suponiendo que se requiere encontrar el mínimo de una función

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_K)$$

variando λ_k y manteniendo constantes todos los demás parámetros.

Utilizando los números de Fibonacci definidos en (5.59) y un total de N evaluaciones de la función, el intervalo de búsqueda en la m-ésima iteración queda reducido a $\left[\lambda_k^{1,m}, \lambda_k^{2,m}\right]$.

Así, los otros dos valores de los parámetros $\lambda_k^{3,m}$ y $\lambda_k^{4,m}$, se escogen en forma tal que:

$$\lambda_k^{3,m} = \frac{U_{N-1-m}}{U_{N+1-m}} \left(\lambda_k^{2,m} - \lambda_k^{1,m}\right) + \lambda_k^{1,m} \qquad (5.75)$$

$$\lambda_k^{4,m} = \frac{U_{N-m}}{U_{N+1-m}} \left(\lambda_k^{2,m} - \lambda_k^{1,m}\right) + \lambda_k^{1,m} \qquad (5.76)$$

donde k indica el parámetro a optimizar y m el número de la iteración. Las ecuaciones (5.75) y (5.76) son equivalentes a (5.60) y (5.61).

La generalización de este método mediante la utilización de la sección áurea, reemplaza los cocientes de los números de Fibonacci en (5.75) y (5.76) por las fracciones 0.382 y 0.618 respectivamente.

2. Búsqueda secuencial utilizando el método Simplex.

El método Simplex involucra la evaluación de la función objetivo en $K+1$ puntos del espacio de K parámetros. Estos puntos están espaciados regularmente y forman los vértices de un simplex regular. Este método cambia un punto del simplex en cada iteración, acercándose cada vez más al valor óptimo de la función. A continuación analizaremos una modificación que da mayor flexibilidad en la construcción del simplex.

En un problema con K valores del parámetro λ_k, $k = 1, 2, \ldots, K$, el simplex se forma mediante la evaluación de la función objetivo en $K+1$ puntos designados por $\Pi_1, \ldots, \Pi_{K+1}$, donde las coordenadas de estos puntos son valores del parámetro.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los puntos se designan por $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{K+1}$, y los índices h, v y l se refieren a los valores de la función, más alto, segundo más alto y más bajo, respectivamente. En seguida, describiremos el método con una iteración típica para el caso de dos parámetros λ_1 y λ_2, cuando la búsqueda es para encontrar el valor mínimo de la función. Para esto, utilizaremos una notación matricial explícita.

Primeramente, se calcula el centroide de todos los vértices $\bar{\lambda}$, a partir del simplex existente. Entonces, se escoge el punto donde se encuentra el valor más alto de la función, λ^h, y se refleja a través de $\bar{\lambda}$ para formar un nuevo punto λ^*. Esta operación de reflexión se describe mediante la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1+\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^h \\ \lambda_2^h \end{bmatrix} \tag{5.77}$$

donde ω es una constante conocida como coeficiente de reflexión.

Si $\Lambda_k^v \geq \Lambda_k^* \geq \Lambda_k^l$, entonces λ^* reemplaza a λ^h y se convierte en un nuevo punto del simplex. Pero, si $\Lambda_k^* \leq \Lambda_k^l$, entonces se deduce que la dirección con la que se efectuó la reflexión es prometedora, y por lo tanto, se obtiene un nuevo λ^{**} mediante la expansión

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{**} \\ \lambda_2^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^h \\ \lambda_2^h \end{bmatrix} \tag{5.78}$$

donde ρ es una constante conocida como coeficiente de expansión.

Si $\Lambda_{k_*}^{**} < \Lambda_k^L$, entonces λ^{**} reemplaza a λ^h; de otra forma, λ^* reemplaza a λ^h y se lleva a cabo una nueva reflexión en la iteración siguiente.

En el caso donde $\Lambda_k^* > \Lambda_k^v$, λ^* reemplaza a λ^h si se cumple que $\Lambda_k^* < \Lambda_k^v$.

Entonces, se hace necesaria una operación de contracción, en la cual λ^h se convierte en

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{**} \\ \lambda_2^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^h \\ \lambda_2^h \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

donde κ es una constante conocida como coeficiente de contracción.

Así, λ^{**} reemplaza a λ^h a menos que $\Lambda_k^{**} > \min\left(\Lambda_k^*, \Lambda_k^h\right)$, cuando todos los puntos Π han sido reemplazados por $\left(\Pi_k + \Pi_1\right)/2$.

Debido a las tres operaciones explorativas, reflexión, expansión y contracción, el método tiene mayor capacidad que otros métodos para evitar óptimos locales. Además, converge a la misma posición, partiendo de puntos iniciales diferentes.

3. Búsqueda cuadrática utilizando direcciones conjugadas.

Este método, como el de la búsqueda mediante los números de Fibonacci, está basado en la optimización de una función unimodal univariada. Esta optimización requiere primeramente, ajustar una cuadrática a tres puntos y posteriormente, encontrar el valor máximo ó mínimo de la función ajustada. Este procedimiento se reitera hasta alcanzar un límite de convergencia.

Considerando el caso de la función dada en (5.43) y manteniendo constantes $K-1$ parámetros, el valor óptimo de λ_k en la dirección η_k, se calcula a partir de:

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\,\frac{\left[\left(\lambda_k^2\right)^2-\left(\lambda_k^3\right)^2\right]\Lambda_k^1 + \left[\left(\lambda_k^3\right)^2-\left(\lambda_k^1\right)^2\right]\Lambda_k^2 + \left[\left(\lambda_k^1\right)^2-\left(\lambda_k^2\right)^2\right]\Lambda_k^3}{\left(\lambda_k^2-\lambda_k^3\right)\Lambda_k^1 + \left(\lambda_k^3-\lambda_k^1\right)\Lambda_k^2 + \left(\lambda_k^1-\lambda_k^2\right)\Lambda_k^3} \qquad (5.80)$$

Los tres valores más bajos de la función obtenidos a partir de λ_k, λ_k^1, λ_k^2 y λ_k^3, forman la base para un nuevo mínimo que se mejora progresivamente mediante la aplicación repetida de (5.80).

La búsqueda cuadrática mediante direcciones conjugadas es muy eficiente debido a que utiliza el concepto de convergencia cuadrática, la cual asegura la minimización de una función cuadrática en un número especificado de iteraciones.

Se ha demostrado que si las direcciones para la búsqueda, designadas por η_k, $k = 1, 2, \ldots, K$, donde η_k es un vector dirección de $1xK$, se escogen en tal forma que estén conjugadas una con respecto de la otra, entonces es posible encontrar el mínimo de una función cuadrática, buscando solamente una vez a lo largo de cada dirección η_k.

A continuación se utilizará este método para buscar el mínimo de la función con dos parámetros dada en (5.43).

En la m-ésima iteración, la búsqueda comienza a lo largo de dos direcciones linealmente independientes designadas por η_1^m y η_2^m. Utilizando la aproximación previa al mínimo, Π_o, se encuentra secuencialmente el valor mínimo de (5.43) en cada una de esas direcciones; la magnitud del progreso total obtenido θ, se calcula a partir de:

$$\theta = \Pi_2 - \Pi_o \tag{5.81}$$

Entonces, se efectúa una búsqueda a lo largo de θ y se calcula un nuevo mínimo Π_o.

A continuación, se establece un nuevo conjunto de vectores dirección para la iteración m+1

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1^{m+1} = \eta_2^m \\ \\ \eta_2^{m+1} \quad \theta \end{array}\right\} \tag{5.82}$$

En este método se debe incorporar un procedimiento para evitar que exista dependencia lineal entre los vectores dirección, la cual puede surgir si no se obtiene progreso entre iteraciones sucesivas. Si se tienen malas aproximaciones iniciales, el método converge lentamente.

Además, si se comienza a partir de puntos iniciales extremos, converge a un óptimo local.

MODELACION DE LA DISTRIBUCION DE VIAJES.

Los métodos descritos anteriormente, pueden aplicarse también al modelo de interacción espacial para la distribución de viajes, restringido en la producción (orígen) y la atracción (destino).

Así, las restricciones están dadas por:

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{5.83}$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \tag{5.84}$$

La ecuación del modelo, utilizando una función generalizada del costo por viajar, es:

$$T_{ij} = A_i \; O_i \; B_j \; D_j \; f(c_{ij}) \tag{5.85}$$

donde los factores de balanceo A_i y B_j, que aseguran el cumplimiento de (5.83) y (5.84), están dados por:

$$A_i = \frac{1}{\sum_j B_j \; D_j \; f(c_{ij})} \tag{5.86}$$

$$B_j = \frac{1}{\sum_j A_i \; O_i \; f(c_{ij})} \tag{5.87}$$

Para establecer pruebas estadísticas apropiadas para este modelo, utilizando el método de máxima verosimilitud, es necesario formular probabilísticamente la ecuación (5.85), así:

$$T_{ij} = T p_{ij} \tag{5.88}$$

donde p_{ij} es la probabilidad de vivir en la zona i y trabajar en la zona j. Esta probabilidad está definida como:

$$p_{ij} = a_i\ b_j\ o_i\ d_j\ f(c_{ij}) \tag{5.89}$$

El modelo así formulado, tiene las siguientes restricciones:

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \tag{5.90}$$

$$\sum_j p_{ij} = o_i \tag{5.91}$$

$$\sum_i p_{ij} = d_j \tag{5.92}$$

o_i y d_j son probabilidades marginales cuyos valores se calculan a partir de:

$$\sum_j T^{*}_{ij}/T \quad y \quad \sum_i T^{*}_{ij}.$$

ESTIMACIONES DE MAXIMA VEROSIMILITUD PARA EL MODELO DE DISTRIBUCION DE VIAJES.

Para ejemplificar la aplicación del método de máxima verosimilitud, vamos a utilizar una forma particular del modelo que emplea la función de impedancia de Tanner. Esta función con dos parámetros tiene una forma semejante a la función gamma, pero sus restricciones son menos rígidas. La función es:

$$f(c_{ij}) = \exp\ (-\ \lambda_1\ d_{ij})\ d_{ij}^{-\lambda_2} \tag{5.93}$$

Al maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud ln L, definida en (5.21), sujeta a (5.90), (5.91) y (5.92), se obtienen las ecuaciones de máxima verosimilitud que debe satisfacer el modelo:

$$a_i = \frac{1}{\sum_j b_j d_j \exp(-\lambda_1 d_{ij}) d_{ij}^{-\lambda_2}} \quad (5.94)$$

$$b_j = \frac{1}{\sum_i a_i O_i \exp(-\lambda_1 d_{ij}) d_{ij}^{-\lambda_2}} \quad (5.95)$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} d_{ij} = \sum_i \sum_j t_{ij} d_{ij} \quad (5.96)$$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} \ln d_{ij} = \sum_i \sum_j t_{ij} \ln d_{ij} \quad (5.97)$$

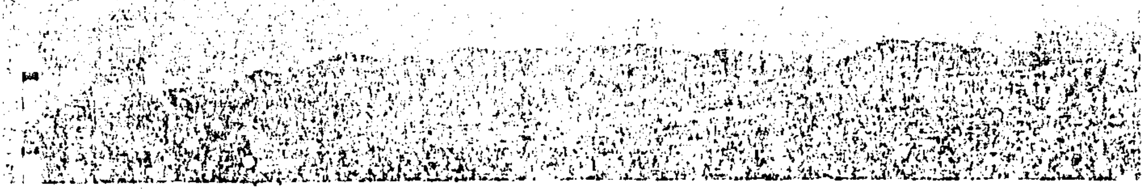
En las ecuaciones (5.96) y (5.97), t_{ij} es la proporción observada de viajes, calculada a partir de T^*_{ij}/T.

Las funciones que deben ser minimizadas mediante el proceso de calibración, se derivan a partir de (5.96) y (5.97) y están dadas por:

$$\min F_1 \left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \min \left| \sum_i \sum_j p_{ij} d_{ij} - \sum_i \sum_j t_{ij} d_{ij} \right| = 0 \quad (5.98)$$

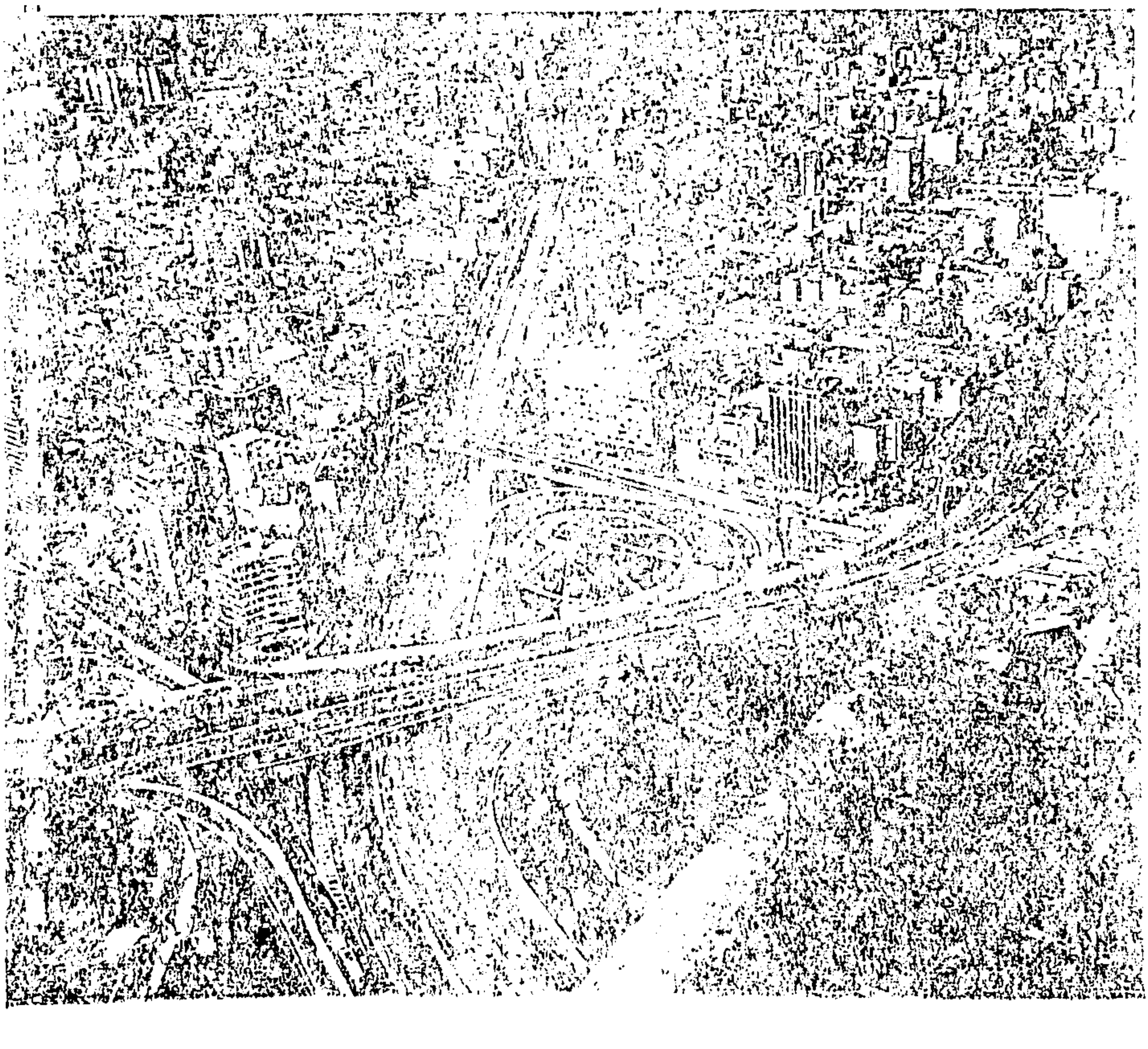
$$\min F_2 \left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \min \left| \sum_i \sum_j p_{ij} \ln d_{ij} - \sum_i \sum_j t_{ij} \ln d_{ij} \right| = 0 \quad (5.99)$$

También, se puede construir una función compuesta $\Lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ al sumar (5.98) y (5.99). Para minimizar esta función se utiliza el método Simplex. La solución de (5.98) y (5.99) puede obtenerse mediante la utilización del método de Newton-Raphson.



CAPITULO VI.

SIMULACION DINAMICA DE LOS SISTEMAS URBANOS.



VI. SIMULACION DINAMICA DE LOS SISTEMAS URBANOS.

La necesidad de incorporar el concepto del tiempo en la modelación del desarrollo urbano es una de las prioridades más importantes en la investigación urbana actual. El factor temporal o elemento dinámico ha sido descuidado en la mayoría de los modelos basados únicamente en relaciones obtenidas mediante cortes seccionales en puntos determinados del tiempo, que hacen énfasis en el enfoque de equilibrio estático. A pesar de las ventajas prácticas de esta forma macro-estática de modelación, se han propuesto dos inovaciones importantes para aumentar la capacidad descriptiva de los modelos urbanos. La primera de ellas es un intento para desagregar las variables, con el objeto de unir los macromodelos de localización con micromodelos del mercado del suelo urbano. La segunda inovación consiste en reemplazar el concepto de equilibrio estático por el de desequilibrio dinámico, con el objeto de construir modelos que simulen explícitamente los procesos del cambio urbano.

Muchos de los problemas asociados con los modelos estáticos pueden resolverse únicamente en un contexto dinámico. Además, la inconsistencia básica entre los modelos estáticos y su utilización en el proceso de planeación, que es intrínsecamente dinámico, es una razón suficiente para requerir la modelación dinámica de los sistemas urbanos.

MODELOS DINAMICOS LINEALES

Para ejemplificar este tipo de modelos, analizaremos un modelo dinámico de la base económica urbana diseñado por Czamansky en 1965.

Este modelo consiste en cuatro ecuaciones de segundo orden que pueden expresarse de la manera siguiente:

$$P(t+1) = a_1 + b_1\, E(t-1) \qquad (6.1)$$

$$S(t+1)' = a_2 + b_2\ P(t), \tag{6.2}$$

$$E^b(t+1) = a_3 + b_3\ X(t+1), \tag{6.3}$$

$$E(t+1) = E^b(t+1) + E^1(t+1) + S(t+1), \tag{6.4}$$

donde P es la población, S es el empleo en los servicios, E^b es el empleo básico derivado, X es el empleo básico exógeno y E^1 es el empleo básico que requiere una localización específica y que incluye a X; a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3, son los parámetros que deben ser estimados. La notación del tiempo es auto explicativa.

Aunque el modelo presenta un enfoque sencillo para la generación de las actividades urbanas, es incompleto debido a que no considera la dimensión geográfica o espacial.

En contraste, el modelo EMPIRIC (Hill, 1965) está basado en un sistema de ecuaciones lineales en diferencias finitas de primer orden que se refieren a las diferentes zonas i y a las diferentes actividades j. Este modelo reconoce la naturaleza simultánea de las interacciones urbanas y utiliza métodos de solución formal tales como el de los mínimos cuadrados basado en dos etapas. El intervalo de tiempo adoptado es de diez años, lo cual hace que el énfasis del modelo sobre la dinámica del sistema urbano sea implícito solamente.

Su funcionamiento puede describirse de la manera siguiente:

En primer lugar se define un operador de diferencias $\Delta Y_{ik}(t)$ que mide el cambio en la actividad Y_k en la zona i, entre el tiempo t y el $t+1$;

$$\Delta Y_{ik}(t) = Y_{ik}(t+1) - Y_{ik}(t).$$

Así, para toda actividad j en cada una de las zonas i, el modelo toma la forma siguiente:

$$g_j \Delta Y_{ij}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{K} a_{ik} g_k \, \Delta Y_{ik}(t) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i h_l \, \Delta X_{il}(t) +$$

$$\sum_{i=m+1}^{m} o_i \left[\frac{1}{I} - q_l \, X_{il}(t+1) \right] \tag{6.5}$$

donde las Y_{ik} se refieren a las variables endógenas calculadas (localizadas) mediante el sistema de ecuaciones y las X_{il} se refieren a las variables exógenas (localizadoras) del modelo.

Las constantes a_{ik} y b_{il} son los parámetros que deben estimarse mediante un análisis de regresión. M es el número total de variables exógenas, K es el número total de variables endógenas e I es el número total de zonas. Consecuentemente, existen IK ecuaciones en el sistema. Las constantes g_k, h_l y q_l son escalares que distribuyen el valor total de las variables en proporciones regionales y se definen a partir de:

$$g_k = \frac{1}{\sum_i \Delta Y_{ik}(t)}, \tag{6.6}$$

$$h_l = \frac{}{\sum_i \Delta X_{il}(t)}, \tag{6.7}$$

$$q_l = \frac{1}{\sum_i X_{il}(t+1)}, \tag{6.8}$$

Se han desarrollado diferentes versiones del modelo EMPIRIC, destacando entre ellas un modelo equivalente contínuo no lineal conocido por el nombre de POLIMETRIC.

Un problema central de estos modelos lineales es que la descrip ción que hacen del sistema urbano es completamente estática, dando poca atención a las causas de la distribución espacial de las actividades. Además, como se dijo anteriormente, el proceso dinámico que intentan simular estos modelos está representado solo implícitamente.

TOMM. UN MODELO METROPOLITANO QUE CONSIDERA EL TIEMPO.

Este modelo es de importancia debido a que está basado en el modelo original de Lowry y además por que intenta convertir un modelo estático en un modelo dinámico más complejo, mediante la consideración explícita del comportamiento del sistema urbano.

El modelo TOMM fue desarrollado por Crecine en 1964 y en su primera versión trató de modelar los cambios en las actividades urbanas en un intervalo de tiempo de cinco años, utilizando los mismos mecanismos del modelo de Lowry, pero haciendo una distinción importante entre la localización y la relocalización de las actividades urbanas. El modelo ha sido mejorando en diferentes formas, existiendo actualmente al menos tres versiones de él. La segunda versión, TOMM-II fue desarrollada para el proyecto de simulación mediante juegos conocido con el nombre de METRO. En esta versión se introdujo una medida más realista de la atracción localizacional que incorpora rentas, niveles de satisfacción y costos de transporte.

La versión TOMM-III hace mayor énfasis en la dinámica y el comportamiento del movimiento urbano, utilizando un intervalo de tiempo de dos años.

Este modelo puede describirse mediante las ecuaciones del modelo de Lowry (Apendice 1, inciso 3), sin embargo, el orden en el que se manejan las actividades es totalmente inverso. Además, todas las variables tienen índices de acuerdo a los puntos particulares en el tiempo t y t+1. La población es desagregada en tipos de familia P^l y el sector de servicios es desagregado también en diferentes tipos de empleo S^k. Las tasas inversas de actividad α^i y las proporciones de población-servicios β^k son desagregadas de la misma manera para que coincidan con los tipos de población y el empleo en los servicios.

El suelo urbano total del sistema en el tiempo $t+1$ está constituído por las componentes siguientes:

$$L_j(t+1) = L_j^u(t+1) + L_j^b(t+1) + L_j^r(t+1) + L_j^k(t+1) \qquad (6.9)$$

Sin embargo, el suelo utilizado por los servicios $L_j^r(t+1)$ y por las viviendas $L_j^h(t+1)$ es dividido adicionalmente en suelo que se considera estable en cualquier período de tiempo dado y en suelo que puede cambiar de uso. El suelo urbano estable se deriva a partir de la totalidad del suelo urbano disponible dado por (6.9) utilizando las fórmulas siguientes:

$$L_j^{r*}(t+1) = a_j(t+1)\ L_j^r(t+1), \qquad (6.10)$$

$$L_j^{h*}(t+1) = b_j(t+1)\ L_j^h(t+1), \qquad (6.11)$$

donde el asterisco denota al suelo urbano estable. $a_j(t+1)$ y $b_j(t+1)$ son las proporciones de suelo estable en el tiempo $t+1$. Así, el modelo redistribuye la totalidad de las actividades en cada período de tiempo, pero los usos del suelo estable actúan como una restricción sobre lo que puede y lo que no puede moverse.

Al inicio de la operación del modelo se genera la cantidad de empleo en los servicios, a partir de la siguiente ecuación de la base económica:

$$S^k(t+1) = \beta^k \sum_l P^l(t),$$

$$= \beta^k \sum_l a^l \sum_i E_i^b \left(1-\alpha^l \sum_k \beta^k\right)^{-1} \qquad (6.12)$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (9) del modelo de Lowry.

A continuación se distribuyen estos empleos en los centros de servicio existentes, utilizando un modelo de potencial semejante al de la ecuación (10) de Lowry.

$$S_i^k(t+1) = S^k \frac{\sum_j \sum_l g^{kl} \, P_j^l(t) f^2 \, (c_{ij}) + q^k E_i(t)}{\sum_i \sum_j \sum_l g^{kl} \, P_j^l(t) f^2 \, (c_{ij}) + q^k \sum_i E_i(t)} \tag{6.13}$$

En este punto es necesario determinar si se cumple o no la restricción del tamaño mínimo requerido para los servicios, operando el procedimiento indicado en las ecuaciones (11), (12), (13) y (14) de Lowry. En seguida, se calcula el suelo urbano necesario para localizar los servicios, a partir de:

$$L_i^r(t+1) = \sum_k e^k \, S_i^k(t+1), \tag{6.14}$$

entonces, se determina el cambio en el suelo urbano en el período de tiempo considerado mediante al siguiente ecuación:

$$\Delta L_i^r(t) = \sum_k e^k \left[S_i^k(t+1) - S_i^k(t)\right] \tag{6.15}$$

De aquí, se debe escoger un valor final de $L_i^r(t)$ que cumpla la restricción del uso del suelo estable. Entonces, $\Delta L_i^r(t)$ es el máximo de:

$$\Delta L_i^r(t) = \max \left\{ \sum_k e^k \left[S_i^k(t+1) - S_i^k(t)\right], \right.$$

$$\left. L_i^{r*}(t+1) - \sum_k e^k \, S_i^k(t) \right\}. \tag{6.16}$$

Así, el suelo urbano total utilizado por los servicios y la cantidad total de empleo se calculan como:

$$L_i^r(t+1) = L_i^r(t) + \Delta L_i^r(t), \tag{6.17}$$

$$E_i(t+1) = E_i^b(t+1) + \sum_k S_i^k(t+1) \tag{6.18}$$

Ahora el modelo se mueve al sector demográfico, calculando en primer lugar la población a partir de la siguiente ecuación de la base económica:

$$P(t+1) = \sum_l a^l \sum_i E_i(t+1) \tag{6.19}$$

Esta población es entonces distribuida en las áreas habitacionales utilizando una función de potencial semejante a la de la ecuación (3) del modelo de Lowry:

$$P_j(t+1) = P(t+1) \frac{\sum_i E_i(t)\ f^l\ (c_{ij})}{\sum_i \sum_j E_i(t)\ f^l\ (c_{ij})} \tag{6.20}$$

Ahora, es necesario comprobar si no se ha excedido la restricción sobre la densidad de población. Sin embargo, debido a que la restricción sobre el suelo habitacional estable fija un límite inferior sobre la cantidad de suelo urbano requerido en cualquier zona j, la restricción de densidad se convierte en un límite mínimo y un límite máximo a la vez.

Si:

$$P_j(t+1) \begin{cases} < \delta_j\ L_j^{h*}(t+1), \\ > \delta_j\ L_j^h(t+1), \end{cases} \tag{6.21}$$

entonces el procedimiento de restricción indicado en las ecuaciones (4), (5), (6), (7) y (8) del modelo de Lowry es operado hasta que la población tome un valor dentro del rango permitido.

A continuación, el cambio en la población se calcula a partir de:

$$\Delta P_j(t+1) = P_j(t+1) - P_j(t), \tag{6.22}$$

y la población en cada tipo de familia l se obtiene mediante una función de la forma siguiente:

$$\Delta P_j^l(t) = \Phi\left[P_j^l(t), \sum_i E_i(t+1) \; f^l \; (c_{ij})\right] \tag{6.23}$$

Esta ecuación es normalizada para que la sumatoria sea igual a (6.22). Entonces, la población tipo l en el tiempo t+1 es calculada como:

$$P_j^l(t+1) = P_j^l(t) + \Delta P_j^l(t) \tag{6.24}$$

El modelo expresado en las ecuaciones (6.9) a la (6.24) puede ser operado en un marco de referencia más amplio que el modelo de Lowry. Sin embargo, para lograr consistencia entre las distribuciones obtenidas por el modelo es necesario hacer que los resultados de las ecuaciones (6.24) y (6.18) alimenten a las ecuaciones (6.13) y (6.20) respectivamente, y entonces iterar el sistema total de ecuaciones hasta que se alcance un límite de convergencia.

LOS MODELOS DE LA DINAMICA DE SISTEMAS DE FORRESTER.

Debido al reciente interés acerca de los problemas de la población mundial y los recursos, se han utilizado para simular los sistemas urbanos un conjunto de técnicas diseñadas por Jay Forrester (1961) conocidas con el nombre de Dinámica de Sistemas , que en un principio sirvieron para simular los procesos indus triales.

Su aplicación al sistema urbano es de especial interés en este trabajo, pero el método es de aplicabilidad más amplia debido a que se han simulado con estos conceptos toda clase de sistemas naturales y sociales.

La Dinámica de Sistemas tiene su fundamento en las ideas de la ingeniería de Control. Los conceptos de la estructura y el comportamiento del sistema son concebidos en términos de niveles de inventarios o existencias que son alterados progresivamente a través del tiempo por tasas de cambio que son afectadas por diferentes retroaliemntaciones positivas y negativas dentro del sistema de interés.

Este tipo de descripción de un sistema no es nueva, ya que forma la base de la rama de las matemáticas que trata con el estudio del cambio a través de ecuaciones en diferencias finitas.

Forrester enfatiza la idea de retroalimentación, la cual es escencial en los procesos de cambio, pero también asegura que el comportamiento de los sistemas sociales es contraintuitivo y afirma que la Dinámica de Sistemas es el único método apropiado para entender tal comportamiento.

Muchos de estos modelos están basados en la noción de que un sistema está fundamentalmente restringido por un límite fijo de recursos que afecta su crecimiento a través del tiempo. Por lo general, el sistema crece de manera explosiva o exponencial, pero al acercarse al límite de sus recursos, el crecimiento disminuye y se alcanza eventualmente una condición de equilibrio que presenta usualmente cierta oscilación alderredor del estado estable.

En el sistema urbano hipotético de Forrester, el crecimiento de las actividades tales como la industria, la población económicamente activa y la vivienda, es frenado al acabarse la disponibilidad del suelo urbano para las nuevas actividades.

El modelo de Forrester del sistema urbano está organizado alderredor de tres sectores: vivienda, industria y fuerza de trabajo. Cada uno de estos sectores es desagregado a su vez en tres subsectores. En la fuerza de trabajo se diferencían los grupos de gerentes, trabajadores y desempleados.

Estos grupos habitan viviendas de lujo, de interés social y barracas, respectivamente. Además, proporciones cambiantes de la fuerza de trabajo son empleadas en los subsectores de las nuevas industrias, las industrias bien establecidas y las industrias en decadencia. A través del tiempo envejecen las industrias y las viviendas, pasando de las nuevas industrias y las viviendas de lujo a los otros subsectores de menor calidad. También existen tasas de migración entre los diferentes subsectores del mercado de trabajo, y el movimiento hacia dentro y hacia afuera del sistema en términos de la fuerza de trabajo, representa la relación más importante entre el sistema y su medio ambiente. Los patrones de crecimiento de las actividades son simulados en el modelo durante un período de 250 años.

Las críticas que se han hecho a éste modelo son principalmente de dos clases:

a. Criticismos técnicos, debidos a que el modelo no incorpora una teoría urbana bien demostrada y aceptada, así como por no considerar el factor espacial o geográfico. Además, se considera que el período de simulación de 250 años es bastante arbitario. El modelo no puede ser calibrado en el modo tradicional, ya que ignora el dilema de la observación y la recolección de información.

b. Críticas acerca de la filosofía de Forrester, la cual impli

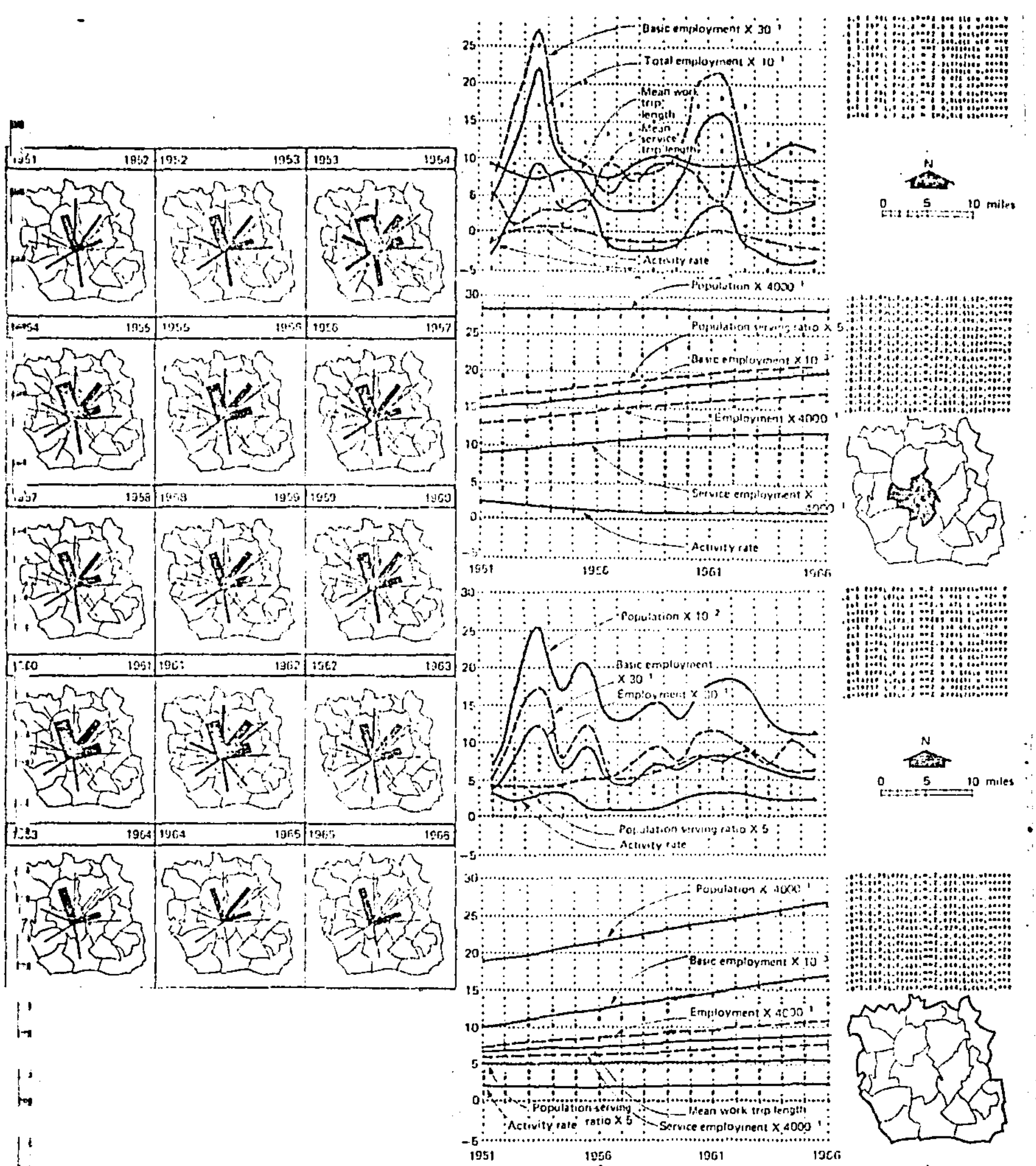


Figura 6.1. Modelo tipo Forrester, aplicado a una región urbana real y que considera la dimensión geográfica.

ca la visión de ayudar solamente a aquellos que se ayudan a sí mismos. Esto obviamente va en contra de las políticas urbanas que intentan proveer vivienda y trabajo a los pobres y a los marginados. Forrester cree que el sistema de libre empresa es la cura para todos los males.

A pesar de todo esto, se ha desarrollado una gran cantidad de trabajo debido al estímulo del modelo de Forrester. En el campo urbano se ha mejorado el modelo al considerar el factor espacial y reducir el número de ecuaciones necesarias, así como al aplicarlo a situaciones reales. Ver figura (6.1).

MODELOS URBANOS BASADOS EN LA DINAMICA ECONOMICA.

Existe una clase de modelos urbanos que recientemente han sido estimulados por el trabajo de economistas tales como Paelinick (1970), los cuales están basados en la especificación de la dinámica urbana mediante ecuaciones en diferencias finitas relacionadas al fenómeno macro-económico. Los modelos del tipo de la base económica tales como el de Czamansky, pueden ser formulados en esta forma. En particular, se ha puesto énfasis en el análisis de las propiedades de equilibrio de los modelos. Para ejemplificar este tipo de modelos presentaremos uno que sigue las ideas introducidas por Paelinick.

Este modelo puede establecerse mediante las cinco ecuaciones siguientes, que utilizan la misma notación que el modelo de la base económica de Czamansky:

$$P(t+1) = a_1 P(t) + a_2 E(t), \qquad (6.25)$$

$$S(t+1) = b_1 P(t) + b_2 S(t), \qquad (6.26)$$

$$E^1(t+1) = c_1 P(t) + c_2 E^1(t), \qquad (6.27)$$

$$E^b(t+1) = d_1\ E(t) + d_2\ E^b(t), \tag{6.28}$$

$$E(t+1) = S(t+1) + E^1(t+1) + E^b(t+1), \tag{6.29}$$

El sistema de ecuaciones puede expresarse en notación matricial explícita como sigue:

$$\begin{bmatrix} P \\ S \\ E^1 \\ E^b \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 & 0 \\ (b_1+c_1) & b_2 & (c_2+d_2) & d_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ S \\ E^1 \\ E^b \\ E \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

La ecuación (6.30) puede sumarizarse como:

$$p(t+1) = Q\ p(t), \tag{6.31}$$

donde p es un vector columna de $nx1$ actividades y Q es una matríz de nxn coeficientes.

Entonces por recursión, las actividades en el tiempo $t+\tau$ pueden expresarse en términos del tiempo t mediante:

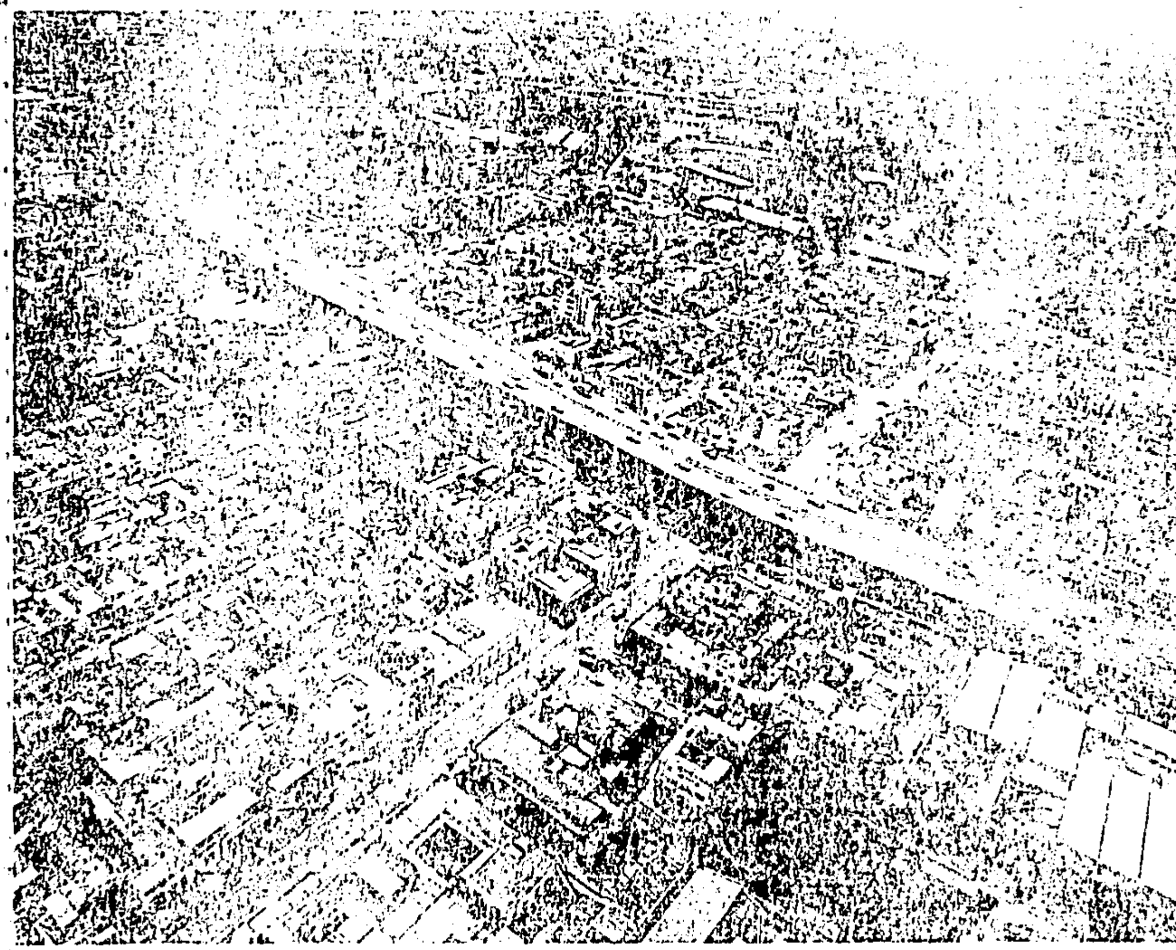
$$p(t+\tau) = Q^{\tau}\ p(t). \tag{6.32}$$

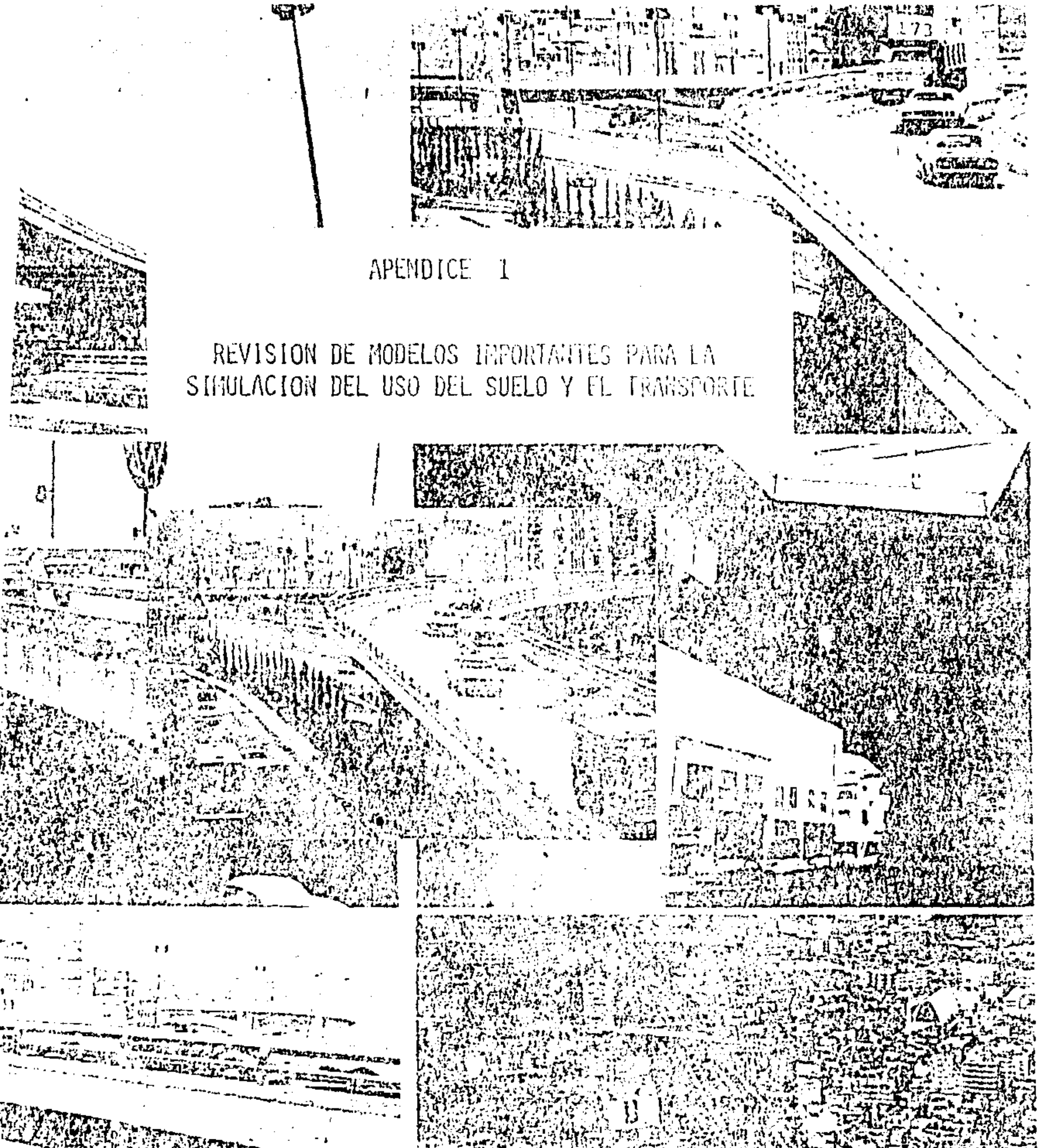
Los modelos basados en la dinámica económica son prometedores por las razones siguientes:

a. Sus hipótesis están fundamentadas en una teoría económica no ambigua, familiar y comunmente aceptada.

b. El énfasis para determinar si los modelos convergen o divergen con respecto a algún tipo de equilibrio puede conducir a la obtención de un conocimiento interesante del comporta miento de los sistemas urbanos.

c. La estructuración de los parámetros de los modelos es un área bien desarrollada en econometría.





APENDICE 1

REVISION DE MODELOS IMPORTANTES PARA LA SIMULACION DEL USO DEL SUELO Y EL TRANSPORTE

1. MODELOS GRAVITACIONALES.

PUNTO DE VISTA PROBABILISTICO.

Para desarrollar y comprender los modelos gravitacionales se adopta aquí un punto de vista de probabilidad bastante simple.

Se supone una región metropolitana de población P, y se divide esta región en subáreas. Se supone también que se conoce el número de desplazamientos interiores que realizan dentro de la región sus habitantes, este número es T = constante. Se establece que no existen diferencias de gustos, renta, distribución, estructura ocupacionales, etc. entre las subáreas.

El problema es determinar el número de desplazamientos que se originan en la subárea i y terminan en la j, suponiendo que un desplazamiento no implica ni tiempo, ni costo (la fricción de la distancia es cero).

En esta situación hipotética se puede establecer que, para un individuo representativo de la subárea i, el porcentaje de sus viajes que terminan en la subárea j es igual a P_j/P, donde:

P_j = población de j y
P = población total.

Además, por la hipótesis de fricción cero, el número de viajes que la persona de la subárea i realiza, es el promedio del número de desplazamientos percápita para la región metropolitana entera, y este promedio es igual a $T/P = K$. Por esto, el número absoluto de desplazamientos que un individuo representativo de la subárea i hace a la subárea j es: $K\ (P_j/P)$.

Como existen P_i individuos en i, el número de desplazamientos que estos P_i realizarán hacia la subárea j será:

$$T_{ij} = K \frac{P_i \, P_j}{P} \qquad (1)$$

De este modo se ha obtenido una estructura del volúmen de desplazamientos entre subáreas, esperados o hipotéticos, para la región metropolitana.

El siguiente paso consiste en determinar el efecto que la distancia real que separa a dos subáreas puede tener sobre el número de desplazamientos que se producen entre ellas.

Si se obtienen los datos actuales del número de desplazamientos entre cada una de las subáreas de una región metropolitana, se representan como I_{ij}.

Se establece una relación entre el cociente I_{ij}/T_{ij} y la distancia d_{ij} (ajustando una curva por mínimos cuadrados o cualquier otro método), suponiendo en este caso que se encuentra la siguiente relación lineal:

$$\text{Log} \frac{I_{ij}}{T_{ij}} = a - b \log d_{ij} \qquad (2)$$

haciendo c = antilog a, resulta:

$$\frac{I_{ij}}{T_{ij}} = \frac{c}{d_{ij}^{\,b}} \quad \text{ó} \quad I_{ij} = \frac{c \; T_{ij}}{d_{ij}^{\,b}} \qquad (3)$$

Sustituyendo T_{ij} (ecuación 1) en la ecuación (3), e introduciendo la constante $G = cK/P$, donde c, K y P son las constantes ya definidas, obtenemos:

$$I_{ij} = G \frac{P_i \, P_j}{d_{ij}^{\,b}} \qquad (4)$$

Esta sencilla relación puede ser aceptada para describir el volúmen de desplazamientos (actuales) en el interior de la región metropolitana (describe la interacción de los habitantes como una función de las poblaciones de las subáreas y la variable distancia, cuando esta interacción se mide en desplazamientos).

Si se quiere hallar la interacción de una región con otras regiones, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$I_{i1} + I_{i2} + \ldots I_{in} = G\,\frac{P_iP_1}{d_{i1}^{\;b}} + G\,\frac{P_iP_2}{d_{i1}^{\;b}} + \ldots + G\,\frac{P_iP_n}{d_{in}^{\;b}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} I_{ij} = G \sum_{j=1}^{n} \frac{P_iP_j}{d_{ij}^{\;b}} \qquad (5)$$

Si se saca a P_i como factor en la parte derecha y se dividen ambos miembros por la misma P_i, resulta:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} I_{ij}}{P_i} = G \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}^{\;b}} \qquad (6)$$

Esta relación muestra la interacción con todas las subáreas en términos per cápita o más estrictamente, en términos por unidad de masa. La interacción así definida se conoce como potencial de i y se representa como (iV):

$$iV = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{ij}}{P_i} = G \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}^{\;b}} \qquad (7)$$

HIPOTESIS STEWART - ZIPF.

En las ciencias naturales existen leyes tales como las que gobiernan la densidad, la presión y la temperatura de los gases. Stewart razonó que en la interacción de las unidades sociales pueden existir relaciones similares, las cuales es posible descubrir mediante la investigación de grandes agregados de tales unidades. Basándose en la física de Newton, presentó tres conceptos principales, y en analogía a la fuerza de gravitación definió la fuerza demográfica.

Cuando la población de las ciudades i y j, que se designan por P_i y P_j se toman como masas relevantes, la fuerza demográfica f es:

$$F = G \frac{P_i P_j}{d_{ij}^{\,b}} \quad ; \quad b=2 \tag{8}$$

Stewart desarrolló un segundo concepto que corresponde a la energía gravitacional y que se denomina "energía demográfica".

$$E = G \frac{P_i P_j}{d_{ij}^{\,b}} \quad ; \quad b=1 \tag{9}$$

Estas dos expresiones (8) y (9) tienen en el d_{ij} como exponentes a $b=2$ y 1 respectivamente.

El tercer concepto de Stewart es el de potencial demográfico (que corresponde al de potencial gravitacional). El potencial demográfico producido en un punto i por una masa j, que puede designarse por iV_j, se define en un tiempo determinado como la masa en j, o sea P_j dividida por la distancia existente entre los dos puntos, así:

$$iV_j = G \frac{P_j}{d_{ij}} \qquad iV = G \sum_{n=1}^{n} \frac{P_j}{d_{ij}} \tag{10}$$

Los trabajos de Zipf se asemejan mucho a los de Stewart por lo cual no se tratarán en este trabajo.

CONCEPTOS BASICOS DE LOS MODELOS GRAVITACIONALES.

En esta parte se van a discutir conceptos que aparecen particularmente en la aplicación del modelo gravitacional.

En los estudios empíricos, la masa ha sido medida de diferentes formas, aquí se ha utilizado la población como medida; sin embargo, si se estudia la migración intermetropolitana, el empleo o el ingreso pueden ser índices más significativos; la medición de la masa que se emplee depende del problema a estudiar y de los datos disponibles.

La distancia se ha medido de forma similar. En este caso, se ha considerado una medida física a lo largo de una recta, no obstante, si se lleva a cabo un estudio del tráfico metropolitano, la distancia en tiempo puede ser igual ó más importante que la distancia en kilómetros. Si se analiza el problema de localización industrial, el costo de transporte es más significativo que la distancia física. De la misma forma que la medición de la masa, la medición de la distancia depende del problema a abordar, de los datos disponibles y de otras consideraciones anexas.

Una cuestión básica que permite eliminar las hipótesis de homogeneidad hechas al principio, es la que se refiere a la aplicación de las "ponderaciones a las masas".

Suponiendo que se estudia el volúmen de viajes de primera clase, es razonable esperar que un área con alto ingreso percápita tenga un volúmen mayor de tales viajes que un área de menor ingreso. Una forma de corregir tal factor consiste en multiplicar la población de cada subárea por su ingreso percápita. De esta manera la ecuación (4) se convierte en:

$$I_{ij} = G \, \frac{\left(W_i P_i\right)\left(W_j P_j\right)}{d_{ij}^{\,b}} \qquad (11)$$

y la ecuación (7) será:

$$V = G \, \Sigma \, \frac{W_j P_j}{d_{ij}^{\,b}} \qquad (12)$$

Es posible ponderar la masa con más de un factor. En tal caso W_i y W_j representan ponderaciones compuestas (promedios que reflejan la importancia relativa de los distintos factores ponderados).

Más difícil que la selección de las ponderaciones o medidas de masa y distancia es la elección de exponentes para las variables en los conceptos de energía potencial y demográfica. Desde un punto de vista teórico se puede presumir que el exponente de la variable distancia d_{ij} debería ser 1 ó 2, según sea energía o potencial, pero numerosos estudios empíricos realizados por diferentes investigadores no apoyan esta hipótesis. Aunque es evidente que el exponente de d_{ij} no es necesariamente 1 ó 2, todavía no se ha hecho un estudio definitivo de la cuestión. En las ecuaciones básicas (4) y (5) estos exponentes son la unidad, sin embargo, investigadores muy profundos han encontrado que la potencia a la cual es elevada la masa puede ser diferente.

Por ejemplo, Carrothers observó que factores tales como las economías de aglomeración (o desaglomeración) implican que el exponente que debe aplicarse a cualquier masa es función de la misma. En tal situación, los exponentes de masas distintas serán diferentes, y las ecuaciones (4) y (5) se convertirán en las siguientes:

$$I_{ij} = G \cdot \frac{W_i (P_i)^{\alpha} \cdot W_j (P_j)^{\beta}}{d_{ij}^{\,b}}$$

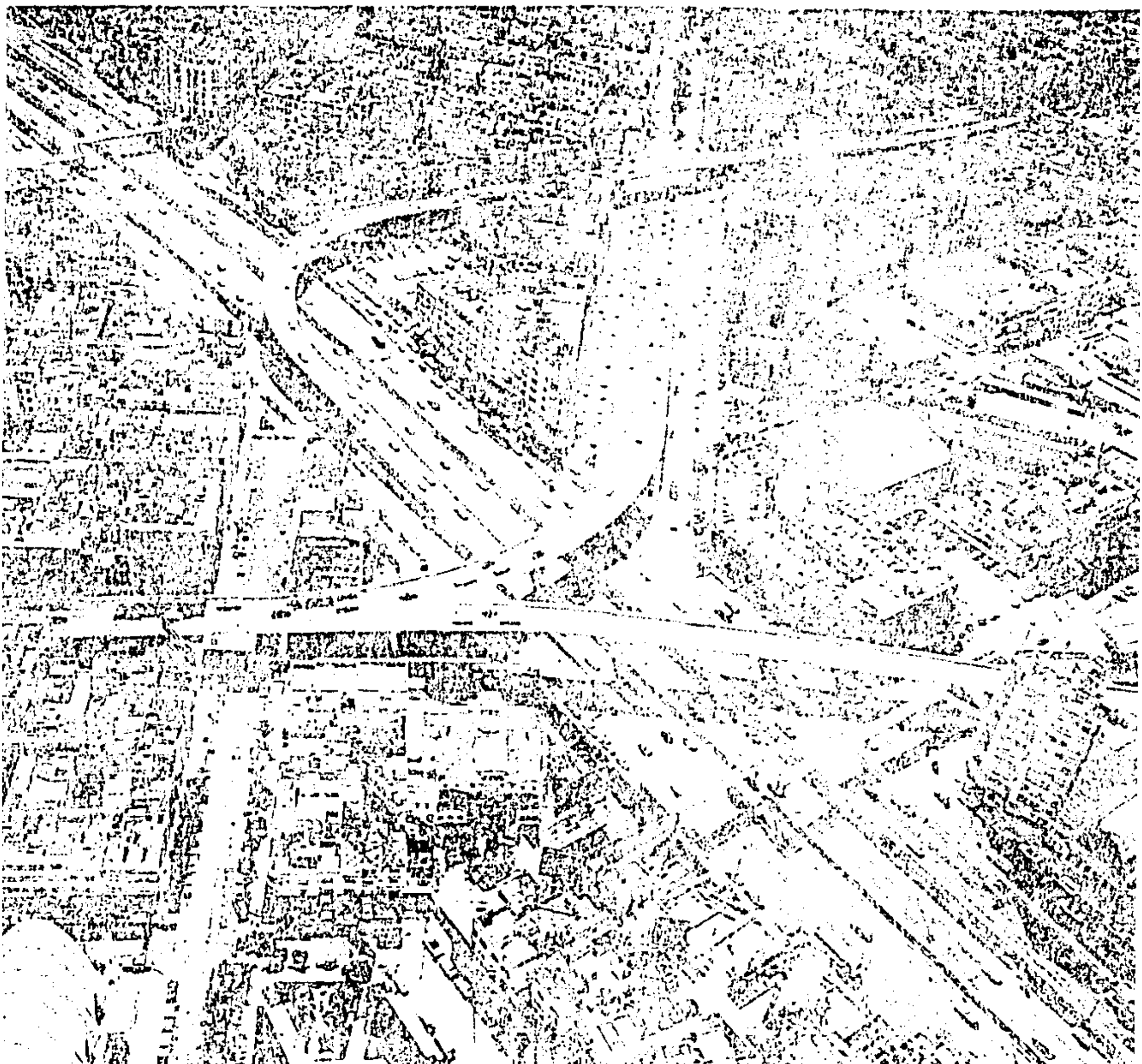
$$iV = G \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j (P_j)^{\beta}}{d_{ij}^{\,b}}$$

PROBLEMAS EN LA UTILIZACION DE LOS MODELOS GRAVITACIONALES SIMPLES.

Con respecto a los problemas relativos al uso del modelo gravitacional en sus formas más simples, debe tenerse presente que estos modelos pueden utilizarse para fines descriptivos o para la elaboración de pronósticos.

Un problema común para ambos tipos de utilización es el referente al grado en que cualquier conjunto (masa integral, población o agregado significativo), es fraccionado, clasificado en sectores o desagregado.

La noción de modelo gravitacional, particularmente la desarrollada por Stewart, corresponde a una masa relativamente grande, compuesta por múltiples unidades individuales. Dentro de tal masa, es razonable suponer que las irregularidades, peculiaridades o idiosincrasias de cualquier unidad individual o pequeño grupo de unidades, se anulan o compensan. En tal situación la cláusula es válida en cierto grado, por consiguiente, se puede justificar una concentración de dos variables básicas, la distancia y la masa, y en factores que pueden sintetizarse en ponderaciones y exponentes, excluyendo las otras variables. Por ejemplo, para estudios de transporte donde el volúmen total de tráfico se desagrega por medios de transporte, por finalidad de desplazamientos, por tipo de ciudad u otra clasificación, las peculiaridades de cada categoría tienden a ser más manifiestas y dominantes, y la amplitud con la cual un modelo gravitacional describe o explica cualquier efecto (disminución de volúmen, etc.), tiende a reducirse. De esta forma se plantea un problema básico: por un lado, parece conveniente desagregar y estratificar con miras a distinguir entre distintos exponentes ó ponderaciones que pueden emplearse para proyectar o describir las distintas categorías; por otro lado, el modelo gravitacional como técnica para describir ó explicar el volúmen de desplazamientos con un propósito particular, tiende a ser menos confiable para cualquier estrato de una masa, y si la desagregación es llevada demasiado lejos, los datos deducidos pueden llegar a tener una significación reducida. Puede decirse que la desagregación se hace aconsejable cuando es posible obtener información adicional cuando tal desagregación no destruye en grado alguno la significación intrínseca y la estructura unitaria interna de la masa o población. Bajo estas circunstancias, será útil emplear diferentes exponentes y ponderaciones.



2. MODELO DE OPORTUNIDADES

Este modelo representa un enfoque alternativo a los modelos gravitacionales para la distribución de viajes dentro de una ciudad o área metropolitana.

No utiliza en forma explícita el concepto de impedancia interzonal, empleando en cambio un procedimiento mediante el cual las zonas j de posible destino son consideradas en orden creciente de acuerdo a una función generalizada de costo de viaje a partir de la zona de origen i.

La hipótesis fundamental de este modelo es que el número de viajes entre una zona de origen i y una zona de destino j es proporcional al número de oportunidades de que la necesidad que motivó un viaje se satisfaga en la zona de destino j, e inversamente proporcional al número de oportunidades que se presentan en el camino. Esta hipótesis supone que la persona que tiene que realizar un viaje considera las oportunidades que presentan diferentes sitios y las probabilidades que tienen cada uno de ellos para satisfacer su necesidad.

Para formular el modelo se hacen las siguientes definiciones:

$j\mu(i)$ = μ-ésima zona de destino a partir de i. Para simplificar se utiliza $j\mu$ cuando se sobrentienda que se refiere a la zona i.

$U_{ij\mu}$ = probabilidad de que una persona realice un viaje más alla de la zona μ-ésima a partir de la zona i.

L = probabilidad de que una oportunidad satisfaga la necesidad de la persona que realiza un viaje.

Entonces, para el primer orden en L,

$$U_{ij\mu} = 1 - L\, D_{j1}$$

donde D_{j1} es el número de oportunidades que presenta la zona j_1 (la zona más cercana a i).

Así, combinando las probabilidades sucesivas en forma multiplicativa, obtenemos:

$$U_{ij2} = U_{ij1}\left(1 - LD_{j2}\right),$$

$$U_{ij3} = U_{ij2}\left(1 - LD_{j3}\right),$$

y en general:

$$U_{ij\mu} = U_{ij\mu-1}\left(1 - LD_{j\mu}\right). \quad (1)$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{U_{ij\mu} - U_{ij\mu-1}}{U_{ij\mu-1}} = - LD_{j\mu} \quad (2)$$

Si consideramos a $A_{j\mu}$ como el número de oportunidades que se presentan en el camino, incluyendo las de la zona $j\mu$, entonces:

$$D_{j\mu} = A_{j\mu} - A_{j\mu-1} \quad (3)$$

y por lo tanto, la ecuación (2) puede escribirse como:

$$\frac{U_{ij\mu} - U_{ij\mu-1}}{U_{ij\mu-1}} = L\left(A_{j\mu} - A_{j\mu-1}\right) \quad (4)$$

Si suponemos que las oportunidades varían en forma contínua y no discreta, esta ecuación se formula como:

$$\frac{dU}{U} = - LdA \quad (5)$$

y al integrar obtenemos:

$$\ln U = - LA + c$$

donde c es una constante de integración.

Por lo tanto:

$$U_{ij\mu} = k_i \exp \left(- LA_{j\mu}\right) \tag{6}$$

donde k_i es una constante. Así, en términos de esta probabilidad, se tiene que:

$$T_{ij\mu} = O_i \left(U_{ij\mu-1} - U_{ij\mu}\right) \tag{7}$$

donde:

$T_{ij\mu}$ = número de viajes que salen de la zona i hacia la μ-ésima zona de destino (a partir de i), los cuales son una parte del total de viajes O_i originados en la zona i.

Sustituyendo en la ecuación (7) lo obtenido en la ecuación (6), resulta:

$$T_{ij\mu} = k_i \; O_i \left[\exp \left(- LA_{j\mu-1}\right) - \exp \left(- LA_{j\mu}\right)\right] \tag{8}$$

Esta ecuación representa la forma usual del modelo de oportunidades.

k_i puede escogerse en tal forma que la matríz resultante T_{ij} satisfaga la siguiente restricción:

$$\sum_j T_{ij} = k_i \; O_i \left[1 - \exp \left(- LA_{jN}\right)\right] = O_i \tag{9}$$

donde N es el número total de zonas. Debido a que $\exp\,(- LA_{jN})$ debe ser muy pequeña, k_i es muy cercana a 1 para toda i.

3. EL MODELO DE LOWRY

Uno de los primeros modelos de simulación del uso del suelo fue diseñado por Ira Lowry en 1964 para la región urbana de Pittsburgh, el cual ha tenido una gran influencia hasta nuestros días en el desarrollo de la modelación de sistemas urbanos.

Este modelo, conocido como el modelo de Lowry, organiza el espacio económico urbano en actividades y usos del suelo correspondientes.

Las actividades definidas por el modelo son el crecimiento de la población, el empleo en los servicios y el empleo en las manufacturas y el sector primario (empleo básico).

Estas actividades corresponden a los usos del suelo residencial, comercial e industrial respectivamente. Las operaciones del modelo se llevan a cabo a nivel de actividades, las cuales son convertidas posteriormente en usos del suelo mediante proporciones de uso del suelo/actividad.

La distinción entre el empleo básico y el empleo en los servicios se debe a que el modelo utiliza la teroía de la base económica para generar el empleo en los servicios y el crecimiento demográfico a partir del empleo básico, el cual se define como el empleo que está asociado a las industrias cuyos productos se exportan fuera de la región, a diferencia de los productos del empleo en los servicios que son consumidos dentro de la región.

Se supone que la localización de las industrias básicas es independiente de la localización de las zonas de habitación y de los centros de servicio; aunque esta suposición no parece realista, es tomada como punto de partida en el modelo de Lowry.

Además de la estimación del crecimiento de la población y el empleo en los servicios, el modelo también distribuye estas actividades en las diferentes zonas de la región urbana, utilizando los conceptos de potencial demográfico y potencial comercial o de servicios. Estas distribuciones están sujetas a restricciones sobre la cantidad de usos del suelo que pueden establecerse en cada zona. El modelo asegura que la población localizada en cualquier zona no exceda una densidad máxima permitida, y que los servicios no sean menores a una cantidad o tamaño mínimo especificado. El empleo en los servicios es desagregado en tres categorías, para reflejar las diferentes escalas de esta actividad en la región urbana.

Una vez localizadas las actividades de acuerdo con las restricciones predeterminadas, el modelo hace una comparación entre las distribuciones obtenidas y las distribuciones utilizadas en el cálculo de los potenciales con el objeto de asegurar consistencia. Esta se logra mediante la retroalimentación entre las distribuciones y la iteración contínua del proceso total de distribución hasta que los resultados de ambas coincidan.

El modelo divide el sistema espacial en cuatro conjuntos de zonas que difieren con respecto a las restricciones impuestas.

Z_1 es el conjunto de zonas en las que no existen restricciones sobre la localización, Z_2 es el conjunto en el que existen solamente restricciones demográficas, Z_3 es el conjunto donde existen solamente restricciones sobre los servicios y Z_4 es el conjunto donde existen ambos tipos de restricciones. Estos conjuntos son mutuamente exclusivos.

En la notación aquí utilizada, el índice m representa a las iteraciones internas del modelo necesarias para asegurar que se cumplan las restricciones sobre la localización de las ac tividades, y el índice n representa a las iteraciones externas necesarias para asegurar la consistencia entre las distribuciones obtenidas por el modelo y las utilizadas en el cálculo de los potenciales.

Al iniciarse la operación del modelo, $m=1$, $n=1$, el empleo total en la zona i, $E_i(1)$ es igual al empleo básico E_i^b y el uso del suelo para actividades de servicio $L_j^r(1)$ es igual a cero.

Los subíndices zonales i, j varían en el rango $i, j = 1, 2, \ldots, I$, y los superíndices de las actividades de servicio k varían en el rango $k = 1, 2, \ldots, K$.

En primer lugar se calcula la población total utilizando las relaciones de la base económica:

$$P(m) = \alpha \sum_i E_i^b \left(1 - \sum_k \beta^k\right)^{-1}, \qquad (1)$$

donde P es la población totan en la región urbana, α es la tasa de actividad inversa y β^k es la k-ésima proporción de empleo en los servicios en relación al total de población.

A continuación se calcula el total de uso del suelo residencial disponible a partir de la fórmula:

$$L_j^n(n) = L_j - \left[L_j^u + L_j^b + L_j^r(n)\right], \quad j \in Z \qquad (2)$$

donde L_j es la superficie total de cada zona y los superíndices u v b sobre L_j representan a los terrenos no utilizables y los utilizados por la industria básica respectivamente.

De aquí, la población se distribuye proporcionalmente en las zonas de acuerdo con un potencial demográfico normalizado; esto se expresa como:

$$P_j(m,n) = P(m) \frac{\sum_j E_i(n)\ f'(c_{ij})}{\sum_i \sum_j E_i(n)\ f'(c_{ij})}, \qquad (3)$$

$$i \in Z,\ j \in Z_1,\ Z_3.$$

donde $P_j(m,n)$ es la población localizada en la zona j y $f'(c_{ij})$ es una función del costo generalizado de viaje.

La población localizada en cada zona con este procedimiento debe ahora compararse con la restricción de la densidad máxima:

Si,

$$P_j(m,n) \geq \delta_j\ L_j^h(n),\ j \in Z_1,\ Z_3 \qquad (4)$$

entonces,

$$P_j(m,n) \in Z_2,\ Z_4 \qquad (5)$$

δ_j es un coeficiente de densidad que convierte el uso del suelo $L_j^h(n)$ a su equivalente en población.

En los conjuntos restringidos Z_2 y Z_4 la población se hace igual a la población máxima permitida; el índice m se incrementa a $m+1$, y así:

$$P_j(m+1,n) = \delta_j\ L_j^h(n),\ j \in Z_2,\ Z_4 \qquad (6)$$

La población que debe relocalizarse se encuentra al restar a la población total la población restringida en Z_2 y Z_4:

$$P(m+1) = P(m) - \sum_j P_j(m+1,n) \qquad (7)$$

$$j \in Z_2, Z_4.$$

Entonces, se sustituye $P(m+1)$ en la ecuación (3) y se iteran las ecuaciones (3), (4), (5), (6) y (7) hasta que:

$$P_j(m+1) \leq \delta_j \; L_j^h(n), \; j \in Z \qquad (8)$$

Cuando se satisface la ecuación (8), la distribución de la población está de acuerdo con las restricciones demográficas. Así, m se iguala a 1 y se calcula ahora el empleo en las diferentes categorías de los servicios:

$$S^k = \beta^k \sum_j P_j(m,n), \; j \in Z \qquad (9)$$

A continuación, se distribuye espacialmente el empleo en los servicios de acuerdo con el potencial comercial o de servicios de cada zona:

$$S_i^k(m,n) = \frac{\sum_j g^k \, P_j(m,n-1) \; f^2 \; (c_{ij}) + q^k \; E_i(n)}{\sum_i \sum_j g^k \; P_j(m,n-1) \; f^2 \; (c_{ij}) + \sum_i q^k \; E_i(n)} \qquad (10)$$

$$i, j \in Z.$$

En la primera iteración completa del modelo $(n=1)$, $P_j(m,n-1)$ es igual a la población observada P_j.

g^k y q^k son coeficientes determinados empíricamente que reflejan la importancia relativa de la población y el empleo en el índice de potencial comercial; $f^2 \; (c_{ij})$ es una función del costo generalizado de viaje.

A partir de esto, se debe comparar la cantidad de empleo en los servicios localizado en cada zona i con la restricción del tamaño mínimo especificado $(\min S^k)$:

Sí,

$$S_i^k(m,n) \begin{cases} < \min S^k, \text{ y} \\ = \min\limits_i S_i^k(m,n), \ i \in Z \end{cases} \tag{11}$$

entonces,

$$S_i^k(m,n) \in Z_3, Z_4 \tag{12}$$

y

$$S_i^k(m+1,n) \begin{cases} 0, \ i \in Z_3, Z_4 \\ S^k \dfrac{S_i^k(m,n)}{\sum\limits_i \sum\limits_i^k(m,n)}, \ i \in Z_1, Z_2 \end{cases} \tag{13}$$

$S_i^k(m+1,n)$, $i \in Z_1, Z_2$, es sustituido en la ecuación (11) y se iteran las ecuaciones (11) y (12) hasta que:

$$S_i^k(m+1,n) \geq \min S^k, \ i \in Z, \tag{14}$$

En esta etapa de la operación del modelo, todas las actividades han sido distribuidas espacialmente, así, el índice n se incrementa a $n+1$ y el empleo en los servicios se convierte a usos del suelo utilizando las proporciones e^k:

$$L_i^r(n+1) = \sum_k e^k S_i^k(m,n), \ i \in Z \tag{15}$$

Se requiere ahora probar si existen terrenos para el uso del suelo residencial de los empleados en los servicios:

Si,

$$L_i^r(n-1) \geq L_i - \left(L_i^u + L_i^b\right),\ i \in Z, \tag{16}$$

entonces,

$$L_i^r(n+1) = L_i - \left(L_i^u + L_i^b\right),\ i \in Z, \tag{17}$$

A continuación se calcula el empleo total en cada zona a partir de:

$$E_i(n+1) = E_i^b + \sum_k S_i^k(m,n) \tag{18}$$

$$i \in Z.$$

La distribución espacial de la población $P_j(m,n)$ obtenida por el modelo en esta iteración debe compararse con la distribución $P_j(m,n-1)$ utilizada en el cálculo de los potenciales comerciales o de servicios, con el objeto de lograr consistencia entre ambas.

Se considera que las dos distribuciones son consistentes si la diferencia de la primera con la segunda está dentro de un cierto límite ξ_p, o sea:

$$P_j(m,n) = P_j(m,n-1) \pm \xi_p, \tag{19}$$

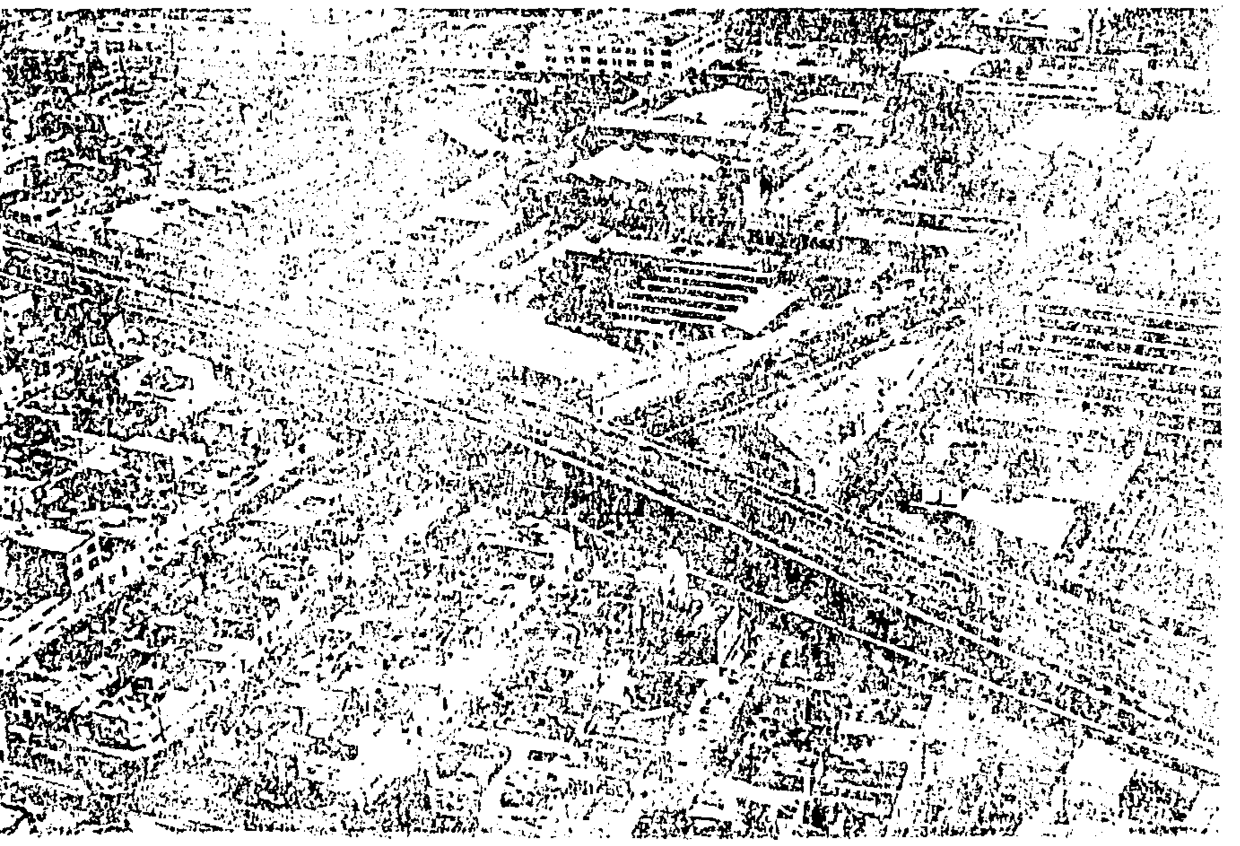
$$j \in Z$$

Si la ecuación (19) no se satisface, $L_i^r(n+1)$ y $E_i(n+1)$ sustituyen a sus correspondientes en las ecuaciones (2) y (3) respectivamente y se iteran de manera continua las ecuaciones de la (1) a la (18) hasta que se satisfaga la ecuación (19).

El modelo incorpora también una prueba semejante para las distribuciones espaciales del empleo $E_i(n)$ y $E_i(n-1)$.

Al inicio de cada iteración externa del modelo, la iteración interna m se hace igual a 1 y Z se hace igual a Z_i.

La figura AI.1 ofrece una interpretación diagramática de la operación del modelo de Lowry, y la tabla AI.1 da las ecuaciones relevantes de su estructura. Al contabilizar el número de ecuaciones de las variables endógenas, se observa que este es igual al número de incógnitas y por lo tanto, el sistema de ecuaciones que representa al modelo es determinado.



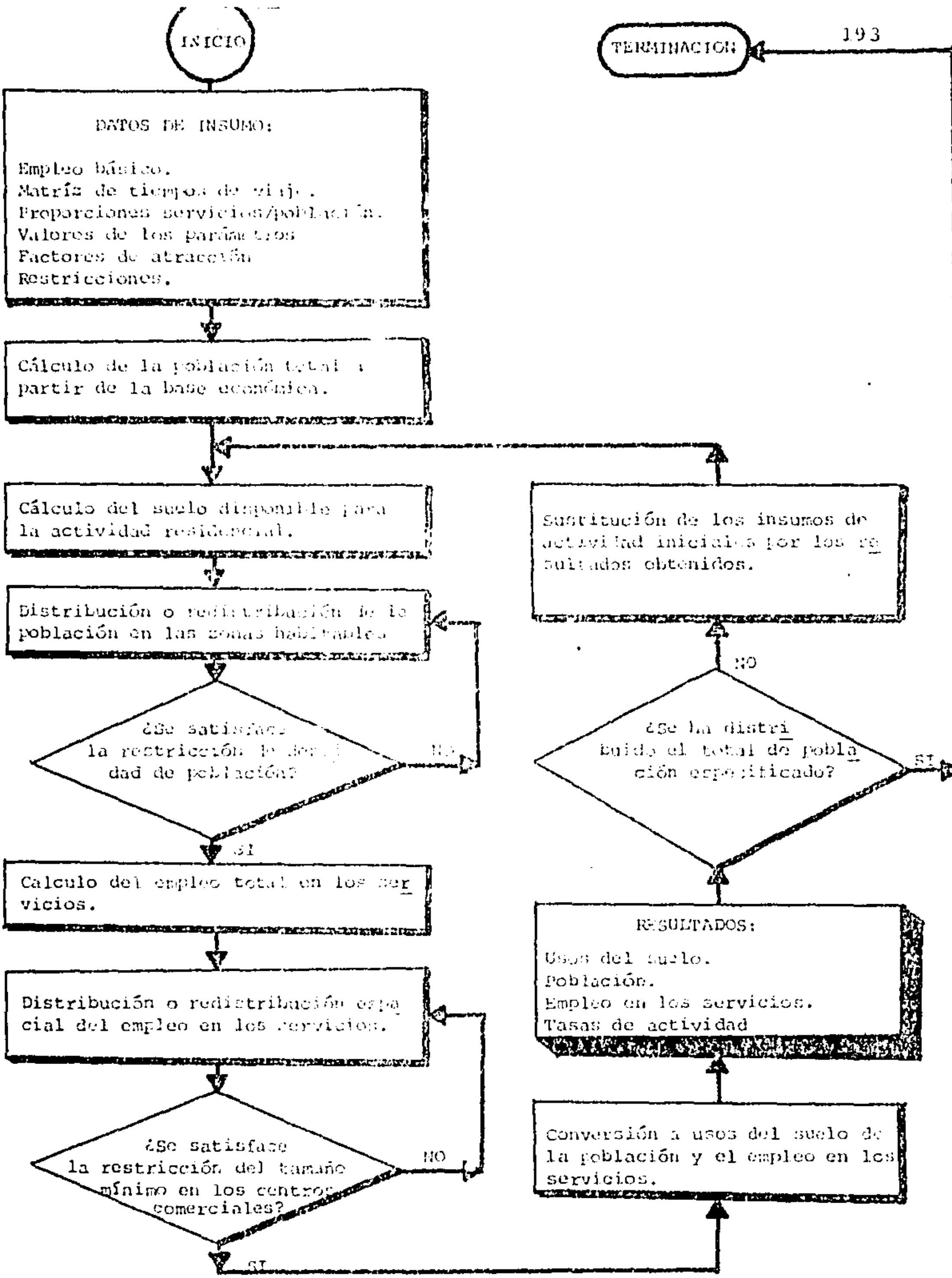


Figura A1.1 Diagrama de flujo del modelo de Lowry.

TABLA A1.1

ECUACIONES ESTRUCTURALES DEL MODELO DE LOWRY

NUMERO DE LA ECUACION	FORMA DE LA ECUACION	NUMERO DE ECUACIONES
(1)	$P(m) = \alpha \sum_i E_i^b \left(1 - \alpha \sum_k \beta^k\right)^{-1}, i \in Z$	1
(2)	$L_j^h(n) = L_j - \left[L_j^u + L_j^b + L_j^r(n)\right], j \in Z$	I
(3)	$P_j(m,n) = P_m \dfrac{\sum_i E_i(n)\, f'(c_{ij})}{\sum_i \sum_j E_i(n) + f'(c_{ij})}, j \in Z_1, Z_3$	I
(9)	$S^k = \beta^k \sum_j P_j(m,n), j \in Z$	K
(10)	$S_i^k(m,n) = S^k \dfrac{\sum_j g^k P_j(m,n-1)\, f^2(c_{ij}) + q^k E_i(n)}{\sum_i \sum_j g^k P_j(m,n-1)\, f^2(c_{ij}) + \sum_i q^k E_i(n)}, i,j \in Z$	KI
(15)	$L_i^r(n+1) = \sum_k e^k S_i^k(m,n), i \in Z$	I
(18)	$E_i(n+1) = E_i^b + \sum_k S_i^k(m,n), i \in Z$	I

4. EL MODELO DE HERBERT Y STEVENS PARA LA DISTRIBUCION ESPACIAL DE LA ACTIVIDAD RESIDENCIAL EN CONFIGURACIONES OPTIMAS.

Este modelo fue construido durante el desarrollo del conocido estudio de transporte para la región urbana de Penn-Jersey como parte de un modelo mayor diseñado para localizar todos los tipos de actividades que utilizan el suelo urbano.

El modelo global opera de la manera siguiente: el período total de tiempo considerado en el estudio es subdividido en un cierto número de períodos cortos de iteración, en los cuales se manejan separadamente los diferentes tipos de actividades que utilizan el suelo. Cada una de estas actividades es distribuída espacialmente en una configuración que es óptima con respecto a las actividades localizadas previamente. Las iteracciones posibles entre los usos del suelo que se localizan simultáneamente son ignoradas, suponiendo que los períodos de iteración son lo suficientemente cortos para asegurar que el número de usuarios del suelo localizados en cada iteración sea pequeño.

Para alimentar al modelo de localización de la actividad residencial, en cada uno de los períodos de iteración se hace de manera exógena un pronóstico del número de familias o personas que necesitan localizarse y de la superficie del suelo urbano disponible para el uso residencial. Para distribuir a estas familias o personas en el suelo residencial disponible, en una configuración óptima, se utiliza un programa lineal. Esto constituye a su vez un pronóstico de la forma en la que se localizarán los residentes urbanos al final de cada período de iteración.

DEFINICIONES.

Familia o residente(s): persona o grupo de personas que con un presupuesto común compran o rentan un paquete residencial.

Grupo de familias o residentes: colección de familias o residentes que tienen presupuestos y gustos residenciales semejantes.

Casa: estructura física ocupada por una familia o por uno o varios residentes.

Costo habitacional: costo anual en dinero ocasionado por la construcción, operación y mantenimiento de una casa.

Nivel de amenidad: el nivel de amenidad asociado a un sitio es el nivel de satisfacción física que una familia o residente(s) tiene la oportunidad de disfrutar debido a ciertas características del sitio donde está localizada su casa.

Conjunto de viajes: número de cada uno de los diferentes tipos de viaje generados por una familia o residente(s) que viven en una cada determinada.

Patrón de viajes: conjunto de viajes con la identificación de su orígen y su destino.

Gasto en transporte: costo anual en dinero que paga una familia o residente(s) por realizar un patrón de viajes.

Renta total de un sitio: cantidad de dinero recibida anualmente por el dueño de un sitio, pagada por las personas que lo utilizan. Esta cantidad está en función del valor de la casa, el nivel de amenidad y el patrón de viajes asociado con el sitio.

Paquete residencial: combinación única de una casa, un nivel de amenidad, un conjunto de viajes y un terreno de un tamaño particular.

Canasta de consumo: combinación única de un paquete residencial y un paquete de todos los otros bienes que son consumidos anual mente por una familia. De aquí en adelante llamaremos a este último, paquete de "los otros bienes".

Presupuesto familiar total: cantidad de dinero que una familia o residente(s) gasta anualmente en la compra de una canasta de consumo.

Presupuesto residencial: parte del presupuesto familiar total que se asigna anualmente a la compra de un paquete residencial.

Región urbana: espacio geográfico dentro del cual el modelo distribuye un número de familias o residentes en el suelo urbano disponible para la actividad residencial.

Area o zona: subdivisión de la región urbana cuyas características son homogéneas con respecto al costo de construcción, el nivel de amenidad y la disponibilidad de facilidades de transporte.

MARCO CONCEPTUAL DEL MODELO.

El modelo está basado principalmente en la suposición de que los factores que consideran las familias o residentes para escoger la zona donde van a localizar su domicilio, son su presupuesto total, los objetos y bienes que constituyen una canasta de consumo y el costo de los mismos. A cada grupo de familias o residentes se le asigna un conjunto de "indiferencia" de canastas de consumo. Este, incluye a las canastas consumidas actualmente por el grupo, pero no está necesariamente limitado a ellas. Se supone que dentro de este conjunto, cada familia o residente escoge la canasta de consumo que maximiza sus "ahorros".

En el modelo, estos "ahorros" son considerados de la manera siguiente:

En una canasta de consumo particular, los precios de los objetos del paquete de "los otros bienes" son dados. Por lo tanto, el presupuesto residencial es un residuo que está determinado por el monto del presupuesto total y el costo del paquete de "los otros bienes".

Obviamente, este residuo puede variar entre las diferentes canastas de consumo.

Hay que observar además que el carácter de los cuatro factores que constituyen un paquete residencial también varía entre las diferentes canastas de consumo. Cada una de las canastas del conjunto de indiferencia incluye un paquete residencial único que tiene asociado un presupuesto residencial también único. Sin considerar el terreno por un momento, el costo de cada uno de los otros tres factores de un paquete residencial puede variar entre las diferentes áreas o zonas de la región urbana. Considerando un área o zona particular, la diferencia entre el presupuesto residencial y el costo de los tres factores en esa área es la cantidad máxima que una familia o residente(s) puede pagar por el sitio. Si el terreno fuera gratuito, esta podría ser una medida adecuada de los "ahorros" familiares debidos a las ventajas ofrecidas por la localización relativa del área en la región urbana. En el modelo se define esta diferencia como la capacidad para pagar renta por el sitio en esa área.

No obstante que se ha mencionado que las familias o residentes no tienen una preferencia particular ante las canastas de consumo del conjunto de indiferencia, es razonable suponer que los "ahorros" definidos anteriormente pueden tener una utilidad marginal positiva. Por lo tanto, se supone que una familia o residente "racional" intentará obtener dentro de su conjunto de indiferencia la canasta de consumo en la que esos "ahorros" sean máximos. En realidad, el funcionamiento del mercado del suelo urbano puede permitir al dueño del sitio obtener esos "ahorros" en forma de renta. Sin embargo, el intento de las familias para maximizar sus "ahorros" tiene como resultado en el modelo la localización óptima de cada una de ellas con respecto al número total de familias o residentes que van a ser localizados en un período de iteración específico. Esta distribución espacial será óptima desde el punto de vista de Pareto, ya que ninguna familia o residente podrá incrementar sus "ahorros" sin reducir los "ahorros" de alguna otra familia o residente, reduciendo así simultáneamente los "ahorros" agregados de la comunidad.

Por lo tanto, debido a que el término "ahorro" se ha hecho sinónimo de la capacidad para pagar renta, esta distribución óptima se logra mediante la maximización de la capacidad agregada de la comunidad para pagar renta.

EL PROBLEMA PRIMAL.

Notación.

U: Número de las áreas que forman una subdivisión exhaustiva de la región urbana bajo estudio. Estas áreas son diferenciadas mediante los superíndices K, donde $K = 1, 2, \ldots, U$.

n: Número de grupos de familias o residentes en la región urbana. Estos grupos son identificados mediante los subíndices i, donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

m: Número de paquetes residenciales disponibles en la región urbana. Estos paquetes son diferenciados por los subíndices h, donde $h = 1, 2, \ldots, m$.

b_{ih}: Presupuesto residencial del grupo de familias o residentes i, destinado a la compra de un paquete residencial h.

C^K_{ih}: Costo anual para una familia o residente(s) del grupo i ocasionado por la compra de un paquete residencial h en el área K, excluyendo el costo del terreno o suelo urbano.

S_{ih}: Superficie del sitio utilizado por una familia o residente(s) del grupo i, con un paquete residencial h.

L^K: Superficie del suelo urbano disponible para el uso residencial en el área K, durante una iteración particular del modelo.

N_i: Número de familias o residentes del grupo i que van a ser localizados en la región urbana durante una iteración particular del modelo.

X^K_{ih}: Número de familias o residentes del grupo i con un paquete residencial h que son localizados por el modelo en el área K.

El modelo de distribución espacial.

El modelo primal de programación lineal utilizado tiene la forma siguiente:

Maximizar

$$Z = \sum_{K=1}^{u} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} X^K_{ih} \left(b_{ih} - c^K_{ih}\right), \qquad (1.0)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{m} S_{ih} X^K_{ih} \leq L^K, \ (K=1,2,\ldots,U), \qquad (1.1)$$

$$\sum_{K=1}^{U} \sum_{h=1}^{m} X^K_{ih} = - N_i, \ (i=1,2,\ldots,n), \qquad (1.2)$$

y todas las $X_{ih}^{K} \geq 0,\quad (K=1,2,\ldots,U),$
$(i=1,2,\ldots,n),$
$(h,1,2,\ldots,m).$

Las restricciones (1.1) evitan que el consumo de suelo urbano exceda la disponibilidad del mismo en cada área o zona de la región urbana. Las restricciones (1.2) requieren que el modelo localice a todas las familias o residentes de cada grupo. Estas últimas restricciones son formuladas como igualdades debido a que las desigualdades (en cualquier sentido) podrían presentar ambiguedades. Supongamos que estas restricciones se escribieran en tal forma que evitaran localizar un número mayor que el número proyectado de familias o residentes. Esto podría ser lógico debido a que estamos interesados en una situación donde hay que localizar un número particular de familias o residentes, no donde el modelo pudiera localizar un número ilimitado hasta que se agotara el suelo urbano disponible.

Por otro lado, es también lógico escribir las restricciones en tal forma que se requierea que el modelo localice al menos el número proyectado de familias o residentes. Esto es particularmente importante en el caso donde existen grupos de familias o residentes que tienen una capacidad nula o negativa para pagar renta en todas las áreas. Sin estas restricciones, el modelo podría no localizar a esas familias ya que en el mejor de los casos no aumentarían la capacidad agregada para pagar renta, y en el peor de los casos la disminuirían. Por estas razones, es difícil establecer una regla general para el sentido de las desigualdades, por lo tanto es preferible y razonable formular estas restricciones como igualdades. La función objetivo (1.0) es la capacidad agregada para pagar renta.

El modelo puede hacer la distribución de las familias o residentes en el suelo urbano disponible de las siguientes maneras:

a. Un tipo de familias o residentes puede utilizar todo el suelo urbano disponible en un área. Esto ocurre cuando ese tipo de familias o residentes ofrecen la renta unitaria más alta por el suelo urbano en el área y existe un número suficiente de tales familias para ocupar el área en su totalidad.

b. El suelo urbano disponible en un área puede no ser ocupado totalmente. La utilización parcial ocurre cuando el área presenta grandes ventajas solamente para uno de los grupos de familias o residentes y no existe un número suficiente de ellos para ocupar toda el área. También ocurre cuando las ventajas del área atraen a dos o más grupos pero estos en su totalidad tampoco alcanzan a ocupar toda el área.

c. El suelo urbano disponible en un área puede dejarse vacante. Esto sucede cuando todas las familias o residentes tienen una capacidad mayor para pagar renta unitaria en otras áreas y pueden encontrar lugar para ubicarse en ellas.

d. El suelo urbano disponible en un área puede ser utilizado por dos o mas tipos diferentes de familias o residentes. Esto ocurre cuando no existen suficientes familias del grupo con la capacidad más alta para pagar renta en el área para ocupar todo el suelo urbano disponible y por lo tanto, otras familias o residentes con menor capacidad en esta área, pero mayor que en otras, ocupan el suelo urbano restante. La utilización conjunta puede presentarse también en la circunstancia poco usual donde dos o más grupos de familias o residentes tienen la misma capacidad para pagar renta unitaria en esa área y en todas las otras áreas donde podrían superar las ofertas de los demás grupos.

El dual del modelo de distribución espacial.

La notación del problema dual es idéntica a la del primal, con excepción de la variable X_{ih}^{K} la cual es reemplazada por:

r^K: Renta anual por cada m² de suelo urbano en el área K, (K=1,2,...,U).

v_i: "Subsidio" anual por familia, para todas las familias o residentes del grupo i, (i=1,2,...,n). La utilización y el significado de las variables de "subsidio" se explicarán más adelante.

El problema dual se formula de la manera siguiente:

Minimizar:

$$Z' = \sum_{K=1}^{U} r^K L^K + \sum_{i=1}^{n} v_i \, (-N_i), \qquad (2.0)$$

sujeto a:

$$S_{ih} r^K - v_i \geq b_{ih} - C_{ih}^K, \quad (K=1,2,\ldots,U),\ (i=1,2,\ldots,n),\ (h=1,2,\ldots,m). \qquad (2.1)$$

todas las $r^K \geq 0$, (K=1,2,...,U),

y todas las $v_i \geq 0$, (i=1,2,...,n).

En la mayoría de los modelos de programación lineal es difícil interpretar el dual, el cual provee información tan importante como la proporcionada por el primal.

Si observamos la función objetivo (2.0) y nos olvidamos por un momento de la segunda sumatoria, podemos interpretar la primera sumatoria como la renta total del suelo urbano. Pue de parecer curioso el minimizar la renta total del suelo urbano cuando al mismo tiempo estamos maximizando la capacidad agregada para pagar renta en el problema primal, dado que la solución óptima de ambos problemas debe ser la misma. Sin embargo, existe también una importante interpretación económica del objetivo dual.

Supongamos que el suelo urbano de todas las áreas pertenece a un solo dueño monopolista, entonces la minimización de la renta del suelo urbano minimiza también las ganancias de este monopolista. Por otro lado, si el suelo urbano es propiedad de diversos dueños individuales, entonces se estarían minimizando las ganancias de estos dueños como un todo, es decir, se estarían obteniendo sitios para las familias o residentes lo más baratos posibles dentro de las restricciones del modelo. Esto no es necesariamente una meta deseable si se causa perjuicio a los dueños del suelo urbano, pero puede observarse también que las restricciones (2.1) evitan que la renta unitaria de cada sitio sea menor que la capacidad para pagar renta unitaria de cualquier familia que puede localizarse en el área. Esto significa que los dueños individuales del suelo urbano pueden recibir por unidad de suelo al menos la cantidad que el postor más alto esté dispuesto a pagar. Esto puede crear ciertos problemas cuando el grupo de familias o residentes que hacen la oferta más alta no obtienen el suelo urbano en esa área debido a que tienen una capacidad mayor para pagar renta unitaria en algún otro lado. Es en este caso principalmente donde las variables de "subsidio" resultan importantes.

Se debe tener en cuenta que la familia o residente que hace la oferta más alta de renta unitaria en un área no pertenece necesariamente al grupo de familias o residentes más ricos. La capacidad para pagar renta unitaria depende de la capacidad para pagar la renta total y del tamaño del sitio deseado. Las familias o residentes menos ricos que utilizan sitios más pequeños, pueden hacer las ofertas más altas por unidad de sue lo urbano en un área particular. Así, los "subsidios" en el modelo pueden asignarse en algunos casos a las familias más ricas.

INTERPRETACION DE LOS "SUBSIDIOS" Y LAS RENTAS.

Como hemos visto anteriormente, las variables de "subsidio" v_i son básicamente un instrumento matemático, pero ahora vamos a considerar su significado económico. Supongamos por ejemplo que todos los grupos de familias o residentes han sido localizados y que todas las áreas han sido ocupadas completamente. Supongamos además que un grupo de familias o residentes ofrece más por unidad de suelo urbano que los otros grupos, estableciendo as´ el nivel de las rentas en el área.

Debido a que en el modelo las áreas no son divisibles y debido también a la naturaleza de la programación lineal, se tiene que cobrar la misma renta unitaria en toda el área. Considerando que las familias o residentes con menor capacidad para pagar renta tienen que ser localizadas en algún lado y suponiendo que existe solamente un área con suelo urbano vacante, entonces se debe "subsidiar" a estas familias, ya que su capacidad para pagar renta es insuficiente para cubrir el nivel de renta establecido en el área.

Esta interpretación simplista de las variables de "subsidio" es fácil de entender, sin embargo su existencia crea problemas cuando se manejan situaciones más complejas. Debido a que las variables v_i son asignadas a los grupos de familias o residentes, una vez que cualquier familia o residente recibe un "subsidio", todo el grupo debe recibirlo; esto parece realista si se considera la aplicación de una política pública equitativa, pero este argumento puede no ser válido. Supongamos que todas las familias de alto ingreso menos una, son acomodadas en un área particular. La familia no localizada podría ser acomodada en alguna otra área, pero si las ventajas de la primer área fueran muy grandes y si las demás áreas fueran altamente insatisfactorias para este tipo de familia, la familia no localizada tendría una capacidad menor para pagar renta que las familias competidoras pertenecientes a otros grupos. Como esta familia tiene que ser localizada en algún lado, debe ser "subsidiada", pero en este proceso se "subsidiaría" también a todas las familias de su grupo, elevando así su capacidad para pagar renta hasta niveles innecesariamente altos. Este problema podría evitarse si se desagregan los grupos de familias y asignando una restricción (1.2) a cada familia individual, pero esto haría que el problema fuera extremadamente difícil de manejar. Un enfoque mejor consiste en desagregar las áreas después de cada corrida del modelo. Esto requiere hacer una partición de cualquier área en la que dos o más tipos diferentes de familias o residentes están lozalizados en dos o más subareas, siendo ocupadas cada una de ellas por un solo tipo de familia.

Los niveles de las rentas pueden ajustarse mediante una carga fiscal a los dueños del suelo urbano, equivalente a la cantidad excedente de las rentas ocasionada por los "subsidios". Entonces, las rentas resultan iguales a las capacidades para pagar renta y por lo tanto puede eliminarse el tipo de "subsidios" discutido anteriormente. La desagregación de las áreas puede permitir la aproximación a un modelo contínuo, en el cual se hagan por separado las ofertas para cada pequeña parcela y se pueda diferenciar la renta entre parcelas vecinas.

La aproximación al modelo contínua mediante la programación lineal es de bastante utilidad en cualquier aplicación práctica, debido a que el modelo contínuo es muy difícil de resolver. Más aún, el modelo de programación lineal puede ser el más realista de los dos, debido a que es difícil imaginar una situación real donde existan marcadas variaciones en las rentas, costos asociados y ventajas localizacionales entre sitios contiguos.

Vamos a tratar ahora otro problema importante. Supongamos que un cierto grupo de familias o residentes tiene la capacidad más alta para pagar renta en un área, pero no puede ocuparla totalmente. Supongamos además que todos los otros grupos tienen mayor capacidad para pagar renta en otras áreas y pueden ser acomodados completamente en ellas. Esto nos hace considerar que la restricción del suelo urbano (1.1) para el área considerada puede permanecer como desigualdad en una solución óptima. De acuerdo a la estructura general de los modelos de programación lineal, esto significa que la variable renta correspondiente a esta área debe ser igual a cero.

En términos económicos, el suelo urbano considerado como un recurso para este tipo de familias, no es entonces realmente escaso ya que puede tener una renta igual a cero.

Sin embargo, las restricciones duales (2.1) para esta área, requieren que la renta del suelo urbano no sea menor que la capacidad para pagar renta unitaria de cualquier familia que pueda localizarse en ella. Esto puede ser una contradicción a menos que las familias con la oferta más alta tengan una capacidad nula o negativa para pagar renta en esa área. Si su capacidad para pagar renta es estrictamente positiva, entonces todas las unidades de suelo urbano en el área tienen una renta r^K positiva, aún en el caso de que algunas no sean consumidas. Esto puede hacernos pensar que el valor de la función objetivo dual podría ser mayor que el valor de la función objetivo primal.

Este dilema conceptual puede resolverse si recordamos que las variables de "subsidio" v_i necesitan ser no positivas, por lo tanto, podemos satisfacer al mismo tiempo la condición de renta cero para las áreas no ocupadas y la condición de renta unitaria igual o mayor que la capacidad para pagar renta unitaria en todas las áreas. El "subsidio" negativo puede ser considerado como un "impuesto" a las familias (igual a la ca paciadad para pagar renta de las familias en el área que ellas ocupan pero no consumen totalmente) para ser utilizado como un "subsidio" a los dueños del suelo urbano del área para "pagarles" por el suelo que se consume realmente.

Por ahora, se nos puede ocurrir que se ha obtenido la información necesaria para construir una superficie clásica de rentas para la región urbana. Dado un mapa de la región, se puede colocar sobre cada área un bloque con una altura proporcional a la renta unitaria en el área. Esta superficie puede presentar discontinuidades pero es efectivamente más realista que la superficie suavizada de la teoría económica clásica. Una región metropolitana multinodal con la topografía irregular, un sistema de transporte distribuido también irregularmente y con patrones mezclados de usos del suelo, no presenta generalmente gradientes de renta suaves.

La cuspicidad de las discontinuidades de la renta pueden reducirse si se supone que las familias o residentes no necesitan hacer sus ofertas iguales a la cantidad total de su capacidad para pagar renta, ya que pueden obtener el suelo urbano deseado simplemente mediante ofertas mayores que las de otras familias competidoras.

Así, el nivel de las rentas estará entre la capacidad para pagar renta de las familias que pueden ocupar el suelo urbano y la oferta que sobrepase aunque sea ligeramente la oferta más alta de las familias competidoras. Esto dependerá del patrón de tenencia de la tierra y de los caprichos del mercado del suelo urbano.

LIMITACIONES DEL MODELO

Entre las limitaciones del modelo se incluyen las siguientes:

a. Problemas en la obtención de los datos.

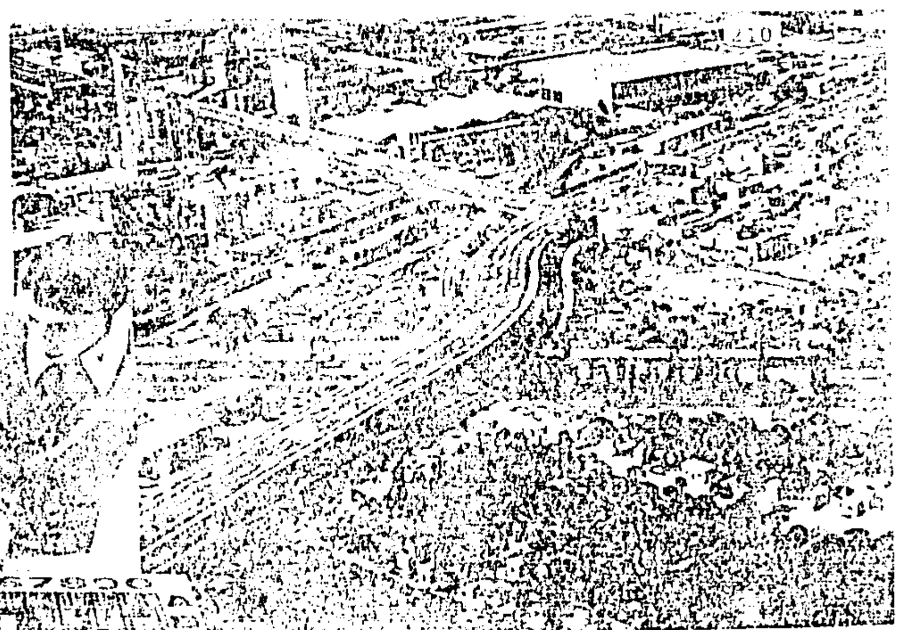
Frecuentemente, es difícil obtneer datos consistentes acerca de los presupuestos y gustos familiares, los niveles de amenidad y los diferentes costos involucrados en la formulación del modelo. No obstante, estos datos pueden ser recolectados a groso modo para hacer operativo el modelo.

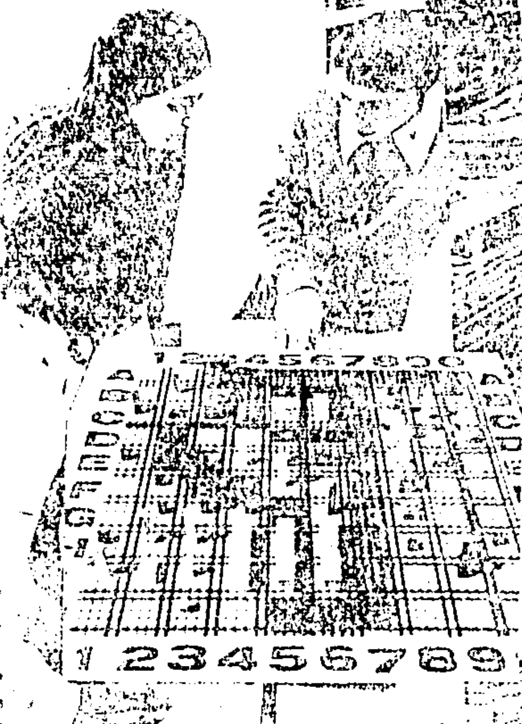
b. Problemas de predicción. La confiabilidad de los resultados del modelo depende de la precisión de los pronósticos utilizados en cada uno de los períodos de iteración acerca del número y las características de las familias o residentes que desean localizarse en la región urbana y de la cantidad de suelo urbano disponible en cada área.

c. Problemas ocasionados al restringir la elección localizacional de una familia o residente a un solo conjunto de indiferencia. Esta restricción puede evitar que el modelo obtenga un óptimo verdadero, ya que las familias o residentes no pueden cambiar a otros conjuntos de indiferencia que pudieran proporcionarles niveles de satisfacción más altos, obtenidos algunas veces a través de la sustitución contínua de las canastas de consumo.

d. La distribución espacial de las familias o residentes es óptima solamente con respecto al período de iteración considerado. El modelo optimiza para cada uno de los períodos de iteración individuales, por lo cual puede ser ilógico el suponer que la agregación de tales óptimos llegue a constituir un óptimo para el período total de tiempo considerado en el estudio.

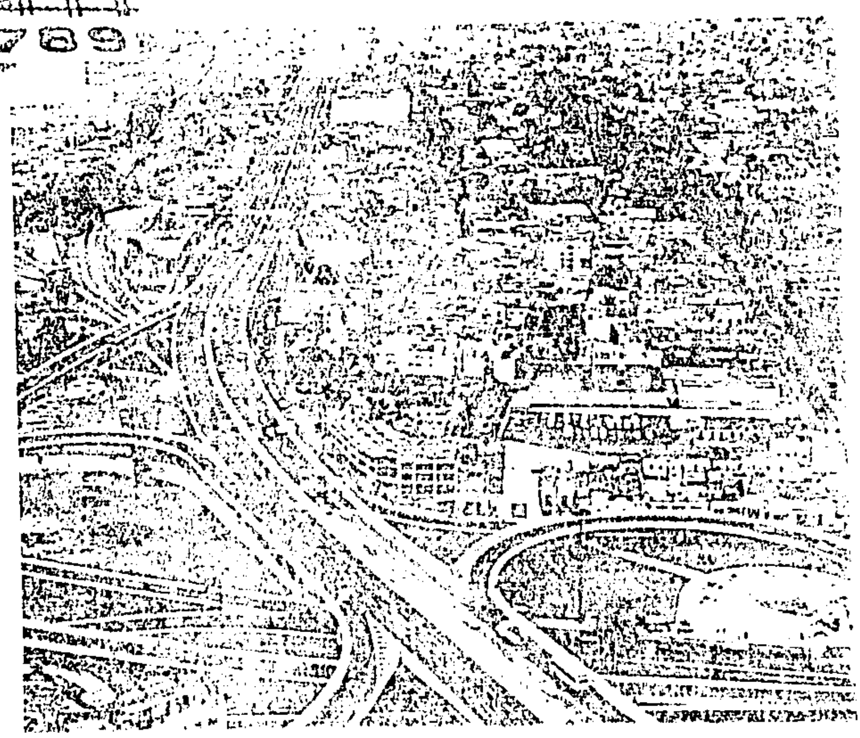
e. Problemas de simulación. Una limitación bastante grave del modelo es el hecho de que no toma en cuenta las interacciones que ocurren entre las familias o residentes que se localizan simultáneamente, con excepción de la competencia por el suelo urbano.





APENDICE 2

SIMULACION DE LOS SISTEMAS URBANOS UTILIZANDO LA TECNICA DE LOS JUEGOS.



S I M U L A C I O N   M E D I A N T E   J U E G O S

Debido a que todas las actividades humanas involucran participantes, reglas, procedimientos, éxito y fracaso, podemos utilizar a los juegos como una analogía de las actividades sociales, económicas y políticas; es decir, existe una similitud entre los juegos y las actividades de la vida real. Un juego es una actividad entre dos o más tomadores de decisiones independientes que buscan conseguir sus objetivos. La simulación mediante juegos permite analizar los problemas de competencia por recursos escasos, donde existe conflicto parcial o total entre grupos o individuos.

Al preguntarnos: ¿cuáles son los elementos que forman la estructura básica de la sociedad?,¿cómo interactúan y funcionan esos elementos?,¿qué técnicas están disponibles para entender las estructuras y los procesos involucrados?, se puede dar la siguiente respuesta: el comportamiento de los sistemas depende de elementos estructurales y fuerzas dinámicas que son influídas por el proceso de toma de decisiones públicas y privadas.

El objetio más importante de la simulación mediante juegos es el entender los procesos dinámicos de un sistema sujetos a fuerzas indeterminísticas dentro de un rango de posibles resultados; es en escencia un enfoque probabilístico.

LENGUAJE DE LOS JUEGOS

Se puede considerar a la simulación mediante juegos como una forma de comunicación que tiene convenciones específicas que gobiernan su uso (gramática de los juegos) y que pueden ser codificadas y organizadas para construir principios generales para la construcción de nuevas simulaciones.

La simulación mediante juegos es un lenguaje gestáltico que permite comunicar totalidades en forma simúltanea y dinámica.

SIMULACION MEDIANTE JUEGOS Y TEORIA DE JUEGOS

Son disciplinas diferentes pero altamente interrelacionadas.

Simulación:

Es la representación de un sistema u organización por medio de otro sistema o modelo que tiene una semejanza con el comportamiento relevante del sistema original. El simulador es más simple que el fenómeno que representa para mayor facilidad de análisis y operación.

Técnica de juegos:

Emplea seres humanos que actúan en papeles simulados en un medio ambiente que contiene elementos de cooperación y/o conflicto potencial entre los jugadores.

Teoría de juegos:

Es parte de un gran cuerpo teórico acerca de los procesos de toma de decisiones. Provee un lenguaje formal para la descripción de procesos de toma de decisiones concientes y orientadas a la consecusión de metas específicas.

Utiliza conceptos tales como estado de la información, elección, movimiento, estrategía, resultado, ganancia, etc.

La Teoría de juegos es una rama de las Matemáticas.

La descripción formal de la Teoría de juegos ofrece una guía para la construcción de modelos de simulación mediante juegos y éstos constituyen un vehículo para probar las hipótesis formuladas por la Teoría de juegos.

CARACTERISTICAS GENERALES DE LA SIMULACION MEDIANTE JUEGOS.

1. Tienden a utilizar una combinación hombre-máquina, aunque existen modelos de operación manual de bastante uso.

2. Son principalmente utilizados con propósitos de entrenamiento y experimentación de cursos alternativos de acción.

3. Generalmente "comprimen" el tiempo real de operación del sistema simulado.

4. Emplean inevitablemente un medio ambiente simulado que intenta representar la parte del "mundo real" relevante al problema, según la percepción de los diseñadores del juego.

5. Se desarrollan en ciclos, cada uno de los cuales representa algún período de la vida real. El número de ciclos debe ser suficiente para asegurar que se cumpla el objetivo programado del juego.

6. Requieren que los jugadores "actúen su papel", haciendo decisiones apropiadas.

7. Involucran conceptos de competencia, cooperación y conflicto.

APLICACIONES DE LA SIMULACION MEDIANTE JUEGOS EN LA PLANEACION URBANA.

1. Educación en Planeación Urbana.

2. Entrenamiento de profesionistas para la toma de decisiones, implementación de planes y realización de actividades específicas.

3. Resolución de conflictos.

4. Investigación.

5. Coordinación entre planificadores y tomadores de decisiones.

6. Participación de los ciudadanos en los asuntos del cambio urbano.

Para una persona que no conoce las técnicas abstractas de resolución de problemas o análisis de sistemas, el diseño de un juego es un método accesible para reducir problemas complejos a componentes fácilmente manejables.

PASOS PARA EL DISEÑO DE UN MODELO DE SIMULACION MEDIANTE JUEGOS.

1. Determinar el contexto del sistema que se quiere simular.

2. Identificar los actores que intervienen, sus objetivos y sus recursos.

3. Determinar la secuencia dinámica de las interacciones posibles.

4. Imaginar el formato físico del juego.

Una explicación más detallada de estos pasos es la siguiente:

1. Determinar el contexto general del sistema:

   1.1 Definir el alcance del problema en términos de:

      a) Geografía.
      b) Tiempo de duración.
      c) Actores.
      d) Tipos de acciones posibles.

   1.2 Esta definición debe restringirse por:

      a) Tiempo y recursos disponibles.

b) Necesidad de detalle en el análisis.

2. Identificar los actores que intervienen.

2.1 Determinar las características de cada actor que lo hacen distinguirse de los demás.

Se deben estudiar los procesos de decisión internos; cada actor tiene varios actores dentro de él mismo. Se puede hacer un juego más detallado acerca del conflicto interno dentro de cada jugador, llegando a juegos de varios niveles que analizan conflictos dentro de conflictos.

2.2 Determinar los objetivos de los actores.

La identificación de los objetivos de los actores debe hacerse en el contexto del alcance del juego. Son significativos solamente aquellos objetivos que son relevantes al campo de juego o a las funciones representadas por los jugadores.

2.3 Determinar sus recursos en términos de:

a. Tiempo.
b. Energía.
c. Recursos generados en el pasado.
d. Poder de negociación.
e. Recursos psicológicos (capacidad para tomar riesgos).

2.4 Especificar el criterio de triunfo de cada actor.

El triunfo de cada actor consiste en el logro de un conjunto dado de objetivos a un gasto mínimo de recursos o en el logro de un grado máximo de objeti vos dentro de los límites de su presupuesto.

Se debe también determinar el grado de empatía (competencia o armonía entre los objetivos de un actor con los de los demás).

3. Determinar la secuencia dinámica de las interacciones posibles.

   3.1 Analizar la existencia de competencia y/o cooperación entre los actores.

   3.2 Delimitar todas las formas posibles en las que los jugadores pueden alcanzar sus metas a partir de su situación inicial.

   3.3 Determinar la cantidad de interacciones posibles.

   Para esto, se utilizan las fórmulas y criterios siguientes:

   a. CSI = FG(NA,NMSP).

      CSI = Complejidad de la secuencia de interacciones.

      FG = Función geométrica.

      NA = Número de actores.

      NMSP = Número de movimientos secuenciales permitidos.

   b. NM = TMJ/TPM

      NM = Número de movimientos.

      TMJ = Tiempo máximo de juego.

      TPM = Tiempo promedio por movimiento.

c. Si la representación es muy amplia en alternativas se deben añadir restricciones adicionales para limitar el alcance de las acciones e interacciones posibles.

d. Si la representación es muy limitada en alternativas se debe regresar a la definición del alcance del juego y la identificación de actores, objetivos y recursos.

4. <u>Imaginar el formato físico del juego</u>

   a. Diagramas de interacción funcional.
   b. Manual con las reglas del juego.
   c. Espacio físico (locales necesarios).
   d. Objetos representativos de las componentes físicas del sistema simulado.

COMPONENTES DE UN MODELO DE SIMULACION MEDIANTE JUEGOS.

1. <u>Escenario</u>

   1.1 Estado actual del sistema.

   1.2 Descripción de los "papeles" que van a representar los jugadores.

   1.3 Diagramas de interacción funcional.

   1.4 Gráficas con datos relevantes.

2. <u>Procedimientos</u>

   2.1 Mecánicos:

   a. Información sobre flujos y fuentes de información y recursos.
   b. Fases o pasos del juego (micro y macro ciclos).

2.3 Reglas:

a. Sistemas de contabilidad

Modelos y leyes.

b. Reglas que prescriben el comportamiento de los jugadores.

3. <u>Estructura simbólica.</u>

3.1 Bases para la estructura simbólica.

a. Explícitas.
b. Implícitas.

3.2 Vocabulario de símbolos.

a. Supersímbolos:

-"Papeles".
-Inventarios.
-Flujos.
-Indicadores.

b. Símbolos simples (objetos o piezas del juego).

EL SISTEMA DE CONTABILIDAD.

A partir del escenario dado al comienzo del juego, los elementos dinámicos introducidos por "el jugar a un papel", provocan cambios en la definición o tipo de situación confrontada por los jugadores.

La función del sistema de contabilidad consiste en monitorear y procesar las actividades de los jugadores y actualizar el escenario del juego. Este sistema debe proporcionar lo siguiente:

1. Totales acumulativos para todo el juego.

2. Totales acumulativos para los asuntos individuales de los jugadores.

3. Un modelo autónomo que procese los asuntos individuales y los totales acumulativos. Este modelo debe contener suposiciones relativas a comportamientos y respuestas.

El sistema de contabilidad puede ser de operación manual o puede también utilizar una computadora para los cálculos complejos.

EVALUACION DE LOS RESULTADOS DE UNA SIMULACION MEDIANTE JUEGOS.

Después de cada juego el administrador del experimento debe ayudar a los jugadores a analizar su experiencia, conduciendo la discusión y haciendo preguntas relevantes tales como:

¿Qué tanto se parece el juego a la situación real?.

¿Qué tipos de incertidumbres fueron experimentadas?.

¿Qué clases de decisiones fueron hechas?.

¿Qué efectos resultaron inmediatamente aparentes?.

¿Qué restricciones sintieron los jugadores?.

¿Qué tipos de interacciones ocurrieron durante el juego?.

¿Qué aprendieron los jugadores?.

¿Qué sintieron que hicieron mal?.

¿Qué curso de acción escogerían la siguiente vez?.

¿Cumplió el juego el propósito establecido?.

CLUG
MODELO DE SIMULACION MEDIANTE JUEGOS DEL USO DEL SUELO URBANO.

INTRODUCCION

Los estudios más recientes sobre la estructura interna de las ciudades afirman que estas están sustentadas por actividades básicas, cuya localización se determina exógenamente a la ciudad, a base de ventajas comparativas entre los sitemas económicos, regionales, nacionales e internacionales. Las actividades básicas, aunadas al sistema de transporte, constituyen las características esenciales del patrón urbano.

Este patrón está integrado, en parte, por las viviendas de los trabajadores en actividades básicas y tiene características dinámicas debido al flujo y reflujo diario de quienes acuden a ella a trabajar, así como al movimiento de bienes y comerciantes que van desde y hacia los sitios de las actividades básicas. Podría haber, por supuesto, algunas motivaciones basadas en la calidad del terreno sobre el que se extiende la ciudad.

Otra caracterización proviene de la orientación de los negocios hacia las actividades básicas y de las actividades terciarias hacia los trabajadores (consumidores) y sus familias. También, los viajes de compras originan flujo de clientes. Es entonces cuando aparecen los efectos secundarios: la localización de la vivienda de quienes trabajan en actividades no básicas, trabajadores que acuden adicionalmente a la ciudad, mayor demanda de actividades terciarias, etc., y que forman una cadena cada vez más compleja de efectos multiplicadores.

Para establecer estos argumentos simbólicamente, se tiene:

Definiciones.

A = patrón de actividades básicas locales.

B = sistema de transporte.
C = conjunto de sitios urbanos.
D = empleados o trabajadores en A.
E = patrón residencial de D.
F = patrón básico de desplazamiento de los empleados.
G = sistema de servicios para negocios.
H = sistema de actividades terciarias.
I = conjunto de efectos secundarios.

Establecido así A, se supone:

D = f(A)
E = f(A, D, sujeto a B y C)
F = f(A, E, supeditado a B)
G = f(A)
H = f(E, D, supeditado a B)
I = f(G,H)

CLUG utiliza estas técnicas y postulados estáticos y les da vida en condiciones más reales, dinámicas, con los hechos y complicaciones imprevistas que se presentan en el crecimiento y evolución urbanos. En operación, CLUG se convierte en un modelo de simulación donde los seres humanos son quienes toman decisiones; esto permite a tales seres, como jugadores, enjuiciar el proceso de crecimiento y decadencia de una ciudad al participar en el proceso. Aunque muy limitado en términos de los elementos del crecimiento urbano que intenta incluir, y aparentemente con una estructura muy simple, el juego genera rápidamente un patrón de desarrollo complejo e imprevisible, el cual es justamente representativo por lo menos de algunos de los componentes del crecimiento y sus interrelaciones.

El tablero del juego presenta una gran variedad de posibles sitios urbanos (C), divididos entre celdillas de igual área por un sistema coordenado rectangular. Sobrepuesto a los sitios de posibles usos del suelo, está el sistema de trans porte (B), integrado por calles principales y secundarias, así como por una terminal; este sistema constituye el determinante básico para la localización de las industrias básicas (A).

Estas actividades básicas se hallan representadas por industrias chicas y grandes, que pueden ser "construídas" y operadas por los jugadores. La economía de tal operación, tomando en cuenta el sistema de transporte, hace que sus localizaciones tiendan a agruparse tan cerca de la terminal como sea posible. Los trabajadores de estas industrias (D) disponen de unidades residenciales construidas por otros jugadores. El costo del transporte, desde y hacia el trabajo (F), así como el intento de los jugadores de minimizar ese costo dan por resultado un patrón de localizaciones residenciales que tiende a agruparlas alrededor de las industrias, sujeto esto a la disponibilidad de terrenos, al precio de estos y al sistema de transporte, E = f(A, B sujeto a B y C). El número de unidades residenciales depende del número y tipo de industrias existentes, D = f(A).

El sistema de instalaciones para negocios está representado por un tipo de edificio llamado oficina (G). Las ganancias de este tipo de construcción dependen del número potencial de inquilinos, constituido principalmente por las industrias G = f(A). Las actividades terciarias son los centros comerciales (H) que sirven a las unidades residensiales. El número y localización de estas tiendas depende del volúmen y la ubicación de las unidades residenciales previamente establecidas; de acuerdo con las restricciones y facilidades que proporciona el sistema de transporte disponible H = f(E, D sujeto a B).

Al igual que la localización de los negocios y de las unidades de servicios terciarios, surgen nuevas oportunidades de localización, ó sea los llamados efectos adicionales. Estos comprenden la construcción de unidades residenciales para los empleados que trabajan en las tiendas y los negocios que habrán de ubicarse lo más cerca posible de dichas fuentes de trabajo, $I = f(G, H)$. Estas unidades residenciales crean a su vez servicios terciarios adicionales. Estos efectos secundarios continúan hasta que en un momento dado el sistema llega a estar relativamente bien balanceado.

La evolución de la ciudad en CLUG sigue estos ciclos básicos además de la construcción de industrias adicionales, dando lugar así a otros ciclos sucesivos de crecimiento y desarrollo. En el curso del juego, el proceso de decadencia de las estructuras más viejas, aunado a posibles dislocaciones debidas a desastres naturales o económicos, así como a cambios en el sistema de transporte, conducen a contínuas modificaciones y ajustes en ese proceso.

SINTESIS DEL PROCEDIMIENTO DEL CLUG BASICO

El juego CLUG está específicamente diseñado para proporcionar un conocimiento básico de los factores subyacentes que afectan el crecimiento de una zona urbana. El juego hace énfasis en ciertos aspectos de la economía urbana: la relación que existe entre las industrias básicas y el empleo, la habitación y los costos de transporte, el desarrollo de servicios comerciales, el financiamiento e instalación de servicios, negocios , el financiamiento e instalación de servicios municipales, y en la ubicación e interdependencia de todas estas actividades.

Como participante de CLUG, el jugador tiene oportunidad de invertir en terrenos, construir edificios de varios tipos y buscar los medios adecuados para relacionar las inversiones dentro de la economía local y hacer producir su inversión (cuando la inversión ha sido bien planeada). Si bien es de esperarse la competencia entre los jugadores por un lugar en el sistema, existe desde luego un límite en dicha compe tencia. El bienestar individual depende en gran parte, de todos los jugadores. Aunque adversarios, los jugadores aprenderán a cooperar unos con otros para lograr ciertos propósitos en bien del desarrollo de la comunidad.

Un instructor dirige el juego explicando e interpretando las reglas. Representa también a las economías externas a la comunidad local en la compra de productos manufacturados y la venta de servicios comerciales a los jugadores que no son capaces de obtenerlos a un precio adecuado dentro de la comunidad. Dicho instructor anuncia también aquellas catástrofes inesperadas que pueden dañar la estabilidad de la comunidad a través de la pérdida de sus inversiones. No interviene directamente en el juego, excepto para ordenar eventos y ejecutar reglas. Dentro de los límites de la capacidad humana, opera objetiva y racionalmente en pro de los jugadores y de la comunidad. Como tiene más habilidad que los jugadores novatos, el instructor puede ocasionalmente aconsejar sobre inversiones y toma de decisiones en general. Su consejo deberá ser cuidadosamente considerado, pero aún el más hábil jugador no se halla capacitado para predecir los eventos que pueden ocurrir en el juego. El instructor no es omnipotente, él no controla la dirección o evolución de la ciudad. Esta se halla totalmente en manos de los jugadores y las reglas que se expondrán más adelante.

De vez en cuando, suele presentarse en el juego un evento de especial interés y que tiene aplicaciones importantes en algún fenómeno similar de la vida real. En tal caso, el instructor puede interrumpir el juego para explicar los detalles de lo que ha ocurrido y mostrar su relación con los eventos de la vida real. Si bien tales interrupciones pueden retrasar el proceso de crecimiento de la comunidad, constituyen buenas oportunidades para aprender más acerca de la manera en que operan los sistemas urbanos, tanto en el juego como en la vida real.

El instructor es usualmente auxiliado por una persona que lle va el registro de las propiedades, estima los valores de las construcciones y terrenos, la edad de las construcciones y el estado financiero de la comunidad, incluyendo impuestos venci dos. Este contador representa al tesorero público y debe de estar abierto a la inspección por parte de los jugadores duran te el juego. Para entender la medida y significación de ese registro público se requiere sin embargo cierta experiencia.

Las reglas siguientes proporcionan el marco básico del juego en su forma más simple . No obstante que al principio parece difícil comprenderlo, casi todos los jugadores aprenden rápi damente en el curso de las dos horas iniciales del juego. La misma serie de pasos ocurre en cada ciclo. Después de al gunos cilcos se familiarízan con los pasos y los números y cantidades empleadas resultan pronto conocidas a todos los ju gadores. Como no se ha adquirido práctica en la operación del juego, solamente uno o dos ciclos se realizan usualmente durante las primeras dos horas del juego. Después de este pe ríodo inicial, el juego se desarrolla a razón de 30 minutos ó menos por ciclo.

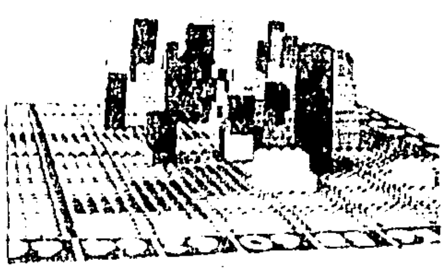
La velocidad con que puede completarse un ciclo está determi nada en gran parte por la eficiencia de los jugadores para tomar decisiones, tanto en los equipos individuales como en la comunidad en su conjunto. Como el juego contiene numero sas decisiones basadas sobre mucha información, los jugadores podrán elegir la información útil y así alcanzar práctica como ejecutivos urbanos. Deberán aprender a distinguir las decisio nes importantes de las triviales y evaluar la información reco mendable para tomar rápidamente decisiones, siempre anticipán dose a las decisiones complementarias que deberán hacerse por otros jugadores.

Una racionalización completa es casi imposible, aún en este simple juego y los jugadores deben aprender a vivir en un mundo donde las presiones del tiempo y la falta de información los obligan a establecer una conducta solo parcialmente racional o satisfactoria.

CLUG se juega más efectivamente còn 3 ó 5 equipos de una a tres personas cada uno. Es posible usar más equipos ò más personas por equipo, pero los procedimientos contables se vuelven muy complejos. Además, es difícil que un equipo llegue a una decisión cuando cuenta con más de 3 integrantes, a menos que esté muy bien organizado internamente. Una determinación clara de las funciones dentro de cada equipo ayuda a tomar decisiones rápida y fácilmente; los jugadores deben ser estimulados a elegir un líder que será el portavoz y voto representativo de cada equipo.

El juego básico de CLUG descrito en las siguientes reglas, es lo suficientemente complejo como para satisfacer a la mayoría de los jugadores en 5 ó 10 ciclos de juego. Es posible extenderse más aún, pero el aprendizaje adicional disminuye mucho a partir del décimo quinto ciclo, a menos que se introduzcan reglas o modificaciones adicionales.

El conjunto de experimentos diseñados de acuerdo con las reglas básicas permite explorar sistemáticamente los efectos de cierta clase de fenómenos urbanos. Una vez aprendido el juego básico, la mayor parte de los jugadores está en posición para realizar sus ciclos, con propósitos experimentales, escogiendo a uno de los jugadores como instructor, a otro como contador y haciendo los demás los papeles que requieren los experimentos en particular.



REGLAS DETALLADAS DEL CLUG BASICO

La simple lectura de estas reglas es suficiente para proporcionar al jugador una base confiable para empezar a jugar. El significado y finalidades específicas de muchas reglas irán aclarándose a medida que el juego progrese. Como cualquier juego, más que leer acerca de él, la mejor manera de entender el CLUG es jugarlo. Aunque aparentemente difíciles, las reglas son repetitivas, por lo que su comprensión es sumamente fácil.

Dinero CLUG.

Al principio del juego básico, cada equipo dispone de $ 100 000.00 en efectivo. Este dinero puede emplearse en comprar terrenos, eregir construcciones, cubrir impuestos y hacer los pagos necesarios a otros jugadores. En cada ciclo entra al juego dinero adicional cuando el instructor hace los pagos a los dueños de las industrias. Una parte de este dinero circula hacia otros jugadores en forma de pago de empleos y pagos a las tiendas y oficinas por servicios diversos. A su vez, sale dinero del juego cuando los jugadores pagan servicios por transportación, comprar bienes o servicios en economías externas a la ciudad, pagan servicios municipales a través de impuestos y hacen pagos para la construcción o renovación de edificios. En el juego básico no está permitido que el instructor realice préstamos, si bien la comunidad conjuntamente puede contraer deudas hasta por el límite permitido. Los préstamos entre equipos son válidos siempre y cuando sus términos no interrumpan el juego. Los jugadores pueden esperar usualmente un diez por ciento de ganancia en una buena inversión en la ciudad, aunque de hecho, logran ganancias más altas o más bajas de acuerdo con las inversiones y administraciones, buenas o desacertadas, que realicen.

REGLAS DETALLADAS DEL CLUG BASICO

La simple lectura de estas reglas es suficiente para propor cionar al jugador una base confiable para empezar a jugar. El significado y finalidades específicas de muchas reglas irán aclarándose a medida que el juego progrese. Como cual quier juego, más que leer acerca de él, la mejor manera de en tender el CLUG es jugarlo. Aunque aparentemente difíciles, las reglas son repetitivas, por lo que su comprensión es suma mente fácil.

Dinero CLUG.

Al principio del juego básico, cada equipo dispone de $ 100 000.00 en efectivo. Este dinero puede emplearse en com prar terrenos, eregir construcciones, cubrir impuestos y ha cer los pagos necesarios a otros jugadores. En cada ciclo en tra al juego dinero adicional cuando el instructor hace los pagos a los dueños de las industrias. Una parte de este dine ro circula hacia otros jugadores en forma de pago de empleos y pagos a las tiendas y oficinas por servicios diversos. A su vez, sale dinero del juego cuando los jugadores pagan ser vicios por transportación, comprar bienes o servicios en eco nomías externas a la ciudad, pagan servicios municipales a través de impuestos y hacen pagos para la construcción o re novación de edificios. En el juego básico no está permitido que el instructor realice préstamos, si bien la comunidad conjuntamente puede contraer deudas hasta por el límite per mitido. Los préstamos entre equipos son válidos siempre y cuando sus términos no interrumpan el juego. Los jugadores pueden esperar usualmente un diez por ciento de ganancia en una buena inversión en la ciudad, aunque de hecho, logran ganancias más altas o más bajas de acuerdo con las inversio nes y administraciones, buenas o desacertadas, que realicen.

Tipos de uso del suelo

En el CLUG existen tres tipos básicos de uso del suelo: industrial, comercial y residencial. Existen niveles de densidad industrial: gran industria (GI) y pequeña industria (PI). En las etapas de construcción de cualquier ciclo, una industria pequeña puede transformarse en grande pagando la diferencia de su costo inicial de construcción y cambiando el tipo de sus edificios en el tablero.

En terrenos comerciales se construyen 3 tipos básicos de edificios: tienda local (TL), grandes almacenes (GA) y oficina (O). Una tienda local proporciona bienes y servicios tales como abarrotes, productos farmacéuticos y artículos domésticos. Cada unidad residencial del tablero deberá comprar una cantidad determinada de bienes en una tienda local en cada ciclo o adquirirlas del instructor. Los grandes almacenes ofrecen un rango más especializado de bienes y servicios de adquisición menos frecuente, como son joyas, muebles, automóviles, etc. Cada unidad residencial del tablero deberá adquirir una cantidad normal de estos bienes en los grandes almacenes o del instructor en cada ciclo.

Finalmente, las oficinas proporcionarán una gran variedad de servicios contables y administrativos a las tiendas e industrias. Todas las industrias y las tiendas deberán pagar una cantidad normal de estos servicios en cada ciclo a las oficinas construidas o al instructor. No se permiten cambios de un tipo de uso del suelo comercial a otro, a menos que el edificio original sea completamente demolido y se construya un nuevo edificio en su lugar.

El suelo residencial se emplea para unidades habitacionales que pueden pertenecer a 4 niveles distintos de densidad: R1, R2, R3 ó R4. Cada unidad residencial incluye una unidad para los empleados y sus familias, los cuales deberán hacer adquisiciones normales en las tiendas locales y centrales en cada ciclo. A una unidad residencial de alta densidad (R4) le corresponden 4 unidades para empleados y 4 grupos potenciales de clientes de las tiendas locales y centrales. La densidad del terreno residencial puede ser incrementada en las etapas de construcción de cada ciclo, pagando la diferencia de costo entre los dos tipos de edificios y cambiando, naturalmente, las formas que lo representan en el tablero. El costo de construcción para cada unidad residencial es algo mayor en las de alta densidad que en las de baja, por lo exclusivo del lugar y el costo de los servicios públicos. Esto es resultado en parte del hecho de que en el juego básico se considera que todos los residentes pertenecen a un mismo nivel socio-económico. Cada tipo de uso del suelo debe tener asociado un símbolo en el tablero que represente que uso es y a que equipo pertenece.

Empleo.

Todas las industrias y comercios deben emplear unidades residenciales para poder trabajar. Una industria grande trabajando a plena capacidad, puede emplear hasta 4 unidades residenciales; una industria pequeña emplea hasta dos unidades residenciales; las tiendas locales y centrales y las oficinas emplean cada una de ellas una unidad residencial cuando están en operación. Los diferentes niveles de salarios quedan establecidos en el juego básico. El dueño de una unidad residencial empleada por una industria o comercio recibe un pago de $ 6 000.00 por cada grupo de empleados en la etapa de pago de empleos de cada ciclo. Este dinero procede del equipo al que pertenece la fábrica o tienda. Los contratos de empleo son negociados entre dos equipos, los dueños de los empleos y los de los empleados.

Todos los contratos de empleo tienen efecto hasta el siguiente ciclo divisible entre cinto (cinco, diez, quince, etc.). En ese tiempo, en la etapa de alquileres, pueden negociarse nuevos contratos de común acuerdo entre patrones y empleados.

Comercio.

Como ya fue dicho, el suelo empleado para usos comerciales ofrece un determinado volúmen de bienes y servicios a sus clientes potenciales. Los usuarios llamados a comprar estos bienes y servicios prefieren a aquellos vendedores que ofrecen mejores precios y tienen localización más ventajosa.

Una vez que cada edificio residencial ha convenido en comprar en determinada tienda local ó gran almacén en particular, los convenios y los precios regirán hasta el siguiente ciclo divisible entre cinco.

Los precios de los servicios y bienes normales los fija el dueño de cada tienda u oficina, quien se ve restringido por tres factores básicos. El primero es que esos bienes y servicios están al alcance de los jugadores de economías externas, por ejemplo el instructor. El instructor vende también sus bienes y servicios a un precio fijo a cualquier jugador que los solicite: \$ 2 000 para la canasta de la tienda local, \$ 1 000 para la canasta de los grandes almacenes y \$ 4 000 \$ 2 000 ó \$ 1 000 para las oficinas, dependiendo estos de si el comprador es una industria grande, pequeña ó tienda, respectivamente. La segunda restricción en el costo de transportación para la clientela de una tienda en cada ciclo. El instructor ofrece sus bienes y servicios a precios que incluyen la entrega en la casa del cliente, así los costos de este no se aumentan con los relativos a transportación. Todos los dueños de tiendas u oficinas tienen sin embargo que considerar el costo de transportación de sus clientes potenciales viajando desde y hacia la tienda, para establecer sus propios precios. Así, su precio es siempre menor que el de las economías externas para compensar esos costos de trnasportación. La tercera restricción a los pre cios consiste en que solamente puede establecerse un precio en cada tienda local, almacén u oficina. Este precio deberá aplicarse a todos los clientes por igual y deberá sostenerse hasta el siguiente ciclo divisible entre cinco. Así pues, el comerciante para la fijación de precios, deberá considerar tanto el desarrollo presente como el futuro y su probable localización con respecto a las unidades comerciales. Los valores usados en las tres secciones precedentes están resumidas en la Tabla A2.1.

<u>El Tablero.</u>

El tablero CLUG mide 36 x 36 cm y está dividido en 144 manzanas, cada una de las cuales representa un predio. En CLUG básico, las líneas delgadas representan las calles secundarias mientras que las líneas gruesas representan las calles principales. El sistema de coordenadas está diseñado de tal manera que los números pares designan las columnas o filas de manzanas y los números impares intermedios representan las líneas horizontales y verticales que separan a las manzanas. Así, una pareja de números pares tales como 8-66 indica un predio, mientras que una pareja de números impares tales como 7-67 indica una esquina particular de un predio. Similarmente, una combinación de un número impar y otro par, para designar coordenadas tales como 9-66, representa a una cuadra determinada. Aunque puede introducirse cualquier configuración topográfica en el tablero, la Fig. A2.1 proporciona un modelo usual que puede ser empleado en la mayoría de los juegos básicos. Consiste en una calle principal que va horizontalmente a lo largo de la línea 7, desde la 51 hasta la 75 y verticalmente a lo largo de la línea 63, desde la 3 hasta la 25. Están también indicados algunos otros parámetros importantes en el juego básico. Una bahía aparece en las mazanas 2-62, 2-64 y 2-66. Incluye también esta Figura una terminal marítima en la 3-63 y una central de servicios públicos en la 3-67. La terminal proporciona servicios de embarque a las economías externas y es el pun

TABLA A2.1

SUMARIO DE LAS CARACTERISTICAS DE LOS USOS DEL SUELO.

USO DEL SUELO	COSTO DE CONSTRUCCION	GANANCIA POR AÑO	NO. DE UNIDADES DE EMPLEADOS NECESARIOS	SALARIOS POR CICLO	PRECIOS TOPE		
					TIENDA LOCAL	GRAN ALMACEN	OFICINAS
Gran industria	$ 96 000	$48 000	4	$24 000	—	—	$4 000
Pequeña industria	48 000	22 000	2	12 000	—	—	2 000
Tienda local	24 000	*	1	6 000	—	—	1 000
Gran Almacén	24 000	*	1	6 000	—	—	1 000
Oficina	36 000	*	1	6 000	—	—	—
Residencia Sencilla	12 000	6 000	-	—	$2 000	$1 000	—
Residencia Doble	30 000	12 000	-	—	4 000	2 000	—
Residencia Triple	48 000	18 000	-	—	6 000	3 000	—
Residencia Cuádraple	72 000	24 000	-	—	8 000	4 000	—

El Ingreso por TL, GA y O dependen del número de clientes obtenidos y el precio fijado. Un ingreso bruto de $10 000 a $15 000 puede ser supuesto antes de que esas unidades operen.

to desde el cual todos los productos industriales deberán ser embarcados para su venta. La central de servicios públicos es el punto hacia el que convergen todas las líneas de servicios construídas durante el juego. Además de los servicios de agua y drenaje, la central y sus línea prestan un gran número de servicios municipales, como son los de policía y bomberos, electricidad, recolección de basura, etc. Las líneas de servicios se colocan a lo largo de las calles, por mayoría de votos de los equipos. Se considera que un predio dispone de servicios y está en aptitud de desarrollarse, cuando en uno de sus lados corre una línea de servicios.

Transportación.

Un factor importante en muchas decisiones del juego es el costo de transporte requerido por ciertos usos del uselo; este costo es factor determinante en la localización de las construcciones. Los costos de transprotación se liquidan mediante pagos hechos por los jugadores al instructor. Son cubiertos por las industrias, grandes y pequeñas, al adquirir productos que llegan por mar a la terminal; así como por las industrias y las tiendas al transportar el material contable desde y hacia las oficinas. Su costo se incrementa con la distancia y es menor cuando el movimiento se efectúa a lo largo de una calle principal que cuando se requiere emplear calles secundarias. Para el juego básico, la relación de eficiencia entre una calle principal y otra secundaria es de 1 a 2. Los costos se incrementan en razón del número de cuadras recorridas, ya sea en una calle principal o secundaria (la unidad de distancia es una cuadra). Todos los movimientos deberán verificarse en línea recta a lo largo de las calles. Estas se cuentan desde la esquina más proxima de la manzana de orígen a la más cercana de la manzana de destino. La distancia viajada entre 2 predios contiguos es cero y el costo de transportación es cero también.

El costo unitario de un viaje depende de la frecuencia y vo

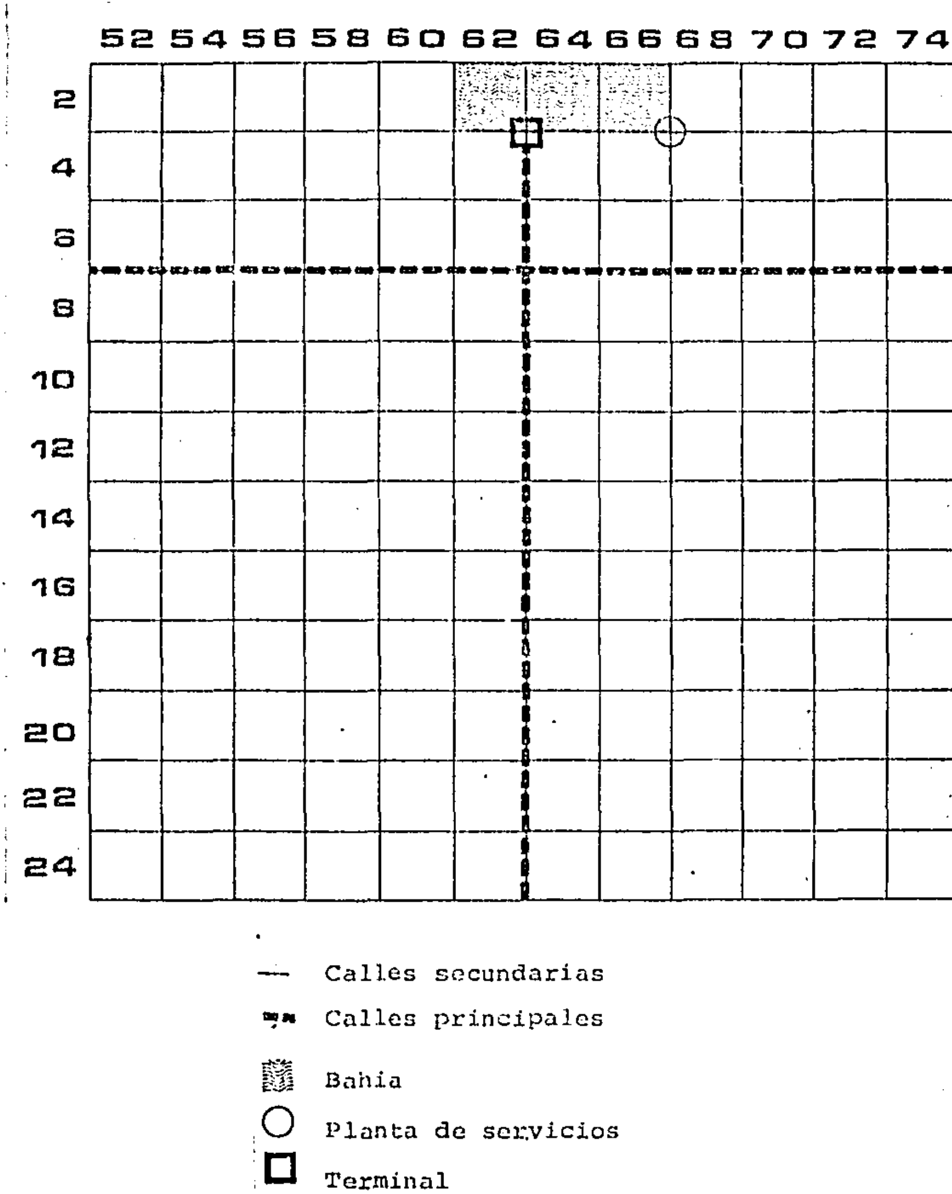


Figura A2.1 Tablero típico del CLUG básico.

lúmen de cada clase particular de viaje en el mundo real. El volúmen es muy alto tratándose de embarques de productos manufacturados y relativamente bajo en los viajes de compras y al trabajo. Este factor de pesos para una clase particular de transporte se denomina "peso asociado" y aparece detallado en la tabla A2.2El peso asociado se agrega al número de manzanas recorridas y se multiplica por 1 ó por 2, ya sea que el transporte se realice por una calle principal o secundaria respectivamente.

Impuestos y finanzas de la comunidad

Las erogaciones que ocasiona la comunidad se pagan en forma de impuestos en cada ciclo, y corresponden al número de líneas de servicios construídas y al número de unidades residenciales que existen en el tablero. El costo inicial de construcción de cada segmento de línea por servicios es de $2 000 y los costos de operación y mantenimiento posteriores a su construcción cuestan a la comunidad $1 000 por ciclo. Los equipos jugadores deciden, por mayoría de votos la construcción y localización de las líneas de servicios. No puede construirse nignún edificio en una manzana que no tenga líneas de servicios a lo largo de uno de sus lados. Los costos se computan por unidades. Toda línea de servicios deberá, por supuesto, unirse al sistema conectado finalmente con la planta de servicios. Además del costo de los servicios públicos, cada unidad residencial paga $1 000 por servicios sociales en cada ciclo. Este costo, como el de la construccción de los servicios y los costos de mantenimiento de los mismos, deberá ser pagado por la comunidad mediante los impuestos.

En el juego básico se paga el impuesto sobre terrenos y edificios. La tasa de impuesto se fija por mayoría de votos de los equipos. Esta tasa, multiplicada por el valor catastral de las propiedades de un equipo, determina el monto que deberá ser pagado en impuestos en ese ciclo. En los ciclos suce

TABLA A2.2

PESOS ASOCIADOS EN LOS VIAJES REQUERIDOS.

VIAJES DESDE:	VIAJES HACIA:				
	CENTRAL	OFICINA	EMPLEO	COMPRAS (TL)	COMPRAS (GA)
Industria Pesada (GI)	$4 000	$400	-	-	-
Pequeña Industria (PI)	$2 000	$200	-	-	-
Tienda local ó Gran almacén (TL,GA)	-	$100	-	-	-
Residencias por unidad (RI)*	-	-	$300	$200	$100

*Para R2, R3 o R4, multiplicar por 2, 3 ó 4, respectivamente.

sivos, la tasa puede bajar o elevarse de acuerdo con las necesidades financieras de la comunidad y sus planes de crecimiento.

La comunidad puede tener un superávit o déficit financiero en cualquier ciclo y este superávit o déficit se acumula en los ciclos sucesivos. Sin embargo, el déficit no podrá exceder al 10% del valor catastral de las propiedades de la comunidad en cualquier momento. La comunidad pagará una tasa de interés del 10% sobre su déficit. El superávit acumulado no ocasiona interés. Si se excede el límite del 10% no se autorizará la construcción de servicios hasta que el déficit sea previamente pagado por la comunidad, es decir, hasta que la deuda de la comunidad corresponda a cero. El control contable de las propiedades, impuestos, superávit o déficit y deudas extraordinarias, corresponderá al contador de la comunidad. La principal labor de los jugadores será establecer las tasas tributarias, pagar sus impuestos y cuidar que no se acumule ningún déficit que perjudique la capacidad financiera y crediticia de la comunidad.

Depreciación.

El valor inicial de las construcciones se deprecia a razón de un 5% por ciclo. Cada 5 ciclos los dueños de los edificios deberán ser informados sobre la vida útil y estado de depreciación de los mismos y se les preguntará si desean, o no, renovar total o partcialmente sus construcciones. La renovación se realiza pagando al instructor los costos de depreciación acumulados en los ciclos. Esto renueva al edificio y prolonga efectivamente su vida útil. Los pagos de renovación podrán hacerse por cada 5% que se deprecie el edificio (la depreciación equivalente a un ciclo). Así, el edificio puede regresar a su edad cero o ser parcialmente renovado por el equivalente a un ciclo o dos, dependiendo del valor y del uso que se de a la estructura y a. terreno. Después de haber tomado la decisión de renovar o no una construcción particular, cada equipo deberá tirar un par de dados para cada edificio, las caras que hacen perder el uso del edificio son proporcionales al estado de depreciación. Cuando un edificio está "perdido", se clausurará y no podrá ser usado durante 5 ciclos. Después de esos cinco ciclos, el edificio estará de nuevo apto para ser renovado pudiendo ser jugado con los dados nuevamente. Sin embargo, el edificio será entonces 5 ciclos más viejo y sus probabilidades de ser eliminado son mayores. En este punto el edificio podría ser renovado para reducir la probabilidad de perderlo una vez más.

Toda construcción tiene cuando menos un 5% de probabilidades de perderse, no obstante que sea completamente renovado en cada ciclo. Esta probabilidad es aumentada al añadir un 5% adicional por cada ciclo de vida que pase a partir de la construcción o renovación del edificio. Cualquier edificio, incluyendo aquellos que hayan sido clausurados, puede ser demolido a un costo del 25% de su valor catastral actualizado durante el paso de construcción en cualquier ciclo. Los contratos de empleo y/o compras relacionados a los edificios clausurados o demolidos son nulificados automáticamente. La Tabla A2.3 muestra las probabilidades de pérdida de los edificios de acuerdo a su edad (antiguedad), asociando los números de las caras de los dados que corresponden a esas probabilidades. Además, indica los costos de renovación por ciclo para los diferentes tipos de edificios. La revaluación de todos los terrenos y edificios la realiza el contador del juego al final de cada ciclo divisible por cinco.

Pasos del juego.

CLUG se desarrolla mediante un conjunto de pasos ó etapas de juego, en los cuales se llevan a cabo acciones y decisiones específicas. El instructor determina la transición de un paso a otro y no permite regresar a un paso precedente. Los ju

TABLA A2.3

PROBABILIDADES DE PERDIDA DE EDIFICIOS Y COSTO DE DEPRECIACION POR TIPO DE CONSTRUCCION.

EDAD DEL EDIFICIO	PROBABILIDAD DE PERDER EDIFICIOS	SUMAS DE LAS CARAS DE LOS DADOS QUE HARAN PERDER EL EDIFICIO
0	.056	3
1	.111	5
2	.167	7
3	.195	2.7
4	.250	2.7.11
5	.306	2.7.9
6	.362	3.7.8
7	.417	5.7.8
8	.445	6.7.8
9	.500	3.6.7.8
10	.556	5.6.7.8
11	.612	3.5.6.7.8
12	.667	5.6.7.8.9
13	.695	2.5.6.7.8.9
14	.750	4.5.6.7.8.9
15	.806	3.4.5.6.7.8.9
16	.861	2.4.5.6.7.8.9.10
17	.889	3.4.5.6.7.8.9.10
18	.944	3.4.5.6.7.8.9.10.11
19	1.000	2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12
20	1.000	2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12

5% Costos de depreciación por vuelta en cada tipo de uso del suelo.

(GI) - \$4 800	(0) - \$1 800	(R1) - \$ 600
(PI) - \$2 400	(TL) - \$1 200	(R2) - \$1 500
	(GA) - \$1 200	(R3) - \$2 400
		(R4) - \$3 600

gadores que no logren terminar todas sus actividades durante un paso en un ciclo dado, deberán esperar hasta el ciclo siguiente para completarlas. El juego comienza en el paso 1 y procede secuencialmente hasta el paso 11, para comenzar el ciclo siguiente de nuevo con el paso 1.

Los pasos son los siguientes:

1. COMPRA DE TERRENOS. Los jugadores hacen oferta para comprar terrenos al instructor o a otros equipos. Las ofertas al instructor deben hacerse por escrito en "formas" proporcionadas en el juego, indicando las coordenadas de la parcela deseada y el precio ofrecido por ella; las cantidades deben ser redondeadas a cientos de pesos (unidades monetarias del juego). El instructor aceptará las ofertas para cualquier parcela sin dueño y la venderá al mejor postor. Las ofertas menores a $1 000 son rechazadas automáticamente.

   Cada equipo puede comprar un máximo de 3 parcelas en cada ciclo del juego. Durante este paso también se permite la compra de terrenos y edificios entre los diferentes equipos.

2. INSTALACION DE LINEAS DE SERVICIOS. Mediante la consulta entre todos los equipos, se hacen propuestas acerca del número y localización de las nuevas líneas de servicios deseadas por la comunidad. Cada nuevo segmento que se coloca sobre el tablero debe ser aprobado por mayoría de votos. Esta mayoría es siempre lograda con un equipo más de la mitad de los equipos que están jugando. Una vez que las nuevas líneas son aprobadas por la mayoría, son colocadas en el tablero por el instructor.

3. RENOVACION DE EDIFICIOS. Este paso se juega solamente en los ciclos divisibles por cinco.

En este momento del juego se anuncia la edad y deprecia ción de cada edificio y se pregunta a los dueños si desean ó no, renovar sus edificios y en que tanto. Después de la decisión de renovación para cada edificio, se tira un par de dados y se determina sí es clausurado ó no. Este proce so continúa hasta que se jueguen todos los edificios en el tablero.

4. CONSTRUCCION DE EDIFICIOS. Los equipos pueden construir en este paso nuevos edificios en los terrenos de su pro piedad que cuenten con líneas de servicios en una de sus caras por lo menos.

   Para esto, deberán pagar totalmente el costo de construc ción de cada edificio. La demolición de los edificios existentes cuesta a sus dueños el 2% de su valor catas tral actualizado.

5. CONTRATACION DE EMPLEADOS. En este paso se firman contra tos formales entre los dueños de las unidades residencia les y los dueños de industrias, tiendas y oficinas. La contratación de empleados se indica mediante una marca en las unidades residenciales empleadas y los edificios don de se localiza el empleo. Estos contratos son válidos has ta el siguiente ciclo divisible por cinco.

6. FIRMA DE ACUERDOS COMERCIALES. Las tiendas locales, gran des almacenes y oficinas de construcción reciente, anun cian los precios a los que ofrecen sus bienes y servicios, los cuales son válidos hasta el siguiente ciclo divisible por cinco. Cada establecimiento comercial u oficina debe establecer un solo precio para toda la ciudad. Los due ños de las tiendas locales, grandes almacenes y oficinas existentes, pueden cambiar sus precios solamente en un ci clo divisible por cinco. Después del anuncio de precios, los dueños de las nuevas unidades residenciales escogen

las tiendas locales y grandes almacenes donde irán a hacer sus compras y lo notifican a sus dueños. De manera similar los dueños de tiendas locales, grandes almacenes e industrias, notifican a los dueños de las oficinas de su elección.

Las unidades que deseen hacer sus compras y servicios administrativos con el instructor, deben notificarselo. Los acuerdos comerciales son válidos hasta el siguiente ciclo divisible por cinco, excepto los hechos con el instructor, los cuales pueden romperse durante este paso en cualquier ciclo del juego.

7. RECEPCION DE INGRESOS. El instructor paga a los dueños de las industrias el ingreso recibido del exterior por sus productos. Las grandes industrias reciben $48 000 de ingresos por ciclo, siempre y cuando hayan tenido cuatro unidades residenciales como empleados. Las industrias pequeñas reciben $22 000 de ingreso por ciclo, siempre y cuando hayan tenidos dos unidades residenciales como empleados. En el caso de que no se cuente con el número suficiente de empleados, el ingreso será proporcional al número de unidades residenciales empleadas.

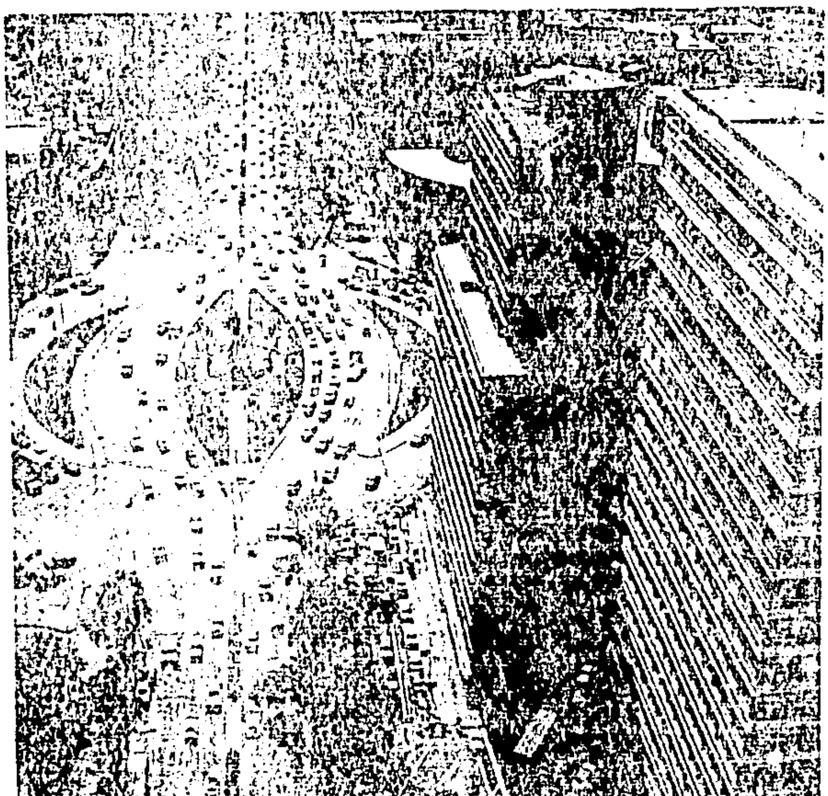
8. PAGO A EMPLEADOS. Los patrones pagan un salario de $6 000 por ciclo a cada unidad residencial de empleados contratada.

9. PAGO A TIENDAS LOCALES, GRANDES ALMACENES Y OFICINAS. Los dueños de tiendas y oficinas deben informar a sus clientes las cantidades que deben de pagar por sus compras en ese ciclo de acuerdo al número de consumidores y a los precios acordados. El instructor debe cobrar a los jugadores que estén comprándole a él.

10. PAGO DE TRANSPORTACION. El instructor cobra a cada equi

po los costos de transportación asociados a cada uno de los edificios de su propiedad.

11. PAGO DE IMPUESTOS. El contador informa a cada equipo de los impuestos que debe la comunidad y el instructor los cobra. Asimismo, informa a la comunidad del monto total recabado por impuestos, del monto de los gastos originados, del interés pagado sobre deudas, y del déficit o superávit de la comunidad. Los jugadores discuten y votan sobre la tasa de impuestos que regirá en el ciclo siguiente.



CLUG
MODELO DE SIMULACION MEDIANTE JUEGOS DEL USO DEL SUELO URBANO

EXPERIMENTO: Política Urbana.

Introducción

Periódicos, revistas y libros están llenos de artículos y tesis defendiendo o atacando la política urbana en nuestras ciudades. Como miembros de un sistema gubernamental representativo, somos víctimas o beneficiarios de ese proceso político.. El objetivo de esta variante del juego CLUG es dar a conocer al jugador las motivaciones del proceso político en nuestras ciudades. En el juego, como en la vida real, los resultados no están delimitados con precisión y a menudo se traslapan; las soluciones no son fáciles, pués mientras ayudan a unos dañan a otros. Y aunque los políticos afanosamente tratan de lograrlo, no pueden dar gusto a todos. En esta variante interviene un gobierno local compuesto por representantes de la comunidad CLUG. Cada representante tiene un grupo de electroes claramente identificado y cada uno de estos grupos, un determinado papel económico en la comunidad.

En CLUG, la industria es la base económica de la comunidad, si bien en esta variación la fuerza política la ejercen aquellos que cuentan con unidades residenciales. Por tanto, los jugadores tenderán a cambiar el juego para una u otra fuerza, la política o la económica. A menudo se efectúan coaliciones entre un equipo con fuerza económica y otro con fuerza política. Estas coaliciones se parecen mucho a las actividades políticas que vemos en la vida real, cuando un candidato es apoyado ya sea manifiestamente ó por intereses económicos.

En esta variante, el interés radica en las interacciones entre crecimiento económico, bienestar de la comunidad y fuerza política. Es importante entender cómo y porqué se toman las decisiones políticas, proceso al cual se enfoca este experimento.

Reglas del Juego

La variante política puede dividirse en tres componentes básicos: a) establecimiento del gobierno; b) responsabilidades gubernamentales; y c) fondos gubernamentales. Las reglas básicas son las mismas del CLUG y la modificación se introduce en el segundo ciclo.

a) Establecimiento del gobierno.

Durante el primer ciclo, el instructor actúa como el jefe del gobierno, concilia las discusiones sobre el establecimiento de las líneas iniciales de servicios y determina su localización de la misma manera que en el CLUG básico, es decir, por mayoría de votos de los equipos. Como en el juego básico, la tasa de impuestos es del 5% en el primer ciclo y los jugadores no tienen derecho de voto sobre esta tasa.

En el Paso 2 del segundo ciclo, los equipos eligen un Alcalde. Saldrá electo el candidato que reciba el mayor número de votos (los equipos tienen ahora votos, obtenidos como se verá más adelante). El Alcalde actúa durante tres ciclos, pero puede ser retirado durante su ejercicio si en una reunión del Ayuntamiento un equipo halla motivo y logra que la mayoría de los votos estén contra él.

El Ayuntamiento está integrado por todos los miembros de los equipos. El número de votos de cada equipo está de acuerdo con el uso del suelo que cada equipo da a su propiedad. No se requiere que los equipos empleen todos los votos como una unidad.

Los votos se asignan de acuerdo a las siguientes bases:

Uso del suelo	Votos
R_1	2
R_2	4
R_3	6
R_4	8
TL	1
GA	1
O	1
GI	4
PI	2

Un equipo que tenga un R_3 y un TL tiene 7 votos, 6 por el R_3 y 1 por el TL.

Después de la construcción, en el paso 4 de cada ciclo, el operador informará sobre el número de votos retenidos por cada equipo, el total de votos de la comunidad y el número de votos que constituyen una mayoría.

b) Responsabilidades gubernamentales.

Las obligaciones del Alcalde consisten en presidir las sesiones del Ayuntamiento, rompiendo los empates en las votaciones, (el Alcalde sólo votará en casos de empate) y en patrocinar designaciones en servicios públicos específicos. Las sesiones del Consejo pueden efectuarse solamente en el Paso 2. El Alcalde puede dirigir las sesiones del Ayuntamiento de la manera que desee.

Generalmente, es mejor que el Alcalde al comienzo de la sesión, haga que el grupo decida, mediante el voto, que duración deberán tener las sesiones. El instructor dice cuando se termina la sesión. Esto evita que las sesiones del Consejo terminen en empate. Si el Ayuntamiento no ha terminado todos sus asuntos oportunamente, los asuntos inconclusos deberán continuarse en la siguiente sesión del mismo. Cuando no se fije la tasa de impuestos, se aplicará la que regía en el ciclo anterior.

Cada sesión del Ayuntamiento se regirá por la agenda siguiente:

. Provisión de servicios.
. Asuntos previos.
. Establecimiento de tasas de impuestos.

Los asuntos nuevos pueden incluir la provisión de servicios públicos, la creación de comisiones de planeación, de comisiones de zonas, de departamentos de obras públicas, o de cualquier otro consejo que el grupo proponga. Lo que se adopte deberá recibir mayoría de votos. Para proporcionar servicios y establecer tasas de impuestos, también se requerirá contar con mayoría de votos.

Además de establecer los medios que proporcionen los servicios y decretar los impuestos, el gobierno determina que servicios públicos requiere la comunidad.

Para el ciclo 6, la comunidad debe tener un equivalente al 10% del valor total de sus impuestos invertido en servicios públicos. Si la comunidad no ha construído obras públicas, o no tiene el total del 10% de su cuota, el instructor requerirá que lo invertido alcance ese 10% en el ciclo número 6. El costo de construcción está supeditado a los impuestos y consecuentemente, el impuesto deberá ajustarse de conformidad. El propósito de este requerimiento del 10% es forzar al Ayuntamiento para que considere que servicios públicos propone, y por que los estima necesarios. Las inversiones en servicios públicos rara vez son consideradas sin aquel requerimiento. La falta de actuación es tan significativa como la asig nación y justificación de las obras.

TABLA A2.4

Características de los servicios públicos

Servicios	Costo de construcción	Costo de mantenimiento por ciclo	No. de empleados por unidad	Responsable de los nombramientos de personal
Parques	Costo del terreno	$ 7 000	1	Alcalde
Centros recreativos	$ 12 000	7 000	1	Alcalde
Sistema de escuelas públicas	24 000	13 000	2	Ayuntamiento
Servicios médicos	16 000	8 000	1	Ayuntamiento
Universidad	16 000	7 000	1	Ayuntamiento
Palacio Municipal	12 000	7 000	1	Alcalde
Biblioteca	10 000	8 000	1	Alcalde

El sistema de escuelas públicas es uno de los servicios comunales típicos. Su costo inicial es $ 24 000. Da empleo a 2 unidades de trabajadores, a cada uno de las cuales se le paga $ 6 000. A todos los trabajadores que laboran en la construcción de servicios públicos les paga el instructor en el paso 7 denominado Recepción de Ingresos. El Ayuntamiento determina por mayoría que equipo proporcionará las unidades de trabajo. En el caso de obras públicas como el Palacio Municipal, el Alcalde determinará cual equipo debe aportar el personal.

Como cualquier obra pública, una vez que los servicios públicos se han construído, deben mantenerse. El costo de mantenimiento está incluído en la Tabla (A24), y comprende reparacio nes. Cada cinco ciclos el Alcalde debe hacer rodar los dados para cada servicio público. Se considera que las obras públicas deben repararse continuamente.

Fondos públicos

En el ciclo 2, el Alcalde empieza sus funciones con $ 20 000. Este dinero se guarda en una cuenta de imprevistos. Estos $ 20 000 producen el 5% de interés en cada ciclo y el Alcalde puede solicitar al instructor una parte o la totalidad de este dinero en cualquier momento. El uso de dichos fondos queda a discreción del Alcalde, a no ser que los equipos decidan por mayoría de votos, limitar sus atribuciones económicas. El dinero de la cuenta de imprevistos no necesariamente habrá de gastarse en obras y servicios públicos o proyectos comunitarios. El Alcalde puede utilizar los fondos en obras de su propio equipo, dividir el dinero por igual entre los miembros del equipo o bien, usarlo para comprar votos.

Si los otros jugadores sorprenden al Alcalde robando, esta es una razón para que el Ayuntamiento lo destituya y nombre a un nuevo alcalde. Para ello se requiere mayoría de votos. Lo que es significativo es que solo por mayoría de votos puede controlarse la facultad distributiva del Alcalde.

Los pasos siguientes son los cambios en el CLUG básico para esta modificación de política urbana.

1. Compra de terrenos	Igual al CLUG básico.
2. Proveer Servicios	Decisión por el jefe del ayuntamiento o por el alcalde elegido.
	El ayuntamiento también considerará la construcción de servicios públicos, estipulados por el instructor y otros nego

nes. Cada cinco ciclos el Alcalde debe hacer rodar los dados para cada servicio público. Se considera que las obras públicas deben repararse continuamente.

Fondos públicos

En el ciclo 2, el Alcalde empieza sus funciones con $ 20 000. Este dinero se guarda en una cuenta de imprevistos. Estos $ 20 000 producen el 5% de interés en cada ciclo y el Alcalde puede solicitar al instructor una parte o la totalidad de este dinero en cualquier momento. El uso de dichos fondos queda a discreción del Alcalde, a no ser que los equipos decidan por mayoría de votos, limitar sus atribuciones económicas. El dinero de la cuenta de imprevistos no necesariamente habrá de gastarse en obras y servicios públicos o proyectos comunitarios. El Alcalde puede utilizar los fondos en obras de su propio equipo, dividir el dinero por igual entre los miembros del equipo o bien, usarlo para comprar votos.

Si los otros jugadores sorprenden al Alcalde robando, esta es una razón para que el Ayuntamiento lo destituya y nombre a un nuevo alcalde. Para ello se requiere mayoría de votos. Lo que es significativo es que solo por mayoría de votos puede controlarse la facultad distributiva del Alcalde.

Los pasos siguientes son los cambios en el CLUG básico para esta modificación de política urbana.

1. Compra de terrenos	Igual al CLUG básico.
2. Proveer Servicios	Decisión por el jefe del ayuntamiento o por el alcalde elegido. El ayuntamiento también considerará la construcción de servicios públicos, estipulados por el instructor y otros nego

	cios nuevos. Fijación de las tasas de impuestos por mayoría de votos. Elegir alcalde cada tres ciclos.
3. Renovación de edificios.	Igual al CLUG básico.
4. Construir edificios.	La ciudad construye servicios públicos mediante votación rápida.
5. Contratación de empleados.	Use un alfiler especial para los empleados públicos.
6. Firmar acuerdos comerciales.	Igual al CLUG básico.
7. Recibir ingresos.	Igual al CLUG básico.
8. Pagar empleados	Pago del jornal a los empleados de la ciudad.
9. Pagar TL, GA, y O	Igual al CLUG básico.
10. Pagar transportación	Igual al CLUG básico.
11. Pagar impuestos	En el paso 2 se fijan los impuestos; en este paso únicamente se pagan impuestos.

Temas de estudio

Después de haber jugado 6 o más ciclos con la modificación política los jugadores deberán considerar las siguientes cuestiones:

1. ¿De que manera influye el gobierno de la ciudad en su crecimiento o declinación?.

2. ¿Cuál es el balance de la fuerza económica y política en su ciudad?. ¿Quién la tiene, qué clase de influencia y porqué?.

3. ¿Quién tiene la mayor influencia en la acción del gobier

no: la personalidad del alcalde, las coaliciones políticas entre equipos, el deseo general de la comunidad de mejorar, ó el deseo de obtener el máximo beneficio económico. Cómo se expresa esta influencia en las acciones del gobierno?. ¿Pueden citarse ejemplos de gobiernos de ciudades que se comportan como usted lo hizo?.

4. ¿Se comportaría usted diferente si vuelve a jugar la modificación política?.

RESUMEN DE CAMBIOS PARA EL EXPERIMENTO DE POLITICAS URBANAS

Fuerza de Votación

Para cada	Número de votos
R_1	2
R_2	4
R_3	6
R_4	8
TL	1
GA	1
O	1
GI	4
PI	2

Agenda establecida para el consejo de la ciudad.

1. Proporcionar servicios
2. Asuntos atrasados
3. Nuevos asuntos
4. Conjuntos de tasas de impuestos para ese ciclo.
5. Cada tres ciclos, elegir un nuevo Alcalde.

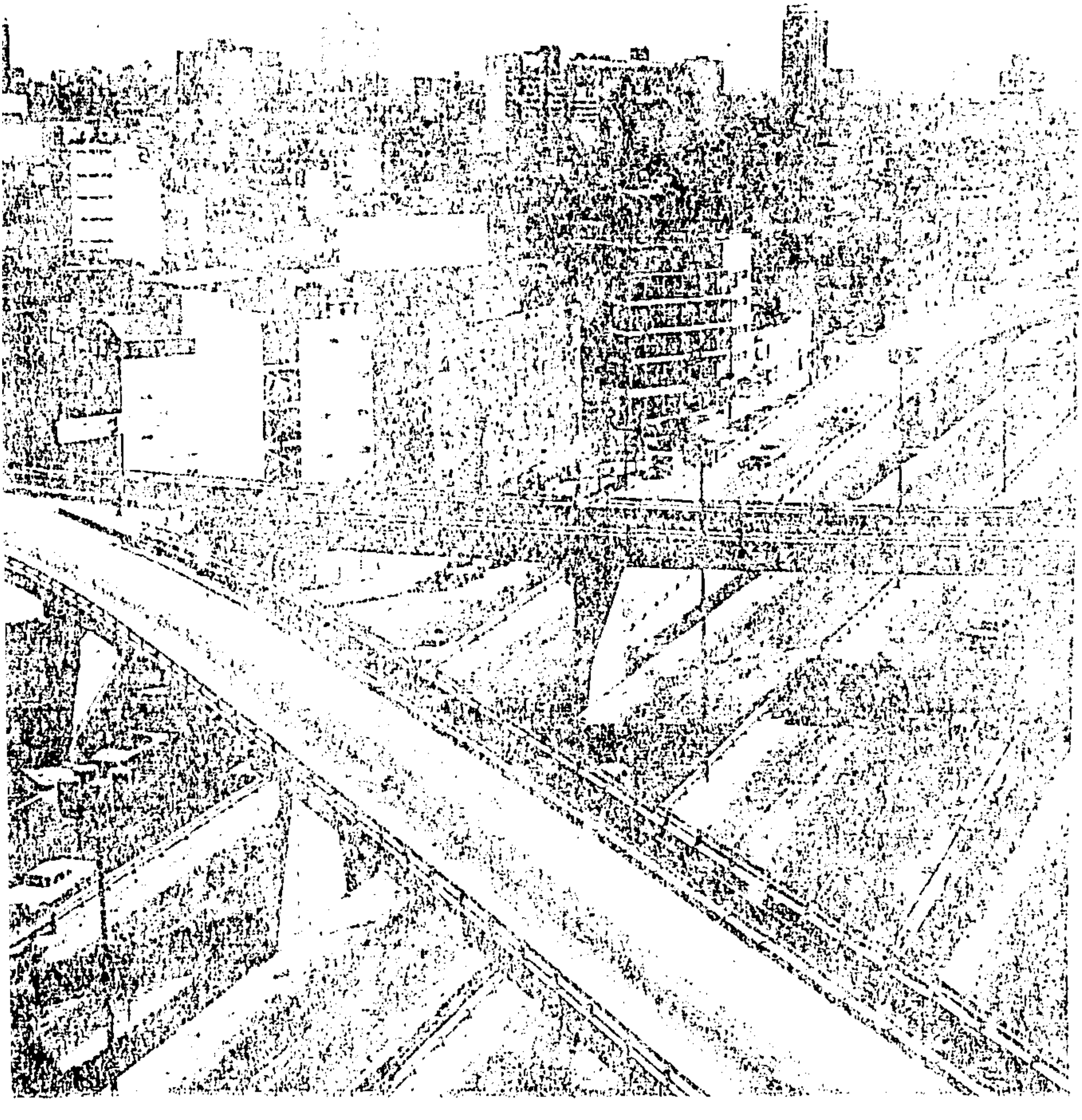
Características de los servicios públicos

SERVICIO	Costo de construccion	Costo de mantenimiento por ciclo	Número de unidades empleadas	Quien decide sobre sus empleados
. Parques	Costo del terreno	$ 7 000	1	Alcalde
. Centros de recreación	$ 12 000	7 000	1	Alcalde
. Sistema públi co de escuelas	24 000	13 000	2	Consejo
. Servicios Médicos	16 000	8 000	1	Consejo
. Universidad	16 000	7 000	1	Consejo
. Palacio Municipal	12 000	7 000	1	Alcalde
. Biblioteca	10 000	8 000	1	Alcalde

Pasos del juego

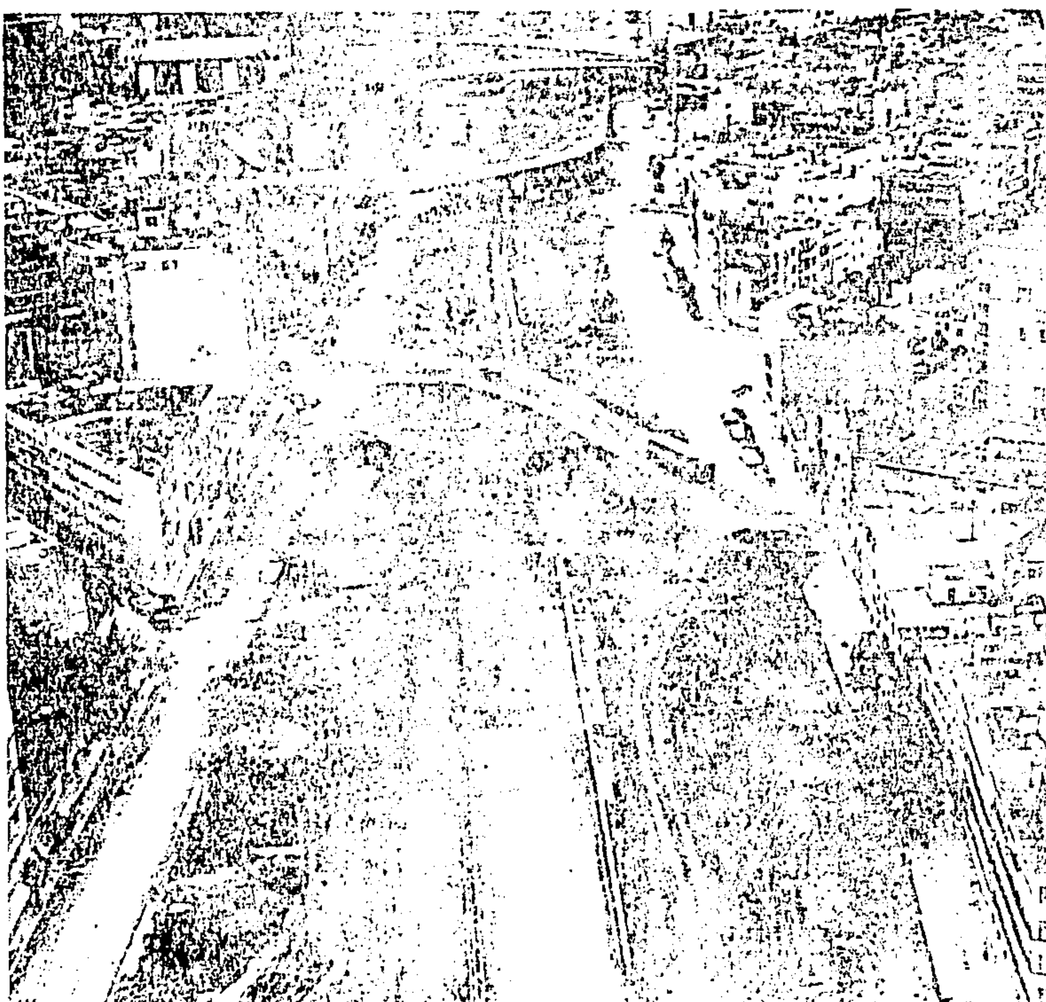
1.	Compra de terreno	Sin cambio
2.	Proporcionar servicios	La seción del consejo de la ciudad. (vea agenda).
3.	Renovación de edificios.	Sin Cambio,
4.	Construcción de edificios.	La ciudad también construye servicios públicos. Si los votos lo aprueban.
5.	Contratación de empleados	Asegurar empleos para la ciudad.
6.	Firmar acuerdos comerciales.	Sin cambio.
7.	Recibir ingresos	Sin cambio.
8.	Pagar empleados	Los empleos de la Ciudad tambien se pagan.
9.	Pagar LS, CS y O.	Sin cambio.

10. Pagar transportación	Sin cambio.
11. Pagar impuestos	De acuerdo con la tasa establecida en el paso 2.



APENDICE 3

EL CONCEPTO DE ENTROPIA EN LA MODELACION DE LOS SISTEMAS URBANOS



UTILIZACION DEL CONCEPTO DE ENTROPIA EN LA MODELACION DE SISTEMAS URBANOS.

La construcción de modelos urbanos es la base fundamental para obtener conocimiento científico acerca de las ciudades y su problemática, constituyendo de esta manera el avance más importante de la planeación urbana de nuestros días.

Los científicos urbanos se enfrentan actualmente a serios problemas teóricos, debido a que en su actividad necesitan utilizar conceptos desarrollados en múltiples disciplinas tales como la Física, la Biología, la Economía, la Sociología, etc.

Uno de estos conceptos es el de entropía, el cual se ha utilizado ampliamente en las ciencias físicas pero que recientemente ha resultado de interés en las ciencias sociales, especialmente en la modelación de sistemas urbanos y regionales. Debido a esto, analizaremos los diferentes puntos de vista acerca de este concepto y sus aplicaciones en la planeación urbana. Además, para comprender mejor su significado, veremos como se ha utilizado en los campos de la Teoría de la información, la Física y la Biología.

DIFERENTES INTERPRETACIONES DEL CONCEPTO DE ENTROPIA.

1. La entropía y su relación con la probabilidad y la incertidumbre.

Al analizar un sistema de interés, es necesario comenzar con la definición y especificación de los estados del sistema utilizando la información que pueda estar disponible.

Un criterio adecuado para lograrlo, consiste en explicar y predecir con un grado deseado de precisión las macro-propiedades del sistema sin tener que explicar el comportamiento individual de sus componentes.

Para esto, existen técnicas macro-analíticas que se relacionan a las micro-situaciones de un sistema utilizando el concepto de entropía.

Consideremos el ejemplo de un sistema urbano con una distribución fija de las viviendas de un cierto número de personas económicamente activas y una distribución espacial, también fija de un cierto número de empleos. Si se quiere estudiar el flujo de transporte de estas personas al ir de sus casas a sus trabajos, ¿cómo podemos describir el estado del sistema sin tener que explicar el comportamiento individual de cada una de las personas económicamente activas en una gran ciudad?. Para resolver este problema, podemos representar al sistema mediante una tabla (matríz) de orígen y destino como la de la figura A3.1.

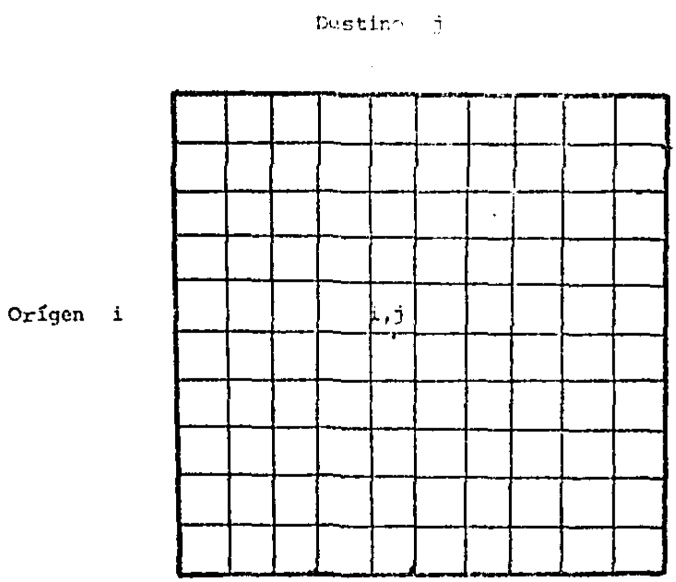


Figura A3.1. Tabla o mátriz de orígen y destino.

Un estado del sistema es una asignación de cada una de las personas económicamente activas a la tabla de orígen y destino, la cual debe respetar las restricciones dadas, tales como las distribuciones fijas de las viviendas y los empleos. Esta es una descripción completa del sistema de interés. También, debemos definir cada distribución como una macro-propiedad del sistema, que intentamos estimar por medios estadísticos. En este caso, una distribución es un conjunto de números, uno por cada casilla de la tabla de orígen y destino, donde cada número representa la cantidad total de personas que viajan de la zona de orígen i a la zona de destino j.

Así, la colección de los conjuntos de individuos que viajan de i a j, definida anteriormente como asignación, describe un estado simple del sistema, y el conjunto de los números totales T_{ij} de individuos que viajan de i a j, constituye una distribución del sistema.

Puede observarse fácilmente que diferentes estados pueden dar lugar a la misma distribución. Si suponemos que cualquier estado del sistema puede ocurrir con la misma probabilidad, entonces podemos encontrar la distribución más probable calculando el conjunto de las T_{ij} que tiene el mayor número de estados asociados.

Este cálculo puede llevarse a cabo sin que sea necesario tener algún conocimiento acerca del comportamiento de los individuos en particular.

Sumarizando, podemos decir que un estado es una descripción completa del sistema de interés; a esta descripción podemos llamarla más adecuadamente micro-estado.

Una distribución puede ser considerada como la descripción de un macro-estado, pero es incompleta en términos de información. Como se dijo anteriormente, muchos micro-estados pueden dar lugar al mismo macro-estado. Existen también restricciones tales como las distribuciones espaciales de viviendas y empleos, las cuales son dadas exógenamente en tal forma que cualquier distribución de viajes está restringida por ellas.

Otra restricción conveniente es la del costo total del transporte.

Las relaciones entre estas descripciones de estados se muestran en la figura A3.2.

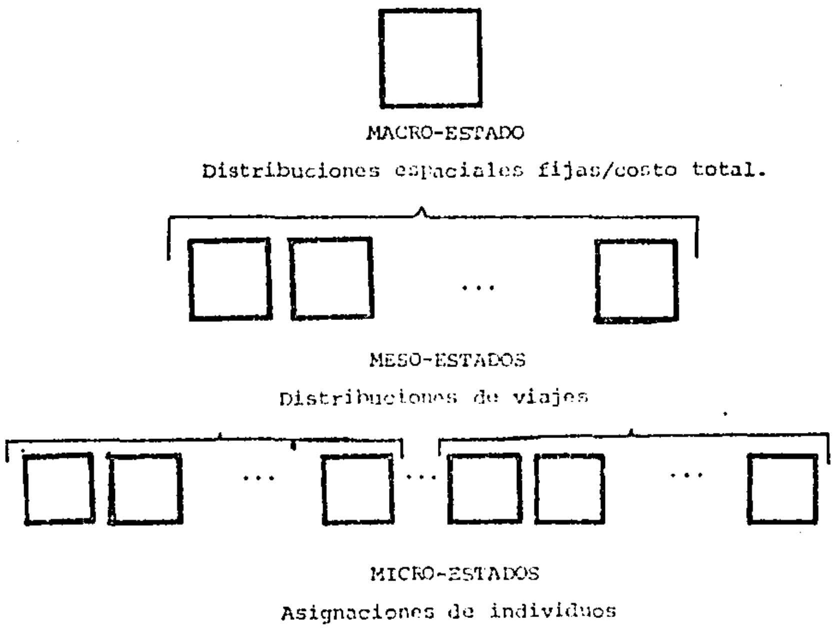


Figura A3.2. Macro-estados y micro-estados.

Cada cuadro representa un estado. Si todos los micro-estados son igualmente probables, se puede encontrar la distribución de viajes más probable calculando el número de micro-estados asociados con cada distribución, sujeto esto a las restricciones impuestas. Esto significa que solamente son de interés aquellos macro-estados (distribuciones de viajes) que dan lugar a una distribución espacial dada exógenamente.

Esta estructura es común en el desarrollo de los modelos de máxima entropía, aunque obviamente los detalles pueden cambiar para estar de acuerdo con las suposiciones e hipótesis de los constructores de un modelo particular.

Para generar una buena estimación de T_{ij}, se necesitan tres restricciones, y para formularlas definimos las variables siguientes:

T_{ij} = Número de individuos que viven en la zona i y trabajan en la zona j. (Número que tiene que ser estimado).

O_i = Número total de personas económicamente activas que viven en la zona i. (Dado exógenamente).

D_j = Número total de empleos en la zona j. (Dado exógenamente).

c_{ij} = Costo del viaje de la zona i a la zona j. (Dado exógenamente).

C = Gasto total en viajes al trabajo. (Dado exógenamente).

Entonces, las restricciones sobre T_{ij} que limitan el número de asignaciones que dan lugar a una distribución, pueden escribirse como:

$$\sum_j T_{ij} = O_i \tag{1}$$

$$\sum_i T_{ij} = D_j \tag{2}$$

$$\sum_i \sum_j T_{ij}\, c_{ij} = C \tag{3}$$

A continuación, se debe encontrar la matríz $W\left(\left\{T_{ij}\right\}\right)$ que tiene asociado el mayor número de estados, sujeto esto solamente a las restricciones (1), (2) y (3).

Para obtener el número de estados que dan lugar a una matríz

$\{T_{ij}\}$, suponemos que T es el número total de personas económicamente activas en el sistema urbano, el cual se obtiene mediante:

$$T = \sum_i \sum_j T_{ij} \tag{4}$$

En seguida, elegimos T_{11} a partir de T, T_{12} a partir de $T - T_{11}$, etc., así, el número de asignaciones o estados posibles es igual al número de maneras con las que podemos elegir T_{11} a partir de T, multiplicado por el número de maneras con las que podemos elegir T_{12} a partir de $T - T_{11}$, etc. Por lo tanto, se tiene que:

$$W\left(\{T_{ij}\}\right) = \frac{T\,!}{T_{11}\,!\left(T-T_{11}\right)!} \cdot \frac{\left(T-T_{11}\right)!}{T_{12}\,!\left(T-T_{11}-T_{12}\right)!} \cdots$$

$$= \frac{T\,!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \tag{5}$$

Este resultado es independiente del orden en que se consideran las casillas de la matríz de orígen y destino de la figura A3.1.

Para encontrar la distribución $\{T_{ij}\}$ más probable, se debe maximizar $W\left(\{T_{ij}\}\right)$ sujeta a las resctricciones (1), (2) y (3).

Cualquier función monótona de $W\left(\{T_{ij}\}\right)$ produce el mismo resultado; por conveniencia se maximiza $\ln W\left(\{T_{ij}\}\right)$, lo cual da por resultado:

$$T_{ij} = A_i B_j O_i D_j \exp\left(- \beta c_{ij}\right) \tag{6}$$

donde:

$$A_i = \frac{\exp\left(-\lambda_i^{(1)}\right)}{O_i} = \left[\sum_j B_j D_j \exp\left(-\beta c_{ij}\right)\right]^{-1} \tag{7}$$

$$B_j = \frac{\exp\left(-\lambda_i^{(2)}\right)}{D_j} = \left[\sum_i A_i O_i \exp\left(-\beta c_{ij}\right)\right]^{-1} \tag{8}$$

β es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (3).

$\lambda_i^{(1)}$ y $\lambda_i^{(2)}$ son el conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (1) y (2).

Esta formulación está fundamentada en la utilización de la aproximación de Stirling:

$$\ln T_{ij}! = T_{ij} \ln T_{ij} - T_{ij} \tag{9}$$

En la rama de la física, conocida como mecánica estadística, el equivalente de nuestro $\ln W$ se define como la entropía del sistema.

Como hemos visto, el $\ln W$ es el logaritmo de la probabilidad de ocurrencia de una distribución, por lo tanto se concluye que la entropía está monótonamente relacionada a la probabilidad definida de esta manera y consecuentemente a la incertidumbre, la cual es siempre mayor cuando nos referimos a los micro-estados del sistema que dan lugar a una distribución.

2. La entropía como estadística de una distribución de probabilidad.

Esta interpretación del concepto de entropía es una alternativa diferente al punto de vista anterior.

Sea x una variable aleatoria que puede tomar valores x_1, x_2, ..., x_n, con probabilidades no conocidas p_1, p_2, ...,

p_n.

Lo único que se conoce es el valor esperado de una función $f(x)$ tal que:

$$\sum_i p_i\ f(x_i) = E\left[f(x)\right] \tag{10}$$

y se sabe que:

$$\sum_i p_i = 1 \tag{11}$$

Dada esta información, podemos preguntarnos: ¿cuál es la mejor estimación de la distribución de probabilidad p_i?.

La teoría de la información nos dice que existe un criterio único y no ambiguo para determinar la cantidad de incertidumbre representada por una distribución de probabilidad discreta. Esta medida de la incertidumbre fue dada por Shannon, expresada mediante la siguiente ecuación:

$$S\left\{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n\right\} = -\ k\ \sum_i p_i\ \ln p_i \tag{12}$$

la cual se conoce como la entropía de una distribución de probabilidad $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$.

Para hacer inferencias sobre la base de información parcial, se debe utilizar la distribución de probabilidad que tenga la máxima entropía sujeta a lo que sea conocido. Así, es necesario maximizar la entropía de la ecuación (12) sujeta a las restricciones expresadas por las ecuaciones (10) y (11). Esto da como resultado:

$$p_i = \exp\left[-\ \lambda\ -\ \mu\ f(x_i)\right] \tag{13}$$

donde a partir de la ecuación (11) se obtiene:

$$e^{\lambda} = \sum_i \exp\left[-\ \mu\ f(x_i)\right] \tag{14}$$

λ y μ son los multiplicadores de Lagrange asociados a las e cuaciones (11) y (10) respectivamente.

Este resultado puede generalizarse para el caso en el que se conocen los valores esperados de varias funciones de x_i.

Demostraremos ahora que esta medida de incertidumbre es la misma que la descrita en la interpretación anterior del con cepto de entropía. Para esto, definimos:

$$p_{ij} = \frac{T_{ij}}{T} \tag{15}$$

Entonces, a partir de (5) y utilizando la aproximación de Stirling para T_{ij} !, se obtiene:

$$\ln W = \ln T! - \sum_{ij} \left(T_{ij} \ln T_{ij} - T_{ij}\right) \tag{16}$$

Esta ecuación puede escribirse en términos de p_{ij} como:

$$\ln W = \ln T ! - \sum_{ij} Tp_{ij} \left[\left(\ln p_{ij} + \ln T\right) - Tp_{ij}\right]$$

$$= \ln T ! - T \sum_{ij} p_{ij} \ln p_{ij} - \left(T \ln T - T\right) \sum p_{ij}$$

$$= \left(\ln T! - T \ln T + T\right) - T \sum_{ij} p_{ij} \ln p_{ij} \tag{17}$$

De aquí, al maximizar:

$$S\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = - \sum_{i} \sum_{j} p_{ij} \ln p_{ij} \tag{18}$$

sujeta a las ecuaciones (1), (2) y (3), se obtiene una estimación de T_{ij} que es igual a la expuesta en la interpretación anterior. De hecho, $\ln W$ y S están relacionadas linealmente.

3. La entropía y su relación con la estadística Bayesiana.

En este inciso analizaremos los métodos Bayesianos de inferencia estadística y su relación con el concepto de entropía.

Sea x una variable aleatoria que puede tomar valores x_1, x_2, x_3, ... Definimos una muestra aleatoria de tamaño n como el conjunto de variables aleatorias independientes que tienen la misma distribución que x. Sea $p\{x_i/\theta\} = p_i$ la especificación de esta distribución, donde θ es un parámetro de la misma. Sea H nuestro estado de conocimiento antes de tomar la muestra.

Entonces, θ tiene una distribución dependiente de H que puede escribirse como $\Pi(\theta/H)$. Por lo tanto, si el vector $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots)$ es una muestra aleatoria, su densidad toma la forma siguiente:

$$f(\hat{x}/\theta,H) = \prod_{j=1}^{n} p(\hat{x}_i/\theta) \qquad (19)$$

donde el lado derecho de la ecuación se escribe como un producto debido a que se supone que las x_i son independientes.

Entonces, la nueva distribución de θ obtenida mediante la muestra aleatoria $\hat{x}$ está dada por el Teorema de Bayes como:

$$\Pi(\theta/\hat{x},H) = \frac{f(\hat{x}/\theta,H)\ \Pi\ (\theta/H)}{\Pi(\hat{x}/H)} \qquad (20)$$

Para obtener la estimación de máxima verosimilitud de θ, sea $\hat{\theta}$, es necesario encontrar la θ que maximice a $f(\hat{x}/\theta,H)$.

Por brevedad usaremos la notación $f(\hat{x}/\theta)$ cuando se sobreen tienda el término H.

Convencionalmente se utiliza el logaritmo de la verosimilitud $L(\hat{x}/O)$ obtenido al tomar logaritmos en la ecuación (19):

$$L(\hat{x}/O) = \sum_{i=1}^{n} \ln\ p(\hat{x}_i/O) \tag{21}$$

Al aumentar el tamaño de la muestra, n, el valor de O, $\hat{O}$, obtenido al maximizar $L(\hat{x}/O)$ tiende al valor verdadero de O y aplicando la Ley de los grandes números se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \left[n^{-1}\ L(\hat{x}/\Theta)\right] = E\left[\ln\ p(x/\Theta)\right] \tag{22}$$

Sin embargo:

$$E\left[\ln\ p(x/O)\right] = \Sigma p(x_i/O)\ \ln\ p(x_i/O)$$

$$= \Sigma\ p_i \ln p_i \tag{23}$$

Puede observarse que esta ecuación es el negativo de lo que se ha definido como la entropía de una distribución de probabilidad. Esto significa que al escoger la forma de la función p mediante la maximización de su entropía, se está escogiendo implícitamente la forma que minimiza la función de verosimilitud.

Del análisis anterior se concluye que el procedimiento de máxima verosimilitud de Bayes y el procedimiento de máxima entropía son consistentes y complementarios.

APLICACIONES DEL CONCEPTO DE ENTROPIA.

a. <u>Generación de hipótesis</u>

La regla general para la generación de hipótesis puede estable cerse de la manera siguiente:

i. Identificar las variables que definen al sistema bajo es tudio y las restricciones que lo afectan.

ii. Definir la entropía del sistema, ya sea en forma directa o utilizando una distribución de probabilidad asociada.

iii. Estimar las variables del sistema mediante el procedimien to de máxima entropía, sujeto a las restricciones estable cidas.

La mayoría de las hipótesis generadas de esta forma pueden tam bién obtenerse mediante la utilización de métodos más conven cionales, sin embargo este procedimiento permite analizar si tuaciones extremadamente complejas con un grado de consisten cia que difícilmente se logra mediante otros métodos.

b. Interpretación de teorías.

Al desarrollar las teorías a partir de las cuales se constru yen los modelos, es frecuentemente necesario utilizar términos y conceptos que no son fáciles de interpretar debido a que no existe la posibilidad de medirlos directamente. Muchas veces estos términos son los parámetros del modelo.

El método de máxima entropía proporciona una explicación deta llada del papel que juegan estos parámetros en el comporta miento de un modelo y permite interpretar más fácilmente las restricciones sobre las variables que representan al sistema.

Esto conduce obviamente a un desarrollo teórico más explícito y por lo tanto más comprensible.

c. Estudio de la dinámica de un sistema.

Debido a que el concepto de entropía aparece en una de las múltiples formas de la segunda ley de la Termodinámica enunciada como: "La entropía siempre se incrementa", su utilización facilita la explicación de las leyes acerca de la dinámica de un sistema.

La segunda ley de la Termodinámica surge de una ecuación de la forma:

$$ds = \mu dE + \mu \sum_k X_k \, dx_k \tag{24}$$

donde:

- ds = cambio en la entropía.
- dE = cambio en la energía del sistema.
- X_k = fuerza externa correspondiente a la coordenada externa x_k.

y por lo tanto

$$- \sum_k X_k \, dx_k$$

es el trabajo realizado externamente sobre el sistema.

Así, la segunda ley expresada como $ds \geq 0$, establece que un sistema no puede recibir mas energía que la cantidad de trabajo externo proveído. De esta manera, la entropía queda definida por la ecuación (24) y puede considerarse como una medida útil de una cantidad definida objetivamente en el sistema.

La aplicación de este concepto en las ciencias sociales, requiere que los términos correspondientes a energía y trabajo (tales como utilidad e inversión) sean definidos explícitamente con relación al sistema de interés.

INTERRELACION DEL METODO DE MAXICA ENTROPIA CON EL ANALISIS ESTADISTICO.

A continuación analizaremos la utilidad de estos dos enfoques aplicándolos al mismo problema.

Supongamos que x es una variable aleatoria con valores posibles x_i, donde p_i es la probabilidad de que x tome un valor x_i. Esto puede escribirse como $p(x_i/\theta)$, siendo θ un parámetro simple.

Podemos suponer además, que la persona que utiliza el método de máxima entropía expresa su conocimiento acerca de las restricciones sobre p_i mediante una ecuación de la forma:

$$\sum_i p_i \ f(x_i) = E\left[f(x_i)\right] \qquad [(10)]$$

y su estimación de máxima entropía para p_i está dada por:

$$p_i = \frac{\exp\left[-\mu \ f(x_i)\right]}{\sum_i \exp\left[-\mu \ f(x_i)\right]}$$

donde se observa que p_i es una función con un parámetro simple μ.

El estadístico, en cambio, supone un cierto número de funciones con formas apropiadas para p, y utiliza los datos disponibles para obtener una estimación de máxima verosimilitud, $\hat{\theta}$, del parámetro θ. Posteriormente, realiza pruebas de bondad de ajuste y escoge la función que presenta el mejor ajuste con la θ correspondiente.

La persona que utiliza el método de máxima entropía, al obtener su estimación de p_i realiza también pruebas de bondad de ajuste sobre las predicciones de su modelo y si estas no están de acuerdo con la realidad, cambia la forma de la función de $f(x_i)$ en la ecuación (10) (suponiendo que conoce el valor esperado de la nueva función) y continúa este proceso hasta obtener mejores predicciones. Si no conoce el va lor esperado de las nuevas formas de la función f, entonces se encuentra en la misma posición que su colega y por lo tanto, debe utilizar un procedimiento estadístico para estimar el parámetro μ.

En estas circunstancias, los dos llegan a la misma mejor estimación de la forma de la función y el parámetro.

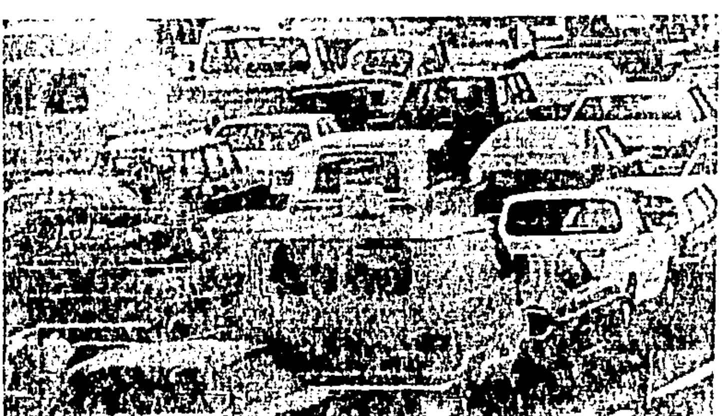
Sin embargo, la persona que utiliza el método de máxima entropía tiene tres ventajas potenciales sobre el estadístico:

i. Al tratar con las restricciones y no con las funciones de distribución directamente puede lograr consistencia más fácilmente en situaciones complejas.

ii. Su conocimiento acerca del sistema es mayor debido a que puede interpretar fácilmente las ecuaciones de restricción.

iii. Puede construír más rápidamente un modelo ya que utiliza de manera más directa los conceptos y los principios generales del análisis de sistemas.

Para facilitar la comprensión del concepto de entropía, analizaremos ahora su desarrollo y aplicación en la Física y en la Biología.



EL CONCEPTO DE ENTROPIA EN LA FISICA.

Desde el punto de vista de la termodinámica, se considera que un sistema es una porción del Universo, desde un átomo hasta una galaxia.

En general, se dice que un sistema es una cierta región del espacio que se desea estudiar, a la cual se circunscribe con fronteras específicas que pueden ser reales o imaginarias, fijas o móviles, donde a la región circundante se le da el nombre de medio ambiente o vecindad.

Esta ciencia considera dos tipos principales de sistemas:

a) Sistemas cerrados, en los cuales no hay intercambio de materia con el medio circundante, pero no se prohibe el flujo de energía.

b) Sistemas abiertos, en los cuales se permite el flujo de materia a través de sus fronteras.

En cuanto a las propiedades de los sistemas, se clasifican como intensivas y extensivas. Las intensivas son independientes de la masa, tales como la presión y la temperatura. Las extensivas son las que dependen de la cantidad de materia considerada, tales como el volúmen.

Los valores de las propiedades de un sistema, en un instante determinado, definen la situación del sistema en ese instante; esta situación recibe el nombre de estado del sistema.

Si una o más propiedades del sistema varían, se efectúa un cambio de estado, y entonces se dice que el sistema ha sufrido un proceso.

Cuando un sistema, a partir de un estado particular, pasa por una sucesión de procesos y regresa al estado inicial, se dice que el sistema ha sufrido un ciclo.

Debido a los movimientos y a la configuración de sus partícu las internas, la materia posee energía interna, la cual se ma nifiesta a través de algunas propiedades tales como la presión, la temperatura y la composición química.

PRINCIPIOS DE LA TERMODINAMICA.

El primer principio de la termodinámica es el de la conserva ción de la energía. Este principio se establece de la manera siguiente:

La energía no se crea ni se destruye, únicamente se transforma. Cuando un sistema incrementa su energía, se presenta siempre una disminución correspondiente en la energía de otro sistema. En todas las transformaciones existe, ineludiblemente, un balan ce de energía entre el sistema y su medio ambiente.

El segundo principio de la termodinámica es un postulado acerca de la degradación de la energía. Este principio puede explicar se de la manera siguiente:

Experimentalmente, se ha encontrado que es fácil convertir el trabajo en calor, pero es imposible convertir el calor en tra bajo de un modo total y continuo. La energía se presenta bajo muchas formas, pero no todas se pueden transformar completamen te en trabajo, ni aún en condiciones ideales. La energía está compuesta de dos partes, la energía utilizable y la energía no utilizable.

La energía utilizable es la cantidad máxima de energía que pue de convertirse en trabajo útil mediante transformaciones idea les que modifican un sistema hasta alcanzar el equilibrio con su medio ambiente. Las transformaciones ideales son aquellas en las que no existe disipación de energía utilizable; en contraste, se definen las transformaciones reales de un sistema aislado, en las cuales disminuye siempre la energía utilizable.

Estas observacionse se pueden expresar con toda generalidad mediante la función de entropía:

La entropía de un sistema aislado aumenta en todas las transformaciones reales y se conserva en las ideales.

Las transformaciones reales de un sistema aislado son espontáneas e irreversibles, por consiguiente, el segundo principio de la termodinámica proporciona un medio preciso para conocer si una transformación es irreversible, ó sea que si en una transformación aumenta la entropía de un sistema aislado, entonces la transformación es irreversible.

LA ENTROPIA COMO MEDIDA DE PROBABILIDAD, DE DESORDEN Y DE INFORMACION.

Se considera un sistema termodinámico aislado térmicamente, del cual se conocen su energía interna U, el volúmen V y su composición. Se supone que el sistema se halla formado por gran número de partículas $P_1, P_2, P_3, \ldots$ interactuando una con otra. Cada estado del sistema se conoce cuando se saben los valores de un conjunto de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en cada una de las partículas; este conocimiento determina un micro-estado. Ahora, se construye un modelo donde el estado de las partículas se fija al azar, con las únicas limitaciones de que la energía total, el volúmen y la composición coincidan con los valores conocidos. Cualquier micro-estado determinado en la forma indicada se llama micro-estado permitido. De acuerdo con este procedimiento, se pueden construir varios modelos independientes; todos estos modelos reunidos forman un conjunto cuyos elementos (modelos) se construyen independientemente unos de otros, la fracción del número total de modelos que dan origen al mismo micro-estado permitido es la misma para cualquier micro-estado que se considere, es decir, todos los micro-estados permitidos tienen la misma probabilidad de existir en el conjunto.

El postulado básico en mecánica estadística es: "En un sistema real en equilibrio termodinámico, el valor de cada una de las propiedades extensivas X_i, es igual al valor medio correspondiente a los que tiene dicha propiedad en los elementos que integran el conjunto". Debido a que en el conjunto, cada micro-estado permitido es igualmente probable, el valor medio de las X_i es:

$$X = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

donde X_i es el valor de la propiedad extensiva en el micro-estado permitido i, y m es el número total de micro-estados permitidos.

En la mecánica estadística, el número de partículas que se consideran es muy grande, por ejemplo en un gas cada molécula es una partícula, consecuentemente, en los sistemas comunes existen del orden de 10^{21} partículas. La energía que poseen estas partículas no varía de modo contínuo, sino que se hallan situadas sobre niveles energéticos a los que corresponden valores discretos de la energía. El nivel de energía mínima se llama nivel fundamental o de mínima energía. En un instante determinado, algunas partículas tienen un valor de la energía considerablemente mayor que el valor medio, pero otras deben hallarse a niveles energéticos inferiores, de modo que la energía total no varíe; por esta razón, en los niveles inferiores la densidad de partículas es siempre mayor.

Modelo fundamental.

Se tiene un conjunto de partículas iguales, todas de la misma especie, confinadas en un volúmen fijo V. Cada partícula so lo puede tomar niveles de energía de ciertas magnitudes discretas bien definidas, cuyo valor es independiente del volúmen donde se hallan confinadas; en estas condiciones, se dice que la energía se halla cuantizada. Dado un conjunto de niveles de energía, la mecánica estadística se propone explicar como se distribuyen las partículas entre los distintos niveles de energía a cualquier temperatura, la cual depende de la cantidad de energía térmica que comparten las partículas.

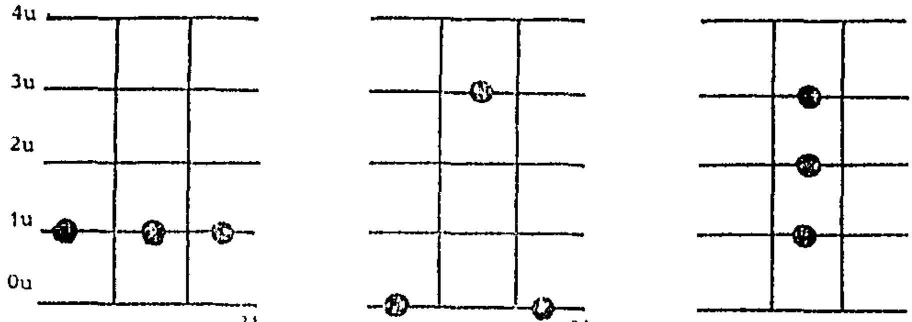
Postulado.

Una partícula tiende a caer de los niveles altos de energía a los de baja energía. El nivel de energía más baja es el "nivel de tierra" y su valor se representa con el símbolo e_o; los siguientes más altos en orden de magnitud son los e_1, e_2, ... Para facilitar las explicaciones, los niveles de energía se representan con líneas horizontales paralelas y sus respectivos valores de la energía se miden en una escala vertical.

Ejemplo de como se reparte la energía.

Se consideran tres partículas que comparten la cantidad de energía 3u, donde u es la diferencia de energías entre dos niveles consecutivos cualesquiera. En cierto instante, una de las partículas puede tener toda la energía y las demás nada; otras veces todas las partículas tendrán la misma energía, etc.

Consecuentemente, las formas en que las partículas comparten la cantidad de energía 3u se presentan en la fig. A3.3, donde tácitamente se acepta la hipótesis: "las partículas ni ganan ni pierden energía".



Estado a. $N^{o} = \frac{3!}{0!3!} = 1$ Estado b. $N^{o} = \frac{3!}{1!2!} = 3$ Estado c. $N^{o} = \frac{3!}{1!1!1!} = 6$

Nº = Número de formas

Figura A3.3

Por su dinamismo, continuamente las partículas pasan de una a otra configuración; pero las tres configuraciones presentadas son únicas. Al paso del tiempo, los distintos niveles de energía no se hallan, en promedio, igualmente concurridos: las magnitudes de los tiempos en que cada nivel se halla ocupado no son los mismos, por ejemplo, la configuración a se presenta en una sola forma, pero la b se puede dar en los tres modos que a continuación se presentan:

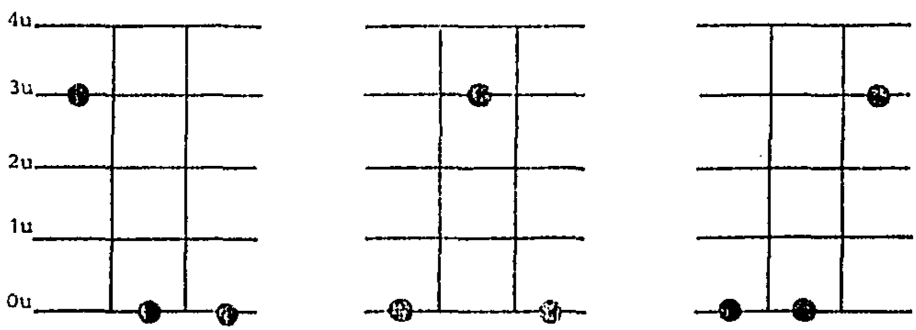


Figura A3.4.

En cuanto a la configuración c, se puede presentar de seis maneras diferentes, las cuales se muestran en la siguiente figura:

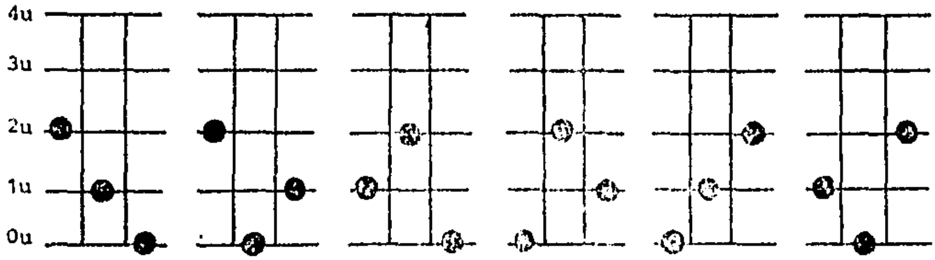


Figura 33.5

Hay en total 10 modos en los que la cantidad de energía 3u se encuentra repartida entre las tres partículas consideradas y cada uno de estos modos tiene la misma oportunidad de presentarse; de esta situación, se infiere que el espacio de estos eventos es equiprobable, con probabilidad de $\frac{1}{10}$ para la realización de cada modo, por lo cual desde el punto de vista de los estados y sus respectivas configuraciones se tiene:

Probabilidad del estado a = $\frac{1}{10}$

Probabilidad del estado b = $\frac{3}{10}$

Probabilidad del estado c = $\frac{6}{10}$

En cuanto al número de partículas que se hallan en los distintos niveles se tiene:

Nivel de energía	0u	1u	2u	3u	4u
Concurrencia	12	9	6	3	0

Se concluye de esta contabilidad que el nivel más bajo de energía es el más concurrido y que esta concurrencia decrece a medida que el nivel de energía crece. Estadísticamente, las concurrencias se llaman frecuencias y su histograma es el siguiente:

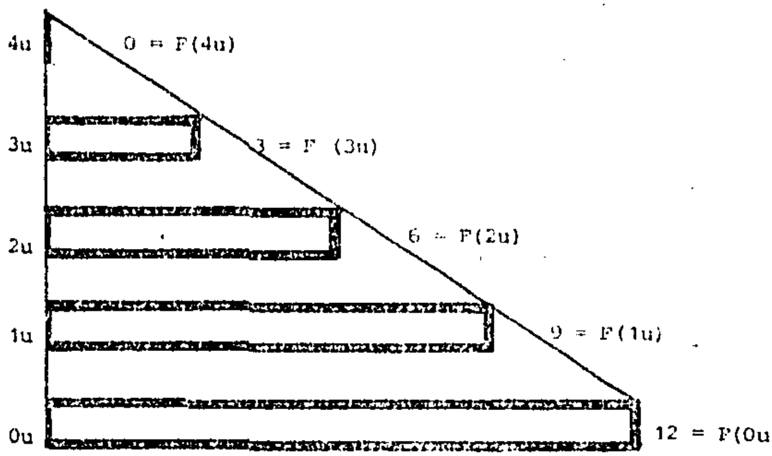


Figura A3.6

Problema

Se tienen 3 partículas que comparten la cantidad de energía 6u. Determine la frecuencia de concurrencia de los distintos niveles de energía.

Solución:

Los estados son las configuraciones siguientes:

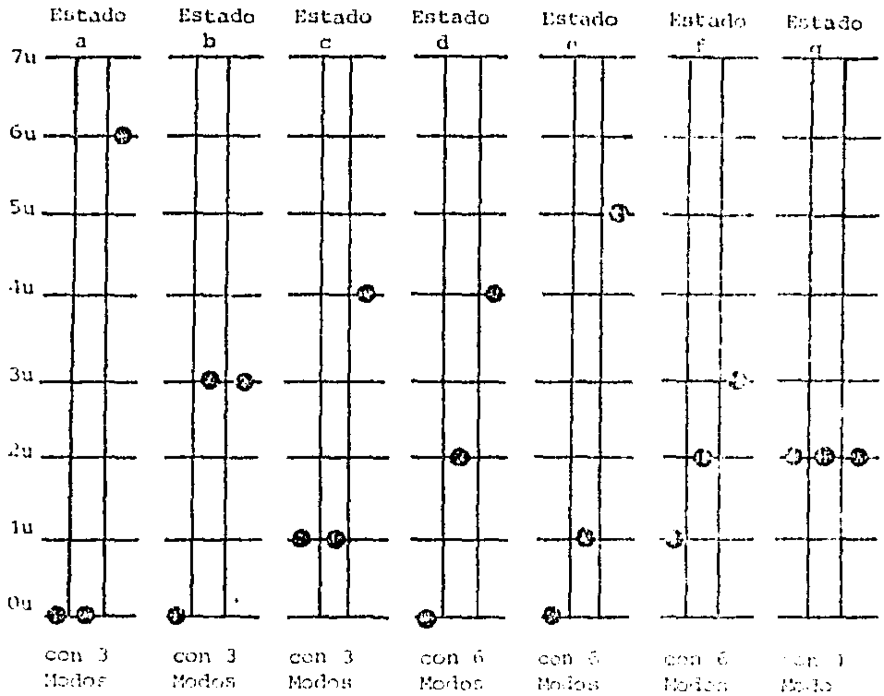


Figura A3.7

Se tienen en total 28 modos; cuando todas las partículas tienen el mismo nivel, solo puede darse un modo, si dos partículas tienen un mismo nivel se pueden tener $\frac{3!}{2!1!} = 3$ modos. Si las partículas se hallan en niveles diferentes son posibles $\frac{3!}{1!1!1!} =$ $= 6$ modos para cada estado. Por consiguiente, las frecuencias de concurrencia de cada nivel son:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= (2)3 + 1(3) + 1(6) + 1(6) &&= 21 \\
F(1) &= (2)3 + 1(6) + 1(6) &&= 18 \\
F(2) &= (1)6 + 1(6) + 3(1) &&= 15 \\
F(3) &= (2)3 + 1(6) &&= 12 \\
F(4) &= (1)3 + 1(6) &&= 9 \\
F(5) &= (1)6 &&= 6 \\
F(6) &= (1)3 &&= 3 \\
F(7) &= 0 &&= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Nuevamente se observa que el nivel más concurrido es el cero y luego decrece linealmente de 3 en 3 la concurrencia a medida que la energía crece, hasta que en el nivel 7 es cero. No importa cuantas partículas se consideren ni la magnitud de la energía que se comparte, el nivel más bajo de energía es el más concurrido por las partículas.

En general, cuando se tienen n partículas que comparten una cantidad de energía E y n_i es el número de partículas en el nivel de energía i, entonces:

$$E = n_o e_o + n_1 e_1 + \ldots + n_p e_p = \sum_{i=1}^{p} n_i e_i$$

donde:

$$n = \sum_{i=1}^{p} n_i,$$

e_i = cantidad de energía del nivel i.

Si $N°$ es el número de modos posibles, cuando E aumenta $N°$ crece, en los ejemplos se observa que con tres partículas, cuando se comparte la cantidad de energía $3u$ hay 10 modos y cuando la energía a distribuir es $6u$ entonces se tienen 28 modos; en general, $N°$ crece enormemente. En un gas real hay aproximadamente 10^{23} moléculas por gramo, en consecuencia existe una cantidad enorme de micro-estados, todos con la misma probabilidad de existir, independientemente de que las moléculas se encuentren agrupadas, en un punto o distribuidas uniformemente en el volúmen que las contiene. El número de micro estados que adoptan la distribución más probable es tan elevado que prácticamente es la única que se ha comprobado macroscópicamente. Las distribuciones distintas a la más probable también existen pero su vida es demasiado breve para poder observarlas.

ENTROPIA DESDE UN PUNTO DE VISTA MICROSCOPICO.

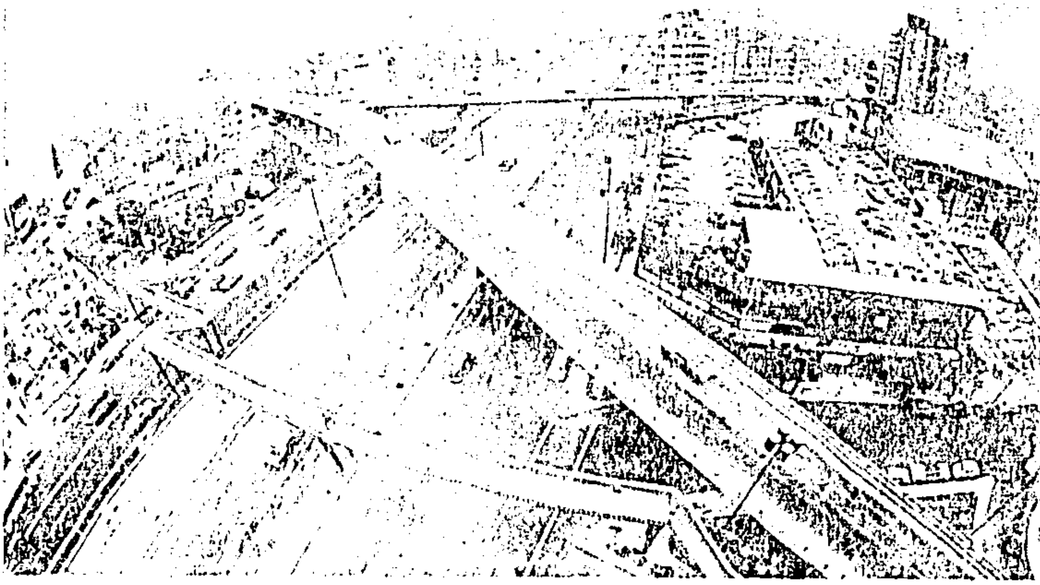
Desde un punto de vista microscópico, un estado i, o distribución de partículas entre los diversos niveles de energía, puede ocurrir de m_i modos, proporcionales a la probabilidad termodinámica para ese estado. Para un estado de equilibrio del sistema de volúmen v, energía total E y número total de partículas $N°$, todos los estados compatibles con las restricciones del sistema son accesibles o están disponibles para el sistema, por consiguiente, el número total de micro-estados m_T disponibles es la suma de los productos de los estados por sus respectivos modos, como se calculó en el problema anterior.

Por otra parte, la entropía es una propiedad termodinámica extensiva del sistema; esta afirmación significa que si dos sistemas independientes se combinan, sus entropías se suman, pero en el sistema compuesto la probabilidad de un estado j es igual al producto de las probabilidades de los estados componentes; de esto se deduce que existe una relación funcional entre la entropía y el número de micro-estados admisible. La única función $S_j(W_j)$ compatible con estas dos condiciones es:

$$S_i = k\, L_n\, m_i$$

donde k es una constante.

De esta definición de la entropía se infiere que al aumentar el número de modos microscópicos sube de valor la entropía; pero un acrecentamiento del número de modos microscópicos incrementa positivamente el desorden del sistema; en esta significación puede considerarse a la entropía como una medida del desorden del sistema. Análogamente, un aumento en el número de micro-estados, complica más al sistema, por lo cual aumentan los impedimentos que se oponen al pleno conocimiento del estado del sistema, ya que se cuenta con menos información acerca del comportamiento del citado sistema; esta conclusión conduce a una nueva interpretación del concepto de entropía: "una forma de medir la falta de información es por medio de la entropía". Un sistema perfectamente ordenado implica que se conoce con exactitud la estructura microscópica de su estado, por consiguiente no se presenta desorden alguno y el valor de su entropía es cero.



2. EL CONCEPTO DE ENTROPIA EN LA BIOLOGIA

Si se juzga que un organismo es una máquina, esta máquina viva para funcionar se debe alimentar ya que requiere al menos de cantidades mínimas de energía. Cuando el organismo posee clorofila, entonces la energía le es procurada por los enlaces químicos de los alimentos; el organismo quema sustancias como azúcares, aminoácidos, compuestos minerales como H_2S y CO. El organismo realiza óxido-reducciones cuya ecuación general es:

$$A\,H_2 \quad + \quad B \quad \rightarrow \quad A \quad + \quad B\,H_2$$

donador de hidrógeno + receptor de hidrogeno → donador + receptor
(estado reducido) (estado oxidado) (oxidado) (reducido)

Por ejemplo, en la respiración el receptor de hidrógeno es el oxígeno y la reacción es:

$$2\,A\,H_2 + O_2 \rightarrow 2A + 2\,H_2\,O$$

Si se siembra una bacteria en un medio nutriente, absorbe alimento, se producen reacciones químicas y se obtienen biosíntesis. Este proceso se llama metabolismo. A cada reacción la cataliza una proteína específica, llamada enzima; pero en toda cadena biosintética de reacciones, cada una de estas requiere energía, la cual proviene principalmente de la oxidación de alimentos. El organismo quema azúcar y la energía obtenida la almacena en forma de enlaces de considerable energía. Como resultado de la oxidación de alimentos, almacenamiento de energía y de la acción catalítica de las enzimas, la bacteria aumenta de tamaño, se divide el núcleo y finalmente se divide también la bacteria dando origen a dos células hijas. A consecuencia del proceso descrito, hay biólogos que definen a un organismo vivo como un sistema de equilibrio de flujo, que toma materia y energía del ambiente.

Desde el punto de vista de la termodinámica, en toda reacción química hay que distinguir entre el calor total de las reacciones y su energía libre porque ésta es una media de la cantidad máxima de trabajo obtenible. En la mayoría de las reacciones biológicas, solo una pequeña fracción del calor total está disponible para realizar trabajo. La combustión de los alimentos produce necesariamente calor.

DIFERENCIA ENTRE MAQUINAS INANIMADAS Y ORGANISMOS VIVOS.

Una máquina inanimada puede conservar su estructura aún cuando no realiza trabajo, pero un organismo vivo es incapáz de hacerlo; las enzimas, ya sea que dispongan de alimento o no, cumplen su tarea, la cual consiste en oxidar algo. Si al organismo no se le suministra alimento, se queman primero sus reservas, azúcares y grasas; luego quema sustancia noble, las proteínas y en último término muere. El organismo debe alimentarse aún cuando no efectúe síntesis, o sea:

$$\text{Organismo}+\text{alimento}\rightarrow\text{organismo}+\text{desecho}+\text{calor} \qquad (1)$$

La energía se disipa parcialmente en forma de calor, la otra parte de la energía se utiliza en los movimientos protoplasmáticos, ya que todas las partes de la célula se encuentran en constante movimiento; consecuentemente, el simple mantenimiento del orden biológico supone una degradación de la energía, pero un rasgo esencial de la vida es la reproducción.

Así, la ecuación (1) se convierte en la ecuación siguiente:

$$\text{Organismo 1}+\text{alimento}\rightarrow\text{Organismo 2}+\text{desecho}+\text{calor} \qquad (2)$$

Cierto que la reproducción supone una degradación de la energía; pero durante la reproducción se han producido dos organismos lo que significa que el orden ha aumentado. En el estudio anterior se concluyó que la entropía es una medida del desorden; a un aumento del desorden le corresponde un aumento en la entropía y a un aumento del orden le corresponde una disminución de la entropía. Consecuentemente, se debe examinar la reproducción desde el punto de vista más general, o sea, el termodinámico.

ENTROPIA Y NEGANTROPIA

Todo sistema aislado cambia de forma tal que se acerca a un estado de quilibrio, no por una pérdida de energía sino por una degradación de esta. El valor de la entropía viene dado por la fórmula:

$$\text{Entropía} = k\, L_n\, D$$

donde k es la constante de Boltzmann y D es la medida del desorden atómico. El estado de equilibrio al cual tiende un sistema aislado, corresponde al de entropía máxima; pero como la entropía es una medida del desorden, guarda relación con la probabilidad:

$$\text{Entropía} = k\, L_n\, P,$$

donde P es el número de configuraciones discretas.

Schrödinger propuso el concepto de calidad de la energía, como una medida del orden atómico, magnitud que llamó negantropía, de modo que si D es la medida del desorden atómico, $\frac{1}{D}$ es la medida del orden atómico, así:

$$\text{Negantropía} = k\, L_n\, \frac{1}{D}$$

VIDA Y ENTROPIA

Un sistema cerrado no efectúa intercambio de materia con su ambiente, un sistema aislado no interacciona en ninguna for ma con su ambiente; como un organismo vivo separado de su ambiente, pronto muere, no puede ser cerrado, menos aislado.

El organismo sintetiza sus bloques de construcción y los organiza en forma de macromoléculas específicas, como resultado de la vida se produce trabajo y se degrada la energía, pero el orden aumenta, es decir, debido a la reproducción la entropía disminuye. En cuanto a la energía total del sistema, cuyo metabolismo y reproducción se representan en (2), se pregunta: ¿aumenta?. La respuesta a esta interrogante implica medir la disminución de la entropía correspondiente al aumento del orden.

INFORMACION Y NEGANTROPIA.

La medición del orden atómico lleva al principio de la negantropía de la información. Se estima que intentar la resolución de un problema implica cierto número de respuestas posibles cuando no se dispone de información. Cuando se consigue alguna información, el número de respuestas posibles se reduce y cuando se cuenta con la información completa la respuesta posible es única, consecuentemente, la información es una función de la razón entre las respuestas posibles antes y después de obtenerla.

$$\begin{aligned} \text{Información inicial} &= I_o = 0 \\ \text{Soluciones posibles} &= P_o \neq 0 \\ \text{Información final} &= I_f \neq 0 \\ \text{Soluciones posibles} &= P_f = 1 \end{aligned}$$

En general:

$$\text{Información} = K\, L_n \frac{P}{P_o} = K\, L_n\, P$$

En 1929, Szilard descrubrió y probó que la información corres ponde a la negantropía; pero ahora surge la interrogante: ¿Qué es la negantropía de un organismo? La respuesta a esta interesante pregunta se halla en un campo inexplorado. En una máquina, la negantropía representa la información u organización de la máquina, pero en un ser vivo ¿Cómo se puede calcular o por lo menos imaginar la negantropía?. Cada molécula, una proteína, un polisacárido o un ácido nucléico, es parte de la organización del organismo vivo. Se puede aceptar que la negantropía de un organismo vivo es la suma de la negantropía de sus macromoléculas específicas, pero el problema quizás se pueda simplificar.

La organización de todas las macromoléculas de un organismo tiene su orígen en la organización del material hereditario que es el ácido nucléico; pero un organismo es mucho más que su material genético, contiene unos cuantos millares de enzimas y un gran número de otras macromoléculas específicas; tal vez esta organización debe tenerse en cuenta en el cálculo de la cantidad de información. Además, el estudio del orden funcional ha revelado un grado muy grande de acoplamiento funcional, no estructural entre las unidades activas de las células y se ha propuesto que esta organización debe ser considerada en el cálculo de la negantropía biológica.

El valor de la negantropía no da una medida de la eficiencia del sistema. El organismo vivo no solo es un sistema improbable, sino un sistema adaptado a ciertas funciones. El biólogo sabe que el orden funcional es parte esencial del sistema vivo, pero es prácticamente imposible medir este orden funcional en unidades de entropía y carece de sentido desde un punto de vista termodinámico.

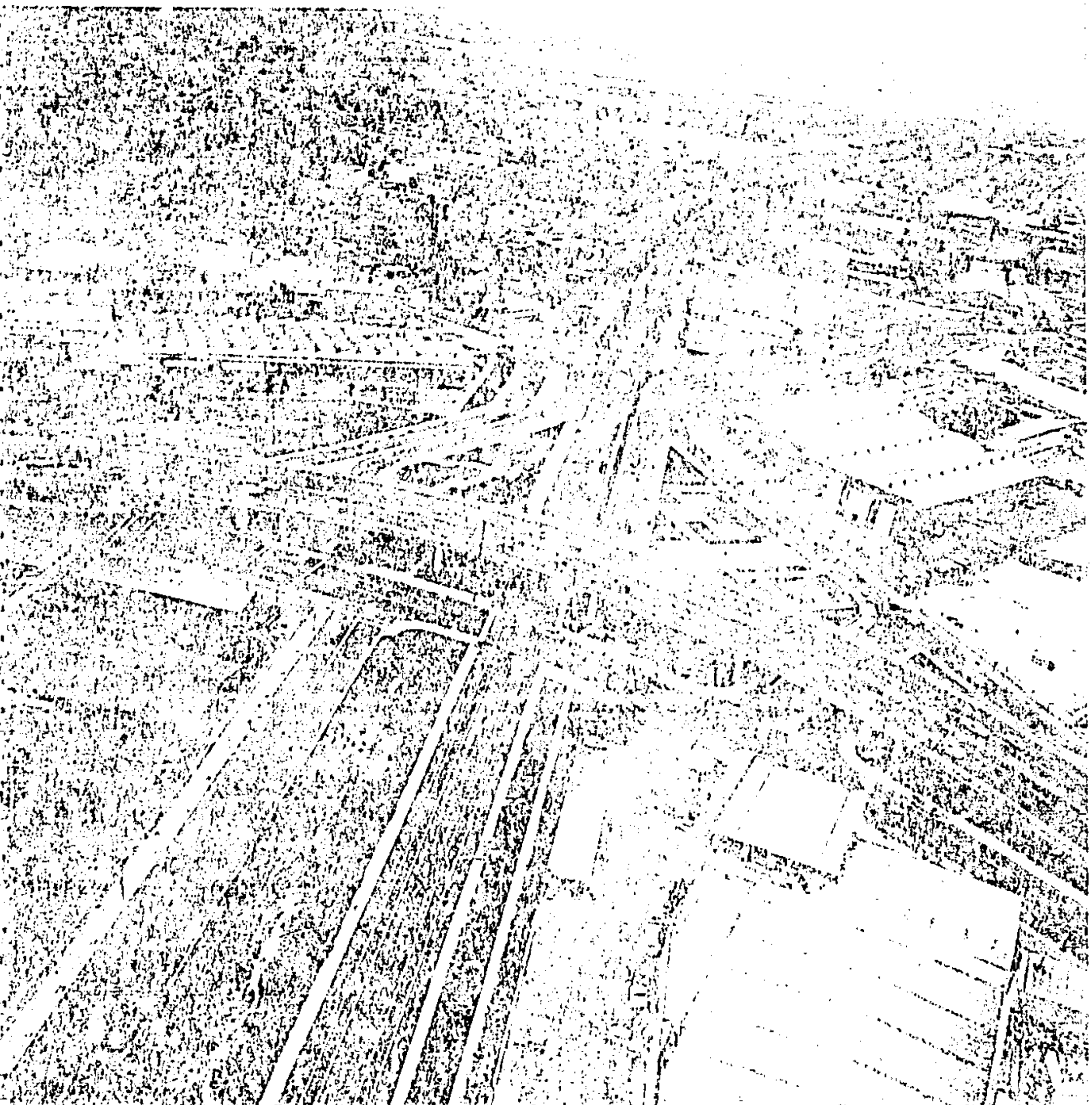
La síntesis de una proteína específica se halla gobernada por el ácido nucléico, en consecuencia, el ácido nucléico contiene la información genética para la unión ordenada de aminoácidos en proteínas, esto es, para la producción de una estructura particular con certeza, es decir, con probabilidad igual a uno. En un organismo la organización hereditaria tiene todo el derecho de llamarse información.

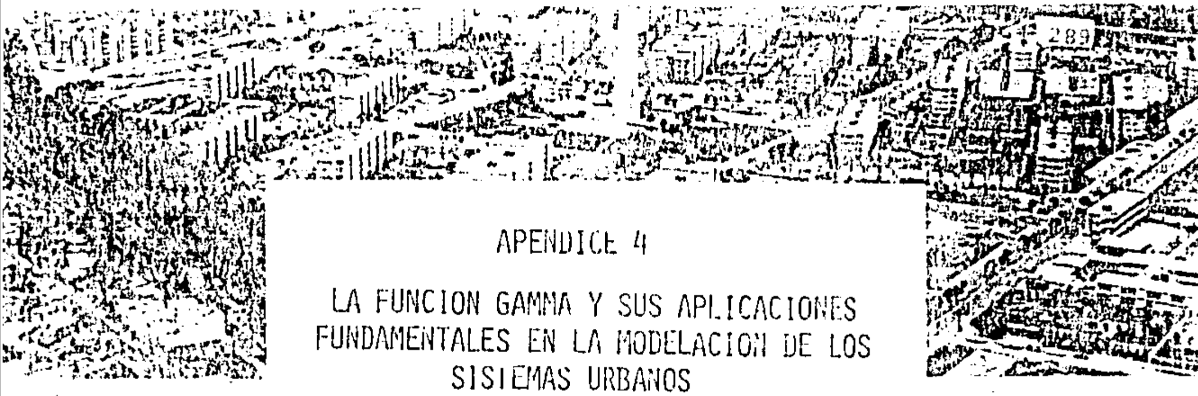
Siempre que los físicos miden la información, no toman en cuenta el valor del mensaje: un teorema de topología tiene la misma cantidad de información que un conjunto de letras tomadas al azar, siempre que el número de letras en ambos mensajes sea el mismo. Para el físico, todos los genes con el mismo número de bases tienen la misma información, pero el biólogo sabe que cada gen es diferente a todo otro gen, porque cada uno de ellos controla la síntesis de una proteína específica. El biólogo habla de información para la síntesis de una enzima determinada, desaparece el concepto de probabilidad y el concepto biológico de información genética implica el de calidad y el de valor específico; en general, se refiere a una estructura real dada, al orden del material hereditario y no a la negantropía de esta estructura.

Cuando se considera el orden funcional, resulta que el orden biológico es considerablemente mayor que el número obtenido al considerar sólo la probabilidad de la serie de bases en el material hereditario; pero obviamente hay algo más, se debe considerar la evolución. El actual orden biológico incluye la experiencia histórica del organismo, adquirida durante su evolución.

La organización de los sistemas actualmente vivos se ha adquirido a costa de un aumento de entropía. El organismo vivo mantiene su orden "tomando orden" de su ambiente. Para el animal las fuentes del orden son los compuestos orgánicos más o menos complejos.

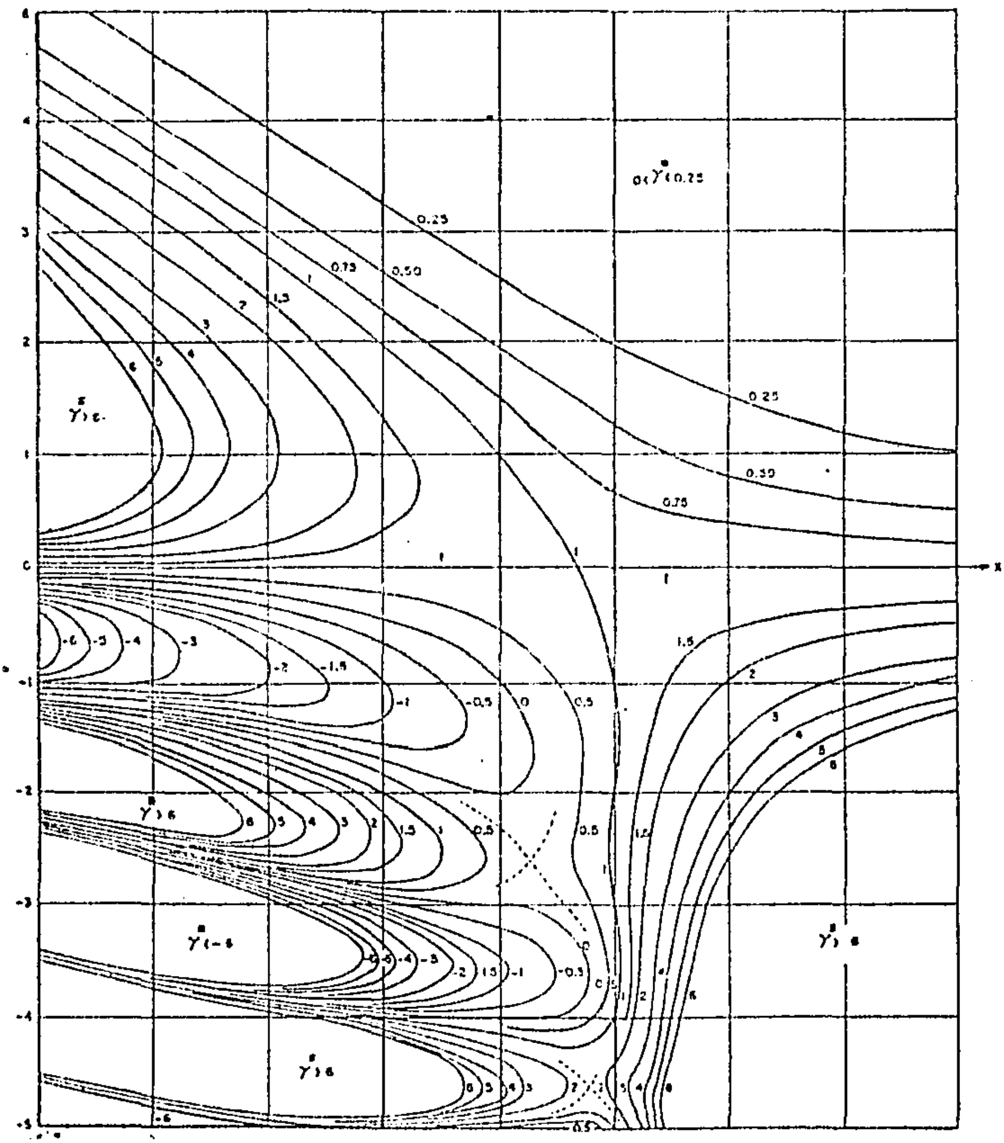
Si un organismo vivo necesita alimento es por la negantropía que puede obtener de él, para reponer las pérdidas causadas por el trabajo mecánico realizado o por los procesos de degradación del sistema vivo. La energía contenida en el ali mento no importa, la energía se conserva y nunca se pierde, pero lo que más importa es la neguentropía.





APENDICE 4

LA FUNCION GAMMA Y SUS APLICACIONES FUNDAMENTALES EN LA MODELACION DE LOS SISTEMAS URBANOS



LA FUNCION GAMMA

<u>FUNDAMENTOS</u>.

La integral $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$ (1)

converge cuando el número real n es positivo y diverge si n es un número entero negativo $-p$; ciertamente de $n=-p$ se infiere que:

$$x^{n-1} e^{-x} = x^{-p-1} e^{-x} = \frac{1}{x^{p+1} e^{x}},$$

por consiguiente:

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{p+1} e^{x}},$$

pero en el cálculo diferencial se probó que:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

de aquí evidentemente,

$$x^{p+1} e^{x} = x^{p+1} + x^{p+2} + \frac{x^{p+3}}{2!} + \frac{x^{p+4}}{3!} + \ldots \tag{2}$$

Asimismo, es fácil ver que:

$$xe = x + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + \cdots \tag{3}$$

Cuando el valor de x se halla comprendido entre 0 y 1, cada uno de los términos de la serie (2) es menor que su correspondiente de la serie (3), en consecuencia:

$$x^{p+1}\,e^x \leq xe,$$

de lo cual:

$$\frac{1}{x^{p+1}\,e^x} \geq \frac{1}{xe}, \text{ donde } 0 \leq x \leq 1.$$

Si a es un número real comprendido entre 0 y 1, se tiene:

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^{p+1}\,e^x} > \int_a^1 \frac{dx}{xe} = \frac{1}{e}\left[L_n\, x\right]_a^1 ,$$

o bien:

$$\int_a^1 \frac{dx}{x^{p+1}\,e^x} > \frac{1}{e}\, L_n\, \frac{1}{a} \qquad (4)$$

Si ahora a se acerca a cero, tanto como se quiera, el segundo miembro de la desigualdad (4) crece indefinidamente, va aumentando sin límite, esto es:

$$\int_o^1 \frac{dx}{x^{p+1}\,e^x} = \infty .$$

Con mayor razón,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^{p+1}\ e^{x}} = \infty$$

En resúmen, para todo valor entero negativo de n, la integral $\int_{0}^{\infty} x^{n-1}\ e^{-x}\ dx$ diverge.

Veamos que ocurre cuando $n=0$. En este caso resulta:

$$\int_{0}^{\infty} x^{n-1}\ e^{-x}\ dx = \int_{0}^{\infty} x^{-1}\ e^{-x}\ dx = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x\ e^{x}}\ .$$

Por otra parte, se cuenta con las series:

$$x\ e^{x} = x + x^{2} + \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{4}}{4!} + \ldots \tag{5}$$

$$x\ e = x + x + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots \tag{6}$$

Para valores de x comprendidos entre 0 y 1, cada uno de los términos de la serie (5) es menor que el término correspondiente de la serie (6) a partir del segundo, así que:

$$x\ e^{x} \leq xe, \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$

en consecuencia $\dfrac{1}{xe^{x}} \geq \dfrac{1}{xe}$ para $0 \leq x \leq 1$ $\qquad (7)$

Nuevamente se considera al número real a comprendido entre 0 y 1 y a la desigualdad (7), por tanto:

$$\int_{a}^{1} \frac{dx}{xe^{x}} \geq \int_{a}^{1} \frac{dx}{xe} = \frac{1}{e}\left[L_{n}\ x\right]_{a}^{1} = \frac{1}{e}\ L_{n}\ \frac{1}{a} \tag{8}$$

Si en (8) se juzga que a se acerca a cero tanto como se quiera, se obtiene:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{xe^{x}} = \infty,$$

con mayor razón se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ e^x} = \infty,$$

resultado que nos dice que la integral $\int_0^{\infty} x^{n-1}\ e^{-x}\ dx$ diverge cuando $n=0$.

Finalmente, cuando $n>1$ es un número positivo, al aplicar la integración por partes se tiene:

$$\int_0^{\infty} x^{n-1}\ e^{-x}\ dx = \left[-x^{n-1}\ e^{-x}\right]_0^{\infty} + (n-2)\int_0^{\infty} x^{n-2}\ e^{-x}\ dx.$$

$$u = x^{n-1} \qquad dv = e^{-x}\ dx$$

$$du = (n-1)\, x^{n-2} dx \qquad v = -\ e^{-x}$$

El producto $-x^{n-1}\ e^{-x}$ es cero cuando x es cero; veamos si también esto ocurre cuando $x=\infty$. En este caso, se parte del conocido desarrollo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \ldots ,$$

donde para todo valor de r se tiene:

$$e^x > \frac{x^r}{r!}\ ,\ \text{o bien}\quad x^{-n}\ e^x > \frac{x^{r-n}}{r!},$$

Indudablemente, siempre se permite la hipótesis $r>n$, por consiguiente, si x aumenta sin límite, resulta: $\lim_{x\to\infty} x^{-n}\ e^x = \infty.$

Este resultado significa que el recíproco del primer miembro tiene por límite cero:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-n}\ e^x} = \lim_{x\to\infty} x^n\ e^{-x} = 0,$$

Consecuentemente:

$$\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = (n-2) \int_0^\infty x^{n-2}\, e^{-x}\, dx \qquad (9)$$

Si $n=1$, entonces:

$$\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx,$$

por lo tanto:

$$\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x} = \left[- e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1 \qquad (10)$$

De repetir la integración por partes en el segundo miembro de (9) se llega a la integral convergente:

$$\int_0^\infty x^q\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^q \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) dx$$

donde q es un número positivo comprendido entre 0 y 1.

DEFINICION DE LA FUNCION GAMMA.

La integral $\int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$

converge cuando n es un número positivo, en consecuencia define una función de n que recibe el nombre de función gamma o el menos común de integral euleriana de segunda especie. Se emplea la notación:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{x}\, dx., \quad n > 0.$$

la igualdad (10) prueba que:

$$\Gamma(1) = 1.$$

Con esta notación, la igualdad (9) puede escribirse en la forma:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n).$$

Esta relación es la fundamental de la función gamma y algunos autores la utilizan para definirla.

EJEMPLO.

$$\begin{aligned}\Gamma(8.47) &= 7.47\,\Gamma(7.47) = 7.47(6.47)\,\Gamma(6.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47\,\Gamma(5.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47(4.47)\,\Gamma(4.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47(4.47)\,3.47\,\Gamma(3.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47(4.47)\,3.47(2.47)\,\Gamma(2.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47(4.47)\,3.47(2.47)\,(1.47)\,\Gamma(1.47) = \\ &= 7.47(6.47)\,5.47(4.47)\,3.47(2.47)\,(1.47)\,0.47\,\Gamma(0.47).\end{aligned}$$

el valor de $\Gamma(0.47)$ se encuentra en las tablas de la función gamma; su cálculo directo se efectúa por medio de series convergentes.

Cálculo de $\Gamma(n)$ con valores negativos de n.

De la relación $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$,

resulta:
$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}, \tag{11}$$

donde para valores de n comprendidos entre -1 y 0, $-1<n<0$ el valor de $n+1$ es positivo y los valores de $\Gamma(n+1)$ se hallan tabulados; por consiguiente con estos valores es posible calcular, conforme a la fórmula (11), los valores de $\Gamma(n)$ para valores negativos de n, comprendidos entre cero y menos uno.

Ahora, se continúa con valores del número n comprendidos entres -2 y -1. Obviamente con estos valores de n, los correspondientes del binomio $n+1$ son negativos y se encuentran contenidos en el segmento abierto $(-1,0)$ lo cual posibilita el cálculo de $\Gamma(n)$ para valores de n que cumplen con las desigualdades $-2<n<-1$. Claramente se ve que este procedimiento se puede continuar con valores de n comprendidos entre -2 y -3 y continuar en esta forma indefinidamente.

RESUMEN.

La integral $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(n)$

define a la función gamma para todos los valores positivos del número real n. Si n es un entero negativo o cero, la integral diverge y no existe un valor finito de $\Gamma(n)$; pero cuando n es real negativo no entero, la fórmula:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

define a la función gamma.

EJEMPLOS.

A partir de la fórmula $\Gamma(n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$ se obtiene:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\,\frac{2}{1}\,\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}\,\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\,\sqrt{\pi}.$$

GRAFICA DE LA FUNCION $\Gamma(n)$ PARA VALORES REALES DE n.

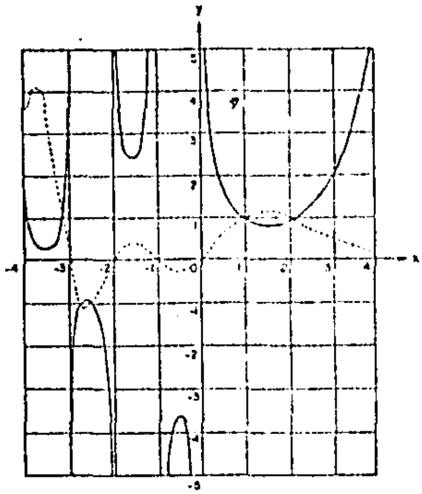


FIGURA A4.1

Vamos ahora a considerar las aplicaciones más importantes de la función gamma en la modelación de los sistemas urbanos. Estas son la aproximación de Stirling que se utiliza en la formulación de los modelos de máxima entropía y las distribuciones gamma, ji-cuadrada, t de Student y F, utilizadas en la inferencia estadística.

FORMULA DE STIRLING.

Cuando el número entrero n es muy grande, el cálculo directo del factorial n! resulta inabordable, en esta situación resulta muy útil la aproximación de Stirling:

$$n! \approx n^n \, e^{n-1} \sqrt{2\pi n} \tag{12}$$

Las reflexiones que conducen a tan notable fórmula se resumen en los desarrollos cuyo punto de partida es la definición de la función gamma.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx.$$

donde se considera: $x^n = (e^{Lx})^n = e^{nLx}$, esto es,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{(nLx)-x} dx.$$

Ahora, de aceptar el cambio de variable,

$$x = n+y, \quad \begin{array}{c|c|c|} x & 0 & \infty \\ \hline y & -n & \infty \end{array}, \quad dx = dy,$$

se cumple:

$$\Gamma(n+1) = \int_{-n}^\infty e^{(n\ L(n+y)-(n+y)} dy$$

$$= \int_{-n}^\infty e^{nL(n+y)} e^{-n} e^{-y} dy,$$

$$= e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n\ L(n)\left(1+\frac{y}{n}\right)} e^{-y} dy$$

$$\Gamma(n+1) = e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{n\left[L(n)+L\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]} e^{-y} dy$$

$$= e^{-n} \int_{-n}^\infty e^{L(n)^n} e^{nL\left(1+\frac{y}{n}\right)-\ y} dy$$

$$\Gamma(n+1) = e^{-n} n^n \int_{-n}^\infty e^{n\ L\left(1+\frac{y}{n}\right)-\ y} dy \tag{13}$$

Por otra parte, se recuerda el desarrollo:

$$f(x) = f(0) + x\, f'(x) + \frac{x^2}{2!} f''(x) + \frac{x^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad (14)$$

que al aplicarse a la función L(1+x) da como resultado:

$$f(x) - L(1+x), \; f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-2(3)(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-2(3)}{(1+x)^4} = \frac{-3!}{(1+x)^4},$$

por consiguiente, si se hace $x=0$ se obtiene:

$$f(0)=L(1) = 0, \quad f'(0)=1, \; f''(x)=-1, \; f'''(0)=2!, \; f^{IV}(0)=-3!$$

luego, al sustituir estos valores en (14) se logra el desa
rrollo:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Si esta fórmula se aplica a $L\left(1+\frac{y}{n}\right)$ se tiene:

$$L\left(1+\frac{y}{n}\right) = -\frac{y}{n} - \frac{y^2}{2n^2} + \frac{y^3}{3n^3} - \frac{y^4}{4n^4} + \frac{y^5}{5n^5} - \dots,$$

de la cual se infieren las series:

$$nL\left(1+\frac{y}{n}\right) = y - \frac{y^2}{2n} + \frac{y^3}{3n^2} - \frac{y^4}{4n^3} + \frac{y^5}{5n^4} - \dots$$

$$nL\left(1+\frac{y}{n}\right) - y = -\frac{y^2}{2n} + \frac{y^3}{3n^2} - \frac{y^4}{4n^3} + \frac{y^5}{5n^4} - \dots \quad (15)$$

De las igualdades (13) y (14) se deduce que:

$$\Gamma(n+1) = e^{-n} n^n \int_{-n}^{\infty} e^{\left(-\frac{y^2}{2n}+\frac{y^3}{3n^2}-\frac{y^4}{4n^3}+\frac{y^5}{5n^4} - \dots\right)} dy \quad (16)$$

Ahora se efectúa un nuevo cambio de variable:

$$y = v\sqrt{n}, \quad \begin{array}{c|c|c} y & -n & \infty \\ \hline v & -\sqrt{n} & \infty \end{array}, \quad dy = \sqrt{n}\, dv,$$

con lo cual, de la igualdad (16), se obtiene:

$$\Gamma(n+1) = n^{n} e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{\left(-\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3\sqrt{n}} - \frac{v^4}{4n} + \frac{v^5}{5n\sqrt{n}} \ldots\right)} dv$$

Si el valor de n es cada vez más grande, legítimamente se puede aceptar la aproximación:

$$\Gamma(n+1) = n^{n} e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

pero debido a que existe un teorema que prueba que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

se concluye que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sqrt{2\pi}$$

por consiguiente, para valores muy grandes de n se tiene aproximadamente:

$$\Gamma(n+1) \approx n^{n} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

cuando n es un entero muy grande, con poca diferencia,

$$n! \approx n^{n} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

LA DISTRIBUCION GAMMA.

Si X es una variable aleatoria contínua que toma únicamente valores no negativos, entonces X tiene una distribución de probabilidades gamma si a su función $f(x)$ de densidad de probabilidad la define la fórmula:

$$f(x) = \frac{a}{\Gamma(n)} (ax)^{n-1} e^{-ax}, \quad x>0 \tag{17}$$

$f(x) = 0$ para cualquier otro valor de x.

Ciertamente la fórmula (17) es una distribución de probabilidad debido a que:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (ax)^{n-1} e^{-ax} d(ax),$$

luego al efectuar el cambio de variable,

$$y = ax, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \infty \\ \hline y & 0 & \infty \end{array}, \quad dy = adx,$$

se obtiene:

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1,$$

además, los valores de $f(x)$ son positivos para todo valor positivo de x.

La distribución gamma depende de dos parámetros n y a, a los cuales se les imponen las restricciones:

$$n > 0, \quad a > 0.$$

Por otra parte, la esperanza de X se calcula como sigue:

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x(ax)^{n-1} e^{-ax} d(ax), \ x > 0,$$

$$E(X) = \frac{1}{a\Gamma(n)} \int_0^\infty (ax)^n e^{-ax} d(ax) = \frac{\Gamma(n+1)}{a\Gamma(n)} = \frac{n\Gamma(n)}{a\Gamma(n)}, \quad (18)$$

por consiguiente:

$$E(X) = \frac{n}{a}., \ x > 0.$$

En cuanto a la varianza de X, se sabe que:

$$\text{Var } (X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2, \quad (19)$$

donde:

$$E(X^2) = \frac{1}{a^2\Gamma(n)} \int_0^\infty a^2x^2(ax)^{n-1} e^{-ax} d(ax).$$

en consecuencia:

$$E(X^2) = \frac{1}{a^2\Gamma(n)} \int_0^\infty (ax)^{n+1} e^{-ax} d(ax) = \frac{\Gamma(n+2)}{a^2\Gamma(n)},$$

o bien:

$$E(X^2) = \frac{(n+1) \ n\Gamma(n)}{a^2 \ \Gamma(n)} = \frac{n^2 + n}{a^2} \quad (20)$$

De las igualdades (18), (19) y (20) se concluye que:

$$\text{Var } (X) = \frac{n^2 + n}{a^2} - \frac{n^2}{a^2} = \frac{n}{a^2} \quad (21)$$

LA DISTRIBUCION X^2 (ji-cuadrada).

Se considera la variable aleatoria continua X con función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{b}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty, \tag{22}$$

donde b es una constante de integración.

La variable aleatoria X con la distribución (22) se llama X^2 (ji-cuadrada) y la constante b representa los grados de libertad: el número de variables aleatorias menos el número de restricciones a las que están sujetas. Observe que:

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \frac{1}{2\ \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{b}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Al efectuar el cambio de variable $\frac{x}{2} = y$, se obtiene:

$$x = 2y, \quad dx = 2\ dy, \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \infty \\ \hline y & 0 & \infty \end{array},$$

consecuentemente:

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \frac{1}{2\ \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{b}{2}-1} e^{-y}\ (2dy) = \frac{2\ \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{2\ \Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} = 1,$$

Por otra parte,

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x)\ dx = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty 2\ \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{b}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

con el cambio de variable $\frac{x}{2} = y$, resulta:

$$E(X) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{b}{2}} e^{-y}\ dy = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right),$$

en consecuencia:

$$E(X) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\frac{b}{2}\right) \Gamma \left(\frac{b}{2}\right),$$

o bien:

$$E(X) = b \tag{23}$$

Análogamente,

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \; f(x) \; dx = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty 4 \, \frac{x^2}{4} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{b}{2} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \, dx \; ,$$

$$E(X^2) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{b}{2} + 1} e^{-\frac{x}{2}} \; dx.$$

Ahora, si $\frac{x}{2} = y$, entonces:

$$E(X^2) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{b}{2} + 1} e^{-y} \, dy = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{b}{2} + 2\right),$$

por consiguiente:

$$E(X^2) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \left(\frac{b}{2} + 1\right) \Gamma \left(\frac{b}{2} + 1\right) = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)} \; \frac{b + 2}{2} \; \frac{b}{2} \, \Gamma \left(\frac{b}{2}\right),$$

$$E(X^2) = (b + 2 \,) \; b.$$

Como $\mathrm{Var}\;(X) = E(X^2) - \left[E\;(X)\right]^2 = b^2 + 2b - b^2$

o bien:

$$\mathrm{Var}\;(X0 = 2b \tag{24}$$

Hay otras dos distribuciones muy útiles en ciertos problemas de inferencia estadística: la distribución t, también cono cida como t de Student y la distribución F.

DISTRIBUCION DE LA t DE STUDENT.

Las variables aleatorias X y Y son independientes y X se distribuye como ji-cuadrada, con m grados de libertad. La variable aleatoria Y está normalmente distribuida con media 0 y varianza 1, esto es:

$$g(x) = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad 0 \le x < \infty,$$

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad -\infty < y < \infty,$$

por consiguiente, la función de distribución de probabilidad conjunta de X y Y, $f(x,y)$ es el producto de las funciones de distribución de probabilidad de X y Y.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad \begin{array}{l} 0 \le x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}$$

LA DISTRIBUCION F.

Si U y V son variables aleatorias independientes, ambas con función de distribución de probabilidad ji-cuadrada, la primera U con m grados de libertad y la segunda V con n grados de libertad, esto es:

$$g(u) = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}},$$

$$h(v) = \frac{1}{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}$$

La distribución continua de U y V se obtiene al efectuar el producto de las distribuciones de U y V:

$$f(u,v) = \frac{1}{4\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}-2}}\, u^{\frac{m}{2}-1}\, v^{-\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{u+v}{2}} \qquad (25)$$

en el dominio:

$$A = \left\{(u,v) \;:\; 0<u<\infty,\; 0<v<\infty\right\}$$

y

$$f(u,v) = 0 \text{ en el complemento de } A.$$

Ahora, se define una nueva variable aleatoria:

$$F = \frac{\frac{U}{m}}{\frac{V}{n}} = \frac{n}{m}\,\frac{U}{V}$$

y se quiere determinar la función de distribución de probabilidad $g_1(f)$ de esta nueva variable aleatoria.

Las funciones $f = \frac{n}{m}\frac{u}{v}$, $z = v$ (26)

definen una transformación biyectiva cuyo dominio es $A = \left\{(u,v) \;:\; 0<u<\infty,\; 0<v<\infty\right\}$ y su codominio es el conjunto de $B = \left\{(f,z) \;:\; 0<f<\infty,\; 0<z<\infty\right\}$.

A continuación se presenta el cálculo del jacobiano de la transformación (26). Al despejar las nuevas variables se tiene:

$$u = \frac{m}{n}fz, \quad v=z,$$

por consiguiente:

$$J\left(\frac{u,v}{f,z}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial f} , & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial f} , & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{m}{n}\, z , & \frac{m}{n}\, f \\ 0 \quad , & 1 \end{vmatrix} = \frac{m}{n}\, z .$$

De aquí se infiere que la función de distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias F y Z es la función que se deduce de (25):

$$g(f,z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} \left(\frac{m}{n}\, fz\right)^{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{m}{n}\, f\, \frac{z}{2} - \frac{z}{2}\right] \frac{m}{n}\, z$$

en el dominio B y $g(f,z) = 0$ en el complemento de B.

La función que se investiga $g_1(f)$ es la función de distribución de probabilidad marginal de F, en consecuencia:

$$g_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{m}{n}\right) f^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} \int_0^{\infty} z^{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{n}{2}-1} z \exp\left[\left(-\frac{m}{n}\, f+1\right)\frac{z}{2}\right] dz ,$$

o bién:

$$g_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{m+n}{2}}} \int_0^{\infty} z^{\frac{m+n}{2}-1} \exp\left[-\left(\frac{m}{n}\, f + 1\right)\frac{z}{2}\right] dz \qquad (27)$$

Para facilitar la integración se realiza el cambio de variable:

$$y = \left(\frac{m}{n}\, f + 1\right)\frac{z}{2} , \quad \left|\begin{array}{c|c|c} z & 0 & \infty \\ \hline y & 0 & \infty \end{array}\right| , \quad dy = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\, f + 1\right) ,$$

con lo cual de (27) se obtiene:

$$g_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{m+n}{2}}} \int_0^{\infty} \left(\frac{2y}{\frac{m}{n}f+1}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-y} \frac{2\,dy}{\left(\frac{m}{n}f+1\right)} .$$

Al efectuar operaciones resulta:

$$g_1(f) = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2^{\frac{m+n}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{m}{n}f+1\right)^{\frac{m+n}{2}}} \int_0^{\infty} y^{\frac{m+n}{2}-1} e^{-y}\,dy.$$

Conforme a la definición de la función gamma, se tiene:

$$g_1(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(\frac{m}{n}f+1\right)^{\frac{m+n}{2}}} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \tag{28}$$

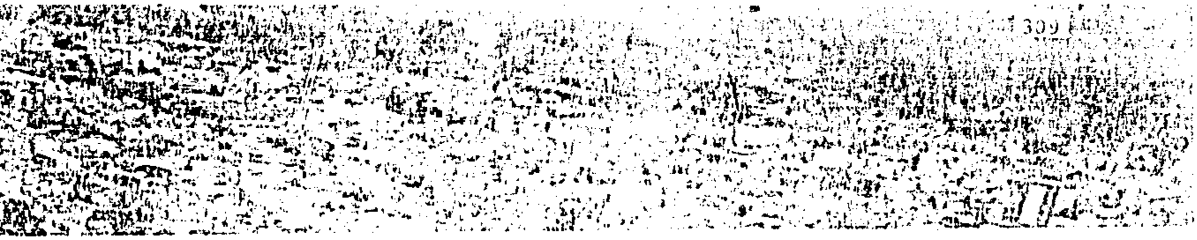
en el dominio $C = \left\{f:\ 0<f<\infty\right\}$ y $g_1(f) = 0$ en el complemento de C.

En resúmen, si U y V son variables aleatorias independientes, ambas con distribución ji-cuadrada con m y n grados de libertad respectivamente, entonces la variable aleatoria $F = \frac{n}{m}\frac{U}{V}$ tiene la función de distribución de probabilidad dada en la igualdad (28), la cual recibe el nombre de distribución F. Esta distribución depende de dos parámetros, m y n pero esta dependencia no es simétrica. En la práctica, a los parámetros m y n se les da el nombre de grados de libertad.

Se han construido tablas de los valores de

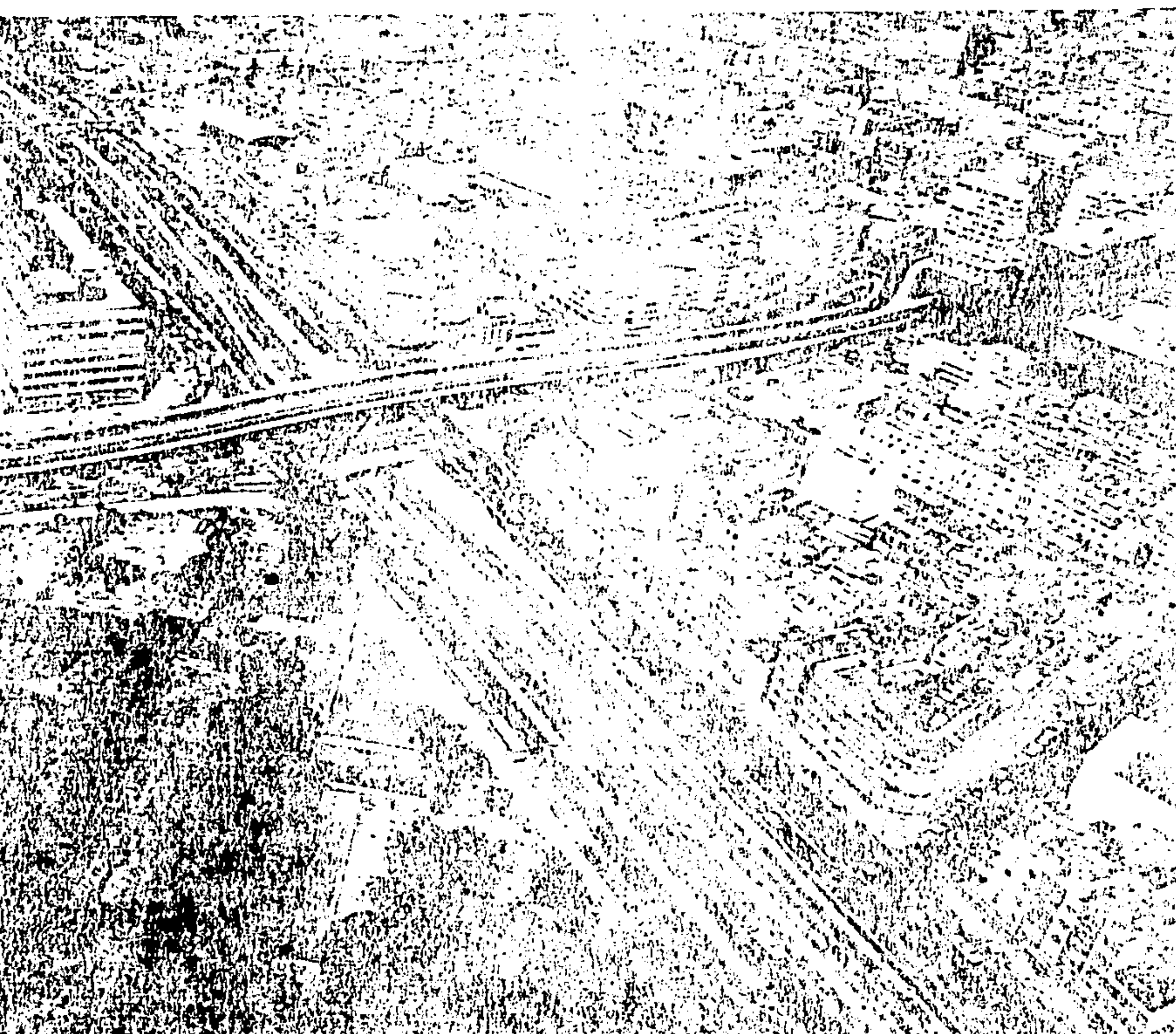
$$P(F \leq f) = \int_0^{f} g_1(\omega)\,d\omega$$

para valores selectos de m, n y f.



APENDICE 5

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE CONCEPTO UTILIZADO EN LOS MODELOS DE MAXIMA ENTROPIA.



INTRODUCCION

Los problemas donde se investigan los puntos máximos o mínimos sujetos a restricciones, frecuentemente implican dificultades de magnitud tal que superan a todos los métodos de solución al presente conocidos: no se sabe como resolver los problemas de Optimización restrigida planteados en su plena generalidad. Cuando los conjuntos de ecuaciones restrictoras dan lugar a intersecciones de estructura muy sencilla se cuenta con procedimientos especiales de solución entre los que destaca el Método de los multiplicadores de Lagrange, el cual se enuncia, se explica y ejemplifica; pero se soslaya su demostración porque como es un resultado importante del análisis matemático, requiere antecedentes no contemplados en este trabajo.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

PROBLEMA IMPORTANTE.

Hallar los puntos máximos o mínimos de la función $f(x,y)$ cuando las dos variables x,y no son mutuamente independientes; sino se encuentran relacionadas por la condición adicional $F(x,y) = 0$.

Solución:

Con la finalidad de aclarar el tratamiento analítico, se recurre a la interpretación geométrica. Se supone que la ecuación $F(x,y) = 0$ representada en la fig. A5.1 es una curva en el plano XY que no presenta singularidades. Además, la familia de curvas $f(x,y) = c =$ constante, cubre cierta región del plano como se indica en la gráfica. Con estas hipótesis, el problema se plantea del modo siguiente: entre las curvas de la familia $f(x,y) = c$, que cortan a la curva $F(x,y) = 0$, determinar uno de estos lugares geométricos que satisfaga la condición de que el parámetro c tenga el mayor o el menor valor posible.

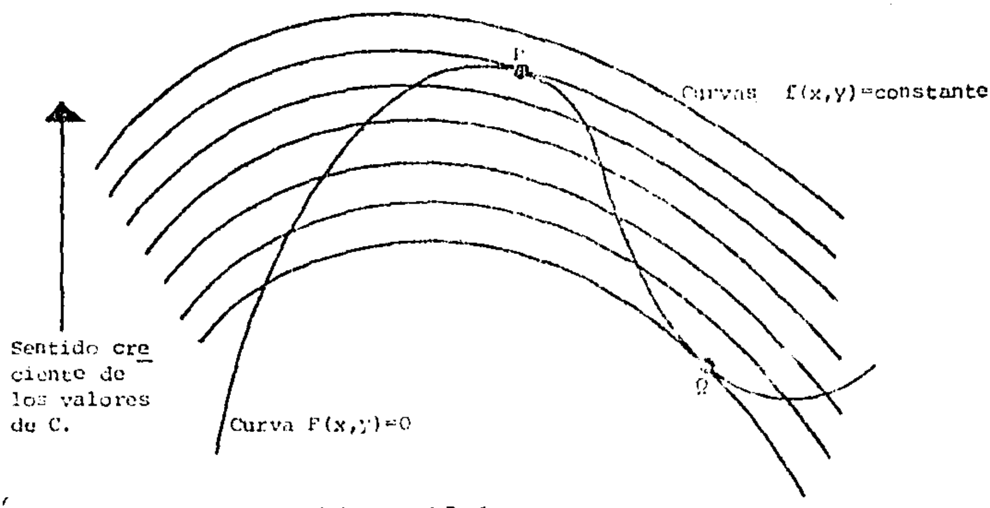


Figura A5.1

De aceptar la hipótesis de la monotonía en los cambios de c, al ir describiendo la curva $F(x,y) = 0$, a través de las curvas $f(x,y) = c$, se van encontrando valores cada vez más y más grandes de c, pero hay un punto P donde al seguir la trayectoria descrita por $F(x,y) = 0$. el valor de c principia a disminuir, en resúmen, si bien antes de llegar a P se van encontrando valores cada vez más grandes de c hasta llegar a P, inmediatamente después de P se van obteniendo valores cada vez menores de c; es claro que en este caso en el punto P es donde c toma su mayor valor, respecto a puntos cercanos a P, al mismo tiempo que se satisface la ecuación $F(x,y) = 0$. Obviamente puede darse el caso recíproco, de ir hallando valores decreciente de c, inmediatamente antes de Q y pasar a valores crecientes de c instantáneamente después de Q; evidentemente en Q toma c su menor valor en las cercanías de Q, al propio tiempo que se llena el requisito $F(x,y) = 0$. En resúmen, en P, c alcanza un máximo local y en Q un mínimo local, a la par que se cumple en ambos puntos la condición $F(x,y) = 0$.

En los dos casos, del máximo o el mínimo locales, las curvas $f(x,y) = c$ y $F(x,y) = 0$ son tangentes, por consiguiente las derivadas de ambas funciones en los puntos P o Q son iguales, así que se tiene:

$$f_x \, dx + f_y \, d_y = 0, \qquad F_x \, dx + F_y \, dy = 0$$

luego:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y} \qquad \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x}{F_y}$$

en consecuencia $\quad \dfrac{f_x}{f_y} = \dfrac{F_x}{F_y} = \dfrac{m \; F_x}{m \; F_y}$

De lo cual se infieren las ecuaciones:

$$f_x = m \; F_x \tag{1}$$

$$f_y = m \; F_y \tag{2}$$

que con la condición

$$F(x,y) = 0 \tag{3}$$

forman un sistema del cual se despejan las coordenadas del punto de tangencia y la constante m.

De lo expuesto se deduce la regla práctica: para hallar los valores de las coordenadas de los puntos óptimos (máximos o mínimos) de la función $f(x,y) = c$, sujetos a la condición adicional $F(x,y) = 0$, se forma la nueva función

$$L(x,y,m) = f(x,y) + m \; F(x,y)$$

en la que las condiciones del óptimo son:

$$L_x = 0, \; L_y = 0, \; L_m = 0$$

FORMA GENERAL DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Los valores máximos o mínimos locales de la función $f(x,y,z,)=c$ sujetos a la condición $F(x,y,z) = 0$, se obtienen por medio de la función auxiliar

$$L(x,y,z,m) = f(x,y,z) + m\,F(x,y,z)$$

de la cual se forman las ecuaciones

$$L_x = 0,\ L_y = 0,\ L_z = 0,\ L_m = 0$$

para calcular las coordenadas de los puntos óptimos y el valor del multiplicador m.

En forma general, si se quieren calcular los valores máximos o mínimos locales de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, sujetos a las condiciones restrictoras $F_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots,$ $F_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$, se forma la función auxiliar:

$$L(\bar{X}, m_1, \ldots, m_p) = f(\bar{X}) + m_1 F_1(\bar{X}) + \ldots + m_p F_p(\bar{X})$$

donde $\bar{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ y se establecen las ecuaciones

$$L_{x_1} = 0, \ldots, L_{x_n} = 0,\ L_{m_1} = 0, \ldots, L_{m_p} = 0$$

para calcular $x_1, \ldots, x_n, m_1, \ldots, m_p$ de los puntos óptimos.

EJEMPLO 1.

Calcule las distancias máximas o mínimas del orígen a los puntos de la curva $xy = 1$.

Solución.

El planteamiento del problema es:

Optimice $f(x,y) = x^2 + y^2$

Sujeta a $F(x,y) = xy - 1 = 0.$

Se forma la función

$$L(x,y,m) = x^2 + y^2 + m\,(xy - 1).$$

Se toman sus derivadas parciales

$$L_x = 2x + my = 0, \quad L_y = 2y + mx = 0, \quad L_m = xy - 1 = 0.$$

Se forma el sistema:

$$2x + my = 0 \qquad (1)$$

$$mx + 2y = 0 \qquad (2)$$

$$xy = 1 \qquad (3)$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2mx + m^2 y = 0 \\ \underline{2mx + \quad 4y = 0} \\ (m^2 - 4)\; y = 0 \end{array} \qquad (4)$$

De (4) se deduce $m_1 = 2, \quad m_2 = -2.$

Si $m_1 = 2$, entonces de (1) se infiere $2x + 2y = 0$ por consiguiente:

$$x = -y \qquad (5)$$

De (3) y (5) resulta $-x^2 = 1$ que da valores imaginarios para (x,y) por lo cual se excluye m_1.

Si $m_2 = -2$, entonces de (1) se infiere $2x - 2y = 0$, en consecuencia:

$$x = y \tag{6}$$

De (3) y (6) se obtiene $x^2 = 1$ por tanto:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1$$

Hay dos soluciones $P(1,1)$ y $Q(-1,-1)$, así que las distancias pedidas valen:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2}, \quad \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{2}$$

EJEMPLO 2 .

Determinar los valores óptimos relativos de la función $f(x,y) = xy$ sobre el círculo de radio 1.

Solución .

Se forma la función $L = xy + m\,(x^2 + y^2 - 1)$

Las condiciones de los óptimos son:

$$L_x = y + 2mx\,, \quad L_y = x + 2my\,, \quad L_m = x^2 + y^2 - 1\,.$$

Se forma el sistema:

$$y + 2mx = 0 \tag{1}$$

$$2my + x = 0 \tag{2}$$

$$y^2 + x^2 = 1 \tag{3}$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$\begin{array}{r} 2my + 4m^2x = 0 \\ \underline{2my + \quad x = 0} \\ (4m^2 - 1)\ x = 0 \end{array} \qquad (4)$$

Como x no puede ser cero, porque de serlo, $y = 0$ y la ecuación (3) resulta absurda, por consiguiente:

$$4m^2 = 1, \quad \text{o bien,} \quad m_1 = +\frac{1}{2}, \quad m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Si $m_1 = \frac{1}{2}$ de (1) se infiere $y + 2\left(\frac{1}{2}\right) x = 0$, $y = -x$, solución que satisface a (2), y de (3) se concluye:

$$x^2 + x^2 = 1; \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

en consecuencia $y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En esta forma se han obtenido dos puntos solución:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Análogamente, si $m_2 = -\frac{1}{2}$ de (1) resulta $y = x$ solución que satisface a (2), y de (3) se obtiene:

$$x^2 + x^2 = 1, \qquad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De este modo se han encontrado los otros dos puntos solución:

$$P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

De esto se infiere que $f(P_1) = -\frac{1}{2}$, $f(P_2) = -\frac{1}{2}$, $f(P_3) = \frac{1}{2}$, $f(P_4) = \frac{1}{2}$, de lo cual se concluye que en P_1 y P_2 existe un valor mínimo de f y en P_3 y P_4 un máximo.

EJEMPLO 5

Calcule la distancia más corta de la hipérbola

$$x^2 + 8xy + 7y^2 = 225, \quad Z = 0$$

al orígen.

Solución.

El problema puede plantearse en la forma

Minimizar $f(x,y) = x^2 + y^2$

Sujeta a: $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

Se forma la función:

$$L(x,y,m) = x^2 + y^2 + m\,(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225).$$

Se calculan sus derivadas parciales y se igualan a cero:

$$L_x = 2x + 2mx + 8ym = 2\,(1+m)\,x + 8my = 0 \qquad (1)$$

$$L_y = 2y + 8mx + 14\,ym = 8mx + 2\,(1+7m)\,y = 0 \qquad (2)$$

$$L_m = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0 \qquad (3)$$

De la ecuación (3) se advierte la inaceptabilidad de la solución trivial $x = 0$, $y = 0$, por consiguiente la necesidad de una solución distinta a la trivial en el sistema homogéneo (1), (2) requiere que su determinante sea cero,

$$\begin{vmatrix} 2(1+m), & 8m \\ 8m, & 2(1+7m) \end{vmatrix} = 0$$

o bien:
$$4(1+m)(1+7m) - 64m^2 = 0$$
$$4(1+m+7m+7m^2) - 64m^2 = 0$$
$$1+8m+7m^2 - 16m^2 = 0$$
$$-9m^2 + 8m + 1 = 0 \qquad (4)$$

De (4) resulta $m_1 = 1$, $m_2 = -\frac{1}{9}$.

Si $m_1 = 1$, entonces (1) y (2) se convierten respectivamente en:

$$4x + 8y = 0, \quad 8x + 16y = 0, \quad \text{o bien}, \quad x = -2y.$$

Si este valor se lleva a (3) se obtiene:

$$4y^2 + 8(-2y)y + 7y^2 - 225 = 4y^2 - 16y^2 + 7y^2 - 225 = 0$$

y simplificando $-5y^2 - 225 = 0$,

ecuación que no se satisface para ningún valor real de y, consecuentemente se rechaza $m = 1$.

Si $m = -\frac{1}{9}$, entonces de (1) y (2) se obtiene respectivamente:

$$2x\left(\frac{9}{9} - \frac{1}{9}\right) + 8\left(-\frac{1}{9}\right)y = 0, \quad 8\left(\frac{1}{9}\right)x + 2\left(\frac{9}{9} - \frac{7}{9}\right)y = 0; \text{ de}$$

ambas, $y = 2x$ valor que sustituido en (3) ocasiona la ecuación $x^2 + 8x(2x) + 7(4x^2) - 225 = 0$ que simplificada es $45x^2 = 225$, o bien, $x^2 = 5$, consecuentemente se obtienen los puntos solución:

$$P\left(+\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}\right), \quad Q\left(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}\right)$$

El mínimo de la función propuesta, para ambos puntos, es $d = 25$.

EJEMPLO 4.

Minimizar $f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_1x_2 + 4x_2$

Sujeta a: $x_1^2 + x = 3, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Solución.

Se forma $F = -3x_1 + x_1x_2 + 4x_2 - m\left[x_1^2 + x - 3\right]$.

Ahora se calculan las derivadas parciales y se igualan a cero,

$$F_{x_1} = -3 + x_2 - 2mx_1 = 0 \qquad (1)$$

$$F_{x_2} = 4 + x_1 - m = 0 \qquad (2)$$

$$F_m = x_1^2 + x_2 - 3 = 0 \qquad (3)$$

De (2), $x_1 = m - 4$, por lo que de (1):

$$x_2 = 2m\,(m-4) + 3$$

Si estos valores se sustituyen en (3) se obtiene:

$$(m-4)^2 + 2m\,(m-4) + 3 - 3 = 0$$

$$(m-4)\,[m - 4 + 2m] = 0.$$

por consiguiente:

$$m_1 = 4, \quad m_2 = \frac{4}{3}$$

Si $m = \frac{4}{3}$, entonces $x_1 = \frac{4}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{8}{3}$. Por las restriccio nes de no negatividad se rechaza esta posibilidad.

Si $m = 4$, entonces $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

Al analizar las variaciones del valor de f en la vecindad $(0 \pm 1,\ 3 \pm 1)$ resulta

$$
\begin{aligned}
f(1,2) &= -3\,(1) + (1)\,2 + 4\,(2) = 7\\
f(1,3) &= -3\,(1) + (1)\,3 + 4\,(3) = 12\\
f(1,4) &= -3\,(1) + (1)\,4 + 4\,(4) = 17\\
f(0,2) &= 4\,(2) = 8\\
f(0,3) &= 4\,(3) = 12\\
f(0,4) &= 4\,(4) = 16\\
f(-1,2) &= -3\,(-1) + (-1)\,2 + 4(2) = 9\\
f(-1,3) &= -3\,(-1) + (-1)\,3 + 4(3) = 12\\
f(-1,4) &= -3\,(-1) + (-1)\,4 + 4(4) = 15
\end{aligned}
$$

En general $f(a,\ 3+b) = 12 + b\,(4+a)$, resultado donde se ad vierte que en las rectas $a = -4$ ó $b = 0$, la función f toma el valor constante de 12. Al graficar los valores de f se obtiene la sugestiva figura A5.2.

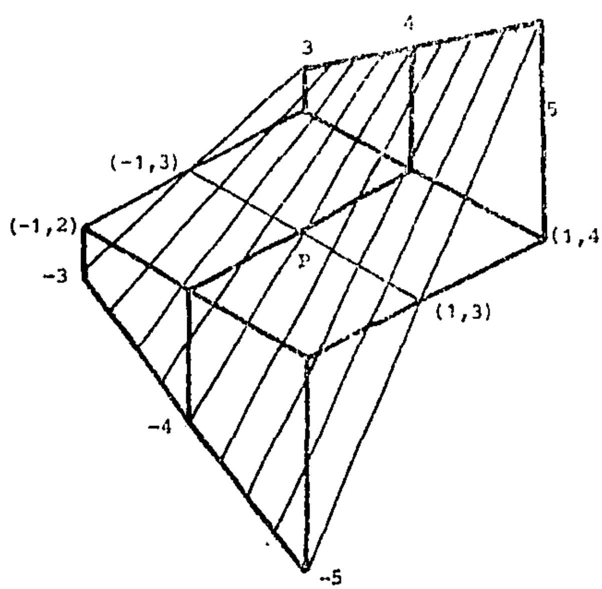


Figura A5.2.

Con claridad muestra que el punto $P(0,3)$ es un punto silla.

EJEMPLO 5.

Optimizar $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Sujeta a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$px + qy + rz = 0$$

Solución.

Se forma la función:

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + m_1 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) +$$

$$+ m_2 (px + qy + rz) = 0.$$

En seguida se toman las derivadas parciales y se igualan a cero:

$$L_x = 2x + \frac{2\ m_1}{a^2}\ x + p\ m_2 = 2\left(1 + \frac{m_1}{a^2}\right) x + p\ m_2 = 0 \qquad (1)$$

$$L_y = 2y + \frac{2\ m_1}{b^2}\ y + q\ m_2 = 2\left(1 + \frac{m_1}{b^2}\right) y + q\ m_2 = 0 \qquad (2)$$

$$L_z = 2z + \frac{2\ m_1}{c^2}\ z + r\ m_2 = 2\left(1 + \frac{m_1}{c^2}\right) z + r\ m_2 = 0 \qquad (3)$$

$$L_{m_1} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (4)$$

$$L_{m_2} = px + qy + rz = 0 \qquad (5)$$

De (1), (2) y (3) se infiere:

$$x = \frac{-pa^2 m_2}{2(a^2+m_1)}, \quad y = \frac{-qb^2 m_2}{2(b^2+m_1)}, \quad z = \frac{-rc^2 m_2}{2(c^2+m_1)} \qquad (6)$$

De (6) y (5) se concluye:

$$\left[\frac{p^2 a^2}{a^2+m_1} + \frac{q^2 b^2}{b^2+m_1} + \frac{r^2 c^2}{c^2+m_1}\right] \frac{m_2}{2} = 0 \qquad (7)$$

De (6) y (4) se obtiene:

$$\left[\frac{p^2 a^2}{(a^2+m_1)^2} + \frac{q^2 b^2}{(b^2+m_1)^2} + \frac{r^2 c^2}{(c^2+m_1)^2}\right] \frac{m_2^2}{4} = 1 \qquad (8)$$

Si $m_2 = 0$ la ecuación (8) resulta absurda, luego de (7)

$$p^2a^2(b^2+m_1)(c^2+m_1)+q^2b^2(a^2+m_1)(c^2+m_1)+r^2c^2(a^2+m_1)(b^2+m_1) = 0$$

como:

$$p^2a^2(b^2+m_1)(c^2+m_1)=p^2a^2(b^2c^2)+p^2a^2(b^2+c^2)m_1+p^2a^2m_1^2$$

$$q^2b^2(a^2+m_1)(c^2+m_1)=q^2b^2(a^2c^2)+q^2b^2(a^2+c^2)m_1+q^2b^2m_1^2$$

$$r^2c^2(a^2+m_1)(b^2+m_1)=r^2c^2(a^2b^2)+r^2c^2(a^2+b^2)m_1+r^2c^2m_1^2$$

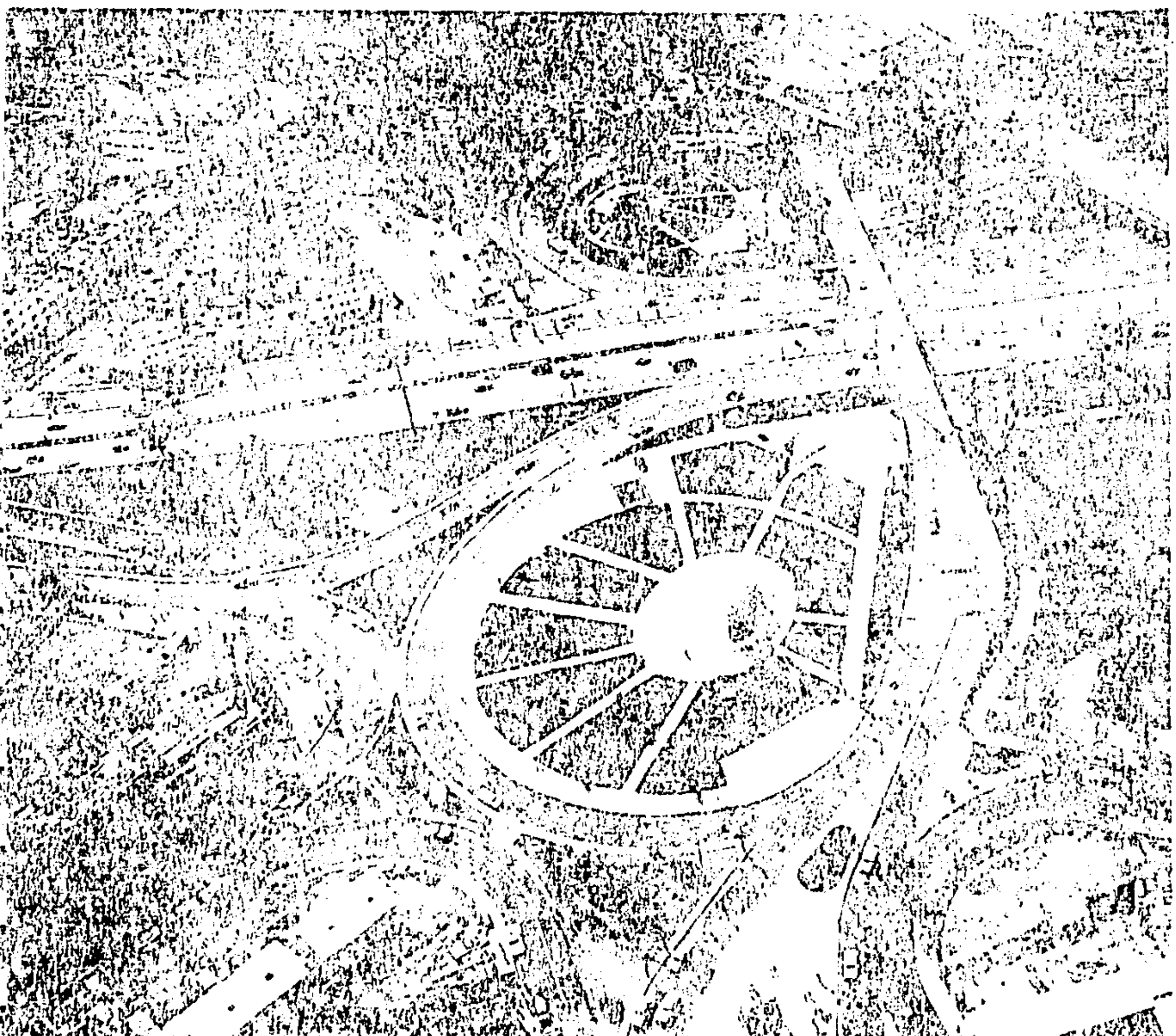
por consiguiente:

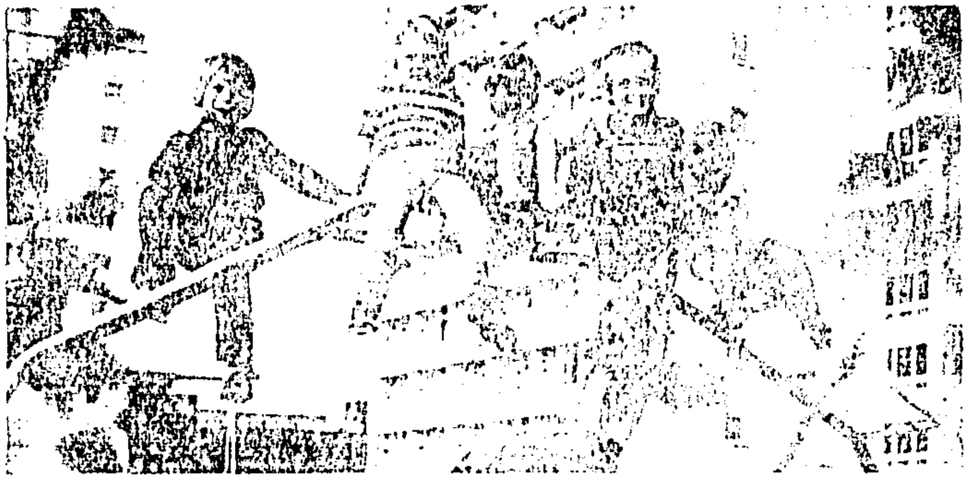
$$(p^2+q^2+r^2)a^2b^2c^2+\left[p^2a^2(b^2+c^2)+q^2b^2(a^2+c^2)+r^2c^2(a^2+b^2)\right]m_1+$$
$$+(p^2a^2+q^2b^2+r^2c^2)m_1^2=0 \qquad (9)$$

Ahora de (8) se obtiene:

$$m^2 = \frac{4(a^2+m_1)^2(b^2+m_1)^2(c^2+m_1)^2}{p^2a^2(b^2+m_1)^2(c^2+m_1)^2+q^2b^2(a^2+m_1)^2(c^2+m_1)^2+r^2c^2(a^2+m_1)^2(b^2+a_1^2)} \tag{10}$$

El sistema (6), (9) y (10) resuelve el problema.





CONCLUSIONES

OPCIONES PARA EL FUTURO

...mañana es el año 2000...

A través del análisis de la situación actual y del estado del arte en la modelación de sistemas urbanos, se llegó a las siguientes conclusiones generales:

1. Las políticas demagógicas de la actualidad sólo empeorarán la situación.

2. Es necesario tomar medidas de emergencia. Si esperamos a que la crisis se presente, podría ser demasiado tarde.

3. La solución a la problemática urbana solamente puede lograrse en un contexto de amplia cooperación internacional, debido a que las situaciones de mayor gravedad se presentarán en los países subdesarrollados, pero sus consecuencias tendrán repercusiones a nivel mundial.

4. Las enormes cantidades de dinero que se consumen anualmente en armamento para aumentar la llamada "seguridad nacional" de los países, tiene paradojicamente como resultado un mundo cada vez más inseguro.

5. Este capital puede y debe ser utilizado para proporcionar niveles de vida más altos para el 100% de la humanidad y no sólo para unos cuantos.

6. Para lograr esto, es necesaria una revolución. Si la revolución es mediante las armas, sólo tendría un final sangriento. Es necesario que el cambio se obtenga mediante una revolución en la ciencia del diseño y de la planeación.

7. Algunas de las oportunidades más prometedoras aparecen en las áreas siguientes:

   a. Utilización de las fuentes de energía libre: solar, eólica, etc.

b. Desarrollo de nueva tecnología para el transporte urbano.

c. Desarrollo de la tecnología de los alimentos (hidroponia, por ejemplo).

d. Aprovechamiento de los desechos producidos por las fuentes contaminantes.

e. Inovaciones en la industria de la construcción: prefabricación y técnicas de auto-construcción de viviendas.

f. Utilización de los modernos medios de comunicación y procesamiento de información con fines educativos y de capacitación técnica.

8. Sin embargo, se debe considerar que uno de los aspectos más importantes en la solución del problema urbano (especialmente en los países subdesarrollados), es la modificación de la organización espacial de las grandes ciudades. Los patrones de crecimiento urbano deben orientarse hacia la formación de múltiples núcleos autosuficientes (villas y submetrópolis) para evitar que se haga necesario extender las redes de transporte y de servicios, de manera indefinida.

9. Esto puede lograrse mediante macrocontroles que regulen la interacción entre el uso del suelo y el transporte urbano. El instrumento de planeación para encontrar los controles más adecuados, son los modelos de simulación, que son el foco de interés de este trabajo.

10. El diseño de estos modelos debe siempre contemplarse dentro del contexto general del proceso de planeación, para que puedan integrarse con las demás técnicas invo

lucradas.

La planeación urbana no puede llevarse a cabo solamente con un instrumento, es necesario contar con un verdadero sistema de métodos y técnicas que se retroalimenten unos con otros.

11. Debe ponerse énfasis en el problema de la recolección de información. Generalmente, es uno de los aspectos más lentos y costosos del proceso, pero hay que recordar que los resultados que se obtienen dependen de la calidad de la información proporcionada.

12. Es necesario dar mayor importancia a la investigación urbana para desarrollar teorías más sólidas acerca del comportamiento y la dinámica de los sistemas urbanos. Hasta el momento, los intentos de modelación que se han hecho en los países en vías de desarrollo, han estado basados en teorías provenientes de los países desarrollados, las cuales están muy lejos de representar la situación real de nuestra problemática urbana.

13. Con respecto a la calibración de los modelos, es necesario lograr un balance entre la precisión estadística y la capacidad descriptiva y explicativa de los modelos.

14. Es importante también hacer una combinación de los modelos computarizados y las técnicas de simulación mediante juegos, con el objeto de introducir el factor humano y facilitar las actividades de participación de los ciudadanos y tomadores de decisiones.

15. Se deben aprovechar más ampliamente las ventajas que ofrecen las computadoras modernas para el análisis interactivo y la representación gráfica, entre otras.

16. Otras medidas complementarias para aumentar la eficiencia del proceso de planeación son las siguientes:

a. Dar modalidades de interés público al suelo urbano. Sancionar la especulación y el alza inmoderada de las rentas. Propugnar el reconocimiento del derecho a la vivienda.

b. Legislar y ofrecer incentivos para frenar la concentración de recursos y la exagerada migración hacia las grandes ciudades.

c. Discutir racionalmente la población en los lugares donde existan suficientesrecursos naturales.

d. Cambiar las patrones regionales de crecimiento mediante la reorientación de las inversiones y la descentralización realista de las actividades económicas, políticas y culturales.

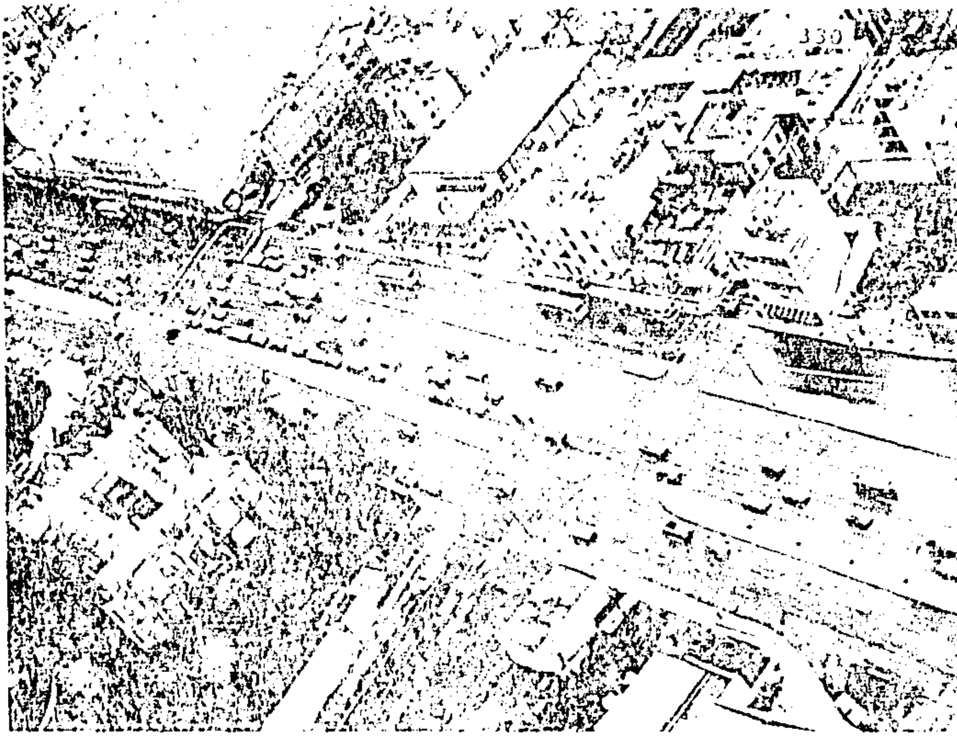
e. Dar el mayor impulso posible al sector agropecuario y pesquero.

f. En las áreas urbanas, hacer un uso más racional de los automóviles y enfatizar el desarrollo de los sistemas de transporte colectivo.

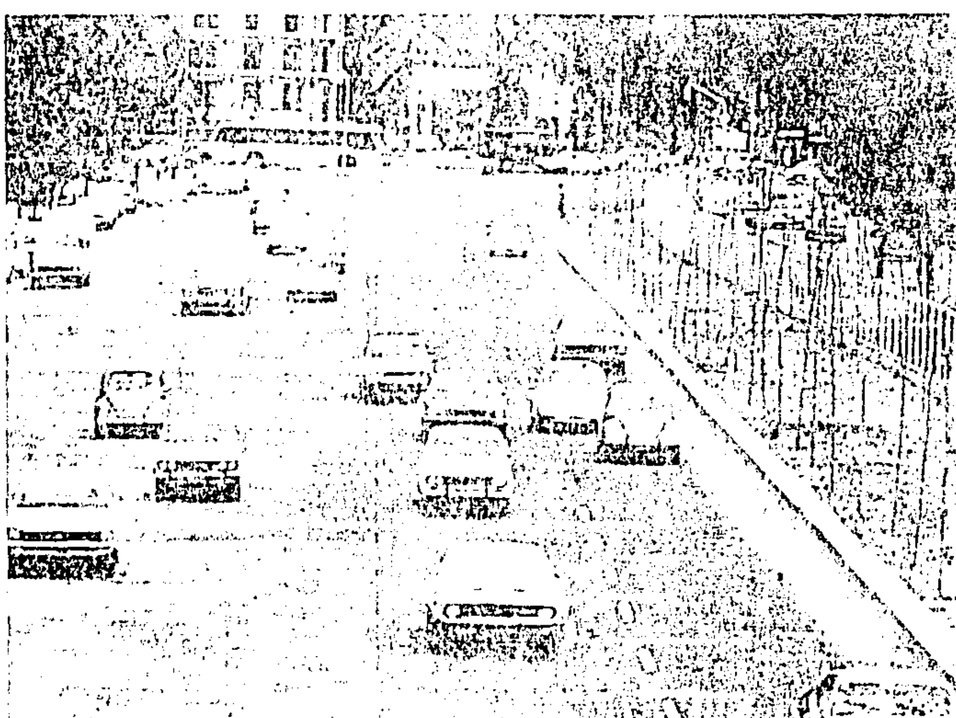
g. Crear gobiernos a escala metropolitana, para facilitar la coordinación en la toma de decisiones y los programas de inversión pública.

h. Reforzar la participación ciudadana. Institucionalizar el referendum y la consulta popular en la toma de decisiones.

i. Combatir en forma más decidida la descarada corrup ción gubernamental que se engendra en los niveles más altos de la administración pública, para evitar que la obra pública sea el "negocio" de unos cuantos.



BIBLIOGRAFIA



BIBLIOGRAFIA

Por orden alfabético de autores.

1. Redesigning the future.
Ackoff, Rusell L.
John Wiley and sons. 1974.

2. Urban fields
Angel, S., Hyman, G.M.
Pion Limited, 1976.

3. Calculus. Volume II.
Apostol, Tom M.
Blaisdell Publishing Company, 1967.

4. Urban modelling.
Algorithms, calibrations and predictions.
Batty, Michael.
Cambridge University Press, 1976.

5. The task ahead for the cities of the developing countries.
Beier, George.
International Bank for Reconstruction and Development, 1975.

6. Selected readings in quantitative urban analysis.
Bernstein, Samuel; Mellon, Giles M.
Pergamon Press, 1978.

7. Empirical models of urban land use: Suggestions on research objectives and organization.
Brown, H. James; Ginn, Royce J.; James, Franklin; Kain, John F.; Straszheim, Mahlon.
National Bureau of Economic Research, 1972.

8. Differential and integral calculus.
Courant, R.
Interscience Publishers, Inc.

9. CLUG.
Community Land Use Game
Feldt, Allan G.
The Free Press, 1972.

10. Urban Dynamics.
Forrester, Jay W.
The MIT Press, 1969.

11. Introduction to Statistical Mechanics.
Gurney, Ronald.
Mc Graw Hill Book Company, Inc.

12. The use of computer simulation models for policy analysis.
Kain, John F.
Policy note P77-6.
Department of City and Regional Planning.
Harvard University.

13. LAB-LOG
Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis.
Harvard University, 1981.

14. Thermodynamics
Newton Lewis, Gilbert; Randall, Merle; Brewer, Leo.
Mc Graw Hill Book Company, Inc.

15. Issues in Urban Economics.
Perloff, Harvey S.; Wingo, Lowdon.
John Hopkins Press, 1968.

16. Laboratory testing of predictive land use models.
Putman, Stephen H.
U.S. Department of Transportation, 1976.

17. Preliminary results from an integrated transportation and land use models package.
Putman, Stephen H.
Transportation 3,
Elsevier Scientific Publishing Company, 1974.

18. The interrelationships of transportation development and land development.
Putman, Stephen H.
U.S. Department of Transportation, 1976.

19. Urban land use and transportation models. A state of the art summary.
Putman, Stephen H.
Transportation Res. Vol. 9
Pergamon Press, 1975.

20. Computers in Urban Planning.
Steger, Wilbur A.
Auerbach Publishers, Inc., 1981.

21. Entropy in urban and regional modelling.
Wilson, Allan, G.
Pion Limited, 1970.

22. Papers in urban and regional analysis
Wilson, Allan G.
Pion Limited, 1972.

23. Patterns and processes in urban and regional systems.
Wilson, Allan G.
Pion Limited, 1972.

24. Urban and regional models in Geography and Planning.
Wilson, Allan G.
John Wiley and sons., 1974.